

Numerične metode 2022/23: 1.domača naloga

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-dn1.zip` in jih oddajte preko učilnice najkasneje dan pred kvizom.

1. Iteracijske metode.

- (a) V Matlabu implementirajte Halleyevo in sekantno metodo. Slednja metoda je podobna tangentni, le da namesto tangente uporabi sekanto. Metoda tako ne uporablja odvoda funkcije, zato je lahko dober nadomestek za tangentno metodo v primerih, ko odvoda funkcije ne poznamo. Moramo pa v primeru sekantne metode poznati dva začetna približka.

S pomočjo implementiranih metod poiščite ničlo funkcije

$$f(x) = x \cdot e^x + \frac{1}{2e}$$

na intervalu $[-3, -1]$. Vzemite toleranco 10^{-10} in število korakov $N = 10$. Pri Halleyevi metodi vzemite začetni približek $x_0 = -1.1$, pri sekantni pa $x_0 = -\frac{1}{4}$ in $x_1 = -3$. Katera metoda izvede več korakov?

S pomočjo ukaza `fzero` poiščite točno ničlo funkcije f v okolici -2 . Pri obeh metodah izpišite vse izračunane približke (vključno z x_0 oz. x_0 in x_1) in si oglejte, za koliko se vsak izračunani približek razlikuje od točne vrednosti ničle.

- (b) Poskrbite, da imate implementirane metode, ki smo jih delali na vajah: bisekcija, regula falsi, navadna iteracija in tangentna metoda.

2. Norme in LU razcep.

(a) LU razcep.

Naj bo matrika $A_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ podana z naslednjimi predpisi:

$$a_{nn} = 1,$$

$$a_{nj} = 3 \sin(a_{n,j+1}), \quad j = n-1, \dots, 1,$$

$$a_{in} = (-1)^{i+1} a_{i+1,n}, \quad i = n-1, \dots, 1,$$

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1}}{4}, \quad i, j = n-1, \dots, 1.$$

Naj bo $n = 7$.

- Poiščite največji in najmanjši element matrike A_7 .
- Izračunajte $\|A_7\|_1$, $\|A_7\|_\infty$ in $\|A_7\|_F$.
- Implementirajte LU razcep brez pivotiranja in ga preizkusite na matriki A_7 . Koliko je $\det(U - L)$?
- LU razcep matrike M z delnim pivotiranjem lahko v Matlabu dobite z ukazom `[L,U,P] = lu(M)`, kjer je P ustrezna permutacijska matrika, tako da velja $PM = LU$. Izračunajte še LU razcep matrike A_7 z delnim pivotiranjem. Koliko je v tem primeru $\det(U - L)$?

(b) LU razcep za tridiagonalno matriko.

Implementirajte Thomasov algoritem za LU razcep tridiagonalne matrike. Naj bo

$$A_i = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a_i & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo Thomasovega algoritma izračunajte razcep za matrike A_i , $i = 1, 2, 3$, kjer je $a_1 = -2$, $a_2 = -3$ in $a_3 = -4$. Naj bodo l_i in u_i , $i = 1, 2, 3$, vektorji, ki jih vrne Thomasov algoritem. Poiščite

$$\max_{i=1,2,3} \|u_i\|_1 \quad \text{in} \quad \min_{i=1,2,3} \|l_i\|_2.$$