

Состоятельный вариант

Контрольная работа №1

На работу отводится 125 минут. Пользоваться можно только своей головой. При желании можно пользоваться настольным калькулятором. Каждая задача (кроме нулевой) стоит 7 баллов, также предусмотрены частичные баллы.

Предварительно можно набрать максимум 28 баллов.

0. Напишите название какой-нибудь музыкальной группы, которая была на футболке вашего семинариста по статистике.

1. Рассмотрим выборку X_1, \dots, X_n из модели сдвига-масштаба экспоненциального распределения:

$$\mathcal{P} = \{\mu + \sigma \cdot \text{Exp}(1) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}, \quad \text{Exp}(1) \sim \rho(x) = e^{-x} \cdot I(x > 0).$$

С помощью метода моментов найдите асимптотически нормальную оценку параметра μ . Вычислите её асимптотическую дисперсию.

2. Выборка X_1, \dots, X_n пришла из распределения с плотностью

$$\rho_\theta(x) = \frac{x^2}{3\theta^3} \cdot I(x \in (-\theta, 2\theta))$$

Найдите асимптотически нормальные оценки параметра θ по методу квантилей и максимального правдоподобия. Принадлежит ли модель экспоненциальному семейству распределений?

3. Пусть наблюдения X_1, \dots, X_n пришли из распределения

$$\rho_\theta(x) = \frac{1 + \theta x}{2} \cdot I(|x| < 1), \quad \theta \in \Theta = (-1; 1).$$

Найдите информацию Фишера выборки. Докажите, что

- В модели эффективная оценка существует лишь для константы;
- θ -п.н. ОМП существует и единственна, приведите её асимптотическую дисперсию (без док-ва считаем, что выполнены условия регулярности)

4. Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(p)$, $n \geq 4$. Постройте оптимальную оценку для $\tau(p) = p(1 - p)^3$. Ответ обоснуйте ссылкой на теорию.

5. Для выборки размера n из распределения $\text{Pois}(\theta^2 + 2\theta)$ постройте асимптотический доверительный интервал уровня доверия γ для параметра $\theta > 0$.