Домашнее задание 4

Задание 2

1. Посчитаем, чему будет равен i-ый элемент в получившемся векторе:

I шаг цикла: $s = fl(0 + fl(a_{i1}x_1)) = fl(0 + (a_{i1}x_1)(1+\varepsilon_1)) =$
$= a_{i1}x_1(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$

II шаг цикла: $s = fl(s + fl(a_{i2}x_2)) = a_{i1}x_1(1+\varepsilon)^3 + a_{i2}x_2(1+\varepsilon)^2$

...

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j (1+\varepsilon)^{n+2-j}$$

Посчитаем прямую ошибку:

$$\frac{\| \hat{f}(x) - f(x) \|}{\| f(x) \|} = \frac{\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (1+\varepsilon)^{n+2-j} - a_{ij} x_j \|}{\| f(x) \|} =$$

$$= \frac{\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j ((1+\varepsilon)^{n+2-j} - 1) \|}{\| f(x) \|} \le \frac{\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j ((n+2-j)\varepsilon + O(\varepsilon)^2) \|}{\| f(x) \|} \le$$

$$\le \frac{\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j ((n+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \|}{\| f(x) \|} = \frac{[(n+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2)] \cdot \| f(x) \|}{\| f(x) \|} =$$

$$= (n+1)\varepsilon_M + O(\varepsilon_M^2) = O(\varepsilon_M)$$

Посчитаем обратную:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underbrace{x_j (1+\varepsilon)^{n+2-j}}_{\tilde{x}_j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j$$

$$\frac{\| x - \tilde{x} \|}{\| x \|} = \frac{\| x_j - x_j (1+\varepsilon)^{n+2-j} \|}{\| x \|} = \frac{\| x_j (1 - (1+\varepsilon)^{n+2-j} \|}{\| x_j \|} \le$$

$$\le \frac{\| x_j ((n+2-j)\varepsilon + O(\varepsilon^2)) \|}{\| x_j \|} \le \frac{\| x_j ((n+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2)) \|}{\| x_j \|} =$$

$$= [(n+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2)] \frac{\| x \|}{\| x \|} = (n+1)\varepsilon_M + O(\varepsilon_M^2) = O(\varepsilon_M)$$

Задание 3

Д-ть: $\sup\limits_{x\neq 0} \operatorname{cond}(f,x) = \operatorname{cond}(A)$

Д-во: 1) $Af(x) = x \Rightarrow f(x) = A^{-1}x$

2) $\operatorname{cond}(f,x) = \dfrac{\|df(x)\|}{\|f(x)\|}\|x\| = \dfrac{\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}x\|}\cdot\|x\| = \dfrac{\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}x\|}\cdot\|AA^{-1}x\| \leq$

$\leq \dfrac{\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}x\|}\cdot\|A\|\cdot\|A^{-1}x\| = \|A^{-1}\|\cdot\|A\| = \operatorname{cond}(A)$

3) Докажем, что неравенство $\|A\|_2\cdot\|A^{-1}x\|_2 \geq \|AA^{-1}x\|_2$ может обратиться в равенство

$\|A\|_2 = \sigma_1(A)$

Рассмотрим u_1 и v_1 – синг. вектора, $\|u_1\|_2 = \|v_1\|_2 = 1$

$Av_1 = \sigma_1 u_1 \Rightarrow v_1 = \sigma_1 A^{-1}u_1$

$x = u_1 \Rightarrow \|A\|_2\cdot\|A^{-1}u_1\|_2 = \sigma_1\cdot\|v_1\|_2\cdot\dfrac{1}{\sigma_1} = \|v_1\|_2 = \|u_1\|_2 = 1$

$\Rightarrow$ р-во достигается, значит

$\sup\limits_{x\neq 0} \operatorname{cond}(f,x) = \operatorname{cond}(A)$

Задание 4

$\dfrac{\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = \dfrac{\|(I+A^{-1}E)^{-1}A^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = \dfrac{\|((I+A^{-1}E)^{-1} - I)A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq$

$\leq \dfrac{\|(I+A^{-1}E)^{-1} - I\|\cdot\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = \|(I+A^{-1}E)^{-1} - \underbrace{(I+A^{-1}E)^{-1}(I+A^{-1}E)}_{I}\| =$

$= \|(I+A^{-1}E)^{-1}(I-(I+A^{-1}E))\| \leq \|(I+A^{-1}E)^{-1}\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|E\| \leq$

$\leq$ / т.к. $\|E\| < \dfrac{1}{\|A\|}$ по св-ву $\|(I-A)^{-1}\| \leq \dfrac{\|I\|}{1-\|A\|}$ / $\leq$

$\leq \dfrac{\|A^{-1}\|\cdot\|E\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|E\|} \leq \dfrac{\operatorname{cond}(A)\cdot\frac{\|E\|}{\|A\|}}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|E\|} = \dfrac{\operatorname{cond}(A)\cdot\frac{\|E\|}{\|A\|}}{1-\operatorname{cond}(A)\cdot\frac{\|E\|}{\|A\|}}$ ☒

Задание 5

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$y = e^{At} \cdot y_0$$

Заметим, что $A^{2k+1} = A$ и $A^{2k} = I$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \ominus \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} \cdot I}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} \cdot A}{(2k+1)!} =$$

$$= \operatorname{ch} t\, I + \operatorname{sh} t \cdot A = \begin{bmatrix} e^x + e^{-x} & 0 & e^x - e^{-x} \\ 0 & 2e^x & 0 \\ e^x - e^{-x} & 0 & e^x + e^{-x} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$$y(1) = \begin{bmatrix} e^1 + e^{-1} & 0 & e^1 - e^{-1} \\ 0 & 2e & 0 \\ e - e^{-1} & 0 & e + e^{-1} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad / \cdot 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} e + \frac{1}{e} & 0 & e - \frac{1}{e} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ e - \frac{1}{e} & 0 & e + \frac{1}{e} & 0 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e + \frac{1}{e} \\ 0 \\ -(e - \frac{1}{e}) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \qquad \begin{array}{l} (e + \frac{1}{e})(e - \frac{1}{e}) - \\ - (e + \frac{1}{e})(e - \frac{1}{e}) = 0 \end{array}$$

Ответ: $y_0 = \begin{bmatrix} \frac{e^2+1}{2e} \\ 0 \\ -\frac{e^2-1}{2e} \end{bmatrix}$

Задание 6

$$A = \begin{bmatrix} a & c^T \\ b & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

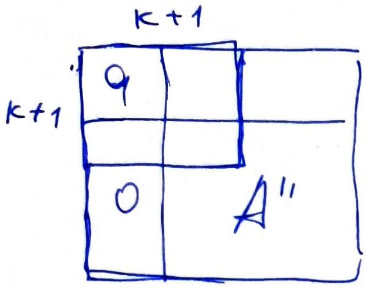
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} b & I \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} a & c^T \\ b & D \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & c^T \\ 0 & \underset{\sim\sim\sim}{D - \frac{1}{a} b c^T} \end{bmatrix}}_{A'} \quad A''$$

$$\det(A') = \det(BA) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(A)$$

Получим, что определитель м-цы не изменится

(А также, не изменятся и все главные миноры, т.к. B — матрица элем. пр-ий) невырожденная. $\det(A')_k > 0 \quad \forall k$

Осталось доказать, что $\det(A'')_k > 0 \quad \forall k$.



$$\underbrace{\det(A')_{k+1}}_{>0} = a \cdot \det(A'')_k$$ (т.к. есть угол нулей)

т.к. $\det(A')_{k+1} = \det(A)_{k+1}$

$\Rightarrow \det(A'')_k > 0 \quad \forall k$ $\blacksquare$