Ключ от всех дверей

Методы построения оценок

1. Найдите оценку вектора параметров (α, λ) по методу моментов для выборки из $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

2. Рассмотрим модель сдвига для распределения Лапласа:

$$\rho_\theta(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Постройте оценки параметра θ по выборке $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, $X_i \sim \rho_\theta$, с помощью метода моментов, квантилей и максимального правдоподобия. Сравните полученные оценки по их асимптотическим дисперсиям.

3. *Категориальное распределение* является обобщением распределения Бернулли: для него случайная величина принимает не 2, а уже k значений:

$$\mathsf{P}_{p_1,\ldots,p_k}(X_1 = i) = p_i, \quad \text{где } p_i > 0,\, i \in \{1, \ldots, k\},\, \sum p_i = 1.$$

Для выборки $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из категориального распределения постройте ОМП для вектора параметров $(p_1, \ldots, p_k)$.

4. Рассмотрим выборку $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n)$, где $X_i, Y_i \sim \mathcal{N}(\theta_i, \sigma^2)$, то есть в модели $2n$ наблюдений и $n+1$ параметр — n параметров сдвига и один параметр масштаба. Найдите оценку максимального правдоподобия для параметра σ^2 и покажите, что она смещена и несостоятельна.

5. В этой задаче предлагается доказать теорему об асимптотической нормальности выборочного квантиля. Пункты считаются за отдельные задачи. При решении очередного пункта можно без док-ва ссылаться на предыдущие.

(а)* Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \sim \mathrm{U}[0;1]$. Докажите, что

$$\xi_{(k)} \sim \frac{S_k}{S_{n+1}}, \quad S_m = \eta_1 + \ldots + \eta_m, \quad \eta_i \text{ — н.о.р. с распределением } \mathrm{Exp}(1).$$

(б) Докажите, что если $\alpha(n) = np + O(1)$ (например, $\lceil np \rceil$), то

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_{\alpha(n)}}{n} - p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p);$$

(в) С помощью дельта-метода докажите теорему для выборки из $\mathrm{U}[0;1]$.

(г) Докажите теорему в общем случае. *Указание.* Вспомните из теорвера, как от произвольного распределения перейти к равномерному.

6.* Найдите ОМП для выборки $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ из многомерного нормального распределения $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \Sigma)$, где $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$, $\Sigma \in \mathbb{S}_+^k$ — неизвестные параметры. *Указание.* В примере 4.2 методички уже найдена стационарная точка. Осталось ~~понять, что за ужас там творится, и~~ доказать, что она действительно доставляет максимум.