БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Методы решения системы нелинейных уравнений

Выполнил: Аквух Джеймс
2 курс 3 группа
Преподаватель: Будник А.М.

Минск 2016

1. Постановка задачи

Найти решение системы нелинейных уравнений, заданных в виде $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{0}$.

2. Методы решения системы нелинейных уравнений

A. метод простых итераций

Формула для итераций:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_1(x_2, \dots, x_n), \\ \quad \vdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$$

Условие остановки:

$$\max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leqslant \varepsilon$$

B. метод Ньютона

Формула для итераций:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) - F(^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

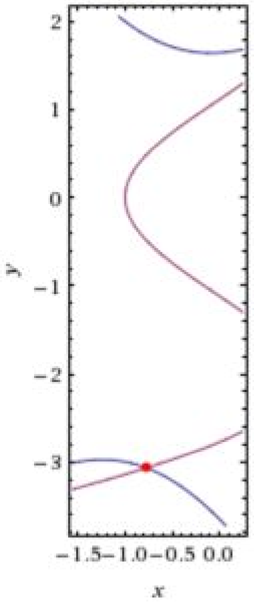
$$W(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Условие остановки:

$$\max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leqslant \varepsilon$$

3. Реализация

$$2 * x^2 - x\,y - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$$
$$y\,sin(y) - x - 1 = 0$$



Из графика видно, что в качестве начального приближения можно взять точку $(-1, -3)$

Метод простых итераций:

$$x = y\,sin(y) - 1$$
$$y = x^2 - 1/2\,x\,y \;-\; 1/2\,y^2 + x + 3$$

Метод Ньютона:

$$\begin{matrix} 4x - y + 2 & -x - 2y - 2 \\ -1 & sin(y) + y\,cos(y) \end{matrix}$$

4. Листинг

```
const {sin, cos, pow} = Math;
const {log} = console;
const {norm, subtract, multiply, inv, transpose} = require('mathjs');

const EPS = pow(10, -5);
const x0 = -1, y0 = -3;

const f = ([x, y]) => [2 * x * x - x * y - y * y + 2 * x - 2 * y + 6, y * sin(y) - x - 1];
const J = ([x, y]) => transpose([[4 * x - y + 2, -x - 2 * y - 2], [-1, sin(y) + y * cos(y)]]);
const phiS = (x) => subtract(x, multiply(f(x), inv(J([x0, y0]))));
const phiN = (x) => subtract(x, multiply(f(x), inv(J(x))));
const r = (a, b) => norm(subtract(a, b), 2);

const solve = (next, name) => {
        let x = [x0, y0], count = 0;
        while (r(x, x = next(x)) > EPS && ++count);
        log(`${name}: the solution was found with ${count} iterations, error is ${r(f(x), 0)}:`);
        console.log(x);
}

solve(phiS, 'Simple iterations');
```

```
solve(phiN, 'Newton');
```

5. Результаты

$\textit{Simple iterations}: \ \textit{the solution was found with } 9 \textit{ iterations}, \ \textit{error is } 0.00000337038950978722:$
$[\ -0.7738871795634308, \ -3.067821143901183\ ]$
$\textit{Newton}: \ \textit{the solution was found with } 3 \textit{ iterations}, \ \textit{error is } 2.891127342391105e-13:$
$[\ -0.7738863621937287, \ -3.0678207875964136\ ]$

6. Вывод

С помощью метода Ньютона удалось определить результат с большей точностью за меньшее число итераций, по сравнению с методом простых итераций. Это обусловлено тем, что метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости, в то время как метод простых итераций - линейную. Кроме этого метод Ньютона является более устойчивым по отношению к выбору начального приближения по сравнению с методом простых итераций. Например - при выборе начального приближения $(0, 0)$ метод Ньютона сходится, в то время как метод простых итераций уже расходится.