Белорусский государственный университет
Факультет прикладной математики и информатики

Джеймс Аквух
3 группа

Минск 2016

49

Решить уравнение Вольтерра сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$y(x) = \int_0^x \frac{t}{t+1} y(t)dt + e^x$$

Решение.

$y' = \frac{x}{x+1}y + e^x, y(0) = 1$
$y' - \frac{x}{x+1}y = 0$
$\ln(y) = -\ln(x+1) + \ln(c) + x$
$y = \frac{C(x)e^x}{x+1}$
$\frac{C'(x)e^x}{x+1} = e^x$
$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$
Ответ: $y = \frac{e^x}{x+1}[\frac{x^2}{2} + x + 1]$

54

Решить уравнение Вольтерра сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$y(x) = \int_1^x \frac{4x-3t}{t^2} y(t)dt + 4x\ln x - 1$$

Решение.

$y'(x) = \frac{1}{x}y(x) + 4\int_1^x \frac{4}{t^2}y(t)dt + 4\ln x + 4$

$y''(x) = -\frac{1}{x^2}y(x) + \frac{1}{x}y'(x) + 4(\frac{1}{x^2}y(x) + \int_1^x 0dt) - \frac{4}{x}$

$y''(x) = \frac{1}{x}y'(x) + \frac{3}{x^2}y(x) - \frac{4}{x}$

$y''(x) - \frac{1}{x}y'(x) - \frac{3}{x^2}y(x) = -\frac{4}{x}$

$x^2y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = 0$

Замена: $x = e^t$

$y''(t) - y'(t) - 3y(t) = 0$

Характеричстическое уравнение:
$\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$

Общее решение:

$y(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$

$y(x) = c_1x^3 + \frac{c_2}{x}$

Частное решение:

$y(x) = x$

Ответ:

$y(x) = c_1x^3 + \frac{c_2}{x} + x$

57

Решить уравнение Вольтерра сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$y(x) = 6\int_0^x \cos(5(x-t))y(t)dt - 4e^{5t}$$

Решение.

$y'(x) = 6y(x) - 30\int_0^x \sin(5(x-t))y(t)dt - 20e^{5t}$
$y''(x) = 6y'(x) - 150\int_0^x \cos(5(x-t))y(t)dt - 100e^{5t}$
$25y(x) + y''(x) - 6y'(x) = -200e^{5t}$
$y = -8e^{5t}$
$y_o = c_1 e^{3x}\sin 4x + c_2 e^{3x}\cos 4x$
$y(x) = c_1 e^{3x}\sin 4x + c_2 e^{3x}\cos 4x - 8e^{5t}$
Граничные условия: $y(0) = -4$ и $y'(0) = -20$
$y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 - 8 = -4$
$y'(0) = 12c_1 \cos 0 - 12\sin 0 - 40 = -20 \;\to c_1 = 5/3 \;\; c_2 = 4$
$y(x) = \frac{5}{3}e^{3x}\sin 4x + 4e^{3x}\cos 4x - 8e^{5t}$

58

Решить уравнение Вольтерра сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$y(x) = 2\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt + e^x$$

Решение.

$y'(x) = 2(\sin(x-x)y(x) + \int_0^x \cos(x-t)y(t)dt) + e^x = 2\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt + e^x$

Получаем дифференциальное уравнение:

$y''(x) - y(x) = 2e^x$

$\lambda = \pm 1$ - резонансный случай

Однородное уравнение:

$y''(x) - y(x) = 0 \Rightarrow y_{oo}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

$y_p(x) = cxe^x \Rightarrow 2e^x = (cxe^x)'' - cxe^x = c(xe^x + e^x)' - cxe^x = c(xe^x + 2e^x) - cxe^x = 2ce^x \Rightarrow c = 1$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x$

Граничные условия: $y(0) = 1; y'(0) = 1$

$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} + 0e^0 = c_1 + c_2$

$y'(0) = c_1 e^0 - c_2 e^{-0} + 0e^0 + e^0 = c_1 - c_2 + 1$

Получаем систему:

$c_1 + c_2 = 1$
$c_1 - c_2 + 1 = 1$
Отсюда $c_1 = c_2 = 1/2$.

Ответ.

$y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + xe^x = ch(x) + xe^x$

59

Решить уравнение Вольтерра сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$y(x) = -3\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt + 2\operatorname{sh}(x), \text{“}y(0) = 0, \text{“}y'(0) = 2$$

Решение.

$y' = -3\sin(x)\int_0^x \sin(t)y(t)dt + 3\cos(x)\sin(x)y(x) - 3\cos(x)\int_0^x \cos(t)y(t)dt - 3\sin(x)\cos(x)y(x)_2\operatorname{ch}(x)$
$y'' = -3\cos(x)\int_0^x \sin(t)y(t)dt - 3\sin(x)\sin(x)y(x) + 3\sin(x)\int_0^x \cos(t)y(t)dt - 3\cos(x)\cos(x)y(x) + 2\operatorname{sh}(x)$
$y'' = -3y$
$y = C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x)$
$y = \sin(2x)$
Ответ: $y = \sin(2x)$

67

Решить уравнение Вольтерра сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$y(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e^x+1}dt + e^{-x}$$

Решение.

$y(x) = \frac{1}{e^x+1}\int_0^x e^t dt + e^{-x}$
$y(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} + e^{-x}$
$y(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x+1}$

68

Решить уравнение Вольтерра сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$y(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{(x+1(t+1))}dt + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

Решение.

$y(x) = \frac{\phi(x)}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}, \phi(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{t+1}dt.$

$\phi'(x) = \frac{y(x)}{x+1} = \frac{\phi(x)+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$\phi'(x) - \frac{\phi(x)}{(x+1)^2} = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

Однородное уравнение:

$\phi'(x) - \frac{\phi(x)}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow \phi(x) = c(x)e^{\frac{1}{x+1}}$

Подставляем в исходное дифференциальное уравнение:

$c'(x)e^{\frac{1}{x+1}} + \frac{c(x)e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2} - \frac{c(x)e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2} = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow c'(x) = \frac{\ln(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}$

69

Решить уравнение Вольтерра сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$y(x) = e^x\int_0^x (\operatorname{tg}(t)-1)e^{-t}y(t)dt + \cos(x)$$

Решение.

$y' = (\mathrm{tg}(x) - 1)y(x) - \sin(x)$, "$y(0) = 1$
$\ln(y) = -x = \ln(\cos(x)) + \ln(C(x))$
$y = \frac{C(x)}{e^x \cos(x)}$
$C' = -e^x \cos(x) \sin(x)$
$C(x) = -\frac{e^x}{10}[\sin(2x) - 2\cos(2x)] + C$
$y(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{4}{5}$
Ответ: $y = \frac{4}{5e^x \cos(x)} - \frac{\sin(x)}{5} + \frac{\cos(x)}{5} - \frac{\sin^2(x)}{5\cos(x)}$