Настоящая правда всегда неправдоподобна

Методы построения оценок

Чертоги разума

Метод моментов.

Пусть $\Phi\colon \theta \mapsto (\mathsf{E}_\theta g_1(X_1), \ldots, \mathsf{E}_\theta g_m(X_1))$ — биекция между Θ и $\Phi(\Theta)$. Тогда оценкой по методу моментов будет статистика

$$\Phi^{-1}\left(\overline{g_1(\mathbf{X})}, \ldots, \overline{g_m(\mathbf{X})}\right).$$

Её (сильная) состоятельность и ас. норм-ть гарантируется теоремами о наследовании сходимости и ас. нормальности.

Метод выборочных квантилей.

Определение. p-квантилем распределения P называется величина $\zeta_p = \zeta_p(\mathsf{P}) = \inf\{x\colon F_{\mathsf{P}}(x) \geqslant p\}$. Выборочным p-квантилем по выборке $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ называют статистику $\zeta_{n,p} = X_{(\lceil np \rceil)}$.

Теорема. Если $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — выборка из распределения P с p-квантилем ζ_p, для которого $\exists F'_{\mathsf{P}}(\zeta_p) > 0$. Тогда

$$\sqrt{n}\,(\zeta_{n,p} - \zeta_p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{F'_{\mathsf{P}}(\zeta_p)^2}\right).$$

Рекламная пауза: обобщённая плотность.

Определение. Говорят, что распределение P на $\mathbb{R}^k$ обладает (обобщённой) плотностью ρ по σ-конечной мере μ, если $\mathsf{P}(B) = \int_B \rho(x)\,\mu(dx)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Если семейство распределений обладает плотностью по одной и той же мере μ, то оно называется *доминируемым.*

Примеры.

- Обычная плотность у абсолютно-непрерывных распределений есть обобщённая плотность по классической мере Лебега.
- Дискретное распределение с носителем в $\mathbb{Z}$ ($\mathsf{P}(\mathbb{Z}) = 1$) имеет плотность $\rho(x)$ по считающей мере μ ($\mu(\{z\}) = 1$, $z \in \mathbb{Z}$), причём $\rho(z) = \mathsf{P}(\{z\})$.

Свойство пересчёта матожидания. $\int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x})\,\mathsf{P}(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})\,\mu(d\mathbf{x})$.

Оценка максимального правдоподобия.

Пусть $\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{P}$ обладает плотностью $\rho_{\boldsymbol{\theta}}$ по мере μ. Тогда ОМП определяется как

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(\mathbf{X}) = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \prod_{i=1}^n \rho_{\boldsymbol{\theta}}(X_i) \left(= \arg\max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \sum_{i=1}^n \log \rho_{\boldsymbol{\theta}}(X_i)\right).$$

Теорема. При некоторых условиях на модель ОМП асимпт. нормальна:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, I(\boldsymbol{\theta})^{-1}\right), \quad I(\boldsymbol{\theta}) = \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}} \nabla \ln \rho_{\boldsymbol{\theta}}(X_1) \nabla \ln \rho_{\boldsymbol{\theta}}(X_1)^\top.$$

Tasks

1. Найдите оценку параметров по методу моментов для выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ из распределения **(а)** $\mathrm{Geom}(p)$; **(б)** $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$; **(в)** $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

2. Рассмотрим модель сдвига для распределения Лапласа:

$$\rho_\theta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Постройте оценки параметра θ по выборке $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, $X_i \sim \rho_\theta$, с помощью метода моментов, квантилей и максимального правдоподобия. Сравните полученные оценки по их асимптотическим дисперсиям.

3. *Категориальное распределение* $\mathrm{Cat}(p_1, \ldots, p_k)$ является обобщением распределения Бернулли: для него случайная величина принимает не 2, а уже k значений:

$$\mathsf{P}_{p_1,\ldots,p_k}(X_1 = i) = p_i, \quad \text{где } p_i > 0,\, i \in \{1, \ldots, k\},\, \sum p_i = 1.$$

Для выборки $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из категориального распределения постройте ОМП для вектора параметров $(p_1, \ldots, p_k)$.

4. Рассмотрим выборку $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n)$, где $X_i, Y_i \sim \mathcal{N}(\theta_i, \sigma^2)$, то есть в модели $2n$ наблюдений и $n+1$ параметр — n параметров сдвига и один параметр масштаба. Найдите оценку максимального правдоподобия для параметра σ^2 и покажите, что она смещена и несостоятельна.

5. Докажите, что у выборки $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения с плотностью

$$\rho_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma},p}(x) = p \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + (1-p) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

не существует оценки максимального правдоподобия для параметров $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, p)$.

6. В этой задаче предлагается доказать теорему об асимптотической нормальности выборочного квантиля. Пункты считаются за отдельные задачи. При решении очередного пункта можно без док-ва ссылаться на предыдущие.

(а) Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \sim \mathrm{U}(0,1)$. Вспомните, что

$$\xi_{(k)} \sim \frac{S_k}{S_{n+1}}, \quad S_m = \eta_1 + \ldots + \eta_m, \quad \eta_i \text{ — н.о.р. с распределением } \mathrm{Exp}(1).$$

(б) Докажите, что если $\alpha(n) = np + O(1)$ (например, $\lceil np \rceil$ или $n + 1 - \lceil np \rceil$), то

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_{\alpha(n)}}{n} - p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p);$$

(в) С помощью дельта-метода докажите теорему для выборки из $\mathrm{U}(0,1)$.

(г) Докажите теорему в общем случае. *Указание.* Вспомните из теорвера, как от произвольного распределения перейти к равномерному.