Materi Matematika Diskrit

Proposisi dan Logika (*logic*)

Program Studi Teknik Informatika

Proposisi

- Logika didasarkan pada pada hubungan antara kalimat pernyataan (*statements*).
- Hanya kalimat yang bernilai benar atau salah saja yang menjadi tinjauan → **proposisi**
- **Proposisi**: pernyataan yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.

Permainan

"Gajah lebih besar daripada tikus."

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? BENAR

Permainan

“$520 < 111$”

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

Permainan

“y > 5”

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Nilai kebenaran dari pernyataan tersebut bergantung pada y, tapi nilainya belum ditentukan.

Pernyataan jenis ini kita sebut sebagai **fungsi proposisi** atau **kalimat terbuka**.

Permainan

"Sekarang tahun 2015 dan 99 < 5."

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

Permainan

"Tolong untuk tidak tidur selama kuliah"

Apakah ini sebuah pernyataan? TIDAK

Ini adalah sebuah permintaan.

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Hanya pernyataanlah yang bisa menjadi proposisi.

Permainan

"x < y jika dan hanya jika y > x."

Apakah ini pernyataan ? YA

Apakah ini proposisi ? YA

… karena nilai kebenarannya tidak bergantung harga spesifik x maupun y.

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini ? BENAR

Kesimpulan: Proposisi adalah kalimat berita

Contoh-contoh proposisi lainnya:

(a) 13 adalah bilangan ganjil
(b) Soekarno adalah alumnus UI.
(c) $1 + 1 = 2$
(d) $8 \geq$ akar kuadrat dari $8 + 8$
(e) Ada monyet di bulan
(f) Hari ini adalah hari Rabu
(g) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap
(h) $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil

Contoh-contoh di bawah ini *bukan* proposisi

(a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?

(b) Isilah gelas tersebut dengan air!

(c) $x + 3 = 8$

(d) $x > 3$

- Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil p, q, r, ….

- Contoh:

  p : 13 adalah bilangan ganjil.

  q : Soekarno adalah alumnus UGM.

  r : $2 + 2 = 4$

Bentuk-bentuk Proposisi

- Proposisi dapat dinyatakan dalam empat bentuk:
  1. Proposisi atomik
  2. Proposisi majemuk
  3. Implikasi
  4. Bi-implikasi

Proposisi Atomik

- Proposisi tunggal

- Contoh:

    (a) Informatika ITB dibentuk tahun 1982

    (b) $2n$ selalu genap untuk n=0, 1, 2, …

    (c) I'm Javanese

    (d) Orang Jawa belum tentu bisa Bahasa Java

Proposisi Majemuk

- Misalkan p dan q adalah proposisi atomik.
- Ada empat macam proposisi majemuk:

1. **Konjungsi** (*conjunction*): p dan q
   Notasi $p \wedge q$,
2. **Disjungsi** (*disjunction*): p atau q
   Notasi: $p \vee q$
3. **Ingkaran** (*negation*) dari p: tidak p
   Notasi: $\sim p$
4. **Disjungsi eksklusif**: p atau q tapi bukan keduanya
   Notasi: $p \oplus q$

Contoh-contoh proposisi majemuk:

p : Hari ini hujan

q : Siswa masuk sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan siswa masuk sekolah

semakna dengan

Hari hujan namun siswa masuk sekolah

$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan

(atau: Hari ini *tidak* hujan)

p : Pemilih dalam Pilkada harus berusia 17 tahun

q : Pemilih dalam Pilkada sudah menikah

$p \vee q$: Pemilih dalam Pilkada harus berusia 17 tahun atau sudah menikah

Latihan. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi
q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

<u>Penyelesaian</u>:

(a) $p \wedge q$
(b) $p \wedge \sim q$
(c) $\sim p \wedge \sim q$
(d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
(e) $p \vee (\sim p \wedge q)$
(f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

Tabel Kebenaran

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\sim p$
T	F
F	T

Disjungsi Eksklusif

Kata "atau" (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam salah satu dari dua cara:

1. Inclusive or

"atau" berarti "*p* atau *q* atau keduanya"

Contoh: "Tenaga IT yang dibutuhkan harus menguasai Bahasa C++ **atau** Java".

2. Exclusive or

"atau" berarti "*p* atau *q* tetapi bukan keduanya".

Contoh: "Ia dihukum 5 tahun **atau** denda 10 juta".

Operator logika disjungsi eksklusif: *xor*
Notasi: $\oplus$

Tabel kebenaran:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Nilai kebenaran proposisi majemuk dapat ditentukan dengan menggunakan “tabel kebenaran”
- Contoh proposisi majemuk: $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
- Tabel kebenaran:

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

- Proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus

- Proposisi majemuk disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus.

$p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Notasi: $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

Contoh. Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Hukum-hukum Logika

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee \sim p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge \sim p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – $\sim(\sim \mathrm{p}) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ – $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Latihan. Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee \sim q$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
p \vee \sim(p \vee q) &\Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q) && \text{(Hukum De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) && \text{(Hukum distributif)} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (p \vee \sim q) && \text{(Hukum negasi)} \\
&\Leftrightarrow p \vee \sim q && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

Latihan. Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q)$	(Hukum Identitas)
$\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q)$	(Hukum distributif)
$\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F}$	(Hukum *Null*)
$\Leftrightarrow p$	(Hukum Identitas)

Latihan

Diberikan pernyataan “Tidak benar bahwa dia belajar Algoritma tetapi tidak belajar Matematika”.

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam notasi simbolik (ekspresi logika)

(b) Berikan pernyataan yang ekivalen secara logika dengan pernyataan tsb (Petunjuk: gunakan hukum De Morgan)

Penyelesaian

Misalkan

p : Dia belajar Algoritma

q : Dia belajar Matematika

maka,

(a) Tidak benar bahwa dia belajar Algoritma tetapi tidak belajar Matematika: $\sim (p \wedge \sim q)$

(b) $\sim (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$ (Hukum De Morgan)

dengan kata lain: "Dia tidak belajar Algoritma atau belajar Matematika"