الفصل الأول
المصفوفات

1-1 المصفوفة (تعريفها وبعض أشكالها)

تعريف المصفوفات

المصفوفة $matrix$ هي مجموعة من العناصر $n*m$ متوضعة بشكل مرتب في جدول مؤلف من n سطر و m عمود ولها الشكل :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

حيث a_{ij} تمثل عناصر المصفوفة .

نلاحظ أن كل عنصر يذيل بدليلين الأول يدل على رقم السطر والثاني على رقم العمود الذي يقع فيه العنصر ،مثلا العنصر a_{32} عنصر يقع في السطر الثالث والعمود الثاني.

نقول عن المصفوفة التي من الشكل $n*m$ أنها مصفوفة مستطيلة ،وإذا كان عدد الأسطر n يساوي عدد الأعمدة m نقول بأن المصفوفة مربعة من المرتبة n .

مثال :

المصفوفة ذات الشكل :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}$$

مصفوفة من المرتبة 3*2 ، والمصفوفة التالية :

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

مصفوفة مربعة من المرتبة 2 ، أما المصفوفة :

$$C=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$$

فهي مصفوفة مستطيلة من المرتبة 1*4 ، و المصفوفة :

$$D=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -2\end{pmatrix}$$

مصفوفة مستطيلة من المرتبة 4*1

تعريف:

إذا كانت جميع عناصر المصفوفة أعدادا حقيقية سميت بالمصفوفة الحقيقية أما إذا كان أحد عناصرها على الأقل عددا تخيليا فتسمى المصفوفة في هذه الحالة مصفوفة تخيلية (عقدية) .

مثال :

$$A=\begin{pmatrix}1 & i & -5\\ 1-2i & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

مصفوفة تخيلية من المرتبة 3*3 .

الأشكال الخاصة للمصفوفات

المصفوفة الصفرية

وهي المصفوفة A من المرتبة $m*n$ والتي جميع عناصرها أصفارا ويرمز لها أحيانا بـ O_{nm} وهي تمثل العنصر الحيادي بالنسبة لعملية جمع المصفوفات .

المصفوفة القطرية

وهي المصفوفة المربعة من المرتبة n والتي جميع عناصرها أصفارا ما عدا عناصر القطر الرئيسي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

وتسمى بالمصفوفة السلمية إذا كانت جميع عناصر القطر الرئيسي متساوية أي أن :

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = \alpha$$

وهي من الشكل :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

مثال :

المصفوفة التالية مصفوفة قطرية من المرتبة 4 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة الواحدية

نقول عن المصفوفة السلمية والتي جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد إنها مصفوفة واحدية من المرتبة n ويرمز لها عادة بـ I_n.

مثال :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_4 =$$

وباستخدام تعريف كرونيكر :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & for\ i = j \\ 0 & for\ i \neq j \end{cases}$$

فإن $I_n = [\delta_{ij}]$.

المصفوفة المثلثية

نسمي المصفوفة المربعة من المرتبة n بالمصفوفة المثلثية العلوية إذا كانت جميع العناصر تحت القطر الرئيسي أصفارا ، ومصفوفة مثلثية سفلية إذا كانت جميع العناصر فوق القطر الرئيسي أصفارا .

مثال :

المصفوفة التالية مصفوفة مثلثية سفلية من المرتبة 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

بينما المصفوفة التالية مصفوفة مثلثية عليا :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

منقول مصفوفة (transpose)

لتكن المصفوفة A من المرتبة $n*m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

نقول بالتعريف أن منقول المصفوفة A هو مصفوفة جديدة تنتج عن المصفوفة الأصلية A بجعل أعمدتها أسطراً وأسطرها أعمدة ، مع مراعاة الترتيب ، ونرمز للمنقول بالرمز A^T ، أي أن :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ونلاحظ أنه إذا كانت المصفوفة A من المرتبة $n*m$ فإن منقولها A^T من المرتبة $m*n$ وإن:

$$\left(A^T\right)^T = A \ .$$

مثال :

إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المرافقة

لتكن المصفوفة التخيلية من المرتبة $n*m$ عندئذ نقول عن المصفوفة التي نحصل عليها بتبديل كل عنصر من المصفوفة بمرافقه بالمصفوفة المرافقة ، ونرمز لها بـ $\overline{A}$ ، ونلاحظ أن $\overline{\overline{A}} = A$ ، وأن المصفوفة A تكون حقيقية إذا كان $A = \overline{A}$.

مثال :

لتكن لدينا المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}$$

عندئذ يكون مرافقها بالشكل :

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$$

المصفوفة الهرميتية

إذا كان لدينا المصفوفة المربعة A من المرتبة n نقول بأنها مصفوفة هرميتية إذا كان $\overline{A^T} = A$ أو بشكل آخر $\forall i, j \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

مثال :

المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

هرميتية حيث أن :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} = A$$

المصفوفة المتناظرة

وهي المصفوفة المربعة من المرتبة n والتي تحقق الشرط $A^T = A$ أي أن $a_{ij} = a_{ji}$ ونقول أن المصفوفة متناظرة تخالفيا إذا كان $a_{ij} = -a_{ji}$.

مثال :

المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

مصفوفة متناظرة ، بينما المصفوفة التالية متناظرة تخالفيا :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة : في المصفوفة المتناظرة تخالفيا عناصر القطر الرئيسي أصفارا

$a_{11} = -a_{11} \Rightarrow a_{11} = 0$

2-1 العمليات على المصفوفات

1-جمع المصفوفات

لتكن A, B مصفوفتان من نفس المرتبة $n*m$ حيث أن :

$$A = (a_{ij}) \ ; \ B = (b_{ij})$$

بالتعريف نسمي المصفوفة C مجموع المصفوفتين A, B ونكتب :

$$C = A + B$$

وهي مصفوفة جديدة من الشكل :

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,n \ ; \ j = 1,2,\ldots,m$$

ولا يمكن إجراء عملية الجمع إلا إذا كانتا من نفس الشكل .

مثال :

لتكن لدينا المصفوفتين A, B حيث أن :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

عندئذ يكون مجموع هاتين المصفوفتين هو :

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 0+2 & 2+3 \\ -7+4 & 1+5 & 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

2- ضرب مصفوفة بعدد

لتكن A مصفوفة من المرتبة $n*m$ و k عدد ما :
إن ضرب المصفوفة A بالعدد k يعطي مصفوفة جديدة B من المرتبة $n*m$ نفسها وعناصرها معرفة كما يلي :

$$b_{ij} = k.a_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,n \ ; \ j = 1,2,\ldots,m$$

مثال :

لتكن لدينا المصفوفة A حيث أن :

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

عندئذ يكون :

$$3A=\begin{pmatrix}3*3 & 3*1 & 3*(-1)\\ 3*1 & 3*2 & 3*5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 3 & -3\\ 3 & 6 & 15\end{pmatrix}$$

نظرية :

لتكن V فئة كل المصفوفات التي لها المرتبة $n*m$ عندئذ إذا كان $A,B,C\in V$ وكان k,l أعداد كيفية ، فإن العلاقات التالية تكون دائما محققة :

جمع المصفوفات تجميعي
عنصر حيادي بالنسبة للجمع هو
الجمع عملية
لكل عنصر (مصفوفة) نظير بالنسبة للجمع
هو $-A$

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$
2) $A+0_{n*m}=A$
3) $A+B=B+A$
4) $A+(-A)=0$

5) $k(A+B)=kA+kB$
6) $(k+l)A=kA+lA$
7) $(kl)A=k(lA)$
8) $1.A=A$
9) $0.A=0$

حيادي بالنسبة للضرب المصفوفة
الواحدية
عنصر ماص للضرب

ويمكن الاستنتاج بأن :

$$A+A=2A$$
$$A+A+A=3A\ ,\cdots$$

3- ضرب المصفوفات

تعريف:

لتكن A مصفوفة من المرتبة $n*m$ و B مصفوفة ثانية من المرتبة $m*p$ إن جداء المصفوفتين يعطي مصفوفة جديدة C من المرتبة $n*p$ وعناصرها معرفة بالعلاقة :

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \cdots + a_{in}.b_{nj}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

والعنصر c_{ij} ينتج من مجموع جداء عناصر السطر i من المصفوفة الأولى بعناصر العمود j من المصفوفة الثانية على الترتيب(الأول بالأول ,الثاني بالثاني...).ويرمز لعملية الضرب بالشكل:

$$C = A*B = A.B = AB$$

ولا يكون لعملية الضرب هذه معنى إلا إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويا لعدد الأسطر في المصفوفة الثانية.وليس من الضروري أن يكون الجداء AB معرفا،عندما تكون المصفوفتان A,B مربعتان ومن نفس المرتبة فإن كل من BA, AB معرفا وليس من الضروري أن يكون $AB = BA$ ، وعملية جداء المصفوفات يمكن تمثيلها تحليليا على النحو التالي:

$$\begin{array}{c} \\ n_i \end{array}\begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & (A) & \end{bmatrix} \end{array} * \begin{array}{c} \\ m \end{array}\begin{array}{c} p \\ \begin{bmatrix} \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & (B) \end{bmatrix} \\ j \end{array} = \begin{array}{c} \\ i \\ n \end{array}\begin{array}{c} p \\ \begin{bmatrix} \cdots & \begin{matrix} j \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ & (C) \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال :

لتكن المصفوفة A من المرتبة $1*m$ والمصفوفة B مصفوفة من المرتبة $m*1$ ، عندئذ إن حاصل ضرب المصفوفتين يعطى بالعلاقة التالية :

$$A.B=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m=\sum_{i=1}^{m}a_ib_i$$

فإذا كان :

$$A(2\quad 3\quad 4)\ ,\ B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\Rightarrow A.B=(2\quad 3\quad 4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=$$

$$=2(1)+3(-1)+4(2)=\boxed{7}$$

مثال :

لتكن المصفوفة A من المرتبة $m*1$ والمصفوفة B من المرتبة $1*n$ فإن:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}(b_1\quad b_2\quad \cdots\quad b_n)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}$$

فإذا كان :

$$a=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\ B=(1\quad 2\quad 3)$$

فإن :

$$A.B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

مثال :

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ ذات المرتبة $2*3$ ، والمصفوفة

$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$ ذات المرتبة $3*3$ ، عندئذ يكون :

الضرب تجميعي

$ABC=(AB)\cdot C$
$=A(BC)$

$$C=A.B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 14 & 36\\ 15 & 32 & 78\end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة من المرتبة $2*3$.

ملاحظة :

في الحالة الخاصة التي يكون فيها $AB=BA$ فإننا نقل إن A,B متبادلتان،وقد ينعدم جداء المصفوفتين من غير أن تكون أيا منهما صفرا .

مثال :

إذا كان :

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

عندئذ يكون :

$$AB=BA=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

وهما متبادلتان .

- يمكن البرهان بأن :

$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(AB)C = A(BC)$$

قوة مصفوفة

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n نعرف المصفوفة A^k بأنها المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفة A بنفسها k مرة ،أي أن :

$$A^k = A.A\cdots A$$

مثال :

بفرض لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

عندئذ يكون :

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا كان $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ كثير حدود من المرتبة k يمكن عندئذ الحصول على كثير حدود للمصفوفة A ونرمز له بالرمز $f(A)$ ويعرف كما يلي : $f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k$

نحول العدد الثابت بضربه بالمصفوفة الواحدية لكي نحصل على مصفوفة

ونحصل عليه بسهولة بالتعويض عن x بـ A واستبدال الحد الثابت بـ $a_0 I_n$.

مثال :

إذا كان $f(x)=x^2-3x-2$ كثير حدود ، فإن كثير حدود المصفوفة A الموافق له هو $f(A)=A^2-3A-2I_n$

مثال :

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ عندئذ :

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{pmatrix}$$

إذا كان $f(x)=2x^2-3x+5$ فإن :

$$f(A)=2\begin{pmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -18\\ -27 & 61\end{pmatrix}$$

أما من أجل $g(x)=x^2+3x-10$ عندئذ :

$$g(A)=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن A هي صفر لكثير الحدود $g(x)$.

تمارين

1. إذا كان :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -5 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 6 & -1\\ 2 & 0 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

عندئذ احسب كلا مما يلي :

$A-B$, $A+B$, $C+D$, $C-D$

$3A$, $3A+B$, $3A+4B$

2. أوجد كلا من x , y , z , w إذا كان :

$$3\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{pmatrix}$$

3. لتكن :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 3 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

أوجد $A.B$, $B.A$.

4. إذا كانت :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

فبرهن أن $A^3=0$.

5. إذا كانت :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

فبرهن أن $A^2=A$.

6. برهن أن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ جذر لكثير الحدود :

$$f(x)=x^2-(a+d)x+(ad-bc)$$

7. هل المصفوفة التالية $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ جذر لكثير الحدود :

$$f(x)=3x^2-5x-2$$

$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^{n+1}\overset{?}{=}\begin{bmatrix}1&n+1\\0&1\end{bmatrix}$

8. برهن أن $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

9. ليكن $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$ ، أوجد المصفوفات $A.A^T$, $A^T.A$.

10. إذا كان $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ، فأوجد A^n .

$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^{n+1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&n+1\\0&1\end{bmatrix}$

فرضنا العلاقة صحيحة لـ n ونبرهن أنها صحيحة لـ n+1

$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\0&1\end{bmatrix}$

$A^{n+1}=A^n\cdot\begin{bmatrix}1&2n\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}1&2+2n\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2(n+1)\\0&1\end{bmatrix}$