

std::variant

Контрольная работа №2

На работу отводится 85 минут. Пользоваться можно только своей головой. В ответах можно использовать квантили нормального распределения, χ^2 , а также распределений Стюдента и Фишера. Каждая задача (кроме нулевой) стоит 7 баллов, также предусмотрены частичные баллы. Предварительно можно набрать максимум 24 балла.

0. Напишите фамилии хотя бы двух гроссмейстеров, вышедших на данный момент в Турнир Претендентов 2026.

1. Докажите, что в модели линейной регрессии

$$X_i = a + b/\sqrt{i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

МНК-оценка \hat{b} является состоятельной оценкой b .

2. Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ — три независимые выборки размера n , причём $X_{ij} \sim \mathcal{N}(\theta_i, 1)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Придумайте состоятельный критерий для проверки

$$H_0: \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$$

против общей альтернативы H_1 уровня значимости α (не в асимптотическом смысле).

3. Для выборки X_1, \dots, X_n посчитайте статистику- ω^2 критерия Крамера-фон Мизеса-Смирнова (а.к.а с весовой функцией $\psi \equiv 1$) для $\mathbf{P}_0 = \mathbf{U}\{1, 2, 3\}$ и представьте её предельное распределение при верности нулевой гипотезы в виде $\|\boldsymbol{\xi}\|^2$, где $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$. Будет ли критерий, основанный на этой статистике, состоятельным против общей альтернативы?

4. По результатам принятия пересдач по теории вероятностей было поставлено A отлов, B хоров и C удов (в силу специфики принимающих заранее известно, что неудов быть не может). Постройте критерий для проверки на уровне значимости α гипотезы, что вероятности получить уд/хор/отл образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке).

5. Целевые величины X_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, хорошо описываются параболой от признака z_i , поэтому исследователь решил ввести следующую гауссовскую линейную модель:

$$X_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_i + \alpha_2 z_i^2 + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Он описал гипотезу о форме параболы в виде

$$H_0: \text{парабола проходит через нуль, а касательная в 1 имеет наклон 1.}$$

Постройте точный критерий уровня значимости $\alpha = 0.05$ для проверки H_0 и посчитайте его статистику для векторов $\mathbf{X} = (-9, -5, 2, 7, 5)^T$ и $\mathbf{z} = (-2, -1, 0, 1, 2)^T$.