

Врата ада манят любопытных

Оценки и их свойства

1. Пусть $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из $\text{Exp}(\theta)$. Для какой функции от параметра θ оценка $e^{-\bar{\mathbf{X}}^2}$ будет состоятельной? Является ли она при этом несмещённой? А асимптотически нормальной?
2. Найдите константу C такую, что статистика $C \sum_{i=1}^n |X_{2i-1} - X_{2i}|$ является несмещённой оценкой параметра σ , где $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{2n})$ — выборка из $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Покажите, что она также будет асимптотически нормальной, и найдите её асимптотическую дисперсию.
3. Пусть выборка $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ пришла из распределения со средним μ , дисперсией σ^2 и конечным четвёртым моментом. При каком условии предельное распределение случайного вектора

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ s^2(\mathbf{X}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \right)$$

имеет независимые компоненты?

4. Постройте несмещённую асимптотически нормальную оценку для параметра $e^{-\theta}$ с помощью выборки $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения $\text{Pois}(\theta)$, где $\theta > 0$, и найдите её асимптотическую дисперсию.
5. Оценка $\hat{\theta}_n(\mathbf{X})$ параметра θ называется *асимптотически несмещённой*, если $\forall \theta: \mathbf{E}_{\theta} \hat{\theta}_n \rightarrow \theta$. Докажите, что асимптотически несмещённая оценка со стремящейся к нулю дисперсией является состоятельной.
6. Предложите какую-нибудь модель и состоятельную оценку параметра в ней, которая не является асимптотически нормальной.

Замечание. Считаем константу нормально распределённой с дисперсией 0.

- 7*. Пусть $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из распределения со средним $\mu \neq 0$ и конечной дисперсией. Известно, что плотность распределения X_1 больше некоторого $c > 0$ в окрестности нуля. Покажите, что $\bar{\mathbf{X}}^{-1}$ является асимптотически нормальной оценкой $1/\mu$, но при этом $\mathbf{E}_{\mu} |\bar{\mathbf{X}}^{-1}| = \infty$.
- 8*. Пусть $G(n, p)$ — случайный граф в модели Эрдеша-Реньи (каждое ребро берётся независимо от других с вероятностью p). Найдите какую-нибудь сильно состоятельную оценку параметра p как функцию от числа треугольников в графе.