Сильно состоятельный вариант

Контрольная работа №1

На работу отводится 85 минут. Пользоваться можно только своей головой и листиком с распределениями. Каждая задача (кроме нулевой) стоит 7 баллов, также предусмотрены частичные баллы. Предварительно можно набрать максимум 28 баллов.

0. Напишите ФИО вашего семинариста по статистике.

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из $\mathrm{U}[0; \theta]$, где $\theta > 0$. Для какой функции $\tau(\theta)$ статистика $\sqrt[n]{X_1 \cdot \ldots \cdot X_n}$ будет сильно состоятельной оценкой? Будет ли она при этом асимптотически нормальной? Если да, то найдите также её асимптотическую дисперсию.

2. Плотность *распределения Рарити* $\mathrm{R}(\sigma^2)$ с параметром σ^2 имеет вид

$$\rho_{\sigma^2}(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0.$$

Для выборки из распределения Рарити постройте асимптотически нормальные оценки σ^2 с помощью метода квантилей и максимального правдоподобия.

3. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из *распределения Нила Брина* $\mathrm{NB}(m, \theta)$, то есть $\mathsf{P}_\theta(X_i = k) = C_{k+m-1}^{m-1}(1-\theta)^k \theta^m$ для $k \in \{0, 1, \ldots\}$. Параметр m известен. Предъявите какую-нибудь нетривиальную функцию $\tau(\theta)$, для которой существует эффективная оценка, и саму эту оценку. Также найдите $i(\theta)$ — информацию одного наблюдения выборки.

4. Постройте асимптотический доверительный интервал уровня доверия γ для $p - q$ по независимым выборкам $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bern}(p)$ и $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{Bern}(q)$.

5. Докажите, что в условиях теоремы об асимпт. нормальности выборочного квантиля он к тому же является сильно состоятельной оценкой теоретического квантиля.