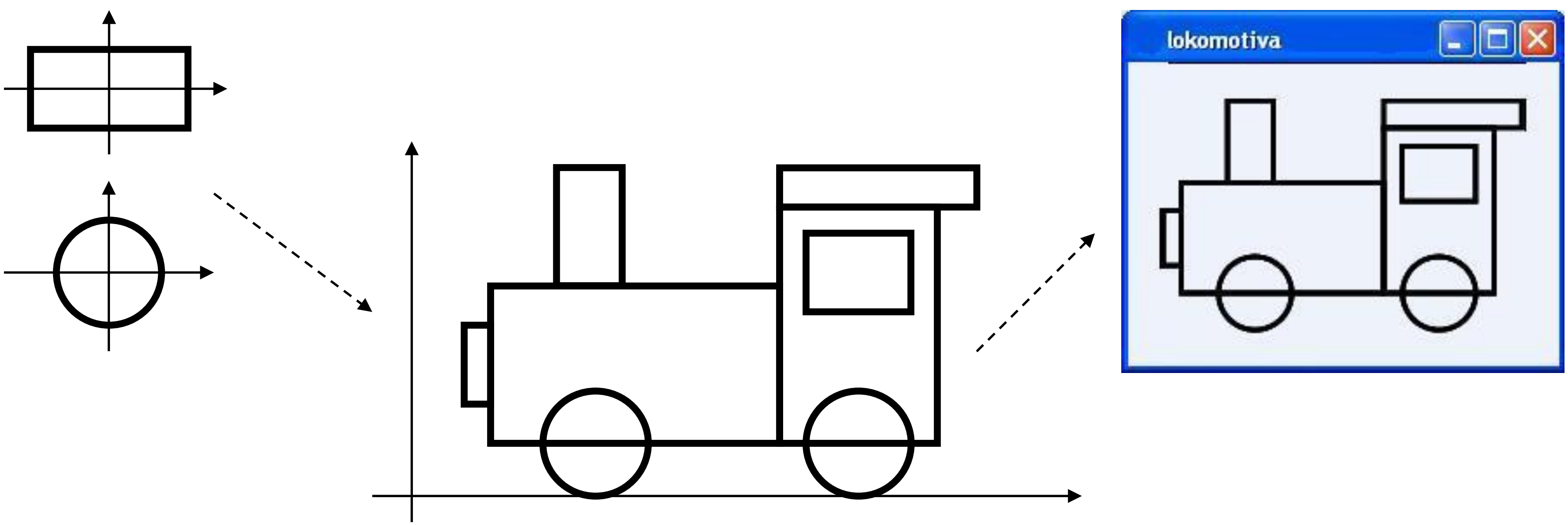
Koordinatni sustavi i transformacije u 3D grafici

Koordinatni sustavi i transformacije u 2D grafici

Lokalne koordinate

Zaslonske koordinate

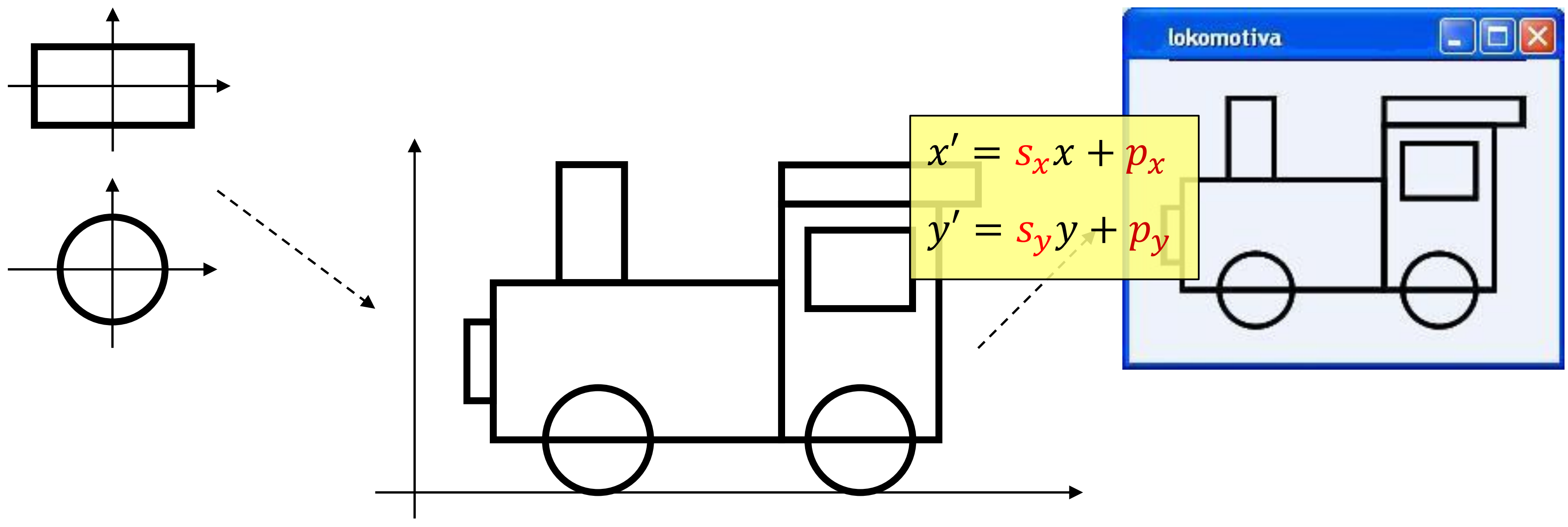


Globalne koordinate

Koordinatni sustavi i transformacije u 2D grafici

Lokalne koordinate

Zaslonske koordinate

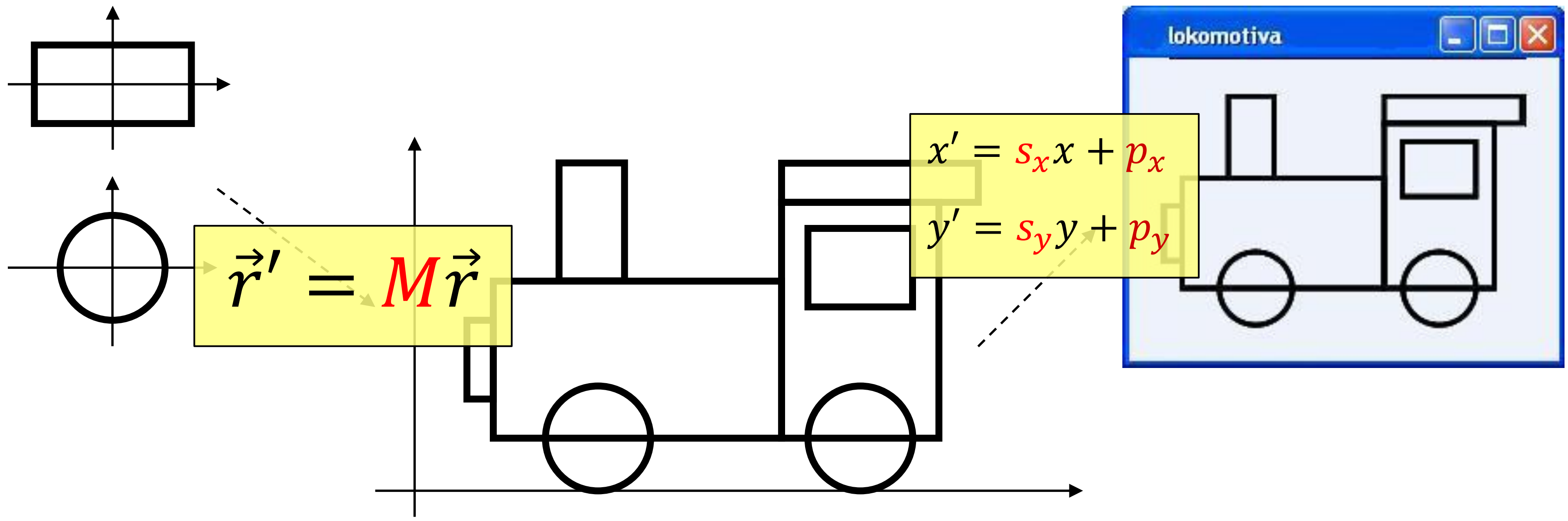


Globalne koordinate

Koordinatni sustavi i transformacije u 2D grafici

Lokalne koordinate

Zaslonske koordinate

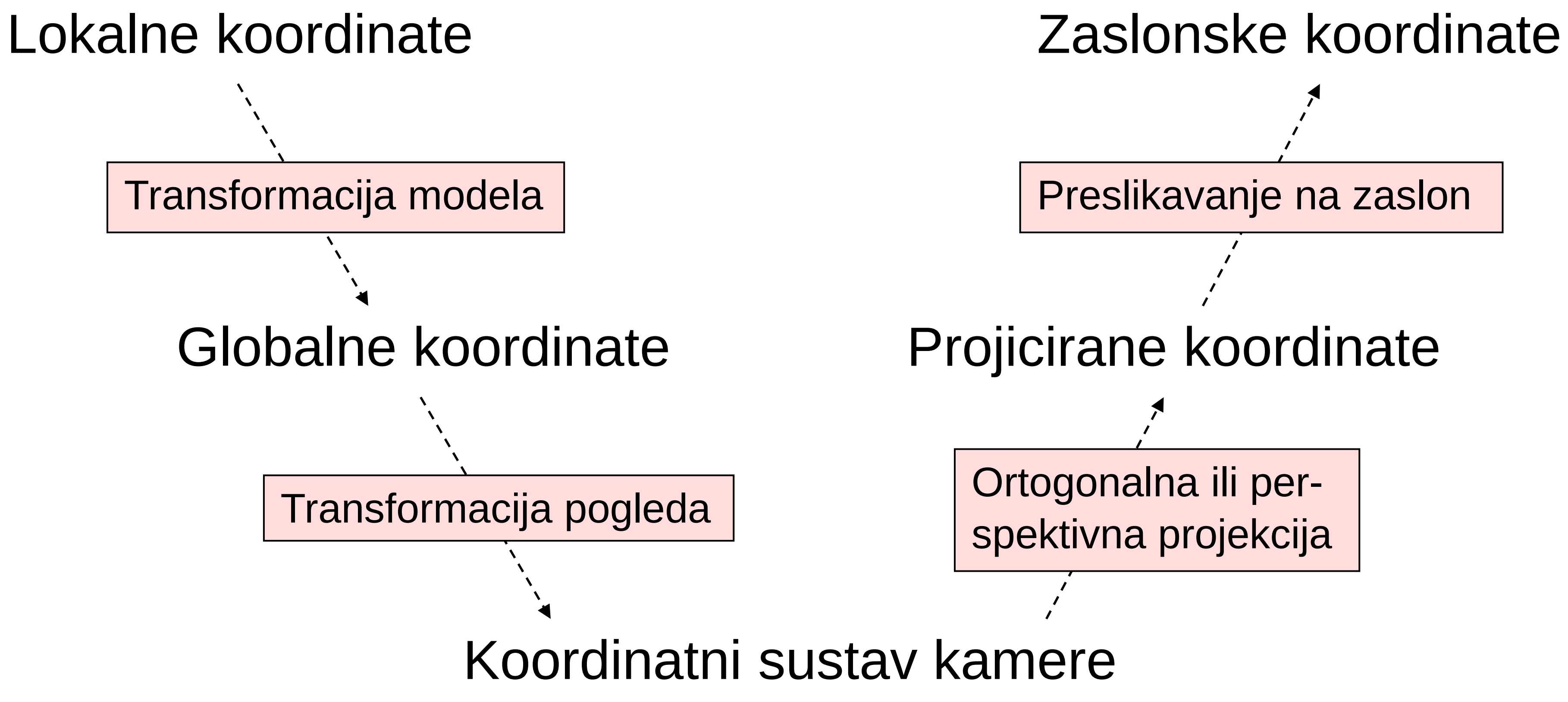


Globalne koordinate

Koordinatni sustavi i transformacije u 3D grafici

?

Koordinatni sustavi i transformacije u 3D grafici



Koordinatni sustavi i transformacije u 3D grafici

Lokalne koordinate

Transformacija modela

Globalne koordinate

Transformacija pogleda

Koordinatni sustav kamere

Ortogonalna ili perspektivna projekcija

Projicirane koordinate

Preslikavanje na zaslon

$$x' = s_x x + p_x$$

$$y' = s_y y + p_y$$

Zaslonske koordinate

Koordinatni sustavi i transformacije u 3D grafici

Lokalne koordinate

Transformacija modela

$$\vec{r}' = M\vec{r}$$

Globalne koordinate

Transformacija pogleda

Koordinatni sustav kamere

Ortogonalna ili perspektivna projekcija

Projicirane koordinate

Preslikavanje na zaslon

$$x' = s_x x + p_x$$
$$y' = s_y y + p_y$$

Zaslonske koordinate

Koordinatni sustavi i transformacije u 3D grafici

Lokalne koordinate

Transformacija modela

$$\vec{r}' = M\vec{r}$$

Globalne koordinate

Transformacija pogleda

Koordinatni sustav kamere

Ortogonalna ili perspektivna projekcija

Projicirane koordinate

Preslikavanje na zaslon

$$x' = s_x x + p_x$$
$$y' = s_y y + p_y$$

Zaslonske koordinate

Projicirane koordinate
(projection coordinates)

- 3D scenu projiciramo u ravninu, tj. pravokutnik u ravnini projekcija koji se potom preslikava na zaslon ili dio zaslona (engl. *viewport* – dio zaslona na koji se preslikava scena)
- projiciranje može biti paralelno ili centralno – zavisi da li su zrake projiciranja međusobno paralelne ili sve izviru iz jedne točke - centra
- paralelno projiciranje može biti ortogonalno (okomito) ili klinogonalno (koso)
- za implementaciju najjednostavnije je **ortogonalno projiciranje**

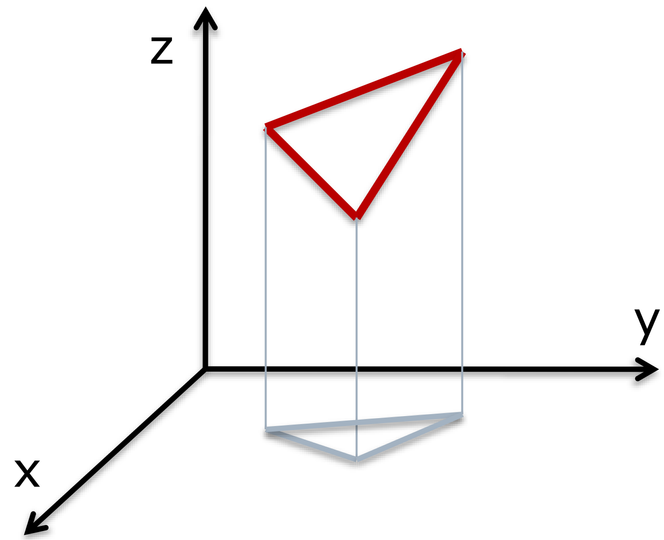
Ortogonalno projiciranje

- zrake projiciranja okomite su na ravninu projekcije

Na primjer: ako odaberemo xy ravninu kao ravninu projekcije, zrake projiciranja paralelne su s osi z, te su projicirane koordinate upravo koordinate x i y:

$$x_p = x \qquad y_p = y$$

Nema ovisnosti o z, ali to je upravo glavni nedostatak, jer objekti koji su udaljeniji ne postaju manji, kao što je to u stvarnosti!



Matrične reprezentacije geometrijskih transformacija u 3D

Iz 2D u 3D

- priča viđena u 2D ponavlja se i u 3D: geometrijske transformacije imaju matričnu reprezentaciju, ali ponovo zbog translacije treba koristiti homogene koordinate, tj. reprezentacije su 4x4, a ne 3x3 matrice, a koordinate točaka imaju 4 komponente:

$$\boxed{\vec{r}\,' = M\vec{r}} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translacija u 3D

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x + d_x \\ y' &= y + d_y \\ z' &= z + d_z \end{aligned}}$$

$$x' = 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + d_x\cdot 1$$
$$y' = 0\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z + d_y\cdot 1$$
$$z' = 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z + d_z\cdot 1$$
$$1 = 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + 1\cdot 1$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}' = T(d_x, d_y, d_z)\vec{r}$$

Kako bi translaciju također mogli implementirati preko množenja matrica koristimo se homogenim koordinatama.

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transponirane matrice

Iako je u matematici i fizici uobičajeno da su vektori stupci, ponekad su u računalnoj grafici vektori retci – tada sve matrice transformacija treba transponirati!

$$\left(T(d_x, d_y, d_z)\vec{r}\right)^T = \vec{r}^{\,T} T^T(d_x, d_y, d_z) =$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x + d_x & y + d_y & z + d_z & 1 \end{bmatrix} = \left(\vec{r}\,'\right)^T$$

Skaliranje u 3D

$$x' = s_x \cdot x$$

$$y' = s_y \cdot y$$

$$z' = s_z \cdot z$$

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zrcaljenja u 3D

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

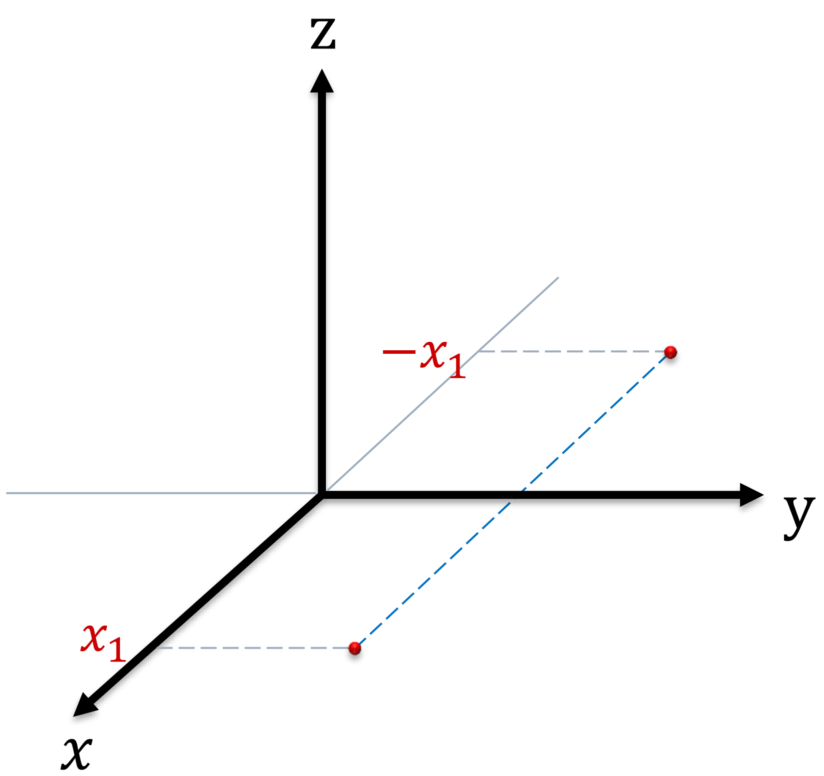
$$z' = z$$

Promjena predznaka x koordinate zapravo je zrcaljenje na ravnini koju definiraju osi y i z

- u 2D promjena predznaka koordinate dovodila je do zrcaljenja na preostaloj osi
- u 3D zrcaljenje je na ravnini koju definiraju preostale dvije osi

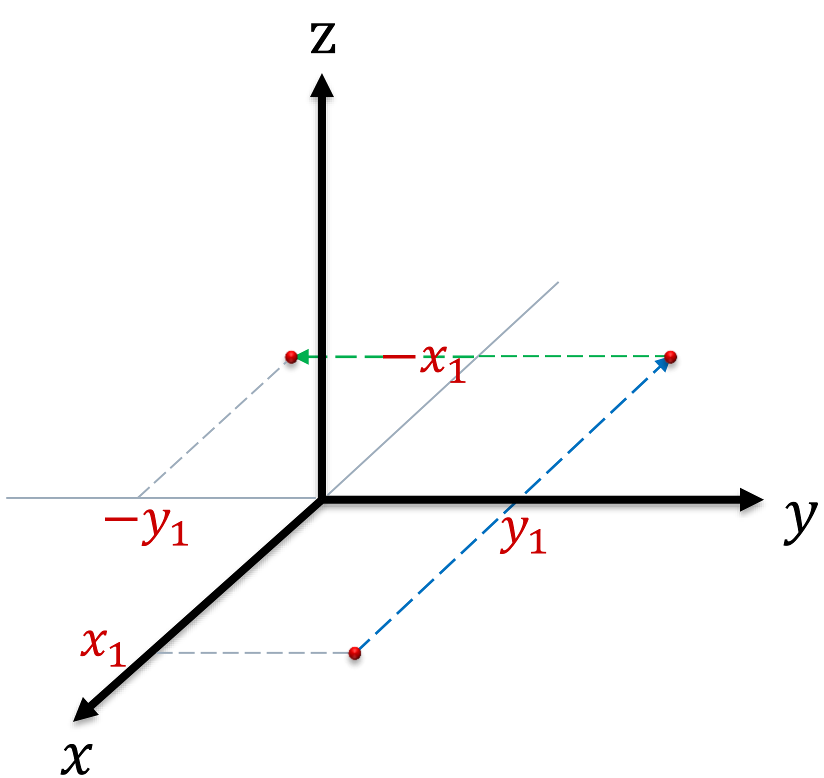
$$Z_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zrcaljenje na yz ravnini



Promjena predznaka x koordinate dovodi do zrcaljenja na ravnini definiranoj s dvije preostale koordinatne osi y i z.

… i još zrcaljenje na xz ravnini



Promjena predznaka x i y koordinate ekvivalentna je rotaciji za $180°$ oko osi z.

$$Z_{xz}Z_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija oko osi z

$$x' = x \cdot \cos(\varphi) - y \cdot \sin(\varphi)$$

$$y' = x \cdot \sin(\varphi) + y \cdot \cos(\varphi)$$

$$z' = z$$

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija oko osi x

$$y' = y \cdot \cos(\varphi) - z \cdot \sin(\varphi)$$

$$z' = y \cdot \sin(\varphi) + z \cdot \cos(\varphi)$$

$$x' = x$$

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija oko osi y

$$z' = z \cdot \cos(\varphi) - x \cdot \sin(\varphi)$$

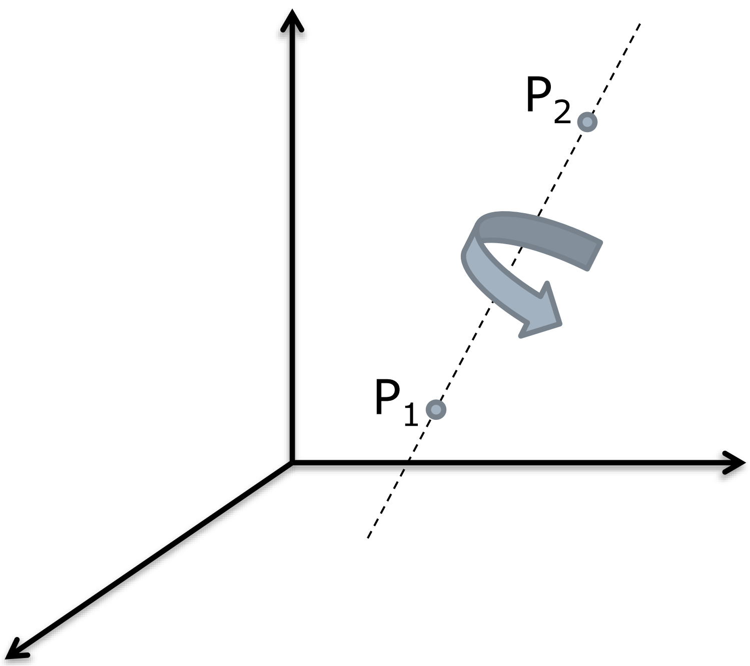
$$x' = z \cdot \sin(\varphi) + x \cdot \cos(\varphi)$$

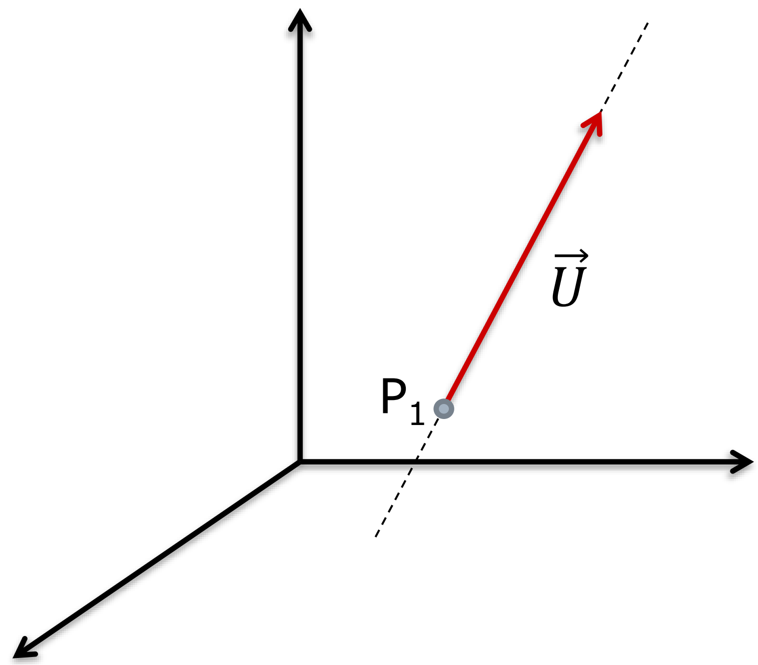
$$y' = y$$

$$R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija oko proizvoljne osi

Proizvoljna os može se zadati:





a) Dvjema točkama

b) Jednom točkom i vektorom

Rotacija oko proizvoljne osi

Proizvoljna os može se zadati dvjema točkama P_1 i P_2

U tom slučaju najprije translatiramo točku P_1 u ishodište pomoću $T(-x_1, -y_1, -z_1)$

Potom ćemo dvjema rotacijama, najprije oko osi *x*, a potom oko osi *y* dovesti os definiranu točkama P_1 i P_2 na os *z*

Zatim ćemo rotirati za kut φ oko osi *z*, te inverznim transformacijama, prvo rotacijama oko osi *y* i *x*, te konačno translacijom $T(x_1, y_1, z_1)$ vratiti os na njeno mjesto

$$R_{P_1P_2}(\varphi) = T(x_1, y_1, z_1)R_x(-\alpha)R_y(\beta)R_z(\varphi)R_y(-\beta)R_x(\alpha)T(-x_1, -y_1, -z_1)$$

Rotacija oko proizvoljne osi (2)

Zadane točke:

$$P_1(x_1, y_1, z_1)$$
$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{U} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{U}}{\left|\vec{U}\right|} \equiv (a, b, c)$$

$$a = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

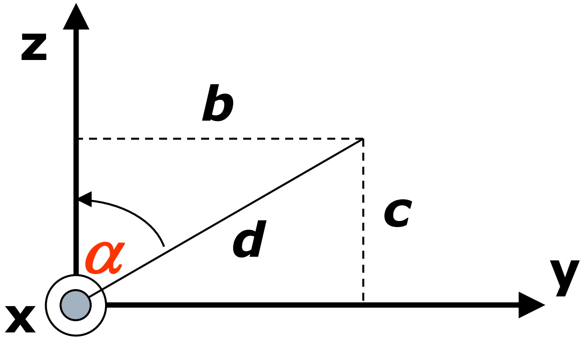
$$b = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$c = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{u}\right| = 1$$

$\vec{u}$ je jedinični vektor duž osi rotacije

Rotacija oko proizvoljne osi (3)



Zakretanje oko osi *x* za kut α dovodi jedinični vektor smjera u ravninu *xz*

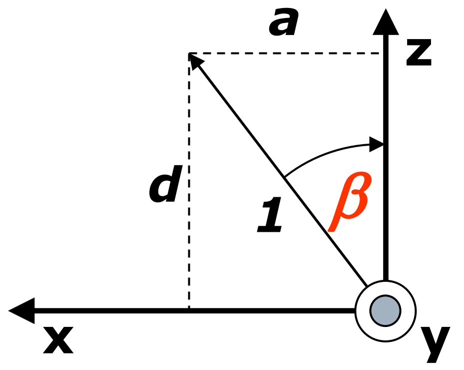
$$\sin(\alpha) = \frac{b}{d}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{d}$$

$$d = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{d} & -\frac{b}{d} & 0 \\ 0 & \frac{b}{d} & \frac{c}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija oko proizvoljne osi (4)



Zakretanje oko osi *y* za kut β dovodi os rotacije na os *z*

$$\sin(\beta) = a$$

$$\cos(\beta) = d$$

$$d = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$R_y(-\beta) = \begin{bmatrix} d & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija oko proizvoljne osi

Proizvoljna os može se zadati dvjema točkama P_1 i P_2

U tom slučaju najprije translatiramo točku P_1 u ishodište pomoću $T(-x_1, -y_1, -z_1)$

Potom ćemo dvjema rotacijama, najprije oko osi *x*, a potom oko osi *y* dovesti os definiranu točkama P_1 i P_2 na os *z*

Zatim ćemo rotirati za kut φ oko osi *z*, te inverznim transformacijama, prvo rotacijama oko osi *y* i *x*, te konačno translacijom $T(x_1, y_1, z_1)$ vratiti os na njeno mjesto

$$\boxed{R_{P_1P_2}(\varphi) = T(x_1, y_1, z_1) R_x(-\alpha) R_y(\beta) R_z(\varphi) R_y(-\beta) R_x(\alpha) T(-x_1, -y_1, -z_1)}$$