En esta práctica se implementa un esquema en diferencias finitas explícito para la ecuación $u_{tt} + 2du_t - u_{xx} + ku = 0$, con condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$, y condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas en los extremos. Se realizan las aproximaciones

$$\begin{aligned} u_{tt}(x_i, t_n) &\approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}, \\ u_t(x_i, t_n) &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t}, \\ u_{xx}(x_i, t_n) &\approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \\ u(x_i, t_n) &\approx \frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + d\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + k\frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{2} = 0.$$

Multiplicando por $\Delta x^2$ y reagrupando términos,

$$(\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} + \frac{d\Delta x^2}{\Delta t} + \frac{k\Delta x^2}{2})u_i^{n+1} = (\frac{2\Delta x^2}{\Delta t^2} - 2)u_i^n + (\frac{d\Delta x^2}{\Delta t} - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} - \frac{k\Delta x^2}{2})u_i^{n-1} + u_{i+1}^n + u_{i-1}^n = 0.$$

Sean

$$\alpha = \frac{2\Delta x^2}{\Delta t^2} - 2, \qquad \beta = \frac{d\Delta x^2}{\Delta t} - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} - \frac{k\Delta x^2}{2}, \qquad \gamma = \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} + \frac{d\Delta x^2}{\Delta t} + \frac{k\Delta x^2}{2},$$

y sean $w = u^{n-1}$, $u = u^n$ y $v = u^{n+1}$. Entonces

$$\gamma v_i = \alpha u_i + \beta w_i + u_{i+1} + u_{i-1}.$$

Dividiendo por $\gamma$ se obtiene la expresión del esquema:

$$v_i = \frac{\alpha}{\gamma}u_i + \frac{\beta}{\gamma}w_i + \frac{1}{\gamma}(u_{i+1} + u_{i-1}).$$

Las aproximaciones $u_i^0$ vienen dadas por los datos iniciales, pero también es necesario conocer $u_i^1 \approx u(x_i, t_1) = u(x_i, \Delta t)$ para implementar el esquema. Para aproximar $u(x_i, \Delta t)$, se realiza el desarrollo de Taylor siguiente:

$$u(x_i, \Delta t) = u(x_i, 0) + \Delta t u_t(x_i, 0) + \frac{\Delta t^2}{2}u_{tt}(x_i, 0) + O(\Delta t^3).$$

Como $u(x_i, 0) = f(x_i)$, $u_t(x_i, 0) = g(x_i)$ y $u_{tt}(x_i, 0) = u_{xx}(x_i, 0) - 2du_t(x_i, 0) - ku(x_i, 0)$, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x_i, \Delta t) &= f(x_i) + \Delta t g(x_i) + \frac{\Delta t^2}{2}(u_{xx}(x_i, 0) - 2du_t(x_i, 0) - ku(x_i, 0)) + O(\Delta t^3) \\ &= f(x_i) + \Delta t g(x_i) + \frac{\Delta t^2}{2}(f''(x_i) - 2dg(x_i) - kf(x_i)) + O(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Aproximando $f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2}$ y sustituyendo arriba, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x_i, \Delta t) &\approx f(x_i) + \Delta t g(x_i) + \frac{\Delta t^2}{2}(\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} - 2dg(x_i) - kf(x_i)) \\ &= (1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{k\Delta t^2}{2})f(x_i) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + (\Delta t - d\Delta t^2)g(x_i). \end{aligned}$$

Si llamamos

$$a = 1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{k\Delta t^2}{2}, \qquad b = \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}, \qquad c = \Delta t - d\Delta t^2,$$

concluimos que

$$u_i^1 = af(x_i) + b(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + cg(x_i).$$