الحركات الاهتزازية

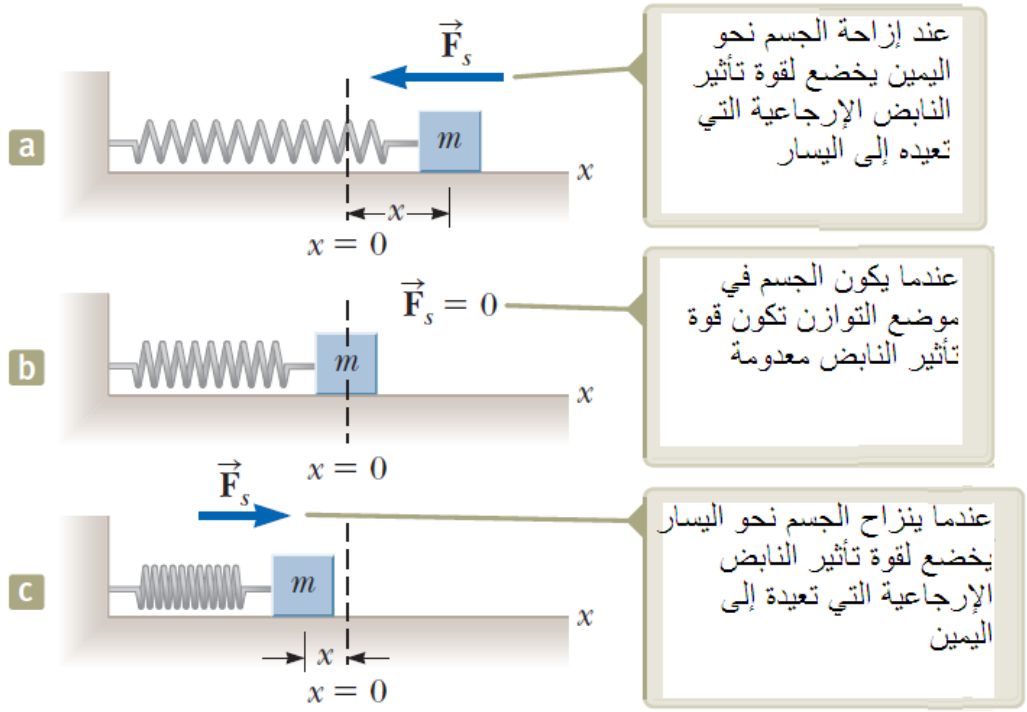
1- مقدمة:

تعريف الحركة الدورية: حركة جسم يعود إلى موضع محدد بشكل منتظم خلال فترة زمنية ثابتة.
أمثلة: حركة الكواكب حول الشمس، تتابع الفصول الأربعة، حركة مكبس السيارة، دوران الأرض حول الشمس، دوران القمر حول الأرض...
تعريف الحركة التوافقية البسيطة: هي حركة جسم يخضع لقوة تتناسب مع موضع الجسم بالنسبة لموضع توازنه وتتجه دوما باتجاه موضع التوازن.

2- حركة جسم مربوط إلى نابض:

جسم كتلته m، مربوط بنابض أفقي ثابت صلابته k، يتحرك الجسم على سطح أفقي مستوي أملس دون احتكاك.
موضع التوازن: هو موضع الجسم عندما يكون النابض غير مضغوط أو مشدود. وهو المقابل لنقطة فاصلتها $x = 0$.
يخضع الجسم لقوة إرجاع تتجه نحو مركز التوازن وتعاكس جهة الانزياح وتعطى بالعلاقة:

$$F_S = -kx$$



نطبق قانون نيوتن: محصلة القوى المؤثرة على الجسم وفق المحور الأفقي ox هي:

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow -kx = ma_x \rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

ومنه نجد أن تسارع الجسم يتناسب طرداً مع موضعه ويعاكسه بالإشارة، أي أن جهة التسارع بعكس جهة الانزياح. وهذا يؤدي إلى حركة توافقية بسيطة تجعل الجسم يهتز بين الموضعين $x = -A\ ,\ \ x = +A$

ويستمر الاهتزاز في حال غياب التخامد لأن القوة التي يؤثر بها النابض على الجسم قوة محافظة.

تعريف الهزة الواحدة: تعني أن يعود الجسم إلى موضعه الأصلي بعد مروره في موضع التوازن بسرعة عظمى.

س: إذا سحبت كتلة مرتبطة بنابض إلى الموضع $x = A$ وتركت بدون سرعة ابتدائية. فإن الكتلة سوف تقطع خلال هزة واحدة مسافة كلية قدرها:

$$\frac{A}{2}\ \ ,\ \ A\ ,\ 2A\ \ ,\ \ 4A$$

الجواب هو $2A$.

A تسمى المطال الأعظمي.

3- دراسة حركة جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة:

محور الحركة هو المحور ox.

نعرف التسارع :

$$a = \frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

نعرف $w_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -w_0^2 x$$

هذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بمتحول واحد x تقبل حلاً جيبياً sin أو cos أو تركيبهما. والحل من الشكل:

$$x(t) = A.\cos(w_0 t + \varphi)$$

حيث $A\ , w_0, \varphi$ ثوابت الحركة.

للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين ونعوض في المعادلة التفاضلية:

$$v = \frac{dx}{xt} = -w_0 A \sin(w_0 t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -w_0^2 A.\cos(w_0 t + \varphi) = -w_0^2 x$$

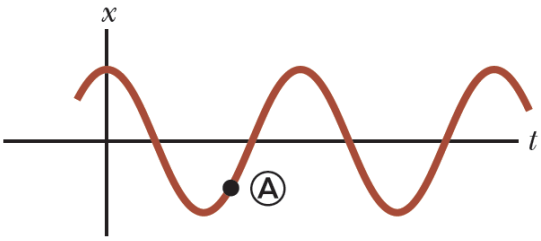
A المطال الأعظمي، w_0 التواتر الزاوي (النبض الخاص) يقدر بـ $rad.s^{-1}$، $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$، φ ثابت الطور أو الطور الابتدائي يقدر بـ (rad). يتم تحديد المطال الأعظمي وثابت الطور من الموضع والسرعة في اللحظة الابتدائية $t = 0$.

$x(t)$ الموضع اللحظي، $w_0 t + \varphi$ الطور اللحظي.

تابع الموضع اللحظي تابع دوري دوره 2π.

$$w_0 T_0 = 2\pi \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{w_0} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ \ (\sec)$$

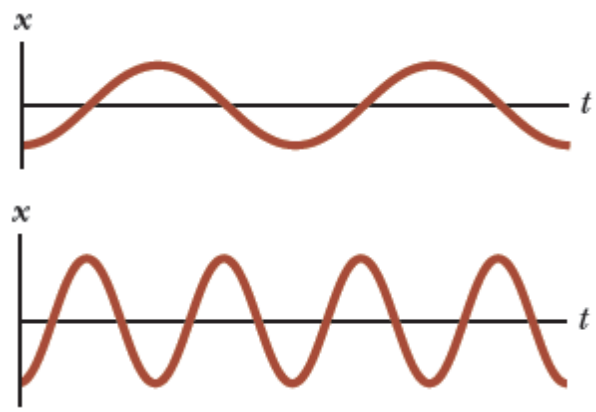
س: عندما يكون الجسم في الموضع A على منحني الحركة ماذا نقول عن الموضع والسرعة:



كلاهما موجبان	كلاهما سالبان	$x > 0\,, v = 0$
$x < 0\ , v = 0$	$x > 0\ ,\ \ v < 0$	$x < 0\ , v > 0$

الجواب: $x < 0\ , v > 0$

س: منحني يعبر عن تغير الموضع مع الزمن. الأول للجسم A والثاني للجسم B ما هو التوصيف الصحيح للحركتين:



$w_B > w_A\ ,\ \ A_B < A_A$	$w_B > w_A\ ,\ \ A_B > A_A$
$w_B < w_A\ ,\ \ A_B < A_A$	$w_B < w_A\ ,\ \ A_B > A_A$

الجواب:

$$w_B > w_A\ ,\ \ A_B > A_A$$

دور الحركة: هو المجال الزمني اللازم ليتم الجسم هزة كاملة نرمز له بـ T_0.

تردد الحركة: مقلوب الدور وهو عدد الهزات خلال واحدة الزمن f_0.

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{w_0}{2\pi}\ \ (Hz) \rightarrow w_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v = -w_0 A\sin(w_0 t + \varphi) \rightarrow -w_0 A \le v \le w_0 A$$

$$a = -w_0^2 A.\cos(w_0 t + \varphi) \rightarrow -w_0^2 A \le a \le w_0^2 A$$

$$v_{max} = w_0 A\ ,\qquad a_{max} = w_0^2 A$$

س: نواس مرن يهتز بحركة توافقية بسيطة. الكتلة m ، الدور T_0. استبدلت الكتلة بكتلة $2m$ فيصبح الدور.

$\frac{T_0}{2}$	$\frac{T_0}{\sqrt{2}}$	T_0	$\sqrt{2}T_0$	$2T_0$

الجواب: $\sqrt{2}T_0$

مسألة: جسم كتلته m مرتبط بنابض ثابت صلابته k أزيح الجسم عن موضع توازنه مسافة A ويترك بدون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$. حدد ثوابت الحركة A , w_0 , φ.

الحل: بما أن الجسم ترك في اللحظة الابتدائية بدون سرعة ابتدائية فإن المطال الأعظمي يساوي A.

$$x(o) = A.cos\varphi = A$$

$$v(0) = -w_0 A\sin(\varphi) = 0$$

$$\varphi = 0 \rightarrow x(0) = A \ \ (\cos 0 = 1)$$

$$v(0) = 0 \ \ (sin0 = 0)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = Acos(w_0 t)$$

مسألة: في اللحظة $t = 0$ يمر الجسم في موضع التوازن ويتحرك باتجاه اليمين. حدد ثوابت الحركة.

الحل:

$$t = 0 \rightarrow x(0) = 0\,, v(0) = v_i$$

$$\rightarrow x(0) = A.cos\varphi = 0 \rightarrow cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \mp\frac{\pi}{2}$$

$$v(0) = -w_0 A\sin(\varphi) = v_i A = \frac{v_i}{w_0}$$

ولكن $v_i > 0$ لأن الجسم يتحرك باتجاه اليمين أي بالاتجاه الموجب لمحور الحركة.

$$\rightarrow \sin(\varphi) \leq 0 \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow A = \frac{v_i}{w_0} \rightarrow x(t) = \frac{v_i}{w_0}\cos\left(w_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

مسألة: جسم كتلته $200g$ مرتبط بنابض خفيف مهمل الكتلة ثابت صلابته $5.00N.m^{-1}$ يهتز بدون على سطح أفقي. أزيح الجسم $5.00\ cm$ عن موضع توازنه وترك بدون سرعة ابتدائية.

1- احسب دور الحركة.
2- احسب السرعة العظمى للجسم.
3- ما هو التسارع الأعظمي للجسم؟
4- عبر عن الموضع والسرعة والتسارع كتوابع زمنية في الجملة الدولية.
5- إذا ترك الجسم من نفس الموضع الابتدائي $x_i = 5.00\ cm$ ولكن مع سرعة ابتدائية $v_i = -0.100\ m.s^{-1}$ حدد المقادير التي تتغير والمقادير التي تبقى ثابتة.

الحل:

1- حساب الدور:

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00}{200 \times 10^{-3}}} = 5.00\ rad.s^{-1} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{5.00} = 1.26\ s$$

2- حساب السرعة العظمى للجسم:

$$v_{max} = w_0 A$$

بما أن الجسم ترك في اللحظة الابتدائية بدون سرعة ابتدائية فإن $A = x_i = 5.00\ cm = 5.00 \times 10^{-2} m$

$$v_{max} = 5.00 \times 5.00 \times 10^{-2} = 0.250\ m.s^{-1}$$

3- حساب التسارع الأعظمي للجسم:

$$a_{max} = w_0^2 A = (5.00)^2 \times 5.00 \times 10^{-2} = 1.25\ m.s^{-2}$$

4- التوابع الزمنية للحركة:

إيجاد الطور الابتدائي:

$$t = 0: x = A \rightarrow x = Acos\varphi = A \rightarrow cos\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0$$

$$x(t) = Acos(w_0 t) = 5.00 \times 10^{-2}\cos(5.00t)$$

$$v = -w_0 A\sin(w_0 t + \varphi) = -0.250\sin(5.00t)$$

$$a = -w_0^2 A.\cos(w_0 t + \varphi) = -1.25\cos(5.00t)$$

5- في اللحظة $t = 0$ ترك الجسم من الموضع $x_i = 5.00\ cm$ بسرعة $v_i = -0.100\ m.s^{-1}$

النبض الخاص والدور الخاص لا يتغيران $w_0 = 5.00\ rad.s^{-1}, T_0 = 1.26\ s$

$$t = 0: x(0) = A.cos\varphi = x_i\ , v(0) = -w_0 A\sin(\varphi) = v_i$$

$$\frac{v_i}{x_i} = \frac{-w_0 A\sin(\varphi)}{A.cos\varphi} = -w_0 tan\varphi \rightarrow tan\varphi = -\frac{v_i}{x_i w_0}$$

$$tan\varphi = -\frac{-0.100}{5.00 \times 10^{-2} \times 5.00} = 0.400$$

$$\varphi = tan^{-1}(0.400) = 0.381\ rad = 0.121\pi\ rad$$

$$A = \frac{x_i}{cos\varphi} = \frac{5.00 \times 10^{-2}}{\cos(0.381)} = 5.39 \times 10^{-2}\ m$$

$$v_{max} = w_0 A \rightarrow v_{max} = 5.00 \times 5.39 \times 10^{-2} = 2.70 \times 10^{-1}\ m.s^{-1}$$

$$a_{max} = w_0^2 A = (5.00)^2 \times 5.39 \times 10^{-2} = 1.35\ m.s^{-2}$$

$$x(t) = Acos(w_0 t) = 5.39 \times 10^{-2}\cos(5.00t + 0.121\pi)$$

$$v = -w_0 A\sin(w_0 t + \varphi) = -2.70 \times 10^{-1}\sin(5.00t + 0.121\pi)$$

$$a = -w_0^2 A.\cos(w_0 t + \varphi) = -1.35\cos(5.00t + 0.121\pi)$$

4- الطاقة الميكانيكية لمهتز توافقي:

بما أن الجملة معزولة فإن الطاقة الميكانيكية للجملة ثابتة.

الطاقة الحركية للجملة تساوي الطاقة الحركية للكتلة لأن النابض مهمل الكتلة.

الطاقة الحركية للمهتز التوافقي هي:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{w_0}^2 A^2\sin^2(w_0 t + \varphi)$$

أما الطاقة الكامنة المرونية المخزنة في النابض عند المطال x تعطى بالعلاقة:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(w_0 t + \varphi)$$

نلاحظ أن الطاقة الحركية والطاقة الكامنة موجبتان. $E_k \geq 0\ , E_p \geq 0$

الطاقة الميكانيكية للجملة هي:

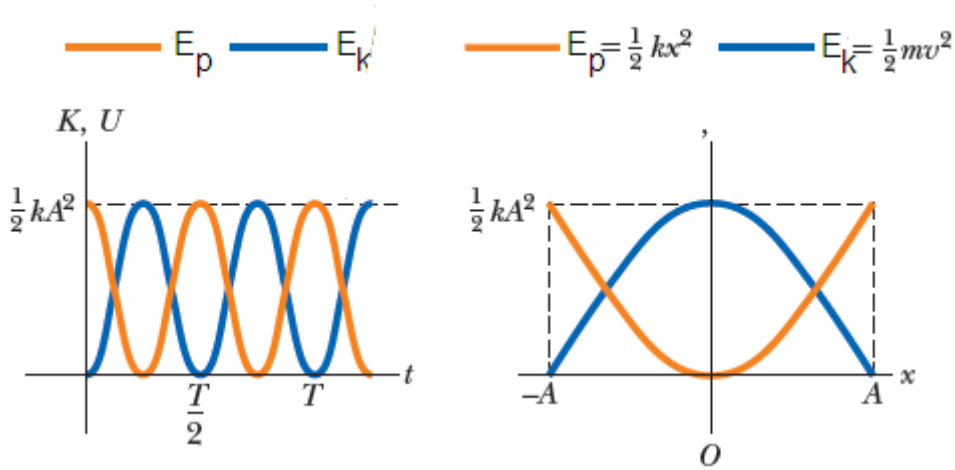
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

ونظراً لإهمال قوى الاحتكاك تكون الطاقة الميكانيكية مصونة:

$$w_0{}^2 = \frac{k}{m} \rightarrow E = \frac{1}{2} m w_0{}^2 A^2 \sin^2(w_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(w_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} m w_0{}^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

فالطاقة الميكانيكية للمهتز التوافقي ثابتة ومتناسبة طرداً مع مربع النبض $w_0{}^2$ وطرداً مع مربع السعة العظمى A^2.



$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \rightarrow m v^2 + k x^2 = k A^2$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \rightarrow v^2 = w_0{}^2 (A^2 - x^2) \rightarrow v = \pm w_0 \sqrt{A^2 - x^2}$$

مسألة: عربة كتلتها $0.500\ kg$ مرتبطة بنابض مهمل الكتلة ثابت صلابته $20.0\ N.m^{-1}$ تهتز أفقياً دون احتكاك.

1- احسب السرعة العظمى للعربة إذا كان مطال الحركة $3.00\ cm$.
2- ما هي سرعة العربة في الموضع $2.00\ cm$.
3- احسب الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للجسم في الموضع $2.00\ cm$.
4- إذا تركت العربة من الموضع $x = 3.00\ cm$ بسرعة ابتدائية $v = -0.100\ m.s^{-1}$ احسب المطال والسرعة العظمى للعربة.

الحل:

-1 $$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A = \sqrt{\frac{20.0}{0.500}} \times 3.00 \times 10^{-2} = 0.190\ m.s^{-1}$$

-2 $$v = \pm w_0 \sqrt{A^2 - x^2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \sqrt{\frac{20.0}{0.500}[(3.00 \times 10^{-2})^2 - (2.00 \times 10^{-2})^2]} = \pm 0.141\ m.s^{-1}$$

-3 $$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 0.500 \times (0.141)^2 = 5.00 \times 10^{-3}\ J$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \times 20.0 \times (2.00 \times 10^{-2})^2 = 4.00 \times 10^{-3}\ J$$

-4 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 0.500 \times (-0.100)^2 + \frac{1}{2} \times 20.0 \times (3.00 \times 10^{-2})^2 = 1.15 \times 10^{-2}\ J$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.15 \times 10^{-2}}{20.0}} = 3.39 \times 10^{-2}\ m$$

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.15 \times 10^{-2}}{0.500}} = 0.214\ m.s^{-1}$$

نلاحظ أن المطال والسرعة العظمى أكبر من القيم السابقة لأن العربة زودت بسرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$.

نهاية المحاضرة الثانية