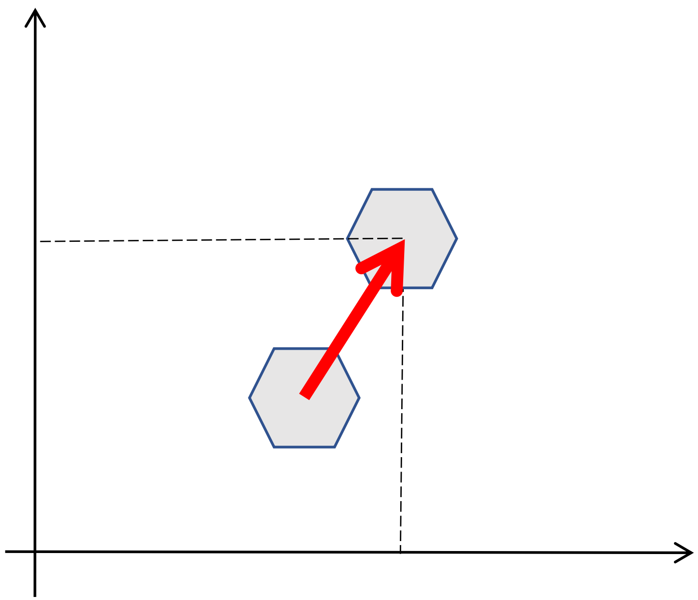
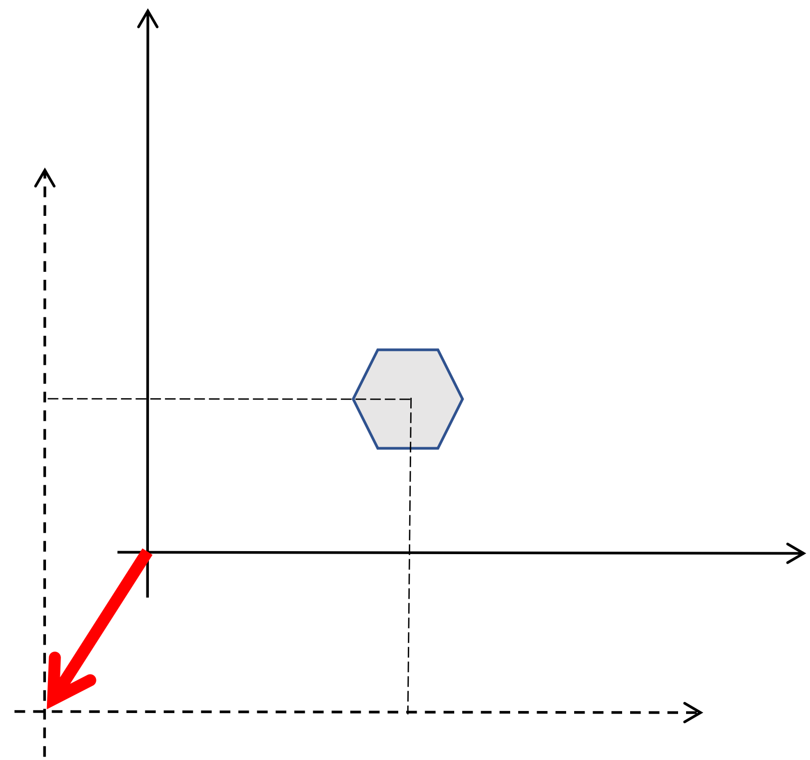
Geometrijske transformacije u 2D i njihove matrične reprezentacije

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometrijske transformacije vs. Transformacije koordinata





Geometrijska transformacija je transformacija objekta!

Trigonometrijske funkcije zbroja dvaju kuteva

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$ Eulerova formula

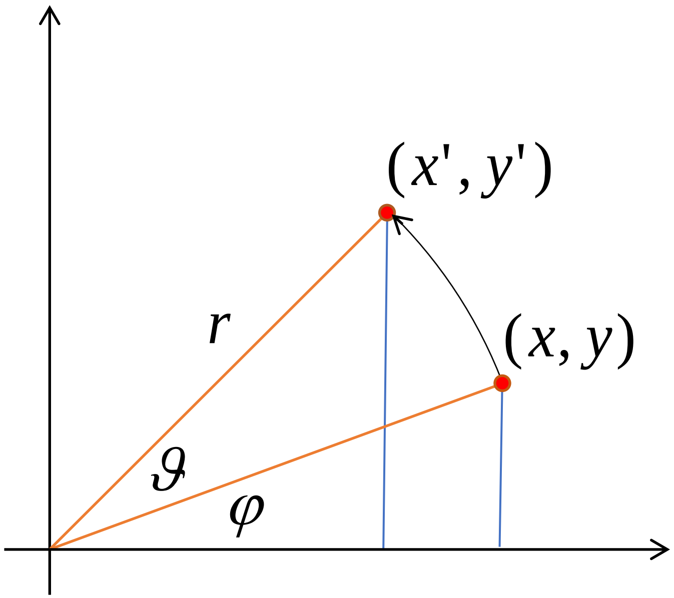
$$e^{i(\varphi+\vartheta)} = \underline{\cos(\varphi+\vartheta)} + i\,\underline{\sin(\varphi+\vartheta)}$$

$$e^{i(\varphi+\vartheta)} = e^{i\varphi+i\vartheta} = e^{i\varphi}e^{i\vartheta} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) =$$
$$= (\underline{\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta}) + i(\underline{\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta})$$

$\Rightarrow$ $\cos(\varphi+\vartheta) = \cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta$

$\Rightarrow$ $\sin(\varphi+\vartheta) = \cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta$

Rotacija oko ishodišta za kut ϑ



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

pozicija točke prije rotacije

$$x' = r\cos(\varphi + \vartheta)$$
$$y' = r\sin(\varphi + \vartheta)$$

pozicija točke nakon rotacije

$$x' = \underbrace{r\cos\varphi}_{x}\cos\vartheta - \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta$$

$$y' = \underbrace{r\cos\varphi}_{x}\sin\vartheta + \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$

Matrični zapis transformacije

Koordinate (x, y) možemo interpretirati i kao vektor – u matematici je uobičajeni prikaz

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \vec{r}\,' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

pa se veza između početnih i transformiranih koordinata može izraziti u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

to jest $\vec{r}\,' = R(\vartheta)\vec{r}$ pri čemu je

$$R(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

matrica rotacije oko ishodišta za kut ϑ.

Da li matrice rotacije doista imaju sva svojstva kao i prave rotacije u ravnini?

- **Neutralni element:** rotacija za 0°(=0 radijana) ostavlja koordinate točke nepromjenjenima, mora vrijediti

  $R(0) = I$ (jedinična matrica)

- **Kompozicija rotacija:** Dvije uzastopne rotacije, najprije za kut φ pa za kut ϑ, ekvivalentne su jednoj rotaciji za ukupni kut $\varphi + \vartheta$, dakle mora vrijediti

  $$R(\vartheta)R(\varphi)=R(\varphi + \vartheta)$$

- **Inverzna transformacija:** ako rotiramo za neki kut ϑ, rotacijom za $-\vartheta$ moramo se vratiti na početno stanje, dakle mora vrijediti

  $$R(-\vartheta)R(\vartheta) = I$$

PROVJERA

- **Neutralni element:**

$$R(0)=\begin{bmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

- **Kompozicija rotacija:**

$$R(\vartheta)R(\phi)=\begin{bmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\vartheta\cos\phi-\sin\vartheta\sin\phi & -\cos\vartheta\sin\phi-\sin\vartheta\cos\phi\\ \cos\vartheta\sin\phi+\sin\vartheta\cos\phi & \cos\vartheta\cos\phi-\sin\vartheta\sin\phi\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\phi+\vartheta) & -\sin(\phi+\vartheta)\\ \sin(\phi+\vartheta) & \cos(\phi+\vartheta)\end{bmatrix}=R(\phi+\vartheta)$$

PROVJERA

- **Inverzna transformacija:**

$$R(-\vartheta)R(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos(-\vartheta) & -\sin(-\vartheta) \\ \sin(-\vartheta) & \cos(-\vartheta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta & -\cos\vartheta\sin\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta \\ -\cos\vartheta\sin\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta & \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Kako općenito vrijedi $A^{-1}A = I$ očito je da je $R(-\vartheta)$ zapravo inverzna matrica od $R(\vartheta)$ to jest $R^{-1}(\vartheta) = R(-\vartheta)$.

Također, inverznu matricu $R^{-1}(\vartheta)$ možemo dobiti transponiranjem originalne matrice $R(\vartheta)$ pa vrijedi $R^{-1}(\vartheta) = R^T(\vartheta)$

Matrice rotacije su takozvane ortogonalne matrice (ako stupce interpretiramo kao vektore oni čine ortonormiranu bazu).

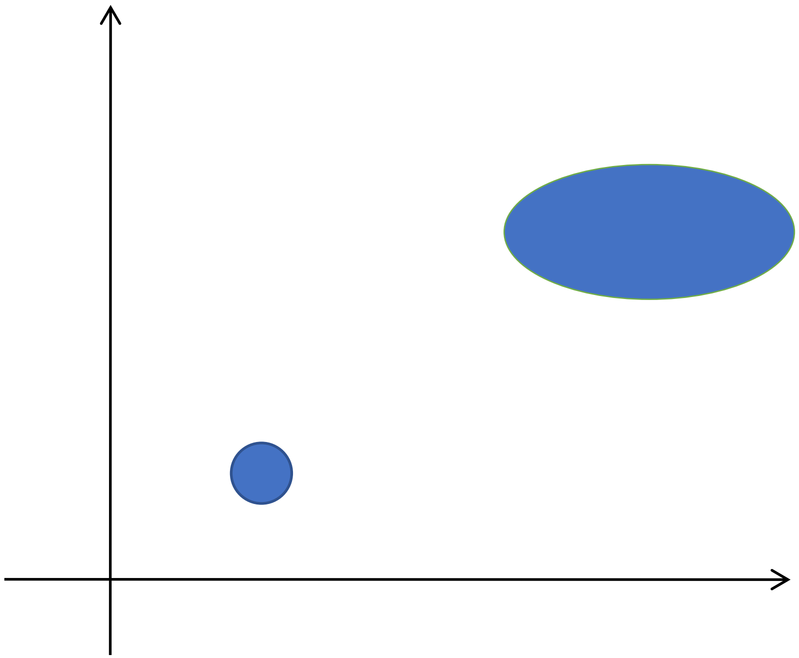
Zaključak

- matrice rotacije $\mathrm{R}(\vartheta)$ su vjerna reprezentacija rotacija u ravnini
- matematički to znači da postoji izomorfizam između grupe rotacija u ravnini na kojoj je definirana binarna operacija kompozicije i grupe matrica $\mathrm{R}(\vartheta)$ na kojoj je definirana uobičajena operacija množenja matrica
- svakoj geometrijskoj rotaciji može se jednoznačno pridružiti odgovarajuća matrica rotacije, a operacija kompozicije geometrijskih rotacija odgovara operaciji množenja matrica rotacija

Matrična reprezentacija Skaliranja

- x koordinata množi se s faktorom s_x
- y koordinata množi se s faktorom s_y

$$x' = s_x\, x$$
$$y' = s_y\, y$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

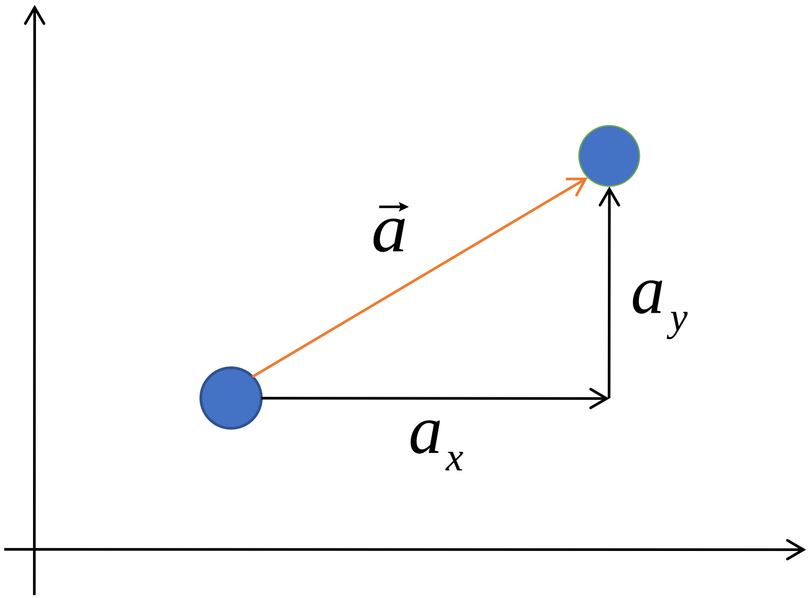
$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

Problem je translacija...

- pomak za a_x smjeru x i za a_y u smjeru y

$$x' = x + a_x$$
$$y' = y + a_y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Translaciju nije moguće prikazati pomoću 2x2 matrica!

Rješenje je u homogenim koordinatama

Koristimo 3 komponente za prikaz točke (x, y):

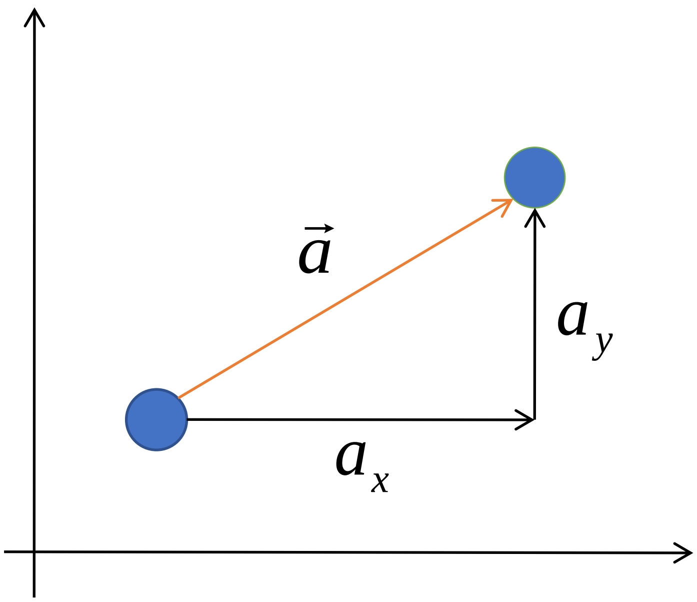
$$\vec{r} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{r}\,' \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

U tom slučaju postoji matrična reprezentacija translacije:

$$T(a_x, a_y)\,\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a_x \\ y + a_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{r}\,'$$

Matrica translacije

- pomak za a_x smjeru x i za a_y u smjeru y



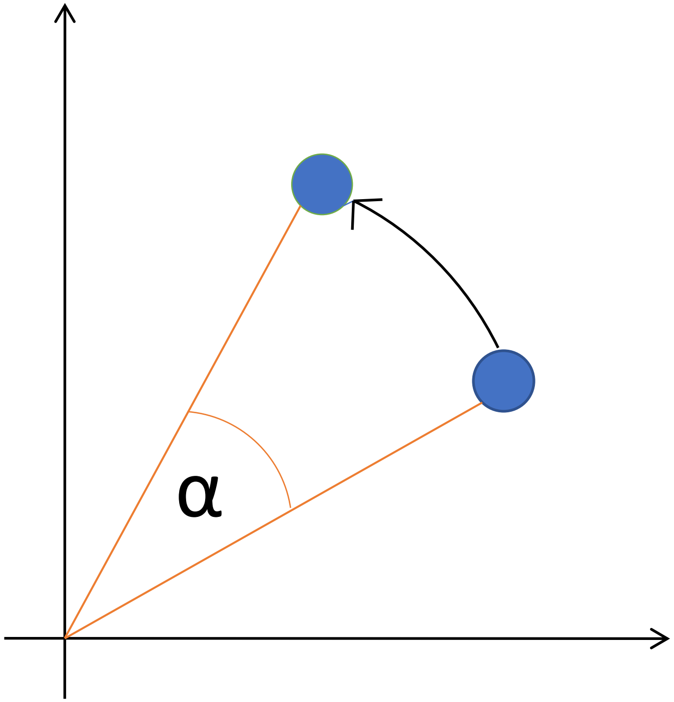
$$x' = x + a_x$$

$$y' = y + a_y$$

$$T(a_x, a_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija oko ishodišta

- rotacija za kut α
- pozitivan smjer je suprotan smjeru kazaljke na satu!



$$x' = x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha)$$

$$y' = x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha)$$

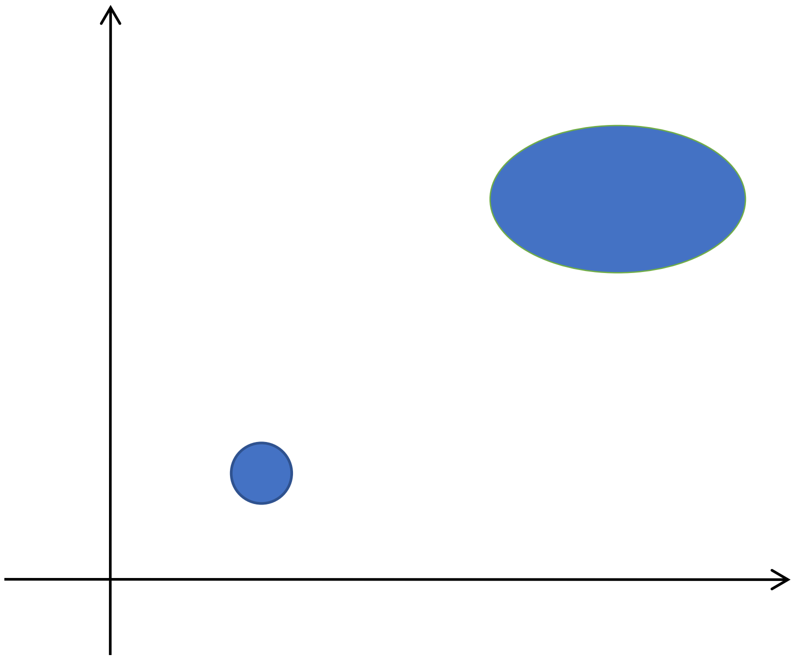
$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrica Skaliranja

- x koordinata množi se s faktorom s_x
- y koordinata množi se s faktorom s_y

$$x' = s_x\, x$$

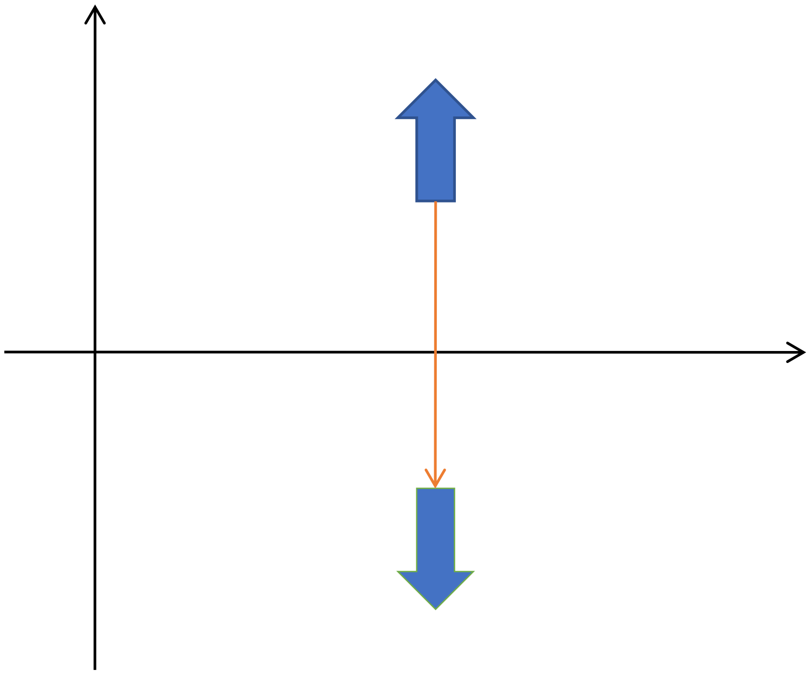
$$y' = s_y\, y$$



$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zrcaljenje na osi x

- mijenja se predznak y koordinate!
- specijalni slučaj skaliranja, kad je $s_x = 1$, a $s_y = -1$



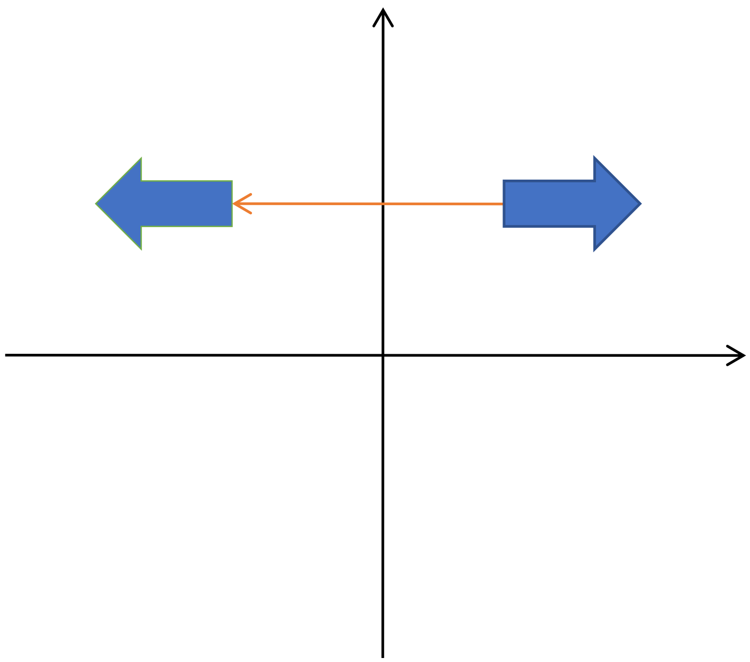
$$x' = x$$

$$y' = -y$$

$$Z_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zrcaljenje na osi y

- mijenja se predznak x koordinate
- specijalni slučaj skaliranja, kad je $s_x = -1$, a $s_y = 1$



$$x' = -x$$

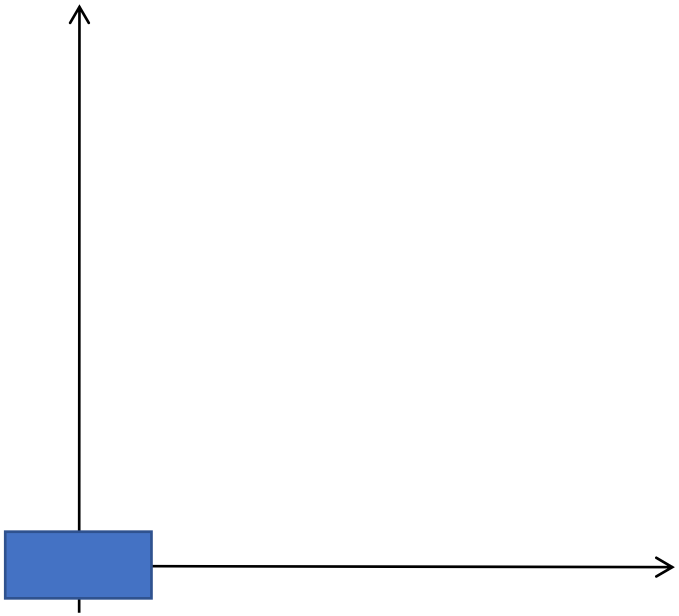
$$y' = y$$

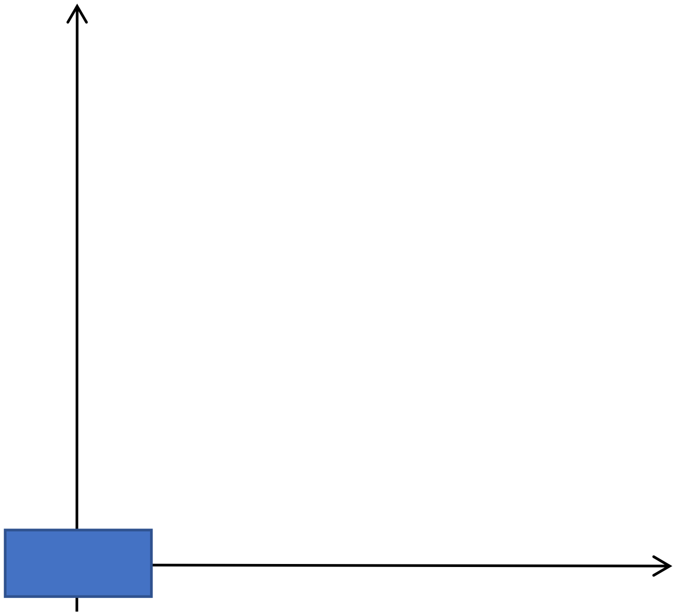
$$Z_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kompozicija transformacija

- kompozicija geometrijskih transformacija svodi se na jednostavno množenje matrica transformacija
- OPREZ: općenito, geometrijske tranformacije (kao ni matrice) NE KOMUTIRAJU – važan je poredak transformacija!
- kod matrica treba imati na umu da najprije djeluje ona matrica koja se nalazi krajnje desno, a potom svaka sljedeća s desna na lijevo!

Transformacije ne komutiraju!

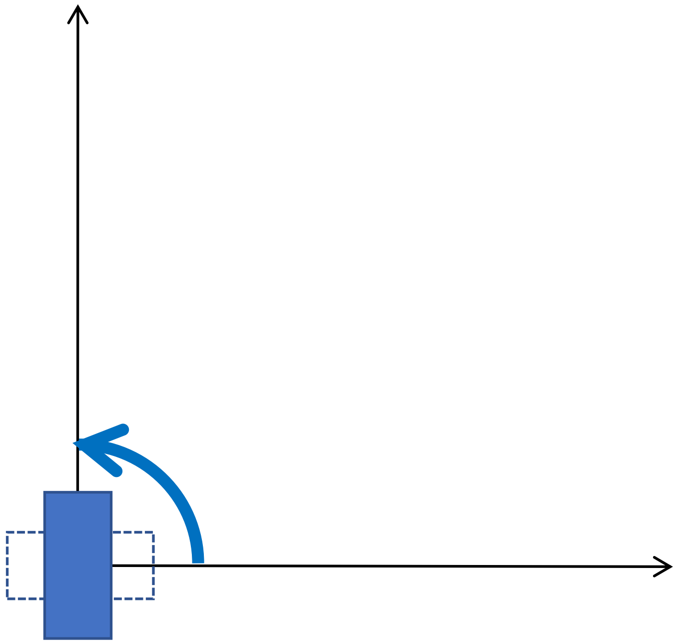


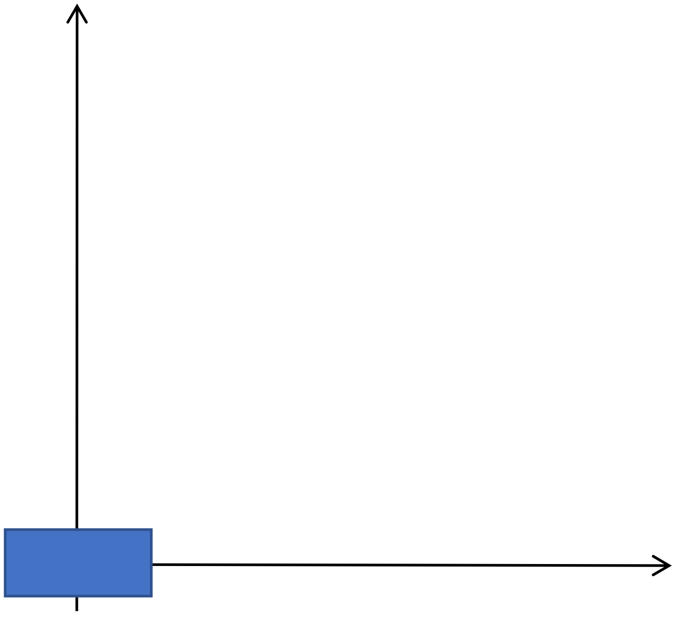


$$\vec{r}\,' = T(4,0)\,R(90°)\,\vec{r}$$

$$\vec{r}\,' = R(90°)\,T(4,0)\,\vec{r}$$

Transformacije ne komutiraju!

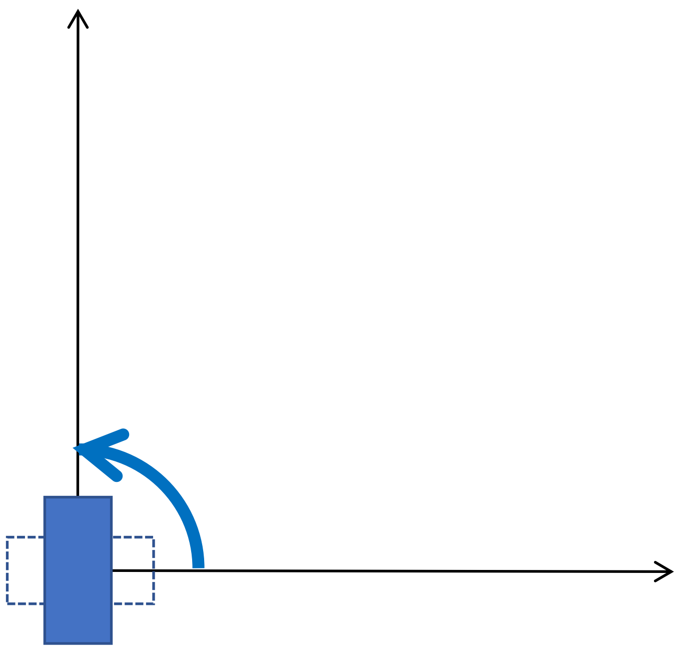


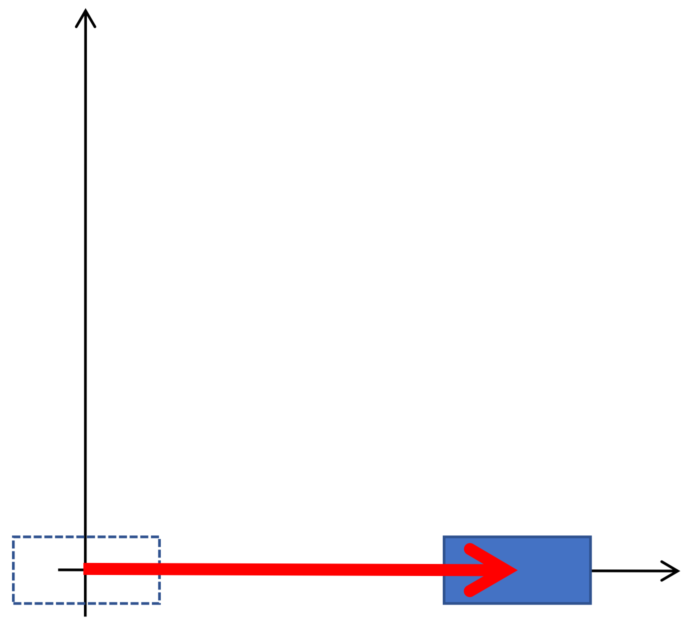


$$\vec{r}\,' = T(4,0)\,R(90^\circ)\,\vec{r}$$

$$\vec{r}\,' = R(90^\circ)\,T(4,0)\,\vec{r}$$

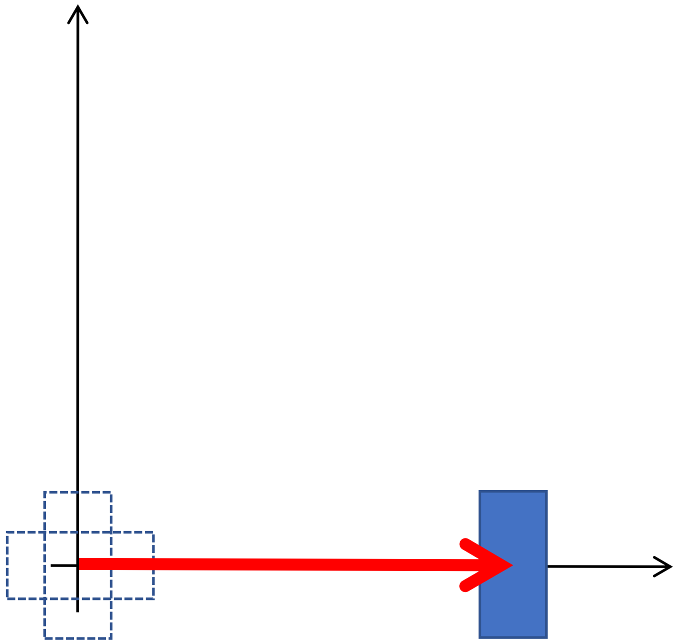
Transformacije ne komutiraju!

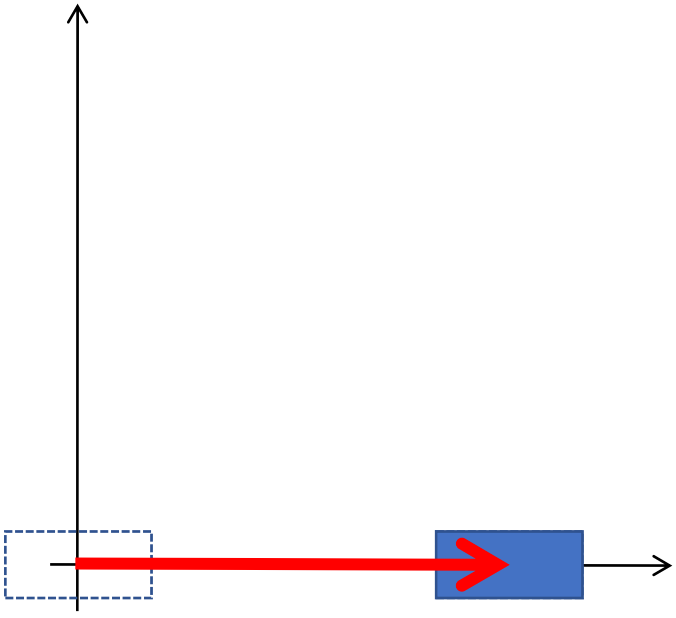




$$\vec{r}\,' = T(4,0)\,R(90^\circ)\,\vec{r} \qquad \vec{r}\,' = R(90^\circ)\,T(4,0)\,\vec{r}$$

Transformacije ne komutiraju!

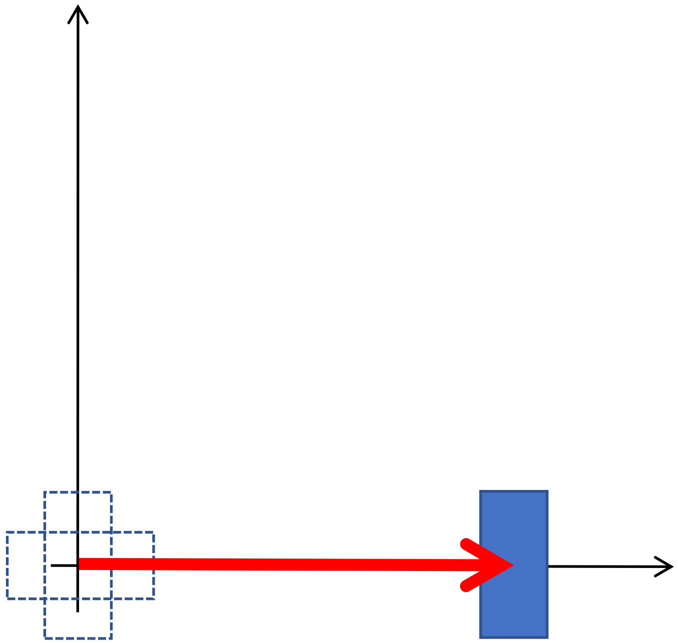




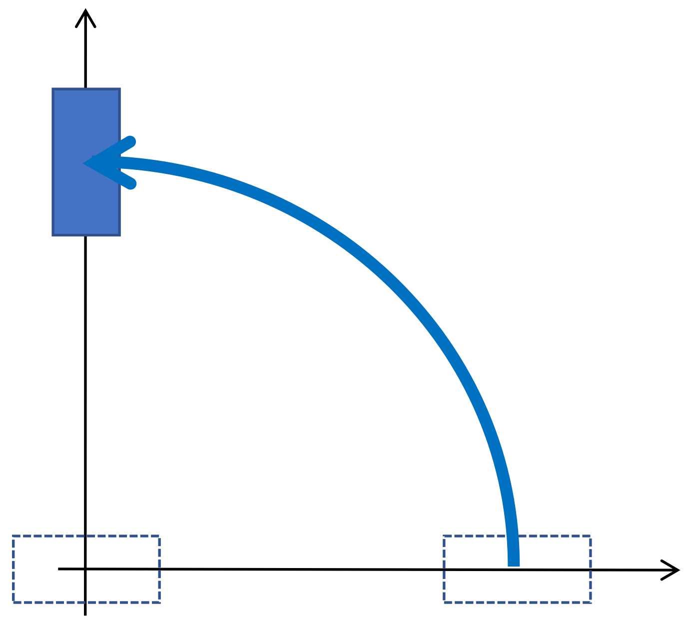
$$\vec{r}\,' = T(4,0)\,R(90^\circ)\,\vec{r}$$

$$\vec{r}\,' = R(90^\circ)\,T(4,0)\,\vec{r}$$

Transformacije ne komutiraju!

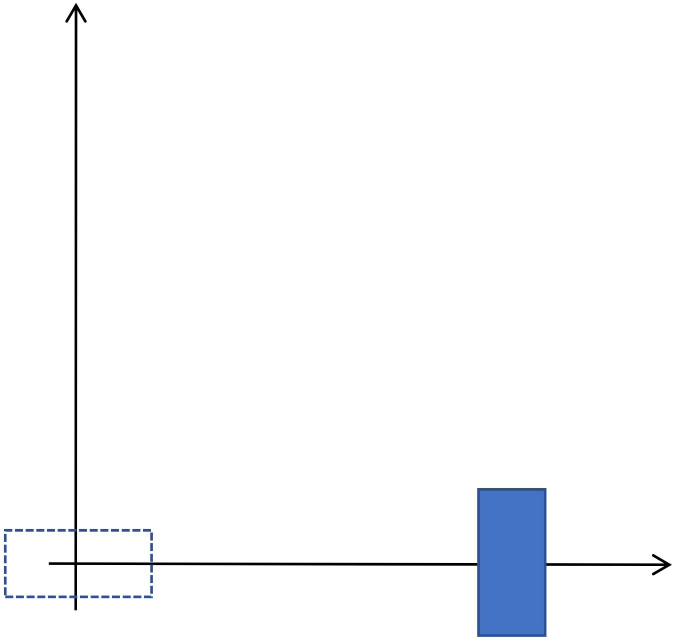


$$\vec{r}\,' = T(4,0)\,R(90°)\,\vec{r}$$

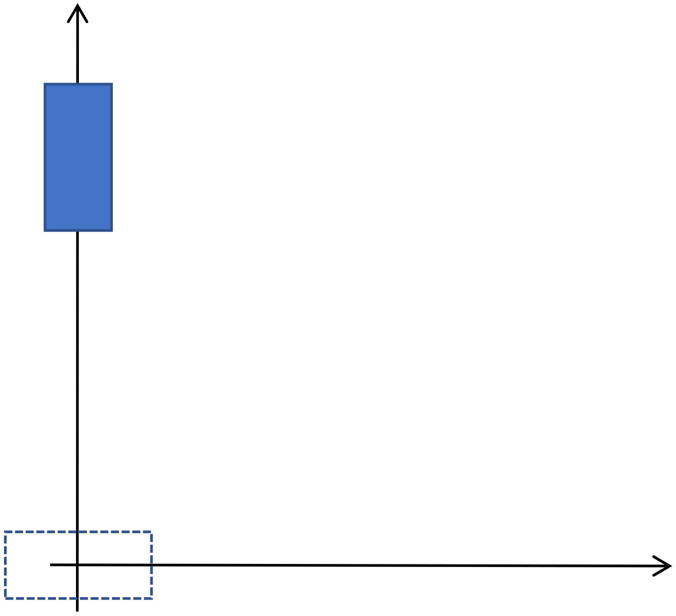


$$\vec{r}\,' = R(90°)\,T(4,0)\,\vec{r}$$

Transformacije ne komutiraju!



$$\vec{r}\,' = T(4,0)\,R(90°)\,\vec{r}$$



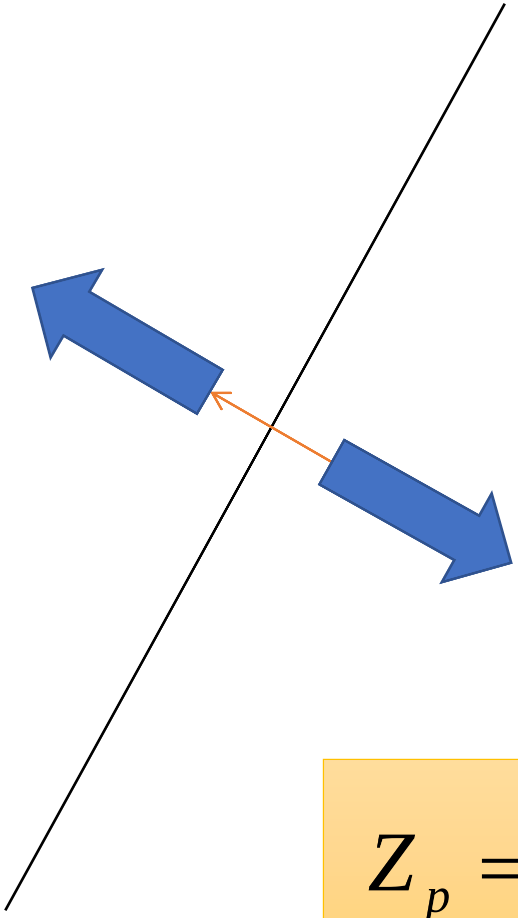
$$\vec{r}\,' = R(90°)\,T(4,0)\,\vec{r}$$

Rotacija oko proizvoljne točke

- ako je središte rotacije proizvoljna točka (u, v):
  - najprije je moramo preslikati u ishodište translacijom za (-u, -v)
  - potom primijeniti matricu rotacije za željeni kut
  - te vratiti na početnu poziciju translacijom za (u, v)

$$R_{(u,v)}(\vartheta) = T(u,v)\,R(\vartheta)\,T(-u,-v)$$

Zrcaljenje na pravcu



- pravac: $y = kx + l$

$$k = \tan(\alpha) \;\Rightarrow\; \alpha = \arctan(k)$$

$$Z_p = T(0, l)\, R(\alpha)\, Z_x\, R(-\alpha)\, T(0, -l)$$