Домашняя работа №3

Задание 1

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ Найти LU-разложение

$$A = \begin{bmatrix} \overset{a}{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & {}^{b}\,a & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{a} b = -\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a'}b' & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-a} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{-\frac{1}{a}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$Z_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-a} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{a-2}{a-1} \end{bmatrix}}_{U}$$

$$L = Z_1^{-1} Z_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a-1} & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a-1} & 1 \end{bmatrix}}_{L}$$

Проверим: $LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{a-2}{a-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

б) 1 сл. A – вырожденная при $a = 2$ $\exists$ LU-раз-е

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2. \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2сл A – невырожденная $(a \neq 2)$

$\exists$ теорема: невырожд. A имеет LU-разл-е $\Leftrightarrow$ A - строго регулярна

Проверим все ведущие миноры:

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = a - 1 \neq 0, \quad \Delta_3 = a - 2 \neq 0$$

Т.е., при $a = 1$, не сущ-ет LU разл-я

Задание 2

$0 < \varepsilon < 1$. ~~...~~

Знаем, что при τ_0 в методе простой итерации выполняется:

$$\| e_{k+1} \|_2 \leq \frac{\operatorname{cond}_2(A) - 1}{\operatorname{cond}_2(A) + 1} \| e_k \|_2, \text{ тогда}$$

$$\| e_k \|_2 \leq \left[\frac{\operatorname{cond}_2(A) - 1}{\operatorname{cond}_2(A) + 1} \right]^k \| e_0 \|_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\| e_k \|_2}{\| e_0 \|_2} \leq \left[\frac{\operatorname{cond}_2(A) - 1}{\operatorname{cond}_2(A) + 1} \right]^k \leq \varepsilon \Rightarrow$$

найдем такой k, чтобы выполнилось нер-во, тогда $\frac{\| e_k \|_2}{\| e_0 \|_2} \leq \varepsilon$.

$$\Rightarrow \ln \left[\frac{\operatorname{cond}_2(A) - 1}{\operatorname{cond}_2(A) + 1} \right]^k \leq \ln \varepsilon \Rightarrow -\ln \left[\frac{\operatorname{cond}_2(A) - 1}{\operatorname{cond}_2(A) + 1} \right]^k \geq -\ln \varepsilon$$

$$\Rightarrow k \ln \left[\frac{\operatorname{cond}_2(A) + 1}{\operatorname{cond}_2(A) - 1} \right] \geq \ln \varepsilon^{-1} \Rightarrow k \geq \frac{1}{\ln \left[\frac{\operatorname{cond}_2(A) + 1}{\operatorname{cond}_2(A) - 1} \right]} \cdot \ln \varepsilon^{-1}$$

$$\ln \left[\frac{\operatorname{cond}_2(A) + 1}{\operatorname{cond}_2(A) - 1} \right] = \ln \left(1 + \frac{2}{\operatorname{cond}_2(A) - 1} \right)$$

По формуле Тейлора, $\ln \left(1 + \frac{2}{\operatorname{cond}_2(A) - 1} \right) \approx \frac{2}{\operatorname{cond}_2(A) - 1}$

$$\Rightarrow k \geq \frac{\operatorname{cond}_2(A) - 1}{2} \cdot \ln \varepsilon^{-1} \Rightarrow k \geq 1 + \frac{\operatorname{cond}_2(A)}{2} \ln \varepsilon^{-1}$$

Задание 5.

Так как в методе gmres restart = 1, обновление будет происходить так: $\boxed{x_{k+1} = x_k + c\, r_k}$

Покажем сходимость, посчитав $\|e_{k+1}\|^2_{A^TA} = \|x_* - x_{k+1}\|^2_{A^TA}$.

$$\|x_* - x_{k+1}\|^2_{A^TA} = \|x_* - x_k - c\, r_k\|^2_{A^TA} \overset{\min_c}{\le} \|x_* - x_k - t r_k\|^2_{A^TA} =$$
$$= \|x_* - x_k - t(Ax_* - Ax_k)\|^2_{A^TA} = \|(I - tA)(x_* - x_k)\|^2_{A^TA} =$$
$$= \|(I - tA)e_k\|^2_{A^TA} \underset{(1)}{=} \|A(I - tA)e_k\|^2_2 = \|(I - tA)A\cdot$$

$$(1)\quad \|Ax\|^2_{A^TA} = (Ax)^T A^TA(Ax) = x^TA^TA^TAAx =$$
$$= (A^2x)^T(A^2x) = \|A^2x\|^2_2$$

$$\cdot e_k\|^2_2 \underset{(2)}{\le} \|I - tA\|^2_2 \cdot \|Ae_k\|^2_2 = \|I - tA\|^2_2 \|e_k\|^2_{A^TA}$$

$$(2)\quad \|Ae_k\|^2_2 = (Ae_k)^T Ae_k = e_k^T A^TA e_k = \|e_k\|^2_{A^TA}.$$

Выберем $t = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

Задание 3.

1) $p_{k+1} = r_k + \beta_k p_k$

$p_k = r_{k-1} + \beta_{k-1} p_{k-1}$

$(r_{k-1}, p_k) = (r_{k-1}, r_{k-1} + \beta_{k-1} p_{k-1}) = (r_{k-1}, r_{k-1}) +$
$+ \beta_{k-1}(r_{k-1}, p_{k-1}) = (r_{k-1}, r_{k-1})$ т.к. $r_{k-1} \perp p_{k-1}$

Тогда, $\alpha_k = \frac{(r_{k-1}, p_k)}{(Ap_k, p_k)} = \frac{(r_{k-1}, r_{k-1})}{(Ap_k, p_k)}$ ▯

2)

$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k \Rightarrow Ap_k = \frac{r_k - r_{k-1}}{\alpha_k}$

$$(r_k, Ap_k) = \left(r_k, \frac{r_{k-1} - r_k}{\alpha_k}\right) = \frac{(r_k, r_{k-1})}{\alpha_k} - \frac{(r_k, r_k)}{\alpha_k}$$

$$\beta_k = -\frac{(r_k, Ap_k)}{(p_k, Ap_k)} = -\frac{(r_k, r_{k-1})}{\alpha_k} \cdot \frac{1}{(p_k, Ap_k)} + \frac{(r_k, r_k)}{\alpha_k (p_k, Ap_k)} =$$
$$= 0 + \frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})} = \frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})} \quad \text{т.к. } r_k \perp r_{k-1} \in K_k$$

Задание 4

Решение:

На лекции строили полином, „отсекающий" одно наибольшее с/з. Здесь сделаем по аналогии, только с 2 другими с/з – λ_{n-1} и λ_n

$$p_k(\lambda) = \frac{T_k\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n-2\lambda}{\lambda_1-\lambda_n}\right)}{T_k\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{\lambda_1-\lambda_n}\right)}$$ – обычный полином Чебышева

$$p_k(\lambda) = \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n-1}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\frac{T_{k-2}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_{n-2}-2\lambda}{\lambda_1-\lambda_{n-2}}\right)}{T_{k-2}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_{n-2}}{\lambda_1-\lambda_{n-2}}\right)}$$

Тогда, зная оценку для чебышевского метода, получим

$$\|e_k\|_A \le \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n-1}}\right)}_{\le\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\cdot 2\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}}+1}\right)^{k-2}\|e_0\|_A \le$$

$$\le 2\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}}+1}\right)^{k-2}\|e_0\|_A \le 2\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}}+1}\right)^{k-2}\|e_0\|_A \le$$

$$\le 2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^2\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}}+1}\right)^{k-2}\|e_0\|_A \quad \blacksquare$$

Задание 5.

$A = S \Lambda S^{-1}$, где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ \underbrace{1}_{v_1} & \underbrace{1}_{v_2} & \underbrace{-1}_{v_3} \end{bmatrix}$$

Решение:

Разложим x_0 по базису столбцов S.

$$x_0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

1сл При $a_3 \neq 0$, отнош. Релея будет сх-ся к наиб. собств. зн., т.е. $\lambda = 2$. Этот факт доказывался на лекции! Если $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$ и $x_0 = \underbrace{\alpha_1}_{\neq 0} v_1 + \ldots + \alpha_3 v_3$, тогда $R(x_k) = (Ax_k, x_k) =$

$$= \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right) \longrightarrow 2 \text{ (в нашем случае)}$$

2сл $a_3 = 0$.

1) $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$

$x_0 = a_2 v_2$ $\qquad$ $x_0 = a_1 v_1$ (Аналогично)

$$x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2} = \frac{A^k (a_2 v_2)}{\|A^k (a_2 v_2)\|_2} = \frac{a_2 (1)^k v_2}{\|a_2 (1)^k v_2\|_2} =$$

$$= \frac{a_2 v_2}{\|a_2 v_2\|_2} = \frac{a_2 v_2}{|a_2| \|v_2\|_2}$$

$$R(x_k) = (Ax_k, x_k) = \left(A \cdot \frac{a_2 v_2}{|a_2| \|v_2\|_2}, \frac{a_2 v_2}{|a_2| \|v_2\|_2}\right) =$$

$$= \lambda_2 \left(\frac{v_2}{\|v_2\|_2}, \frac{v_2}{\|v_2\|_2}\right) = \lambda_2 = 1.$$

Аналогично, при $a_2 = 0$, $R(x_k) \longrightarrow -1$.

2) $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$.

$$x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2} = \frac{A^k (a_1 v_1 + a_2 v_2)}{\|A^k (a_1 v_1 + a_2 v_2)\|_2} = \frac{a_1 (-1)^k v_1 + a_2 v_2}{\|a_1 (-1)^k v_1 + a_2 v_2\|_2}$$

$$R(x_k) = (Ax_k, x_k) = \left(A \frac{a_1 (-1)^k v_1 + a_2 v_2}{\|\ldots\|_2}, x_k\right) =$$

$$= \left(\frac{a_1 (-1)^{k+1} v_1 + a_2 v_2}{\|\ldots\|_2}, \frac{a_1 (-1)^k v_1 + a_2 v_2}{\|\ldots\|_2}\right) = \frac{-a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$$

Получили, что $R(x_k)$ не зависит от k, значит сходимости в этом случае нет.