

Welcome back my friends to the show that never ends

Проверка линейных гипотез. Критерий отношения правдоподобий

1. Из 1000 посетителей кафе 258 пили чай и 597 — кофе (посетители приличные, чай с кофе не смешивают). С помощью параметрического критерия χ^2 проверить гипотезу о том, что кофе в среднем выбирают в 2 раза чаще чая, на уровне значимости 0.05. Что говорит критерий отношения правдоподобий?

2. В модели линейной регрессии $X_i = \theta_0 + \mathbf{z}_i \boldsymbol{\theta} + \varepsilon$, где $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Постройте асимптотический критерий для проверки адекватности модели $H_0: \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ вида $\{R^2 < c_\alpha\}$, где R^2 — коэффициент детерминации.

3. Пусть $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из распределения $U[0; \theta]$. Чему равна статистика критерия отношения правдоподобий для проверки гипотезы $H_0: \theta = 1$ против общей альтернативы? Каково её предельное распределение, а каково должно быть по теореме Уилкса?

4. Пусть имеется k независимых выборок $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k$, причём i -ая из них

$$\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in_i})$$

состоит из n_i наблюдений, которые распределены как $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$ (дисперсии считаются равными, хоть и неизвестными). Сведя задачу к линейной регрессии, постройте точный критерий для проверки гипотезы $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ против общей альтернативы.