Вариант II рода

Контрольная работа №2

На работу отводится 85 минут. Пользоваться можно только своей головой и листиком с распределениями. В ответах можно использовать квантили нормального распределения, χ^2 и распределения Фишера. Каждая задача (кроме нулевой) стоит 7 баллов, также предусмотрены частичные баллы. Предварительно можно набрать максимум 28 баллов.

0. Напишите любимую пиццу семинариста по статистике вашего семинариста по статистике.

1. Докажите, что в модели гауссовской линейной регрессии оценка $\widehat{\sigma}^2$ является состоятельной оценкой σ^2.

2. Для выборки $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с неизвестным средним μ и известной дисперсией σ^2 строится односторонний критерий Вальда для проверки гипотезы $H_0\colon \mu = 0$ против альтернативы $H_1\colon \mu > 0$ уровня значимости α. Найдите минимальный размер эффекта $\mu_0 > 0$ такой, что в случае $\mu = \mu_0$ нулевая гипотеза будет отклонена с вероятностью хотя бы β.

3. Даны k независимых выборок $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, \ldots, X_{i,n_i})$, где $X_{i,j} \sim \mathrm{Pois}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n_i$. Постройте асимптотический критерий уровня значимости α для проверки гипотезы

$$H_0\colon \lambda_1 = \ldots = \lambda_k$$

против общей альтернативы.

4. В четырёхугольнике измерили каждый угол с некоторой погрешностью: $X_i = \alpha_i + \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Сведите задачу к модели гауссовской линейной регрессии, постройте оценки для углов α_i и постройте критерий для проверки гипотезы о том, что этот четырёхугольник — параллелограмм (досчитывать статистику критерия необязательно).

5. Покажите, что критерий согласия Крамера-фон Мизеса-Смирнова со статистикой

$$n\omega^2 = n \int (\widehat{F}_n(x) - F_0(x))^2 \, dF_0(x)$$

состоятелен против общей альтернативы $H_1\colon F \neq F_0$, где F_0 — непрерывная функция распределения.