H_0: Этот листочек — простой

Проверка гипотез

Замечание. Критерий $R_{n,\alpha}$ (n — размер выборки) называется *асимптотическим уровня значимости* α, если $\forall \mathsf{P} \in \mathcal{P}_0\colon\ \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathsf{P}(X \in R_{n,\alpha}) \le \alpha$.

1. Партия в преферанс предназначена для трёх игроков, каждому из которых раздаётся случайным образом по 10 карт, а остальные 2 карты скидываются в прикуп (итого, 32 карты — от семёрок до тузов). Двое игроков заметили, что третьему за 100 партий на руки выпал хотя бы один туз 87 раз. На уровне значимости 0.01 проверьте гипотезу о том, что он играет честно, против альтернативы, что он подмешивает себе тузов, с помощью какого-то критерия (быть может асимптотического).

2. Случайно равновероятно возьмём M — произвольного человека из некоторой страны (какой — мы не знаем) и поставим на проверку гипотезу $H_0\colon M$ — американец. Критерий предлагается построить на основе его профессии, возьмём множество

$$R = \{m \in \{\text{Люди}\}\colon m \text{ — конгрессмен}\}.$$

Очевидно, при верности H_0 вероятность $\mathsf{P}_0(M \in R)$ крайне мала, поэтому данный критерий обладает разумным уровнем значимости, например, $\alpha = 0.01$. Таким образом, если случайный человек оказался конгрессменом, то в соответствии с критерием мы должны отклонить гипотезу H_0. Всё ли корректно в данной процедуре? Стоит ли её применять в реальной жизни?

3. Имеется выборка $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$. Проверяется гипотеза $H_0\colon \mu = 0$ с помощью стандартной статистики Вальда $T(\mathbf{X}) = \overline{\mathbf{X}}$. Чтобы повысить мощность критерия, аналитик решил схитрить: сначала он смотрит на знак полученного среднего, и если значение получилось положительным, то он берёт правосторонний критерий $\{T(\mathbf{x}) \ge c_\alpha\}$ уровня α против альтернативы $H_1\colon \mu > 0$. В ином случае он проверяет гипотезу левосторонним критерием $\{T(\mathbf{x}) \le c_\alpha\}$, который обычно используют при альтернативе $H_2\colon \mu < 0$. Насколько корректна данная процедура? Какая ошибка I рода может достигаться при таком алгоритме проверки?

4. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Предложите (не асимптотический) критерий для проверки гипотезы $H_0\colon a = 0$.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — две независимые выборки из $\mathbb{R}_+$ со средними μ_1, μ_2 и дисперсиями σ_1^2, σ_2^2 соответственно (все параметры неизвестны). Покажите, что $\overline{X}/\overline{Y}$ является асимптотически нормальной оценкой μ_1/μ_2 и на основании этой статистики постройте асимптотический критерий для проверки гипотезы $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$. Чем может быть полезен такой способ проверки?

6*. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из $\mathrm{Bern}(\theta)$, и ставится на проверку гипотеза $H_0\colon \theta = 1/2$. Представим, что данные не имеются сразу на руках, а подаются последовательно. Нетерпеливый аналитик не хочет долго ждать, поэтому он осуществляет проверку следующим образом: после получения очередного элемента X_k он строит критерий Вальда уровня значимости α для выборки $X_1, \ldots, X_k$ и отвергает H_0, если для этого критерия имеет место отвержение. Если же после получения всей выборки отвержений так и не было, то H_0 принимается. Контролируется ли в данной процедуре ошибка I рода на уровне α? К чему будет стремиться ошибка I рода при $n \to \infty$?