

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 47

Студент
Лишик Александра Юрьевна
Р3106

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $1x_1x_2 + x_3x_4x_5 = 3, 4, 6, 7, 10, 11$ и неопределенное значение при $x_3x_4x_5 = 1$

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$1x_1x_2$	$x_3x_4x_5$	$x_3x_4x_5$	f
0	0	0	0	0	0	4	0	0	1
1	0	0	0	0	1	4	1	1	d
2	0	0	0	1	0	4	2	2	1
3	0	0	0	1	1	4	3	3	1
4	0	0	1	0	0	4	4	4	0
5	0	0	1	0	1	4	5	5	0
6	0	0	1	1	0	4	6	6	1
7	0	0	1	1	1	4	7	7	1
8	0	1	0	0	0	5	0	0	0
9	0	1	0	0	1	5	1	1	d
10	0	1	0	1	0	5	2	2	1
11	0	1	0	1	1	5	3	3	0
12	0	1	1	0	0	5	4	4	0
13	0	1	1	0	1	5	5	5	1
14	0	1	1	1	0	5	6	6	1
15	0	1	1	1	1	5	7	7	0
16	1	0	0	0	0	6	0	0	1
17	1	0	0	0	1	6	1	1	d
18	1	0	0	1	0	6	2	2	0
19	1	0	0	1	1	6	3	3	0
20	1	0	1	0	0	6	4	4	1
21	1	0	1	0	1	6	5	5	1
22	1	0	1	1	0	6	6	6	0
23	1	0	1	1	1	6	7	7	0
24	1	1	0	0	0	7	0	0	1
25	1	1	0	0	1	7	1	1	d
26	1	1	0	1	0	7	2	2	0
27	1	1	0	1	1	7	3	3	1
28	1	1	1	0	0	7	4	4	1
29	1	1	1	0	1	7	5	5	0
30	1	1	1	1	0	7	6	6	0
31	1	1	1	1	1	7	7	7	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5}$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$		$Z(f)$
m_0	00000	✓	m_0-m_1	0000X	✓	$m_0-m_1-m_2-m_3$	000XX	01X01
m_2	00010	✓	m_0-m_2	000X0	✓	$m_0-m_1-m_{16}-m_{17}$	X000X	110X1
m_{16}	10000	✓	m_0-m_{16}	X0000	✓	$m_2-m_3-m_6-m_7$	00X1X	000XX
m_1	00001	✓	m_2-m_3	0001X	✓	$m_2-m_6-m_{10}-m_{14}$	0XX10	X000X
m_3	00011	✓	m_1-m_3	000X1	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}$	10X0X	00X1X
m_6	00110	✓	m_2-m_6	00X10	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{24}-m_{25}$	1X00X	0XX10
m_{10}	01010	✓	m_1-m_9	0X001	✓	$m_{16}-m_{20}-m_{24}-m_{28}$	1XX00	10X0X
m_{20}	10100	✓	m_2-m_{10}	0X010	✓	$m_1-m_9-m_{17}-m_{25}$	XX001	1X00X
m_{24}	11000	✓	$m_{16}-m_{17}$	1000X	✓			1XX00
m_9	01001	✓	$m_{16}-m_{20}$	10X00	✓			XX001
m_{17}	10001	✓	$m_{16}-m_{24}$	1X000	✓			
m_7	00111	✓	m_1-m_{17}	X0001	✓			
m_{13}	01101	✓	m_6-m_7	0011X	✓			
m_{14}	01110	✓	m_3-m_7	00X11	✓			
m_{21}	10101	✓	m_9-m_{13}	01X01				
m_{28}	11100	✓	$m_{10}-m_{14}$	01X10	✓			
m_{25}	11001	✓	m_6-m_{14}	0X110	✓			
m_{27}	11011	✓	$m_{20}-m_{21}$	1010X	✓			
			$m_{17}-m_{21}$	10X01	✓			
			$m_{24}-m_{25}$	1100X	✓			
			$m_{24}-m_{28}$	11X00	✓			
			$m_{17}-m_{25}$	1X001	✓			
			$m_{20}-m_{28}$	1X100	✓			
			m_9-m_{25}	X1001	✓			
			$m_{25}-m_{27}$	110X1				

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы															
		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
		0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
		0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
		0	2	3	6	7	10	13	14	16	20	21	24	27	28		
	01X01							X									
	110X1														X		
A	000XX	X	X	X													
B	X000X	X								X							
	00X1X		X	X	X	X											
	0XX10		X		X		X		X								
	10X0X									X	X	X					
	1X00X									X			X				
	1XX00									X	X		X			X	
	XX001																X

Ядро покрытия:

$$T = \begin{pmatrix} 00X1X \\ 0XX10 \\ 01X01 \\ 10X0X \\ 1XX00 \\ 110X1 \end{pmatrix}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

		0-кубы
Простые импликанты		0
		0
		0
		0
		0
		0
A	000XX	X
B	X000X	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = A \vee B$$

Выражение уже в ДНФ.

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \begin{pmatrix} T \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00X1X \\ 0XX10 \\ 01X01 \\ 10X0X \\ 1XX00 \\ 110X1 \\ 000XX \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} T \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00X1X \\ 0XX10 \\ 01X01 \\ 10X0X \\ 1XX00 \\ 110X1 \\ X000X \end{pmatrix}$$

$$S_1^a = 23 \quad S_2^a = 23$$

$$S_1^b = 30 \quad S_2^b = 30$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{pmatrix} 00X1X \\ 0XX10 \\ 01X01 \\ 10X0X \\ 1XX00 \\ 110X1 \\ 000XX \end{pmatrix}$$

$$S^a = 23$$

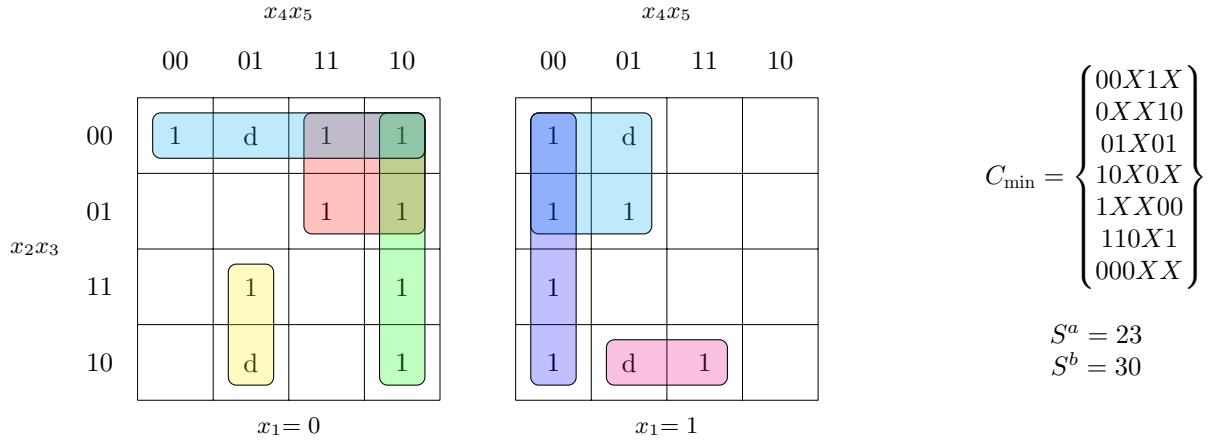
$$S^b = 30$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$$

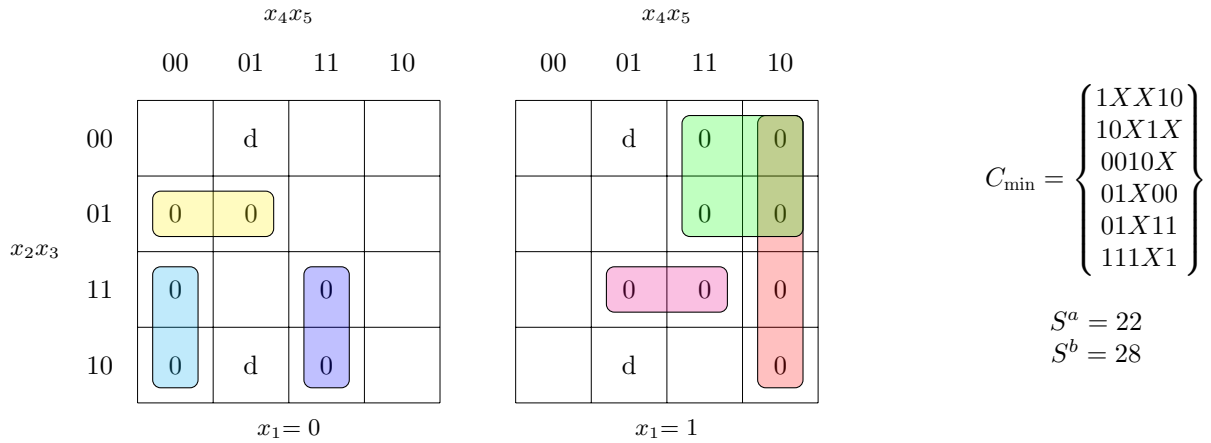
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$$

Определение МКНФ



$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \quad S_Q = 30 \quad \tau = 2$$

$$f = x_1 \overline{x_4} (\overline{x_2} \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_4 (\overline{x_2} \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_5 \quad S_Q = 26 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_5}$$

$$f = x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} x_4 \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \varphi \overline{x_1} \overline{x_4} \vee \varphi x_1 \overline{x_3} \quad S_Q = 23 \quad \tau = 4$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 28 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_1 \vee x_4 \vee (x_2 \vee \overline{x_3}) (\overline{x_2} \vee x_5)) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee x_2 x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 26 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_5}$$

$$f = (x_1 \vee x_4 \vee (x_2 \vee \overline{x_3}) (\overline{x_2} \vee x_5)) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee \varphi) (\overline{\varphi} \vee x_1 \vee \overline{x_4}) (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \quad S_Q = 25 \quad \tau = 4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} x_4 \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \varphi \overline{x_1} \overline{x_4} \vee \varphi x_1 \overline{x_3} \quad (S_Q = 23, \tau = 4)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

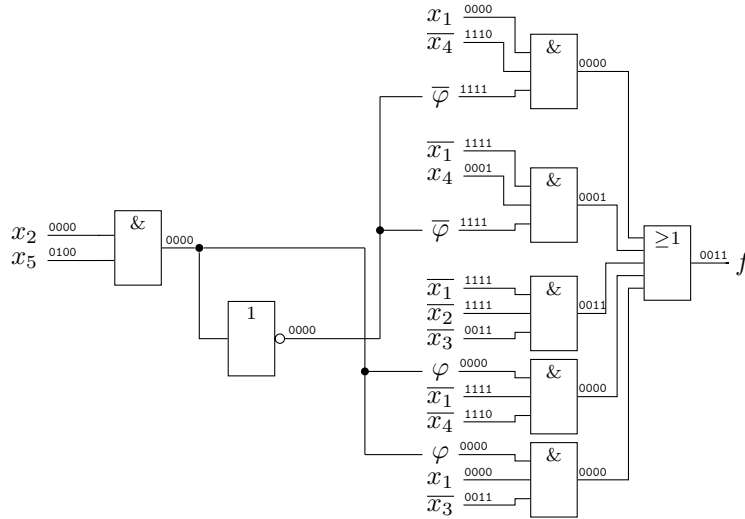
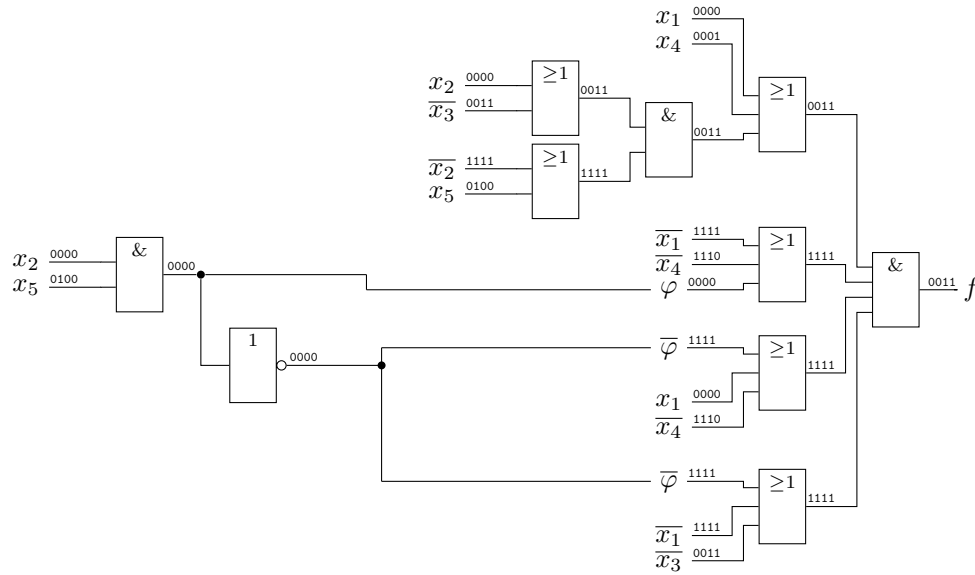


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_4 \vee (x_2 \vee \overline{x_3}) (\overline{x_2} \vee x_5)) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee \varphi) (\overline{\varphi} \vee x_1 \vee \overline{x_4}) (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \quad (S_Q = 25, \tau = 4)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \overline{x_1} x_4 \overline{\varphi} x_1 x_2 x_3 \overline{\varphi} \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{\varphi} x_1 \overline{x_3}} \quad (S_Q = 29, \tau = 6)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

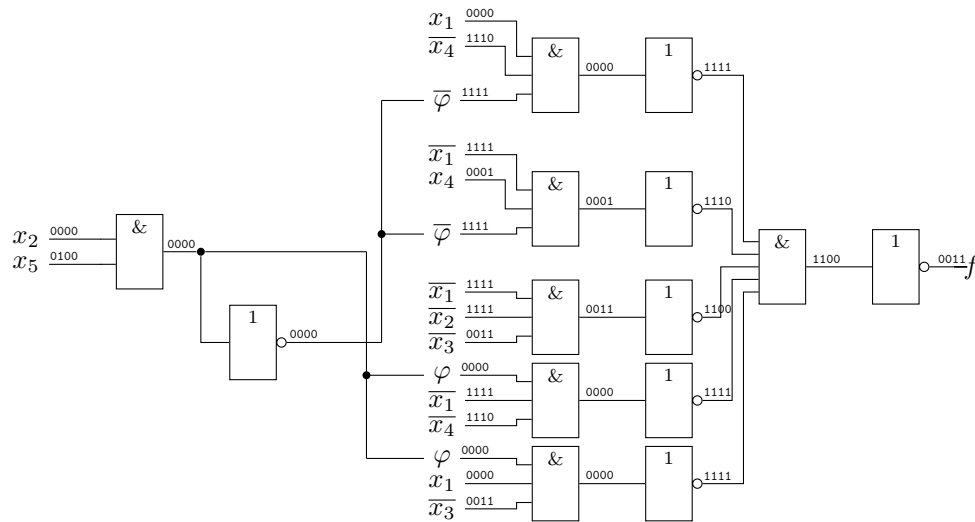
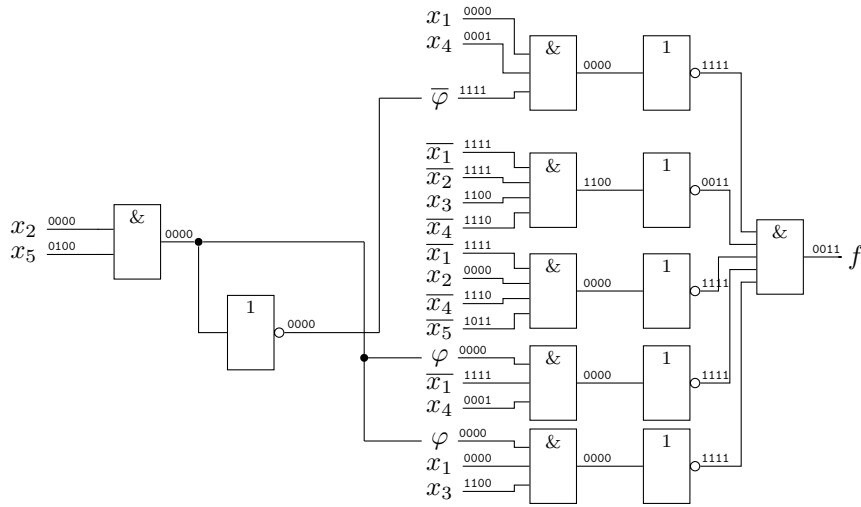


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_1 x_4 \varphi \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} \overline{x_5} \varphi \overline{x_1} x_4 \varphi x_1 x_3} \quad (S_Q = 30, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1 \overline{x_4} \varphi \overline{\varphi} x_3 \overline{x_1} \overline{x_4} \varphi x_2 x_3 \overline{\varphi} \overline{x_4}} \quad (S_Q = 28, \tau = 8)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

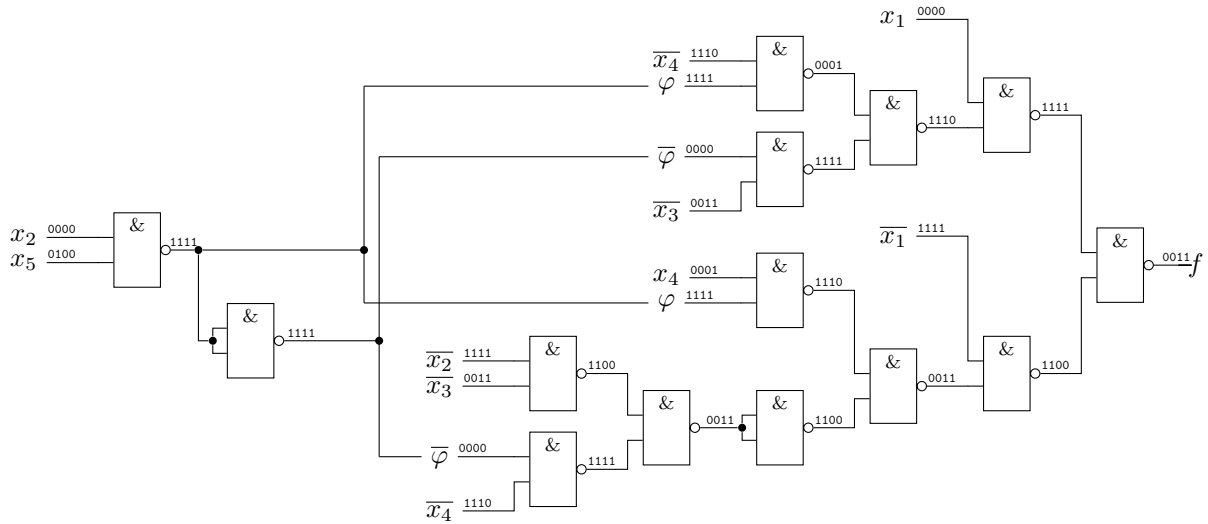


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{x_2} x_3 x_2 \overline{x_5} \overline{\varphi} x_4 x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \overline{\varphi} x_3 \quad (S_Q = 30, \tau = 7)$$

$$\varphi = \overline{x_2} \overline{x_5}$$

