

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 47

Студент
Липшик Александра Юрьевна
Р3106

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $1x_1x_2 + x_3x_4x_5 = 3, 4, 6, 7, 10, 11$ и неопределенное значение при $x_3x_4x_5 = 1$

Таблица истинности

Nº	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$1x_1x_2$	$x_3x_4x_5$	$x_3x_4x_5$	f
0	0	0	0	0	0	4	0	0	1
1	0	0	0	0	1	4	1	1	d
2	0	0	0	1	0	4	2	2	1
3	0	0	0	1	1	4	3	3	1
4	0	0	1	0	0	4	4	4	0
5	0	0	1	0	1	4	5	5	0
6	0	0	1	1	0	4	6	6	1
7	0	0	1	1	1	4	7	7	1
8	0	1	0	0	0	5	0	0	0
9	0	1	0	0	1	5	1	1	d
10	0	1	0	1	0	5	2	2	1
11	0	1	0	1	1	5	3	3	0
12	0	1	1	0	0	5	4	4	0
13	0	1	1	0	1	5	5	5	1
14	0	1	1	1	0	5	6	6	1
15	0	1	1	1	1	5	7	7	0
16	1	0	0	0	0	6	0	0	1
17	1	0	0	0	1	6	1	1	d
18	1	0	0	1	0	6	2	2	0
19	1	0	0	1	1	6	3	3	0
20	1	0	1	0	0	6	4	4	1
21	1	0	1	0	1	6	5	5	1
22	1	0	1	1	0	6	6	6	0
23	1	0	1	1	1	6	7	7	0
24	1	1	0	0	0	7	0	0	1
25	1	1	0	0	1	7	1	1	d
26	1	1	0	1	0	7	2	2	0
27	1	1	0	1	1	7	3	3	1
28	1	1	1	0	0	7	4	4	1
29	1	1	1	0	1	7	5	5	0
30	1	1	1	1	0	7	6	6	0
31	1	1	1	1	1	7	7	7	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \\ \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \\ \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5}$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\ (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$	$K^1(f)$	$K^2(f)$	$Z(f)$
m_0 00000 ✓	m_0-m_1 0000X ✓	$m_0-m_1-m_2-m_3$ 000XX	01X01
m_2 00010 ✓	m_0-m_2 000X0 ✓	$m_0-m_1-m_{16}-m_{17}$ X000X	110X1
m_{16} 10000 ✓	m_0-m_{16} X0000 ✓	$m_2-m_3-m_6-m_7$ 00X1X	000XX
m_1 00001 ✓	m_2-m_3 0001X ✓	$m_2-m_6-m_{10}-m_{14}$ 0XX10	X000X
m_3 00011 ✓	m_1-m_3 000X1 ✓	$m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}$ 10X0X	00X1X
m_6 00110 ✓	m_2-m_6 00X10 ✓	$m_{16}-m_{17}-m_{24}-m_{25}$ 1X00X	0XX10
m_{10} 01010 ✓	m_1-m_9 0X001 ✓	$m_{16}-m_{20}-m_{24}-m_{28}$ 1XX00	10X0X
m_{20} 10100 ✓	m_2-m_{10} 0X010 ✓	$m_1-m_9-m_{17}-m_{25}$ XX001	1X00X
m_{24} 11000 ✓	$m_{16}-m_{17}$ 1000X ✓		1XX00
m_9 01001 ✓	$m_{16}-m_{20}$ 10X00 ✓		XX001
m_{17} 10001 ✓	$m_{16}-m_{24}$ 1X000 ✓		
m_7 00111 ✓	m_1-m_{17} X0001 ✓		
m_{13} 01101 ✓	m_6-m_7 0011X ✓		
m_{14} 01110 ✓	m_3-m_7 00X11 ✓		
m_{21} 10101 ✓	m_9-m_{13} 01X01		
m_{28} 11100 ✓	$m_{10}-m_{14}$ 01X10 ✓		
m_{25} 11001 ✓	m_6-m_{14} 0X110 ✓		
m_{27} 11011 ✓	$m_{20}-m_{21}$ 1010X ✓		
	$m_{17}-m_{21}$ 10X01 ✓		
	$m_{24}-m_{25}$ 1100X ✓		
	$m_{24}-m_{28}$ 11X00 ✓		
	$m_{17}-m_{25}$ 1X001 ✓		
	$m_{20}-m_{28}$ 1X100 ✓		
	m_9-m_{25} X1001 ✓		
	$m_{25}-m_{27}$ 110X1		

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

		0-кубы															
		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Простые импликанты		0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
		0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
		0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
		0	2	3	6	7	10	13	14	16	20	21	24	27	28		
									X								
	01X01																
	110X1																
A	000XX	X	X	X													
B	X000X	X											X				
	00X1X		X	X	X	X											
	0XX10		X		X		X		X								
	10X0X									X	X	X					
	1X00X									X			X				
	1XX00									X	X		X				X
	XX001																

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 00X1X \\ 0XX10 \\ 01X01 \\ 10X0X \\ 1XX00 \\ 110X1 \end{array} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

		0-кубы
Простые импликанты	0	
	0	
	0	
	0	
	0	
	0	
A	000XX	X
B	X000X	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = A \vee B$$

Выражение уже в ДНФ.

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} T \\ A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 00X1X \\ 0XX10 \\ 01X01 \\ 10X0X \\ 1XX00 \\ 110X1 \\ 000XX \end{array} \right\} \quad C_2 = \left\{ \begin{array}{l} T \\ B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 00X1X \\ 0XX10 \\ 01X01 \\ 10X0X \\ 1XX00 \\ 110X1 \\ X000X \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ll} S_1^a = 23 & S_2^a = 23 \\ S_1^b = 30 & S_2^b = 30 \end{array}$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 00X1X \\ 0XX10 \\ 01X01 \\ 10X0X \\ 1XX00 \\ 110X1 \\ 000XX \end{array} \right\}$$

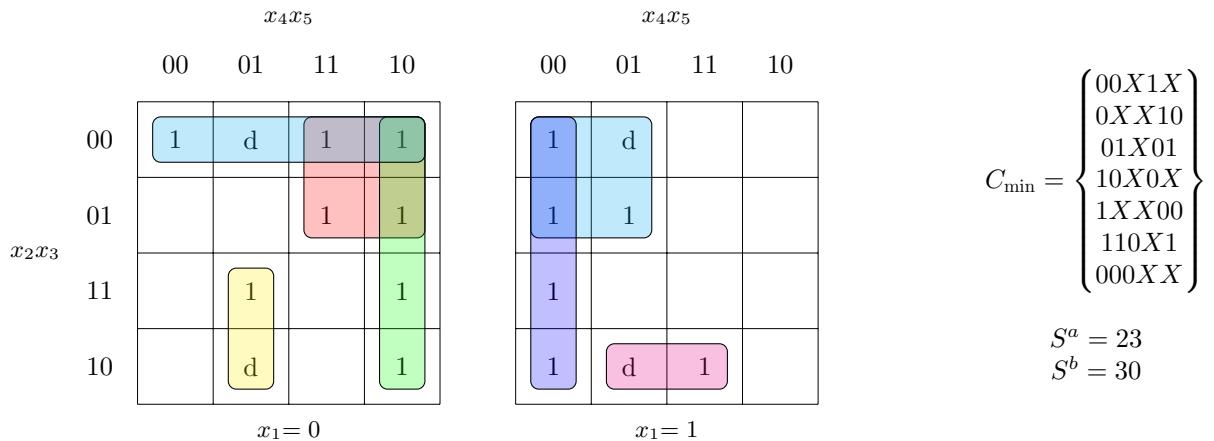
$$\begin{array}{ll} S^a = 23 & \\ S^b = 30 & \end{array}$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$$

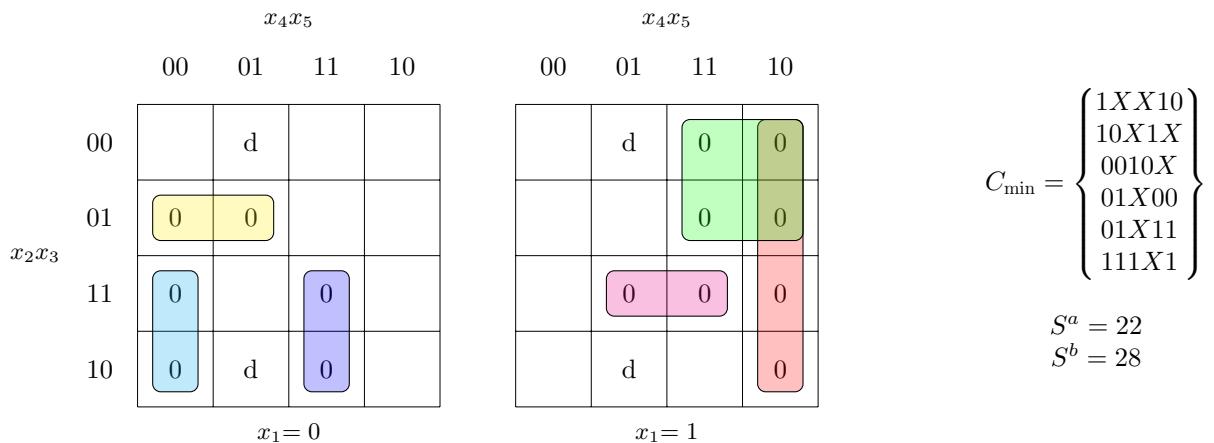
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$$

Определение МКНФ



$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \quad S_Q = 30 \quad \tau = 2$$

$$f = x_1 \overline{x_4} (\overline{x_2} \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_4 (\overline{x_2} \vee x_5) \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_5 \quad S_Q = 26 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_5}$$

$$f = x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} x_4 \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \varphi \overline{x_1} \overline{x_4} \vee \varphi x_1 \overline{x_3} \quad S_Q = 23 \quad \tau = 4$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 28 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_1 \vee x_4 \vee (x_2 \vee \overline{x_3})) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee x_2 x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 26 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = x_2 \, x_5$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_5}$$

$$f = (x_1 \vee x_4 \vee (x_2 \vee \overline{x_3})) \ (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee \varphi) \ (\overline{\varphi} \vee x_1 \vee \overline{x_4}) \ (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \quad S_Q = 25 \quad \tau = 4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} x_4 \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \varphi \overline{x_1} \overline{x_4} \vee \varphi x_1 \overline{x_3} \quad (S_Q = 23, \tau = 4)$$

$$\varphi = x_2 \, x_5$$

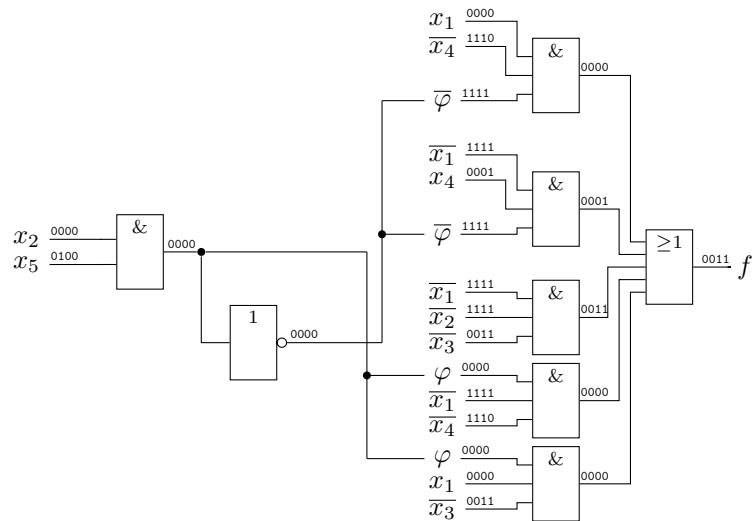
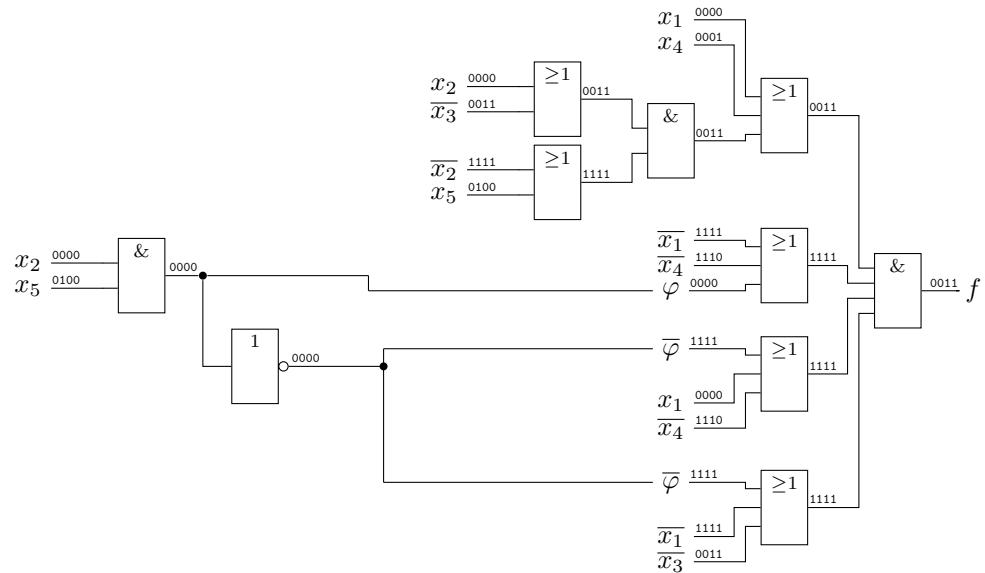


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_4 \vee (x_2 \vee \overline{x_3}) \; (\overline{x_2} \vee x_5)) \; (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee \varphi) \; (\overline{\varphi} \vee x_1 \vee \overline{x_4}) \; (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \quad (S_Q = 25, \tau = 4)$$

$$\varphi = x_2 \, x_5$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \overline{x_1} x_4 \overline{\varphi} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}} \overline{\varphi \overline{x_1} \overline{x_4}} \overline{\varphi x_1 \overline{x_3}} \quad (S_Q = 29, \tau = 6)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

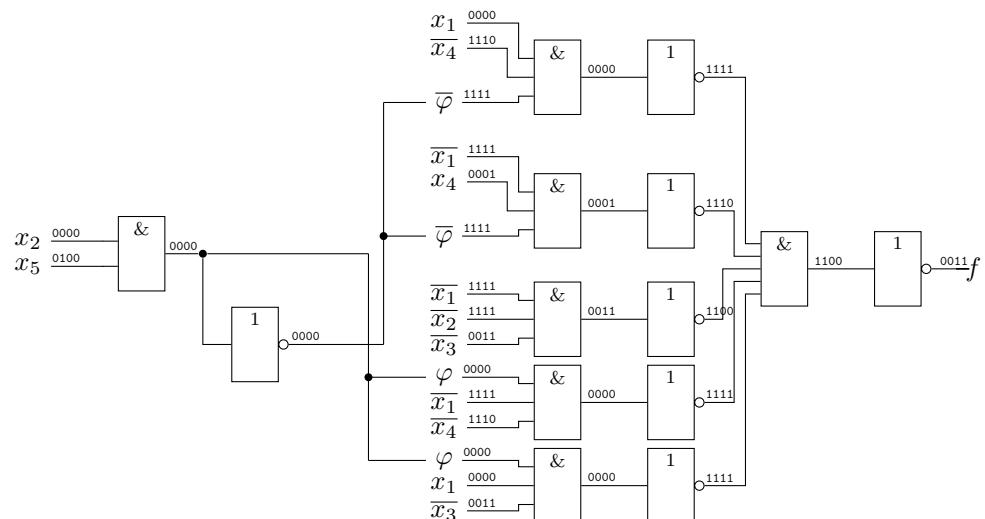
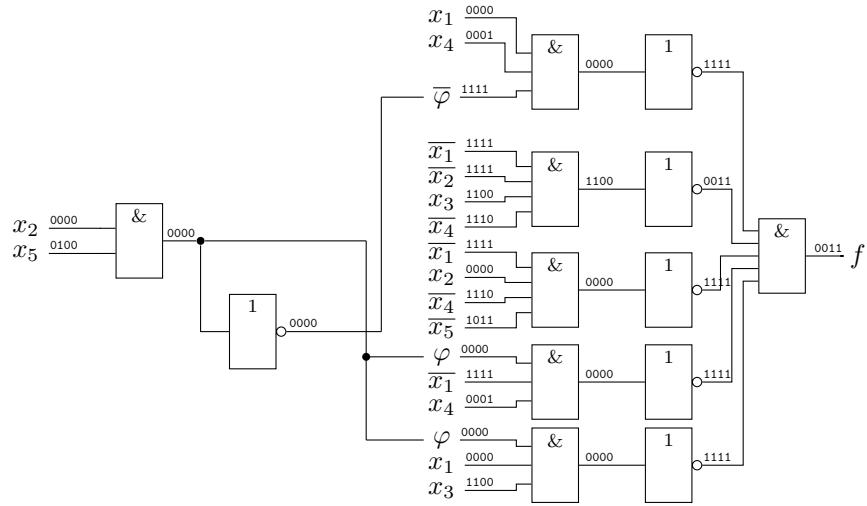


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{\varphi} \overline{\overline{x_1}} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{\overline{x_1}} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_5} \overline{\varphi} \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{\varphi} x_1 x_3 \quad (S_Q = 30, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1} \overline{\overline{x_4}} \overline{\varphi} \overline{\overline{x_3}} \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{\varphi} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{\varphi} \overline{x_4} \quad (S_Q = 28, \tau = 8)$$

$$\varphi = \overline{x_2} \overline{x_5}$$

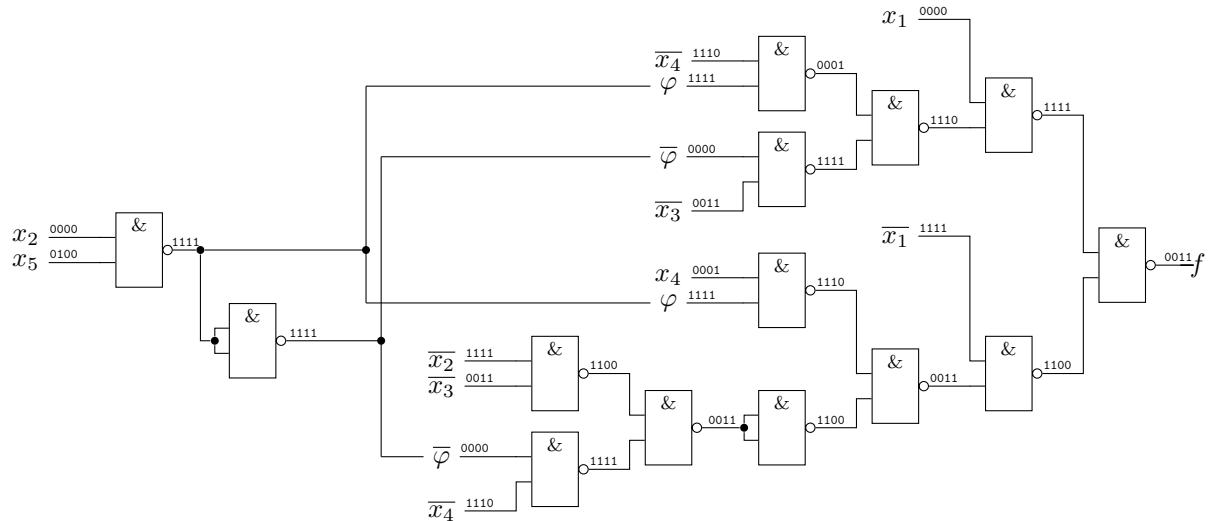


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{\overline{x_2}} \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{\overline{x_5}} \overline{\varphi} \overline{x_4} x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \overline{\varphi} \overline{x_3} \quad (S_Q = 30, \tau = 7)$$

$$\varphi = \overline{x_2} \overline{x_5}$$

