

Слова излишни...

Достаточные статистики

1. Для семейства распределений $\mathcal{P} = \{\text{Beta}(\alpha, \beta) : \alpha, \beta > 0\}$ предъявите достаточную статистику размерности 2.

2. Не всякой статистикой $T(\mathbf{X})$ можно улучшать оценки посредством взятия УМО — в этом и заключается особенность достаточных статистик. Для выборки $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(a, 1)$ приведите пример НЕдостаточной статистики $T(\mathbf{X})$ такой, что $E_a(\bar{\mathbf{X}}|T(\mathbf{X}))$ зависит от неизвестного a , а значит, не является статистикой.

3. Докажите, что статистика $X_{(1)}$ для выборки X_1, \dots, X_n в модели сдвига $\mathcal{P} = \{\text{Exp}(1) + a : a \in \mathbb{R}\}$ является полной и достаточной. Постройте с помощью неё оптимальную оценку параметра a .

4. Найдите оптимальную оценку функции $e^{-\theta}$ для выборки X_1, \dots, X_n из распределения $\text{Pois}(\theta)$.

Замечание. Для проверки полноты можно воспользоваться достаточным условием (см. методичку).

5*. Достаточная статистика $S(\mathbf{X})$ называется *минимальной*, если для любой другой достаточной статистики $T(\mathbf{X})$ найдётся борелевская φ такая, что $S = \varphi \circ T$ (или, что то же самое, $\sigma(S) \subset \sigma(T)$). Докажите, что $S(\mathbf{X})$ является минимальной достаточной статистикой тогда и только тогда, когда

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}: \left(S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{y}) \iff \frac{\rho_{\theta}(\mathbf{x})}{\rho_{\theta}(\mathbf{y})} \equiv \text{const} \right),$$

где $\rho_{\theta}(\mathbf{x})$ — совместная плотность выборки.

6*. Пусть ξ_1, \dots, ξ_{10} — н.о.р.с.в. из распределения $U[0; 11]$. Обозначим $X = \min(\xi_1, \dots, \xi_{10})$, $Y = \max(\xi_1, \dots, \xi_{10})$. С помощью арсенала достаточных статистик найдите $D(X - 4Y)$ (решения «в лоб» не принимаются).