**Введение**

Целью данной работы является исследование взаимодействия нормальных волн магнитоактивной плазмы, а также определение оптимальных соотношений параметров среды и излучения для обеспечения максимальной эффективности поглощения.

1. **Качественный анализ**

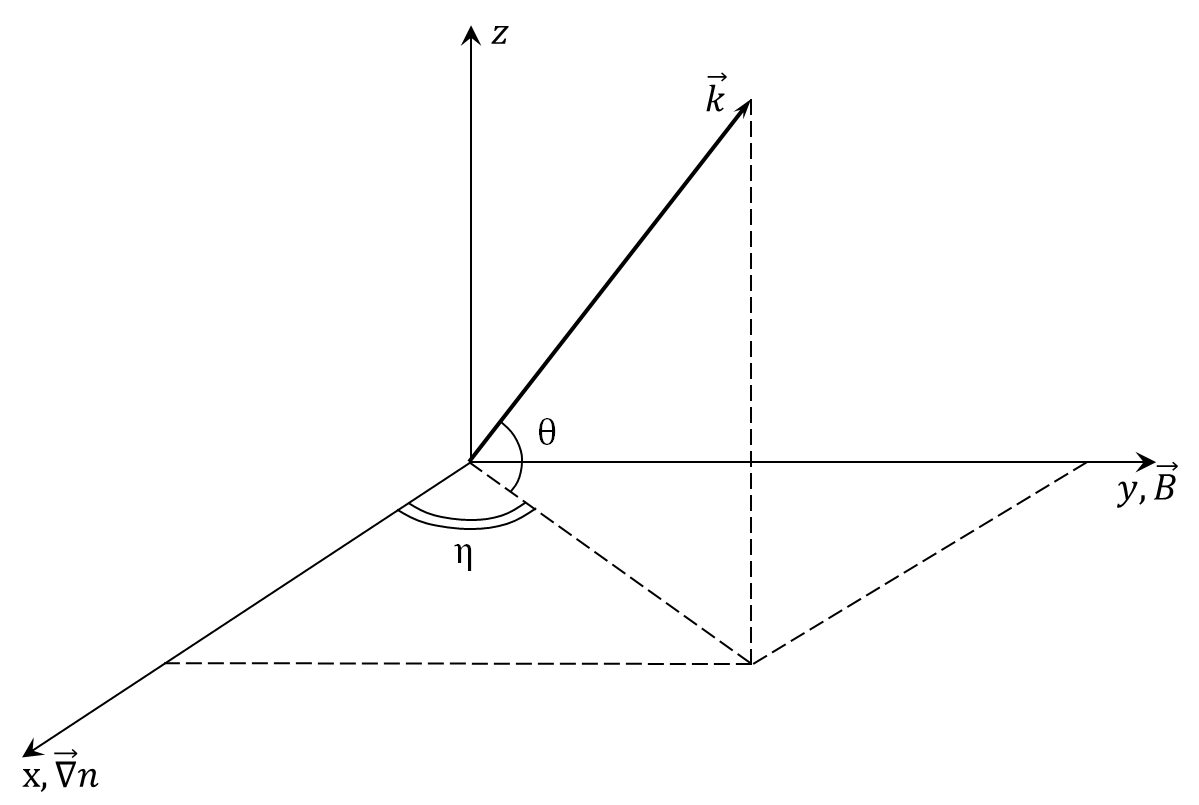
Рассмотрим падение высокочастотной электромагнитной волны из вакуума на слой неоднородной магнитоактивной плазмы. Частоту излучения будем полагать достаточно большой для того, чтобы можно было пренебречь ионным вкладом. Также будем предполагать величину электронной циклотронной частоты меньшей по сравнению с частотой излучения (). Для простоты будем считать внешнее магнитное поле постоянным и однородным, концентрацию плазмы функцией одной переменной, а градиент концентрации ортогональным направлению магнитного поля. Это упрощение оправдано в том случае, если вдоль магнитного поля концентрация выравнивается намного быстрее, чем поперек, а кривизной линий магнитного поля можно пренебречь по сравнению с масштабом поперечной неоднородности. Направление волнового вектора падающей из вакуума волны будем характеризовать двумя углами в соответствии с рис.1

Рис.1

В рамках сделанных предположений тензор диэлектрической проницаемости плазмы принимает следующий вид:

где все величины зависят только от координаты . В процессе распространения волны в такой среде сохраняется поперечная по отношению к направлению градиента плотности компонента волнового  
вектора. Дисперсионное соотношение на продольную компоненту имеет вид биквадратного уравнения:

,

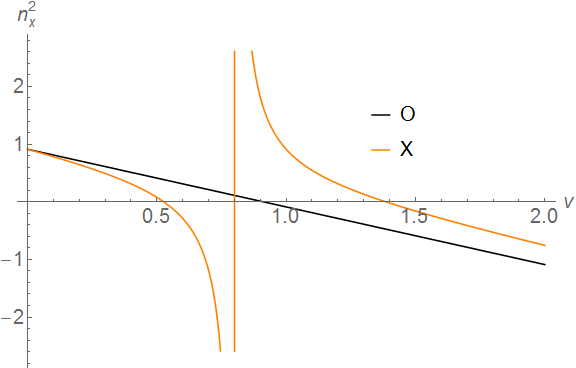
где – показатель преломления вдоль -го направления.

Взаимодействие нормальных волн происходит в точке пересечения дисперсионных кривых, т.е. при нулевом значении детерминанта. Стоит отметить интересный факт отсутствия зависимости детерминанта от . Таким образом, условие представляет из себя квадратное уравнение на , решения которого определяются исключительно свойствами плазмы. Приведем здесь эти решения:

Из того, что является сохраняющейся компонентой волнового вектора, а в вакууме её значение действительно, можно заключить, что является неотрицательной величиной. Из приведенных выше формул следует, что утверждение о неотрицательности равносильно утверждению . Это означает, что взаимодействие нормальных мод, введенных в плоскослоистую среду из вакуума возможно только в тех областях пространства, где концентрация плазмы превышает критическое значение. В соответствии с этим, условие взаимодействия нормальных волн можно упростить и свести к следующему виду:

При и только один из корней меньше единицы, а значит для любой заранее заданной конфигурации плазмы существует единственная поверхность распространения волн, обеспечивающая эффективное взаимодействие.

* 1. **Поперечное распространение ()**

В случае поперечного распространения волны коэффициенты и биквадратного уравнения значительно упрощаются. Выпишем их:

На рис.2 приведена характерная зависимость продольного показателя преломления от плотности плазмы при поперечном распространении. Ветка обыкновенной волны не отличается от случая изотропной плазмы – такая волна распространяется, не замечая магнитного поля. В точке продольный показатель преломления становится равным нулю, волновой вектор в геометрооптическом приближении вдоль оси и происходит отражение волны.

Рис.2

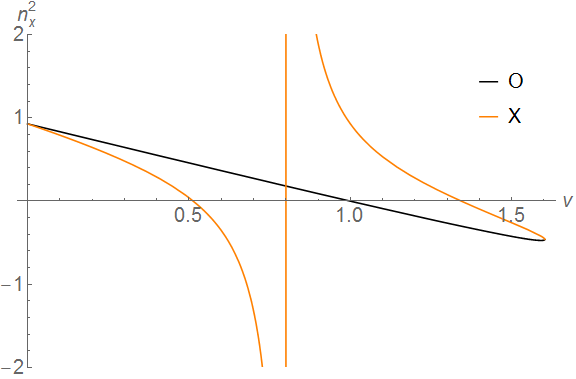
Для ветки, отвечающей необыкновенной волне, видно существенное отличие от изотропного случая. Особенность показателя преломления, возникающую в точке , принято называть верхним гибридным резонансом. Фазовая скорость волны в области гибридного резонанса стремится к нулю, а сама волна становится квазиэлектростатической и продольной. Действительно, , а значит . Но , а , откуда и следует продольность волны. Такая волна будет эффективно взаимодействовать с продольной плазменной волной, что даёт основания ожидать в этом случае поглощение, аналогичное поглощению TM волны в изотропном случае. С этой точки зрения величину поглощения можно оценить как , где , а – характерный масштаб неоднородности среды,. Вывод этой формулы можно найти в […], а более подробное обсуждение представлено в разделе 3. Также стоит упомянуть о том, что ширина области непрозрачности растет с увеличением , а значит следует ожидать поглощения только в случае малых величин магнитного поля.

Случай поперечного распространения характеризуется отсутствием взаимодействия нормальных мод среды. Это видно из дисперсионой картины, а также из выведенной в конце предыдущего подраздела формулы при .

* 1. **Распространение в плоскости XY ()**

Характерная дисперсионная зависимость для случая распространения в плоскости, образованной направлениями магнитного поля и градиента плотности, приведена на рис. 3. С физической точки зрения интересен процесс поглощения обыкновенной волны, запущенной из вакуума. Доходя до точки отражения, туннелируя сквозь область непрозрачности, и, наконец, трансформируясь в необыкновенную, такая волна способна достичь области верхнего гибридного резонанса, причем со стороны, противоположной стороне излучателя. Необыкновенная волна, запущенная из вакуума, поглощается обычным образом. Учитывая также взаимодействие двух веток необыкновенной волны в области резонанса, можно оценить область параметров, при которых поглощение максимально. Действительно, с точки зрения обыкновенной волны достаточно минимизировать ширину области туннелирования, однако в этом случае часть излучения отразится в виде необыкновенной волны. Этого можно избежать, если в излучение добавить обе поляризации одновременно, а соотношения между ними найти из условия равенства прямого и обратного туннелирования необыкновенных волн.

Рис.3

Найдем параметры, обеспечивающие минимальную ширину области туннелирования. Коэффициенты дисперсионного уравнения для этого случая:

Условие дает три корня, один из которых () не зависит от направления распространения волны. Два других определяются из биквадратного уравнения на и имеют простое выражение:

Помещая больший из этих двух корней в точку и учитывая равенство нулю угла , находим значение оптимального угла излучения:

При распространении под оптимальным углом обыкновенная волна полностью трансформируется в необыкновенную. Если эффект туннелирования между ветками необыкновенной волны мал, то поглощение обыкновенной волны должно быть близко к единице. Пренебречь эффектом туннелирования можно в случае достаточной протяженности области непрозрачности, отделяющей необыкновенную волну, запущенную из вакуума, от области резонанса. Считая это утверждение эквивалентным утверждению о малости поглощения необыкновенной волны, а также полагая механизм поглощения аналогичным таковому для поперечного распространения, можно модифицировать формулу, записанную в конце предыдущего подраздела и получить следующее условие применимости:

* 1. **Распространение в произвольном направлении**

Решение дисперсионного уравнения для произвольного направления распространения имеет следующую форму:

Вид дисперсионных кривых останется аналогичным таковому для случая , деформируясь и сдвигаясь вниз. Качественно новых эффектов в этом случае не возникает.

1. **Математическая постановка задачи**

При рассмотрении описанной конфигурации плазмы в самом общем виде в задаче присутствуют шесть скалярных параметров и одна произвольная функция - , два действительных параметра, характеризующих поляризацию падающей волны, а также – параметр, определяющий зависимость концентрации плазмы от координаты. Чтобы сделать численный счет максимально информативным, необходимо предварительно для каждого частного случая определить комбинации параметров, от которых будет зависеть результат, а также максимально упростить сами уравнения.

* 1. **Поперечное распространение ()**

Для начала заметим, что необыкновенной в случае распространения поперек магнитного поля является просто-напросто TM-волна. Строгое обоснование этого факта будет дано в разделе численного моделирования, а пока достаточно качественных рассуждений. Действительно, из дисперсионной зависимости для поперечного распространения видно, что обыкновенная волна никак не взаимодействует с магнитным полем, поэтому разумно вектор поляризации такой волны направить вдоль оси , т.е. взять TE-волну в качестве обыкновенной. В таком случае в качестве необыкновенной естественно выбрать TM-волну. Этот факт сразу значительно упрощает систему уравнений для случая поперечного распространения, т.к. количество ненулевых компонент поляризаций поля сокращается с шести до трёх - . Учитывая также тот факт, что из трех оставшихся уравнений одно является алгебраическим, и только два – дифференциальными первого порядка, оказывается возможным свести рассматриваемую задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

Однако при произвольной зависимости концентрации плазмы от координаты даже упрощенная таким образом система выглядит слишком сложной для аналитического анализа. Для дальнейшего упрощения следует принять одно важное утверждение, напрямую следующее из характера дисперсионной зависимости для необыкновенной волны, а именно: область поглощения сильно локализована вблизи гибридного резонанса, а характеристики поглощения определяются в основном окрестностью этой области. Действительно, в геометрооптическом приближении поглощение невозможно, а нарушение геометрической оптики имеет место лишь в двух точках – точке отражения волны () и точке резонанса. Это утверждение позволяет вне зависимости от действительной формы профиля концентрации ограничиться линейным разложением в точке, отвечающей бесконечному значению :

Из такой формы записи естественным образом следует выбор безразмерной переменной, отвечающей координате, а именно: . В дальнейшем везде, где это не оговорено отдельно, будет использоваться именно эта безразмерная переменная, поэтому знак волны будет опущен.

В результате такого обезразмеривания возникает еще один важный параметр, одинаковый для всех рассматриваемых в данной работе задач с точностью до определения :

Из качественного анализа дисперсионной картины для случая поперечного распространения следовала малость величины магнитного поля, необходимого для обеспечения поглощения. Это позволяет сделать еще одно, последнее для этой задачи упрощение:

В выражении тензора диэлектрической проницаемости младшей степенью является квадратный корень, а значит стоящей в знаменателе поперечной проницаемости первой степенью по магнитному полю можно пренебречь, и область, отвечающая гибридному резонансу, смещается в точку . Учитывая этот факт вместе с остальными сделанными упрощениями, можно получить следующий вид диэлектрической проницаемости плазмы:

Чтобы убедиться в том, что сделанные упрощения не привели к существенным изменениям ожидаемых эффектов, достаточно построить дисперсионную зависимость для линеаризованного тензора.

Подставляя в уравнения Максвелла линеаризованный тензор диэлектрической проницаемости, а также учитывая поляризацию волны, получим следующее уравнение на единственную ненулевую компоненту магнитного поля:

В этом уравнении три параметра: и . Оказывается, их количество можно сократить до двух, если сделать следующие замены:

Таким образом, конечный вид уравнения для распространения необыкновенной волны поперек магнитного поля запишется так:

Даже не приступая к решению этого уравнения можно отметить интересную особенность. В изотропном случае () угол падения волны () входит в уравнение в четной степени, что автоматически означает четность зависимости коэффициента поглощения от угла. Однако при в уравнении присутствует член, пропорциональный первой степени , а значит вполне вероятно появление ассиметрии в функции поглощения. Это означает принципиальную невозможность описания поглощения с помощью функции вида, представленного в разделе 1.1

* 1. **Распространение в плоскости XY ()**

В случае распространения волны в плоскости, образованной градиентом концентрации плазмы и направлением постоянного магнитного поля, уравнения получаются значительно более сложного вида. Действительно, деление поля на обыкновенную и необыкновенную волну в этом случае уже не является тривиальной операцией. Даже учитывая локальность взаимодействия и линеаризуя тензор диэлектрической проницаемости, а также предполагая резкую зависимость от угла и раскладывая его вблизи оптимального значения, остается необходимость в определении поляризаций нормальных волн в области взаимодействия, а эти поляризации, вообще говоря, зависят от координаты. Можно было бы от пространственных компонент поляризации перейти на язык собственных мод среды, но, к счастью, в этом нет необходимости - определить комбинации параметров, от которых в конечном счете будет зависеть ответ, можно, не записывая уравнений.

Рассмотрим для примера случай больших величин магнитного поля, т.е. удовлетворим соотношению . Как было отмечено ранее, при выполнении этого соотношения величина поглощения для необыкновенной волны крайне мала, а обыкновенная волна, напротив, поглощается полностью. Именно поэтому рассмотрим падение на слой волны, содержащей в себе только обыкновенную поляризацию. Анализируя характер дисперсионной зависимости обыкновенной волны, можно прийти к выводу, что величина поглощения полностью определяется коэффициентом прохождения волны через область непрозрачности, ширина которой равна нулю при оптимальном угле падения. Таким образом величину поглощения можно оценить по известной формуле для квазиклассического туннелирования:

При небольшом отклонении от оптимального угла дисперсионная кривая проседает вниз, и поглощение уменьшается. В связи с этим будем проводить разложение функции именно вблизи точки , а не в области резонанса, как это было в предыдущем случае, т.е.

Учитывая экспоненциальный характер зависимости коэффициента туннелирования от ширины области непрозрачности, будем считать функцию поглощения локализованной вблизи оптимального угла:

Зависимость в области туннелирования можно приблизить параболой, заданной тремя точками: границами зоны туннелирования и её максимальной глубиной. В результате в первом порядке по отклонению от оптимального угла продольный показатель преломления имеет вид:

Подставляя это выражение в формулу для коэффициента поглощения и интегрируя в классически запрещенной области, получим:

Как видно из полученной формулы, в рамках сделанных приближений линия поглощения имеет гауссову форму c шириной . Это и есть искомая комбинация параметров задачи. Согласно полученным результатам, зависимость поглощения от нормированной отстройки по углу в широких пределах изменения параметров задачи сохраняет и форму, и пропорции. Значительные отклонения от этого закона ожидаются лишь в области достаточно слабых магнитных полей, когда поглощением необыкновенной волны уже нельзя будет пренебречь.

1. **Численное моделирование**
   1. **Обзор метода**

Для вычисления коэффициентов поглощения и трансформации будем использовать импедансную технику. Подробно данная техника интегрирования уравнений Максвелла рассмотрена в работах[…]. Идея метода заключается в представлении поперечной поляризации поля через сумму волн, распространяющихся в разные стороны, а затем введении оператора отражения и сведении граничной задачи к эволюционной.

В силу однородности пространства по координатам и уравнения Максвелла представимы в форме

,

где – вектор поперечной поляризации волны, – волновой оператор, зависящий от координаты X, параметров плазмы и направления распространения волны,.

Разложение вектора поперечной поляризации по волнам, бегущим в разные стороны, может быть осуществлено следующим образом:

где – 2-х компонентный вектор, определяющий вклад каждой из выбранных нами мод в суммарное поле волны. Оператор перехода к к выбранным модам состоит из векторов-столбцов, каждый из которых представляет собой одну из мод, записанную в координатах Y и Z. В общем случае оператор перехода может зависеть от координаты X. Тогда уравнения Максвелла перепишутся в форме:

Для изучения распространения в плазме обыкновенной или необыкновенной волны нам в любом случае понадобится представление поля через плазменные моды. Однако поляризации собственных мод меняются вдоль градиента плотности, что приводит к ненулевой производной оператора перехода и, как следствие, громоздкости выражений. Поэтому непосредственно для интегрирования мы будем использовать разложение по вакуумным модам, а затем пересчитывать одно представление в другое, используя формулы связи:

где индексы v и p относятся соответственно к вакууму и к плазме.

Уравнение на оператор отражения получается подстановкой выражения в уравнения Максвелла и исключением вектора поляризации. Окончательный вид этого уравнения представлен ниже:

где – матрицы 2х2, получающиеся из матрицы разбиением на четыре одинаковые по размеру части.

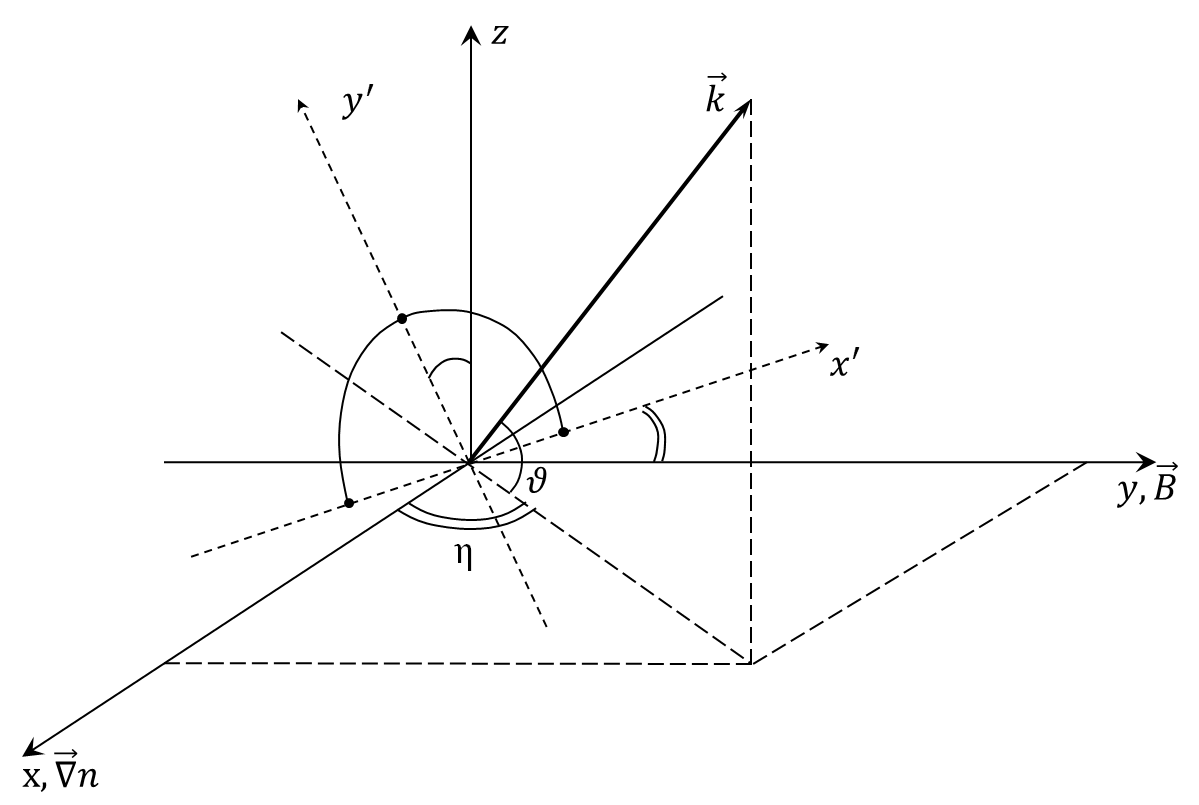
Величина элемента матрицы представляет собой коэффициент отражения -ой моды в -ую. С физической точки зрения оператор отражения в точке Х показывает, как волна отразится от полупространства . Поэтому начальным условием к приведенному уравнению служит условие нулевого отражения от любой точки за слоем плазмы.

Проинтегрировав уравнение на оператор отражения справа налево, можно применить его к конкретной поляризации падающей волны и, таким образом, найти отраженну. Величину поглощения в слое можно вычислить как нормированную разность потоков энергии в падающей и отраженной волнах. Эффектом прохождения за слой можно пренебрегаем, считая его несущественным ввиду сильного превышения максимальной концентрации плазмы над критическим значением, высокой частоты излучения и, таким образом, большой протяженности области туннелирования.

Для определения коэффициентов трансформации собственных мод необходимо от оператора отражения по вакуумным модам перейти к коэффициентам отражения по собственным модам среды. Сделать это можно по формуле:

где матрицы получаются из матриц перехода способом, аналогичным описанному выше.

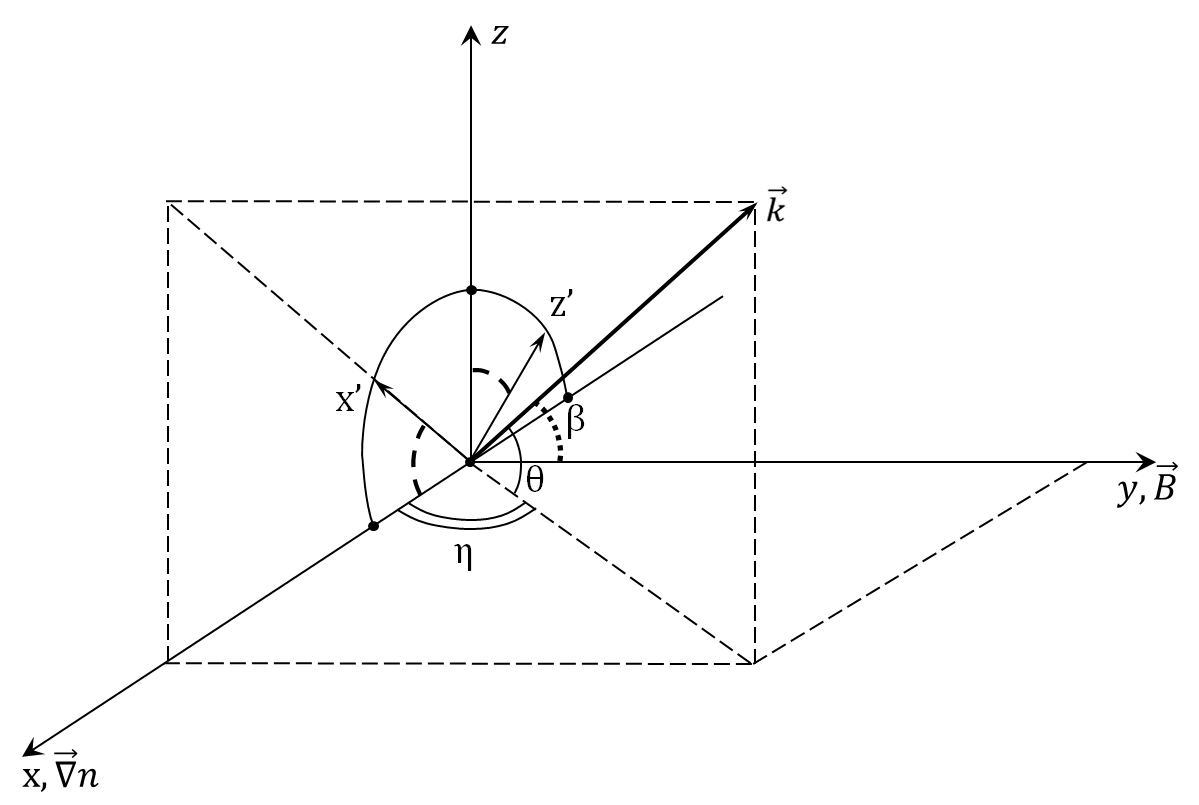
* 1. **Вычисление конкретного вида операторов**

Для определения оператора перехода к вакуумным модам введем вспомогательную систему координат так, как показано на рис.4. Очевидно, вектор поляризации плоской волны в вакууме лежит в штрихованой плоскости. Назовем первой вакуумной модой плоскую волну с поляризацией электрического поля вдоль оси , а второй – вдоль . Тогда для записи поперечной поляризации падающей на слой плоской волны нам необходимо найти оператор перехода от штрихованых координат к поперечным. Выразим его через углы и :

Тогда первая и вторая вакуумные моды падающей волны в поперечных координатах запишутся так:

С формальной точки зрения в отраженной волне угол должен отсчитываться от отрицательной части оси Х. Поэтому моды отраженной волны получаются из мод падающей соответствующей заменой в выражениях. Таким образом, получаем оператор перехода для вакуума в следующем виде:

В качестве собственных мод среды выберем обыкновенную и необыкновенную волны так, что

С точки зрения математики оператор перехода по отношению к плазменным модам представляет собой матрицу, составленную из собственных векторов волнового оператора. В общем случае является громоздкой и трудной для восприятия матрицей. Однако нам она понадобится только для того, чтобы правильно задать граничные условия, а для этого достаточно знать значение на границе плазменного слоя. Для получения этого значения введем еще одну вспомогательную систему координат, представленную на рис. 5. Т.к. ось совпадает с проекцией волнового вектора на плоскость , в штрихованной системе координат волновой вектор не имеет компоненты по оси и волновое уравнение для однородной среды и монохроматического излучения выглядит так :

,

где - угол между постоянным магнитным полем и волновым вектором. Из этого выражения легко получаются поляризации собственных мод среды:

где – значение показателя преломления для обыкновенной или необыкновенной волны. Чтобы найти предельные поляризации среды, устремим в этих выражениях концентрацию плазмы к нулю. Проделав это, получим:

где - производная квадрата показателя преломления в нуле концентрации. Конкретные значения компонент поля выбираются из соображений нормировки потока энергии.

Чтобы теперь получить предельные поляризации в родной системе координат, нужно штрихованную повернуть вокруг оси . Завершающим этапом этой процедуры будет домножение на обратную матрицу вакуумных мод, в результате чего получим:

Блочная структура этого оператора не случайна и отвечает факту сохранения направления распространения при смене базиса. В случае поперечного распространения () становится диагональной и не зависит ни от величины магнитного поля, ни от угла к градиенту концентрации, а обыкновенной и необыкновенной плазменным волнам в этом случае соответствуют просто TE и TM волны.

Получив коэффициент отражения по вакуумным модам, можно сразу же вычислить коэффициент поглощения. Считая поляризации падающей и отраженной волн в вакууме известными и записанными через введенные ранее вакуумные моды, получим выражение для коэффициента поглощения:

Напоследок приведем здесь вид волнового оператора с учетом выбранной нами геометрии:

Рис.4

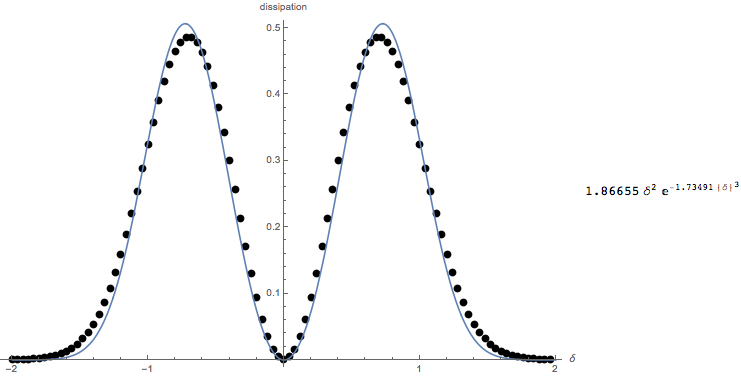
В качестве профиля плотности рассматривался параболический профиль, плавно переходящий на границах в ноль.

* 1. **Результаты моделирования**

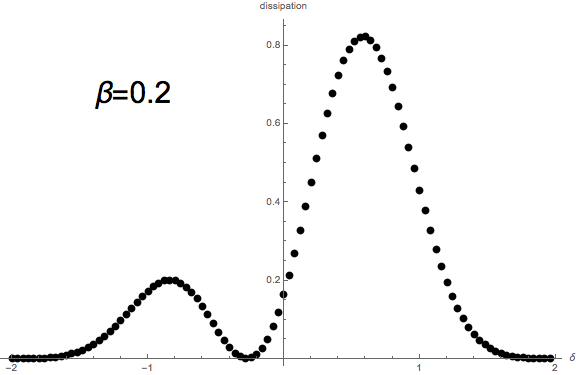
Напомним, что, как было отмечено в разделе 2, в случае поперечного распространения волны удобно ввести следующие безразмерные параметры:

где , а - обратная производная концентрации по координате, взятая в точке верхнего гибридного резонанса. Условие высокочастотной плазмы обеспечивается соотношением .

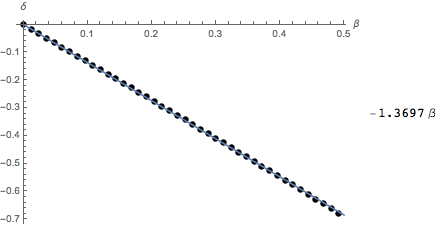
Для начала рассмотрим случай падения необыкновенной волны на слой изотропной плазмы. Результат численного моделирования представлен на рисунке [какой-то номер]. Аппроксимация зависимости была произведена с использованием формулы, записанной в разделе 1.1 Как видно из представленного графика, эта формула верна с точностью до нормировочного множителя и множителя в показателе экспоненты. Максимальная величина поглощения равна примерно 0.5 и в широких пределах не зависит ни от профиля плотности, ни от частоты излучения. Однако положение максимумов проявляет сильную зависимость от конфигурации плазмы и способно изменяться в разы, оставаясь, однако, всегда симметричным относительно начала координат.



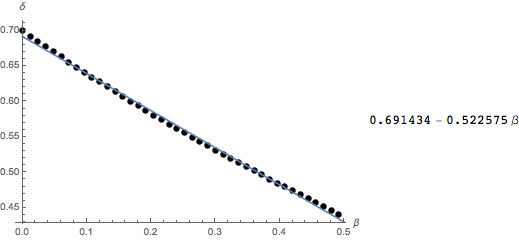
В случае наличия слабого магнитного поля, вопреки сказанному в разделе 1.1 и в согласии в предсказанием, сделанным в разделе 2.1, зависимость коэффициента поглощения от угла больше не является четной функцией. Характерный вид этой зависимости представлен ниже. Помимо очевидной асимметрии, стоит отметить наличие ненулевого поглощения для TEM-волны. По мере увеличения магнитного поля пик поглощения на отрицательной части оси полностью пропадает, в то время как глобальный максимум растет и достигает единицы при и . Зависимость положений нуля и максимума на плоскости параметров имеет линейный вид и представлена ниже.



Характерная зависимость коэффициента поглощения в случае малого магнитного поля



Расположение нуля поглощения на плоскости параметров

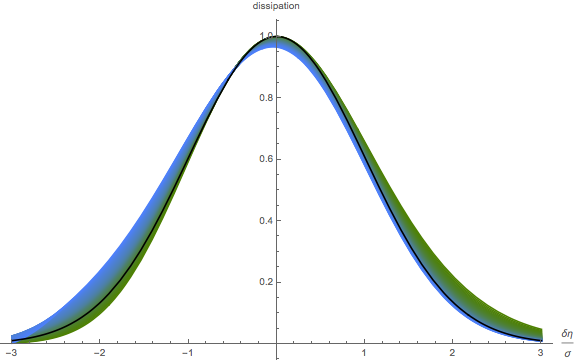


Расположение максимума поглощения на плоскости параметров

При слишком сильном магнитном поле () поглощение прекращается. В пересчете на реальные значения параметров при это означает величину , что полностью подтверждает предположение о малости этого параметра и оправдывает операцию линеаризации.

Согласно сказанному в подразделе 1.2, в случае распространения в плоскости нас ожидают две принципиально различных картины поглощения в зависимости от соотношения параметров. При , когда туннелированием необыкновенной волны можно пренебречь, нас ожидает полное поглощение обыкновенной волны при вполне конкретных углах. При ситуация значительно сложнее. В области малых значений магнитного поля ожидается падение поглощения для обыкновенной волны и рост для необыкновенной. Это приводит к необходимости вместе с углом подбирать также поляризацию волны.

Приведем зависимость коэффициента поглощения для случая больших величин магнитного поля, построенную в зависимости от нормированной на ширину распределения отстройки угла падения от оптимального. На рисунке [#!!!] различными оттенками цвета обозначены различные значения параметров плазмы при фиксированном значении . Светло-зеленый отвечает значениям , близким к единице, а темно синий – близким к минимально возможному для этого случая. Черной линией выделена теоретически предсказанная кривая. Этот случай удивителен тем, что теоретическая формула, полученная с большим количеством приближений, оказалась в данном случае точной.



1. **Анализ полученных резальтатов**

Из всех полученных результатов наибольший интерес, на мой взгляд, представляет асимметричная зависимость поглощения от угла падения при поперечном распространении. Попытаемся получить эту зависимость, не прибегая к численному решению соответствующего дифференциального уравнения.

Для начала рассмотрим случай . В этом случае уравнение на единственную ненулевую компоненту магнитного поля выглядит так:

Запишем формулу для поглощения, представленную в разделе 1.1, в безразмерных переменных:

Получить эту зависимость можно как минимум тремя различными способами.

Первый из них основывается на предположении, что поглощение происходит в окрестности точки – это утверждение аналогично утверждению о локализации поглощения в области гибридного резонанса, только в данном случае имеет место резонанс с плазменной квазистатической волной. Такое предположение позволяет пренебречь зависимостью от координаты в множителе, стоящем перед функцией напряженности магнитного поля. Частное решение упрощенного уравнения ищется в предположении конечности поля в точке и в окрестности этой точки имеет следующий простой вид:

Далее, выражая из уравнений Максвелла напряженность электрического поля вдоль оси , можно найти поглощение через формулу для Джоулевых потерь, в результате чего получить пропорциональность . Для сходимости интеграла на Джоулево тепло вводят столкновительный член, который затем стремят к нулю. Множитель с экспонентой возникает в результате выражения величины через граничные условия на основании представлений квазиклассического туннелирования через область непрозрачности в зону поглощения, аналогично тому, как это было проделано в разделе 2.2.

Второй основан на формальных представлениях о потоке энергии в дифференциальном уравнении второго порядка. Известно, что любое линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка можно свести к форме, не содержащей первой производной:

Для такого уравнения существует тождество, выражающее закон сохранения потока энергии:

где звезда обозначает взятие комплексного сопряжения, а штрих – полной производной по координате. Теперь, вводя для зависимой переменной малую комплексную часть и вычисляя вычет для мнимой части потенциала, можно получить ту же самую зависимость для величины поглощения. Необходимо, однако, помнить, что при замене координат и функции величина потока меняется, и не для любой замены «поглощение» останется конечным. Поэтому необходимо после избавления от первой производной в исходном уравнении сделать дополнительную замену переменных с тем условием, чтобы сохранить первоначальный смысл искомой функции. Приведем здесь основные формулы переходов:

Тогда условие на сохранение смысла искомой функции выглядит так:

Используя первое из этих преобразований, можно привести уравнение на индукцию магнитного поля к виду

Определяя замену из приведенного выше условия и переходя к новой переменной, получим наконец

В силу квадратичной замены, в новых переменных падающая волна движется не со стороны отрицательной полуоси, а из бесконечности вдоль луча с аргументом . Знак определяется из соображений положиетльного знака поглощения. Это условие по своей сути представляет собой условие обхода полюса Ландау. В данном случае необходимо выбрать знак «-». Теперь, вычисляя вычет мнимой части потенциала в нуле и домножая результат на квазиклассический интеграл от нуля потенциала, расположенного в точке , до полюса, снова получим ту же самую формулу для поглощения.

Оба вышеизложенных способа получения объединяет одна существенная особенность – так или иначе используется локальность поглощения. В первом случае она используется явно в тот момент, когда величиной переменной пренебрегают по сравнению с параметром. Во втором случае локальность заключена в процедуре взятия вычета – это наиболее естественный способ аргументированно показать, что эффект в данном случае связан с бесстолкновительным поглощением. Как бы то ни было, оба способа работают лишь до тех пор, пока вид потенциала более менее прост. Как видно из уравнения с , вместо одной особенности нас ожидают целых три полюса, что в первом случае подразумевает сшивку локальных решений в области заведомого невыполнения квазиклассики, а во втором – совершенно нелицеприятную замену переменных.

Отличительной особенностью третьего способа вычисления поглощения для данной задачи является его принципиальная нелокальность, а также намного более широкий спектр потенциалов, для которых решение может быть получено с тем или иным успехом. Платой за открывающиеся возможности является сложность идеи, заложенной в этом методе.

* 1. **Метод фазовых интегралов**

Идея метода основана на явлении Стокса. Джордж Габриель Стокс впервые столкнулся с этим эффектом, исследуя асимптотики функций Эйри в 1857 году. Строгое математическое обоснование метода может быть дано с использованием обобщенного преобразования Лапласа, однако в данном изложении я не стану подробно останавливаться на математическом аспекте эффекта, а изложу лишь его основную суть.

Пусть имеется уравнение вида стационарного одномерного уравнения Шредингера с потенциалом, допускающим запись решения в виде суммы ВКБ-асимптотик. Тогда в области выполнения ВКБ-приближения решение запишется в виде:

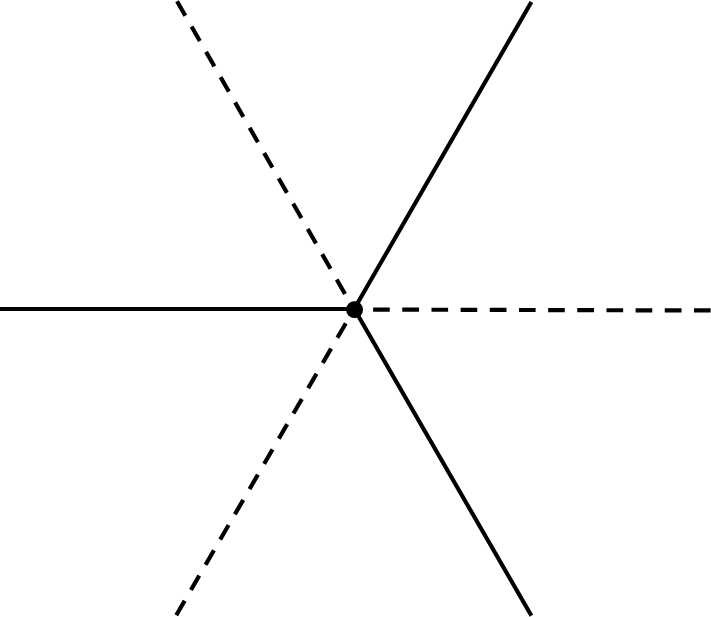
На действительной оси области, в которых решение представимо в виде суммы двух квазинезависимых волн, разделены областью взаимодействия, в которой ВКБ-приближение неприменимо. В случае уравнения Эйри, как и в случае нашего уравнения, это окрестность нуля. Однако если рассмотривать анализируемое уравнение на комплексной плоскости, то окажется, что область взаимодействия можно обойти, оставаясь каждый момент времени в условиях применения асимптотического решения. Явление, обнаруженное Стоксом, заключается в следующем: существую кривые, разделяющие комплексную область на части, в каждой из которых решение представимо в виде линейной комбинации асимптотических решений, но со своими для каждой области коэффициентами. Метод фазовых интегралов, фактически, определяет способ пересчета этих коэффициентов из одной области в другую и, таким образом, позволяет находить связь прошедшей волны с падающей и отраженной, обходя особенность в комплексной плоскости.

Линии, разделяющие комплексную плоскость на области сохранения асимптотического разложения, бывают двух типов. Их принято называть Стоксовыми и анти-Стоксовыми. В различных публикациях терминология именования может различаться. Я буду придерживаться определений, данных в книге[…]. Анти-Стоксовыми назовем линии, вдоль которых асимптотические решения осциллируют, сохраняя своё абсолютное значение. Соответственно, Стоксовыми – те, вдоль которых значения инкремента и декремента растущей и экспоненциально спадающей волн соответственно максимальны. Математически эти кривые можно определить через фазовые интегралы в выражениях асимптотических разложений:

где нижний предел в интегралах представляет из себя одну из особых точек потенциала – нулей и полюсов.

Проиллюстрируем сказанное на примере функции Эйри. Как известно, уравнение Эйри, а также асимптотические выражения его решений имеет следующий вид:

Нетрудно получить, что, в согласии с данным выше определением, линии Стокса для такого уравнения представляют собой лучи, уходящие на бесконечность из начала координат под углами , а анти-Стоксовы – под углами . В результате получается картина, представленная на рисунке [###].



Сплошными линиями выделены анти-Стоксовы направления, пунктирными – Стоксовы. Картина, представленная на этом ресинке, является основным инструментом анализа в методе фазовых интегралов, именуемом иногда методом Стокса, и называется графом Стокса.

Явление Стокса, как и следовало ожидать, происходит на Стоксовых линиях. Смена коэффициентов асимптотического разложения связана с качественным изменением траектории наискорейшего спуска при взятии интегралов, возникающих при строгом описании с помощью преобразования Лапласа. Понять же происходящее можно и без привлечения сложной математики. Дело в том, что в любой точке комплексной проскости, кроме набора особых точек и анти-Стоксовых линий, одно из решений доминирует, а другое – экспоненциально спадает, поэтому с точки зрения асимптотического разложения удержание спадающего решения является превышением точности. Наибольшая разница между решениями достигается как раз на Стоксовых линиях. В случае, если коэффициент перед доминантным решением отличен от нуля, решение в целом не почувствует изменения коэффициента перед субдоминантным. Если же доминантное решение входит в линейную комбинацию с нулевым коэффициентом, при переходе через Стоксову линию решение не меняет своего вида. Формально операцию перехода через линию Стокса можно представить как домножение столбца коэффициентов перед ВКБ-решениями на некоторую матрицу. Столбец коэффициентов можно выбрать двумя способами: по направлению распространения волны (знаком перед фазовым интегралом) или по свойству доминантности. В этой работе будет использоваться первый способ. Для него матрица перехода имеет вид:

В случае, если на первом месте в векторе коэффициентов идет коэффициент перед доминантной функцией, необходимо проводить умножение на , в противном случае – на транспонированную матрицу . Константа s имеет ключевое значение в рассматриваемом методе и носит название константы Стокса. В общем случае для каждой Стоксовой линии она своя. Анти-Стоксовы же линии характерны тем, что меняют субдоминантную и доминантную функции местами. В результате в областях, разделанных этими линиями, необходимо проводить домножение на разные матрицы.

В строгой теории константа Стокса возникает в результате взятия соответствующего интеграла методом стационарной фазы. Оказывается, во многих случаях удается определить её значение с той или иной степенью точности из совершенно иных соображений. Например, для уравнений, решения которых не имеют точек ветвления, константы Стокса могут быть определены из условия перехода решения самого в себя при полном обороте вокруг начала отсчета. В этом случае не стоит забывать о наличии ветвления в асимптотическом представлении решения. Учесть это можно с помощью проведения разреза и домножения решения на коэффициент, соответствующий конкретному виду точки ветвления. В случае, если потенциал содержит единственный ноль -го порядка, представляется возможным найти общую формулу для константы Стокса в случае обхода проти часовой стрелки:

В случае наличия у потенциала нескольких особых точек при обходе необходимо учитывать, из какой именно особенности выходит линия, с которой происходит взаимодействие. Для перехода от особенности в точке к особенности в точке вектор коэффициентов должен быть домножен на матрицу

В показателях стоит ни что иное, как фазовые интегралы. Отсюда и проистекает название метода.

Все вышесказанное можно резюмировать, сформулировав 4 коротких правила:

1. Переход через линию Стокса сопровождается домножением столбца коэффициентов на матрицу в случае, если волна, распространяющаяся в положительном направлении действительной оси, доминантна, и на транспонированную в обратном случае.
2. Переход через анти-Стоксову линию меняет свойство доминантности.
3. Переход от одной особенности к другой сопровождается домножением на матрицу фазовых интегралов
4. Переход через разрез сопровождается домножением на константу, соответствующую типу разреза.
   1. **Случай изотропной плазмы ()**

Попытаемся применить метод Стокса к случаю нулевого значения параметра анизатропии. Запишем полученное выше уравнение:

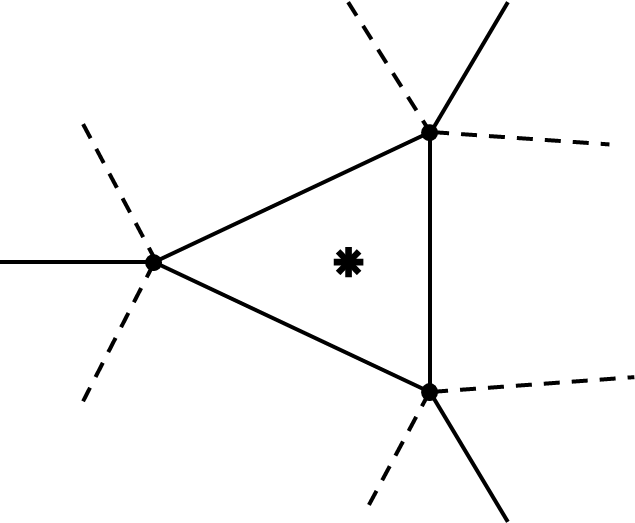
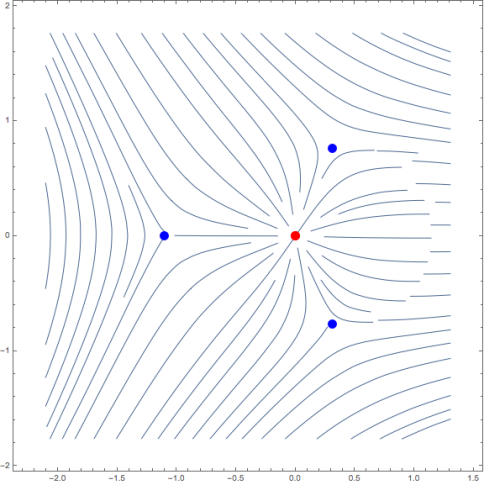
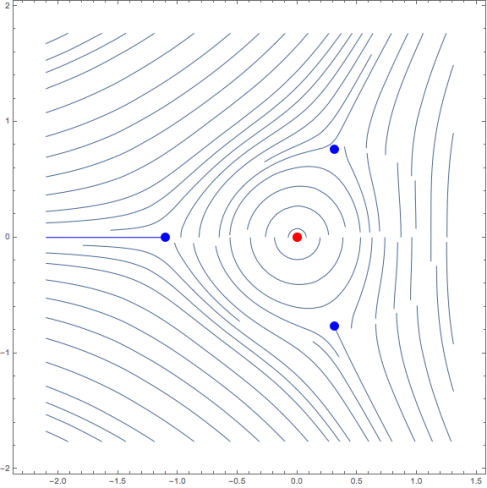
Видно, что рассматриваемый потенциал обладает четырьмя особыми точками – тремя нулями первого порядка и одним полюсом второго. Сложность данного конкретного случая заключается в том, что данное уравнения является дифференциальным уравнением Фробениуса с индексами , а начало координат, являясь обыкновенной особенностью уравнения, представляет собой точку ветвления для решения, что говорит о невозможности вычисления констант Стокса путем замыкания обхода. В этом случае одним из вариантов решения проблемы является использование приближения изолированных особых точек – для каждой точки используется невозмущенное значение константы Стокса, определяемое общей формулой. Существуют и другие варианты нахождения этих постоянных, и в каждой задаче может быть изобретен свой, справедливый только для этого частного случая способ.

Вид графа Стокса можно угадать следующим образом: вблизи каждой особой точки линии ведут себя также, как и для изолированной точки, а соединения различных особых точек проводится из соображений глобального вида потенциала. В данном случае для потенциал переходит в потенциал уравнения Эйри, а значит и общий вид графа Стокса должен этому соответствовать. Локальное поведение Стоксовых и анти-Стоксовых линий в окрестности полюса второго порядка рассмотрено в статье […] и определяется вычетом в особенности.

Проверить правильность построения графа Стокса можно, численно построив поле направлений для следующих векторов:

Действительно, вдоль направления вектра сохраняется мнимая часть фазового интеграла, а значит при выходе из нуля потенциала рашение на такой линии будет либо экспоненциально спадать, либо нарастать. Соответственно векторное поле определяет положение стоксовых линий, а поле – антистоксовых. Подобный способ определения графа Стокса удобен отсутствием необходимости вычислять фазовый интеграл в общем виде, что зачастую бывает сложно не только для человека, но и для машины.

Ниже представлен эффективный граф Стокса для рассматриваемого потенциала, а также его действительный вид, вычисленный упомянутым способом.

На рисунках, слева направо: эффективный граф Стокса из общих соображений, поле линий Стокса, поле анти-Стоксовых линий. В центе выделен полюс, в точках пересечения линий – нули.

Стоксовы линии, выходящие из нулей с положительной действительной частью и идущие вдоль действительной оси, асимптотически стремятся к оси симметрии графа. Это означает, что, вводя малое поглощение (), т.е. сдвигая граф вверх как целое, мы оставляем положительную часть действительной оси ниже нижней из двух рассматриваемых Стоксовых линий. Этот факт диктует необходимость обхода полюса снизу, что замечательно сочетается с результатом, полученным в начале этого раздела. Действуя в соответствии с правилами, представленными в конце предыдущего параграфа, а также задавшись граничным условием отсутствия волны, падающей из положительной бесконечности, представим коэффициенты решения слева от области взаимодействия в виде:

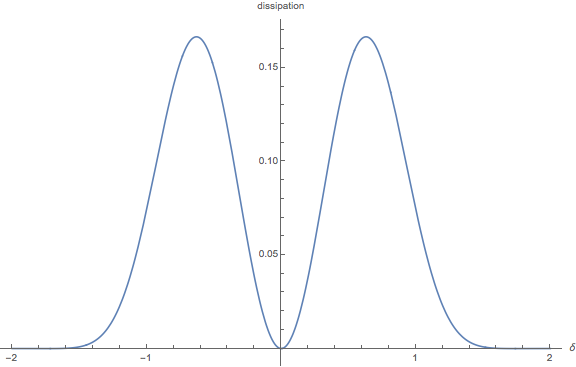
где константы Стокса пронумерованы в порядке пересечения соответствующих линий.

Таким образом, нам удалось получить коэффициенты отражения и прохождения, просто перемножая матрицы! Выраженный через введенный обозначения коэффициент поглощения запишется в следующем виде:

Теперь задача свелась к определению двух неизвестных констант Стокса. Вообще говоря, использованное в данном случае слово «константа» имеет смысл лишь независимости от переменной уравнения. От параметров уравнения константы Стокса могут и будут зависеть. Однако в данном случае этой зависимостью можно попытаться пренебречь.

Для начала отметим, что . Это означает, что второе слагаемое в формуле поглощения, а значит и константа с индексом «1» влияет на результат только при малых . С другой стороны, из физических соображений ясно, что при больших абсолютных значениях поглощение будет мало. Эти рассуждения приводят к выражению , в котором фаза является неопределенной постоянной. Её можно определить, считая, что при больших потенциал с точки зрения падающей слева волны выглядит как потенциал Эйри, а значит . Также кажется очевидным, что, в силу очевидного отсутствия поглощения для TEM волны (этот процесс описывается бездиссипативным уравнением Эйри) при нулевом значении поглощение отсутствует, что даёт второе условие: , где фазовый интеграл вычисляется при нулевом значении , a параметр отвечает за фазу коэффициента отражения для TEM волны. Т.к. для номального падения известен точный результат, то значение можно положить равным 0. Таким образом, финальное варыжение для коэффициента поглощения принимает вид:

Ниже представлен график полученной зависимости.

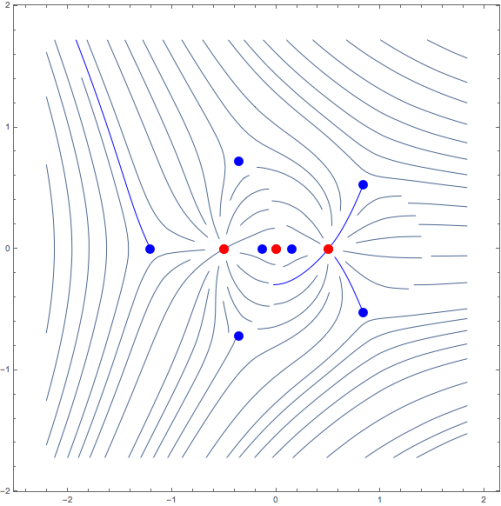
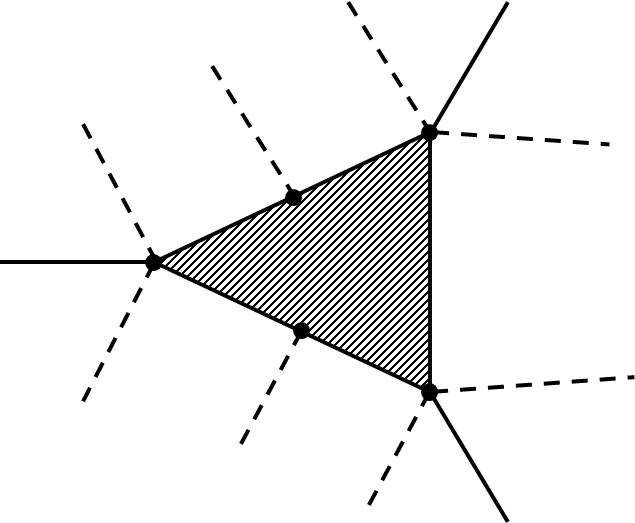
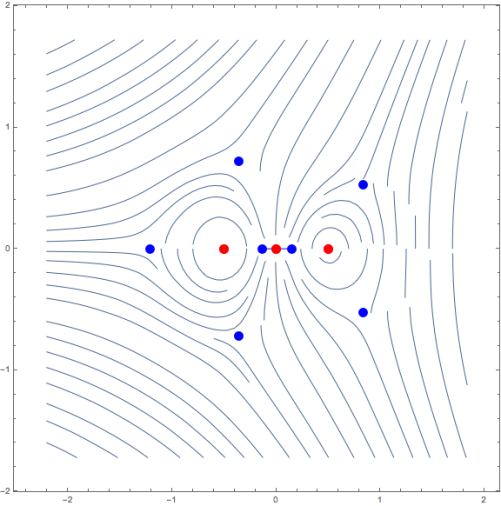


Помимо того, что, как и ожидалось, представленная зависимость обладает всеми основными свойствами оригинальной, стоит отметить факт точного совпадения положений максимумов поглощения с результатми численного моделирования. Это связано с тем, что, как оказалось, произвольные фазы в выражении для постоянных Стокса влияют только на величину пиков, не сдвигая их вдоль оси .

* 1. **Общий случай поперечного распространения**

Попытаемся теперь получить зависимость, отражающую основные отличительные черты случая поперечного распространения в присутствии постоянного магнитного поля. Для начала исключим из уравнения на индукцию поля первую производную и для полученного потенциала построим граф Стокса. Результаты представлены на рис [###]. Как видно из численного построения, картина вблизи трех полюсов весьма сложна. К счастью, при обходе вдалеке от начала координат нас интересует только внешняя структура линий, представленная на изображении эффективного графа Стокса. Действуя абсолютно аналогично рассмотренному выше случаю, произведем обход снизу области взаимодействия:

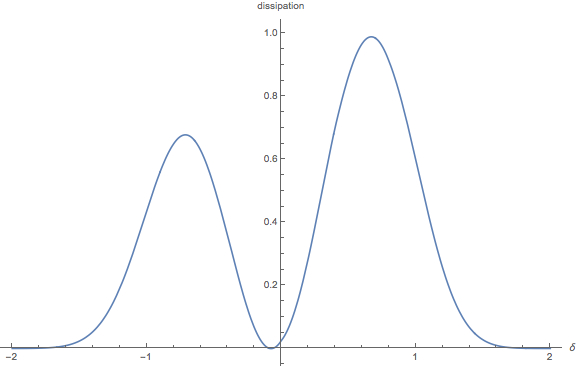
где – фазовый интеграл для перехода от -ой особенности к -ой.

На рисунках, слева направо: эффективный граф Стокса без внутренней структуры, поле линий Стокса, поле анти-Стоксовых линий.

Несмотря на значительное усложнение вида потенциала, выражение для коэффициента поглощения усложнилось незначительно – вся сложность теперь содержится в значениях фазовых интегралов. Приведем его в явном виде:

Фазовые интегралы в данном случае устроены аналогичным изотропному случаю образом – при больших значения параметров задачи они тремятся к нулю, что позволяет вновь выбрать последнюю по направлению обхода константы равной . Однако утверждение о нулевом поглощении TEM волны теперь не является верным, поэтому необходимо использовать другое условие нормировки. В качестве такового выберем условие равенства минимального значения коэффициента поглощения нулю. Пользуясь также независимостью положений максимумов от фаз постоянных Стокса, получим зависиомсть представленную на рисунке […].



Характерный вид зависимости коэффициента поглощения для анизатропного случая, построенный по методу фазовых интегралов

Полученная зависимость отражает в себе все характерные особенности, наблюдавшиеся при численном счете, начиная от направления асимметрии и заканчивая линейной зависимостью сдвига нуля и глобального максимума при увеличении магнитного поля.