Convocatoria extraordinaria

1. Se considera el método predictor-corrector que tiene por predictor el método de Euler explícito, por corrector el método de Euler implícito y en el que se hacen L correcciones

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)} & = y_k + hf(t_k, y_k), \\ y_{k+1}^{(l+1)} & = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}^{(l)}), \quad l = 0, \dots, L-1, \\ y_{k+1} & = y_{k+1}^{(L)}. \end{cases}$$

   (a) Interprete el método como un método RK: identifique su tablero y estudie el orden.

   (b) Calcule la función de estabilidad absoluta del método. Pruebe que, cuando $L \to \infty$, tiende a la del método corrector.

   (c) En caso de que no se sepa interpretar el método como RK, se valorará si se estudia al menos el caso $L = 1$.

2. Se considera la familia de métodos numéricos multipaso

$$y_{k+1} = \alpha y_k + (1-\alpha) y_{k-1} + 2hf_k + \frac{h\alpha}{2}\left(f_{k+1} - 3f_k\right),$$

   donde α es un parámetro.

   (a) Estudie la estabilidad y el orden del método en función del parámetro α. ¿Para qué valores de α es convergente?

   (b) Seleccione un valor del parámetro para que el método sea estable y del mayor orden posible y calcule la función de estabilidad absoluta del método correspondiente.

3. Se considera el problema de contorno

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in [0,1], \\ u'(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases}$$

   siendo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Proponga un método de diferencias finitas de segundo orden para aproximar la solución del problema, usando la técnica del nodo fantasma para tratar la condición de contorno que se da en $x = 0$.

   (b) Pruebe que es posible escribir el esquema en forma matricial

$$AU = F,$$

   con matriz A simétrica. Estudie si la matriz es definida positiva.

– Resolución –

1.

a) El método dado puede escribirse como

$$\begin{cases} y_k^* = y_k, \\ y_k^{(0)} = y_k + hf(t_k, y_k^*), \\ y_k^{(l+1)} = y_k + hf(t_k + h, y_k^{(l)}), \qquad l = 0,1,\dots,L-1, \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k + h, y_k^{(L-1)}), \end{cases}$$

que es un método de Runge-Kutta con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}$$

Sean $A, C \in \mathscr{M}_{L+2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^{n+2}$ las matrices del método. Es claro que que

$$B^t E = 1,$$

así que el método es de orden 1. Además,

$$B^t AE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Como $B^t AE \neq \frac{1}{2}$, el método es de orden 1.

b) La función de estabilidad absoluta del método es

$$R(\hat{h}) = \frac{|I - \hat{h}A + \hat{h}EB^t|}{|I - \hat{h}A|}$$

Como $I - \hat{h}A$ es una matriz triangular inferior con diagonal llena de unos, su determinante es 1. Además,

$$\hat{h}EB^t = \begin{pmatrix} \hat{h} \\ \vdots \\ \hat{h} \\ \hat{h} \\ \hat{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \hat{h} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \hat{h} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \hat{h} & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$I - \hat{h}A + \hat{h}EB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \hat{h} & 0 \\ -\hat{h} & 1 & \dots & 0 & \hat{h} & 0 \\ 0 & -\hat{h} & \dots & 0 & \hat{h} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\hat{h} & 1+\hat{h} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando el determinante por la última columna,

$$|I - \hat{h}A + \hat{h}EB^t| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \hat{h} \\ -\hat{h} & 1 & \dots & 0 & \hat{h} \\ 0 & -\hat{h} & \dots & 0 & \hat{h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\hat{h} & 1+\hat{h} \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Vamos a suponer por comodidad que L es impar (para L par será análogo), así que $L+1$ es par y al desarrollar por la última colummna obtenemos

$$|I - \hat{h}A + \hat{h}EB^t| = \sum_{j=1}^{L} (-1)^j \hat{h} |A_j| + (1+\hat{h})|A_{L+1}|,$$

donde, para $j = 1,2,\dots,L+1$, la matriz A_j resulta de eliminar en la matriz que aparece en $(*)$ la última columna y la fila j-ésima. Observamos que $A_j \in \mathscr{M}_L(\mathbb{R})$ es una matriz triangular cuyos elementos diagonales son 1 (aparece $j-1$ veces) y $-\hat{h}$ (aparece $L-j+1$ veces), deduciéndose que $|A_j| = (-\hat{h})^{L-j+1}$ y

$$|I - \hat{h}A + \hat{h}EB^t| = \sum_{j=1}^{L} (-1)^{L+1} \hat{h}^{L-j+2} + 1 + \hat{h} = \sum_{j=1}^{L} \hat{h}^{L-j+2} + 1 + \hat{h}$$

Reordenando los sumandos adecuadamente, concluimos que

$$R(\hat{h}) = |I - \hat{h}A + \hat{h}EB^t| = \sum_{j=2}^{L+1} \hat{h}^j + 1 + \hat{h} = \sum_{j=0}^{L+1} \hat{h}^j$$

Por tanto, siempre que $|\hat{h}| < 1$,

$$\lim_{L\to\infty} R(\hat{h}) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{h}^j = \frac{1}{1-\hat{h}},$$

que es, milagrosamente, la función de estabilidad absoluta del método de Euler implícito.

2.

a) El primer polinomio característico del método es $\rho(z) = z^2 - \alpha z + \alpha - 1$. Se tiene que

$$z^2 - \alpha z + \alpha - 1 = 0 \iff z = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4}}{2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha-2)^2}}{2} = \frac{\alpha \pm (\alpha - 2)}{2} \iff z \in \{\alpha - 1, 1\}$$

El método es estable si y solo si las raíces de ρ son de módulo menor que 1 y las de módulo 1 (si las hay) son simples. En este caso, el método es estable si y solo si $|\alpha - 1| < 1$ o $\alpha = 0$, o sea, si y solo si $\alpha \in [0,2)$.

Estudiemos el orden. En primer lugar, los coeficientes del método son

$$\alpha_0 = \alpha - 1, \qquad \alpha_1 = -\alpha, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \beta_0 = 0, \qquad \beta_1 = 2 - \frac{3\alpha}{2}, \qquad \beta_2 = \frac{\alpha}{2}$$

Se tiene que

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 1 - \alpha + \alpha - 1 = 0$$

Además,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j = 2 - \alpha, \qquad \sum_{j=0}^{2} \beta_j = 2 - \alpha$$

Por tanto, el método es de orden 1 independientemente del valor de α. Como

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^2 = 4 - \alpha, \qquad 2\sum_{j=0}^{2} \beta_j j = 2\left(2 - \frac{3\alpha}{2} + \alpha\right) = 4 - \alpha,$$

entonces el método es de orden 2 independientemente de α. Y como

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^3 = 8-\alpha, \qquad 3\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^2 = 3\left(2-\frac{3\alpha}{2}+2\alpha\right) = 3\left(2+\frac{\alpha}{2}\right) = 6+\frac{3\alpha}{2}$$

Por tanto,

$$\text{el método es de orden 3} \iff 8-\alpha = 6+\frac{3\alpha}{2} \iff 16-2\alpha = 12+3\alpha \iff \alpha = \frac{4}{5}$$

Veamos si el método es de orden 4 para $\alpha = \frac{4}{5}$:

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^4 = 16-\alpha = \frac{76}{5}, \qquad 4\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^3 = 4\left(2-\frac{3\alpha}{2}+4\alpha\right) = 4\left(2+\frac{5\alpha}{2}\right) = 8+10\alpha = 16$$

Por tanto, el método no es de orden 4.

El método es convergente si y solo si es estable y consistente, es decir, si y solo si $\alpha \in [0,2)$.

b) Para que el método sea estable y del mayor orden posible hay que tomar $\alpha = \frac{4}{5}$. Hallemos el dominio de estabilidad absoluta del método. Se tiene que $\hat{h} \in D_A$ si y solo si todas las raíces de $\pi_{\hat{h}}$ tienen módulo menor que 1, donde

$$\pi_{\hat{h}}(z) = \rho(z) - \hat{h}\sigma(z), \qquad \rho(z) = z^2 - \alpha z + \alpha - 1, \qquad \sigma(z) = \frac{\alpha}{2}z^2 + \left(2-\frac{3\alpha}{2}\right)z$$

Se tiene que

$$\pi_{\hat{h}}(z) = 0 \iff \hat{h} = \frac{\rho(z)}{\sigma(z)} = \frac{z^2-\alpha z+\alpha-1}{\frac{\alpha}{2}z^2 + \left(2-\frac{3\alpha}{2}\right)z}$$