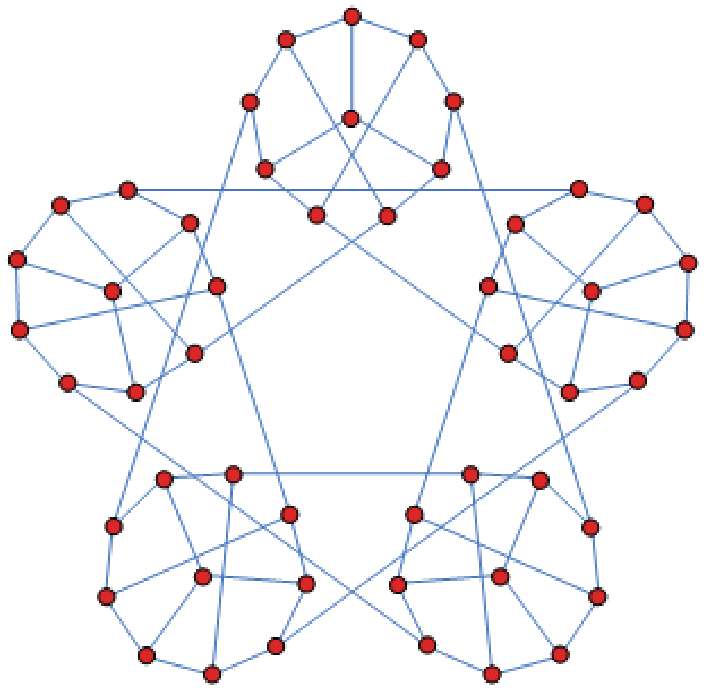
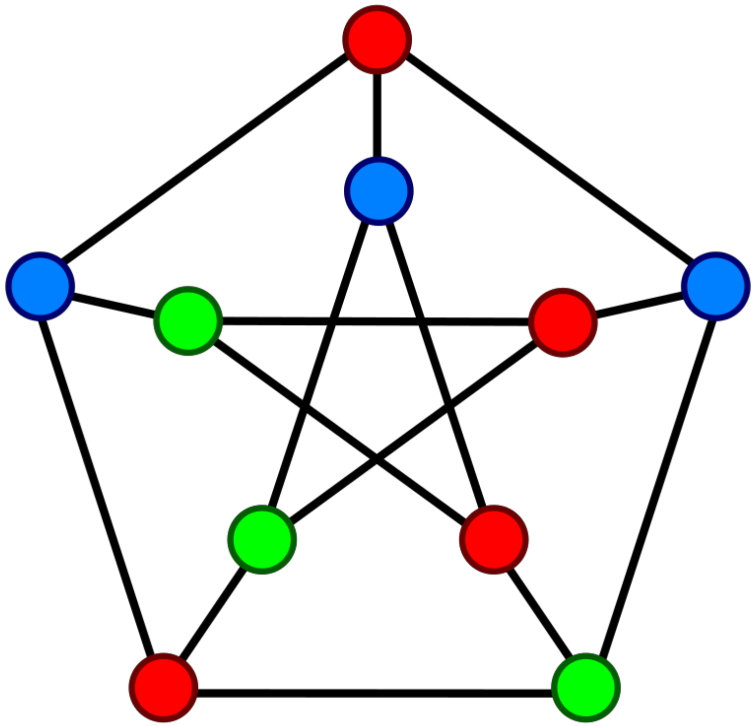
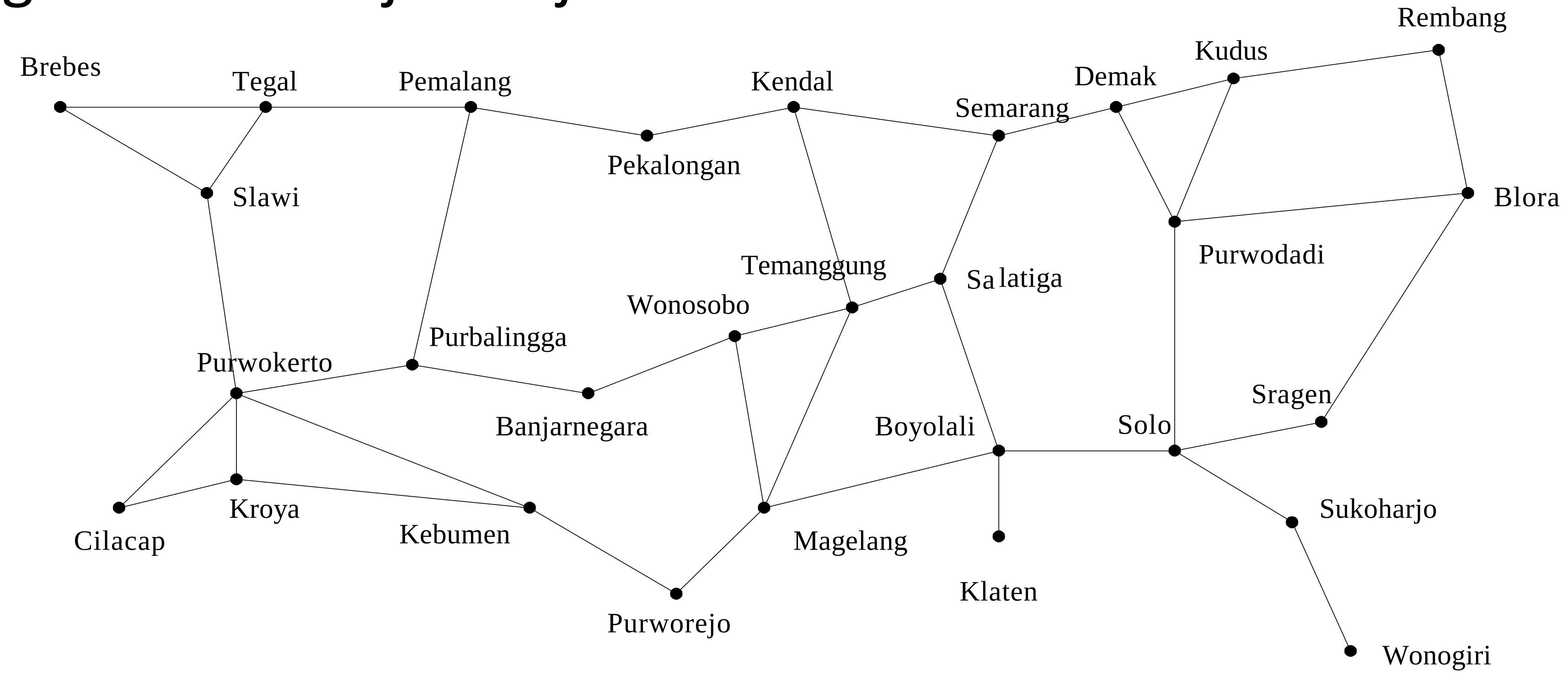




Graf
Matematika Diskrit

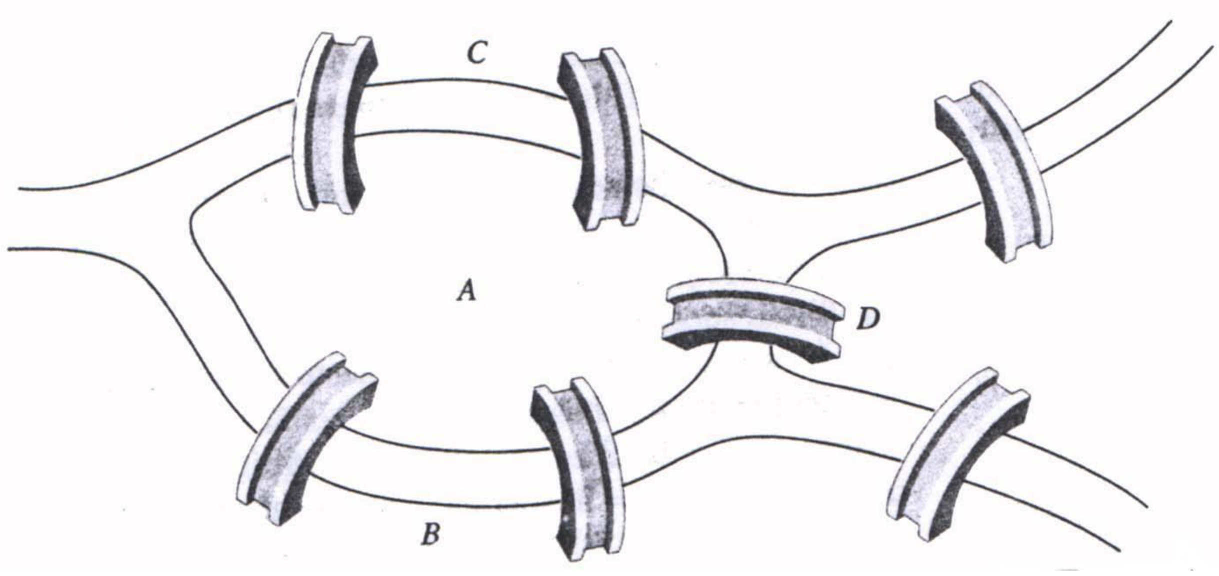
Pendahuluan

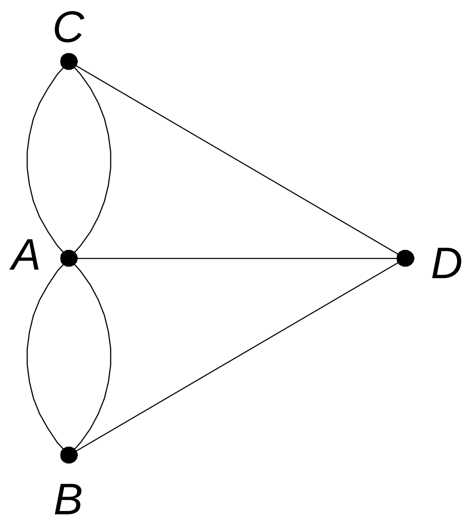
- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.



Gambar sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.

- Sejarah graf: Persoalan jembatan Königsberg (tahun 1736)





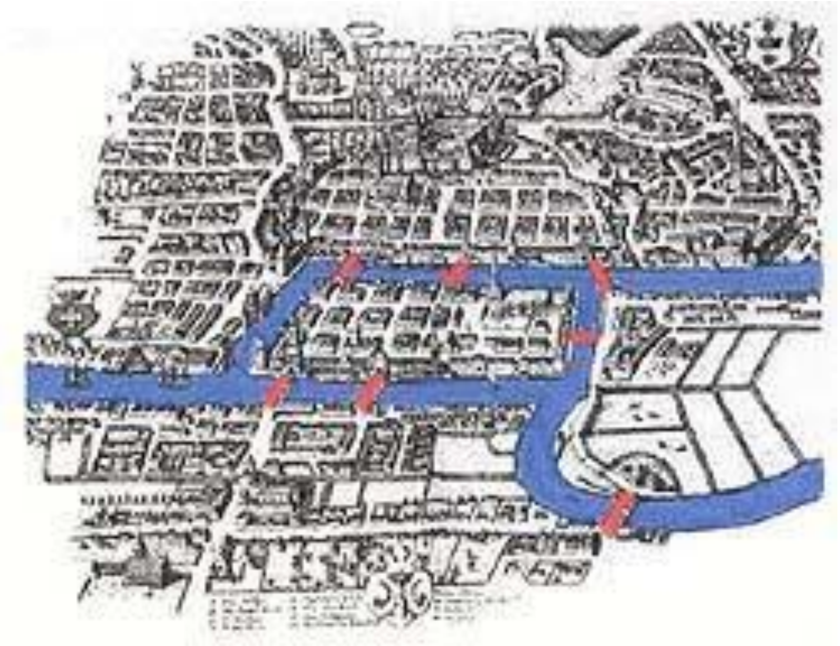
Gambar 2. Kiri: Masalah Jembatan Königsberg; Kanan: graf persoalan

- Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg:

  Simpul (*vertex*) → menyatakan daratan

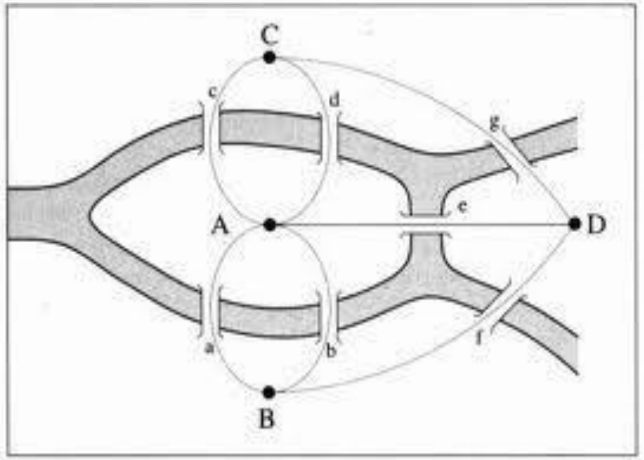
  Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan

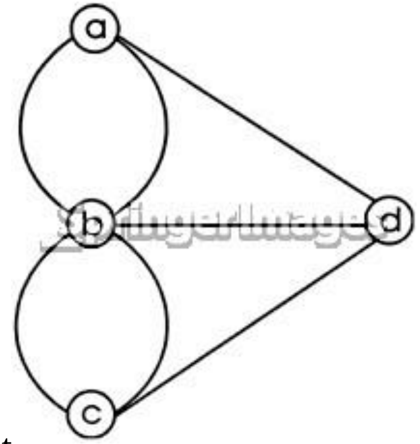
  Persoalan: Bisakah orang melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?



Konigsberg Bridge Problem

Leonhard Euler
15 April 1707 – 18 September 1783



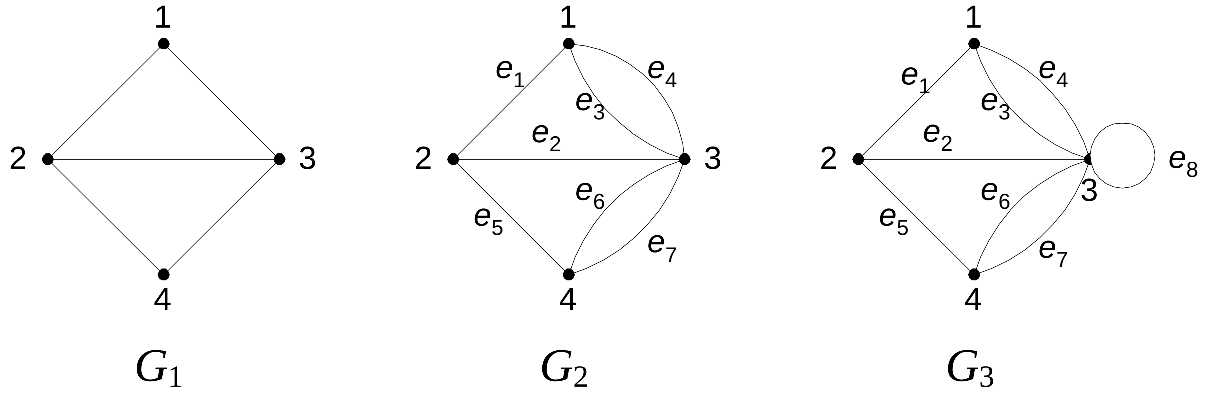


Definisi Graf

Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)
$= \{ v_1 , v_2 , ... , v_n \}$

E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul
$= \{e_1 , e_2 , ... , e_n \}$



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

Contoh 1. Pada Gambar 2, G_1 adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$

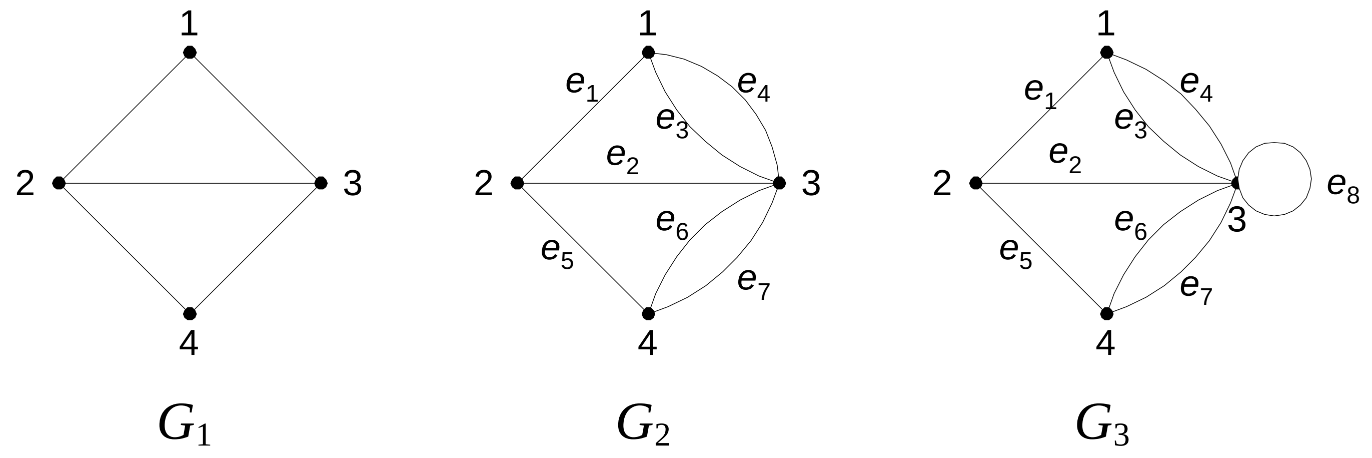
G_2 adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

G_3 adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \}$
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

- Pada G_2, sisi e_3 = (1, 3) dan sisi e_4 = (1, 3) dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.

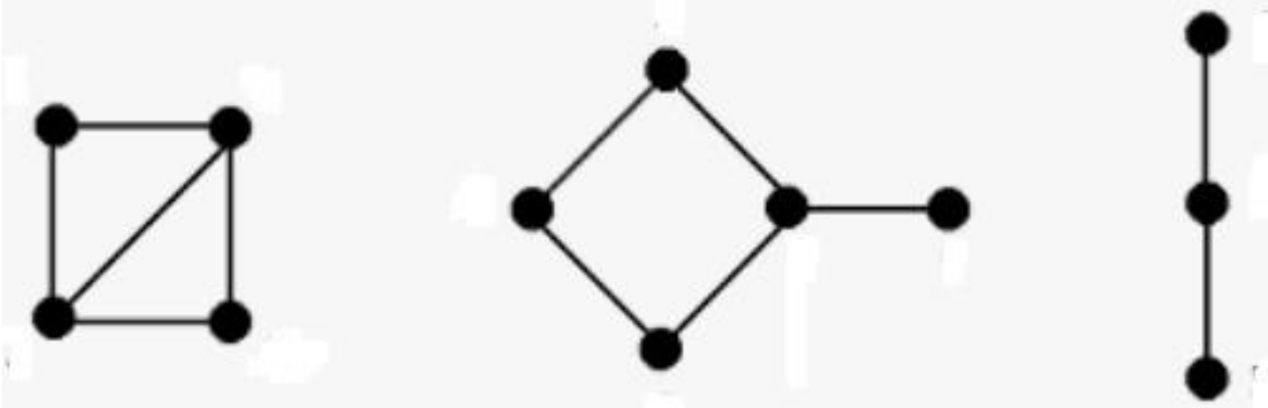
- Pada G_3, sisi e_8 = (3, 3) dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Jenis-jenis Graf

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

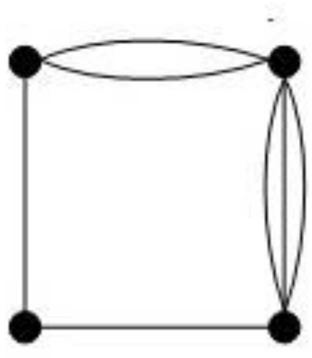
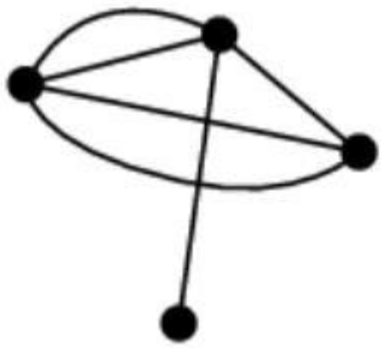
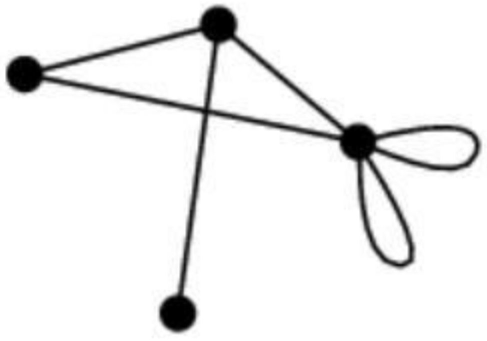
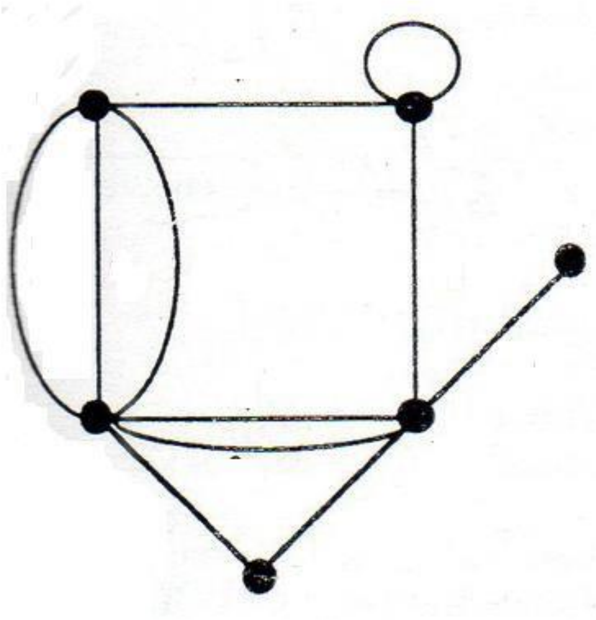
1. **Graf sederhana** (*simple graph*).

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda dinamakan graf sederhana.



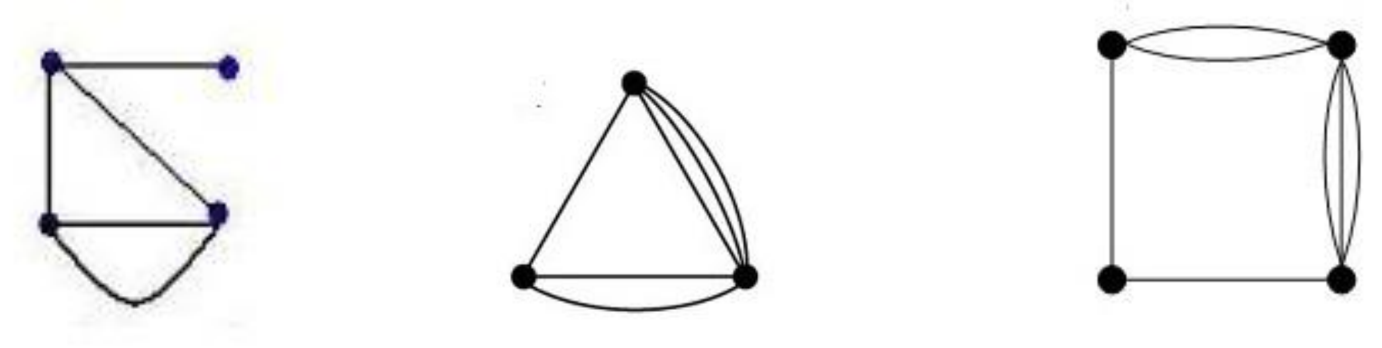
2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graph*).

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*).

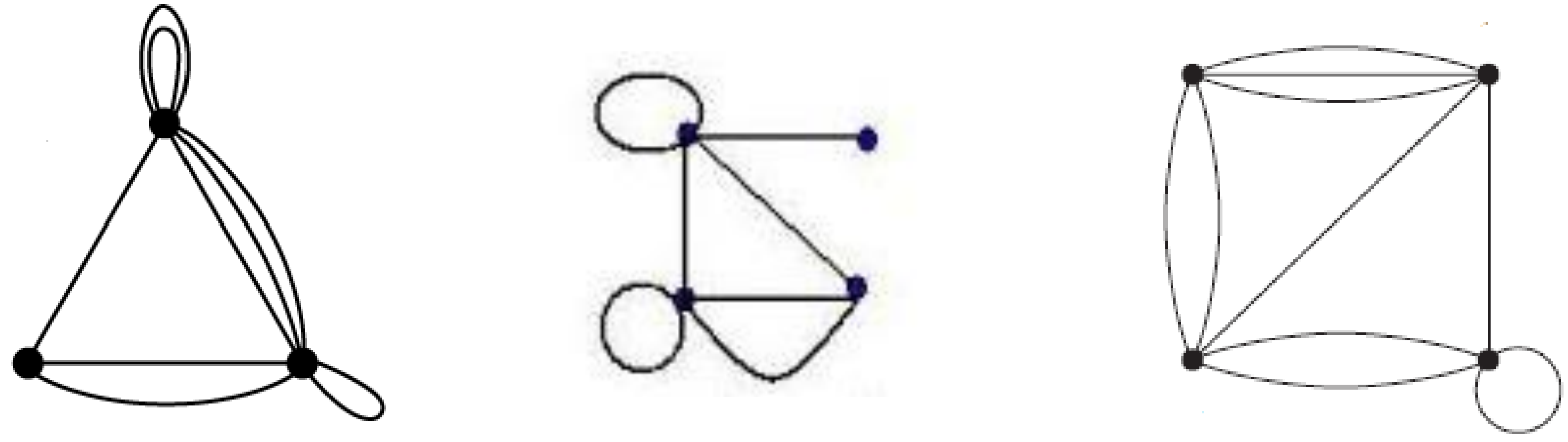





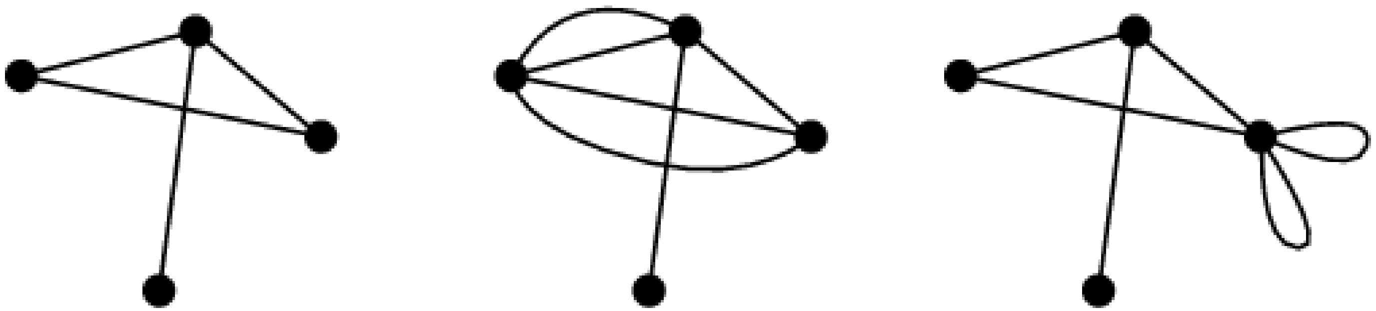
Graf tak-sederhana dibedakan lagi menjadi:

1. Graf ganda (*multi-graph*) → Graf mengandung sisi ganda



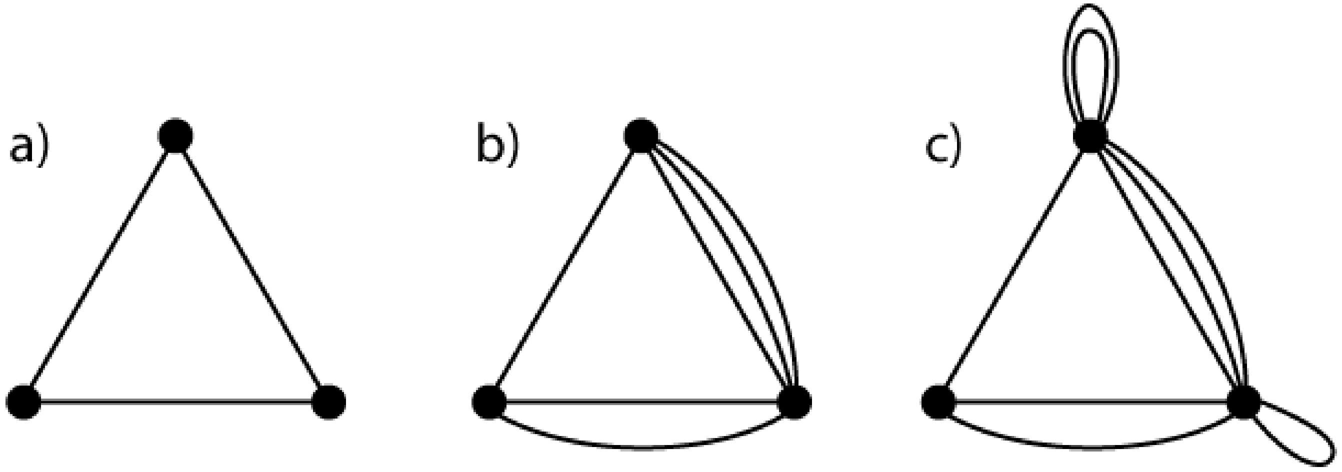
2. Graf semu (*pseudo-graph*) → Graf mengandung sisi gelang





simple graph *nonsimple graph with multiple edges* *nonsimple graph with loops*

Sumber: Wolfram

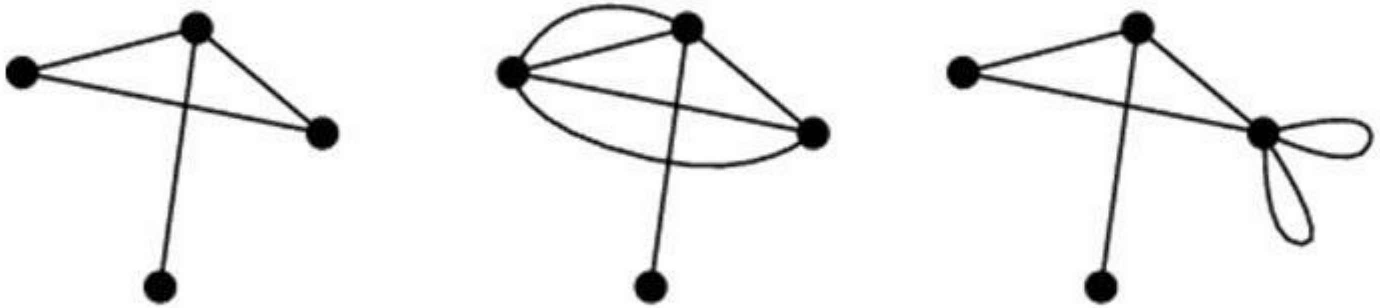


Graf sederhana Graf ganda Graf semu

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, graf dibedakan atas 2 jenis:

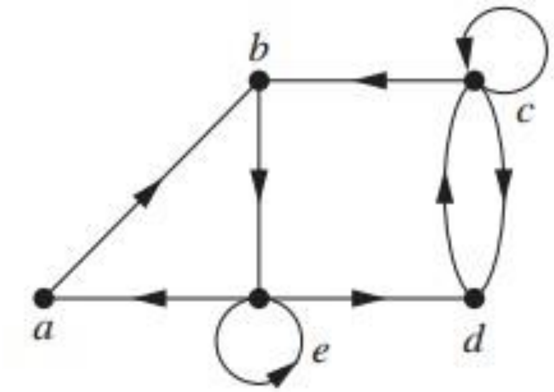
1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)

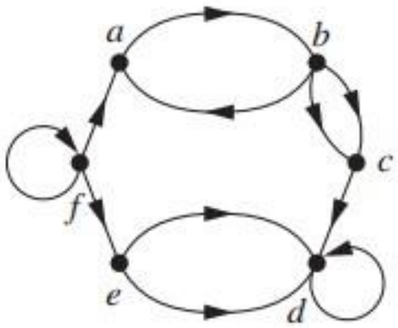
Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.

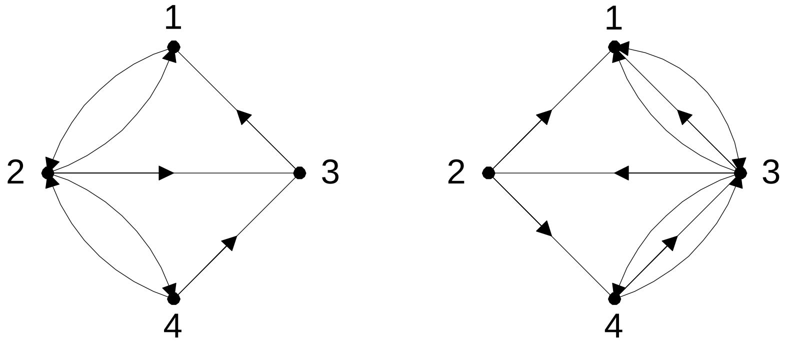


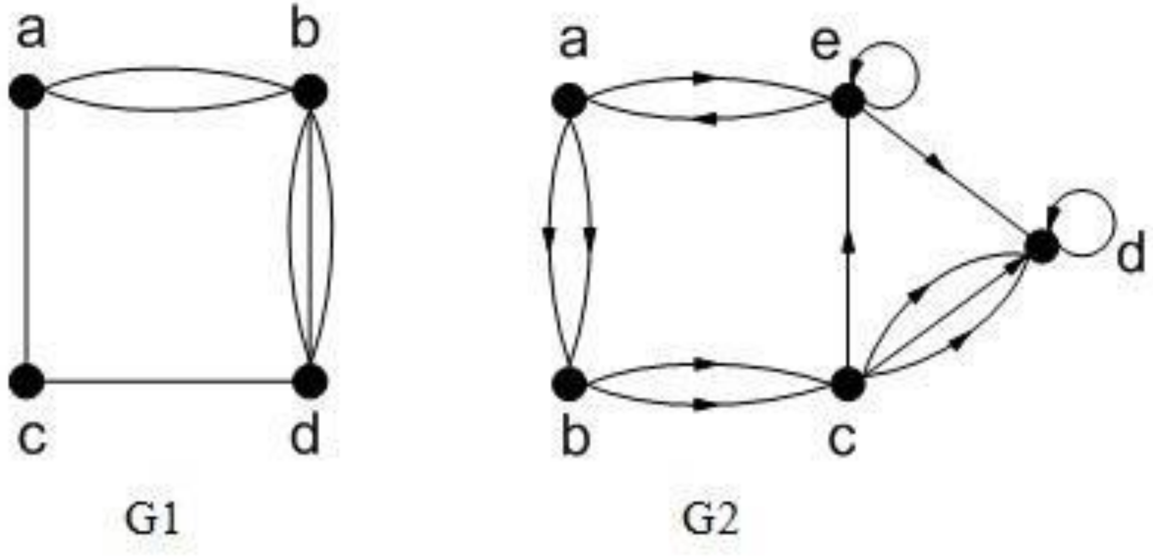
2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.

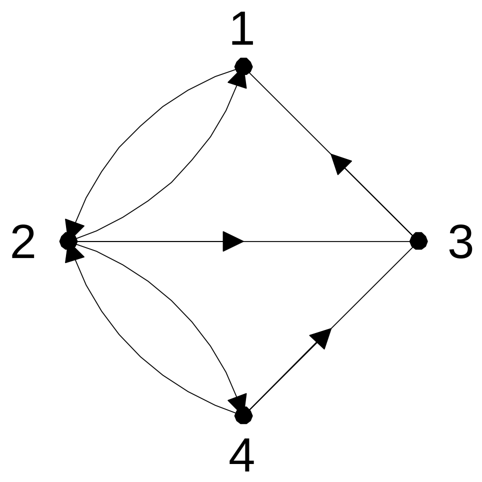




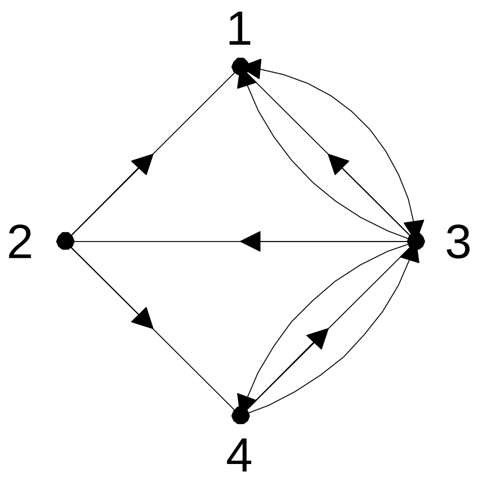




G1 : graf tak-berarah; G2 : Graf berarah



(a) G_4



(b) G_5

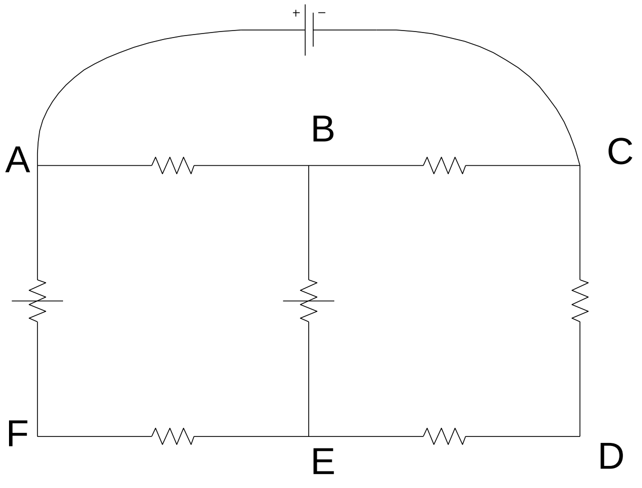
Gambar (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

Tabel 1 Jenis-jenis graf

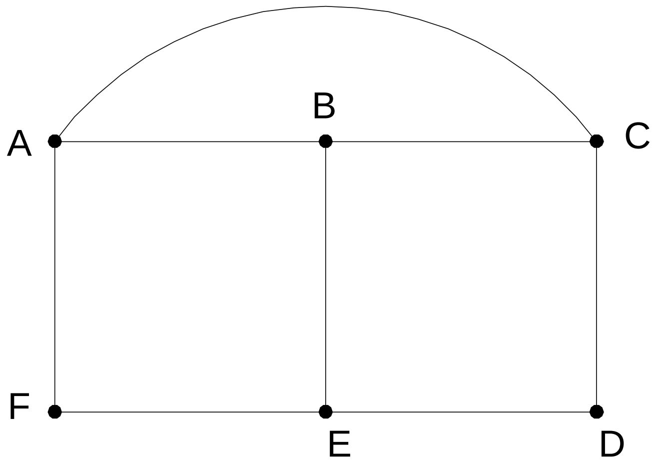
Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Tidak	Ya
Graf berarah	Berarah	Ya	Ya
Graf-ganda berarah	Berarah		Ya

Contoh Penerapan Graf

1. *Rangkaian listrik*.



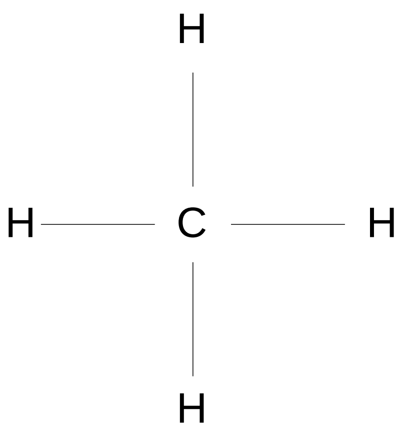
(a)



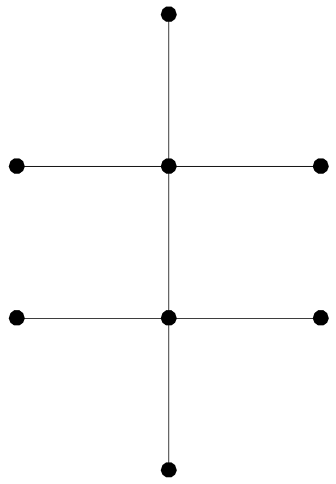
(b)

2. *Isomer senyawa kimia karbon*

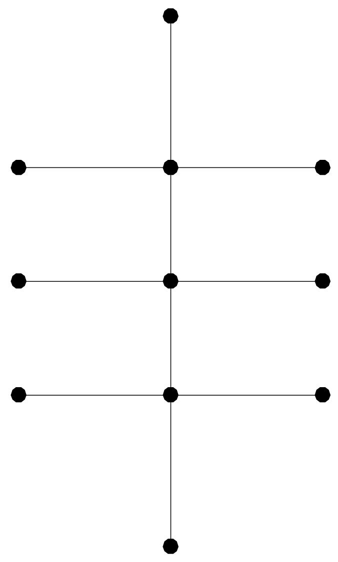
metana (CH_4)



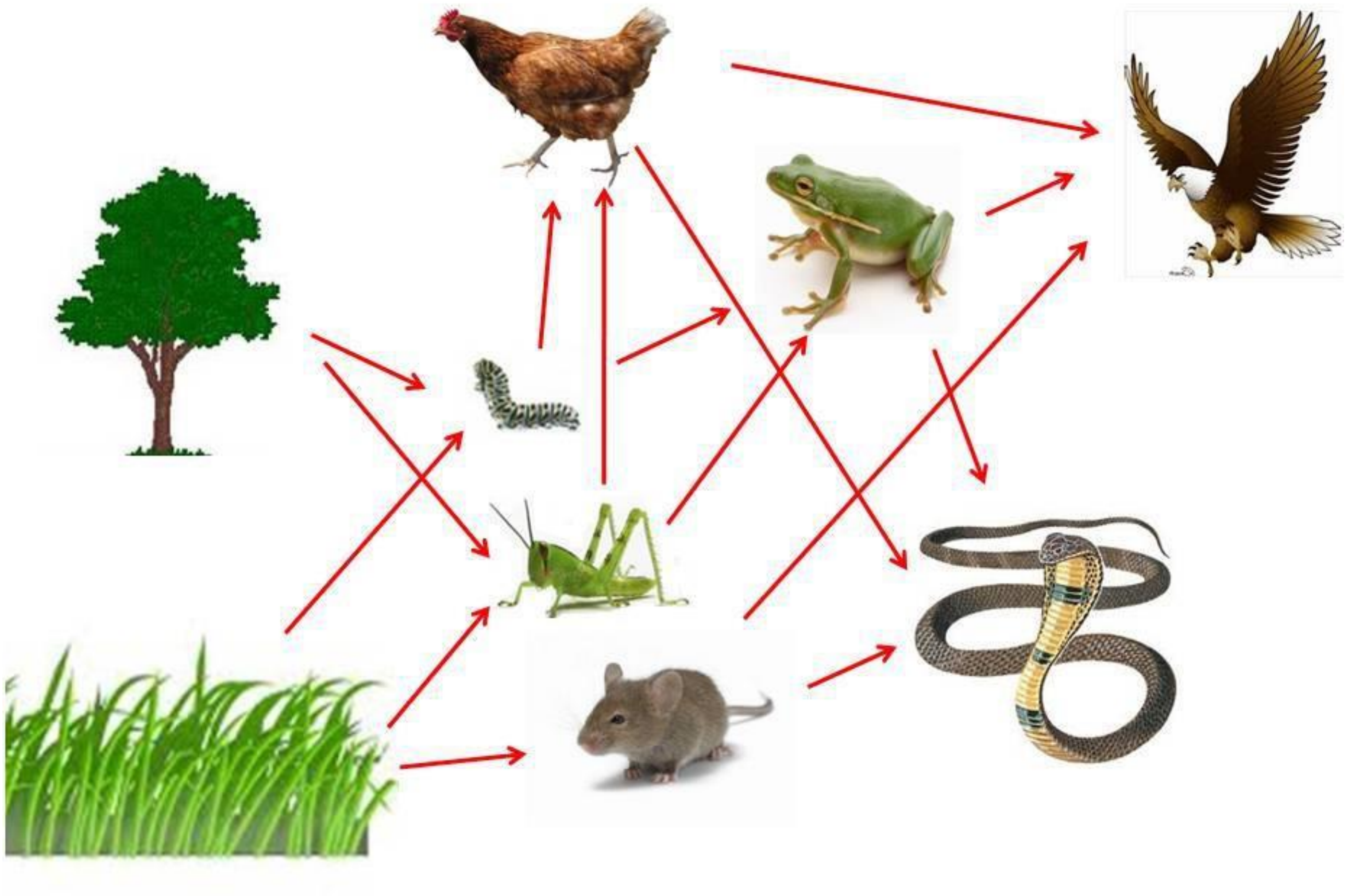
etana (C_2H_6)



propana (C_3H_8)

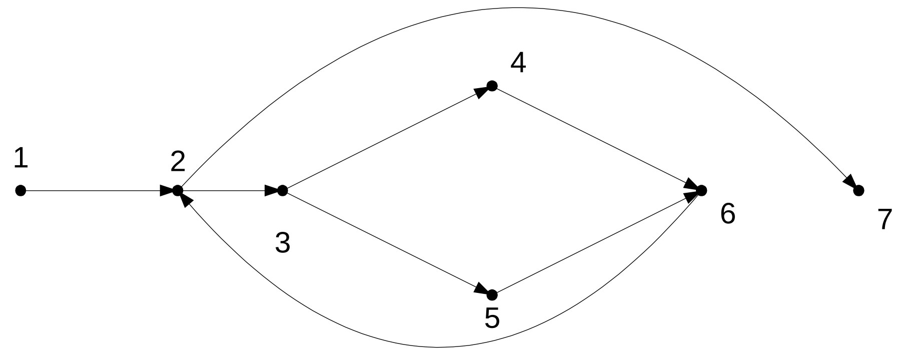


3. Jejaring makanan (Biologi)



4. *Pengujian program*

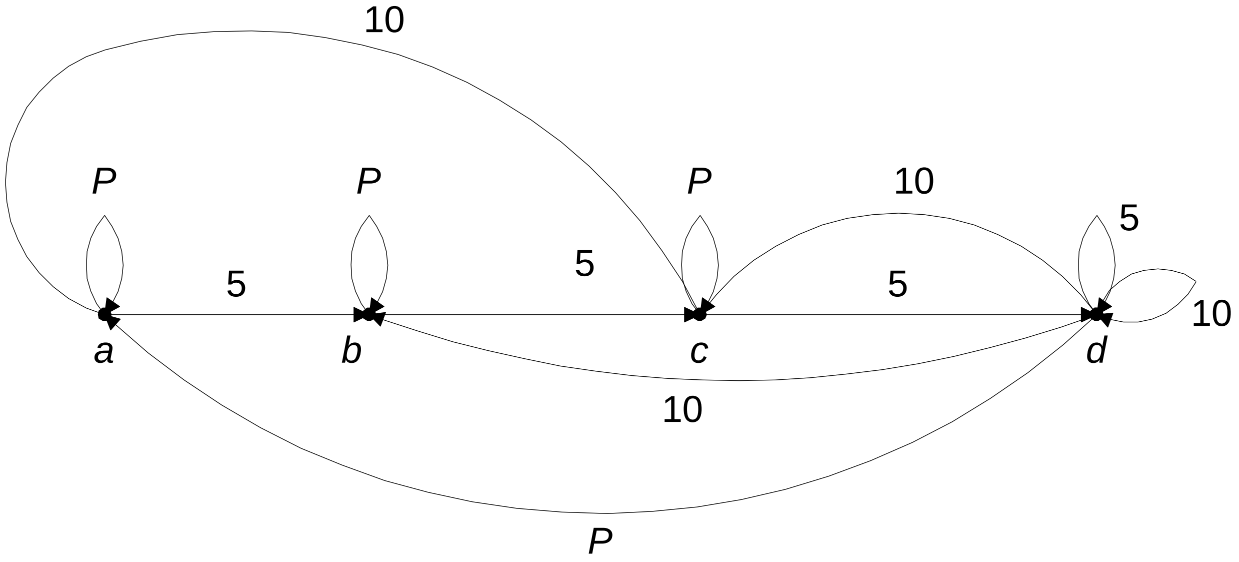
```
read(x);
while x <> 9999 do
 begin
   if x < 0  then
      writeln('Masukan tidak boleh negatif')
   else
     x:=x+10;
   read(x);
 end;
writeln(x);
```



Keterangan:
1 : read(x)
2 : x <> 9999
3 : x < 0
4 : writeln('Masukan tidak boleh negatif');
5 : x := x + 10
6 : read(x)
7 : writeln(x)

5. Pemodelan Mesin Jaja (*vending Machine)*

Graf kelakuan mesin jaja: (misal mesin jaja yang menjual coklat 15 sen)



Keterangan:
a : 0 sen dimasukkan
b : 5 sen dimasukkan
c : 10 sen dimasukkan
d : 15 sen atau lebih dimasukkan

Latihan

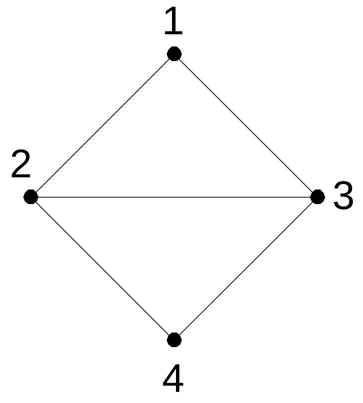
- Gambarkan graf yang menggambarkan sistem pertandingan sistem ½ kompetisi (*round-robin tournaments*) yang diikuti oleh 5 tim.

Terminologi Graf

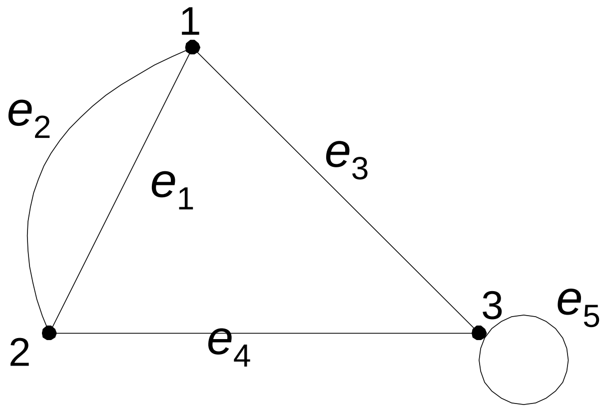
1. Ketetanggaan (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.

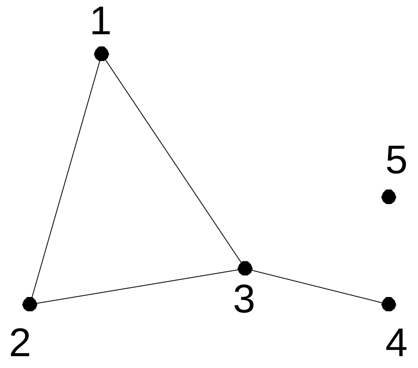
Tinjau graf G_1 : simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,
simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.



G_1



G_2



G_3

2. Bersisian (*Incidency*)

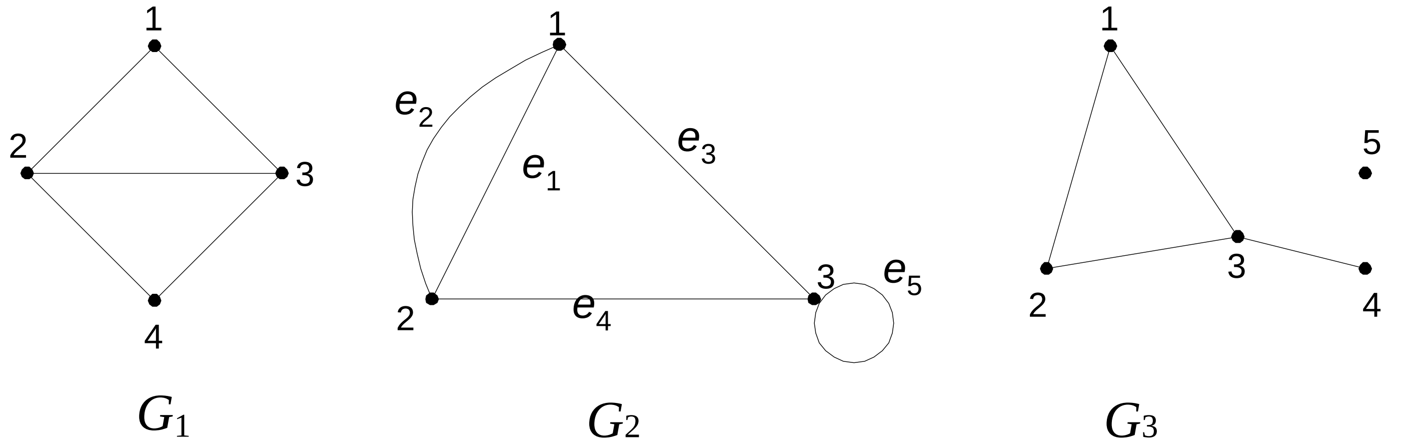
Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan

e bersisian dengan simpul v_j , atau

e bersisian dengan simpul v_k

Tinjau graf G_1: sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3, tetapi sisi (1,2) tidak bersisian dengan simpul 4

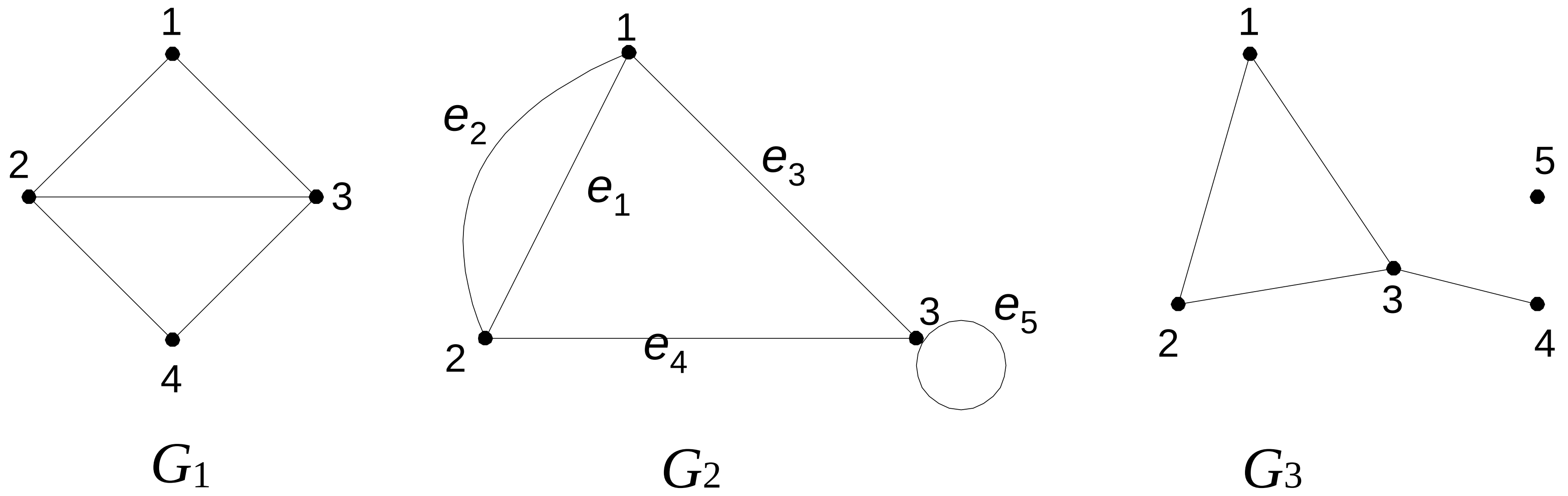
sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4, tetapi sisi (1,3) tidak bersisian dengan simpul 4



3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

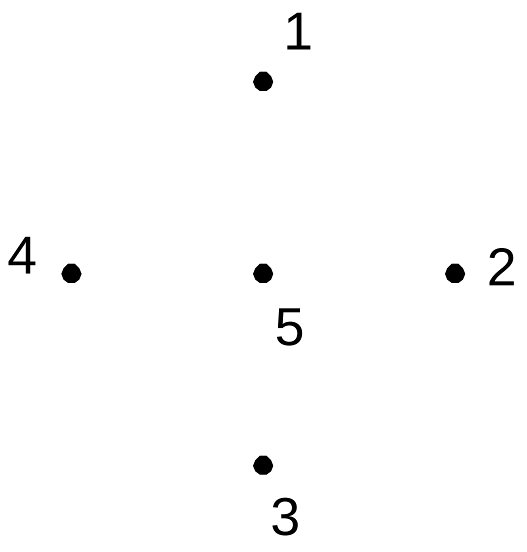
Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Tinjau graf G_3: simpul 5 adalah simpul terpencil.



4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).
Graf N_5 :



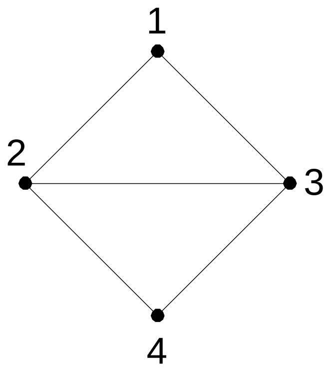
5. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
Notasi: $d(v)$

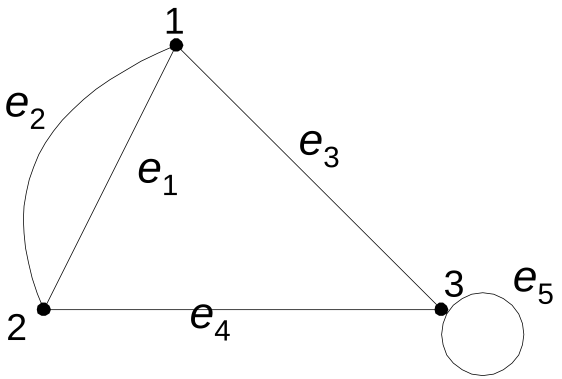
Tinjau graf G_1: $d(1) = d(4) = 2$
$d(2) = d(3) = 3$

Tinjau graf G_3: $d(5) = 0$ → simpul terpencil
$d(4) = 1$ → simpul anting-anting (*pendant vertex*)

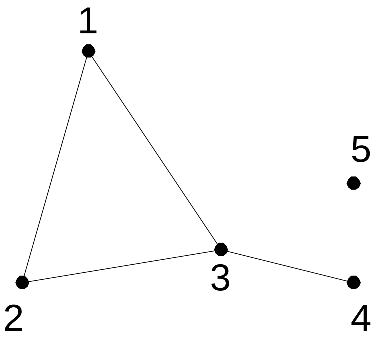
Tinjau graf G_2: $d(1) = 3$ → bersisian dengan sisi ganda
$d(3) = 4$ → bersisian dengan sisi gelang (*loop*)



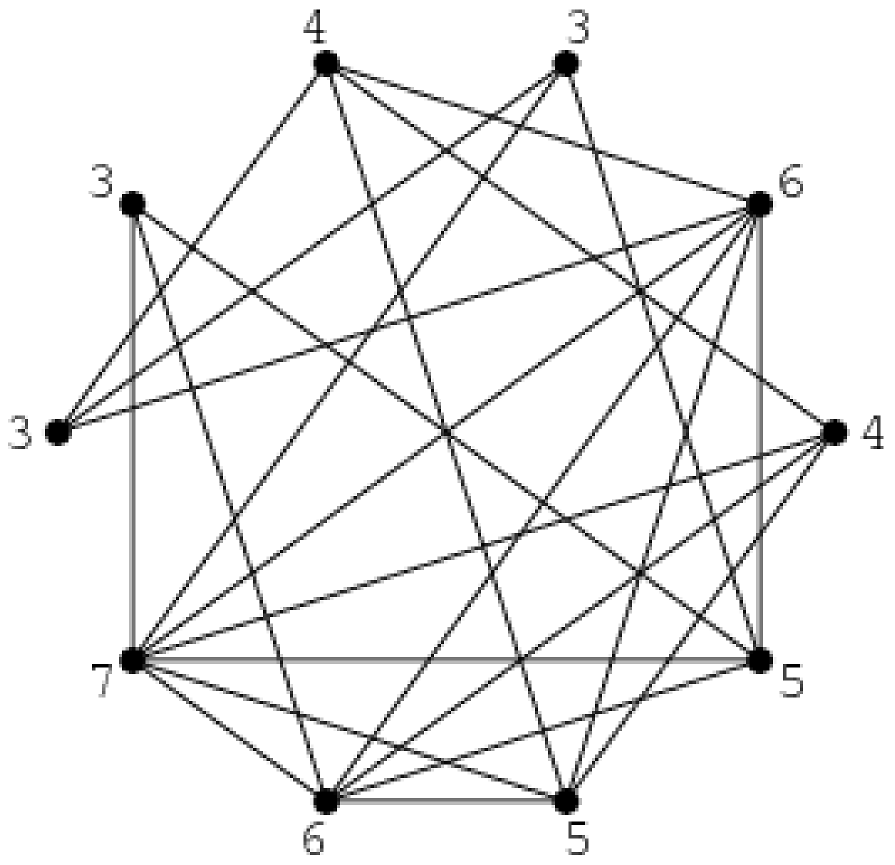
G_1



G_2

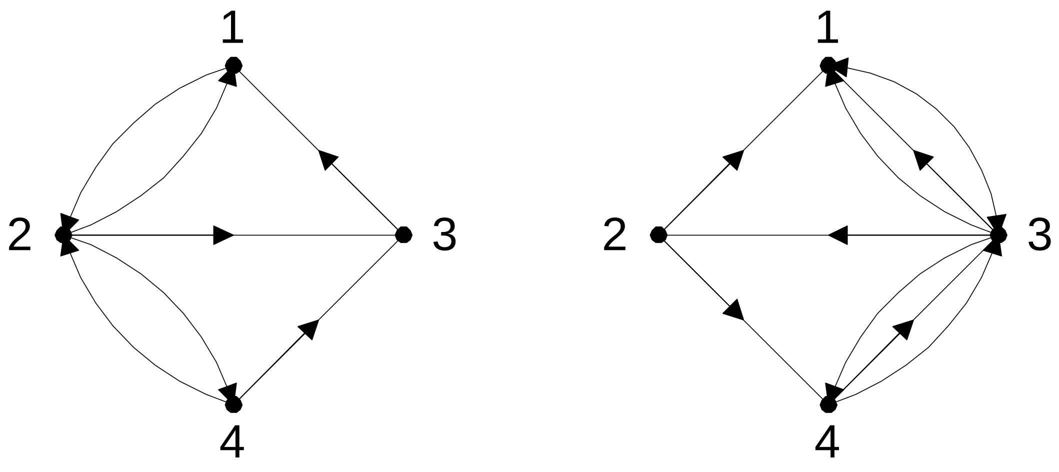


G_3



Pada graf di atas, derajat setiap simpul ditunjukkan pada masing-masing simpul

Pada graf beraarah, derajat simpul dibedakan lagi menjadi derajat masuk (in-degree) dan derajat keluar (out-degree)



G_4 G_5

Tinjau graf G_4:

$d_{in}(1) = 2; d_{out}(1) = 1$
$d_{in}(2) = 2; d_{out}(2) = 3$
$d_{in}(3) = 2; d_{out}(3) = 1$
$d_{in}(4) = 1; d_{out}(3) = 2$

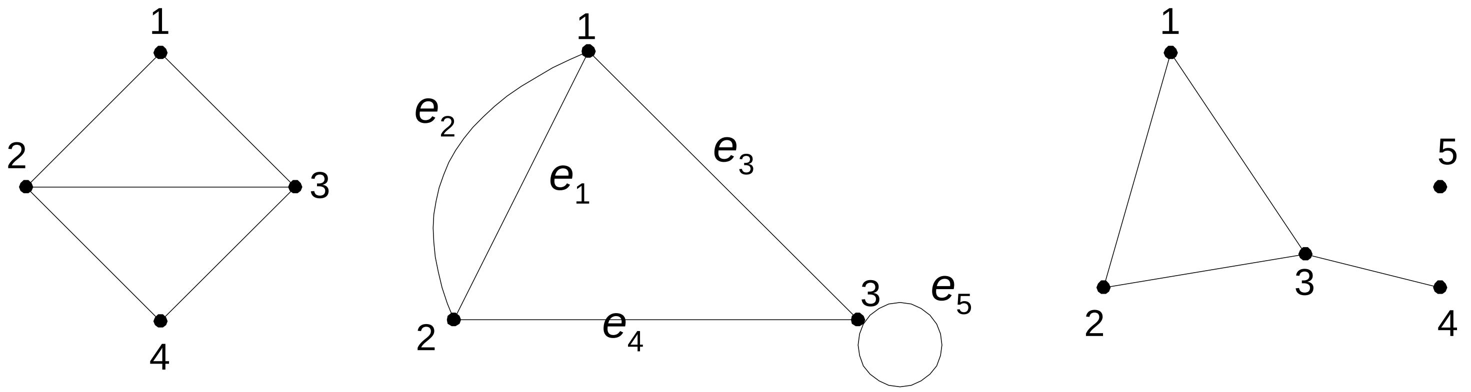
Lemma Jabat Tangan. Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Tinjau graf G_1: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

Tinjau graf G_2: $d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

Tinjau graf G_3: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$
$= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 4$



G_1 G_2 G_3

- Akibat dari *lemma* (*corollary*):

  Teorema: Untuk sembarang graf G, banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

- Jadi, menurut teorema ini, tidak mungkin sebuah graf memiliki simpul berderajat ganjil sejumlah ganjil

Contoh 2. Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

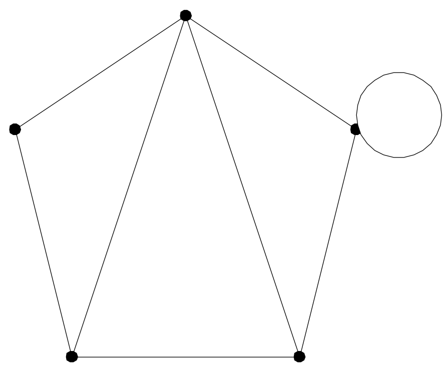
(a) 2, 3, 1, 1, 2

(b) 2, 3, 3, 4, 4

<u>Penyelesaian</u>:

(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil
(2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9).

(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap
(2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16).



Latihan

- Mungkinkah dibuat graf-sederhana 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:

  (a) 5, 2, 3, 2, 4

  (b) 4, 4, 3, 2, 3

  (c) 3, 3, 2, 3, 2

  (d) 4, 4, 1, 3, 2

  Jika mungkin, berikan satu contohnya, jika tidak mungkin, berikan alasan singkat.

Jawaban:

(a) 5, 2, 3, 2, 4: Tidak mungkin, karena ada simpul berderajat 5

(b) 4, 4, 3, 2, 3: Mungkin [contoh banyak]

(c) 3, 3, 2, 3, 2: Tidak mungkin, karena jumlah simpul berderajat ganjil ada 3 buah (alasan lain, karena jumlah derajat ganjil)

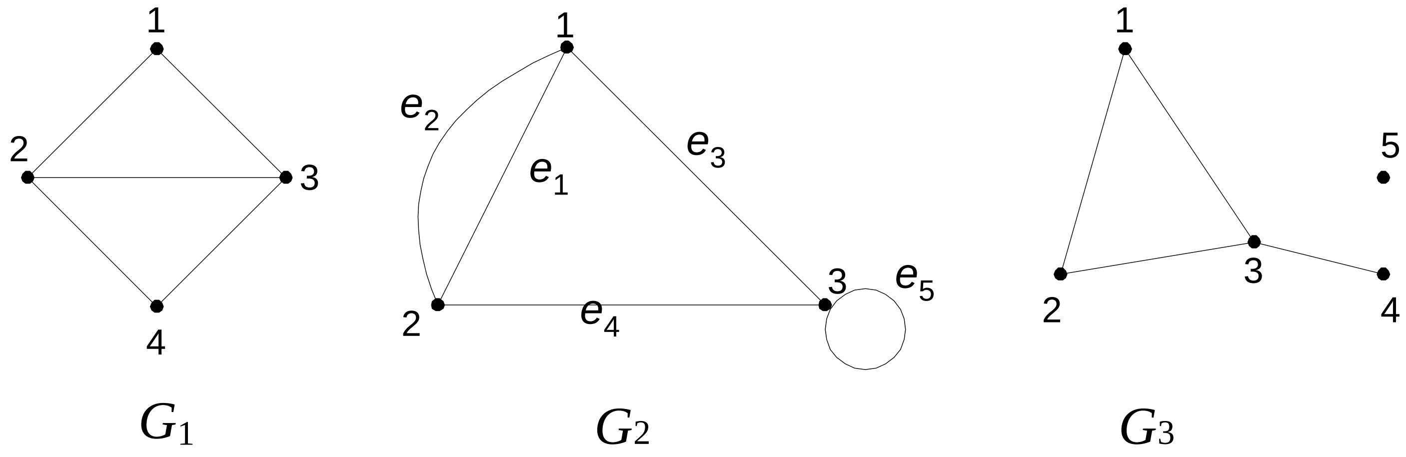
(d) 4, 4, 1, 3, 2: Tidak mungkin, karena simpul-1 dan simpul-2 harus bertetangga dengan simpul sisanya, berarti simpul-3 minimal berderajat 2 (kontradiksi dengan simpul-3 berderajat 1)

6. Lintasan (*Path*)

Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2,... , v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, ... , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G.

Tinjau graf G_1: lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).

Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada G_1 memiliki panjang 3.

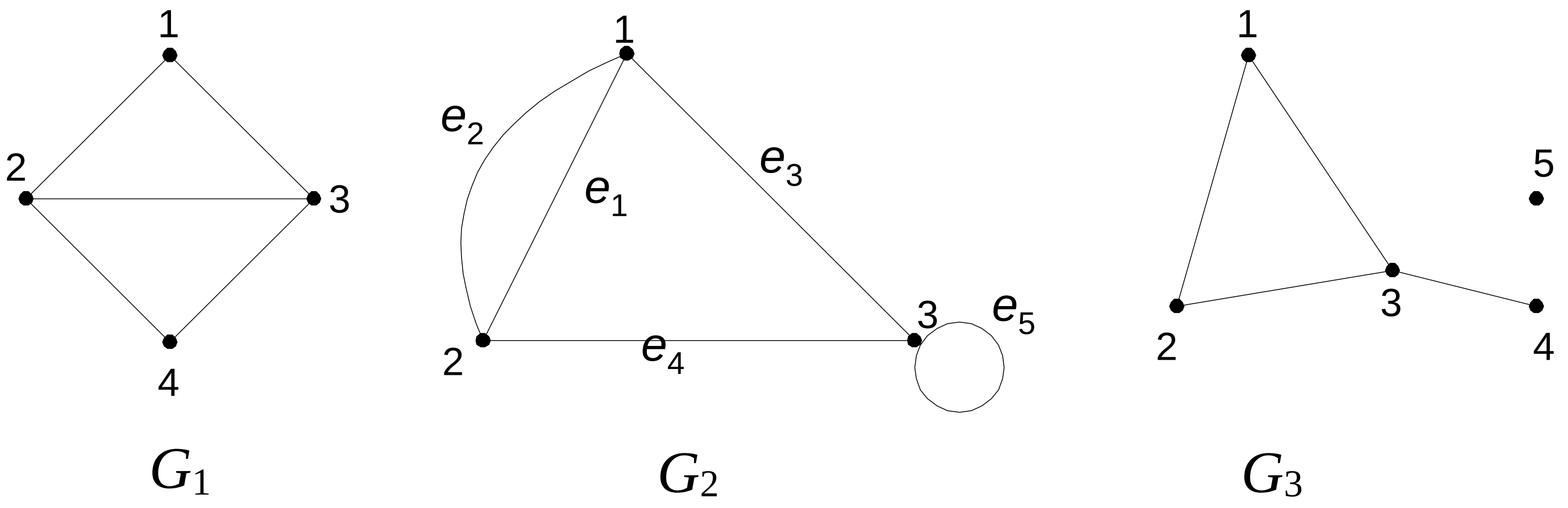


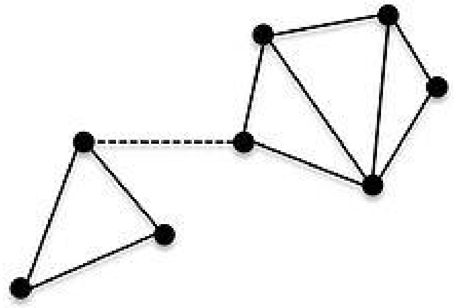
7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.

Tinjau graf G_1: 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.

Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada G_1 memiliki panjang 3.



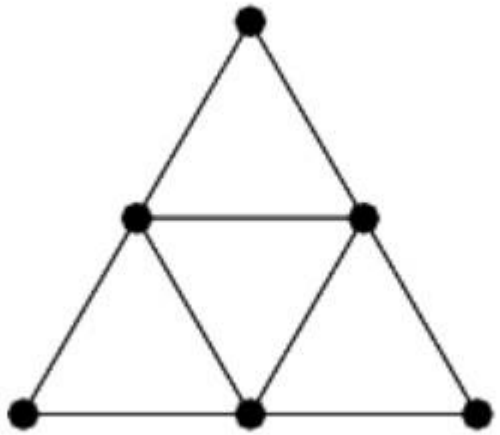


8. Kerterhubungan (*Connected*)

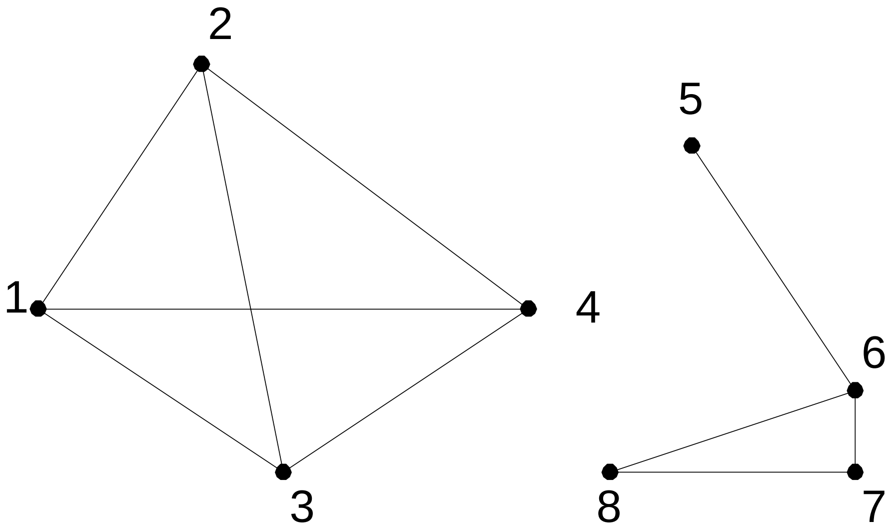
Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2.

G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j.

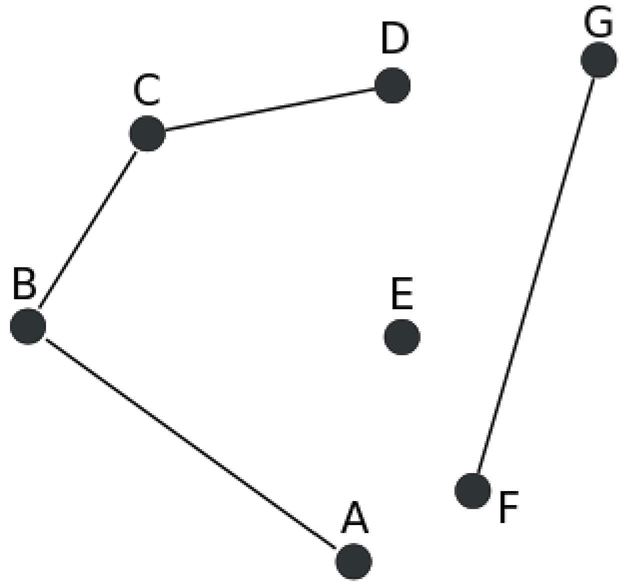
Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).



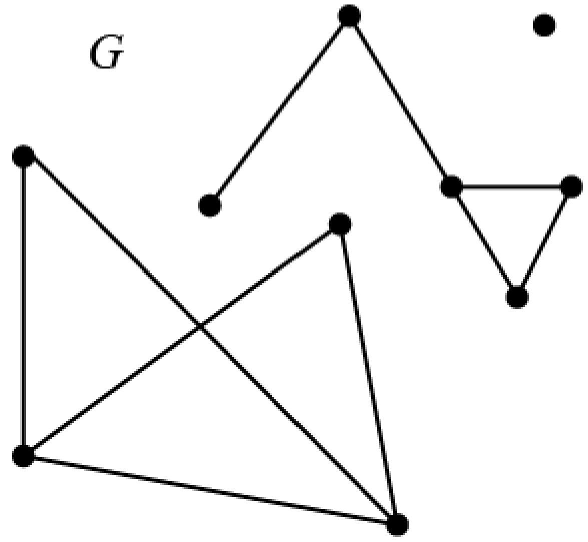
Contoh graf terhubung:



Contoh graf tak-terhubung:



Graf tak-terhubung

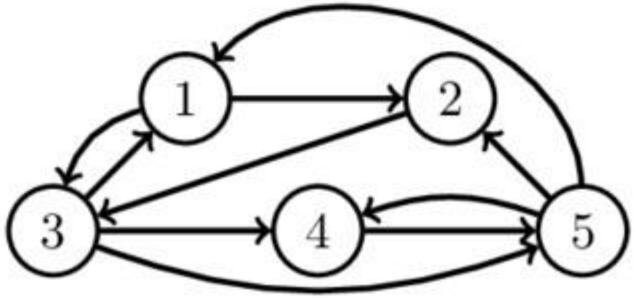


Graf tak-terhubung

- Graf berarah *G* dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari *G* diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

- Dua simpul, *u* dan *v*, pada graf berarah *G* disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari *u* ke *v* dan juga lintasan berarah dari *v* ke *u*.

- Jika *u* dan *v* tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka *u* dan *v* dikatakan **terhubung lemah** (*weakly coonected*).

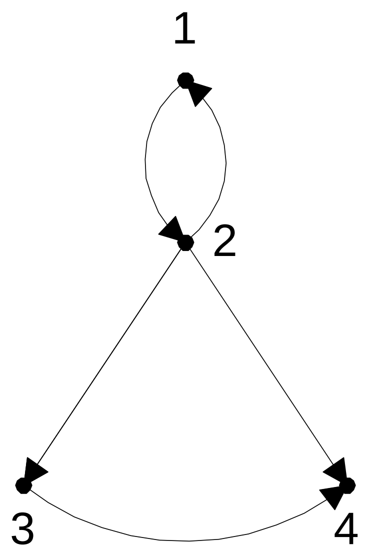


- Simpul 1 dan 4 terhubung kuat, karena ada lintasan dari 1 ke 4 dan lintasan dari 4 ke 1:

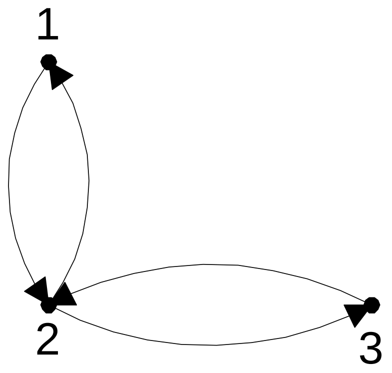
  Lintasan dari 1 ke 4: 1, 2, 3, 4

  Lintasan dari 4 ke 1: 4, 5, 1

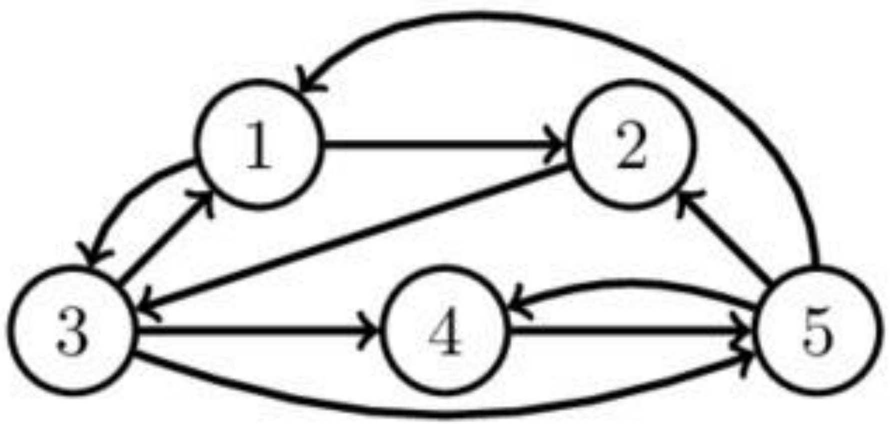
- Graf berarah *G* disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang *u* dan *v* di *G*, terhubung kuat. Kalau tidak, *G* disebut **graf terhubung lemah**.



Graf berarah
terhubung lemah



Graf berarah
terhubung kuat



Graf berarah terhubung kuat: selalu ada lintasan dari sepasang simpul manapun.

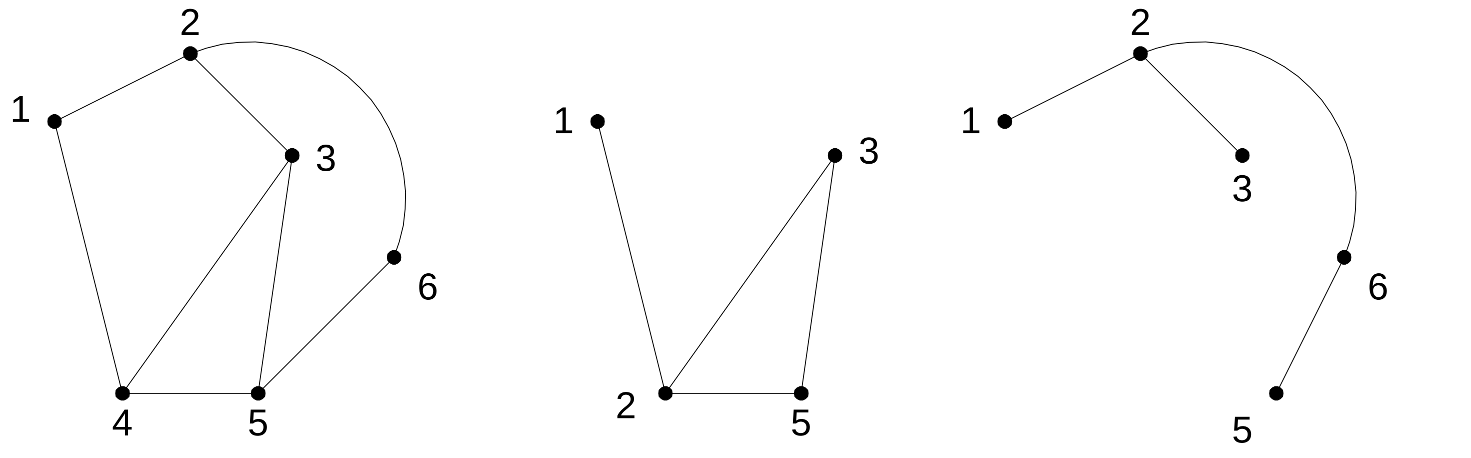
Periksa!

8. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen

Upagraf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari jika $V_1 \subseteq G$
V dan $E_1 \subseteq E$.

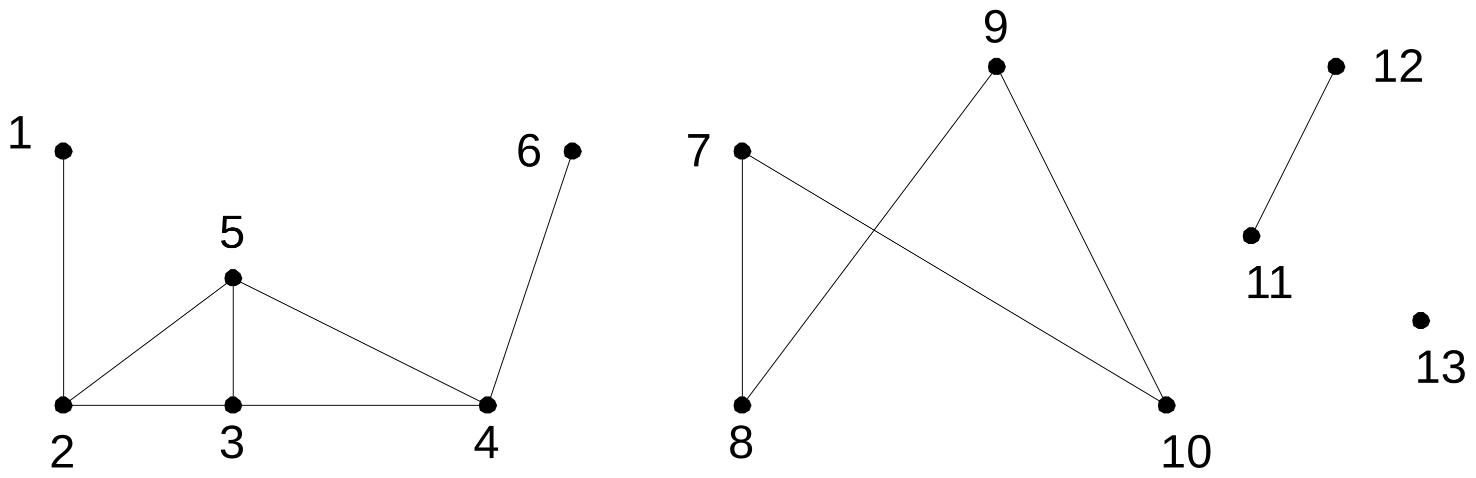
Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E$ - graf E_1 dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.



(a) Graf G_1 (b) Sebuah upagraf (c) komplemen dari upagraf (b)

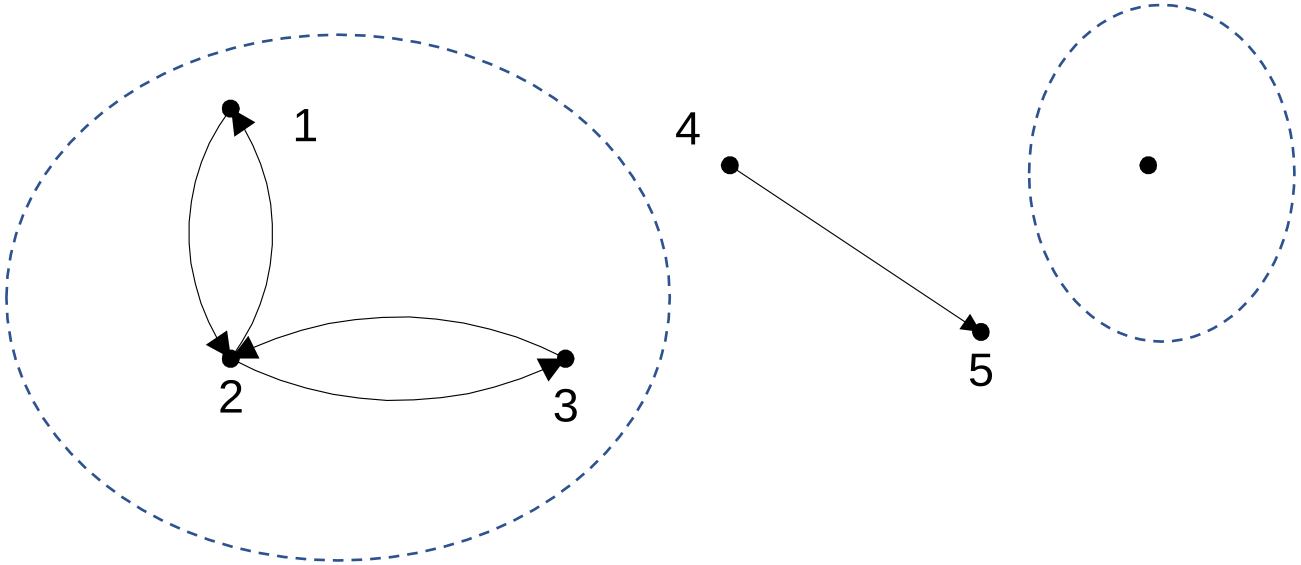
Komponen graf (*connected component*) adalah maksimum jumlah
upagraf terhubung dalam graf *G*.

Graf *G* di bawah ini mempunyai 4 buah komponen.



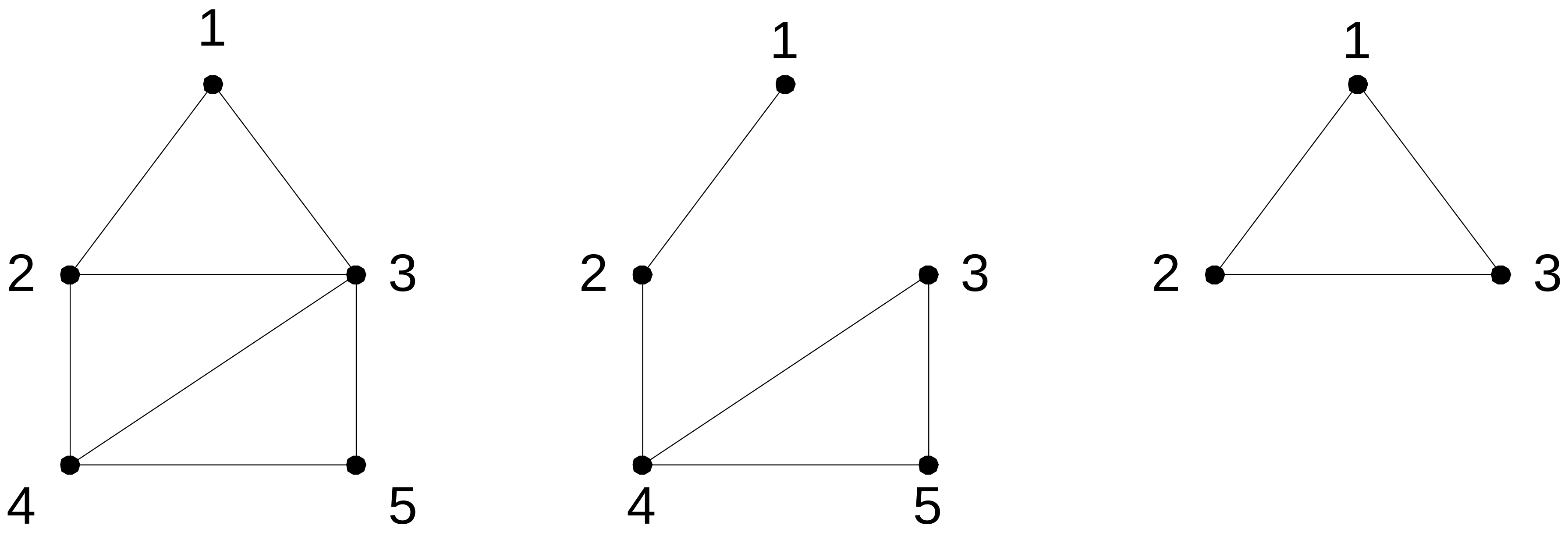
Pada graf berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf yang terhubung kuat.

Graf di bawah ini mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat:



9. Upagraf Merentang (*Spanning Subgraph*)

Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf rentang** jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G).



(a) graf G, (b) upagraf merentang dari G, (c) bukan upagraf merentang dari G

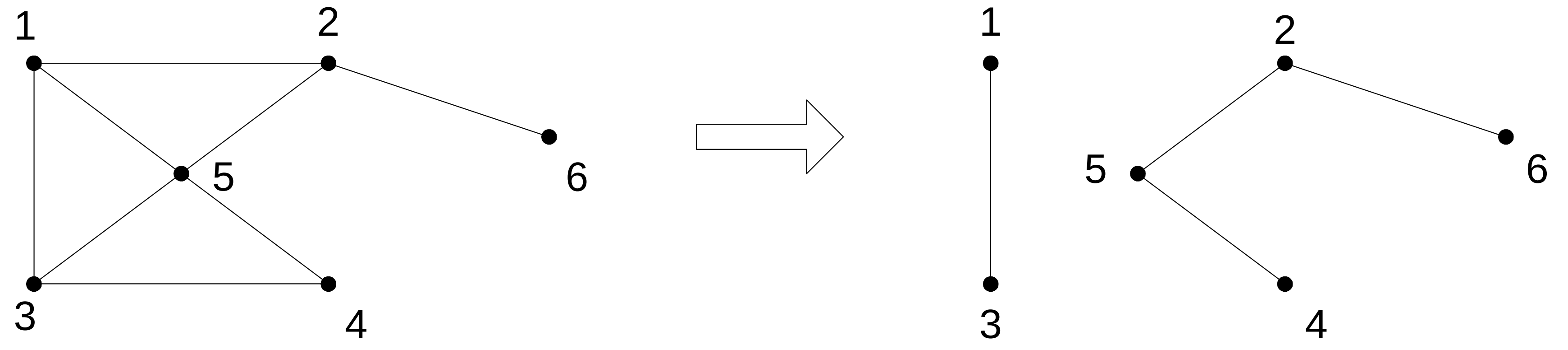
10. *Cut-Set*

Cut-set dari graf terhubung *G* adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari *G* menyebabkan *G* tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah, {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

Himpunan {(1,2), (2,5)} juga adalah *cut-set*, {(1,3), (1,5), (1,2)} adalah *cut-set*, {(2,6)} juga *cut-set*,

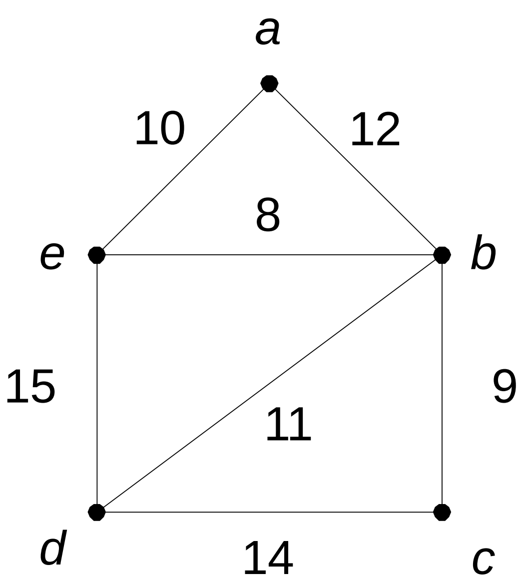
tetapi {(1,2), (2,5), (4,5)} bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, {(1,2), (2,5)} adalah *cut-set*.



(a) (b)

11. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

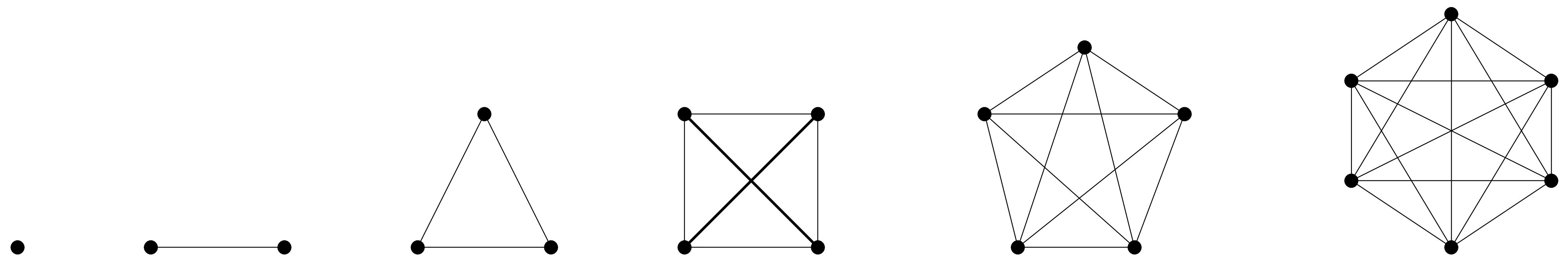
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



Beberapa Graf Khusus

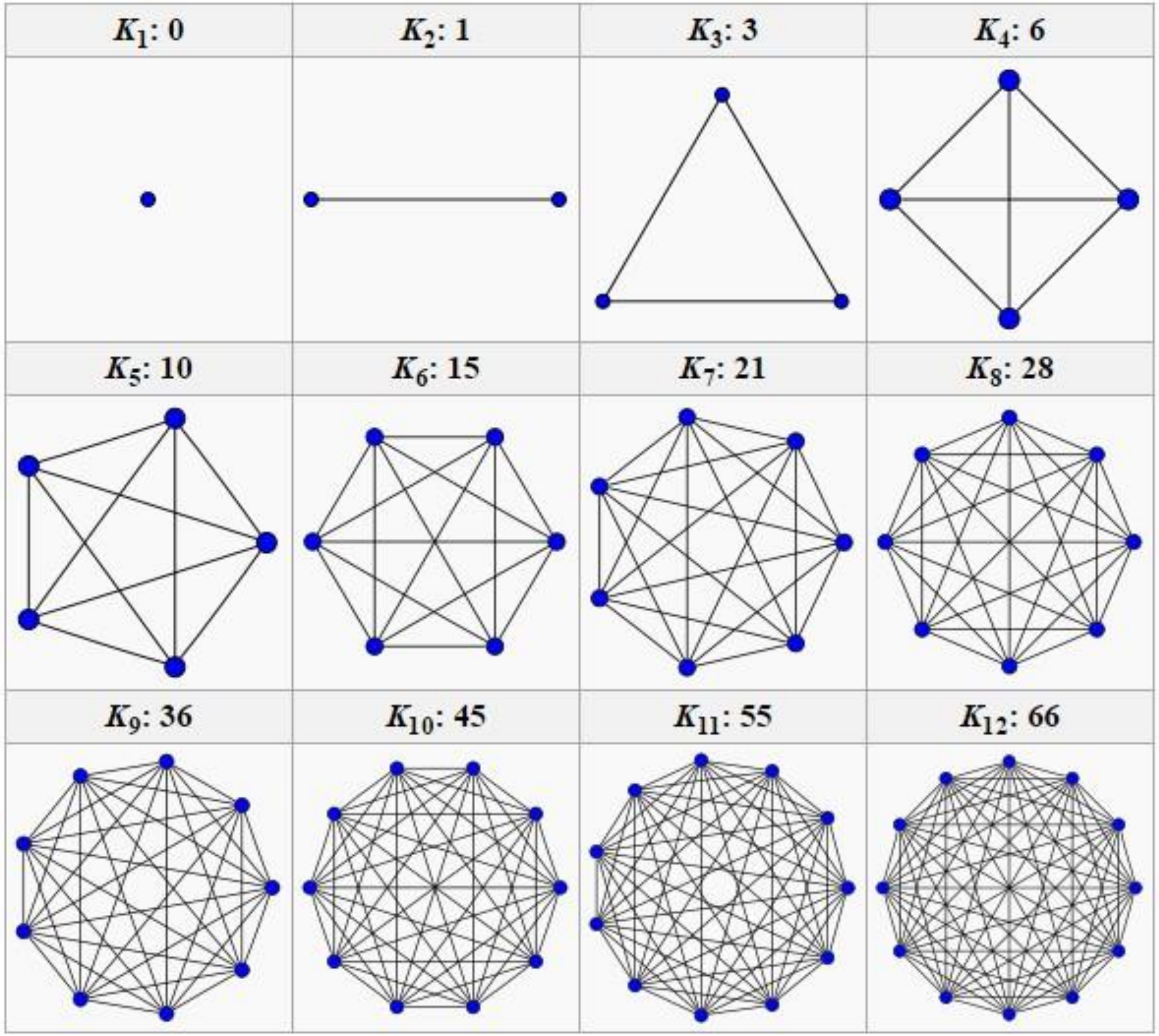
a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n - 1)/2$.



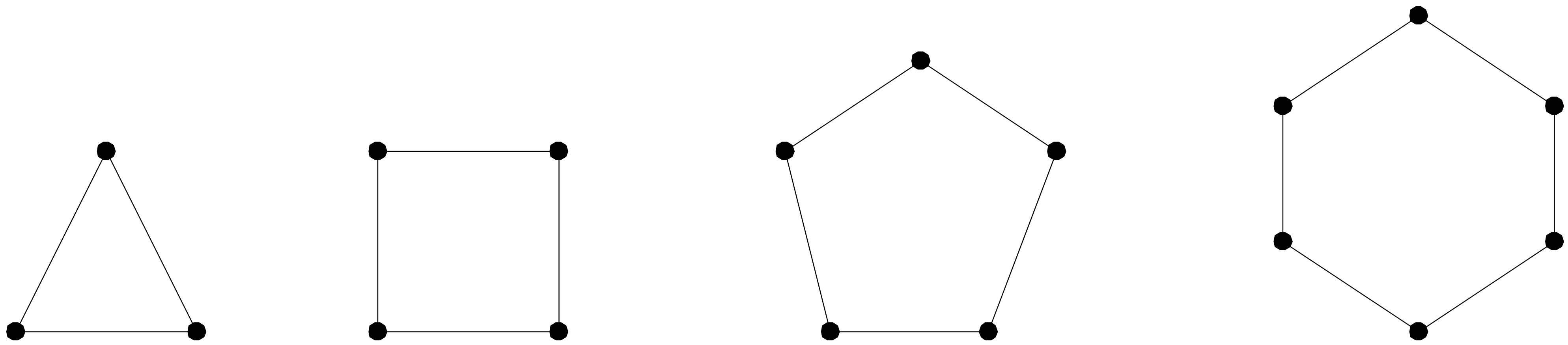
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Jumlah sisi di dalam graf lengkap



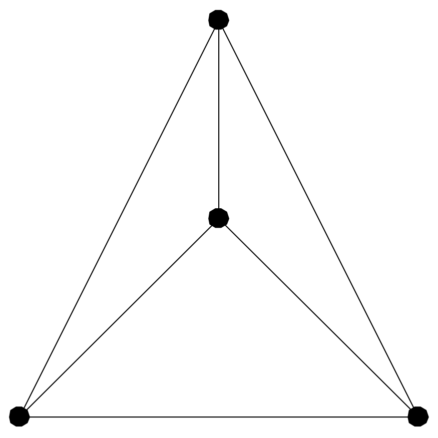
b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan *n* simpul dilambangkan dengan C_n.

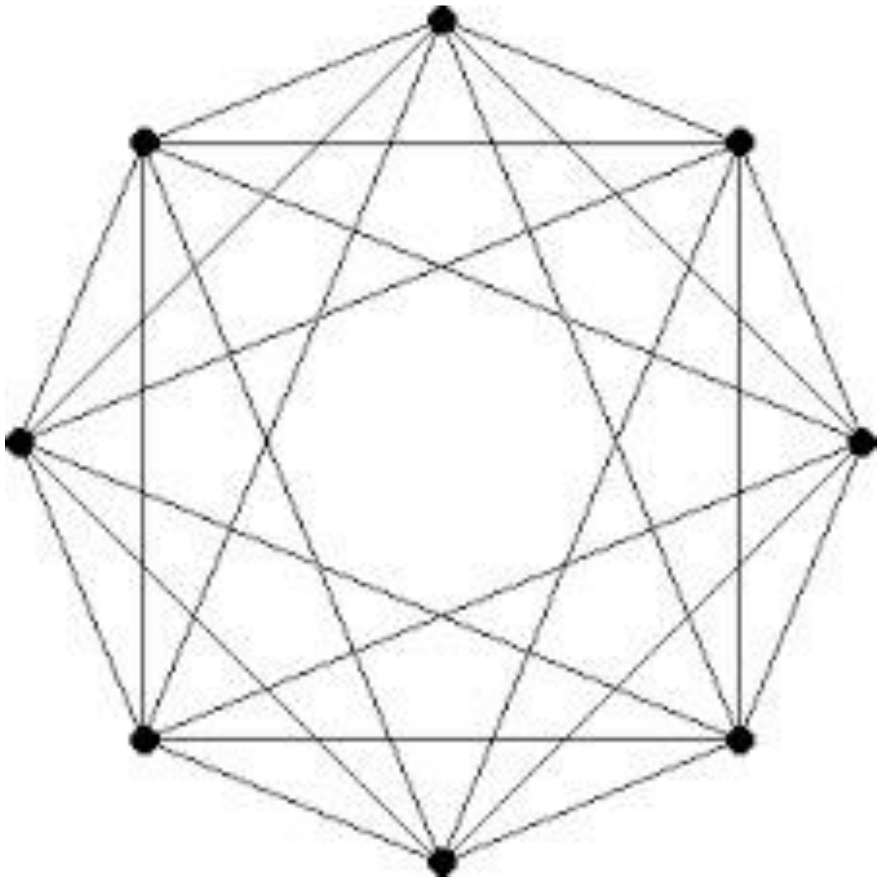


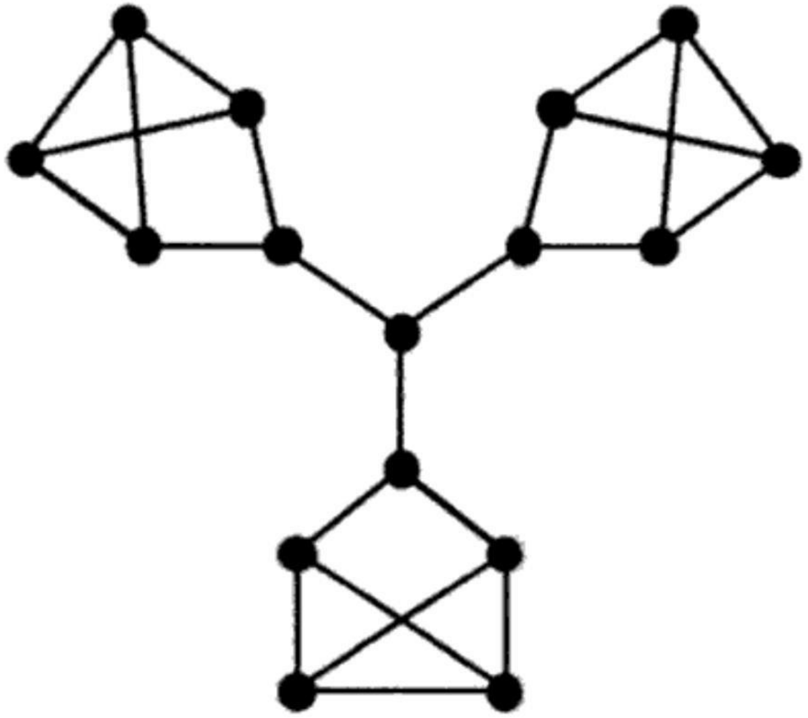
c. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r. Jumlah sisi pada graf teratur adalah $nr/2$.



Contoh-fontoh graf teratur lainnya:





Latihan

- Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama dan tiap simpul berderajat ≥ 4 ?

Jawaban: Tiap simpul berderajat sama -> graf teratur.

- Jumlah sisi pada graf teratur berderajat r adalah e = nr/2.

  Jadi, n = 2e/r = (2)(16)/r = 32/r.

- Untuk r = 4, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah maksimum, yaitu n = 32/4 = 8.
- Untuk r yang lain (r > 4 dan r merupakan pembagi bilangan bulat dari 32):

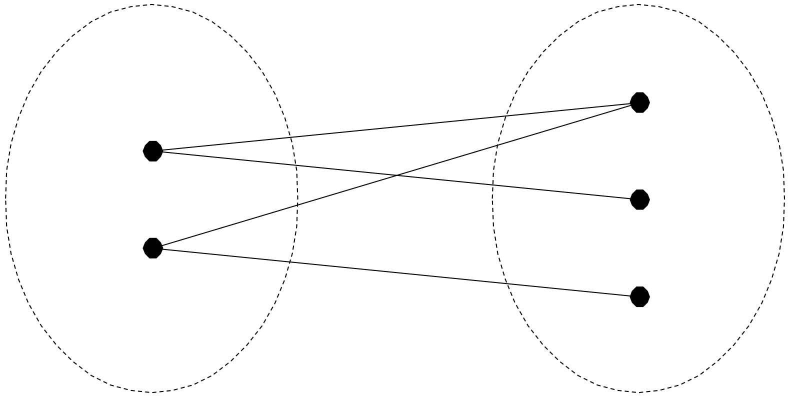
  r = 8 -> n = 32/8 = 4 -> tidak mungkin membuat graf sederhana.

  r = 16 -> n = 32/16 = 2 -> tidak mungkin membuat graf sederhana.

- Jadi, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah 8 buah (maksimum dan minimum).

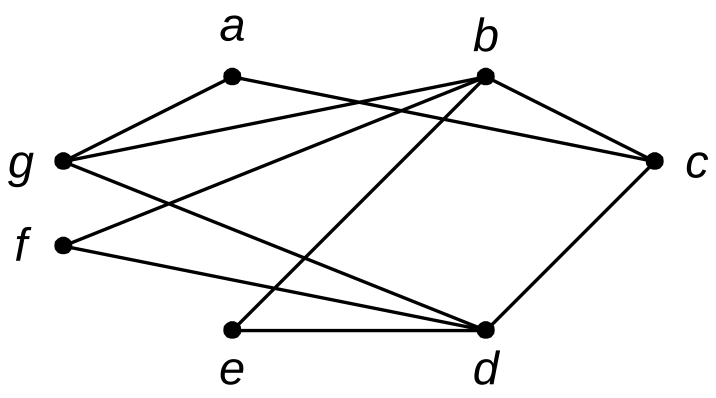
d. Graf *Bipartite* (*Bipartite Graph*)

Graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.

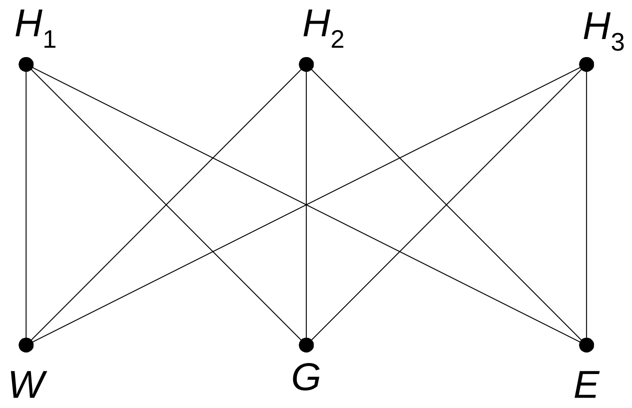


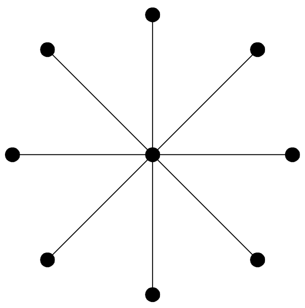
V_1 V_2

- Graf G di bawah ini adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi $V_1 = \{a, b, d\}$ dan $V_2 = \{c, e, f, g\}$



- Contoh graf bipartit lainnya:

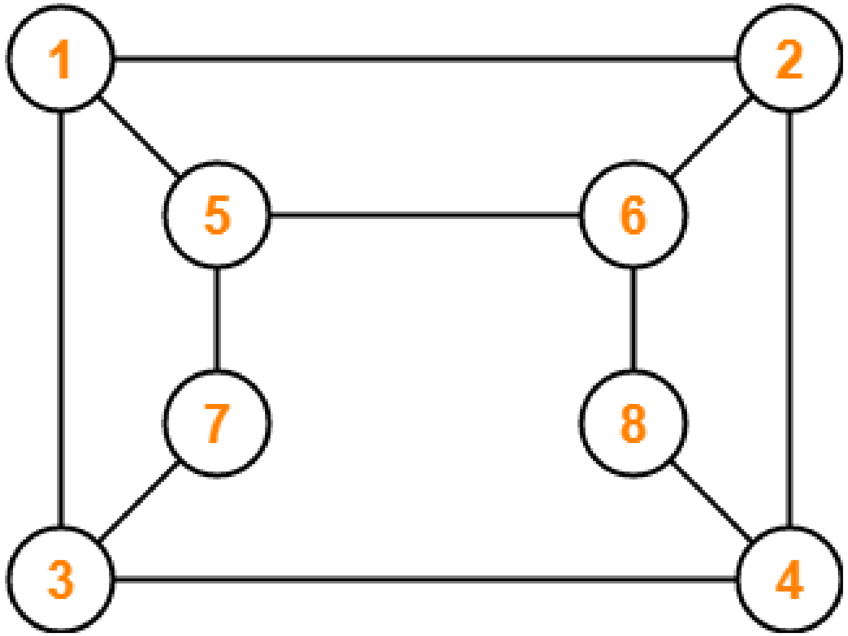




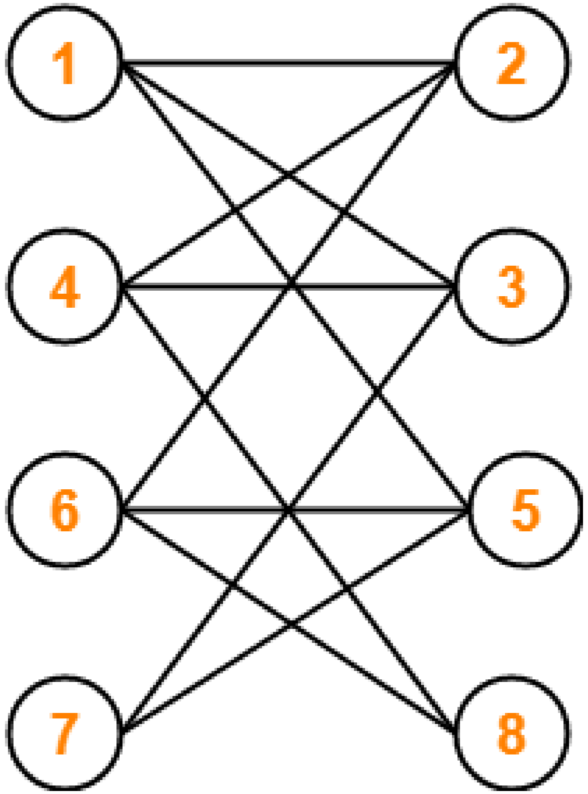
V_1 = {H1, H2, H3} dan V_2 = {W, G, E}

V_1 = {simpul di tengah} dan V_2 = {simpul2 lainnya}

Apakah ini graf bipartit?



Ya, dapat digambar ulang menjadi



$V_1 = \{1, 4, 6, 7\}$ dan $V_2 = \{2, 3, 5, 8\}$