Facultad de Ciencias – Universidad de Málaga
ANÁLISIS NUMÉRICO
3º de Grado en Matemáticas – Curso 2020/21

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

– Examen –

1. (a) Encuentre todos los posibles métodos encajados RK1(2) en los que el método de segundo orden sea el de Heun.

   (b) Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

   Elija un método encajado de los hallados en el apartado anterior, calcule la aproximación y_1 de $y(h)$ que se obtiene con un paso del método de orden 1 del par así como la estimación de error $\tilde{\varepsilon}_0$ que proporciona el método encajado. Compare la estimación de error con el error exacto: ¿es del orden esperado?

2. (a) Estudie la estabilidad y el orden del metodo multipaso definido por

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = \frac{h}{4}(f_{k+2} + 8f_{k+1} + 3f_k), \qquad k = 0, \dots, N-2.$$

   (b) Aplique el método al problema de Cauchy (1) con paso h y encuentre la aproximación y_2 de $y(2h)$ que se obtiene si se usa el método de Euler explícito para arrancar.

3. Se considera un método RK de s etapas y orden p.

   a) Pruebe que la función de estabilidad del método viene dada por:

$$R(\hat{h}) = 1 + \hat{h}b^t(I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e},$$

   siendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,s} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_s \end{bmatrix}, \qquad \vec{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   b) Pruebe

$$R(h) = e^h + O(h^{p+1}).$$

   (**Indicación:** aplique el método con paso h al problema de Cauchy (1) y use el apartado anterior). Deduzca que 0 está en la frontera de la región de estabilidad absoluta.

4. (a) Calcule los coeficientes a, b, c de la fórmula de derivación numérica

$$y'(1) \approx \frac{ay(1-2h) + by(1-h) + cy(1)}{h}$$

   para que su orden sea lo mayor posible. ¿Cuál es la orden de la fórmula resultante?

   (b) Proponga un esquema de diferencias finitas de segundo orden para el problema de contorno

$$\begin{cases} -y'' + 2y' + y = \cos(x), \quad x \in [0,1], \\ y(0) = 1, \\ y'(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

   que use la fórmula hallada en el apartado (a) para discretizar la condición de contorno en $x = 1$. Escriba el esquema en forma matricial y estudie si la matriz es de diagonal dominante.

– Resolución –

1. No cae (menos mal).

2.

a) El mismo proceso de siempre:

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 0, \qquad \sum_{j=0}^{2} \alpha_j j = 1+2 = 3, \qquad \sum_{j=0}^{2} \beta_j = \frac{1+8+3}{4} = 3,$$

y el método es de orden 1;

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^2 = 1+4 = 5, \qquad 2\sum_{j=0}^{2} \beta_j j = 2\frac{8+2}{4} = 5,$$

y el método es de orden 2;

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^3 = 1+8 = 9, \qquad 3\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^2 = 3\frac{8+4}{4} = \frac{36}{4} = 9,$$

y el método es de orden 3;

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^4 = 1+16 = 17, \qquad 4\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^3 = 4\frac{8+8}{4} = 16 \neq 17$$

El método es de orden exactamente 3.

b) Al aplicar el método con $f(t,y)$ se obtiene

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = \frac{h}{4}(y_{k+2} + 8y_{k+1} + 3y_k) = \frac{h}{4}y_{k+2} + 2hy_{k+1} + \frac{3h}{4}y_k,$$

es decir,

$$y_{k+2} = \frac{2hy_{k+1} + \frac{3h}{4}y_k - y_{k+1} + 2y_k}{1-\frac{h}{4}} = \frac{(2h-1)y_{k+1} + (\frac{3h}{4}+2)y_k}{1-\frac{h}{4}}$$

En particular, para $k=0$,

$$y(t_2) = y(2h) \approx y_2 = \frac{(2h-1)y_1 + (\frac{3h}{4}+2)y_0}{1-\frac{h}{4}}$$

Hallemos y_1 mediante el método de Euler implícito, que aplicado a este problema es

$$y_{k+1} = y_k + hy_{k+1},$$

de donde

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1-h}$$

Por tanto,

$$y_1 = \frac{y_0}{1-h} = \frac{1}{1-h}$$

Volviendo arriba,

$$y(2h) \approx y_2 = \frac{(2h-1)\frac{1}{1-h} + \frac{3h}{4} + 2}{1-\frac{h}{4}}$$

3.

a) El método RK en cuestión viene dado por

$$\begin{cases} y_k^{(1)} = y_k + h(a_{1,1}f(t_k^{(1)}, y_k^{(1)}) + a_{1,2}f(t_k^{(2)}, y_k^{(2)}) + \ldots + a_{1,s}f(t_k^{(s)}, y_k^{(s)})) \\ y_k^{(2)} = y_k + h(a_{2,1}f(t_k^{(1)}, y_k^{(1)}) + a_{2,2}f(t_k^{(2)}, y_k^{(2)}) + \ldots + a_{2,s}f(t_k^{(s)}, y_k^{(s)})) \\ \quad \vdots \\ y_k^{(p)} = y_k + h(a_{s,1}f(t_k^{(1)}, y_k^{(1)}) + a_{s,2}f(t_k^{(2)}, y_k^{(2)}) + \ldots + a_{s,s}f(t_k^{(s)}, y_k^{(s)})) \\ y_{k+1} = y_k + h(b_1 f(t_k^{(1)}, y_k^{(1)}) + \ldots + b_s f(t_k^{(s)}, y_k^{(s)})) \end{cases}$$

Al aplicar el método al problema test de Dahlquist, es decir, poniendo $f(t, y) = \lambda y$, se obtiene, llamando $\hat{h} = \lambda h$,

$$\begin{cases} y_k^{(1)} = y_k + \hat{h}(a_{1,1}y_k^{(1)} + a_{1,2}y_k^{(2)} + \ldots + a_{1,s}y_k^{(s)}) \\ y_k^{(2)} = y_k + \hat{h}(a_{2,1}y_k^{(1)} + a_{2,2}y_k^{(2)} + \ldots + a_{2,s}y_k^{(s)}) \\ \quad \vdots \\ y_k^{(p)} = y_k + \hat{h}(a_{s,1}y_k^{(1)} + a_{s,2}y_k^{(2)} + \ldots + a_{s,s}y_k^{(s)}) \\ y_{k+1} = y_k + \hat{h}(b_1 y_k^{(1)} + \ldots + b_s y_k^{(s)}) \end{cases}$$

Sea

$$Y = \begin{pmatrix} y_k^{(1)} \\ y_k^{(2)} \\ \vdots \\ y_k^{(s)} \end{pmatrix}$$

Entonces el método se puede abreviar como

$$\begin{cases} Y = y_k \vec{e} + \hat{h}AY \\ y_{k+1} = y_k + \hat{h}b^t Y \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene

$$(I - \hat{h}A)Y = y_k \vec{e},$$

es decir,

$$Y = y_k (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e}$$

Sustituyendo en la segunda,

$$y_{k+1} = y_k + y_k \hat{h}b^t (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e} = (1 + \hat{h}b^t (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e}) y_k$$

Razonando por recurrencia,

$$y_k = (1 + \hat{h}b^t (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e}) y_{k-1} = (1 + \hat{h}b^t (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e})^2 y_{k-2} = \ldots = (1 + \hat{h}b^t (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e})^k y_0,$$

así que la función de estabilidad absoluta del método es

$$R(\hat{h}) = 1 + \hat{h}b^t (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e}$$

b) Como el método es de orden p, entonces $\varepsilon_0 = O(h^{p+1})$. Pero

$$\varepsilon_0 = y(t_1) - y(t_0) - h\Phi(t_0, y_0, h) = y(t_1) - y_0 - h\Phi(t_0, y_0, h) \qquad (*)$$

En el problema (1) se tiene que $y(t) = e^t$, $t_0 = 0$, $t_1 = h$ e $y_0 = 1$. Además, como se ha visto en el apartado anterior,

$$y_{k+1} = y_k + y_k \hat{h}b^t (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e}$$

Usando que en el problema (1) es $\hat{h} = h$ (pues $\lambda = 1$),

$$y_{k+1} = y_k + h y_k b^t (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e},$$

deduciéndose que

$$\Phi(t_k, y_k, h) = y_k b^t (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e}$$

En consecuencia, llevando todo esto a $(*)$,

$$\varepsilon_0 = e^h - 1 - h b^t (I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e} = e^h - R(h)$$

Esto nos dice que $e^h - R(h) = O(h^{p+1})$, o sea, $R(h) = e^h + O(h^{p+1})$.

4. Lo mismo de siempre.