Eksponencijalna funkcija na skupu $\mathbb{C}$ definira se preko reda potencija na sljedeći način:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Pripadni red potencija konvergira apsolutno i lokalno uniformno na čitavom skupu $\mathbb{C}$. Dakle, e^z je definirano za svaki $z \in \mathbb{C}$. Nadalje,

- **Apsolutna konvergencija** nam omogućava da s redom smijemo raditi sve algebarske transformacije koje radimo s konačnim sumama. Smijemo mijenjati redoslijed članova u sumi, smijemo članove grupirati po želji, dva apsolutno konvergentna reda množimo tako da množimo njihove članove svaki sa svakim, itd.
- **Lokalno uniformna konvergencija** nam omogućava da pripadni red smijemo derivirati i integrirati član po član.

Dokažimo na temelju definicije (1) osnovno svojstvo eksponencijalne funkcije:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Zbog apsolutne konvergencije i binomnog teorema raspisivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+l=n} \frac{1}{k!l!} z_1^k z_2^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

Nadalje je

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{3}$$

pa uvrstimo li u (1) $z = i\theta$ za neki $\theta \in \mathbb{R}$, dobivamo

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}\theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos\theta + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} = \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

Dakle, izveli smo poznatu **Eulerovu formulu**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Za $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$ prema Eulerovoj formuli slijedi

$$e^{i(\varphi+\theta)} = \cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta). \tag{5}$$

S druge strane, zbog (2) i (4) slijedi

$$\begin{aligned} e^{i(\varphi+\theta)} &= e^{i\varphi+i\theta} = e^{i\varphi}\cdot e^{i\theta} = \big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = \\ &= \big(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta\big) + i\big(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta\big) \end{aligned}$$

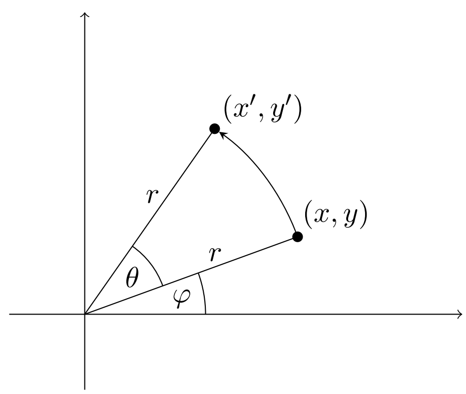
odnosno

$$e^{i(\varphi+\theta)} = \big(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta\big) + i\big(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta\big). \tag{6}$$

Iz (5) i (6) zbog jednakosti kompleksnih brojeva dobivamo poznate adicijske formule

$$\begin{aligned} \cos(\varphi+\theta) &= \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta, \\ \sin(\varphi+\theta) &= \cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta. \end{aligned}$$

Neka se točka (x, y) rotacijom oko ishodišta za kut θ preslika u točku (x', y') kako je prikazano na slici.



U polarnim koordinatama vrijedi

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad x' = r\cos(\varphi+\theta), \quad y' = r\sin(\varphi+\theta).$$

Iz adicijskih formula slijedi

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\varphi+\theta) = r[\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta] \\ x' &= (r\cos\varphi)\cos\theta - (r\sin\varphi)\sin\theta \\ x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\varphi+\theta) = r[\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta] \\ y' &= (r\cos\varphi)\sin\theta + (r\sin\varphi)\cos\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Dobivene relacije

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta \tag{7}$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta \tag{8}$$

možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Matrica

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

predstavlja matrični zapis rotacije oko ishodišta za kut θ u kanonskoj bazi.

Relacijama (7) i (8), odnosno relacijom (9) dana je veza između točke (x, y) i transformirane točke (x', y') djelovanjem rotacije oko ishodišta za kut θ.