

Implikasi

- Disebut juga proposisi bersyarat
- Bentuk proposisi: “jika p , maka q ”
- Notasi: $p \rightarrow q$
- p disebut **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**
- q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Contoh-contoh implikasi

- a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari Ayah
- b. Jika suhu mencapai 80°C , maka *alarm* akan berbunyi
- c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Tabel kebenaran implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Penjelasan (dengan contoh)

Dosen: “Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini”.

Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong?
Tinjau empat kasus berikut ini:

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar).

∴ pernyataan dosen benar.

Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

∴ dosen berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar).

∴ dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

∴ dosen anda benar.

- Perhatikan bahwa dalam implikasi yang dipentingkan nilai kebenaran premis dan konsekuen, bukan hubungan sebab dan akibat diantara keduanya.
- Beberapa implikasi di bawah ini valid meskipun secara bahasa tidak mempunyai makna:

“Jika $1 + 1 = 2$ maka Paris ibukota Perancis”

“Jika n bilangan bulat maka hari ini hujan”

Cara-cara mengekspresikan implikasi $p \rightarrow q$:

- Jika p , maka q (*if p , then q*)
- Jika p , q (*if p , q*)
- p mengakibatkan q (*p implies q*)
- q jika p (*q if p*)
- p hanya jika q (*p only if q*)
- p syarat cukup untuk q (*p is sufficient condition for q*)
- q syarat perlu bagi p (*q is necessary condition for q*)
- q bilamana p (*q whenever p*)
- q mengikuti dari p (*q follows from p*)

Contoh. Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk:

1. **Jika** hari hujan, **maka** tanaman akan tumbuh subur.
2. **Jika** tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
3. Es yang mencair di kutub **mengakibatkan** permukaan air laut naik.
4. Orang itu mau berangkat **jika** ia diberi ongkos jalan.
5. Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal **hanya jika** ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
6. **Syarat cukup** agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
7. **Syarat perlu** bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
8. Banjir bandang terjadi **bilamana** hutan ditebangi.

Latihan.

Ubahlah proposisi di bawah ini dalam bentuk standard “jika p maka q ”:

- 1) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
- 2) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.

Jawaban

- 1) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.”

Ingat: $p \rightarrow q$ dapat dibaca p syarat cukup untuk q

Susun sesuai format:

Percikan api dari rokok adalah syarat cukup agar pom bensin meledak.”

Identifikasi proposisi atomik:

p : Api memercik dari rokok

q : Pom bensin meledak

Notasi standard: Jika p , maka q

Jika api memercik dari rokok, maka pom bensin meledak.

2) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.

Ingat: $p \rightarrow q$ dapat dibaca q syarat perlu untuk p

Susun sesuai format:

Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia

Identifikasi proposisi atomik:

q : Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan

p : Indonesia ikut Piala Dunia

Notasi standard: Jika p , maka q

Jika Indonesia ikut Piala Dunia, maka Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan.

Latihan

Nyatakan pernyataan berikut:

“Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah”.

dalam notasi simbolik.

Penyelesaian:

Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah”.

Format: q jika p

Susun ulang ke bentuk standard: Jika p , maka q

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

m : Anda berusia di bawah 17 tahun.

n : Anda sudah menikah.

r : Anda dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu.

maka pernyataan di atas dapat ditulis sebagai:

$$(m \wedge \sim n) \rightarrow \sim r$$

Latihan

Untuk menerangkan mutu sebuah hotel, misalkan p : Pelayanannya baik, dan q : Tarif kamarnya murah, r : Hotelnya berbintang tiga.

Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik (menggunakan p, q, r):

- (a) Tarif kamarnya murah, tapi pelayanannya buruk.
- (b) Tarif kamarnya mahal atau pelayanannya baik, namun tidak keduanya.
- (c) Salah bahwa hotel berbintang tiga berarti tarif kamarnya murah dan pelayanannya buruk.

Penyelesaian:

$$(a) \quad q \wedge \sim p$$

$$(b) \quad \sim q \oplus p$$

$$(c) \quad \sim (r \rightarrow (q \wedge \sim p))$$



Latihan: Ubah kalimat ini ke dalam ekspresi logika (notasi simbolik)

1. Anda hanya dapat mengakses internet dari kampus hanya jika anda mahasiswa Informatika atau anda bukan seorang sarjana.

2. Anda tidak dapat menaiki *roller coaster* jika anda tingginya kurang dari 150 cm kecuali jika anda berusia lebih dari 16 tahun.

Ekivalensi bentuk $p \rightarrow q$

- Implikasi $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
<hr/>				
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

- Kita dapat membuat negasi dari implikasi dengan menggunakan bentuk ekuivalensinya tersebut:

$$\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

- Contoh: Jika anda berusia 17 tahun, maka anda boleh memiliki SIM

Negasinya: Anda berusia 17 tahun tetapi anda tidak boleh memiliki SIM.

Varian Proposisi Bersyarat

Konvers (kebalikan): $q \rightarrow p$

Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$

Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \rightarrow q$	Konvers $q \rightarrow p$	Invers $\sim p \rightarrow \sim q$	Kontraposisi $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:
“Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya”

Penyelesaian:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil

Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya

Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil

Latihan. Tentukan kontraposisi dari pernyataan:

- (a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara.
- (b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negatif.
- (c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.
- (d) Hanya jika ia tdk terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan.
- (e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang.
- (f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin.

Penyelesaian:

Latihan

Diberikan pernyataan “Perlu memiliki *password* yang sah agar anda bisa *log on* ke *server*”

- (a) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi “jika p , maka q ”.
- (b) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tsb.

Penyelesaian:

Misalkan

p : Anda bisa *log on* ke *server*

q : Memiliki *password* yang sah

maka

- (a) Jika anda bisa *log on* ke *server* maka anda memiliki *password* yang sah
- (b) Ingkaran: “Anda bisa *log on* ke *server* dan anda tidak memiliki *password* yang sah”

Konvers: “Jika anda memiliki *password* yang sah maka anda bisa *log on* ke *server*”

Invers: “Jika anda tidak bisa *log on* ke *server* maka anda tidak memiliki *password* yang sah”

Kontraposisi: “Jika anda tidak memiliki *password* yang sah maka anda tidak bisa *log on* ke *server*”

Bi-implikasi

- Bentuk proposisi: “ p jika dan hanya jika q ”
- Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

- Dengan kata lain, pernyataan “ p jika dan hanya jika q ” dapat dibaca “Jika p maka q dan jika q maka p ”.

- Contoh teorema dalam bentuk biimplikasi:

Teorema: $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$, yang dalam hal ini $a > 0$

- Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:
 - (a) p jika dan hanya jika q .
 - (b) p adalah syarat perlu dan cukup untuk q .
 - (c) Jika p maka q , dan sebaliknya.
 - (d) p *iff* q

- Contoh.** Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:
- (a) $1 + 1 = 2$ jika dan hanya jika $2 + 2 = 4$.
 - (b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.
 - (c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.
 - (d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

Latihan

[LIU85] Sebuah pulau didiami oleh dua suku asli. Penduduk suku pertama selalu mengatakan hal yang benar, sedangkan penduduk dari suku lain selalu mengatakan kebohongan. Anda tiba di pulau ini dan bertanya kepada seorang penduduk setempat apakah di pulau tersebut ada emas atau tidak. Ia menjawab, “Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran”. Apakah ada emas di pulau tersebut?

Penyelesaian:

Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran

Misalkan

p : Ada emas di pulau ini

q : Saya selalu menyatakan kebenaran

Ekspresi logika: $p \leftrightarrow q$

Tinjau dua kemungkinan kasus:

Kasus 1, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang benar.

Kasus 2, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang bohong.

Kasus 1: orang tersebut selalu menyatakan hal yang benar. Ini berarti q benar, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga benar, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut bernilai benar. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila q benar dan $p \leftrightarrow q$ benar, maka p harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

Kasus 2: orang tersebut selalu menyatakan hal yang bohong. Ini berarti q salah, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga salah, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut salah. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila q salah dan $p \leftrightarrow q$ salah, maka p harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Dari kedua kasus, kita selalu berhasil menyimpulkan bahwa ada emas di pulau tersebut, meskipun kita tidak dapat memastikan dari suku mana orang tersebut. ■

Latihan. Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk “ p jika dan hanya jika q ”:

- (a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.
- (b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.
- (c) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.
- (d) Jika anda lama menonton televisi maka mata anda lelah, begitu sebaliknya.
- (e) Kereta api datang terlambat tepat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.

Penyelesaian:

Argumen

- Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

yang dalam hal ini, p_1, p_2, \dots, p_n disebut hipotesis (atau premis), dan q disebut konklusi.

- Sering ditulis dalam bentuk: $p_1, p_2, \dots, p_n \Rightarrow q$
- Konklusi biasanya ditandai dengan kata “Jadi”, “Oleh karen itu”, “Dengan demikian, “, dll

- Contoh sebuah argumen:

Jika anda mahasiswa Informatika maka anda tidak sulit belajar Bahasa Java. Jika anda tidak suka begadang maka anda bukan mahasiswa Informatika. Tetapi, anda sulit belajar Bahasa Java dan anda tidak suka begadang. Jadi, anda bukan mahasiswa Informatika.

- Argumen ada yang **sahih** (*valid*) dan **palsu** (*invalid*).

Definisi. Sebuah argumen dikatakan sah jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

Jika argumen sah, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Latihan

Perlihatkan bahwa argumen berikut:

Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang.

adalah sah.

Penyelesaian:

Misalkan:

p : Air laut surut setelah gempa di laut

q : Tsunami datang:

Argumen:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini.

Cara 1: Bentuklah tabel kebenaran untuk p , q , dan $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T (baris 1)
T	F	F (baris 2)
F	T	T (baris 3)
F	F	T (baris 4)

Argumen dikatakan sah jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis p dan $p \rightarrow q$ benar, maka konklusi q juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa tabel, p dan $p \rightarrow q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini q juga benar. Jadi, argumen di atas **sahih**.

Cara 2: Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

merupakan tautologi. Tabel 1.16 memperlihatkan bahwa $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sah.

Tabel 1.16 $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ adalah tautologi

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponens. Jadi, kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponens adalah argumen yang sah. ■

Latihan

Perlihatkan bahwa penalaran pada argumen berikut:

*“Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang
Tsunami datang. Jadi, air laut surut setelah gempa di laut”*
tidak benar, dengan kata lain argumennya palsu.

Penyelesaian:

Argumen di atas berbentuk

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

p	q	$p \rightarrow q$	
T	T	T	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	T	T	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

Dari tabel tampak bahwa hipotesis q dan $p \rightarrow q$ benar pada baris ke-3, tetapi pada baris 3 ini konklusi p salah. Jadi, argumen tersebut tidak sah atau palsu, sehingga penalaran menjadi tidak benar.

Latihan

Periksa kesahihan argumen berikut ini:

Jika 5 lebih kecil dari 4, maka 5 bukan bilangan prima.
5 tidak lebih kecil dari 4.

\therefore 5 adalah bilangan prima

Penyelesaian:

Misalkan p : 5 lebih kecil dari 4

q : 5 adalah bilangan prima.

Argumen:

	p	q	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim p$
$p \rightarrow \sim q$	T	T	F	F	F
$\sim p$	T	F	T	T	F
$\therefore q$	F	T	F	T	T
	F	F	T	T	T

Tabel memperlihatkan tabel kebenaran untuk kedua hipotesis dan konklusi tersebut. Baris ke-3 dan ke-4 pada tabel tersebut adalah baris di mana $p \rightarrow \sim q$ dan $\sim p$ benar secara bersama-sama, tetapi pada baris ke-4 konklusi q salah (meskipun pada baris ke-3 konklusi q benar). Ini berarti argumen tersebut palsu.

- Perhatikanlah bahwa meskipun konklusi dari argumen tersebut kebetulan merupakan pernyataan yang benar (“5 adalah bilangan prima” adalah benar),
- tetapi konklusi dari argumen ini tidak sesuai dengan bukti bahwa argumen tersebut palsu. ■

Beberapa argumen yang sudah terbukti sah

1. Modus ponens

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

2. Modus tollens

$$p \rightarrow q$$

$$\sim q$$

$$\therefore \sim p$$

3. Aturan transitif

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

3. Silogisme disjungtif/kontrapositif

$$p \vee q$$

$$\sim p$$

$$\therefore q$$

$$p \vee q$$

$$\sim q$$

$$\therefore p$$

4. Simplifikasi konjungtif

$$p \wedge q$$

$$\therefore p$$

$$p \wedge q$$

$$\therefore q$$

5. Penjumlahan disjungtif

p

$\therefore p \vee q$

6. Konjungsi

p

q

$\therefore p \wedge q$

- Selain menggunakan Cara 1 dan Cara 2 di atas, sebuah argumen juga dapat dibuktikan kesahihannya dengan menggunakan campuran hukum-hukum logika dan metode penarikan kesimpulan yang sudah terbukti sah (modus ponens, modus tollens, dsb).
- Perhatikan contoh berikut ini.

- **Contoh:** Buktikan bahwa argumen berikut benar:

$$\sim p \vee q, s \vee p, \sim q \Rightarrow s$$

Bukti:

- | | |
|---------------------|----------------------------------|
| (1) $\sim p \vee q$ | Premis |
| (2) $\sim q$ | Premis |
| (3) $\sim p$ | Silogisme disjungtif (1) dan (2) |
| (4) $s \vee p$ | Premis |
| (5) s | Silogisme disjungtif (3) dan (4) |

- **Contoh:** Buktikan bahwa argumen berikut benar:

$$p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \vee q \Rightarrow s \vee r$$

Bukti:

- | | | |
|-----|------------------------|------------------------------|
| (1) | $p \vee q$ | Premis |
| (2) | $\sim p \rightarrow q$ | Ekivalensi bentuk (1) |
| (3) | $q \rightarrow s$ | Premis |
| (4) | $\sim p \rightarrow s$ | Aturan transitif (2) dan (3) |
| (5) | $\sim s \rightarrow p$ | Ekivalensi bentuk (4) |
| (6) | $p \rightarrow r$ | Premis |
| (7) | $\sim s \rightarrow r$ | Aturan transitif (5) dan (6) |
| (8) | $s \vee r$ | Ekivalensi bentuk (7) |

Latihan

1. Diberikan sebuah proposisi:

Mahasiswa dapat mengambil mata kuliah Strategi Algoritma jika ia telah mengambil mata kuliah Struktur Diskrit.

Tentukan:

- (a) invers proposisi tersebut,
- (b) pernyataan yang ekuivalen dengan proposisi tersebut

(jawaban ada di balik ini)

Jawaban:

- p : mahasiswa telah mengambil mata kuliah Struktur Diskrit
 - q : mahasiswa dapat mengambil mata kuliah Strategi Algoritma
- (a) q jika p adalah ekspresi lain dari jika p maka q ($p \rightarrow q$)
invers ($\sim p \rightarrow \sim q$)
Jika mahasiswa belum mengambil mata kuliah Struktur Diskrit, maka ia belum dapat mengambil mata kuliah Strategi algoritma.
- (b) pernyataan tersebut dapat dinotasikan dengan : $\sim p \vee q$
Mahasiswa tidak mengambil mata kuliah Strukur Diskrit atau mengambil mata kuliah Strategi Algoritma

2. Diberikan dua buah premis berikut:

(i) Logika sulit atau tidak banyak mahasiswa yang menyukai logika.

(ii) Jika matematika mudah, maka logika tidak sulit.

Tunjukkan dengan pembuktian argumen (atau cara lain) apakah masing-masing konklusi berikut sah (valid) atau tidak berdasarkan dua premis di atas:

a) Bahwa matematika tidak mudah atau logika sulit.

b) Bahwa matematika tidak mudah, jika banyak mahasiswa menyukai logika.