

# Стоять, $\theta$ ! Вы окружены!

*Доверительные интервалы*

1. По выборке  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \theta^2)$  постройте точный доверительный интервал уровня доверия  $\gamma$  для параметра  $\theta \in \mathbb{R}$ .
2. По выборке  $X_1, \dots, X_n \sim \chi_m^2$  постройте асимпт. доверительный интервал уровня доверия  $\gamma$  для параметра  $m > 0$ .
3. Пусть  $X_1, \dots, X_n \sim U[0; \theta]$ . С помощью статистики  $X_{(n)}$  постройте точный доверительный интервал *наименьшей длины* уровня доверия  $\gamma$  для параметра  $\theta$ .
4. На семинаре обсуждалось, что при построении асимпт. ДИ замена асимпт. дисперсии на её оценку дополнительно загрублает итоговый интервал. Попробуем сделать так, чтобы её не пришлось оценивать.  
Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения  $Bern(p)$ . Подберите функцию  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  так, чтобы  $h(\bar{\mathbf{X}})$  была асимпт. нормальной оценкой  $h(p)$  с константной (то есть независящей от  $p$ ) асимпт. дисперсией и постройте на основе этой статистики асимпт. доверительный интервал для параметра  $p$  уровня доверия  $\gamma$ .
5. Найдите точную *доверительную область* уровня доверия  $\gamma$  для вектора  $(a, \sigma^2)$  в модели сдвига-масштаба для нормального распределения  $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ , то есть такое борелевское множество  $B(X_1, \dots, X_n)$  в  $\mathbb{R}^2$ , что

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+: P_{a, \sigma^2}((a, \sigma^2) \in B) = \gamma.$$

- 6\*. Рассмотрим одноэлементную выборку из распределения  $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$  (оба параметра неизвестны). Приведите пример нетривиального доверительного интервала для параметра  $\sigma^2$  уровня доверия  $\gamma$ .