



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - MEC  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PRPPG  
COORDENADORIA GERAL DE PESQUISA - CGP  
PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA - PIBIC - UFPI  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO MINISTRO PETRÔNIO PORTELA -  
BLOCO 06 - BAIRRO ININGA CEP: 64049-550 - TERESINA-PI -  
BRASIL - FONE: (86) 3215-5564 - FONE/FAX: (86) 3215-5560

## **Propagador para uma partícula quântica interagindo com um reservatório**

Orientando: Marcondes Tiburcio da Silva Junior - Física - DF - UFPI.

Orientador: Prof. Dr. Irismar Gonçalves da Paz - DF - UFPI.

Teresina - PI.

Fevereiro de 2017

## Resumo

Propomos aqui, um breve estudo sobre a mecânica quântica e seus fundamentos, primeiramente estudamos sistemas quânticos que não sofrem influência do meio externo. A evolução no tempo para uma partícula quântica que não interage com o meio externo pode ser feita via propagador de Schrödinger para uma partícula livre. Em breve, na segunda parte deste trabalho obteremos o propagador para uma partícula que interage com o meio. Nesse sentido, uma vez que possuímos o propagador que considera a interação com o ambiente será possível estudar a perda de coerência entre partícula e reservatório.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Experimento de Young</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Ondas de matéria</b>	<b>7</b>
4.1	A hipótese de de Broglie . . . . .	7
4.2	Partícula Livre . . . . .	8
4.3	Pacote de Onda . . . . .	9
4.4	Princípio da Incerteza de Heisenberg . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Equação de Schrödinger</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Interpretação probabilística da função de onda</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Evolução temporal de um pacote de onda, via equação de Schrödinger</b>	<b>14</b>
<b>8</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>16</b>
<b>9</b>	<b>Agradecimentos</b>	<b>18</b>

# 1 Introdução

Até o final do século XIX, a física podia ser dividida em quatro grandes áreas: a mecânica clássica, a termodinâmica, o eletromagnetismo e a óptica. Os físicos buscavam a unificação das teorias, como já havia a junção da mecânica com a termodinâmica (Mecânica Estatística), do eletromagnetismo com a óptica. Diariamente, existia entre os físicos um desejo incessante por uma teoria que possibilitasse uma descrição final da natureza. Fenômenos importantes, mostraram que a física clássica falhava tanto no domínio de altas velocidades (relatividade), bem como no regime microscópico (mecânica quântica). Entre os fenômenos não explicados, estão a radiação do corpo negro, efeito fotoelétrico, efeitos importantes no surgimento da física quântica.

O primeiro avanço, veio no início do século XX quando Max Planck introduziu o conceito de quantização de energia. Em seus esforços para explicar o fenômeno da radiação do corpo negro, argumentou que a troca de energia entre uma onda eletromagnética de frequência  $f$  e matéria ocorre apenas em múltiplos inteiros de  $hf$ , que chamou de energia de um quantum, onde  $h$  é uma constante fundamental chamada constante de Planck.

Em 1905, Einstein, usando a hipótese da quantização de energia conseguiu explicar o efeito fotoelétrico. Segundo Einstein a luz era constituída de pacotes discretos de energia  $hf$ , tais pacotes são chamados de fótons, e que a energia necessária para remover o elétron variava de metal para metal.

No efeito fotoelétrico o elétron pode ganhar energia ao absorver um fóton. No efeito Compton, por sua vez, o elétron pode perder energia emitindo fótons, essa teoria foi observado em 1922 por Arthur Compton no seu experimento de espalhamento de raios-X ref.[1]. Compton observou que se o espalhamento fosse considerado uma colisão entre um fóton e um elétron, o elétron absorveria energia do fóton incidente e nesse caso a energia do fóton difratado seria menor do que a do fóton incidente.

Esses fenômenos são explicados com uma teoria corpuscular associada a absorção e emissão de energia. Essa natureza dual da luz é bem aceita hoje em dia e abriu caminho para novas ideias, veremos a seguir.

## 2 Metodologia

Ainda em questão a dualidade da luz, bem antes de Max Planck introduzir sua teoria da quantização, um físico havia comprovado experimentalmente a dualidade da luz, iniciaremos então com um dos experimentos mais importantes da quântica, o experimento de Young, no qual começou um forte indício para se concretizar o comportamento dual da luz.

No ponto de vista de ondas de matéria, seguimos com a hipótese de de Broglie, esta abre espaço para um fundamento muito importante da mecânica quântica chamada dualidade onda-partícula. Em seguida apresentamos a equação de Schrödinger no qual descreve o tempo de evolução da função de onda do sistema, as soluções dessa equação nos descreve vários sistemas, incluindo eles os microscópicos, devido a sua sucessão para diversos fenômenos é considerada uma das mais importantes descobertas da mecânica quântica.

Continuamos com a partícula livre e apresentaremos seus diversos problemas para descrever a partícula, no qual através da superposição de ondas de diversas frequências produzimos um pacote de ondas. Exploramos o princípio de incerteza de Heisenberg e seguimos com a interpretação probabilística da função de onda.

Evoluímos temporalmente o pacote de onda via equação de Schrödinger utilizando a função de Green em um certo pacote de onda gaussiano. Na mecânica quântica desconsideramos o meio ambiente para simplificar, pretendendo eu utilizando a equação de Schrödinger realizar neste trabalho o efeito de propagar um estado físico considerando o ambiente.

### 3 Experimento de Young

Quando duas ondas ou mais se superpõem em um mesmo ponto acontece o fenômeno de interferência. Esse fenômeno foi demonstrado para a luz em 1801 por Thomas Young. Com um firme base experimental Young possibilitou o estabelecimento da teoria ondulatória da luz. Observou em suas experiências, além da interferência, o fenômeno de difração, até então consideradas características exclusivas das ondas.

Young fez com que a luz incidisse em um pequeno orifício  $S_0$  aberto no anteparo  $A$  (figura 1). A luz atinge a fenda e espalha sofrendo difração, em seguida incide nos orifícios  $S_1$  e  $S_2$  do anteparo  $B$ . Após incidir nos orifícios ocorre uma nova difração, propagando-se duas ondas esféricas superpostas, à direita do anteparo  $B$ .

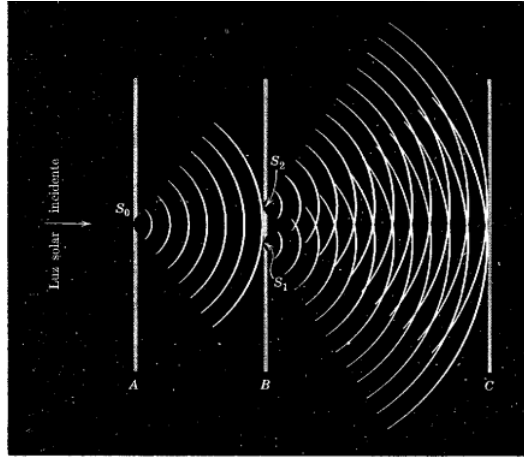


Figure 1: Experimento de Young ao qual mostra a superposição das ondas, retirada da ref.[3]

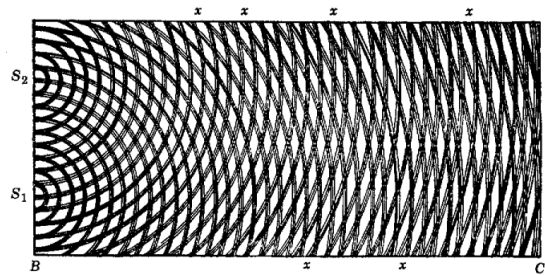


Figure 2: Efeitos de interferência na superposição de ondas, retirada da ref.[3]

A figura (2) mostra a região entre o amteparo  $B$  e  $C$  no qual os trechos mais escurecidos representam os mínimos e os espaços em brancos representam os máximos, ou seja, franjas de interferência. Esse experimento foi de grande importância através dele temos por consequência a aceitação da teoria ondulatória da luz.

## 4 Ondas de matéria

### 4.1 A hipótese de de Broglie

Após a explicação de Einstein sobre o efeito fotoelétrico, da quantização de energia proposta por Max Planck e da teoria de Niels Bohr sobre o átomo de hidrogênio em que os elétrons com carga negativa giram em torno do núcleo com carga positiva a dualidade onda-partícula da luz já era bem aceita pela comunidade científica.

Em 1924, Louis de Broglie, com base no efeito fotoelétrico, propôs que o dualismo onda partícula, que até então valia apenas no caso da radiação, também era uma propriedade da matéria, visto que os elétrons e todas as outras partículas apresentavam fenômenos como interferência e difração. Imaginou, que havia uma simetria entre o comportamento de fótons e elétrons.

Sua hipótese matemática foi expressa através de equações para a frequência e comprimento de onda das ondas de matéria. As relações de de Broglie são expressas da seguinte forma, sendo  $E$  a energia da partícula,  $p$  o momento e  $\lambda$  o comprimento de onda da partícula, temos:

$$f = \frac{E}{h}, \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (2)$$

Através desta hipótese, conseguimos deduzir a condição de quantização de Bohr, essa que leva a formação de uma órbita estacionária de tal modo que a órbita de raio  $r$  contivesse um número  $n$  de ondas de matéria, ou seja,

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r}{(h/p)} = n, \quad (3)$$

onde  $n$  número inteiro, com isto, temos

$$L = pr = n \frac{h}{2\pi}. \quad (4)$$

As ideias de de Broglie, foram generalizadas por Erwin Schrödinger e comprovada experimentalmente por C.J. Davisson e L.H. Germer em 1927. Davisso-Germer, lançaram elétrons num alvo de níquel e observaram padrões de difração resultante de elétrons ref.[2]. Observaram também que na superfície do níquel haviam formados grandes monocristais observando a difração dos elétrons.

Diante disso, combinado com diversas evidências constitui-se argumentos necessários para se acreditar que em determinados momentos as partículas tem um comportamento ondulatório. Com esses fatos deve-se aceitar um caráter dualístico tanto para a matéria como para a luz.

## 4.2 Partícula Livre

Partindo das ideias de de Broglie, podemos associar uma função de onda  $\psi(x, t)$  para partículas. A função de onda descreve fisicamente o sistema, sendo sua interpretação probabilística. Para ilustrar, podemos tentar representar uma partícula por uma onda plana, na forma

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}, \quad (5)$$

chamada equação de onda plana, onde  $A$  é uma constante de normalização e é determinada através da seguinte condição

$$|\psi(x, t)|^2 = |A|^2. \quad (6)$$

Note que a densidade de probabilidade de encontrar a partícula será constante em todo o espaço, logo as ondas planas não são normalizadas. Outro problema é que a velocidade de fase não coincide com a partícula. Reescrevendo de forma mais simples a equação (5) para analisarmos melhor, temos

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t). \quad (7)$$

em que  $k$  número de onda é o mesmo comprimento de onda  $\lambda(k = \lambda)$  e o colocando evidência, temos

$$\psi(x, t) = A \cos \left[ k \left( x - \left( \frac{\omega}{k} \right) t \right) \right]$$

Vemos que a velocidade de fase é  $v_p = \frac{\omega}{k}$ , substituindo  $k$  por  $\lambda$ , temos que  $v_p = \frac{\omega}{k}$  e isolando  $\omega$  obtemos a seguinte relação

$$\omega = \lambda v \quad (8)$$

Associando  $\omega$  a uma partícula de momento  $p$  e energia total  $E$ , temos



$$\omega = \lambda v = \frac{h E}{p h} = \frac{E}{p}$$

Calculando  $p$  e  $E$  em termos de  $v$  e da massa  $m$  da partícula e supondo que esteja se movendo com velocidade não relativística  $v$  em uma região que sua energia potencial é zero, temos que

$$\omega = \frac{E}{p} = \frac{mv^2/2}{mv} = \frac{v}{2} \quad (9)$$

Resultado estranho, isto indica que a onda de matéria não seria capaz de acompanhar a partícula o qual ela controla. Isto concluiu que as ondas planas apresentam diversos problemas e não seria uma forma ideal de representar as partículas.

### 4.3 Pacote de Onda

Mostramos anteriormente, que a luz, antes tratada somente de forma ondulatória, apresenta propriedades na interação com a matéria, a saber, efeito fotoelétrico e efeito Compton. No entanto, L. de Broglie baseado na simetria da natureza, afirmou que todas as partículas apresentam comportamento ondulatório, como interferência e difração. Vimos que através de ondas planas não foi possível representar a partícula, estas tinham densidade de probabilidade constante em todo o espaço, não são normalizadas e a velocidade de fase não coincide com a partícula.

Para representar a luz usamos a função de onda do campo elétrico que é a solução da equação da onda clássica

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (10)$$

Um exemplo importante de ondas clássicas são as ondas harmônicas de amplitude  $y_0$ , frequência  $f$  e período  $T$ , que se propagam de acordo com a equação

$$\psi(x, t) = y_0(kx - \omega t) = y_0 \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = y_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \quad (11)$$

Uma única onda harmônica, não pode ser localizada assim não podendo descrever o pulso, cujo sua principal característica é o fato de ser um fenômeno localizado no tempo e no espaço. Porém, o pulso pode ser representado por uma soma de ondas harmônicas de diferentes frequências e distintos comprimentos de onda. Esse grupo de funções harmônica é conhecido como pacote de ondas. Quando há uma superposição de duas ondas

de mesma amplitude e frequências muito próximas acontece o fenômeno conhecido como batimento. Sejam  $k_1$  e  $k_2$  duas ondas senoidais,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  suas frequências angulares e  $v_1$  e  $v_2$  suas velocidades respectivamente, a soma das duas ondas é dada pela equação

$$\psi(x, t) = y_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + y_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t), \quad (12)$$

aplicando mudanças trigonométricas, obtemos

$$\psi(x, t) = 2A \cos \left[ \frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2} \right] \cos \left[ \frac{k_1 + k_2}{2} x - \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right]$$

onde definimos:  $\Delta k = k_1 - k_2$ ,  $\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$ ,  $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$ ,  $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , logo

$$\psi(x, t) = 2A \cos \left[ \frac{\Delta k x}{2} - \left( \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right] \cos(\bar{k} x - \bar{\omega} t) \quad (13)$$

Na figura (3) temos o gráfico da equação (13) para  $t = 0$ . Duas ondas senoidais de frequências próximas e número de ondas diferentes se interferindo e ambas estão se propagando no eixo  $x$ . A curva tracejada é a envoltória da soma das duas ondas dada pelo cosseno da equação (13)

$$\cos \left\{ \frac{1}{2} \Delta k \left[ x - \left( \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \right) t \right] \right\}$$

Vemos que a envoltória se propaga com velocidade  $\frac{\Delta \omega}{\Delta k}$ , essa velocidade recebe o nome de velocidade de grupo e é representada pelo símbolo  $v_g$ .

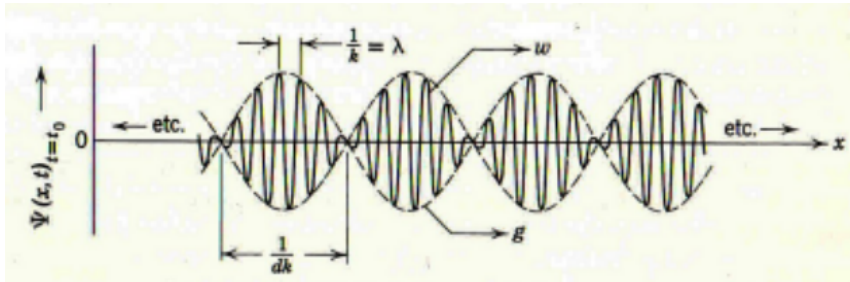


Figure 3: Soma de duas ondas senoidais, retirada da ref.[1]

As velocidades de fase das ondas que formam o pacote de ondas é dada pela seguinte equação

$$v_p = f\lambda = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \left(\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{\omega}{k} \quad (14)$$

Isolando  $\omega$  e derivando em relação a  $k$ , obtemos a velocidade de grupo.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_p + k \frac{dv_p}{dk} \quad (15)$$

Se  $v_p$  é a mesma para todas as frequências

$$\frac{dv_p}{dk} = 0$$

logo  $v_g = v_p$ . Quando  $v_p$  é a mesma para todas as frequências o chamamos de não dispersivo. Quando a  $v_p$  é diferente para distintas frequências, no caso de  $v_g \neq v_p$  dizemos que o meio é dispersivo. Concluímos que a onda de matéria é capaz de acompanhar a partícula o qual ela controla se uma informação foi codificada por uma sequência de pulsos, logo  $v_g = v_p$ .

Generalizando podemos escrever uma superposição de um número maior de ondas planas

$$\psi(x, t) = \sum_{i=k}^n A_k \cos[kx - \omega(k)t] \quad (16)$$

ou seja um pacote de ondas  $\psi(x, t)$  que se propaga com velocidade  $v_p$ . Como  $k$  é uma variável, podemos substituir o somatório por uma integral e definir uma amplitude que varia continuamente com  $k$  e  $A(k)$ . De forma

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) (\exp)^{i[kx - \omega(k)t]} \quad (17)$$

essa equação expressa um pacote de onda.

Uma propriedade importante de  $A(k)$  é que ela é uma transformada de Fourier, ref [4], da  $\psi(x, t)$  em  $t = 0$ , se assumirmos  $A(k)$ , como uma função do tipo gaussiana a equação (17) fica conhecida como pacote gaussiano.

## 4.4 Princípio da Incerteza de Heisenberg

Uma consequência de tratar pacotes de ondas é que o número de onda definido fica entre  $k$  e  $k + \Delta k$ . Usando a equação (2) e isolando o momento

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (18)$$

temos que a partícula possui um momento entre  $p$  e  $p + \Delta p$ , ou seja, uma incerteza. Utilizando a transformada de Fourier, ref[4], é possível obter a desigualdade

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2} \quad (19)$$

usando as relações de de Broglie, temos que

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (20)$$

essa desigualdade é conhecida como incerteza de Heisenberg. Com isso não é possível medir simultaneamente a posição e o momento da partícula, mas independentemente podemos ter um  $\Delta x = 0$  e  $\Delta p = 0$  para estados distintos.

## 5 Equação de Schrödinger

Primeiramente partindo das ideias de de Broglie, em que

$$k = \frac{p}{\hbar} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{E}{\hbar} \quad (21)$$

e substituindo na equação (17) o pacote de ondas se torna

$$\psi(x, t) = \int \phi(p) e^{\frac{i(px - Et)}{\hbar}} dp$$

Realizando operações matemáticas, obtemos a seguinte equação

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi(x, t) = \int p^2 \phi(p) (\exp)^{\frac{i(px - Et)}{\hbar}} dp$$

O termo do lado esquerdo da equação é conhecido como operador momento, representamos pelo símbolo  $\hat{p}$ . Aqui, mencionamos um dos postulados da mecânica quântica, toda grandeza física é representada por um operador hermitianos. Aplicando manipulações algébricas, chegamos a seguinte equação

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t), \quad (22)$$

chamada equação de Schrödinger, a qual descreve a evolução temporal da função de onda  $\psi(x, t)$ . Quando  $V = 0$  significa que temos uma partícula livre no espaço, e a equação de Schrödinger fica

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (23)$$

Note que a função de onda  $\psi(x, t)$  não está restrita a ser real, como temos o  $i$  na função ela é complexa.

## 6 Interpretação probabilística da função de onda

Anteriormente vimos que a matéria, assim como a luz tem uma interpretação probabilística, a partir daí teríamos quaisquer informações possíveis sobre a partícula. Esperava Schrödinger que a função de onda  $\psi(x, t)$  tivesse um significado físico com características de grandezas mensuráveis e que a partir dela poderíamos observar fenômenos físicos.

Entretanto, segundo Max Born a partícula pode ser escrita como uma função de onda  $\psi(x, t)$ , porém esta não possui significado físico. Para ele o módulo ao quadrado da função de onda

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi^*(x, t) \psi(x, t) \quad (24)$$

é que tem grandezas físicas mensuráveis.

Utilizando o experimento de Young, supomos uma onda  $\psi(x, t)$  passando através das fendas, ao qual que  $\psi(x, t)$  ao passar pelas fendas seja dividida entre  $\psi_1(x, t)$  e  $\psi_2(x, t)$ , ambas se interferem resultando em regiões construtivas e destrutivas, como na figura a seguir

Como vemos na figura (4), após atravessar a fenda, ocorre a superposição das duas ondas, dada pela seguinte equação

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) \quad (25)$$

De acordo com Max Born,  $|\psi(x, t)|^2$  é o que representa a densidade de probabilidade de encontrar em uma dimensão entre a posição  $x$  e  $x + dx$  no tempo  $t$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (26)$$

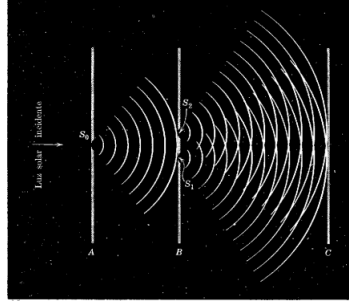


Figure 4: Experimento de Young ao qual mostra a superposição das ondas, retirada da ref.[3]

Observa-se que para garantir a convergência da integral  $\psi(x, t)$  deve ser uma função localizada.

Essa condição de normalização desempenha papel importante na mecânica quântica, ela impõe uma restrição adicional às possíveis soluções da equação de Schrödinger e faz uma alusão a uma dependência temporal no comportamento local da probabilidade.

## 7 Evolução temporal de um pacote de onda, via equação de Schrödinger

Um dos métodos usado pra evoluir o pacote de onda decorrente da equação de Schrödinger no tempo é através da função de Green

$$G(x, t, x', 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp\left(-\frac{m}{2i \hbar t}(x - x')^2\right) \quad (27)$$

Utilizando o pacote gaussiano a seguir no instante inicial

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0 \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right). \quad (28)$$

Aplicando a função de Green temos

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x'^2}{2\sigma_0^2}\right) \exp\left(\frac{-m}{2i \hbar t}(x - x')^2\right) dx', \\ \psi(x, t) &= \underbrace{\sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t \sqrt{\pi}}}}_A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x'^2}{2\sigma_0^2}\right) \exp\left(\frac{-m}{2i \hbar t}(x^2 + x'^2 - 2xx')\right) dx', \end{aligned}$$

$$\psi(x, t) = A \exp\left(\frac{-mx^2}{2i\hbar t}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x'}{2\sigma_0^2}\right) \exp\left(\frac{-mx'^2}{2i\hbar t}\right) \exp\left(\frac{-m}{2i\hbar t}(-2xx')\right) dx',$$

$$\psi(x, t) = A \exp\left(\frac{-mx^2}{2i\hbar t}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}\right)x'^2\right) \exp\left(\frac{mxx'}{i\hbar t}\right) dx'.$$

Agora para resolver esta integral em  $dx'$  precisamos completar o quadrado no expoente da primeira exponencial, onde

$$-\left[\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}\right)x'^2 - \frac{m}{i\hbar t}xx'\right] =$$

$$\left\{ \left[ \sqrt{\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}} x' - \frac{mx}{2\sqrt{\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}}(i\hbar t)} \right]^2 + \frac{m^2 x^2}{4\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}\right)\hbar^2 t^2} \right\}$$

voltando para a integral, onde conseguimos retirar toda a parte que não depende de  $x'$ , temos

$$\psi(x, t) = A \exp\left(\frac{-mx^2}{2i\hbar t}\right) \exp\left(\frac{m^2 x^2}{4\left[\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}\right]\hbar^2 t^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} d\mu$$

Onde identificamos  $\mu$  como

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}} x' - \frac{mx}{2\sqrt{\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}} i\hbar t}.$$

Resolvendo essa integral, utilizando o seguinte resultado

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \text{ onde aqui } \alpha = 1.$$

obtendo assim

$$\psi(x, t) = A \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}\right)}} \exp\left(\frac{-mx^2}{4\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}\right)(\hbar^2 t^2)}\right) \exp\left(\frac{-mx^2}{2i\hbar t}\right) \sqrt{\pi},$$

usando que

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t \sqrt{\pi} \sigma_0}},$$

ficamos com

$$\psi(x, t) = \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t \sqrt{\pi} \sigma_0}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}\right)}} \exp\left(\frac{-mx^2}{2i\hbar t}\right) \exp\left(\frac{-mx^2}{4\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{m}{2i\hbar t}\right)\hbar^2 t^2}\right).$$

Agora fazendo manipulações algébricas e usando os seguinte parâmetros:

$$B(t) = \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (29)$$

$$R(t) = t \left[ 1 + \left( \frac{\tau_0}{t} \right)^2 \right], \quad (30)$$

$$\mu(t) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t}{\tau_0}\right), \quad (31)$$

$$\tau_0 = \frac{m\sigma_0^2}{\hbar}. \quad (32)$$

Temos o pacote de ondas Gaussiano evoluído no tempo:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} B(t)}} \exp\left(\frac{-x^2}{2B(t)^2}\right) \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar R(t)}\right) \exp(-i\mu(t)). \quad (33)$$

Como mostrado evoluímos o pacote de ondas sem precisar da equação de Schrödinger. Observando os termos da equação (33) vemos que o termo  $B(t)$  representa a largura do pacote de ondas no tempo. O termo  $R(t)$  é o raio de curvatura das frentes de onda, já o termo  $\tau_0$  representa o tempo de envelhecimento do pacote.

## 8 Conclusões e Perspectivas

Nós estudamos os principais fenômenos da mecânica quântica, sua história e seus fundamentos. O início foi marcado pela dualidade onda e partícula, da luz se estendeu para a matéria com a hipótese de de Broglie comprovada experimentalmente. A matéria que antes só tinha caráter corpuscular, passou a ser representada por uma superposição de muitas ondas, ou seja, um pacote de onda.

Partindo dessas ideias Schrödinger postulou uma equação que descreve a evolução temporal da partícula, equação no qual não apresenta nenhum significado físico, suas grandezas físicas é expressa através de seu módulo



ao quadrado. A partir da equação de Schrödinger obtemos a  $\psi(x, t)$  para uma partícula livre através da superposição de várias frequências no qual produziria um pacote de onda.

Usualmente, por uma questão de simplicidade, nos estudos da mecânica quântica nós desprezamos os efeitos do ambiente, ou seja, um sistema quântico fechado. Esse relatório parcial está projetado para obtermos o propagador de Schrödinger para uma partícula livre considerando o dependência do ambiente no relatório final.

## 9 Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e forças necessárias para continuar firme e forte nas batalhas da vida, aos meus pais por sempre estarem ao meu lado, ao meu orientador pela dedicação em suas pesquisas, incluindo as pesquisas o qual elaborou para seus alunos trabalharem, e aos meus amigos que contribuíram de forma direta ou indireta.

Agradeço a UFPI pelo apoio logístico e financeiro prestado no decorrer da pesquisa,



Figure 5: UFPI

## References

- [1] Eisberg, Robert; Resnick, Robert. Física Quântica, 4.ed. Rio de Janeiro: Ed.Campos, 1979;
- [2] Tipler, Paul A. Física Moderna. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981;
- [3] Física/David Halliday [e] Robert Resnick; tradução [de] Antônio Luciano Leite Videira; Revisão técnica [de] Adir Moyses Luiz, 4.ed.- Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1978.
- [4] <http://astro.if.ufrgs.br/med/imagens/fourier.htm>