Зыкова-Мозина Анна

Домашняя работа 1.

Задание 1

$$Q = \begin{bmatrix} U_1 & -U_2 \\ U_2 & U_1 \end{bmatrix} \qquad Q^T = \begin{bmatrix} U_1^T & U_2^T \\ -U_2^T & U_1^T \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot Q^T = \begin{bmatrix} \overbrace{U_1U_1^T + U_2U_2^T}^{(2)} & \overbrace{U_1U_2^T - U_2U_1^T}^{(1)} \\ \underbrace{U_2U_1^T - U_1U_2^T}_{(1)} & \underbrace{U_2U_2^T + U_1U_1^T}_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$$

$U = U_1 + iU_2$ – унитарная, тогда $UU^* = I$

$$(U_1 + iU_2)(U_1 + iU_2)^* = (U_1 + iU_2)(U_1^* - iU_2^*) = (U_1 + iU_2)(U_1^T - iU_2^T) =$$

$$= U_1U_1^T + iU_2U_1^T - iU_1U_2^T + U_2U_2^T = I$$

Тогда, $\begin{cases} U_2U_1^T = U_1U_2^T & (1) \\ U_1U_1^T + U_2U_2^T = I & (2) \end{cases}$

Аналогично, $Q^TQ = \begin{bmatrix} U_1^TU_1 + U_2^TU_2 & -U_1^TU_2 + U_2^TU_1 \\ -U_2^TU_1 + U_1^TU_2 & U_2^TU_2 + U_1^TU_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$

Получим, что $Q^TQ = QQ^T = I$, значит Q – ортогон-ся

Задание 2

$d_1, \dots d_n \in \mathbb{C}$ и $A = \begin{bmatrix} 0 & d_1 & & & \\ & 0 & d_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & d_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (n+1)}$

а) Найти $\|A\|_{2024}$ – ?

$$\|A\|_{2024} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{2024}}{\|x\|_{2024}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt[2024]{|x_2 d_1|^{2024} + \dots + |x_{n+1} d_n|^{2024}}}{\sqrt[2024]{|x_1|^{2024} + \dots + |x_{n+1}|^{2024}}} \le$$

$$\le \sup_{x \neq 0} \sqrt[2024]{\frac{\max |d_j|^{2024} (|x_2|^{2024} + \dots + |x_{n+1}|^{2024})}{|x_2|^{2024} + \dots + |x_{n+1}|^{2024}}} = \max |d_j|$$

Это достигается при $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$-е место

Ответ: $\|A\|_{2024} = \max\limits_j |d_j|$

б) Найти $\|A\|_*$ - ?

$\|A\|_* = \sigma_1(A) + \ldots + \sigma_r(A)$

Найдём сингулярные значения A, для этого найдём собств. значения A^*A.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ d_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & d_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & d_1^2 & 0 & & \\ \vdots & 0 & d_2^2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & d_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^TA - \lambda E) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & d_1^2-\lambda & 0 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & 0 & d_2^2-\lambda & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & d_n^2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(d_1^2-\lambda)\cdot\ldots\cdot(d_n^2-\lambda) = 0$$

Тогда с.з: $\{d_1^2, \ldots d_n^2\}$, и сингулярные значения A: $\{|d_1|, \ldots |d_n|\}$.

$\|A\|_* = \sigma_1(A) + \ldots + \sigma_r(A) = |d_1| + \ldots + |d_n|$

Ответ: $\|A\|_* = |d_1| + \ldots + |d_n|$

Задание 3.

а) Док-ть, что $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \underset{(2)}{\leq} \|x\|_2 \underset{(1)}{\leq} \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$

(1) $\underbrace{\sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}}_{\|x\|_2} \vee \underbrace{|x_1| + \ldots + |x_n|}_{\|x\|_1}$

$|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \vee |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 + \cancel{2|x_1|} \; 2\sum_{i \neq j} |x_i||x_j|$

$0 \leq 2\sum_{i\neq j}|x_i||x_j|$, тогда и $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

(2) $\frac{1}{\sqrt{n}}(|x_1| + \ldots + |x_n|) \vee \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$

$\frac{1}{n}(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 + 2\sum_{i\neq j}|x_i||x_j|) \vee |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2$

$2\sum_{i\neq j}|x_i||x_j| \vee (n-1)(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)$

$2\sum_{i\neq j}|x_i||x_j| \leq \sum_{i\neq j}|x_i|^2 + |x_j|^2 = (n-1)(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)$, тогда $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2$

б) Док-ть, что $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \underset{②}{\le} \|A\|_2 \underset{①}{\le} \sqrt{n}\|A\|_1 \quad \forall A\in\mathbb{C}^{m\times n}$

① $\|A\|_2 = \max \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} \le \max \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_2} \le \sqrt{n}\max\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} = \sqrt{n}\cdot\|A\|_1$

② $\|A\|_2 = \max \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} \geqslant \max \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{m}} \max\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} = \frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1.$

Задание 4.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/n & 1\end{bmatrix}, \quad n\in\mathbb{N}$

(а) Приведём A и A_n к ЖНФ:

1. $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 1$

ЖНФ примет такой вид: $A_{ЖНФ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = J$

2. $\det(A_n-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1/n & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1/n = (1-\lambda-1/\sqrt{n})(1-\lambda+1/\sqrt{n})$

$\begin{cases}\lambda_1 = 1-1/\sqrt{n} \\ \lambda_2 = 1+1/\sqrt{n}\end{cases} \quad A_{n-ЖНФ} = \begin{bmatrix} 1-1/\sqrt{n} & 0 \\ 0 & 1+1/\sqrt{n}\end{bmatrix} = J_n$

Рассмотрим сх-ть J_n к J. Будем рассматривать Чебышевскую норму матриц.

Проверим, $\|J-J_n\|_c \xrightarrow{?} 0$

$J - J_n = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{n} & 1 \\ 0 & -1/\sqrt{n}\end{bmatrix}$. По норме Чебышева не стремится к 0 при $n\to\infty$, т.к. $\|J-J_n\|_c \to 0 \Leftrightarrow \max\limits_{i,j}|J_{ij}-J_{nij}| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

значит, сход-ти нет.

Ответ: нет, нельзя.

(б) Приведём A и A_n к формам Шура

1. $A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = T$

2. $A_n - (1+1/\sqrt{n})I = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{n} & 1 \\ 1/n & -1/\sqrt{n}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{n} \\ 1 & -\sqrt{n}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{n} \\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix}\sqrt{n} \\ 1\end{pmatrix}$ - собств. вектор. Дополним до ортог. базиса и нормируем.

$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$. $u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{n+1}$; $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} / \sqrt{n+1}$

Тогда $U = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \begin{bmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{bmatrix}$.

$$T_n = U^* A U = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} \sqrt{n} & 1 \\ -1 & \sqrt{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} \sqrt{n} + 1/n & \sqrt{n}+1 \\ -1 + 1/\sqrt{n} & -1+\sqrt{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n + 1/\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 & -\sqrt{n} - 1/n + n + \sqrt{n} \\ -\sqrt{n} + 1 + \sqrt{n} - 1 & 1 - 1/\sqrt{n} + n - \sqrt{n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{n\sqrt{n} + n + \sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}} & \frac{n^2-1}{n} \\ 0 & \frac{n\sqrt{n} + \sqrt{n} - n - 1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} \frac{(n+1)(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}} & \frac{(n^2-1)(n+1)}{n} \\ 0 & \frac{(n+1)(\sqrt{n}-1)}{\sqrt{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} & 1 - \frac{1}{n} \\ 0 & 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix} = T_n$$

Рассмотрим сх-ть T_n к T. Будем рассматривать Чебышевскую норму матриц.

Проверим $\|T - T_n\|_C \overset{?}{\to} 0$

$$\|T - T_n\|_C = \left\| \begin{matrix} -\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{matrix} \right\|_C \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$ значит, $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$.

Ответ: да, можно

Задание 5.

Док-ть: норм. матрица A — косоэрмитова $\iff$ все собств. зн-е мнимые

Д-во:

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть A — норм. косоэрмитова матрица.

$A = U T U^*$ — разложение Шура.

По теореме знаем, что т.к. A — нормальная, тогда в этом разложении T — диагональная.

А также, по опр. косоэрмитовой матрицы: $A = -A^*$:

$A^* = (UTU^*)^* = UT^*U^* = -A = -UTU^*$

т.о., $UT^*U^* = -UTU^* \Rightarrow T^* = -T$

$$\begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & 0 \\ & \bar\lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \bar\lambda_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \lambda_k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar\lambda_1 = -\lambda_1 \\ \bar\lambda_2 = -\lambda_2 \\ \vdots \\ \bar\lambda_k = -\lambda_k, \end{cases}$$

где $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ - собств. числа A.

пусть $\lambda_j = a_j + b_j \cdot i$ (предположим, что не мнимое).

тогда из $\bar\lambda_j = -\lambda_j$ следует: $a_j - b_j \cdot i = -a_j - b_j i \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_j = 0 \Rightarrow a_j = 0$. То есть $\lambda_j = b_j \cdot i$ - мнимое. ∎

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть A - норм. матрица с мнимыми собств. диаг.

Тогда снова $\begin{cases} A = UTU^*, \text{ где } T\text{-диагональная} \\ A^* = UT^*U^* \end{cases}$

$A^* = UT^*U^* \underset{(1)}{=} U(-T)U^* = -UTU^* = -A$

Тогда, т.к $A^* = -A$, она по опр. косоэрмитова ∎

(1) Посчитаем, чему равно T^*:

$$T^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_k \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \bar\lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & -\lambda_k \end{pmatrix} = -T$$

Задание 6.

Найти SVD $m \times n$ матриц с эл-ми $a_{pq} = p$

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ 2 & \ldots & 2 \\ \vdots & & \\ m & \ldots & m \end{bmatrix}$

Найдем собственные значения матрицы A^TA

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ 2 & \ldots & 2 \\ \vdots & & \\ m & \ldots & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2^2+\ldots+m^2 & \ldots & 1+2^2+\ldots+m^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+2^2+\ldots+m^2 & \ldots & 1+2^2+\ldots+m^2 \end{bmatrix}$$

Обозначим $k = 1+2^2+\ldots+m^2$

$$\det(A^TA - \lambda I) = \begin{vmatrix} k-\lambda & k & \ldots & k \\ k & k-\lambda & \ldots & k \\ \vdots & & \ddots & \\ k & & & k-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k-\lambda & k & k & \dots & k & k \\ k & k-\lambda & k & \dots & k & k \\ \vdots & & \ddots & & & \\ k & k & k & \dots & k-\lambda & k \\ k & k & k & \dots & k & k-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k & k-\lambda & k & \dots & k & k \\ \vdots & & & & & \\ k & k & k & \dots & k-\lambda & k \\ k & k & k & \dots & k & k-\lambda \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & \lambda \\ k & k & k & \dots & k & k-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ k & k & 2k & \dots & nk-\lambda \end{vmatrix} = (nk-\lambda)\cdot(-1)^{n-1}\cdot\lambda^{n-1} = 0$$

Таким образом $\lambda_1 = nk = n(1+2^2+\dots+m^2)$; $\sigma_1 = \sqrt{n(1+2^2+\dots+m^2)}$

2. Теперь найдём собств. вектор.

$$\begin{bmatrix} k-nk & k & k & \dots & k \\ k & k-nk & k & \dots & k \\ \vdots & & \ddots & & \\ k & k & k & \dots & k-nk \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 1 & \dots & & 2-n \end{bmatrix} \to$$

Покажем как свести каждый такой блок к блоку меньшей разм-ти.

$$\begin{bmatrix} t-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & t-n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} t-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t-n & (t-n)^2 & & & t-n \\ t-n & t-n & (t-n)^2 & \dots & t-n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ t-n & t-n & \dots & & (t-n)^2 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} t-n & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 0 & t^2-2nt+n^2-1 & t-n-1 & \dots & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & t-n-1 & \dots & & & t^2-2nt+n^2-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} t-n & 1 & \dots & 1 \\ 0 & t+1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & t+1-n \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2-n & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Получим $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{n}$ – ортонормированный собств. вектор.

Дополним до ортонорм. базиса $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ вектор v_1.

3. Найдём матрицу U.

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{n(1+2^2+\dots+m^2)}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 2 & \dots & 2 \\ \vdots & & \\ m & \dots & m \end{pmatrix}}^{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n(1+2^2+\dots+m^2)}} \begin{pmatrix} n \cdot 1 \\ n \cdot 2 \\ \vdots \\ n \cdot m \end{pmatrix}.$$

Нормируем $|\tilde{u}_1| = \sqrt{n^2(1+2^2+\dots+m^2) \cdot \frac{1}{n(1+2^2+\dots+m^2)}} = \underline{\sqrt{n}}$

Получим $u_1 = \frac{1}{n\sqrt{1+2^2+\dots+m^2}} \begin{pmatrix} n \\ 2n \\ \vdots \\ mn \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+2^2+\dots+m^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$

Дополним до ортонорм. базиса $\{u_1, \dots u_m\}$ вектор u_1.

4. Запишем полное SVD:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{1+\dots+m^2} & & \\ \vdots & u_2 \dots u_m & \\ m/\sqrt{1+\dots+m^2} & & \end{bmatrix}}_{m \times m} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{n(1+\dots+m^2)} & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{n} \dots 1/\sqrt{n} \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{n \times n}$$

5. Запишем усечённое SVD:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{1+\dots+m^2} \\ \vdots \\ m/\sqrt{1+\dots+m^2} \end{bmatrix}}_{m \times 1} \underbrace{\left[\sqrt{n(1+\dots+m^2)} \right]}_{1 \times 1} \underbrace{\left[1/\sqrt{n} \ \dots \ 1/\sqrt{n} \right]}_{1 \times n}$$

<u>Задание 7</u>

Д-ть: $\|A\|_2 \underset{(1)}{\le} \|A\|_F \underset{(2)}{\le} \sqrt{\operatorname{rank} A}\, \|A\|_2$

<u>Д-во:</u>

(1) $\|A\|_2 = \|U \Sigma V^*\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \sigma_1$; тогда $\|A\|_2 \vee \|A\|_F$

$\|A\|_F = \|U \Sigma V^*\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2+\dots+\sigma_2^2}$; $\sigma_1 \vee \sqrt{\sigma_1^2+\dots+}$

$\Leftrightarrow \sigma_1^2 \vee \sqrt{\sigma_1^2+\dots+\sigma_2^2}$

$\sigma_1^2 \underset{\le}{\vee} \sigma_1^2+\dots+\sigma_2^2$, тогда и $\|A\|_2 \le \|A\|_F$

(a) Знаем, по теореме об SVD разложении, что

$\mathrm{rank}\, A = \#$ синг. значений

Тогда $\|A\|_F \vee \sqrt{\mathrm{rank}\, A}\, \|A\|_2 \iff \sqrt{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_r^2} \vee \sqrt{r}\cdot\sigma_1$

$$\sigma_1^2+\ldots+\sigma_r^2 \underset{\le}{\vee} r\sigma_1^2$$

т.к. σ_1 - наибольшее с.з.

тогда и $\|A\|_F \le \sqrt{\mathrm{rank}\, A}\, \|A\|_2$ $\blacksquare$

Задание 8.

Д-ть, что $\sigma_1(A) = \max\limits_{\|u\|_2=\|v\|_2=1} |u^*Av|$

Д-во:

Знаем, что $\|B\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2=1} \|Bx\|_2$, тогда заметим, что:

$$\max_{\|u\|_2=\|v\|_2=1} |u^*Av| = \max_{\|u\|_2=\|v\|_2=1} \|u^*Av\|_2 = \max_{\|u\|_2=1} \|u^*A\|_2 =$$

$$= \max_{\|u\|_2=1} \sqrt{\lambda_1(u^*AA^*u)} = \max_{\|u\|_2=1} \|A^*u\|_2 = \|A^*\|_2 = \sigma_1(A^*) = \sigma_1(A) \;\blacksquare$$

($\sigma_1(A^*)=\sigma_1(A)$ т.к. собств. зн-я A^*A и AA^* равны)

Бонусная задача 1.

Д-ть: $\|AB\|_F \le \|A\|_2 \|B\|_F$

Д-во:

$$\|AB\|_F = \|U\Sigma V^*B\|_F = \|\Sigma \overbrace{V^*B}^{D}\|_F = \|\Sigma D\|_F \,\textcircled{=}$$

SVD: $A = U\Sigma V^*$ (к первому равенству); т.к. F-унитарно-инвариантная (ко второму); переобозначим $D = V^*B$

$$\textcircled{=}\; \left\| \Sigma\cdot D = \begin{bmatrix} \sigma_1 D_1 \\ \sigma_2 D_2 \\ \vdots \\ \sigma_n D_n \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_i\sum_j |\sigma_i d_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_i\sum_j |\sigma_i|^2 |d_{ij}|^2} \,\textcircled{\le}$$

$$\textcircled{\le}\; \sqrt{\sum_i\sum_j (\max_k|\sigma|)^2 |d_{ij}|^2} = \overbrace{\max_k|\sigma_k|}^{=\sigma_1}\cdot\sqrt{\sum_i\sum_j |d_{ij}|^2} = \|\Sigma\|_2\cdot\|D\|_F =$$

$$= \|A\|_2\cdot\|V^*B\|_F = \|A\|_2\cdot\|B\|_F,$$ ч.о. $\|AB\|_F \le \|A\|_2\cdot\|B\|_F$

F-унитарно-инв.

Бонусная задача 2

A – нормальная, $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$

Д-ть: A_{11}, A_{22} – норм; $A_{12} = 0$

Д-во: $A^*A = AA^*$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11}^* & 0 \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} A_{11}^* A_{11} & A_{11}^* A_{12} \\ A_{12}^* A_{11} & A_{12}^* A_{12} + A_{22}^* A_{22} \end{bmatrix}$$

$=$

$$AA^* = \begin{bmatrix} A_{11} \cdot A_{11}^* + A_{12} A_{12}^* & A_{12} A_{22}^* \\ A_{22} A_{12}^* & A_{22} A_{22}^* \end{bmatrix}$$

Тогда: $\cancel{A_{11}^*}$
$$\begin{cases} A_{11} A_{11}^* + A_{12} A_{12}^* = A_{11}^* A_{11} \\ A_{12}^* A_{11} = A_{22} A_{12}^* \\ A_{11}^* A_{12} = A_{12} A_{22}^* \\ A_{12}^* A_{12} + A_{22}^* A_{22} = A_{22} A_{22}^* \end{cases}$$

Посчитаем нормы: $(\|A_{11}\|_F)^2 + (\|A_{12}\|_F)^2 = \mathrm{tr}(A_{11} A_{11}^*) + \mathrm{tr}(A_{12} A_{12}^*) = \mathrm{tr}(A_{11} A_{11}^* + A_{12} A_{12}^*) = \mathrm{tr}(A_{11}^* A_{11}) = (\|A_{11}\|_F)^2$

$\Rightarrow (\|A_{12}\|_F)^2 = 0 \Rightarrow \|A_{12}\|_F = 0 \Rightarrow A_{12} = 0.$

Тогда, $A_{11} A_{11}^* + 0 \cdot 0 = A_{11}^* A_{11} \Rightarrow$ A_{11} – нормальная

и $0 \cdot 0 + A_{22}^* A_{22} = A_{22} \cdot A_{22}^* \Rightarrow$ A_{22} – нормальная