

## 「二分图游戏」题解

---

乍一看问题很奇怪，但我们先想一件事：怎样去判断一个图是否一定会导致游戏平局？

我们假定图的邻接矩阵为 $G$ （也就是一个满足 $G_{i,j} = 1$ 当且仅当图上左边 $i$ 至右边 $j$ 有边，其余情况为0的矩阵）。然后平局的话，也就是 Alice 的分数减去 Bob 的分数会得到0。两者分数之差也就是：

$$\sum_{p \in S(n)} (-1)^{\text{sgn}(p)} A_{1,p_1} A_{2,p_2} \dots A_{n,p_n}$$

其中枚举的 $p$ 为任意排列， $\text{sgn}(p)$ 为题目中提到的逆序对数。这是什么呢？这就是矩阵行列式的定义嘛。所以说，平局也就是 $|A| = 0$ 。

回到原问题来，原问题要求删除尽量少的两侧的点，使得新的图不会平局，也就是新的图的行列式不为零，换言之就是要找到矩阵 $A$ 的最大非零子式。我们知道，矩阵的最大非零子式的阶也就是矩阵的秩，因此只需要高斯消元求矩阵秩就行了。