

Стоять, θ ! Вы окружены!

Доверительные интервалы

1. По выборке $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \theta^2)$ постройте точный доверительный интервал уровня доверия γ для параметра $\theta \in \mathbb{R}$.
2. По выборке $X_1, \dots, X_n \sim \chi_m^2$ постройте асимпт. доверительный интервал уровня доверия γ для параметра $m > 0$.
3. Пусть $X_1, \dots, X_n \sim U[0; \theta]$. С помощью статистики $X_{(n)}$ постройте точный доверительный интервал *наименьшей длины* уровня доверия γ для параметра θ .
4. На семинаре обсуждалось, что при построении асимпт. ДИ замена асимпт. дисперсии на её оценку дополнительно загроубляет итоговый интервал. Попробуем сделать так, чтобы её не пришлось оценивать. Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из распределения $\text{Bern}(p)$. Подберите функцию $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ так, чтобы $h(\bar{\mathbf{X}})$ была асимпт. нормальной оценкой $h(p)$ с константной (то есть независимой от p) асимпт. дисперсией и постройте на основе этой статистики асимпт. доверительный интервал для параметра p уровня доверия γ .
5. Найдите точную *доверительную область* уровня доверия γ для вектора (a, σ^2) в модели сдвига-масштаба для нормального распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, то есть такое борелевское множество $B(X_1, \dots, X_n)$ в \mathbb{R}^2 , что

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+ : \mathbf{P}_{a, \sigma^2}((a, \sigma^2) \in B) = \gamma.$$

- 6*. Рассмотрим одноэлементную выборку из распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ (оба параметра неизвестны). Приведите пример нетривиального доверительного интервала для параметра σ^2 уровня доверия γ .