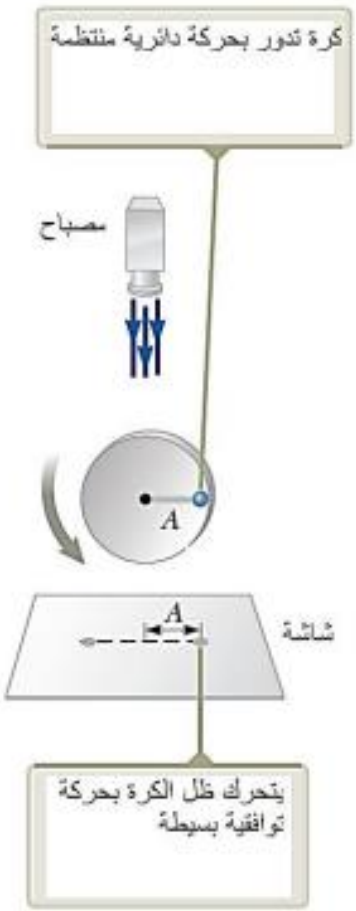
الحركات الاهتزازية

المقارنة بين حركة توافقية بسيطة وحركة دائرية منتظمة:



ننفذ التجربة التالية من أجل إيجاد أوجه الشبه بين الحركة التوافقية البسيطة والحركة الدائرية المنتظمة.

كرة مثبتة في طرف ذراع طوله A قابل للدوران حول محور O. والجملة مضاءة من الأعلى بواسطة مصباح. تدور الذراع بسرعة زاوية ثابتة. يظهر ظل الكرة على شاشة أسفل الجملة. نلاحظ أن ظل الكرة سوف يرسم مع دوران الذراع خطاً مستقيماً ذهاباً وإيابا على مسار مستقيم طوله 2A، بحركة توافقية بسيطة حول النقطة O' التي تعتبر موضع التوازن.

في الشكل التالي نسمي الدائرة بالدائرة المرجعية للمقارنة، والنقطة P نقطة الموضع المرجعي في اللحظة t=0 . تتحرك P بسرعة زاوية ثابتة w فتصنع زاوية $\boldsymbol{\theta}$.

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{wt}$$

مسقط P على المحور الأفقي OX هو Q التي تتحرك خلال دوران P ذهاباً وإياباً بين النقطتين $\pm\boldsymbol{A}$.

Q و P دائماً لهما نفس الـ x

$$x(t) = Acos(wt + \varphi)$$

P تتحرك حركة دائرية منتظمة و Q تتحرك حركة توافقية بسيطة.

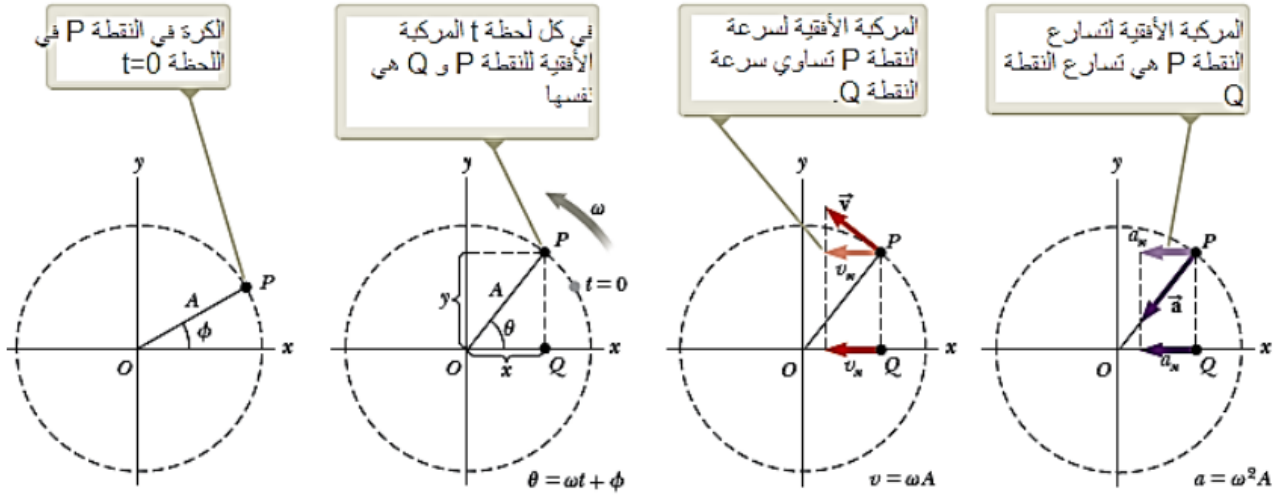
زمن دورة كاملة لـ P هو دور الحركة لـ Q ويساوي T.

العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية $v = wr \rightarrow v = wA$

المركبة الأفقية للسرعة: $\frac{dx}{dt} = v_x = -wAsin(wt + \varphi)$

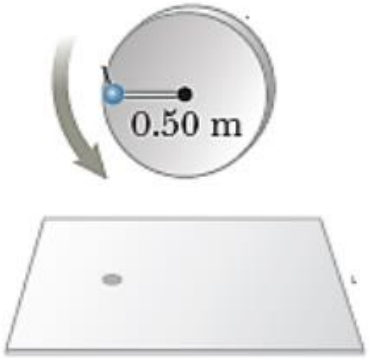
التسارع الناظمي: $a_c = \frac{v^2}{A} = \frac{w^2A^2}{A} = w^2A$

التسارع المماسي: $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2Acos(wt + \varphi)$



س: يوضح الشكل التالي موضع الكرة في حالة حركة دائرية منتظمة في اللحظة $t = 0$

ما هي قيم المطال والطور الابتدائي بالنسبة للمحور x المتجه نحو اليمين للظل الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة.



$(0.50\,m\,,0)$ ، $(1.00\,m\,,0)$ ، $(0.50\,m\,,\pi)$ ، $(1.00\,m\,,\pi)$

الجواب: $(0.50\,m\,,\pi)$

مسألة: كرة تدور عكس عقارب الساعة على دائرة نصف قطرها $3.00\,m$ بسرعة زاوية ثابتة $8.00\,rad.s^{-1}$ في اللحظة $t = 0$ تكون فاصلة الكرة $2.00\,m$ وحركتها نحو اليمين.

1- أوجد المركبة x للظل كتابع للزمن.

2- أوجد المركبات الأفقية لسرعة وتسارع الظل كتوابع للزمن.

الحل:

١- $$x = Acos(wt + \varphi)$$

$$\frac{x}{A} = \cos(wt + \varphi) \rightarrow wt + \varphi = cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)$$

$$\varphi = cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - wt$$

$$t = 0 \rightarrow \varphi = cos^{-1}\left(\frac{2.00}{3.00}\right) - 0 = \pm 48.2^o = \pm 0.841\, rad$$

الظل سيتحرك إلى اليسار في اللحظة $\varphi = +0.841 \rightarrow t = 0$

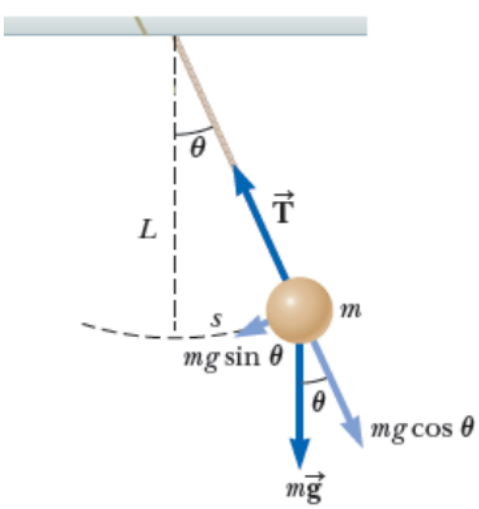
الظل سيتحرك إلى اليمين في اللحظة $\varphi = -0.841 \rightarrow t = 0$

$$x = 3.00\cos(8.00t - 0.841)$$

٢- $$v_x = \frac{dx}{dt} = (-3.00)(8.00)\sin(8.00t - 0.841) = -24.0\sin(8.00t - 0.841)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (-24.0)(8.00)\cos(8.00t - 0.841) = -192\cos(8.00t - 0.841)$$

النواس البسيط



عبارة عن جملة ميكانيكية ذات حركة دورية يتألف من جسم كتلته m مرتبط بخيط خفيف طوله L مثبت من طرفه العلوي، تتم الحركة في مستو شاقولي، وعندما تكون θ صغيرة $(\theta \leq 10^o)$ تكون الحركة قريبة من هزاز توافقي بسيط.

دراسة حركة النواس البسيط:

القوى المؤثرة: قوة توتر الخيط T، قوة الثقل W. نطبق قانون نيوتن: $\sum \vec{F} = \vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$ وبالإسقاط على جملة مماس ناظم. نجد المسقط على المماس هو

$$0 - mgsin\theta = ma_t = m\frac{d^2S}{dt^2}$$

a_t التسارع المماسي. s الفاصلة المنحنية.

تشير إشارة $(-)$ إلى أن القوة تعمل على إرجاع الجسم إلى وضع التوازن.

$$S = L.\theta \rightarrow \frac{d^2S}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}sin\theta$$

θ صغيرة أي $0.2\ rad$ أو $\theta \leq 10^o$، بما أن الزاوية صغيرة فإن $sin\theta \approx \theta$.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\theta = \theta_{max}\cos(w_0 t + \varphi)$$

θ_{max} الموضع الزاوي الأعظمي أو المطال الزاوي، w_0 النبض الخاص أو التواتر الزاوي، θ المطال الزاوي اللحظي.

وللتحقق نشتق مرتين ونعوض في المعادلة التفاضلية فنجد:

$$w = \frac{d\theta}{dt} = -w_0\theta_{max}\sin(w_0 t + \varphi)$$

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -{w_0}^2\theta_{max}\cos(w_0 t + \varphi) = -{w_0}^2\theta$$

$$ {w_0}^2 = \frac{g}{L} \rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

الدور الخاص:

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

يمكن استنتاج المعادلة التفاضلية التي تحققها هذه الزاوية بتطبيق نظرية العزم الحركي وإسقاطها على محور الدوران OZ والتي ينتج عنها المبدأ الأساسي في التحريك الدوراني والذي ينص على أن محصلة عزوم القوى الخارجية المؤثرة في الجسم تساوي جداء عزم العطالة بالتسارع الزاوي.

$$\sum \Gamma_{F/\Delta} = I_\Delta.\alpha$$

القوى المؤثرة بالجسم هي قوة توتر الخيط T وقوة ثقل الجسم W.

عزم قوة توتر الخيط يساوي الصفر لأن حامل القوة يمر من محور الدوران.

عزم قوة الثقل يساوي القوة ضرب الذراع وهو سالب لأنه يسبب دوران الجسم مع عقارب الساعة.

$$-mgLsin\theta = I_{\Delta}.\alpha = mL^2\alpha$$

$$-gsin\theta = L\,\alpha = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}sin\theta = 0$$

وعندما تكون θ صغيرة يمكننا إجراء التقريب $sin\theta \approx \theta$، فتصبح هذه المعادلة كما يلي:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

يستخدم النواس البسيط كأداة لضبط الوقت لأنه دوره يتعلق فقط بطول الخيط وقيمة g. ويستخدم لقياس تسارع السقوط الحر.

س: ساعة الجد تعتمد على دور نواس بسيط لضبط الوقت.

١- تم ضبط الساعة ولكن أحد الأولاد المشاغبين أزاح الجسم المعلق بالنواس للأسفل. هل الساعة: تقدم، تؤخر، تبقى مضبوطة؟

٢- نفرض أن الساعة ضبطت عند مستوى سطح البحر ثم أخذت إلى قمة جبل عال جداً. هل الساعة: تؤخر، تقدم، تبقى مضبوطة؟

الجواب: ١- الساعة تؤخر. ٢- الساعة تؤخر.

مسألة:

١- اقترح كريستيان هايغنز (أعظم صانع ساعات في التاريخ عاش بين *1629-1695*) واحدة دولية للطول وعرفها بأنها طول نواس بسيط دوره $1s$. كم ستكون واحدة الطول أقصر إذا طبق اقتراح هايغنز.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = \frac{T^2}{4\pi^2}g = \frac{(1.00)^2 \times 9.80}{4\pi^2} = 0.248\,m$$

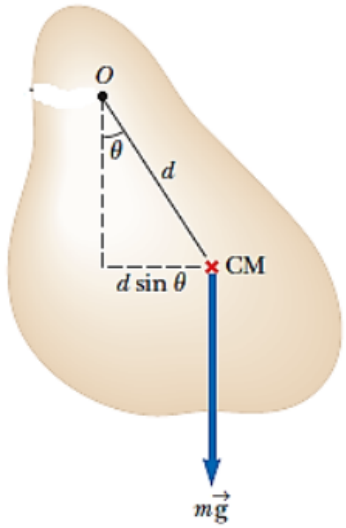
ستكون واحدة الطول المقترحة تساوي أقل من ربع واحدة الطول الحالية.

٢- ماذا لو أن هايغنز ولد على كوكب آخر، ما هي قيمة g على هذا الكوكب على أن تكون واحدة الطول $1m$.

$$g = L.\frac{4\pi^2}{T^2} = 1.00 \times \frac{4\pi^2}{(1.00)^2} = 39.5\,m.s^{-2}$$

ولكن لا يوجد كوكب في مجموعتنا الشمسية ثابت جاذبيته يصل لهذه القيمة.

٧- النواس المركب:



جسم معلق يهتز حول محور ثابت لا يمر من مركز عطالته ولا يمكن تقريبه إلى كتلة نقطية (نقطة مادية). وبالتالي لا يعامل معاملة النواس البسيط.

O نقطة التعليق. CM مركز عطالة الجسم. D البعد بين نقطة التعليق ومركز عطالة الجسم.

القوى التي يخضع لها الجسم هي قوة ثقل وقوة رد فعل محور التعليق.

عزم قوة رد فعل محور التعليق يساوي الصفر لأن حامل القوة ما من محور التعليق وبالتالي ذراع هذه القوة معدوم.

عزم قوة الثقل حول المحور المار من O هو $mg.d.sin\theta$.

حسب قانون نيوتن فإن مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة تساوي جداء عزم العطالة بالتسارع الزاوي.

$$\sum \Gamma_{F/\Delta} = I_\Delta . \alpha$$

$$-mg.d.sin\theta = I_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

تشير الإشارة (−) إلى أن العزم يميل إلى تصغير الزاوية أي إلى إعادة الجسم إلى وضع التوازن.

وعندما تكون θ صغيرة يمكننا إجراء التقريب $sin\theta \approx \theta$

$$-mg.d.\theta = I_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

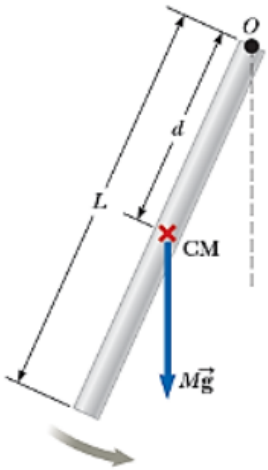
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{m.g.d}{I_\Delta}\theta = -{w_0}^2\theta$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وتقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\theta = \theta_{max}\cos(w_0 t + \varphi)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{m.g.d}{I_\Delta}} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$$

تستخدم هذه العلاقة لقياس عزم العطالة لمستوي أو جسم صلب من خلال قياس الدور.



مسألة:

ساق منتظمة كتلتها M، طولها L، معلقة من طرفها حول محور أفقي قابلة للدوران. تهتز في مستوي شاقولي. احسب دور الاهتزاز إذا كان مطال الحركة صغيراً.

عزم عطالة الساق حول المحور Δ هو $I_\Delta = \frac{1}{3}ML^2$ ، البعد بين مركز عطالة الساق ونقطة التعليق $d = \frac{L}{2}$.

حسب نظرية هايغنز:

$$I_{\Delta/O} = I_{\Delta/C} + M.d^2$$

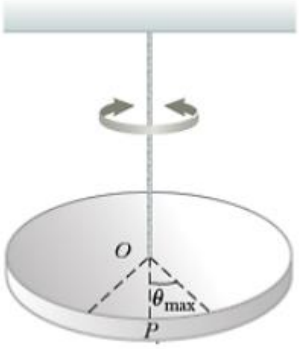
$$I_{\Delta/O} = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3}ML^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{M.g.\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

٨- نواس الفتل:

عبارة عن جسم صلب (مثل قرص أو ساق) معلق بخيط (سلك فتل) مثبت من طرفه الآخر في نقطة تعليق. عند تدوير الجسم بزاوية θ يطبق سلك الفتل على الجسم عزماً يتناسب مع الموضع الزاوي يسمى عزم الفتل.

$$\tau = -k\theta$$



حيث k ثابت فتل السلك ويقابل ثابت صلابة النابض في النواس المرن.

يمكن معرفة ثابت الفتل من خلال تطبيق عزم معروف على السلك وقياس الزاوية θ.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \tau = I_\Delta.\alpha \rightarrow -k\theta = I_\Delta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I_\Delta}\theta$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

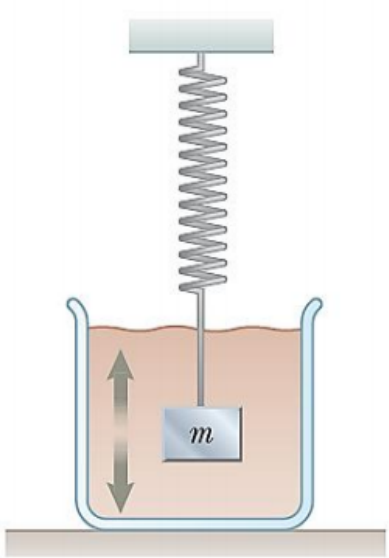
$$\theta = \theta_{max}\cos(w_0 t + \varphi)$$

والحركة توافقية بسيطة

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

٩- الاهتزازات المتخامدة:

الاهتزازات السابقة غير متخامدة باعتبار الجمل مثالية. بينما في الجمل الحقيقية حيث القوى غير المحافظة كقوة الاحتكاك، مقاومة الهواء، يتخامد الاهتزاز ويحصل ضياع في الطاقة مع الزمن وتسمى الحركة حركة اهتزازية متخامدة وتتحول الطاقة إلى طاقة داخلية في الجسم.



مثال: كتلة معلقة في نابض وتهتز في سائل لزج، نواس بسيط يهتز في الهواء ويتوقف بعد وقت قصير بسبب مقاومة الهواء.

تتناسب قوة الإعاقة أو قوة المقاومة مع سرعة الجسم وتؤثر باتجاه معاكس لجهة السرعة (جهة الحركة) بالنسبة للوسط المحيط.

$$\vec{R} = -b\vec{v} \ , \ \ [b] = N.m^{-1}.s$$

القوة المقاومة $\vec{R}$ ، b ثابت يسمى معامل التخامد. وقوة الإرجاع $-kx$.

نطبق قانون نيوتن الثاني ونسقط على محور شاقولي موجه. نسمي المحور x.

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

معادلة تفاضلية تقبل حلاً من الشكل:

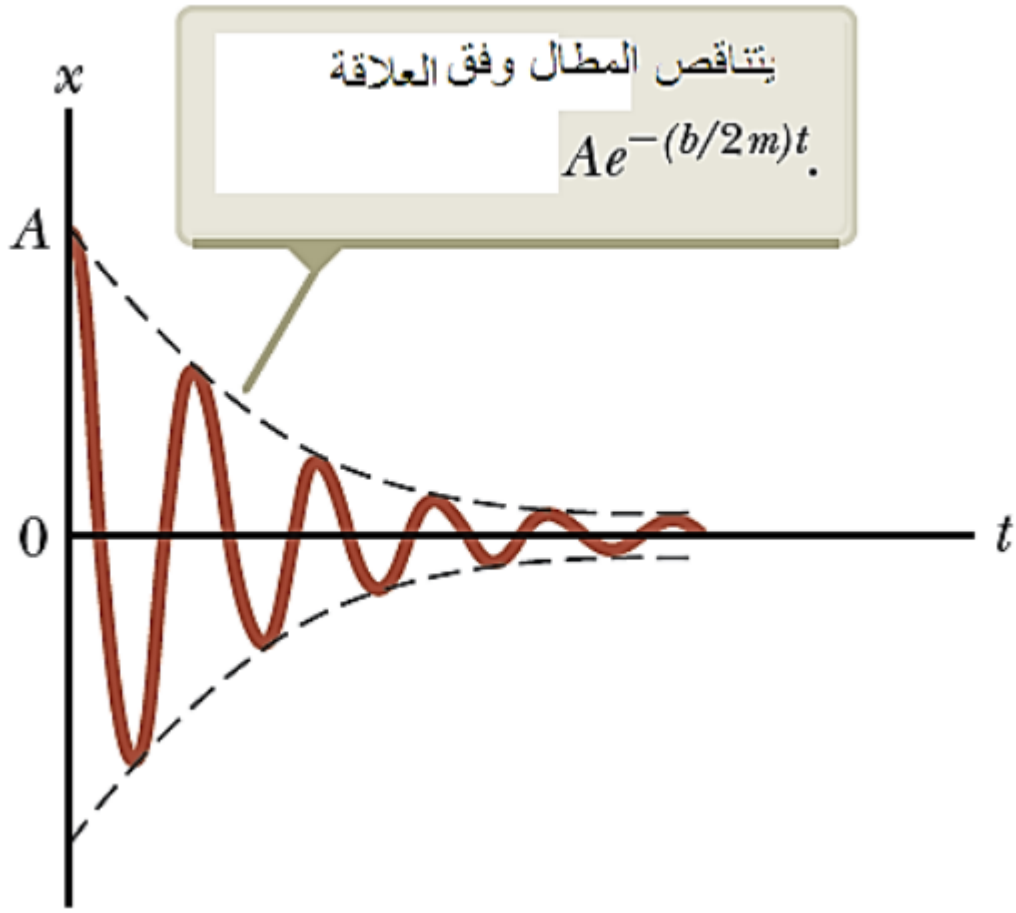
$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(wt + \varphi)$$

حيث w نبض الحركة أو التواتر الزاوي للحركة الاهتزازية المتخامدة. A المطال الابتدائي الأعظمي.

$$w = \sqrt{{w_0}^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

حيث w_0 النبض الخاص أو الطبيعي للجسم المهتز.

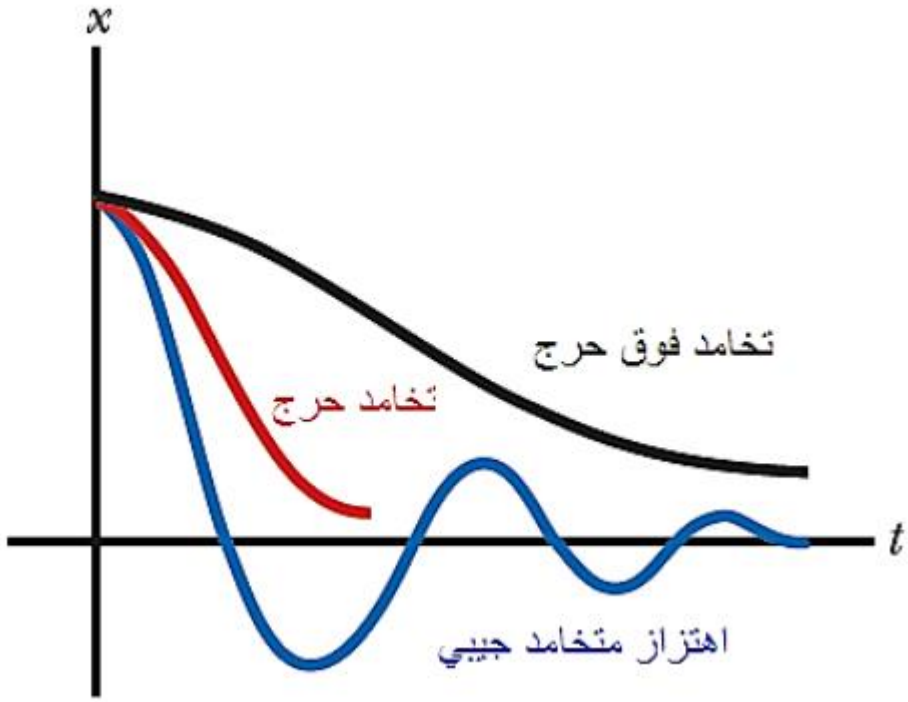
يتناقص المطال مع الزمن وفق المنحني التالي:



تسمى هذه الحالة حالة التخامد الجيبي أو تحت الحرج وتتحقق عندما يتحقق شرط التخامد الضعيف أي قيم b صغيرة وتحقق $\frac{b}{2m} < w_0$

أم من أجل قيمة حرجة لمعامل التخامد نسميها القيمة الحرجة b_c والتي تحقق حالة التخامد الحرج يكون $\frac{b_c}{2m} = w_0$. في هذه الحالة الجملة لا تهتز ولا تصل الجملة (الجسم المهتز) إلى وضع التوازن ولكن يقترب منه.

إذا كان الوسط لزج جداً فهذا يوافق $\frac{b}{2m} > w_0$ تصبح الجملة في حالة تخامد فوق حرج. والجملة بعد تحريرها لا تهتز ولكنها تعود إلى وضع التوازن وكلما ازداد التخامد يزداد الزمن اللازم للوصول إلى وضع التوازن بالنسبة للحالتين تخامد حرج وتخامد فوق حرج لا يوجد تواتر زاوي w.



شبه الدور في الاهتزازات المتخامدة:

$$T = \frac{2\pi}{w} \rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

١٠- الاهتزازات القسرية:

تتناقص الطاقة الميكانيكية للجملة بسبب قوة الاحتكاك (الإعاقة). يتم تعويض الطاقة المتناقصة من خلال تطبيق قوة خارجية دورية على الجملة تقدم عملاً موجباً. يبقى مطال الحركة ثابتاً، إذا كانت الطاقة المقدمة في كل دورة مساوية للطاقة المفقودة بسبب قوة الاعاقة.

القوة الخارجية الدورية:

$$F(t) = F_0 \sin(wt)$$

المطال الأعظمي للقوة هو الثابت F_0، التواتر الزاوي للقوة متغير وهو w. بينما w_0 هو التواتر الزاوي الخاص أو الطبيعي للمهتز وهو قيمة ثابتة متعلقة بـ m, k.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow F_0 \sin(wt) - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

بعد تطبيق القوة الخارجية $F(t)$ يزداد المطال. والجملة (المهتز مع الوسط) جملة غير معزولة. العمل الذي تقدمه القوة الخارجية يؤدي إلى زيادة طاقة الاهتزاز (طاقة حركية وطاقة كامنة) وطاقة داخلية للجسم والوسط.

بعد فترة طويلة من الزمن عندما تصبح الطاقة الداخلية (المقدمة خلال دور) تساوي الطاقة الميكانيكية المتحولة إلى طاقة داخلية في كل دورة، نصل إلى حالة ثبات حيث المطال ثابت عندها يكون الحل من الشكل:

$$x(t) = Acos(wt + \varphi)$$

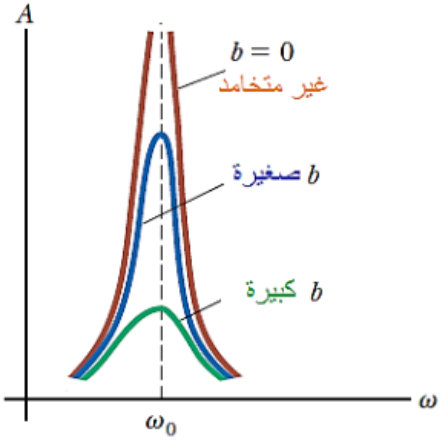
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(w^2 - w_0{}^2)^2 + \left(\frac{bw}{m}\right)^2}}$$

عندما يكون معامل التخامد معدوم:

$$b = 0 \rightarrow A = \frac{F_0/m}{(w^2 - w_0{}^2)}$$

والشكل التالي يوضح تغير المطال مع تواتر القوة القسرية الخارجية.

المهتز القسري يهتز بتردد القوة الخارجية المطبقة فيكون المطال ثابت من أجل قوة خارجية معينة.



في حالة تخامد ضعيف يكو ن المطال كبيراً عندما يكون نبض القوة قريباً من النبض الطبيعي $w \cong w_0$ وتسمى حالة تجاوب.

ويسمى w_0 تواتر أو نبض التجاوب للجملة.

سبب الوصول إلى مطال التجاوب عند تواتر التجاوب أن الطاقة تتحول إلى الجملة في أفضل الظروف (الشروط) حيث تكون القوة والسرعة على توافق في الطور فتكون الاستطاعة المقدمة للجملة أعظمية.

نهاية المحاضرة الثالثة