Стоять, θ! Вы окружены! Наверное...

Доверительные интервалы

Чертоги разума

Определение. *Доверительным интервалом уровня доверия* γ для функции $\tau(\theta)$ называется пара статистик $(T_1(\mathbf{X}), T_2(\mathbf{X}))$ такая, что

$$\forall \theta \in \Theta\colon\ \mathsf{P}_\theta\left(T_1(\mathbf{X}) \leqslant \tau(\theta) \leqslant T_2(\mathbf{X})\right) \geqslant \gamma.$$

Если вероятность выше равна γ, то ДИ называется *точным.*
Пара статистик $(T_1^{(n)}(\mathbf{X}), T_2^{(n)}(\mathbf{X}))$ называется *асимптотическим доверительным интервалом*, если неравенство выше выполнено в пределе:

$$\forall \theta \in \Theta\colon\ \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}_\theta\left(T_1^{(n)}(\mathbf{X}) \leqslant \tau(\theta) \leqslant T_2^{(n)}(\mathbf{X})\right) \geqslant \gamma.$$

Цель. Научиться строить ДИ хотя бы асимптотические, но лучше «честные», причём желательно с как можно меньшей длиной.
Метод центральной статистики (функции).
Придумать функцию $G(\mathbf{x}, \theta)$, для которой

1. распределение $G(\mathbf{X}, \theta)$ не зависит от θ для всех $\theta \in \Theta$;
2. при каждом $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функция $g(\mathbf{x}, \theta)$ непрерывна и строго возрастает по θ.

Такая функция называется *центральная.* Если обозначить за x_p p-квантиль распределения $G(\mathbf{x}, \theta)$, то получим точный интервал у.д. $p_2 - p_1$:

$$\mathsf{P}_\theta\left(G_{\mathbf{X}}^{-1}(x_{p_1}) \leqslant \theta \leqslant G_{\mathbf{X}}^{-1}(x_{p_2})\right) = \mathsf{P}_\theta\left(x_{p_1} \leqslant G(\mathbf{X}, \theta) \leqslant x_{p_2}\right) = p_2 - p_1.$$

Использование асимп. нормальных оценок.
Пусть $\widehat{\theta}$ — асимп. норм. оценка θ с асимп. дисперсией $\sigma^2(\theta) > 0$, а $\widehat{\sigma}^2$ — состоятельная оценка $\sigma^2(\theta)$. Тогда по лемме Слуцкого

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\widehat{\theta} - \theta}{\widehat{\sigma}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\widehat{\theta} - \theta}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\widehat{\sigma}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Пусть $z_p = \Phi^{-1}(p)$ — p-квантиль $\mathcal{N}(0,1)$. Тогда из сходимости выше получаем асимп. ДИ у.д. $p_2 - p_1$:

$$\mathsf{P}_\theta\left(\widehat{\theta} - \frac{z_{p_2}\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leqslant \theta \leqslant \widehat{\theta} - \frac{z_{p_1}\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = \mathsf{P}_\theta\left(z_{p_1} \leqslant \sqrt{n} \cdot \frac{\widehat{\theta} - \theta}{\widehat{\sigma}} \leqslant z_{p_2}\right) = p_2 - p_1.$$

В обоих методах p_1 и p_2 подбирают так, чтобы $p_2 - p_1 = \gamma$, а интервал был как можно короче.

Problèmes

1. По выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распределения **(а)** $\mathrm{U}(0, \theta)$; **(б)** $\mathcal{N}(\theta, \theta^2)$ постройте точный доверительный интервал уровня доверия γ для параметра $\theta > 0$.

2. По выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распределения **(а)** $\mathrm{Bern}(\theta)$; **(б)** χ^2_θ постройте асимпт. доверительный интервал уровня доверия γ для параметра θ.

Напоминание. $\chi^2_m = \Gamma(m/2, 1/2)$ — это распределение суммы квадратов m независимых с.в. с распределением $\mathcal{N}(0,1)$. Из-за связи с гамма-распределением θ в задаче выше необязательно целое.

3. На семинаре обсуждалось, что при построении асимпт. ДИ замена асимпт. дисперсии на её оценку дополнительно загрубляет итоговый интервал. Попробуем сделать так, чтобы её не пришлось оценивать.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $\mathrm{Bern}(p)$. Подберите функцию $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так, чтобы $h(\overline{\mathbf{X}})$ была асимпт. нормальной оценкой $h(p)$ с константной (то есть независящей от p) асимпт. дисперсией и постройте на основе этой статисткики асимпт. доверительный интервал для параметра p уровня доверия γ. Подумайте, чем ещё этот интервал может быть полезен.

4. (Теорема Фишера) Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $S^2(\mathbf{X})$ — несмещённая выборочная дисперсия. Покажите, что: **(а)** $\overline{\mathbf{X}} \perp\!\!\!\perp S^2(\mathbf{X})$; **(б)** $(n-1)S^2(\mathbf{X})/\sigma^2 \stackrel{d}{=} \chi^2_{n-1}$.

Следствие.

Таким образом, статистика $\sqrt{n} \cdot \dfrac{\overline{X} - a}{S(\mathbf{X})}$, которая по распределению сходится к $\mathcal{N}(0,1)$, можно представить как частное независимых с. в., $\dfrac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}}$. Такое распределение называют распределением Стьюдента с $n-1$ степенью свободы, T_{n-1}. Соответствующий интервал Стьюдента:

$$\left(\overline{X} - \frac{t_{n-1,(1+\gamma)/2} \cdot S(\mathbf{X})}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{t_{n-1,(1+\gamma)/2} \cdot S(\mathbf{X})}{\sqrt{n}}\right)$$

5. Найдите точную *доверительную область* уровня доверия γ для вектора (a, σ^2) в модели сдвига-масштаба для нормального распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, то есть такое борелевское множество $B(X_1, \ldots, X_n)$ в $\mathbb{R}^2$ (обычно открытое и выпуклое), что

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+ \colon \mathsf{P}_{a,\sigma^2}((a, \sigma^2) \in B) = \gamma.$$

6. Рассмотрим одноэлементную выборку из распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ (оба параметра неизвестны). Приведите пример нетривиального доверительного интервала (можно бесконечного) для параметра σ^2 уровня доверия γ.