Зыкова-Могина
Анна, 229

Домашнее задание 3

Задание 1

$A \in \mathbb{R}^{3\times3\times2}$, $a_{ijk} = i - j + k$

(a) Запишем развертки $A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}$

$k=0$ A_{ij0}: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$k=1$ A_{ij1}: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Тогда: $A_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(в) $\operatorname{rank} A_{(1)} = 2$ $\left(A_{(1)_3} = 2A_{(1)_2} - A_{(1)_1} \right)$

$\operatorname{rank} A_{(2)} = 2$ $\left(A_{(2)_3} = 2A_{(2)_2} - A_{(2)_1} \right)$

$\operatorname{rank} A_{(3)} = 2$

Тогда $\operatorname{mlrank}(A) = (2, 2, 2)$

(с) Найдем ортогональные базисы разверток

1) $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} / \sqrt{2}$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

2) Аналогично, $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

3) $W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

При доказательстве существования разложения Таккера в случае ортонорм. базисов доказывалось, что $G = [A; U^T, V^T, W^T]$

Тогда, справедливо следующее: $G_0 = U^T A_0 (W^T \otimes V^T)^T =$
$= U^T A_0 (W \otimes V)$

$$W \otimes V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right]$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot A_0 \cdot \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 3 \end{bmatrix}$$

Значит, $G \in \mathbb{R}^{2\times2\times2}$: $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}}_{G[:,:,0]}$ $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{bmatrix}}_{G[:,:,1]}$.

Получили разложение Таккера $A = [G; U, V, W]$ с минимально возможными рангами!

$G \in \mathbb{R}^{r_0 \times r_1 \times r_2}$

$r_0 = \mathrm{rank}(A_0) = 2$

$r_1 = \mathrm{rank}(A_1) = 2$

$r_2 = \mathrm{rank}(A_2) = 2$

Задание 2

$A = UTU^*$ – разложение Шура

Найти разложение Шура для $B = A \otimes I + I \otimes A$

Решение:

$B = A \otimes I + I \otimes A = (A \otimes UU^*) + (UU^* \otimes A) =$

$= (UTU^* \otimes UU^*) + (UU^* \otimes UTU^*) = (UT \otimes U)(U^* \otimes U^*) +$

$+ (U \otimes UT)(U^* \otimes U^*) = (U \otimes U)(T \otimes I)(U^* \otimes U^*) +$

$+ (U \otimes U)(I \otimes T)(U^* \otimes U^*) = (U \otimes U)(T \otimes I + I \otimes T)(U^* \otimes U^*)$

Получим $B = (U \otimes U)(T \otimes I + I \otimes T)(U^* \otimes U^*) =$

$= \underbrace{(U \otimes U)}_{\text{унитарная}} \underbrace{(T \otimes I + I \otimes T)}_{\text{верхнетреуг}} (U \otimes U)^*$ – разлож-е Шура

Задание 3

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$

(а) Показать, что A можно привести к R за

$$2 \cdot mn^2 - \frac{2}{3} n^3 + O(mn)$$

Решение:

1) $f = \frac{a}{\|a\|_2}$ $O(m)$ операций

2) $v_1 = \frac{a - f\|a\|_2 e_1}{\|a - f\|a\|_2 e_1\|_2}$ $O(m)$ операций

3) Применяем матрицу Хаусхолдера

$A - \underbrace{(2v_1)}_{①}\underbrace{(v_1^* A)}_{②}$

(1) $2v_1$: m операций

(2) $\underset{(1 \times m)}{v_1^*} \underset{(m \times n)}{A}$: $2mn - n$ операций

(3) $\underset{(m \times 1)}{(2v_1)} \cdot \underset{(1 \times n)}{(v_1^* A)}$: $m \cdot n$ операций

(4) $A - (2v_1)(v_1^* A)$: $m \cdot n$ операций

Итог: $m + 2mn - n + mn + mn = \boxed{4mn + m - n}$

4) Значит, создать и применить матрицу Хаусхолдера-

ра $H(v_1)$ мы можем за $4mn + O(m)$.

Следующим действием мы будем умножать на матрицу $H_2 = \begin{bmatrix} I_1 & \\ & H(v_2) \end{bmatrix}$, где $H(v_2)$ применим уже к матрице размера $(m-1)\times(n-1)$, значит нам потребуется $4(m-1)(n-1) + O(m)$ действий.

Всего таких действий будет n, просуммируем все: $4\sum_{k=0}^{n-1}(m-k)(n-k) + O(m) = 4\sum_{k=0}^{n} mn - k(n+m) + k^2 + O(m) =$

$$= 4\Big(\underset{n^2+n}{n^2 m} - \underset{n^2+n}{(n+m)}\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k^2\Big) + O(m) = 4\Big(n^2 m - (n+m)\cdot$$

$$\cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big) + O(m) = 4\Big(n^2 m - \frac{1}{2}\big[n^3 + mn^2 +$$

$$+ n^2 + mn\big] + \frac{1}{6}\big[2n^3 + 2n^2 + n^2 + n\big]\Big) + O(m) =$$

$$= 4\Big(n^2 m - \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{2}n^2 m + \frac{1}{3}n^3\Big) + O(mn) = 2n^2 m - \frac{2}{3}n^3 + O(mn)$$

▥

б) $Q_1 = [\underset{m\times m}{Q_1 \quad Q_2}]\underset{m\times n}{\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}} = \underbrace{H_1 H_2 \dots H_n}_{Q}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$

Чтобы получить матрицу Q, будем умножать слева матрицу $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ на матрицы Хаусхолдера, начиная с H_n

Т.к. матрица $H_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & \\ & H(v_k) \end{bmatrix}$ - блочная с единичным блоком, то нам потребуется реально умножать только на матрицу $H(v_k)$

$$\underset{\quad k-1 \qquad\quad m-k+1}{\begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H(v_k) \end{bmatrix}} \underset{n}{\begin{bmatrix} \ \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{matrix} \updownarrow k-1 \\ \updownarrow m-k+1 \end{matrix}$$

Для умн-е на H_k потребуется: $4(m-k+1)(n-k+1) + O(mn)$

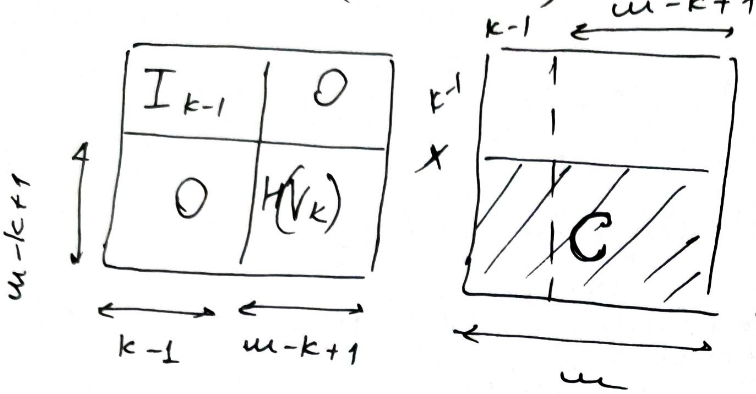
Всего мы умножим на такие матрицы $H_n \dots H_1$, значит будете n умножений, $k = \dots n$

Такой ряд мы уже считали: $4\sum_{k=1}^{n}(m-k+1)(n-k+1) =$

$$= 4\sum_{k=0}^{n}(m-k)(n-k) = \dots = 2n^2 m - \frac{2}{3}n^3 + O(mn)$$ ▥

б) Если просто перемножить матрицы Хаусхолдера

$$Q = H_1(H_2 \ldots (H_n))$$



Считаем только умножение $H(v_k) \cdot C$, где $C: (m-k+1) \times m$

Тогда число операций $4m(m-k+1) + O(mn)$

Просуммируем: $\sum\limits_{k=1}^{n-1} 4m(m-k+1) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} 4m^2 - 4mk + 4m =$

$= 4m^2 \cdot (n-1) - 4m \sum\limits_{k=1}^{n-1} k + 4m \cdot (n-1) = 4m^2 n - 4m^2 - 2mn^2 + 6mn - 4m =$

$= 4m^2 n + O(mn^2) = O(m^3)$

Задание 4.

1) Покажем, что $B(\alpha) = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$ $\exists$ $\forall \alpha > 0$

Чтобы это показать, требуется лишь доказать невырожденность $(\alpha I + A^*A)$. Пусть $A = U\Sigma V^*$

$$\alpha I + (V\Sigma^* U^*)(U\Sigma V^*) = \alpha \cdot V V^* + V\Sigma^2 V^* =$$

$$= V(\alpha I + \Sigma^2)V^*$$

$$\det(\alpha I + A^*A) = \det(V(\alpha I + \Sigma^2)V^*) = \underbrace{\det(VV^*)}_{=1} \cdot \underbrace{\det(\alpha I + \Sigma^2)}_{>0}$$

т.к. $\alpha I + \Sigma^2 = \begin{bmatrix} \alpha+\sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha+\sigma_2^2 & & \\ & & & \alpha & \\ & & & & \ddots \ \alpha \end{bmatrix}$, и det будет считаться как пр-е чисел (>0) по диагонали

$$\Rightarrow \det(\alpha I + A^*A) > 0 \quad \blacksquare$$

2) Чтобы доказать, что $B(\alpha) \to A^+$ при $\alpha \to +0$, покажем, что $\|B(\alpha) - A^+\|_2 \to 0$ при $\alpha \to +0$

$$\|(\alpha I + A^*A)^{-1}A^* - A^+\|_2 = \|(V(\alpha I + \Sigma^2)V^*)^{-1} V \Sigma^* U^* - V\Sigma^+ U^*\|_2 =$$

$$= \|V^*(\alpha I + \Sigma^2)^{-1}\Sigma^* U^* - V\Sigma^+ U^*\|_2 = \|V((\alpha I + \Sigma^2)^{-1}\Sigma^* - \Sigma^+)U^*\|_2 =$$

$$= \|\underbrace{(\alpha I + \Sigma^2)^{-1}\Sigma^* - \Sigma^+}\|_2 =$$

рассмотрим эту матрицу S и найдём её старшее сил. число

$=$

$$S = \begin{bmatrix} \alpha+\sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha+\sigma_2^2 & & \\ & & & \alpha & \\ & & & & \ddots \ \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1/\sigma_2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1/\alpha+\sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_2/\alpha+\sigma_2^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1/\sigma_2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha/\sigma_1(\alpha+\sigma_1)^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha/\sigma_2(\alpha+\sigma_2)^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}$$

, Понятно, что $\|S\|_2 = \max\left(\left|\frac{\alpha}{\sigma_k(\alpha+\sigma_k)^2}\right|\right)$

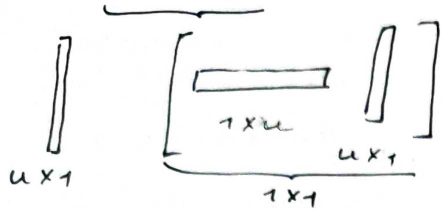
$\to 0$ при $\alpha \to 0$,

значит, $B(\alpha) \to A^+$ при $\alpha \to 0$.

Задание 5.

(а) $A = aa^T + C^{-2}\operatorname{diag}(a)$

$Ax = \underbrace{a(a^Tx)} + C^{-2}(\operatorname{diag}(a))x \rightarrow C^{-2} = [F_n^{-1}\operatorname{diag}(F_nc)F_n]^{-2} =$

① 

$O(n)$

$= [F_n^{-1}\operatorname{diag}(F_nc)^{-1}F_n]^2 =$

$= F_n^{-1}(\operatorname{diag}(F_nc))^{-1}F_n \cdot F_n^{-1}\operatorname{diag}(F_nc)^{-1}F_n =$

$= F_n^{-1}(\operatorname{diag}(F_nc))^{-2}F_n$

② $F_n^{-1}(\operatorname{diag}(F_nc))^{-2}F_n \underbrace{\operatorname{diag}(a)x}_{O(n)}$,

получим вектор $n\times 1$.

Знаем, что F_ny можем производить за $O(n\log n)$, т.к. это быстрое пр-е Фурье, снова получим вектор $n\times 1$.

$(\operatorname{diag}(F_nc))^{-2}$ тоже считается за $\underbrace{O(n\log n)}_{\text{умнож-е } F_nc} + \underbrace{O(n)}_{\wedge -2}$

и $F_n^{-1}y$ тоже за $O(n\log n)$ (обратное пр-е Фурье)

Итоговая сложность $O(n\log n)$

(б). Представим $x \in \mathbb{R}^{p^2}$, как $\operatorname{vec}(Y)$, где $Y \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

Тогда $Ax = Ix + (B\otimes B)\operatorname{vec}(Y) = Ix + \operatorname{vec}(BYB^T)$.

Рассмотрим BYB^T: $\underbrace{B}_{p\times p}\underbrace{Y}_{p\times p}$ $O(p$

$\underset{p\times p}{(BY)}\underset{p\times p}{B^T}$ $O(p^3)$

Значит, итоговая сложность – $O(p^3) = O(n^{3/2})$.