

## Слова излишни...

*Достаточные статистики*

1. Для семейства распределений  $\mathcal{P} = \{\text{Beta}(\alpha, \beta) : \alpha, \beta > 0\}$  предъявите достаточную статистику размерности 2.
2. Не всякой статистикой  $T(\mathbf{X})$  можно улучшать оценки посредством взятия УМО — в этом и заключается особенность достаточных статистик. Для выборки  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(a, 1)$  приведите пример НЕдостаточной статистики  $T(\mathbf{X})$  такой, что  $E_a(\bar{\mathbf{X}}|T(\mathbf{X}))$  зависит от неизвестного  $a$ , а значит, не является статистикой.
3. Докажите, что статистика  $X_{(1)}$  для выборки  $X_1, \dots, X_n$  в модели сдвига  $\mathcal{P} = \{\text{Exp}(1) + a : a \in \mathbb{R}\}$  является полной и достаточной. Постройте с помощью неё оптимальную оценку параметра  $a$ .
4. Найдите оптимальную оценку функции  $e^{-\theta}$  для выборки  $X_1, \dots, X_n$  из распределения  $\text{Pois}(\theta)$ .

*Замечание.* Для проверки полноты можно воспользоваться достаточным условием (см. методичку).

- 5\*. Достаточная статистика  $S(\mathbf{X})$  называется *минимальной*, если для любой другой достаточной статистики  $T(\mathbf{X})$  найдётся борелевская  $\varphi$  такая, что  $S = \varphi \circ T$  (или, что то же самое,  $\sigma(S) \subset \sigma(T)$ ). Докажите, что  $S(\mathbf{X})$  является минимальной достаточной статистикой тогда и только тогда, когда

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}: \left( S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{y}) \iff \frac{\rho_\theta(\mathbf{x})}{\rho_\theta(\mathbf{y})} \equiv \text{const} \right),$$

где  $\rho_\theta(\mathbf{x})$  — совместная плотность выборки.

- 6\*. Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_{10}$  — н.о.р.с.в. из распределения  $U[0; 11]$ . Обозначим  $X = \min(\xi_1, \dots, \xi_{10})$ ,  $Y = \max(\xi_1, \dots, \xi_{10})$ . С помощью арсенала достаточных статистик найдите  $D(X - 4Y)$  (решения «в лоб» не принимаются).