Vaje 8.12.2022:
Broydenova metoda, metoda najhitrejšega spusta, normalni sistem

1. Pri Broydenovi metodi za matriko B_{r+1} vzamemo matriko, ki je v drugi oz. spektralni normi najbližja B_r in zadošča t.i. sekantnemu pogoju

$$B_{r+1}(\mathbf{x}^{(r+1)} - \mathbf{x}^{(r)}) = F(\mathbf{x}^{(r+1)}) - F(\mathbf{x}^{(r)}).$$

   Pokažite, da je B_{r+1}, ki zadošča zgornjima pogojema, enaka

$$B_{r+1} = B_r + \frac{F(\mathbf{x}^{(r+1)})\Delta\mathbf{x}^{(r)^T}}{\Delta\mathbf{x}^{(r)^T}\Delta\mathbf{x}^{(r)}}.$$

2. Naredite dva koraka metode najhitrejšega spusta za funkcijo

$$F(x, y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2$$

   z začetnim približkom $x^{(0)} = (2, 3)$.

3. S pomočjo normalnega sistema poiščite $x \in \mathbb{R}^2$, ki minimizira

$$||Ax - b||_2,$$

   kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

   Naj bo π ravnina, ki jo razpenjata stolpca matrike A. Prepričajte se, da velja $Ax = proj_\pi b$.

Matlab:
Navadna iteracija, Broydenova metoda

Dan je sistem enačb

$$
\begin{aligned}
x^5 + y^5 - 5xy &= 1, \\
x^2 + ye^{y^2} &= 1.
\end{aligned}
$$

Sistem tokrat rešujemo z navadno iteracijo in Broydenovo metodo. Vzamemo začetni približek $\mathbf{x}^{(0)} = [0.5, -0.5]^T$, število korakov $N = 100$ in toleranco 10^{-5}. Vsako izmed metod izvajamo, dokler ne presežemo števila korakov N, oz. dokler je druga norma razlike dveh zaporednih približkov večja od tolerance. Pri implementaciji metod si lahko pomagate s priloženimi Matlab predlogami.

1. **Navadna iteracija.**
   Implementirajte navadno iteracijo za reševanje sistema nelinearnih enačb in jo preizkusite na danem sistemu enačb. Za iteracijsko funkcijo vzemite desno stran preoblikovangea sistema:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[5]{1 + 5xy - y^5}, \\
y &= \frac{1 - x^2}{e^{y^2}}.
\end{aligned}
$$

   Opomba: v zgornjem sistemu nastopa peti koren, ki ga v matlabu lahko zapišete s pomočjo ukaza `nthroot`.

2. **Broydenova metoda.**
   Implementirajte Broydenovo metodo za reševanje sistema nelinearnih enačb in jo preizkusite na danem sistemu enačb. Za začetni približek matrike B_0 vzemite $J_F(\mathbf{x}^{(0)})$, nato pa matriko B_r v vsakem koraku popravite po pravilu

$$
B_{r+1} = B_r + \frac{F(\mathbf{x}^{(r+1)})\Delta\mathbf{x}^{(r)T}}{\Delta\mathbf{x}^{(r)T}\Delta\mathbf{x}^{(r)}}.
$$

Primerjajte število korakov posameznih metod, vse izračunane približke in napake dobljenih približkov (odstop od dovolj točne rešitve, ki jo dobite z ukazom `fsolve`).