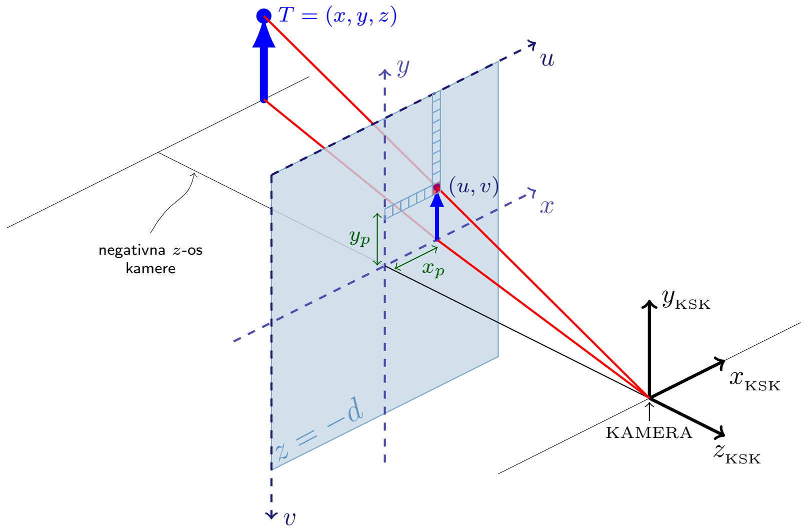
Normalizirane koordinate i perspektivna projekcija

`PerspektivnaProjekcija(xmin, xmax, ymin, ymax, zmin, zmax)`

Želimo da se u koordinatnom sustavu kamere kvadar

$$[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$$

preslika na kocku $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ tako da se odbacivanjem z koordinate dobije perspektivna projekcija.



Ranije smo izveli formule za perspektivnu projekciju u koordinatnom sustavu kamere. Točka $T(x,y,z)$ se perspektivnim projiciranjem preslika u točku $T_p(x_p, y_p, z_p)$ pri čemu vrijedi

$$x_p = \frac{dx}{-z}, \quad y_p = \frac{dy}{-z}, \quad z_p = -d. \tag{1}$$

U homogenim koordinatama (1) možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ w_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ -\frac{z}{d} \end{bmatrix} = -\frac{z}{d} \begin{bmatrix} \frac{dx}{-z} \\ \frac{dy}{-z} \\ -d \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Kako u homogenim koordinatama matrice A i λA predstavljaju istu transformaciju za svaki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, (2) možemo zapisati u obliku

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ w_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ -z \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{dx}{-z} \\ \frac{dy}{-z} \\ -d \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

`WebGL` projicira 3D scenu na ravninu $z = -z_{\text{min}}$ pa u (1) moramo staviti $d = z_{\text{min}}$ i dobivamo

$$x_p = \frac{z_{\text{min}} x}{-z}, \quad y_p = \frac{z_{\text{min}} y}{-z}, \quad z_p = -z_{\text{min}}. \tag{4}$$

Sada moramo projicirane koordinate (x_p, y_p, z_p) dovesti unutar kocke $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ jer zapravo projicirane točke želimo vidjeti na ekranu.

Za x i y koordinate primijenjujemo isti princip kao što smo to objasnili kod ortogonalne projekcije. Sjetimo se da je kod ortogonalne projekcije $x_p = x$ i $y_p = y$ (ortogonalna projekcija samo "zaboravlja" z komponentu).

Kod ortogonalne projekcije segment $[x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]$ se preslikava na segment $[-1, 1]$ prema formuli

$$x' = \frac{2}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \cdot x + \frac{x_{\text{min}} + x_{\text{max}}}{x_{\text{min}} - x_{\text{max}}}. \tag{5}$$

Primijenimo formulu (5) na komponentu x_p.

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{2}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \cdot x_p + \frac{x_{\text{min}} + x_{\text{max}}}{x_{\text{min}} - x_{\text{max}}} = \\
&= \frac{2}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \cdot \frac{z_{\text{min}} x}{-z} + \frac{x_{\text{min}} + x_{\text{max}}}{x_{\text{min}} - x_{\text{max}}} = \\
&= \frac{2 z_{\text{min}}}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \cdot \frac{x}{-z} + \frac{x_{\text{min}} + x_{\text{max}}}{x_{\text{min}} - x_{\text{max}}} = \\
&= \frac{2 z_{\text{min}}}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \cdot \frac{x}{-z} + \frac{x_{\text{min}} + x_{\text{max}}}{x_{\text{min}} - x_{\text{max}}} \cdot \frac{-z}{-z} = \\
&= \frac{1}{-z} \left(\frac{2 z_{\text{min}}}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \cdot x + \frac{x_{\text{min}} + x_{\text{max}}}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \cdot z \right)
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da se kod perspektivne projekcije segment $[x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]$ preslikava na segment $[-1, 1]$ prema formuli

$$x' = \frac{1}{-z} \left(\frac{2 z_{\text{min}}}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \cdot x + \frac{x_{\text{min}} + x_{\text{max}}}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \cdot z \right). \tag{6}$$

Kod ortogonalne projekcije segment $[y_{\text{min}}, y_{\text{max}}]$ se preslikava na segment $[-1, 1]$ prema formuli

$$y' = \frac{2}{y_{\text{max}} - y_{\text{min}}} \cdot y + \frac{y_{\text{min}} + y_{\text{max}}}{y_{\text{min}} - y_{\text{max}}}. \tag{7}$$

Primijenimo formulu (7) na komponentu y_p.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2}{y_{\text{max}} - y_{\text{min}}} \cdot y_p + \frac{y_{\text{min}} + y_{\text{max}}}{y_{\text{min}} - y_{\text{max}}} = \\
&= \frac{2}{y_{\text{max}} - y_{\text{min}}} \cdot \frac{z_{\text{min}} y}{-z} + \frac{y_{\text{min}} + y_{\text{max}}}{y_{\text{min}} - y_{\text{max}}} = \\
&= \frac{2 z_{\text{min}}}{y_{\text{max}} - y_{\text{min}}} \cdot \frac{y}{-z} + \frac{y_{\text{min}} + y_{\text{max}}}{y_{\text{min}} - y_{\text{max}}} = \\
&= \frac{2 z_{\text{min}}}{y_{\text{max}} - y_{\text{min}}} \cdot \frac{y}{-z} + \frac{y_{\text{min}} + y_{\text{max}}}{y_{\text{min}} - y_{\text{max}}} \cdot \frac{-z}{-z} = \\
&= \frac{1}{-z} \left(\frac{2 z_{\text{min}}}{y_{\text{max}} - y_{\text{min}}} \cdot y + \frac{y_{\text{min}} + y_{\text{max}}}{y_{\text{max}} - y_{\text{min}}} \cdot z \right)
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da se kod perspektivne projekcije segment $[y_{\min}, y_{\max}]$ preslikava na segment $[-1, 1]$ prema formuli

$$y' = \frac{1}{-z}\left(\frac{2z_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \cdot y + \frac{y_{\min} + y_{\max}}{y_{\max} - y_{\min}} \cdot z\right). \tag{8}$$

Preostaje još segment $[z_{\min}, z_{\max}]$ preslikati na segment $[-1, 1]$. Za razliku od ortogonalne projekcije, u ovom slučaju nije dobro koristiti afinu transformaciju na varijabli z, tj. transformaciju oblika $z' = Az + B$. Naime, ako segment $[z_{\min}, z_{\max}]$ preslikamo afinom transformacijom na segment $[-1, 1]$, tada zbog (6) i (8) dobivamo preslikavanje koje je općenito oblika

$$(x, y, z) \mapsto \left(\tfrac{1}{-z}(\alpha_1 x + \beta_1 z),\, \tfrac{1}{-z}(\alpha_2 y + \beta_2 z),\, Az + B\right) \tag{9}$$

za neke $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A, B \in \mathbb{R}$. U homogenim koordinatama (9) možemo zapisati u obliku

$$(x, y, z, 1) \mapsto \left(\tfrac{1}{-z}(\alpha_1 x + \beta_1 z),\, \tfrac{1}{-z}(\alpha_2 y + \beta_2 z),\, Az + B,\, 1\right) \tag{10}$$

odnosno

$$(x, y, z, 1) \mapsto \left(\alpha_1 x + \beta_1 z,\, \alpha_2 y + \beta_2 z,\, -Az^2 - Bz,\, -z\right). \tag{11}$$

Vidimo da (11) više nije linearno preslikavanje pa ga ne možemo zapisati u matričnom obliku. To je veliki problem jer takvo preslikavanje pravce ne preslikava u pravce, tj. dužina iz 3D scene se općenito preslika u neku krivulju unutar kocke $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Zbog čega to nije dobro? Varijablu z koristimo za spremnik dubine, a u fragment shaderu se vrši linearna interpolacija z vrijednosti koje su poznate u vrhovima na preostale piksele. Ukoliko se ne očuva kolinearnost točaka, dobit ćemo pogrešne informacije o z vrijednostima na ostalim pikselima, što može dovesti do neželjenih vizualnih efekata, tj. da WebGL pogrešno zaključi koji se poligoni nalaze ispred (vidljivi su), a koji se nalaze iza (nisu vidljivi).

Stoga je potrebno varijablu z na neki drugi način preslikati na segment $[-1, 1]$ tako da u homogenim koordinatama dobijemo linearne transformacije na svim komponentama. Iz (10) i (11) možemo zaključiti da je

$$f(z) = \frac{1}{-z}(Az + B) = -A - \frac{B}{z}$$

jedan dobar izbor za takvo preslikavanje. Nadalje, iz zahtjeva $f(-z_{\min}) = -1$ i $f(-z_{\max}) = 1$ dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$-A + \frac{B}{z_{\min}} = -1$$

$$-A + \frac{B}{z_{\max}} = 1$$

koji ima jedinstveno rješenje $A = \frac{z_{\min}+z_{\max}}{z_{\min}-z_{\max}}$, $B = \frac{2z_{\min}z_{\max}}{z_{\min}-z_{\max}}$. Stoga je

$$z' = \frac{1}{-z}\left(\frac{z_{\min} + z_{\max}}{z_{\min} - z_{\max}} \cdot z + \frac{2z_{\min}z_{\max}}{z_{\min} - z_{\max}}\right). \tag{12}$$

Konačno, (6), (8) i (12) u homogenim koordinatama možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2z_{\min}}{x_{\max}-x_{\min}} & 0 & \frac{x_{\max}+x_{\min}}{x_{\max}-x_{\min}} & 0 \\ 0 & \frac{2z_{\min}}{y_{\max}-y_{\min}} & \frac{y_{\max}+y_{\min}}{y_{\max}-y_{\min}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_{\min}+z_{\max}}{z_{\min}-z_{\max}} & \frac{2z_{\min}z_{\max}}{z_{\min}-z_{\max}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

pri čemu je $w' = -z$.

`PerspektivnaProjekcijaX(xmin, xmax, ymin, ymax, zmin, zmax, w, h)`

Želimo da se u koordinatnom sustavu kamere kvadar

$$[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$$

preslika na kocku $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ tako da se odbacivanjem z koordinate dobije perspektivna projekcija pri čemu se čuvaju proporcije slike prilikom preslikavanja iz normaliziranih koordinata na pravokutnik (canvas) $[0, w] \times [0, h]$. Za čuvanje proporcije slike po potrebi se podešava segment $[y_{\min}, y_{\max}]$.

U ovom slučaju mora vrijediti

$$\frac{x_{\max} - x_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} = \frac{w}{h}$$

iz čega slijedi

$$y_{\max} - y_{\min} = \frac{h}{w}(x_{\max} - x_{\min}).$$

Definiramo broj

$$k = \frac{\frac{h}{w}(x_{\max} - x_{\min}) - (y_{\max} - y_{\min})}{2}.$$

Sada interval $[y_{\min}, y_{\max}]$ zamijenimo s intervalom $[y_1, y_2]$ pri čemu su

$$y_1 = y_{\min} - k, \quad y_2 = y_{\max} + k.$$

Na kraju pozovemo `PerspektivnaProjekcija(xmin, xmax, y1, y2, zmin, zmax)`.

`PerspektivnaProjekcijaY(xmin, xmax, ymin, ymax, zmin, zmax, w, h)`

Želimo da se u koordinatnom sustavu kamere kvadar

$$[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$$

preslika na kocku $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ tako da se odbacivanjem z koordinate dobije perspektivna projekcija pri čemu se čuvaju proporcije slike prilikom preslikavanja iz normaliziranih koordinata na pravokutnik (canvas) $[0, w] \times [0, h]$. Za čuvanje proporcije slike po potrebi se podešava segment $[x_{\min}, x_{\max}]$.

U ovom slučaju mora vrijediti

$$\frac{x_{\max} - x_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} = \frac{w}{h}$$

iz čega slijedi

$$x_{\max} - x_{\min} = \frac{w}{h}(y_{\max} - y_{\min}).$$

Definiramo broj

$$k = \frac{\frac{w}{h}(y_{\max} - y_{\min}) - (x_{\max} - x_{\min})}{2}.$$

Sada interval $[x_{\min}, x_{\max}]$ zamijenimo s intervalom $[x_1, x_2]$ pri čemu su

$$x_1 = x_{\min} - k, \quad x_2 = y_{\max} + k.$$

Na kraju pozovemo `PerspektivnaProjekcija(x1, x2, ymin, ymax, zmin, zmax)`.