БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Методы решения нелинейного уравнения

Выполнил: Аквух Джеймс
2 курс 3 группа
Преподаватель: Будник А.М.

Минск 2016

1. Постановка задачи

Найти решение нелинейного уравнения, заданного в виде $f(x) = 0$.

2. Методы решения нелинейного уравнения

A. метод простых итераций

Формула для итераций:

$$x = \phi(x)$$

Условия сходимости (достаточные):

- $\exists ! \, x^* : f(x^*) = 0; \ |x - x^*| < \delta$
- $\phi(x)$ определена на $|x - x_0| < \delta$
- производная непрерывна и ограничена : $|\phi'(x)| \le q \le 1$
- $|x_0 - \phi(x_0)| < m$
- $\frac{m}{1-q} < \delta$

B. метод Ньютона

Формула для итераций:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Условия сходимости (достаточные):

- $f(a)\,f(b) < 0$
- $f'(x) \ne 0; f''(x) \ne 0$
- $f(x_0)\,f''(x_0) > 0, \ x_0 = [a, \ b]$

3. Проверка условий сходимости

A. метод простых итераций

$f(x) = e^x + \sqrt{1 + e^{2x}} - 2$

$\phi(x) = x - f(x) \,/\, 5; \ x_0 = 0; \ \delta = 0.5$

$\phi'(x) = -\frac{1}{5}\left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\right) + 1 < 0.9 < 1$

$|x_0 - \phi(x_0)| = (\sqrt{2} - 1) \,/\, 5 < 0.1$

$\frac{m}{1-q} = \frac{0.1}{1-0.9} = 1 > 0.5$

Вывод: достаточные условия сходимости не выполнены

B. метод Ньютона

$f(x) = e^x + \sqrt{1 + e^{2x}} - 2; a = -0.5; b = 0.5; \ x_0 = 0$

$f(-0.5) * f(0.5) \approx -0.35$

$f'(x) > 0, \ x \in [-0.5; \ 0.5]$

$f''(x) > 0, \ x \in [-0.5; \ 0.5]$

$f(x_0)\,f''(x_0) \approx 2.47$

Вывод: достаточные условия сходимости выполнены

4. Листинг

```
'use strict';
const EPS = 1E-5, TOL = 0.5

let log = console.log, M = Math

let f = x => (M.exp(x) + M.sqrt(1 + M.exp(2 * x)) - 2)
let fd = x => (M.exp(x) + M.exp(2 * x) / M.sqrt(M.exp(2 * x) + 1))
let phiN = x => (x - (f(x) / fd(x)))
let phiS = x => (x - f(x) / 5)

let bisection = (r) => {
        while (r.b - r.a > TOL) {
            let c = (r.b + r.a) / 2
            if (M.abs(f(c)) < EPS) return { a: c, b: c }
            r[f(c) * f(r.a) < 0 ? 'b' : 'a'] = c
        }
        return r
}

let solve = r => {
        {
                let x = (r.a + r.b) / 2, count = 1
        while (M.abs(x - (x = phiS(x))) > EPS && ++count);
        log(`Simple iterations: the solution ${x}\xB1${EPS} was found with ${count} iterations`)
        }
        {
                let x = (r.a + r.b) / 2, count = 1
        while (M.abs(x - (x = phiN(x))) > EPS && ++count);
        log(`Newton: the solution ${x}\xB1${EPS} was found with ${count} iterations`)
        }
}

solve(bisection({ a: -1, b: 1 }))
```

5. Результаты

$$Simple\ iterations:\ the\ solution\ -0.287652966289323 \pm 0.00001\ was\ found\ with\ 26\ iterations$$
$$Newton:\ the\ solution\ -0.28768207245164723 \pm 0.00001\ was\ found\ with\ 3\ iterations$$

6. Вывод

Несмотря на тот факт, что для метода простых итераций достаточные условия сходимости не были выполнены, он сошелся, что подтверждает достаточность но не необходимость заданных условий сходимости. В то же время, сходимость метода Ньютона оказалось на порядок выше (количество необходимых итераций отличается на 1 порядок). Это обусловлено двумя факторами: метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости в отличие от МПИ, который обладает линейной скоростью сходимости, и достаточные условия сходимости метода Ньютона были выполнены.