

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)**

Высшая школа общей и прикладной физики

**Взаимодействие электромагнитных и квазиэлектростатических волн в
присутствии слабого внешнего магнитного поля**

Дипломная работа студента IV курса

Кутлина Антона Георгиевича

на соискание степени бакалавра

Научный руководитель:

старший научный сотрудник ИПФ РАН

кандидат физико-математических наук

_____ Е.Д. Господчиков

Рецензент:

младший научный сотрудник ИПФ РАН

кандидат физико-математических наук

_____ Е.А. Широков

Декан ВШ ОПФ

доктор физико-математических наук, доцент

_____ К.И. Рыбаков

Нижний Новгород

2016 г.

Содержание

Введение.....	3
1.Качественный анализ.....	5
1.1 Поперечное распространение ($\eta = 0$)	6
1.2 Распространение в плоскости $\vartheta = 0$	8
2.Математическая постановка задачи.....	11
2.1 Поперечное распространение ($\eta = 0$)	11
2.1 Распространение в плоскости $\vartheta = 0$	14
3.Численное моделирование	17
3.1 Обзор метода.....	17
3.2 Вычисление конкретного вида операторов.....	20
3.3 Результаты моделирования	24
4. Анализ полученных результатов	28
4.1 Метод фазовых интегралов	30
4.2 Случай изотропной плазмы.....	34
4.3 Общий случай поперечного распространения	38
Заключение.....	41
Список литературы	42

Введение

Нагрев электронной компоненты плазмы высокочастотным полем электромагнитной волны является основным и наиболее распространенным способом. Традиционно такой нагрев производится в магнитных ловушках с помощью волн ЭЦ диапазона на циклотронном резонансе ($u = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \sim 1$) и его гармониках. Существует большое количество работ, посвященных исследованию эффектов, связанных с поглощением в этом частотном диапазоне[1].

Если величина плазменной частоты много больше циклотронной ($\frac{\nu}{u} = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \gg 1$), излучение, запущенное из вакуума, неспособно достичь области циклотронного резонанса. Однако в этом случае для нагрева можно использовать конверсию электромагнитных волн в плазменные вблизи верхнего гибридного резонанса $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$ [2]. При использовании частоты излучения $\omega \sim \omega_c$ нагрев будет происходить вблизи границы. Поэтому в случае, когда необходимо сместить область нагрева внутрь плазмы, логично использовать частоту излучения порядка плазменной. В последнее время был достигнут большой прогресс в области создания установок магнитного удержания плазмы, в которых используется постоянное магнитное поле малой величины[3]. Это порождает новую область параметров ($u \ll 1$), эффекты в которой отличаются как от случая изотропной плазмы ($u = 0$), так и от случая сильной анизотропии ($u \sim 1$). В данной работе представлено численное и аналитическое исследование этих эффектов, а также найдены соотношения параметров среды и излучения, обеспечивающие максимальную эффективность поглощения.

В качестве модельной конфигурации плазмы была выбрана плоскостойкая геометрия. Этот выбор вполне обоснован в связи с параметрами существующих установок. Постоянное магнитное поле предполагалось однородным, а его направление ортогональным градиенту концентрации электронов. Такое упрощение оправдано в том случае, когда вдоль магнитного поля концентрация выравнивается намного быстрее, чем поперек, а кривизной линий магнитного

поля можно пренебречь по сравнению с масштабом поперечной неоднородности, что и имеет место в реальной ситуации.

В первом разделе производится анализ ожидаемых эффектов на основе качественных соображений, а также вводятся величины, определяющие геометрию задачи.

Во втором разделе приводится математическая постановка задачи, включающая в себя запись основных уравнений, постановку граничных условий, а также обсуждение полного набора безразмерных параметров, необходимых для описания исследуемых эффектов.

В третьем разделе содержится описание используемого метода численного моделирования, а также приводятся результаты его применения.

В четвертом разделе предпринимается попытка решения задачи об определении коэффициента поглощения СВЧ-излучения в магнитоактивной плазме с использованием метода фазовых интегралов.

1. Качественный анализ

Рассмотрим падение высокочастотной электромагнитной волны из вакуума на слой неоднородной магнитоактивной плазмы. Частоту излучения будем полагать достаточно большой для того, чтобы можно было пренебречь ионным вкладом в тензор диэлектрической проницаемости. Введем систему координат таким образом, чтобы направление постоянного магнитного поля совпадало с осью y , а направление градиента концентрации – с осью x . Направление волнового вектора падающей из вакуума волны будем характеризовать двумя углами в соответствии с рисунком 1.1

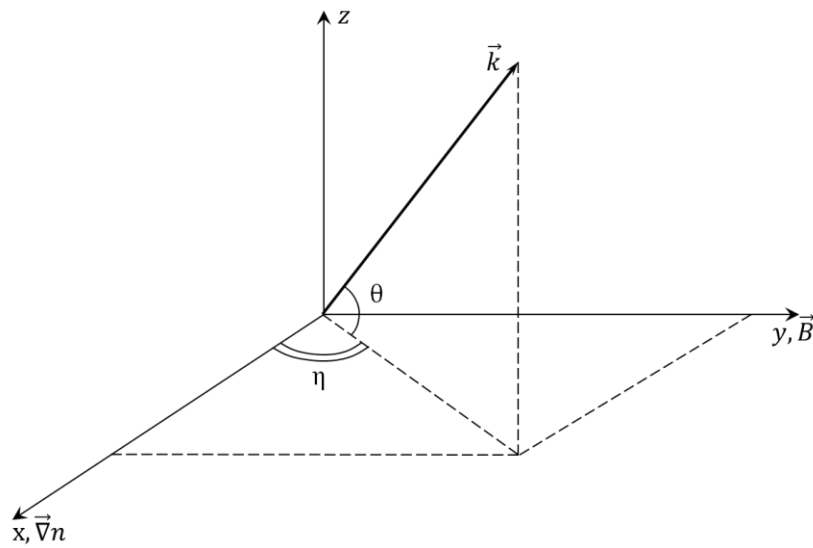


Рис.1.1 Выбранная система координат.

В рамках выбранной геометрии тензор диэлектрической проницаемости плазмы принимает следующий вид:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & ig \\ 0 & \varepsilon_{\parallel} & 0 \\ -ig & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{v}{1-u}, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - v, \quad (1.3)$$

$$g = \frac{v\sqrt{u}}{1-u}, \quad (1.4)$$

где $\nu = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ зависит только от координаты x . В процессе распространения волны в такой среде сохраняются поперечные по отношению к направлению градиента концентрации компоненты волнового вектора. Дисперсионное уравнение на компоненту показателя преломления вдоль градиента концентрации имеет вид биквадратного уравнения:

$$An_x^4 + Bn_x^2 + C = 0, \quad (1.5)$$

$$A = \varepsilon, \quad (1.6)$$

$$B = g^2 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon n_z^2 - \varepsilon\varepsilon_{\parallel} + n_y^2(\varepsilon + \varepsilon_{\parallel}), \quad (1.7)$$

$$C = \varepsilon n_z^4 + (n_y^4 - 2\varepsilon n_y^2 - g^2 + \varepsilon^2)\varepsilon_{\parallel} + n_z^2(g^2 + (n_y^2 - \varepsilon)(\varepsilon + \varepsilon_{\parallel})), \quad (1.8)$$

$$D = B^2 - 4AC = n_y^4(\varepsilon - \varepsilon_{\parallel})^2 + 2n_y^2(g^2(\varepsilon + \varepsilon_{\parallel}) - \varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_{\parallel})^2) + (g^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon\varepsilon_{\parallel})^2, \quad (1.9)$$

где $n_i = ck_i/\omega$ – показатель преломления вдоль i -го направления.

1.1 Поперечное распространение ($\eta = 0$)

Случай поперечного распространения характеризуется отсутствием взаимодействия нормальных мод среды. Этот факт следует из того, что система уравнений Максвелла при $\eta = 0$ распадается на две независимые группы уравнений, описывающие по-отдельности распространение обыкновенной и необыкновенной волн.

В случае поперечного распространения волны коэффициенты B и C уравнения (1.5) значительно упрощаются. Выпишем их:

$$B = 2\varepsilon n_z^2 + g^2 - \varepsilon(\varepsilon + \varepsilon_{\parallel})$$

$$C = (g^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon n_z^2)(n_z^2 - \varepsilon_{\parallel}).$$

На рисунке 1.2 приведена характерная зависимость показателя преломления от плотности плазмы при поперечном распространении. Ветка обыкновенной волны не отличается от изотропного случая – такая волна распространяется, не замечая магнитного поля. В точке $\nu = 1 - n_z^2 = \cos^2 \vartheta$ показатель преломления в направлении градиента концентрации становится равным нулю, волновой вектор вытягивается вдоль оси z и происходит отражение волны.

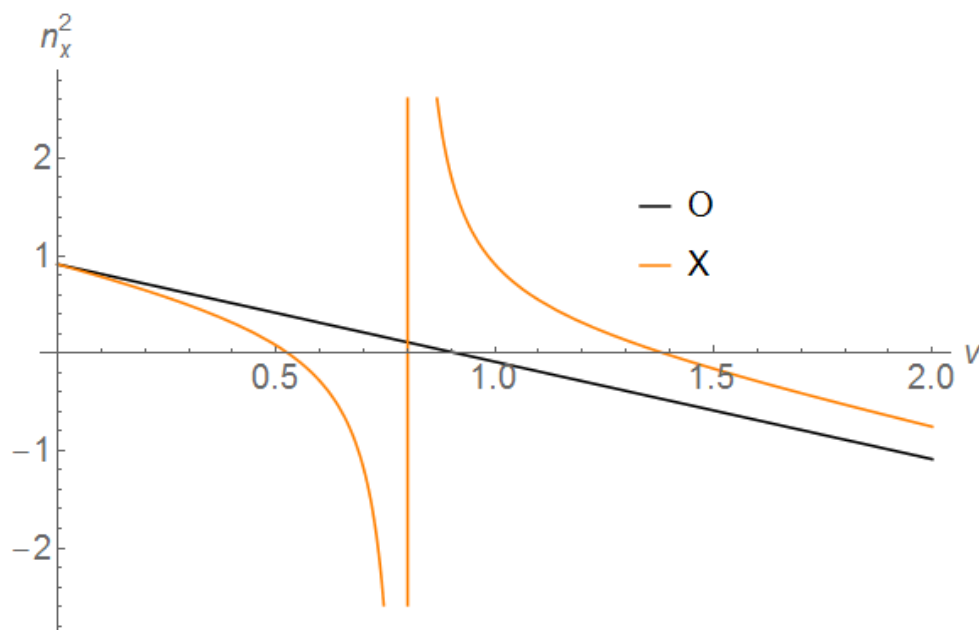


Рис.1.2 Характерный вид дисперсионных кривых для случая поперечного распространения.

«О» соответствует ветке обыкновенной волны, «Х» - необыкновенной.

Для ветки, отвечающей необыкновенной волне, видно существенное отличие от изотропного случая. Особенность показателя преломления, возникающую в точке $\nu = 1 - u$, принято называть верхним гибридным резонансом. Фазовая скорость волны $v_\phi = c/n$ в области гибридного резонанса стремится к нулю, а сама волна становится квази-электростатической и продольной. Действительно, $0 = \text{div } \vec{D} \sim k_x D_x + k_z D_z = i g k_x E_x - i g k_z E_z$, а значит $E_x/E_z \sim k_x/k_z$. Но $k_x \sim n_x \rightarrow \infty$, а $k_z = \text{const}$, откуда и следует продольность волны.

В отсутствии столкновений рост E_x в окрестности гибридного резонанса ничем не ограничен. Это означает, что при сколь угодно малой диссипации и отличном от нуля угле падения в окрестности резонанса возникнет сильное поглощение, связанное с большой напряженностью электрического поля. Для попадания в точку резонанса необыкновенная волна должна преодолеть область непрозрачности. Ширина этой области, а с ней и коэффициент поглощения, определяются как направлением распространения волны, так и величиной магнитного поля. Ясно, что, т.к. ширина области непрозрачности увеличивается с увеличением магнитного поля, интерес с точки зрения нагрева плазмы представляют только малые значения u . Вычисление коэффициента поглощения для описанного случая приведено в [4, стр. 427]. Выпишем полученный там результат с учетом введенных нами обозначений:

$$A = e^{-\delta_0}(1 - e^{-\delta_0}), \quad \delta_0 = \pi k_0 L \sqrt{u \left(\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + \sqrt{u \cos^2 \vartheta + \frac{1}{4} \sin^4 \vartheta} \right)}, \quad (1.10)$$

где L – характерный масштаб неоднородности плазмы. Согласно формуле (1.10), максимально возможное значение поглощения в случае поперечного распространения равно 25% от падающего излучения и достигается при распространении при $\delta_0 = \ln 2$. Стоит отдельно отметить тот факт, что полученная зависимость представляет собой четную функцию от угла падения. Эта информация понадобится нам в дальнейшем.

1.2 Распространение в плоскости XY ($\vartheta = 0$)

Характерная дисперсионная зависимость для случая распространения в плоскости, образованной направлениями магнитного поля и градиента плотности, приведена на рисунке 1.3. С физической точки зрения интересен процесс трансформации обыкновенной волны, запущенной из вакуума. Доходя до точки отражения, туннелируя сквозь область непрозрачности, и, наконец, трансформируясь в необыкновенную, такая волна способна достичь области верхнего гибридного резонанса, причем со стороны, противоположной стороне излучателя. Оценить область параметров, при которых трансформация обыкновенной волны максимальна, можно из качественных соображений. Действительно, для этого достаточно минимизировать ширину области туннелирования, обеспечивая тем самым наибольший возможный коэффициент прохождения и, как следствие, наибольшее поглощение. На правой части рисунка 1.3 представлена дисперсионная картина, построенная для оптимально подобранных параметров системы. Видно, что ширину области непрозрачности можно уменьшить до нуля, что означает полную трансформацию обыкновенной волны.

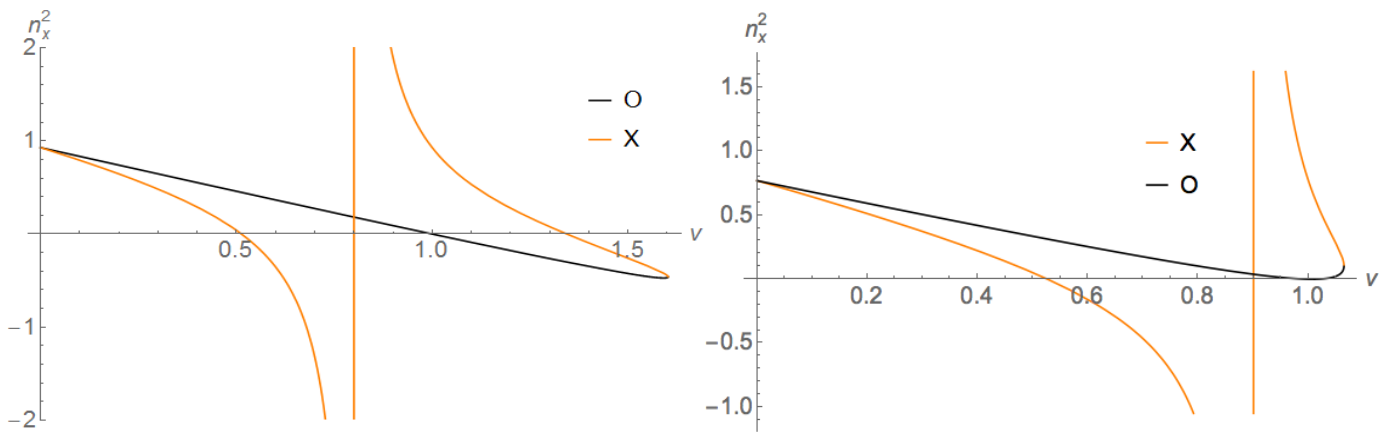


Рис.1.3 Характерный вид дисперсионных кривых для случая распространения в плоскости $\vartheta = 0$. Левый рисунок отвечает случаю падения волны под произвольным углом, а правый – под оптимальным.

Найдем параметры, обеспечивающие нулевую ширину области туннелирования. Коэффициенты дисперсионного уравнения для этого случая:

$$B = n_y^2(\varepsilon + \varepsilon_{\parallel}) + g^2 - \varepsilon^2 - \varepsilon\varepsilon_{\parallel}$$

$$C = \varepsilon_{\parallel}(n_y^4 - 2\varepsilon n_y^2 + (\varepsilon^2 - g^2)).$$

Уравнение на нули компоненты показателя преломления вдоль градиента выглядит как $C = 0$. Оно дает три корня, один из которых ($v = 1$) не зависит от направления распространения волны. Два других определяются из биквадратного уравнения на n_y^2 и имеют простое выражение

$$n_y^2 = \varepsilon \pm g.$$

Отсутствие области туннелирования означает совпадение корней. Необходимое для этого условие запишется так:

$$\sin^2 \eta_0 = \frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}. \quad (1.11)$$

В случае малых значений магнитного поля ширина области непрозрачности для необыкновенной волны, запущенной из вакуума, уменьшается. Это означает наличие возможности туннелирования между двумя ветками необыкновенной волны через область гибридного резонанса. При малых значениях u это приводит к падению величины поглощения для О-моды, запущенной из вакуума, и росту - для Х-моды. Однако попытаться обеспечить полное поглощение можно

и в этом случае, если соответствующим образом подобрать поляризацию падающей волны. Условие на оптимальную поляризацию можно сформулировать как требование равенства по энергии туннелирования в прямом и обратном направлениях.

Из всего вышесказанного следует, что формула (1.11) выполняется с хорошей степенью точности до тех пор, пока туннелированием между ветками необыкновенной волны можно пренебречь. Это условие можно получить, применив для коэффициента туннелирования формулу в квазиклассическом приближении. Результат применения выглядит так:

$$k_0 L u^{3/4} > 1 \quad (1.12)$$

В случае произвольного направления распространения решение дисперсионного уравнения имеет следующую форму:

$$n_x^2 = f(\cos^2(\vartheta)\sin^2(\eta), u, v) - \sin^2(\vartheta)$$

Вид дисперсионных кривых останется аналогичным таковому для рассмотренного выше случая $\vartheta = 0$, деформируясь и сдвигаясь вниз. Качественно новых эффектов в этом случае не возникает.

2. Математическая постановка задачи

При рассмотрении описанной конфигурации плазмы в самом общем виде в задаче присутствуют шесть скалярных параметров и одна произвольная функция - $\omega, u, \vartheta, \eta$, два действительных параметра, характеризующих поляризацию падающей волны, а также $v(x)$ - функция, определяющая зависимость концентрации плазмы от координаты. Чтобы сделать численный счет максимально информативным, необходимо предварительно для каждого частного случая определить комбинации параметров, от которых будет зависеть результат, а также максимально упростить сами уравнения. Попытка сделать это представлена в этом разделе.

Граничным условием для рассматриваемой задачи является условие отсутствия волны, падающей на слой плазмы со стороны, противоположной стороне излучателя. Будем искать решение в виде $f(x)e^{-i\omega t + ik_y y + ik_z z}$. Такой вид решения представляет собой ни что иное, как результат преобразования Фурье по поперечным координатам. Подставляя такое решение в систему уравнений Максвелла и расписывая их покомпонентно, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_y}{\partial x} = ik_0(B_z + n_y E_x) \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = ik_0(n_z E_x - B_y) \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = ik_0(ig E_x - \varepsilon E_z + n_y B_x) \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} = ik_0(\varepsilon_{\parallel} E_y + n_z B_x) \\ n_y E_z - n_z E_y = B_x \\ n_z B_y - n_y B_z = \varepsilon E_x + ig E_z \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Из полученной системы хорошо видно, что из шести уравнений два являются алгебраическими. Это позволяет свести задачу к системе четырех уравнений путем исключения из системы компонент поля, направленных вдоль градиента.

2.1 Поперечное распространение ($\eta = 0$)

Как было отмечено в разделе 1.1, в случае поперечного распространения система уравнений Максвелла распадается на две независимые группы уравнений - для обыкновенной и необыкновенной волны. С физической точки зрения это происходит из-за независимости поляризаций нормальных мод от

параметров плазмы при распространении поперек магнитного поля. Этот факт сразу значительно упрощает систему уравнений для случая поперечного распространения, т.к. количество ненулевых компонент полей сокращается с шести до трёх - E_x, E_z, B_y . Учитывая также то, что из трех оставшихся уравнений одно является алгебраическим, уравнения Максвелла при $\eta = 0$ принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} = ik_0(n_z(n_z B_y - igE_z) - \varepsilon B_y) \\ \varepsilon \frac{\partial B_y}{\partial x} = ik_0(ig(n_z B_y - igE_z) - \varepsilon^2 E_z) \end{cases} \quad (2.2)$$

Однако при произвольной зависимости концентрации плазмы от координаты даже эта система выглядит слишком сложной для анализа. Дальнейшее упрощение можно провести, ссылаясь на факт, приведенный в разделе 1.1: при введении сколь угодно малой, но отличной от нуля частоты соударений поглощение необыкновенной волны возникает в узкой области, примыкающей к поверхности гибридного резонанса. Пользуясь также предположением о плавном характере изменения параметров среды, концентрацию плазмы можно разложить в ряд тейлора в окрестности резонанса и записать:

$$v(x) = v_{uh} + \frac{x}{L_{uh}} \quad (2.3)$$

Из такой формы записи естественным образом следует выбор безразмерной переменной, отвечающей координате, а именно: $\tilde{x} = x/L$. В дальнейшем везде, где это не будет оговорено отдельно, будет использоваться именно эта безразмерная переменная, поэтому знак волны будет опущен.

В результате такого обезразмеривания возникает еще один важный параметр, одинаковый для всех рассматриваемых в данной работе задач с точностью до определения L :

$$\chi_0 = k_0 L \quad (2.4)$$

С физической точки зрения L есть характерный масштаб неоднородности среды. Предположение о плавном изменении параметров плазмы подразумевает выполнение неравенства $L \gg k_0^{-1}$, что теперь может быть записано как

$$\chi_0 \gg 1. \quad (2.5)$$

Как было отмечено ранее, поглощение в случае поперечного распространения возможно при выполнении неравенства $u \ll 1$. Учитывая это и оставляя в выражении для тензора диэлектрической проницаемости (1.1) только линейные члены по магнитному полю, приходим к следующему виду тензора :

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -x & 0 & i\sqrt{u} \\ 0 & -x & 0 \\ -i\sqrt{u} & 0 & -x \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Чтобы убедиться в том, что сделанные упрощения не привели к существенным изменениям ожидаемых эффектов, достаточно построить дисперсионную зависимость для линеаризованного тензора диэлектрической проницаемости. Она приведена на рисунке 2.1:

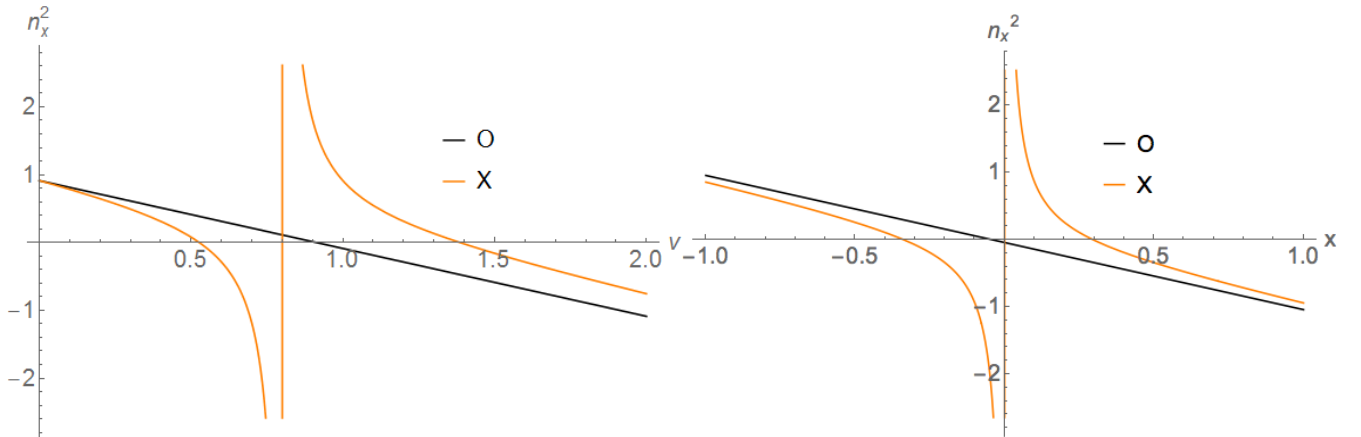


Рис.2.1 Дисперсионная зависимость для линеаризованного тензора диэлектрической проницаемости(справа) в сравнении с точной картиной(слева) в случае поперечного распространения

Подставляя в уравнения Максвелла (2.2) упрощенный тензор диэлектрической проницаемости, получим следующее уравнение на единственную ненулевую компоненту магнитного поля:

$$\frac{d^2 B}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{x^2 + u^2}{x^2 - u^2} \frac{dB}{dx} - \chi_0^2 \left(x + \sin^2 \vartheta - \frac{u}{x} - \frac{2\sqrt{u} \sin \vartheta}{\chi_0(x^2 - u)} \right) B = 0 \quad (2.7)$$

Это уравнение обладает тремя особыми точками – полюсами, в случае отсутствия столкновений расположенными на действительной оси. В него входят три параметра: χ_0 , u и ϑ . Оказывается, их количество можно сократить до двух, если сделать следующие замены:

$$\xi = \chi_0^{2/3} x, \quad \delta = \chi_0^{1/3} \sin \vartheta, \quad \beta = \chi_0^{2/3} \sqrt{u} \quad (2.8)$$

Таким образом, конечный вид уравнения для распространения необыкновенной волны поперек магнитного поля запишется так:

$$\frac{d^2 B}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\xi^2 + \beta^2}{\xi^2 - \beta^2} \frac{dB}{d\xi} - \left(\xi + \delta^2 - \frac{\beta^2}{\xi} - \frac{2\beta\delta}{\xi^2 - \beta^2} \right) B = 0 \quad (2.9)$$

Даже не приступая к решению этого уравнения можно отметить интересную особенность. В изотропном случае ($\beta = 0$) угол падения волны (δ) входит в уравнение в четной степени, что автоматически означает четность зависимости коэффициента поглощения от угла. Однако при $\beta \neq 0$ в уравнении присутствует член, пропорциональный первой степени δ , а значит, вполне вероятно появление асимметрии в функции поглощения. Это означает принципиальную невозможность описания поглощения с помощью функции (1.10) в силу четности последней по углу падения.

2.2 Распространение в плоскости XY ($\vartheta = 0$)

В случае распространения волны в плоскости, образованной градиентом концентрации плазмы и направлением постоянного магнитного поля, уравнения получаются значительно более сложного вида. Действительно, деление поля на обыкновенную и необыкновенную волну в этом случае уже не является тривиальной операцией, т.к. поляризации волн зависят от свойств плазмы. Даже учитывая локальность взаимодействия и линеаризуя тензор диэлектрической проницаемости, а также предполагая резкую зависимость от угла и раскладывая его вблизи оптимального значения, остается необходимость в определении поляризаций нормальных волн в области взаимодействия. Можно было бы от пространственных компонент поляризации перейти на язык собственных мод среды, но, к счастью, в этом нет необходимости - определить комбинации

параметров, от которых в конечном счете будет зависеть ответ, можно, не записывая уравнений.

Рассмотрим для примера случай больших величин магнитного поля, т.е. удовлетворим соотношению (1.12). Как было отмечено ранее, при выполнении этого соотношения величина поглощения для необыкновенной волны крайне мала, а обыкновенная волна, напротив, поглощается полностью. Именно поэтому рассмотрим падение на слой волны, содержащей в себе только обыкновенную поляризацию. Анализируя характер дисперсионной зависимости обыкновенной волны, можно прийти к выводу, что величина поглощения полностью определяется коэффициентом прохождения волны через область непрозрачности, ширина которой равна нулю при оптимальном угле падения. Таким образом величину поглощения можно оценить по известной формуле для квазиклассического туннелирования:

$$A = \left| e^{i\chi_0 \int n_x dx} \right|^2. \quad (2.10)$$

При небольшом отклонении от оптимального угла дисперсионная кривая проседает вниз, и поглощение уменьшается. В связи с этим будем проводить разложение функции $v(x)$ именно вблизи точки $v = 1$, а не в области резонанса, как это было в предыдущем случае, т.е.

$$L_v = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{v(x)=1}. \quad (2.11)$$

Учитывая экспоненциальный характер зависимости коэффициента туннелирования от ширины области непрозрачности, будем считать функцию поглощения локализованной вблизи оптимального угла:

$$\eta = \eta_0 + \varphi, \quad \varphi \ll 1, \quad \sin^2 \eta_0 = \frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}. \quad (2.12)$$

Зависимость n_x в области туннелирования можно приблизить параболой, заданной тремя точками: границами зоны туннелирования и её максимальной глубиной. В результате в первом порядке по отклонению от оптимального угла продольный показатель преломления имеет вид:

$$n_x^2 = \frac{2\xi}{\sqrt{u}} \left(\xi - 2u^{1/4}\varphi \right), \xi = v - 1 \quad (2.13)$$

Подставляя это выражение в формулу для коэффициента поглощения и интегрируя в области непрозрачности, получим результат, аналогичный приведенному в [5]:

$$A = e^{-\sqrt{2}\pi\chi_0 u^{1/4}\varphi^2} \quad (2.14)$$

Как видно из формулы (2.14), в рамках сделанных приближений кривая поглощения имеет гауссову форму с шириной $\sigma = \left(2\sqrt{2}\pi\chi_0 u^{1/4}\right)^{-1/2}$. Это и есть искомая комбинация параметров задачи. Значительные отклонения от этого закона ожидаются лишь в области достаточно слабых магнитных полей, когда непосредственным поглощением необыкновенной волны уже нельзя будет пренебречь.

3. Численное моделирование

3.1 Обзор метода

Для вычисления коэффициентов поглощения и трансформации будем использовать импедансную технику. Подробно данная техника интегрирования уравнений Максвелла рассмотрена в работе [6]. В данном случае необходимость в использовании упомянутой техники возникает в связи с видом граничных условий. Как было отмечено в начале второго раздела, волна падает на слой только со стороны излучателя. Можно было бы задавать поле с противоположной излучателю стороны плазмы как уходящую плоскую волну, а потом подбирать поляризацию такой волны методом пристрелки. Однако, в силу большого значения максимальной плотности плазмы в рассматриваемой модели, это привело бы к экспоненциальному росту решения в области непрозрачности, а вместе с ним к росту численной ошибки. Поэтому было принято решение поступить иначе.

Идея метода заключается в представлении поперечной поляризации поля через сумму волн, распространяющихся в разные стороны, а затем введении оператора отражения и сведении граничной задачи к эволюционной.

В силу однородности пространства по координатам y и z уравнения Максвелла представимы в форме

$$\frac{d\Psi}{dx} = ik_0 \hat{M} \Psi, \Psi = \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где Ψ – вектор поперечной поляризации волны, \hat{M} – волновой оператор, зависящий от координаты X , параметров плазмы и направления распространения волны, $k_0 = \omega/c$.

Разложение вектора поперечной поляризации по волнам, бегущим в разные стороны, может быть осуществлено следующим образом:

$$\Psi = \hat{U}_\Phi \Phi, \Phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^+ \\ \varphi_2^+ \\ \varphi_1^- \\ \varphi_2^- \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где φ – 2-х компонентный вектор, определяющий вклад каждой из выбранных нами мод в суммарное поле волны. Оператор перехода к к выбранным модам \hat{U}_Φ состоит из векторов-столбцов, каждый из которых представляет собой одну из мод, записанную в координатах y и z . В общем случае оператор перехода может зависеть от координаты x . Тогда уравнения Максвелла перепишутся в форме:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \hat{U}_\Phi^{-1} \left(ik_0 \hat{M} \hat{U}_\Phi - \frac{d\hat{U}_\Phi}{dx} \right) \Phi = \hat{D}_\Phi \Phi \quad (3.3)$$

Для изучения распространения в плазме обыкновенной или необыкновенной волны нам в любом случае понадобится представление поля через плазменные моды. Однако поляризации собственных мод меняются вдоль градиента плотности, что приводит к ненулевой производной оператора перехода и, как следствие, громоздкости выражений. Поэтому непосредственно для интегрирования мы будем использовать разложение по вакуумным модам, а затем пересчитывать одно представление в другое, используя формулы связи:

$$\Psi = \hat{U}_v \Phi_v = \hat{U}_p \Phi_p \Rightarrow \Phi_p = \hat{U}_p^{-1} \hat{U}_v \Phi_v = \hat{U}_{pv} \Phi_v, \quad (3.4)$$

где индексы v и p относятся соответственно к вакууму и к плазме.

Уравнение на оператор отражения получается подстановкой выражения $\varphi^- = \hat{R} \varphi^+$ в уравнения Максвелла и исключением вектора поляризации. Окончательный вид этого уравнения представлен ниже:

$$-\frac{d\hat{R}}{dx} = \hat{R} \hat{D}_{12} \hat{R} + \hat{R} \hat{D}_{11} - \hat{D}_{22} \hat{R} - \hat{D}_{11}, \quad (3.5)$$

где \hat{D}_{ij} – матрицы 2x2, получающиеся из матрицы \hat{D} разбиением на четыре одинаковые по размеру части.

Величина элемента r_{ij} матрицы \hat{R} представляет собой коэффициент отражения -ой моды в j -ую. С физической точки зрения оператор отражения в точке x

показывает, как волна отразится от полупространства $[x, +\infty)$. Поэтому начальным условием к приведенному уравнению служит условие нулевого отражения от любой точки за слоем плазмы.

Проинтегрировав уравнение на оператор отражения справа налево, можно применить его к конкретной поляризации падающей волны и, таким образом, найти отраженную. Величину поглощения в слое можно вычислить как нормированную разность потоков энергии в падающей и отраженной волнах. Эффектом прохождения за слой можно пренебрегаем, считая его несущественным ввиду сильного превышения максимальной концентрации плазмы над критическим значением, высокой частоты излучения и, таким образом, большой протяженности области туннелирования.

Для определения коэффициентов трансформации собственных мод необходимо от оператора отражения по вакуумным модам перейти к коэффициентам отражения по собственным модам среды. Сделать это можно по формуле:

$$\hat{R}_p = (\hat{U}_{21}^{pv} + \hat{U}_{22}^{pv} \hat{R}_v)(\hat{U}_{11}^{pv} + \hat{U}_{12}^{pv} \hat{R}_v)^{-1}, \quad (3.6)$$

где матрицы U_{ij}^{pv} получаются из матриц перехода способом, аналогичным описанному выше. Приведенная формула совпадает с аналогичной формулой из статьи [6]. Однако в настоящей работе вектора собственных поляризаций определены таким образом, что две верхние компоненты отвечают волне, бегущей в одном направлении, а две нижние – в другом. Учитывая также тот факт, что при переходе от одного базиса к другому волны не должны менять направление распространения, можно сделать вывод о блочной структуре оператора \hat{U}_{pv} , а именно о равенстве нулю компонент \hat{U}_{21}^{pv} и \hat{U}_{12}^{pv} . Таким образом выражение (3.6) может быть упрощено и записано в следующем виде:

$$\hat{R}_p = \hat{U}_{22}^{pv} \hat{R}_v \hat{U}_{11}^{pv-1}. \quad (3.7)$$

3.2 Вычисление конкретного вида операторов

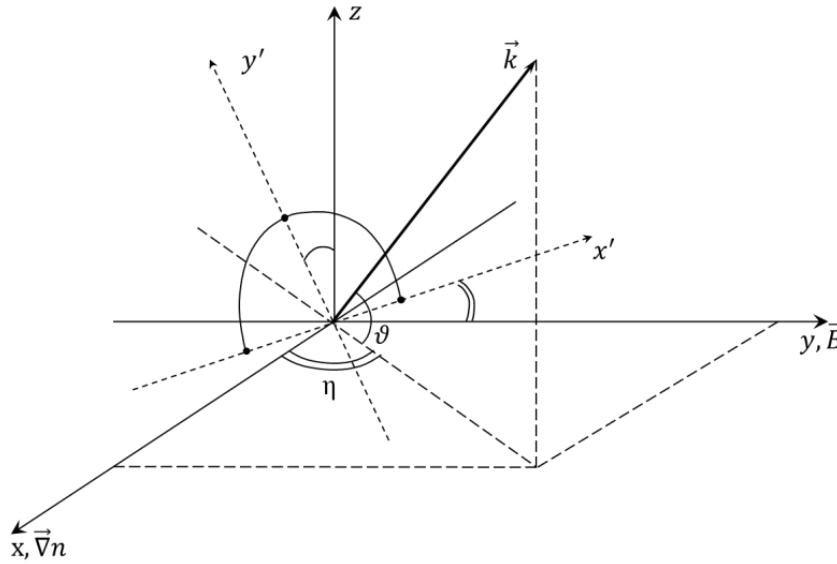


Рис. 3.1 Система координат, введенная для перехода к вакуумным модам

Для определения оператора перехода к вакуумным модам введем вспомогательную систему координат так, как показано на рисунке 3.1. Очевидно, вектор поляризации плоской волны в вакууме лежит в штрихованной плоскости. Назовем первой вакуумной модой плоскую волну с поляризацией электрического поля вдоль оси x' , а второй – вдоль y' . Тогда для записи поперечной поляризации падающей на слой плоской волны нам необходимо найти оператор перехода от штрихованных координат к поперечным. Выразим его через углы ϑ и η :

$$\begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \sin \vartheta \\ 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Тогда первая и вторая вакуумные моды падающей волны в поперечных координатах запишутся так:

$$v_1^+ = \begin{pmatrix} \cos \eta \\ 0 \\ -\sin \eta \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, v_2^+ = \begin{pmatrix} -\sin \eta \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ -\cos \eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

С формальной точки зрения в отраженной волне угол η должен отсчитываться от отрицательной части оси x . Поэтому моды отраженной волны получаются из

мод падающей соответствующей заменой в выражениях. Таким образом, получаем оператор перехода для вакуума в следующем виде:

$$\hat{U}_v = (v_1^+ v_2^+ v_1^- v_2^-) = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \sin \vartheta & -\cos \eta & -\sin \eta \sin \vartheta \\ 0 & \cos \vartheta & 0 & \cos \vartheta \\ -\sin \eta \sin \vartheta & -\cos \eta & -\sin \eta \sin \vartheta & \cos \eta \\ \cos \vartheta & 0 & \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

В качестве собственных мод среды выберем обыкновенную и необыкновенную волны так, что

$$\Phi_p = \begin{pmatrix} \varphi_p^+ \\ \varphi_p^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_o^+ \\ \varphi_x^+ \\ \varphi_o^- \\ \varphi_x^- \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

С точки зрения математики оператор перехода по отношению к плазменным модам представляет собой матрицу, составленную из собственных векторов волнового оператора. В общем случае \hat{U}_p является громоздкой и трудной для восприятия матрицей. Однако нам она понадобится только для того, чтобы правильно задать граничные условия, а для этого достаточно знать значение $\hat{U}_{vp} = \hat{U}_v^{-1} \hat{U}_p$ на границе плазменного слоя. Для получения этого значения введем еще одну вспомогательную систему координат, представленную на рисунке 3.2.

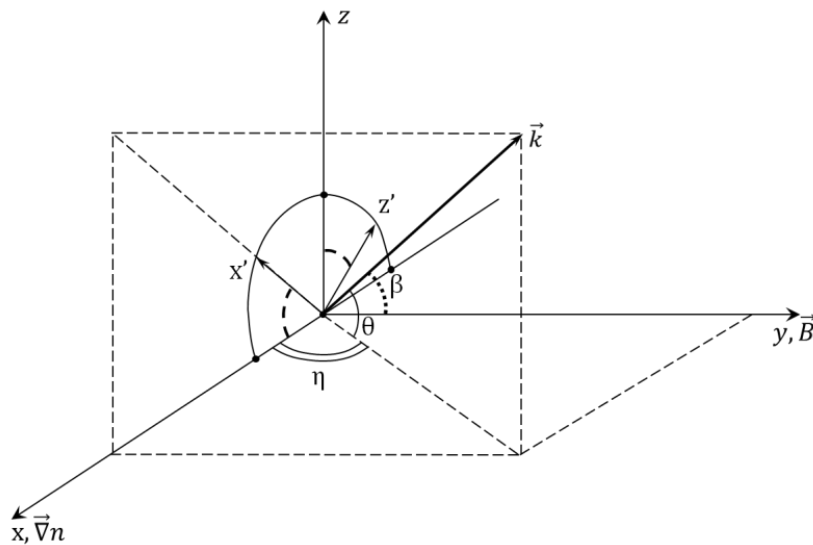


Рис. 3.2 Система координат, введенная для определения предельных поляризаций плазменных мод при плавном переходе в вакуум

Т.к. ось x' совпадает с проекцией волнового вектора на плоскость xz , в штрихованной системе координат волновой вектор не имеет компоненты по оси z' и волновое уравнение для однородной среды и монохроматического излучения выглядит так :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon - n^2 \cos^2 \beta & n^2 \sin \beta \cos \beta & ig \\ n^2 \sin \beta \cos \beta & \varepsilon_{\parallel} - n^2 \sin^2 \beta & 0 \\ -ig & 0 & \varepsilon - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{pmatrix} = 0, \quad (3.12)$$

где β - угол между постоянным магнитным полем и волновым вектором. Из этого выражения легко получаются поляризации собственных мод среды:

$$\frac{E_{y'}}{E_{x'}} = \frac{n^2 \sin \beta \cos \beta}{n^2 \sin^2 \beta - \varepsilon_{\parallel}}, \frac{E_{z'}}{E_{x'}} = \frac{ig}{\varepsilon - n^2}, \quad (3.13)$$

где n^2 - значение показателя преломления для обыкновенной или необыкновенной волны. Чтобы найти предельные поляризации среды, устремим в этих выражениях концентрацию плазмы к нулю. Прделаав это, получим:

$$\frac{E_{y'}}{E_{x'}} = -\tan \beta, \frac{E_{z'}}{E_{x'}} = \frac{i\sqrt{u}}{a(1-u)-1}, \frac{E_{y'}}{E_{z'}} = i \tan \beta \frac{a(1-u)-1}{\sqrt{u}}, \quad (3.14)$$

где $a = \left. \frac{d(n^2)}{dv} \right|_{v=0}$ - производная квадрата показателя преломления в нуле концентрации. Конкретные значения компонент поля выбираются из соображений нормировки потока энергии.

Чтобы теперь получить предельные поляризации в родной системе координат, нужно штрихованную повернуть вокруг оси y . Завершающим этапом этой процедуры будет домножение на обратную матрицу вакуумных мод, в результате чего получим:

$$\hat{U}_{vp} = \hat{U}_v^{-1} \hat{U}_p = \begin{pmatrix} u_{vp} & 0 \\ 0 & u_{vp} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Блочная структура этого оператора не случайна и отвечает факту сохранения направления распространения при смене базиса. В случае поперечного распространения ($\eta = 0$) u_{vp} становится диагональной и не зависит ни от

величины магнитного поля, ни от угла к градиенту концентрации, а обыкновенной и необыкновенной плазменным волнам в этом случае соответствуют просто ТЕ и ТМ волны.

Получив коэффициент отражения по вакуумным модам, можно сразу же вычислить коэффициент поглощения. Считая поляризации падающей и отраженной волн в вакууме известными и записанными через введенные ранее вакуумные моды, получим выражение для коэффициента поглощения:

$$1 - \frac{|\varphi_1^-|^2 + |\varphi_2^-|^2}{|\varphi_1^+|^2 + |\varphi_2^+|^2}. \quad (3.16)$$

В качестве профиля плотности рассматривался параболический профиль, сглаженный на границах слоя и плавно переходящий в ноль. Парабола задавалась в виде

$$v(x) = v_{\max} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right), \quad (3.17)$$

где v_{\max} – максимальное значение плотности плазмы, x_0 – граница слоя, а x – настоящая размерная координата. Максимальное значение плотности плазмы подбиралось таким образом, чтобы можно было пренебречь областью второго резонанса, возникающей в слое плавнонеоднородной плазмы со стороны, противоположенной стороне излучателя.

Напоследок приведем здесь вид волнового оператора с учетом выбранной нами геометрии:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & -in_y \frac{g}{\varepsilon} & \frac{n_y n_z}{\varepsilon} & 1 - \frac{n_y^2}{\varepsilon} \\ 0 & -in_z \frac{g}{\varepsilon} & -1 + \frac{n_z^2}{\varepsilon} & -\frac{n_y n_z}{\varepsilon} \\ -n_y n_z & n_y^2 - \varepsilon + \frac{g^2}{\varepsilon} & in_z \frac{g}{\varepsilon} & -in_y \frac{g}{\varepsilon} \\ \varepsilon_{\parallel} - n_z^2 & n_y n_z & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

3.3 Результаты моделирования

Напомним, что, как было отмечено во втором разделе, в случае поперечного распространения волны удобно ввести следующие безразмерные параметры:

$$\delta = \chi_0^{1/3} \sin \vartheta, \quad \beta = \chi_0^{2/3} \sqrt{u}, \quad \chi_0 = k_0 L_{\text{uh}},$$

где $k_0 = \omega/c$, а $L = \left(\frac{dv_{\text{uh}}}{dx}\right)^{-1}$ - обратная производная концентрации по координате, взятая в точке верхнего гибридного резонанса. Условие плавной неоднородности плазмы обеспечивается соотношением $\chi_0 \gg 1$.

Для начала рассмотрим случай падения необыкновенной волны на слой изотропной плазмы. Результат численного моделирования представлен на рисунке 3.1. Аппроксимация зависимости производилась с использованием формулы (4.2), вывод которой будет дан в следующем разделе. Как видно из представленного графика, эта формула верна с точностью до нормировочного множителя и множителя в показателе экспоненты. Максимальная величина поглощения равна примерно 0.5 и в широких пределах не зависит ни от профиля плотности, ни от частоты излучения.

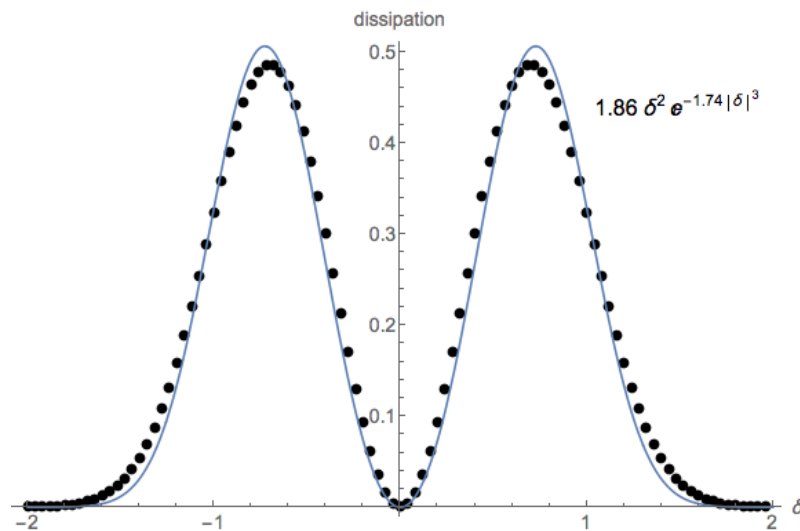


Рис.3.1 Зависимость показателя поглощения от безразмерного угла в случае изотропной плазмы

В случае наличия слабого магнитного поля зависимость коэффициента поглощения от угла ϑ больше не является четной функцией. Характерный вид

этой зависимости представлен ниже. Помимо очевидной асимметрии, стоит отметить наличие ненулевого поглощения для нормального падения. По мере увеличения магнитного поля пик поглощения на отрицательной части оси δ полностью пропадает, в то время как глобальный максимум растет и достигает единицы при $\delta \approx 0.5$ и $\beta \approx 0.4$. Зависимость положений нуля и максимума на плоскости параметров имеет линейный вид и представлена ниже.

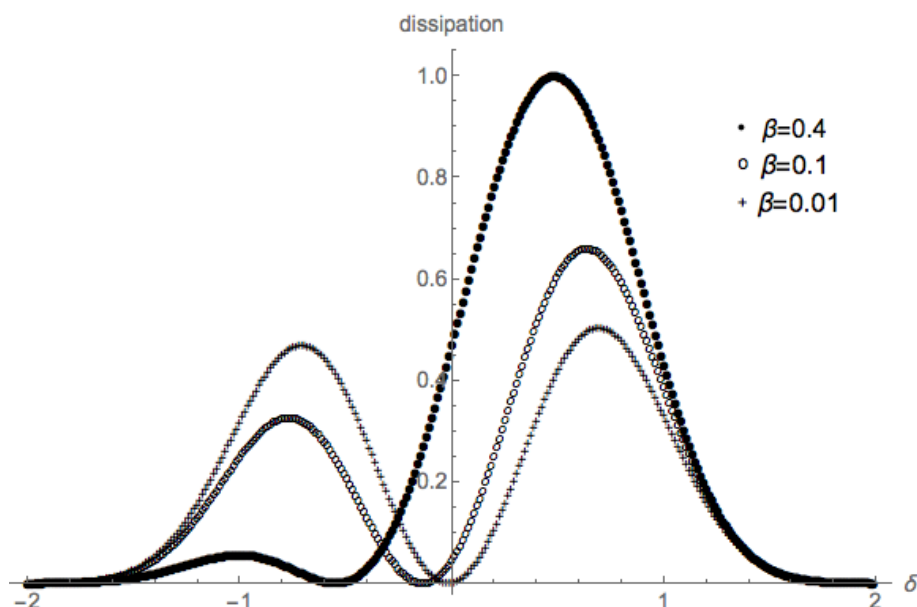


Рис.3.2 Характерный вид зависимости коэффициента поглощения от безразмерного угла в случае наличия слабого постоянного магнитного поля

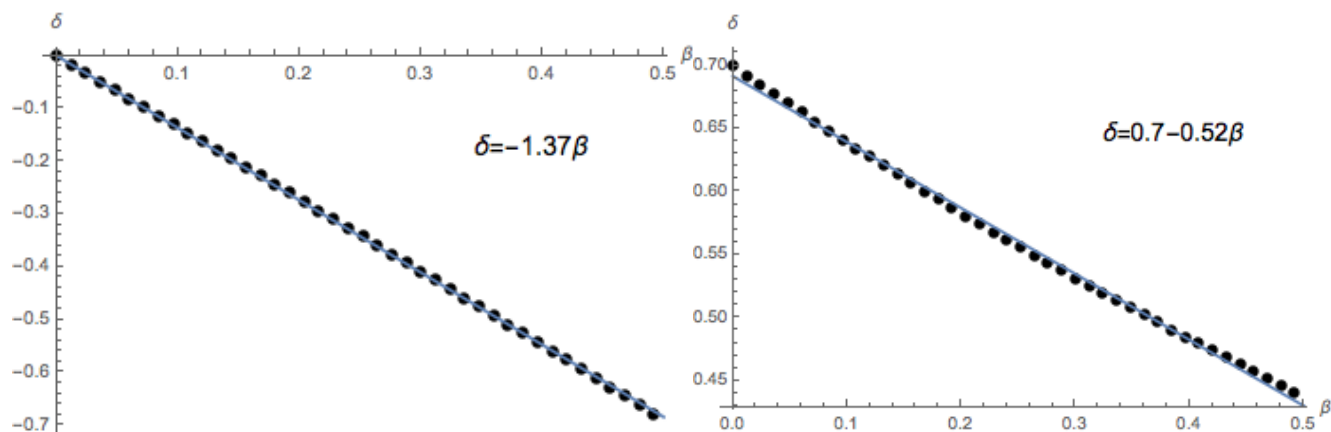


Рис.3.Положение нуля (слева) и максимума поглощения (справа) на плоскости параметров

При сильном магнитном поле ($\beta > 1$) поглощение прекращается. При $\chi_0 = 30$ это означает величину $u \sim 0.01$, что полностью подтверждает предположение о малости этого параметра и оправдывает операцию линеаризации.

На основании полученных численных результатов можно заключить, что описание поглощения в случае $\eta = 0$ с помощью формулы (1.10) является принципиально невозможным. Причина этого кроется в том, что предпосылки, из которых получена обсуждаемая формула, не имеют ничего общего с реальностью в случае $u \ll 1$. Однако, несмотря на это, формула (1.10) получила широкое распространение и используется, к примеру, в [7,13,14].

Согласно сказанному в подразделе 1.2, в случае распространения в плоскости $\vartheta = 0$ нас ожидают две принципиально различных картины поглощения в зависимости от соотношения параметров. При $\chi_0 u^{3/4} > 1$, когда туннелированием необыкновенной волны можно пренебречь, нас ожидает полное поглощение обыкновенной волны при вполне конкретных углах. При $\chi_0 u^{3/4} < 1$ ситуация значительно сложнее. В области малых значений магнитного поля ожидается падение поглощения для обыкновенной волны и рост для необыкновенной. Это приводит к необходимости вместе с углом подбирать также поляризацию волны.

Приведем зависимость коэффициента поглощения для случая больших величин магнитного поля, построенную в зависимости от нормированной на ширину распределения отстройки угла падения от оптимального. На рисунке 3.4 различными оттенками серого обозначены различные значения параметров плазмы при фиксированном значении σ . Светлый отвечает значениям u , близким к единице, а темный – близким к минимально возможному для выбранного σ . Черной линией выделена теоретически предсказанная кривая. Этот случай удивителен тем, что теоретическая формула, полученная с большим количеством приближений, оказалась в данном случае точной.

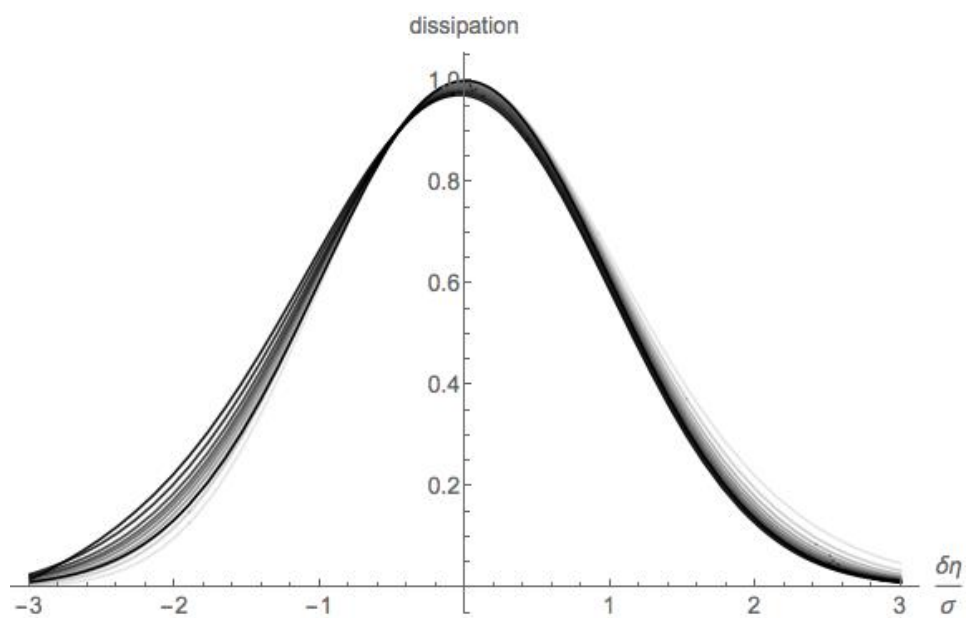


Рис. 3.4 Зависимость коэффициента поглощения от нормированной отстройки угла от оптимального значения для распространения в плоскости $\vartheta = 0$ при $\chi_0 u^{3/4} > 1$

4. Анализ полученных результатов

Из всех полученных результатов наибольший интерес представляет асимметричная зависимость поглощения от угла падения при поперечном распространении. Попытаемся получить эту зависимость, не прибегая к численному решению соответствующего дифференциального уравнения. С этой целью для начала проанализируем способы получения зависимости коэффициента поглощения от безразмерного угла падения δ для случая изотропной плазмы, а затем перейдем к более сложной задаче, зная, какие трудности могут встретиться на пути её решения.

Рассмотрим случай $\beta = 0$. В этом случае уравнение (2.9) выглядит так:

$$\frac{d^2 B}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dB}{dx} - (x + \delta^2)B = 0 \quad (4.1)$$

Запишем формулу для поглощения в изотропном случае в безразмерных переменных:

$$A \sim \delta^2 e^{-|\delta|^3} \quad (4.2)$$

Получить эту зависимость можно как минимум тремя различными способами.

Первый из них основывается на предположении, что поглощение происходит в окрестности точки $x = 0$ – это утверждение аналогично утверждению о локализации поглощения в области гибридного резонанса, только в данном случае имеет место резонанс с плазменной квазистатической волной. Такое предположение позволяет пренебречь зависимостью от координаты в множителе, стоящем перед функцией напряженности магнитного поля. Частное решение упрощенного уравнения ищется в предположении конечности поля в точке $x = 0$ и в окрестности этой точки имеет следующий простой вид:

$$B = B_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{2} x^2 \ln(x) \right) \quad (4.3)$$

Далее, выражая из уравнений Максвелла напряженность электрического поля вдоль оси x , можно найти поглощение через формулу для Джоулевых потерь, в результате чего получить пропорциональность $\sim \delta^2$. Для обеспечения

сходимости полученного интеграла вводят столкновительный член, который затем стремят к нулю. Множитель с экспонентой возникает в результате выражения величины B_0 через граничные условия на основании представлений квазиклассического туннелирования через область непрозрачности в зону поглощения, аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.2.

Второй основан на формальных представлениях о потоке энергии в дифференциальном уравнении второго порядка. Известно, что любое линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка можно свести к форме, не содержащей первой производной:

$$y'' + Q(x)y = 0. \quad (4.4)$$

Для такого уравнения существует тождество, выражающее закон сохранения потока энергии:

$$\frac{dS}{dx} = -Im(Q)|y|^2, \quad S = Im(y'y^*), \quad (4.5)$$

где звезда обозначает взятие комплексного сопряжения, а штрих – полной производной по координате. Теперь, вводя для независимой переменной малую комплексную часть и вычисляя вычет мнимой части потенциала, можно получить ту же самую зависимость для величины поглощения.

Выполнив замену переменных в уравнении (4.1) таким образом, чтобы избавиться от первой производной, получим

$$y'' - \frac{\sqrt{z} + \delta^2}{4z} y = 0, \quad z \sim x^2. \quad (4.6)$$

В силу квадратичной замены, в новых переменных падающая волна движется не со стороны отрицательной полуоси, а из бесконечности вдоль луча с аргументом $\pm 2\pi$. Знак определяется из соображений конечности амплитуды поля. Это условие по своей сути представляет собой правило обхода Ландау. В данном случае необходимо выбрать знак «-». Теперь, вычисляя вычет мнимой части потенциала в нуле и домножая результат на квазиклассический интеграл

от нуля потенциала, расположенного в точке $z = \delta^4 e^{-2\pi i}$, до полюса, снова получим ту же самую формулу для поглощения.

Оба вышеизложенных способа получения объединяет одна существенная особенность – так или иначе учитывается локальность поглощения. В первом случае она используется явно в тот момент, когда величиной переменной x пренебрегают по сравнению с параметром δ^2 . Во втором случае существенно локальной операцией является процедура взятия вычета. Как бы то ни было, оба способа работают лишь до тех пор, пока вид потенциала Q достаточно прост. Как видно из уравнения (2.9) с $\beta \neq 0$, вместо одной особенности нас ожидают целых три полюса, что в первом случае подразумевает сшивку локальных решений в области заведомого невыполнения квазиклассического приближения, а во втором – громоздкую замену переменных.

Отличительной особенностью третьего метода вычисления поглощения для данной задачи является его принципиальная нелокальность, а также намного более широкий класс потенциалов, для которых решение может быть получено с тем или иным успехом. Идея метода изложена в следующем разделе.

4.1 Метод фазовых интегралов

Идея метода основана на явлении Стокса. Джордж Габриель Стокс впервые столкнулся с этим эффектом, исследуя асимптотики функций Эйри в 1857 году[8]. Строгое математическое обоснование метода может быть дано с использованием обобщенного преобразования Лапласа[9, стр 213], однако в данном изложении я не стану подробно останавливаться на математическом аспекте эффекта, а изложу лишь его основную суть.

Пусть имеется стационарное одномерное уравнение Шредингера с потенциалом, допускающим запись решения в виде суммы ВКБ-мод. Условие применимости ВКБ-разложения формулируется следующим образом [9, стр. 75]:

$$\left| \frac{dQ}{dx} Q^{-3/2} \right| \ll 1. \quad (4.7)$$

В области выполнения ВКБ-приближения решение запишется в виде:

$$y'' + Q(x)y = 0, \quad y_{\pm} = Q^{-1/4} e^{\pm i \int \sqrt{Q}}. \quad (4.8)$$

Части действительной оси, в которых решение представимо в виде суммы двух квазинезависимых волн, могут быть разделены областью взаимодействия, в которой ВКБ-приближение неприменимо. В случае уравнения Эйри ($Q(x) = -x$), как и в случае нашего уравнения, это окрестность нуля. Однако если рассматривать анализируемое уравнение на комплексной плоскости, то окажется, что область взаимодействия можно обойти, оставаясь каждый момент времени в условиях применения асимптотического решения. Явление, обнаруженное Стоксом, заключается в следующем: существуют кривые, разделяющие комплексную область на части, в каждой из которых решение представимо в виде линейной комбинации асимптотических решений, но со своими для каждой области коэффициентами. Метод фазовых интегралов, фактически, определяет способ пересчета этих коэффициентов из одной области в другую и, таким образом, позволяет находить связь прошедшей волны с падающей и отраженной, обходя особенность в комплексной плоскости.

Линии, разделяющие комплексную плоскость на области сохранения асимптотического разложения, бывают двух типов. Их принято называть Стоксовыми и анти-Стоксовыми. В различных публикациях терминология именования может различаться. Я буду придерживаться определений, данных в [7]. Анти-Стоксовыми назовем линии, вдоль которых асимптотические решения осциллируют. Соответственно, Стоксовыми – те, вдоль которых значения инкремента и декремента растущей и экспоненциально спадающей волн соответственно максимальны. Математически эти кривые можно определить через фазовые интегралы в выражениях асимптотических разложений:

$$Re\left(i \int_a^z \sqrt{Q(x)} dx\right) = 0, \quad Im\left(i \int_a^z \sqrt{Q(x)} dx\right) = 0, \quad (4.9)$$

где нижний предел в интегралах представляет из себя одну из особых точек потенциала – нулей и полюсов.

Проиллюстрируем сказанное на примере функции Эйри. Как известно, уравнение Эйри, а также асимптотические выражения его решений имеют следующий вид:

$$y'' - xy = 0, \quad y_{\pm} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{x}} e^{\mp \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.10)$$

Нетрудно получить, что, в согласии с данным выше определением, линии Стокса для такого уравнения представляют собой лучи, уходящие на бесконечность из начала координат под углами $0, \pm \frac{2}{3}\pi$, а анти-Стоксовы – под углами $\pi, \pm \frac{1}{3}\pi$. В результате получается картина, представленная на рисунке 4.1.

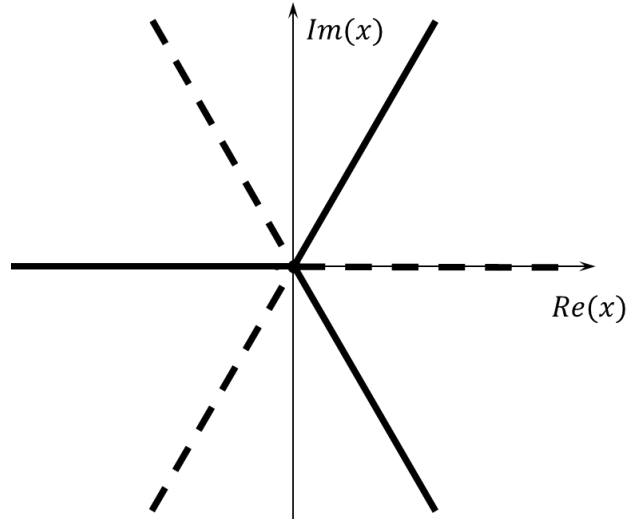


Рис.4.1 Граф Стокса для уравнения Эйри

Сплошными линиями выделены анти-Стоксовы направления, пунктирными – Стоксовы. Картина, представленная на этом рисунке, является основным инструментом анализа в методе фазовых интегралов и называется графом Стокса. В связи с этим сам метод часто называют методом Стокса.

Явление Стокса, как и следовало ожидать, происходит на Стоксовых линиях. Смена коэффициентов асимптотического разложения связана с качественным изменением траектории наискорейшего спуска при взятии интегралов, возникающих при строгом описании с помощью преобразования Лапласа. Понять же происходящее можно и без привлечения сложной математики. Дело в том, что в любой точке комплексной плоскости, кроме набора особых точек и анти-Стоксовых линий, одно из решений экспоненциально нарастает (доминантное решение), а другое – экспоненциально спадает (субдоминантное решение), поэтому с точки зрения асимптотического разложения удержание спадающего решения является превышением точности. Наибольшая разница между

решениями достигается как раз на Стоксовых линиях. В случае, если коэффициент перед доминантным решением отличен от нуля, решение в целом не почувствует изменения коэффициента перед субдоминантным. Если же доминантное решение входит в линейную комбинацию с нулевым коэффициентом, при переходе через Стоксову линию решение не меняет своего вида. Формально операцию перехода через линию Стокса можно представить как домножение столбца коэффициентов перед ВКБ-решениями на некоторую матрицу. Столбец коэффициентов можно выбрать двумя способами: по направлению распространения волны (знаком перед фазовым интегралом) или по свойству доминантности. В этой работе будет использоваться первый способ. Для него матрица перехода имеет вид:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Константа s имеет ключевое значение в рассматриваемом методе и называется константой Стокса. В общем случае для каждой Стоксовой линии она своя. В случае, если на первом месте в векторе коэффициентов идет коэффициент перед доминантной функцией, необходимо проводить умножение на \hat{S} , в противном случае – на транспонированную матрицу \hat{S}^T . Анти-Стоксовы же линии как раз характерны тем, что меняют субдоминантную и доминантную функции местами, в результате чего в одной из соседних областей будет использоваться матрица \hat{S} , а в другой – \hat{S}^T .

В строгой теории константа Стокса возникает в результате взятия соответствующего интеграла методом стационарной фазы. Оказывается, во многих случаях удастся определить её значение с той или иной степенью точности из совершенно иных соображений. Например, для уравнений, решения которых не имеют точек ветвления, константы Стокса могут быть определены из условия перехода решения самого в себя при полном обороте вокруг начала отсчета. В этом случае не стоит забывать о наличии ветвления в асимптотическом представлении решения. Учесть это можно с помощью проведения разреза и домножения решения на коэффициент, соответствующий

конкретному виду точки ветвления. В случае, если потенциал содержит единственный ноль n -го порядка, представляется возможным найти общую формулу для константы Стокса в случае обхода проти часовой стрелки:

$$s = 2i \cos \frac{\pi}{n+2} \quad (4.12)$$

В случае наличия у потенциала нескольких особых точек при обходе необходимо учитывать, из какой именно особенности выходит линия, с которой происходит взаимодействие. Для перехода от особенности в точке a к особенности в точке b вектор коэффициентов должен быть домножен на матрицу

$$W_{ba} = \begin{pmatrix} e^{i \int_a^b \sqrt{Q} dz} & 0 \\ 0 & e^{-i \int_a^b \sqrt{Q} dz} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

В показателях экспонент стоит не что иное, как фазовые интегралы. Отсюда и проистекает название метода.

Все вышесказанное можно резюмировать, сформулировав 4 коротких правила:

(1) Переход через линию Стокса сопровождается домножением столбца коэффициентов на матрицу \hat{S} в случае, если волна, распространяющаяся в положительном направлении действительной оси, доминантна, и на транспонированную в обратном случае.

(2) Переход через анти-Стоксову линию меняет свойство доминантности.

(3) Переход от одной особенности к другой сопровождается домножением на матрицу фазовых интегралов

(4) Переход через разрез сопровождается домножением на константу, соответствующую типу разреза.

4.2 Случай изотропной плазмы ($\beta = 0$)

Попытаемся применить метод Стокса к случаю нулевого значения параметра анизотропии. Для этого в уравнении (4.1) сделаем замену функции:

$$B(x) = y(x) e^{\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x}}. \quad (4.14)$$

Это приведет к уравнению:

$$y'' - \left(z + \delta^2 + \frac{3}{4z^2}\right)y = 0 \quad (4.15)$$

Видно, что рассматриваемый потенциал обладает четырьмя особыми точками – тремя нулями первого порядка и одним полюсом второго. Приведенное уравнение является дифференциальным уравнением Фробениуса[10] с индексами $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, а начало координат, являясь обыкновенной особенностью[11] уравнения, представляет собой точку ветвления для решения, что говорит о невозможности вычисления констант Стокса путем замыкания обхода. В этом случае одним из вариантов решения проблемы является использование приближения изолированных особых точек – для каждой точки используется невозмущенное значение константы Стокса, определяемое общей формулой (4.12). Существуют и другие варианты нахождения этих постоянных, и в каждой задаче может быть изобретен свой, справедливый только для этого частного случая способ.

Вид графа Стокса можно угадать следующим образом: вблизи каждой особой точки линии ведут себя также, как и для изолированной точки, а соединения различных особых точек проводится из соображений глобального вида потенциала. В данном случае для $z \gg 1$ потенциал переходит в потенциал уравнения Эйри, а значит и общий вид графа Стокса должен этому соответствовать. Локальное поведение Стоксовых и анти-Стоксовых линий в окрестности полюса второго порядка рассмотрено в статье [12] и определяется вычетом в особенности.

Проверить правильность построения графа Стокса можно, численно построив поле направлений для следующих векторов:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \sin\left(-\frac{1}{2}\text{Arg}(Q(z))\right) \\ -\cos\left(-\frac{1}{2}\text{Arg}(Q(z))\right) \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{1}{2}\text{Arg}(Q(z))\right) \\ \sin\left(-\frac{1}{2}\text{Arg}(Q(z))\right) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Действительно, вдоль направления вектра \vec{s} сохраняется мнимая часть фазового интеграла, а значит при выходе из нуля потенциала решение на такой

линии будет либо экспоненциально спадать, либо нарастать. Соответственно векторное поле \vec{s} определяет положение стоксовых линий, а поле \vec{a} – антистоксовых. Предложенный способ численного построения графа Стокса удобен отсутствием необходимости вычислять фазовый интеграл в общем виде, что зачастую бывает сложно не только для человека, но и для машины.

Ниже представлен эффективный граф Стокса для рассматриваемого потенциала, а также его действительный вид, вычисленный упомянутым способом.

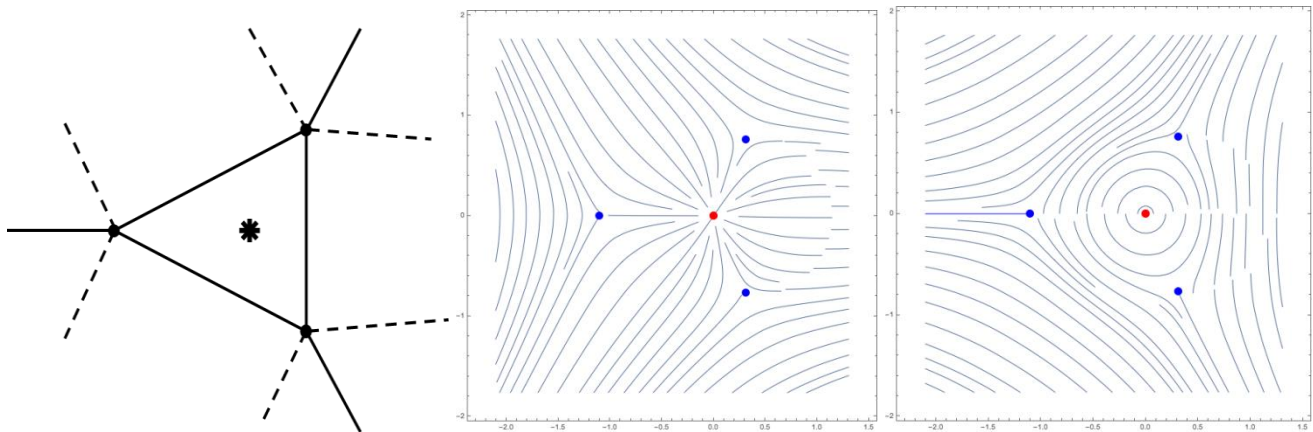


Рис.4.2 Слева направо: эффективный граф Стокса из качественных соображений, поле линий Стокса, поле анти-Стоксовых линий. В центре звездой выделен полюс, в точках пересечения анти-Стоксовых линий – нули.

Стоксовы линии, выходящие из нулей с положительной действительной частью и идущие вдоль действительной оси, асимптотически стремятся к оси симметрии графа. Это означает, что, вводя малое поглощение ($z \rightarrow z - i\alpha$), т.е. сдвигая граф вверх как целое, мы оставляем положительную часть действительной оси ниже нижней из двух рассматриваемых Стоксовых линий. Факт смещения полюса в верхнюю полуплоскость диктует необходимость обхода снизу, что замечательно сочетается с результатом, полученным в начале этого раздела. Действуя в соответствии с правилами, представленными в конце предыдущего параграфа, а также задавшись граничным условием отсутствия волны, падающей из положительной бесконечности, представим коэффициенты решения слева от области взаимодействия в виде:

$$\begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix} = \hat{S}_2 \hat{W}_{21} \hat{S}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 e^{-W} e^W \\ s_1 e^{-W} + s_2 e^W \end{pmatrix}, \quad W = i \int_1^2 \sqrt{Q} dz, \quad (4.17)$$

где константы Стокса пронумерованы в порядке пересечения соответствующих линий. $\hat{S}_4 \hat{W}_{ab} \hat{S}_3^T \hat{S}_2 \hat{W}_{ab} \hat{S}_1^T$

Таким образом, нам удалось получить коэффициенты отражения и прохождения, просто перемножая матрицы! Выраженный через введенные обозначения коэффициент поглощения запишется в следующем виде:

$$A = 1 - |R|^2 = 1 - |s_2 + s_1 e^{-2W}|^2 \quad (4.18)$$

Теперь задача свелась к определению двух неизвестных констант Стокса. Вообще говоря, использованное в данном случае слово «константа» имеет смысл независимости только от переменной уравнения. От параметров уравнения константы Стокса могут и будут зависеть. Однако в данном случае этой зависимостью можно попытаться пренебречь.

Для начала отметим, что $\lim_{\delta^2 \rightarrow \infty} Re(W) = +\infty$. Это означает, что второе слагаемое в формуле поглощения, а значит и константа с индексом «1» влияет на результат только при малых δ . С другой стороны, из физических соображений ясно, что при больших абсолютных значениях δ поглощение будет мало. Эти рассуждения приводят к выражению $s_2 = e^{i\varphi}$, в котором фаза является неопределенной постоянной. Её можно определить, считая, что при больших δ потенциал с точки зрения падающей слева волны выглядит как потенциал Эйри, а значит $s_2 = -i$. Также кажется очевидным, что, в силу отсутствия поглощения для ТЕМ волны (этот процесс описывается бездиссипативным уравнением Эйри), при нулевом значении δ поглощение отсутствует, что даёт второе условие: $s_1 = (e^{i\alpha} - e^{i\varphi})e^{2W_0}$, где фазовый интеграл вычисляется при нулевом значении δ , а параметр α отвечает за фазу коэффициента отражения для ТЕМ волны. Т.к. для нормального падения известно точное значение коэффициента отражения, то можно воспользоваться им для определения фазы α . Следует только учесть, что уравнение Эйри в случае нормального падения описывает электрическую компоненту поля, и коэффициент отражения по магнитному полю должен браться с обратным знаком. Таким образом, финальное выражение для коэффициента поглощения принимает вид:

$$A = 1 - \left| -i + 2ie^{2(W_0 - W(\delta))} \right|^2 \quad (4.19)$$

На рисунке 4.3 представлен график полученной зависимости.

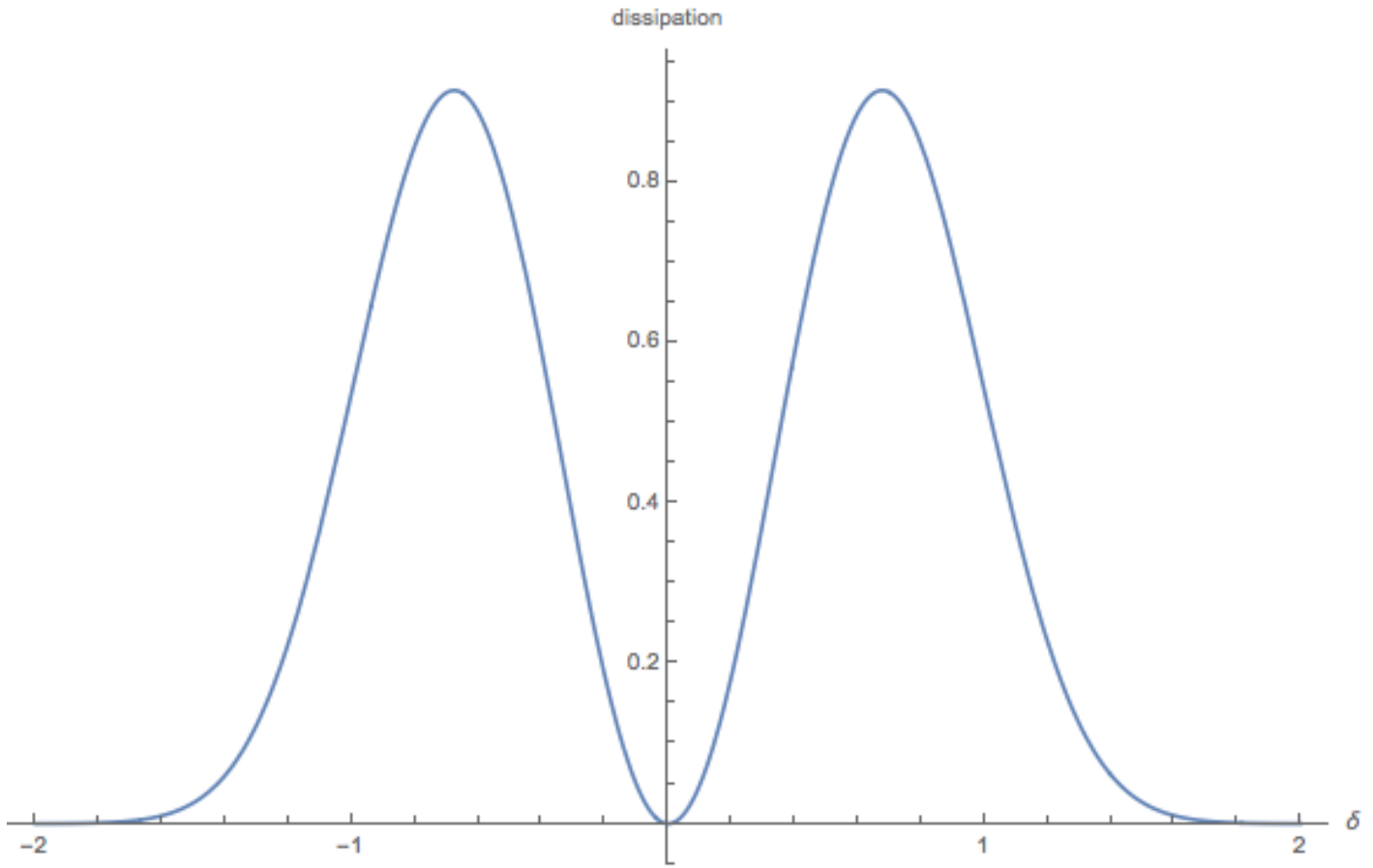


Рис. 4.3 Зависимость коэффициента поглощения от безразмерного угла, полученная методом фазовых интегралов в случае изотропной плазмы.

Помимо того, что, как и ожидалось, представленная зависимость обладает всеми основными свойствами формулы (4.2), стоит отметить факт точного совпадения положений максимумов поглощения с результатами численного моделирования. Это связано с тем, что, как оказалось, произвольные фазы в выражении для постоянных Стокса влияют только на величину пиков, не сдвигая их вдоль оси δ .

4.3 Общий случай поперечного распространения

Попытаемся теперь получить зависимость, отражающую основные черты случая поперечного распространения в присутствии постоянного магнитного поля. Для начала исключим из уравнения на индукцию поля первую производную и для полученного потенциала построим граф Стокса. Результаты представлены на рисунке 4.4. Как видно из численного построения, картина

вблизи трех полюсов весьма сложна. К счастью, при обходе вдалеке от начала координат нас интересует только внешняя структура линий, представленная на изображении эффективного графа Стокса. Действуя абсолютно аналогично рассмотренному выше случаю, произведем обход снизу области взаимодействия:

$$\begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix} = \hat{S}_3 \hat{W}_{32} \hat{S}_2 \hat{W}_{21} \hat{S}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{W_{32}+W_{21}} \\ e^{-W_{32}-W_{21}}(s_1 + e^{2W_{21}}(s_2 + s_3 e^{2W_{32}})) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

где W_{ji} – фазовый интеграл для перехода от i -ой особенности к j -ой.

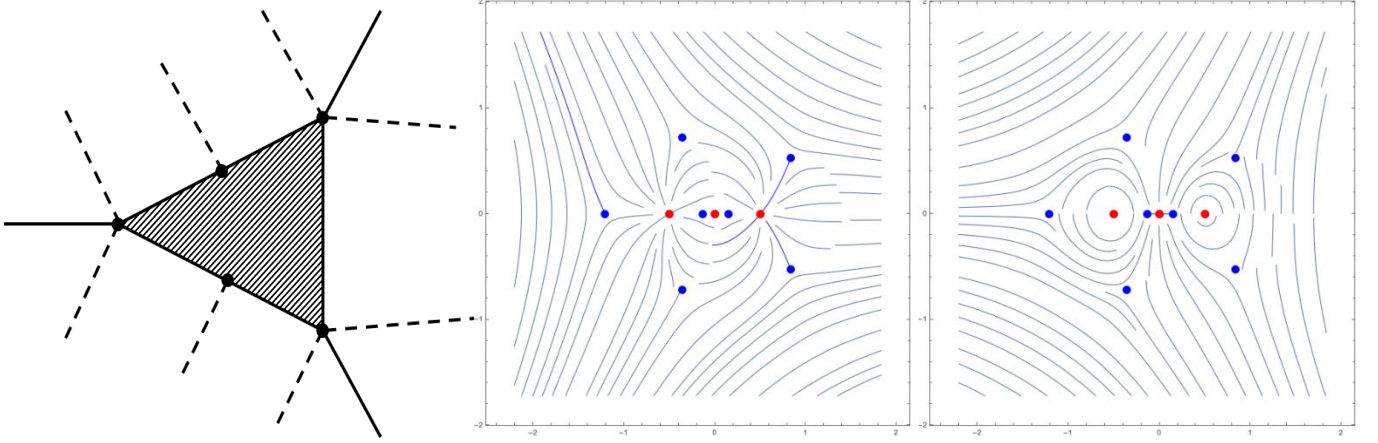


Рис. 4.4 Слева направо: эффективный граф Стокса без внутренней структуры, поле линий Стокса, поле анти-Стоксовых линий.

Несмотря на значительное усложнение вида потенциала, выражение для коэффициента поглощения усложнилось незначительно – вся сложность теперь содержится в значениях фазовых интегралов. Приведем его в явном виде:

$$A = 1 - |R|^2 = 1 - |s_3 + s_2 e^{-2W_{32}} + s_1 e^{-2(W_{32}+W_{21})}|^2 \quad (4.21)$$

Фазовые интегралы в данном случае устроены аналогичным изотропному случаю образом – при больших значения параметров задачи их реальные части стремятся к положительной бесконечности, что позволяет вновь выбрать последнюю по направлению обхода константу s_3 равной $-i$. Однако утверждение о нулевом поглощении волны, падающей по нормали, теперь не является верным, поэтому необходимо использовать другое условие нормировки. В качестве такового выберем условие равенства минимального значения коэффициента поглощения нулю. Пользуясь также независимостью положений

максимумов от фаз постоянных Стокса, получим зависимость представленную на рисунке 4.5.

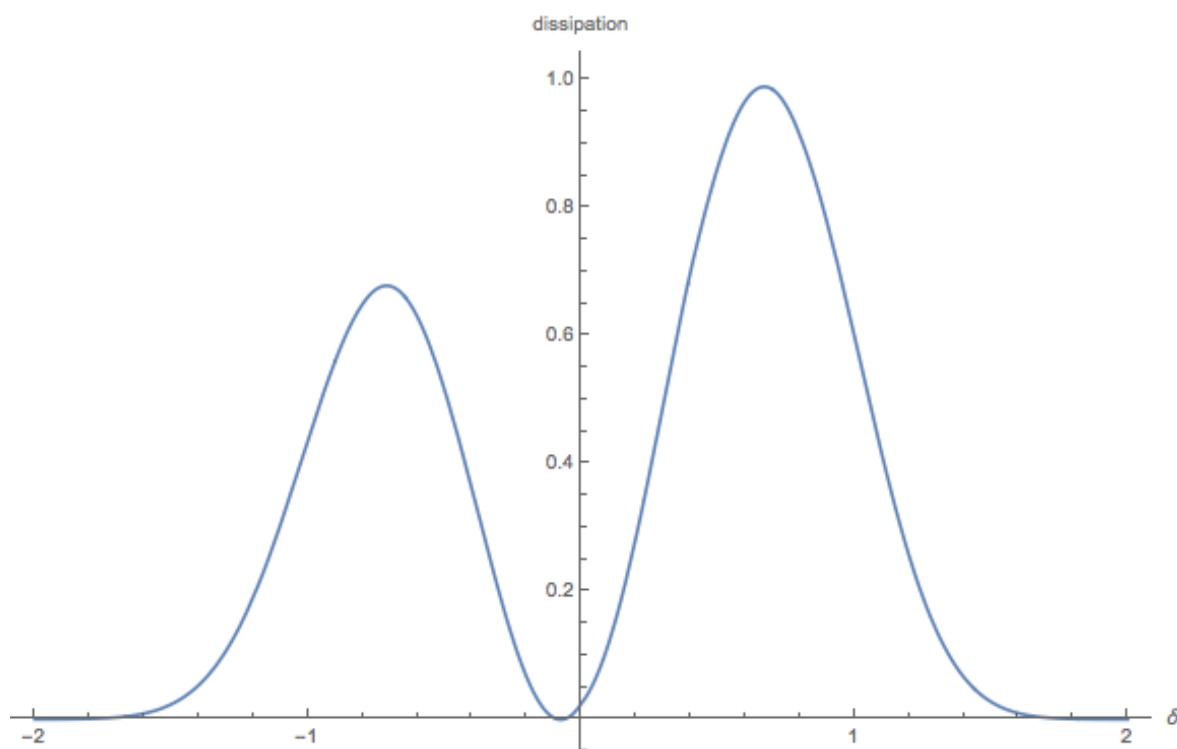


Рис. 4.5 Характерный вид зависимости коэффициента поглощения для анизотропного случая, построенный по методу фазовых интегралов, $\beta = 0.1$

Полученная зависимость отражает в себе все характерные особенности, наблюдавшиеся при численном счете, начиная от направления асимметрии и заканчивая линейной зависимостью сдвига нуля и глобального максимума при увеличении магнитного поля.

Заключение

В представленной работе были проанализированы эффекты, возникающие при поглощении высокочастотного излучения плотной плазмой в присутствии небольшого по величине постоянного магнитного поля. Было показано, что формулы, полученные в [2], не применимы в рассматриваемой области параметров и требуют значительной корректировки. В результате численного моделирования, проведенного с помощью разбиения поля на волны, бегущие в противоположных направлениях и введения оператора отражения, были получены зависимости величины поглощения от направления падения излучения и параметров среды. На основе полученных данных были определены соотношения параметров, обеспечивающие максимальную эффективность поглощения. Был обнаружен, а впоследствии описан теоретически, эффект нарушения четности зависимости коэффициента поглощения от безразмерного угла падения, а также показана принципиальная возможность полного поглощения излучения в выделенном направлении с определенным соотношением параметров плазмы. Была также продемонстрирована простота и эффективность метода фазовых интегралов в приложении к задачам поглощения в слое конечной толщины. Также был предложен способ численного построения графа Стокса для произвольного потенциала, отличающийся прозрачностью идеи и минимальными требованиями к вычислительной мощности.

Список литературы

1. В.В. Аликаев, А.Г. Литвак, Е.В. Суворов, А.А. Фрайман, *Электронно-циклотронный нагрев плазмы в тороидальных системах*, ВНП 1983.
2. Garate, Eusebio; Schmitz, Lothar; Trask, Erik; Yang, Xiaokang; Shalashov, Alexander; Balakin, Alexey; Gospodchikov, Egor; Denisov, Gregory; Litvak, Alexander; TAE Team; *Electron heating of field reversed configuration at the upper hybrid resonance frequency*, APS Division of Plasma Physics Meeting 2013
3. Xiaokang Yang, Alf Koehn , Yuri Petrov , Francesco Ceccherini , Sean Dettrick , Michl Binderbauer , and the TAE Team. *Feasibility Study of Microwave Electron Heating on the C-2 Field-Reversed Configuration Device* , AIP Conf. Proc. **1689** (2015)
4. Гинзбург В.Л., *Распространение электромагнитных волн в плазме* (1967)
5. Mjølhus E J. Plasma Phys. **31** 7 (1984)
6. А.Г. Шалашов, Е.Д. Господчиков, “Успехи физических наук”, т.**181**, №2 (2011)
7. Laqua H.P. Plasma Phys. Control. Fusion **49** R1 (2007)
8. Stokes, G.G., *On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments*, (1857)
9. Roscoe B. White, *Asymptotic analysis of differential equations*, (2010)
10. S. Ghorai, *Lecture XIV: Frobenius series and regular singular points*, IIT Kanpur
11. Carl M. Bender, Steven A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, (1999)
12. Kohei Iwaki, Tomoki Nakanashi, *Exact WKB analysis and cluster algebras*, J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014)
13. P.C. Efthimion, *Application of Electron Bernstein Wave Heating and Current Drive to High β Plasmas*, EX/P2-12
14. R. Ikeda and M. Takeuchi, J. of the Korean Physical Society, **49**, December 2006