Домашнее задание 2

Зыкова-Мазина Анна

Задание 1

Найти скелетное разложение вида CR для $A \in Mat_{m \times n}$ с эл-ми $a_{ij} = (i-j)^2$

Решение:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & \dots & (1-j)^2 & \dots & (1-n)^2 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & (2-j)^2 & \dots & (2-n)^2 \\ 4 & 1 & 0 & \dots & (3-j)^2 & \dots & (3-n)^2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ (m-1)^2 & \dots & & \dots & (m-j)^2 & \dots & (m-n)^2 \end{bmatrix}$$

1. Ранг матрицы A − 3. Покажем это: любые 4 подряд идущих строки − линейно зависимы (4-е

$A_i = [(i-1)^2, (i-2)^2, \dots (n-i)^2]$

$A_{i+1} = [(i)^2, (i-1)^2, \dots (i+1-n)^2]$

$A_{i+2} = [(i+1)^2, (i)^2, \dots (i+2-n)^2]$

$A_{i+3} = [(i+2)^2, (i+1)^2, \dots (i+3-n)^2]$

Тогда $A_i - 3A_{i+1} + 3A_{i+2} = [(i+2)^2, (i+1)^2, \dots (-n+i+3)^2] = A_{i+3}$

$\Rightarrow A_{i+3} \in \langle A_i, A_{i+1}, A_{i+2} \rangle$.

Это значит, что $\forall k > 3 \quad A_k \in \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$.

(Из того, что каждая строка линейно выражается через 3 предыдущие при $k>3$, делаем вывод по индукции, что каждая строка при $k>3$ выражается через первые 3 строки)

Теперь покажем, что A_1, A_2, A_3 − лин. нез-мы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \dots & (1-j)^2 & \dots & (1-n)^2 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & (2-j)^2 & \dots & (2-n)^2 \\ 0 & 1 & -4 & \dots & (3-j)^2 - 4(2-j)^2 & \dots & (3-n)^2 - 4(2-n)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \dots & (1-\ )^2 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & (2-\ )^2 \\ 0 & 0 & -8 & \dots & (3-\ )^2 - 4(1-n)^2 - (1-n)^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & (2-n)^2 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & (1-n)^2 \\ 0 & 0 & -8 & \dots & (\dots) \end{pmatrix}$$ − 3 линейно незав. строки $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ − л/н.

Тогда получаем, что $\{A_1, A_2, A_3\}$ − базис строк и тогда $\mathrm{rank}(A) = 3$.

Выберем невырожденную 3×3 подматрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \cdots & (1-j)^2 & \cdots & (1-n)^2 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & (2-j)^2 & \cdots & (2-n)^2 \\ 4 & 1 & 0 & \cdots & (3-j)^2 & \cdots & (3-n)^2 \\ \vdots & & & & & & \\ (m-1)^2 & & & \cdots & (m-j)^2 & \cdots & (m-n)^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det \hat{A} = 8 \neq 0$ ⊕

$$(\hat{A})^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Тогда итоговым CUR-разложением будет:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (m-1)^2 & (m-2)^2 & (m-3)^2 \end{bmatrix}}_{C} \times \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}}_{(\hat{A})^{-1}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & \cdots & (1-n)^2 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & (2-n)^2 \\ 4 & 1 & 0 & \cdots & (3-n)^2 \end{bmatrix}}_{R}$$

(C - первые 3 столбца матрицы A;
R - —"— строки матрицы A)

Задание 2.

$S \subset \mathbb{R}^4$, $S^\perp$ – ортог. дополнение

Найти: $dist(S, S^\perp)$

Решение:

$$dist(S, S^\perp) = \| P-(I-P)\|_2 = \| 2P-I\|_2 = \sigma_1(2P-I).$$

Найдём сингулярное старшее число для $2P-I$.

Для этого посчитаем собств. диаг. матр. $(2P-I)^*(2P-I)$

$$(2P-I)^*(2P-I) = (2P^*-I)(2P-I) = 4P^*P - 2P - 2P^* + I =$$

$$= 4P^2 - 4P + I = I \quad ; \quad det(I-tI) = (1-t)^4 \Rightarrow \lambda = 1$$

Получим, что $\sigma_1(2P-I) = \sqrt{\lambda_1((2P-I)^*(2P-I))} = \sqrt{\lambda_1(I)} = 1$

Ответ: 1.

Задание 3.

$V = [V_2, V_2^\perp] \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ – матрица правых сингуляр. векторов матрицы $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ ранга 2.

Д-ть: $Ker(A) = Im(V_2^\perp)$

Д-во:

1) Пусть $z \in Im(V_2^\perp)$, тогда $\exists x: \quad z = V_2^\perp x$.

Рассмотрим Az: $Az = \underbrace{U_2 \Sigma_2 V_2^*}_{\text{svd для } A} z = U_2 \Sigma_2 \underbrace{V_2^* \cdot V_2^\perp}_{=0} x = 0$

из ортогон-ти

Получим, что $z \in Im(V_2^\perp) \Rightarrow Az = 0 \Rightarrow z \in Ker(A)$,

т.е. $Im(V_2^\perp) \subseteq Ker(A)$

2). Сравним размерности пространств.

Если $A \in Mat_{4\times 4}$ и $rank(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} dim\ Im(A) = 2 \\ dim\ Ker(A) = 4-2 \end{cases}$

Т.к. $V_2^\perp$ – ортог. дополнение V_2 и $rank(V_2) = 2$, то

$rank(V_2^\perp) = 4-2 = \cancel{Im}\ dim\ Im(V_2^\perp)$

Получим, что $\begin{cases} dim\ Ker(A) = 4-2 \\ dim\ Im(V_2^\perp) = 4-2 \end{cases}$ и т.к. $Im(V_2^\perp) \subseteq Ker(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow Im(V_2^\perp) = Ker(A)$ ☒

3) Найдём ортопроектор на $Ker(A)$.

Из доказанного, это равносильно тому, чтобы найти орт-ор на $Im(V_2^\perp)$. По теор. с лекции:

$P = V_2^{\perp}(V_2^{*\perp}V_2^{\perp})^{-1}V_2^{*\perp} = V_2^{\perp}\cdot(V_2^{\perp})^*$. — ортопроектор на $\ker(A)$

<u>Ответ</u>: $P = V_2^{\perp}\cdot(V_2^{\perp})^*$.

<u>Задание 4</u>

a) $f(x) = \|Ax-b\|_2^2$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^n$

$$f(x+h) = (A(x+h)-b)^T(A(x+h)-b) = ((x+h)^TA^T - b^T)(A(x+h)-b) =$$
$$= (x+h)^TA^TA(x+h) - b^TA(x+h) - (x+h)^TA^Tb + b^Tb = x^TA^TAx +$$
$$+ h^TA^TAx + x^TA^TAh + h^TA^TAh - b^TAx - b^TAh - x^TA^Tb - h^TA^Tb + b^Tb =$$
$$= f(x) + h^TA^TAx + x^TA^TAh + h^TA^TAh - b^TAh - h^TA^Tb =$$
$$= f(x) + (Ah)^TAx + (Ax)^TAh + (Ah)^TAh - b^TAh - (Ah)^Tb =$$
$$= f(x) + \underbrace{(Ah)^T(Ax-b) + (Ax-b)^T(Ah)}_{df(x)} + o(\|h\|)$$

$$df(x) = (Ah)^T(Ax-b) + (Ax-b)^T(Ah) = \underline{2\langle Ah; Ax-b\rangle} =$$
$$= 2(Ah)^T(Ax-b) = 2h^T\underbrace{A^T(Ax-b)} = \boxed{\langle h; 2A^T(Ax-b)\rangle}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2A^T(Ax-b)}$$

b) $f(x) = \sin(\|x\|_2)$, $x\neq 0$

Воспользуемся формулой композиции дифференц:

$$d(f(g(x)))[h] = (df)(g(x))[dg(x)[h]]$$

1. $\hat{f}(x) = \sin(x)$, $x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow d\hat{f}(x) = d\sin(x) = \cos(x)\,dx$

$g(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\|x\|_2^2}$

$d\sin(\|x\|_2) = \cos(\|x\|_2)\cdot dg(x)[h]$

2. Найдем $dg(x)[h]$.

$\varphi(x) = x^{1/2}$, $x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow d\varphi(x) = dx^{1/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$d\sqrt{\|x\|_2^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\|x\|_2^2}}\cdot 2\langle x,h\rangle = \frac{1}{\|x\|_2}\cdot\langle x,h\rangle$$

3. $d\sin(\|x\|_2) = \cos(\|x\|_2)\cdot\frac{1}{\|x\|_2}\cdot\langle x,h\rangle = \langle \frac{\cos(\|x\|_2)}{\|x\|_2}x, h\rangle$

$$\boxed{\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\cos(\|x\|_2)}{\|x\|_2}x}$$

$f(x) = (x^Tx)^{x^Tx}, \quad x \neq 0$

$df(x) = (d\hat{f})(g(x))[dg(x)[h]]$, где $\hat{f}(x) = x^x, \ x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x^Tx$

Найдем $d\hat{f} = dx^x = (x^x)'dx = (e^{x\ln x})'dx = e^{x \ln x} \cdot (x\ln x)'dx =$

$= \cancel{e^{x\ln}}\ e^{x\ln x}(\ln x + 1)\,dx = (x^x + x^x \ln x)dx = x^x(1+\ln x)dx$

2\. $d(x^Tx)^{x^Tx} = x^Tx^{x^Tx}(1+\ln(x^Tx)) \cdot \underbrace{2\langle x, h\rangle}_{dg(x)[h]} = \langle 2x^Tx^{x^Tx}(1+\ln(x^Tx))x, h\rangle$

$$\boxed{\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2x^Tx^{x^Tx}(1+\ln(x^Tx))x}$$

Задание 5

а) $f(X) = tr(X^TAX), \ X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$df(X) = d\,tr(X^TAX) = tr(d(X^TAX))$

Найдем $d(X^TAX)$.

$f(X+H) = (X+H)^TA(X+H) = X^TAX + H^TAX + X^TAH + H^TAH =$

$= f(X) + \underbrace{H^TAX + X^TAH}_{d(X^TAX)} + o(\|H\|_F)$

$df(X)[H] = tr(H^TAX + X^TAH) = tr(H^TAX) + tr(X^TAH) = tr(X^TA^TH) +$

$+ tr(X^TAH) = tr((X^TA^T + X^TA)H) = tr((AX + A^TX)^TH) = \langle AX + A^TX, H\rangle$

$$\boxed{\frac{\partial f(X)}{\partial X} = AX + A^TX}$$

б) $f(X) = tr(XAX^{-1}B), \quad A, B, X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ \det X \neq 0$

$f(X) = tr(XAX^{-1}B) = tr(BXAX^{-1}); \ df(X) = tr(d(\overbrace{BXAX^{-1}}^{\hat{f}(X)}))$

Воспользуемся формулой ~~про~~ дифф. пр-я:

$d\hat{f}(X) = d(BXA)[H]\cdot X^{-1} + BXA \cdot d(X^{-1})[H] = BHA \cdot X^{-1} + BXA(-X^{-1}HX^{-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow df(X) = tr(BHA \cdot X^{-1} + BXA(-X^{-1}HX^{-1})) = tr(BHAX^{-1}) - tr(BXAX^{-1}HX^{-1})$

$= tr(AX^{-1}BH - X^{-1}BXAX^{-1}H) = tr((AX^{-1}B - X^{-1}BXAX^{-1})H) =$

$= \cancel{tr(A^T} = tr((B^TX^{-T}A^T - X^{-T}A^TX^TB^TX^{-T})^TH) =$

$= \langle B^TX^{-T}A^T - X^{-T}A^TX^TB^TX^{-T}, H\rangle$

$$\boxed{\frac{\partial f(X)}{\partial X} = B^TX^{-T}A^T - X^{-T}A^TX^TB^TX^{-T}}$$

c) $f(t) = \det(A - tI)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Знаем, что $d(\det(X))[H] = \det(X)\, tr(X^{-1}H)$, тогда:

$$df(t) = \det(A - tI)\, tr\big((A-tI)^{-1} \cdot \underbrace{(d(A-tI))}_{*}\big) =$$

(*) $g(x+h) = A - (x+h)I = A - xI - hI = g(x) \underbrace{- hI}_{d(A-tI)}$

$$= \det(A-tI)\, tr\big((A-tI)^{-1} \cdot (-hI)\big) = -\det(A-tI)\, tr\big((A-tI)^{-1}\big) \cdot h$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\det(A-tI)\, tr\big((A-tI)^{-1}\big)}$$

d) $f(X) = a^T (X+A)^{-1} b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

По ф-ле дифф-ла произведения:

1) $df(X)[H] = d(a^T(X+A)^{-1})[H] \cdot b + \underbrace{a^T(X+A)^{-1} db[H]}_{=0} = d(a^T(X+A)^{-1})[H]\, b$

2) $d(a^T(X+A)^{-1})[H] = \underbrace{d(a^T)[H] \cdot (X+A)^{-1}}_{=0} + a^T d(X+A)^{-1}[H] =$

$= a^T d(X+A)^{-1}[H] = a^T\big(-(X+A)^{-1} H (X+A)^{-1}\big)$

Итого: $df(X)[H] = -a^T (X+A)^{-1} H (X+A)^{-1} b =$ // т.к. матрица размера 1×1 // $=$

$= tr\big(-a^T (X+A)^{-1} H (X+A)^{-1} b\big) = tr\big(-\cancel{b}(X+A)^{-1} b a^T (X+A)^{-1} H\big) =$

$= tr\big((-(X+A)^{-T} a b^T (X+A)^{-T})^T H\big) = \langle -(X+A)^{-T} a b^T (X+A)^{-T}, H \rangle$

$$\boxed{\frac{\partial f(x)}{\partial (X)} = -(X+A)^{-T} a b^T (X+A)^{-T}}$$

Задание 6

$X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $diag(X) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, где $(diag(X))_{ii} = (X)_{ii}$

a) $vec(diag(X)) = P\, vec(X)$ $\quad P - ?$

P – матрица размера $n^2 \times n^2$.

$$\begin{bmatrix} X_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ X_{nn} \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{n1} \\ X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{nn} \end{bmatrix}$$

Пусть $M_k = \begin{array}{c} k \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots 1 \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \leftarrow k \end{array} \in Mat_{n \times n}$,

т.е.

Тогда $P = \begin{bmatrix} M_1 & & 0 \\ & M_2 & \\ 0 & & \ddots \;\; M_n \end{bmatrix} \in Mat_{n^2 \times n^2}$

$P = diag(1 \underbrace{0 \ldots 0}_{n} 1 \underbrace{0 \ldots 0}_{n} 1 \ldots \ldots 1)$.

Иначе говоря,

$$P = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && \ddots &&& 0 && \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ & 0 &&& & 0 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{bmatrix} \in Mat_{n^2 \times n^2}$$

$P^2 = P$ т.к. у симметричной матрицы при возведении в степень каждый элемент на диагонали возв. в квадрат.

$P^2 = P \cdot P = diag(1^2 0 \ldots 0 1^2 0 \ldots 0 1^2 \ldots 1^2) = P$

$P^* = P$ т.к. P — симметр. и ~~состоит из~~ $P_{ij} \in \mathbb{R}$.

Значит, P — ортопроектор.

б) $vec(A^T diag(AXB^T) B) = (B^T \otimes A^T) vec(diag(AXB^T)) =$

$= (B^T \otimes A^T) P vec(AXB^T) = (B^T \otimes A^T) P (B \otimes A) vec(X)$,

тогда $\underline{M = (B^T \otimes A^T) P (B \otimes A)}$.

c) По опр-ю A — неотриц. опр, если $x^T A x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$
$\in \mathbb{R}^{n \times n}$

То есть рассмотрим $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $x^T M x = x^T (B^T \otimes A^T) P (B \otimes A) x =$

$= x^T (B \otimes A)^T P (B \otimes A) x = \underbrace{((B \otimes A) x)^T}_{y^T} P \underbrace{((B \otimes A) x)}_{y} \geq 0$

Однако, P — ортопроектор, значит неотриц. опр.
Докажем это: $P = P^2 = P \cdot P = P^* P$
Но про матрицы вида $P^* P$ мы знаем теорему
о их неотриц. опр-ти ⊠
(матрица Грама)

Таким образом, получаем, что $((B \otimes A) x)^T P ((B \otimes A) x) \geq 0$,
а значит и $x^T M x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ и
M — неотриц. опр.

Бонусная задача 1.

$f: \mathbb{R}^{4\times4} \to \mathbb{R}$ – всюду эластичная, если $f(X) = df(X)[X]$.

Д-ть: $f(X) = tr(A - BC^{-1}B^T)$ – всюду эластичная

Д-во:

$df(X)[X] = d\,tr(A - BC^{-1}B^T) = tr(d(A - BC^{-1}B^T)[X])$

$d(A - BC^{-1}B^T)[X] = dA[X] - d(BC^{-1}B^T)[X] \ominus$

1) $dA[X] = A$

2) $d(BC^{-1}B^T)[X] = d(BC^{-1})[X] \cdot B^T + BC^{-1}dB^T[X] =$

$= d(BC^{-1})[X]B^T + BC^{-1}B^T \ominus$

3) $d(BC^{-1})[X] = dB[X] \cdot C^{-1} + Bd(C^{-1})[X] = BC^{-1} - BC^{-1} = 0$

4) $d(C^{-1})[X] = dC^{-1}[C] = -C^{-1}CC^{-1} = -C^{-1}$

$\ominus A - BC^{-1}B^T$

Итог: $df(X)[X] = tr(A - BC^{-1}B^T) = f(X)$ ∎