Examen final de Ecuaciones Diferenciales II
Viernes, 4 de noviembre de 2022

---

1. *Considérese el problema de Cauchy*

$$(P)\begin{cases} x' = 2t(x-2)\log(x) \\ x(0) = e \end{cases}$$

(a) *Probar que* (P) *tiene una única solución maximal* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$*, siendo* $I = (a,b)$*, con* $0 \in I$*. ¿Puede aplicarse el TEUG?*

(b) *Probar que* φ *es simétrica par (con lo que* $a = -b$*) y probar también que* $\varphi(t) > 2$ *para todo* $t \in I$*.*

(c) *Estudiar la monotonía de* φ*, y también su curvatura (concavidad y convexidad).*

(d) *Probar que* $I = \mathbb{R}$*. Para ello, se propone seguir los siguentes pasos:*

(d.i) *Probar que, para* $t \in [0,b)$*,*

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)\log(\varphi(t))} \leq 2t$$

(d.ii) *Deducir que, para* $t \in [0,b)$*,* $\varphi(t) \leq e^{e^{t^2}}$*.*

(d.iii) *Concluir que* $b = \infty$ *y, en consecuencia,* $I = \mathbb{R}$*.*

(e) [Opcional] *Probar que* $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Ayuda: *si* $t > 0$ *y* $\delta = \frac{e-2}{e-1}$*, entonces*

$$\frac{\varphi'(t)}{(\varphi(t)-1)\log(\varphi(t)-1)} \geq 2\delta t$$

(a) Sea $D = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ y considérese la función $f\colon D \to \mathbb{R}$ dada por $f(t,x) = 2t(x-2)\log(x)$. Como $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$, entonces $f \in \mathcal{C}(D,\mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(x,D,\mathbb{R})$. Además, $(0,e) \in \mathring{D}$, luego, por el TEUL, el problema (P) tiene solución local única, que puede extenderse (de manera única por verificarse también la PUG) a una solución maximal $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$. Y como D es abierto, por el resultado sobre soluciones maximales con gráficas en abiertos, se tiene que $I = (a,b)$, donde $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$.

Obsérvese que no se puede aplicar el TEUG, pues D no es una banda vertical.

(b) Considérese la función $\psi\colon (-b,-a) \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(t) = \varphi(-t)$. Se tiene que

(i) Por la regla de la cadena, ψ es derivable (pues φ lo es) y, si $t \in (-b,-a)$,

$$\psi'(t) = -\varphi'(-t) = -2(-t)(\varphi(-t)-2)\log(\varphi(-t)) = 2t(\psi(t)-2)\log(\psi(t))$$

(ii) $\text{gráf}(\psi) \subset D$.

(iii) $\psi(0) = \varphi(0) = e$.

Por tanto, ψ es solución de (P), y como φ es la única solución maximal de (P), entonces φ es una prolongación de ψ, luego $(-b,-a) \subset (a,b)$ y $\varphi|_{(-b,-a)} = \psi$. Pero la primera contención implica $a \leq -b$ y $-a \leq b$, es decir, $a = -b$, así que $(-b,-a) = (a,b)$ y en consecuencia $\varphi = \psi$, luego φ es una función par.

Por otra parte, obsérvese que la función constante 2 es solución de (E) $x' = f(t,x)$ en $\mathbb{R}$, pero no resuelve el problema (P). Como (E) verifica la PUG, entonces la gráfica de φ no puede cortar a la de la solución constante 2, o, en otras palabras, $\varphi(t) \neq 2$ para todo $t \in I$. Pero $\varphi(0) = e > 2$, luego, por continuidad, debe ser $\varphi(t) > 2$ para todo $t \in I$.

(c) Para todo $t \in I$ se tiene que $\varphi(t) - 2 > 0$ y $\log(\varphi(t)) > 0$ (pues se acaba de ver que $\varphi(t) > 2$). Por tanto, si $t \in (-b, 0)$, entonces $\varphi'(t) < 0$, y si $t \in (0, b)$, entonces $\varphi'(t) > 0$, luego φ es estrictamente decreciente en $(-b, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, b)$.

Para estudiar la curvatuva, se calcula la derivada segunda de φ. Si $t \in I$,

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= 2(\varphi(t)-2)\log(\varphi(t)) + 2t\varphi'(t)\log(\varphi(t)) + \frac{2t(\varphi(t)-2)}{\varphi(t)}\varphi'(t) \\
&= 2(\varphi(t)-2)\log(\varphi(t)) + 2t\varphi'(t)\left(\log(\varphi(t)) + \frac{\varphi(t)-2}{\varphi(t)}\right) \\
&= 2(\varphi(t)-2)\log(\varphi(t)) + 4t^2(\varphi(t)-2)\log(\varphi(t))\left(\log(\varphi(t)) + \frac{\varphi(t)-2}{\varphi(t)}\right) \\
&= 2(\varphi(t)-2)\log(\varphi(t))\left(1 + 2t^2\log(\varphi(t)) + 2t^2\frac{\varphi(t)-2}{\varphi(t)}\right)
\end{aligned}$$

Por ser $\varphi(t) > 2$ para todo $t \in I$, se tiene que $\varphi''(t) > 0$ para todo $t \in I$, luego φ es estrictamente convexa.

(d) Sea $t \in [0, b)$. Entonces

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)\log(\varphi(t))} = \frac{2t(\varphi(t)-2)\log(\varphi(t))}{\varphi(t)\log(\varphi(t))} = \frac{2t\varphi(t)-4t}{\varphi(t)} = 2t - \frac{4t}{\varphi(t)} \leq 2t,$$

donde en la última desigualdad se ha tenido en cuenta que $t \geq 0$ y que $\varphi(t) > 0$. Por tanto, por la monotonía de la integral,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)\log(\varphi(s))}\,ds \leq \int_0^t 2s\,ds &\iff \Big[\log(\log(\varphi(s)))\Big]_0^t \leq \Big[s^2\Big]_0^t \\
&\iff \log(\log(\varphi(t))) - \log(\log(e)) \leq t^2 \\
&\iff \log(\log(\varphi(t))) \leq t^2 \\
&\iff \log(\varphi(t)) \leq e^{t^2} \\
&\iff \varphi(t) \leq e^{e^{t^2}},
\end{aligned}$$

donde en algunas equivalencias se ha utilizado que la función exponencial es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Supóngase, por reducción al absurdo, que $b < \infty$. Entonces, por el resultado sobre soluciones maximales con gráficas en abiertos, se tiene una de las dos circunstancias siguientes:

(i) $\lim\limits_{t \to b^-} |\varphi(t)| = \lim\limits_{t \to b^-} \varphi(t) = \infty$.

(ii) La gráfica de φ tiene algún punto límite para $t \to b$, y este y todos los puntos límite de la gráfica de φ están en $\partial D = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Lo primero es imposible, pues al tomar límites cuando $t \to b^-$ en la desigualdad que se acaba de probar, se obtiene

$$\lim_{t \to b^-} \varphi(t) \leq \lim_{t \to b^-} e^{e^{t^2}} = e^{e^{b^2}} < \infty$$

En cuanto a lo segundo, si $(t, 0)$ es un punto límite de la gráfica de φ, entonces existe una sucesión $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{j\to\infty} \varphi(t_j) = 0$, pero esto es imposible porque $\varphi(t) > 2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. La contradicción viene de suponer $b < \infty$, luego $b = \infty$ y, por tanto, $I = (-b, b) = \mathbb{R}$.

(e) En primer lugar, como φ es estrictamente creciente en $[0,\infty)$, existe $A = \lim_{t\to\infty}\varphi(t) \in [2,\infty]$. Integrando en la desigualdad de ayuda, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\varphi'(s)}{(\varphi(s)-1)(\log(\varphi(s)-1))}\,ds \geq \int_0^t 2\delta s\,ds &\iff \Big[\log(\log(\varphi(s)-1))\Big]_0^t \geq \delta\Big[s^2\Big]_0^t \\
&\iff \log(\log(\varphi(t)-1)) - \log(\log(e-1)) \geq \delta t^2 \\
&\iff \frac{\log(\varphi(t)-1)}{\log(e-1)} \geq e^{\delta t^2} \\
&\iff \log(\varphi(t)-1) \geq e^{\delta t^2}\log(e-1) \\
&\iff \varphi(t)-1 \geq e^{e^{\delta t^2}\log(e-1)}
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\delta t^2} = \infty$ y $\log(e-1) > 0$ (pues $e > 2$), entonces

$$\lim_{t\to\infty} e^{e^{\delta t^2}\log(e-1)} = \infty,$$

lo que implica, por la desigualdad probada, $\lim\limits_{t\to\infty}(\varphi(t)-1) = \infty$, luego $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$.

2.

(a) *Considérese la ecuación diferencial autónoma*

$$(E) \quad x' = g(x),$$

siendo $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Supóngase que $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, con I un intervalo de $\mathbb{R}$, es una solución maximal no constante de (E). Sabemos entonces, por teoría, que φ es estrictamente monótona, luego $\varphi(I)$ es también un intervalo de $\mathbb{R}$. Probar que, para cada $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times\varphi(I)$, el problema

$$(P_{(t_0,x_0)})\begin{cases} x' = g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución maximal única, que además resulta ser una trasladada de φ.

(b) *Realizar un estudio lo más exhaustivo posible de las soluciones maximales de la ecuación*

$$(E) \quad x' = e^{x^2-1} - 1,$$

y esbozar el aspecto de las gráficas de estas posibles soluciones. Probar asimismo que si $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ es la solución maximal de (E) que satisface $\varphi(0) = e$, entonces I no puede ser todo $\mathbb{R}$. Ayuda: *si $x > 1$, entonces $e^{x^2-1} \geq x^2$.*

(a) En primer lugar, por ser $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, se tiene $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(x,\mathbb{R},\mathbb{R})$, así que el TEUL proporciona una solución local única del problema $(P_{(t_0,x_0)})$ que puede ser extendida (de manera única por verificarse la PUG) a una solución maximal $\psi\colon J \to \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $x_0 \in \varphi(I)$, existe $t_1 \in I$ tal que $x_0 = \varphi(t_1)$. Ahora se considera la función $\varphi_{t_0-t_1}\colon I + t_0 - t_1 \to \mathbb{R}$. dada por $\varphi_{t_0-t_1}(t) = \varphi(t - t_0 + t_1)$. Entonces

(i) $\varphi_{t_0-t_1}$ es derivable en $I + t_0 - t_1$ por serlo φ.

(ii) $\mathrm{gráf}(\varphi_{t_0-t_1}) \subset \mathbb{R}^2$.

(iii) $\varphi'_{t_0-t_1}(t) = \varphi'(t-t_0+t_1) = g(\varphi(t-t_0+t_1)) = g(\varphi_{t_0-t_1}(t))$ para todo $t \in I + t_0 - t_1$.

(iv) $\varphi_{t_0-t_1}(t_0) = \varphi(t_1) = x_0$.

Además, $\varphi_{t_0-t_1}$ es una solución maximal de (E) por ser la traslación de una solución maximal de (E). Ahora bien, como $\varphi_{t_0-t_1}$ es solución de $(P_{(t_0,x_0)})$ y ψ es la única solución maximal de dicho problema, entonces $\psi = \varphi_{t_0-t_1}$, concluyéndose que $(P_{(t_0,x_0)})$ tiene solución maximal única, y resulta ser una trasladada de φ.

(b) Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = e^{x^2-1} - 1$. La ecuación (E) $x' = g(x)$ es una ecuación diferencial escalar autónoma de primer orden. Se tiene que

$$e^{x^2-1} - 1 = 0 \iff e^{x^2-1} = 1 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = 1, x = -1$$

Por tanto, $\varphi_{-1} \equiv -1$ y $\varphi_1 \equiv 1$ son las únicas soluciones constantes en $\mathbb{R}$ de la ecuación (E). Como (E) verifica la PUG en $\mathbb{R}$ (pues $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$), entonces la gráfica de cualquier solución maximal no constante no debe cortar a la gráfica de ninguna solución constante. En otras palabras, si $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ es una solución maximal de (E) y consideramos las regiones

$$D_1 = \mathbb{R} \times (-\infty,-1), \qquad D_2 = \mathbb{R} \times (-1,1) \qquad \text{y} \qquad D_3 = \mathbb{R} \times (1,\infty),$$

entonces $\text{gráf}(\varphi) \subset D_i$ para algún $i \in \{1,2,3\}$. Además, por ser $\mathbb{R}^2$ abierto, el resultado sobre soluciones maximales con gráficas en abiertos permite asegurar que $I = (a,b)$, y si t^* es un extremo finito de I, entonces $\text{lím}_{t\to t^*} |\varphi(t)| = \infty$ (la casuística de los puntos límite es imposible por tener $\mathbb{R}^2$ frontera vacía). Se distinguen tres casos:

(i) $\text{gráf}(\varphi) \subset D_1$. Entonces $\varphi(t) < -1$, así que $\varphi(t)^2 - 1 > 0$, y, en consecuencia, se verifica $\varphi'(t) = e^{\varphi(t)^2-1} - 1 > 0$ para todo $t \in I$, obteniéndose que φ es estrictamente creciente. Por tanto, existen $A = \text{lím}_{t\to a^+} \varphi(t)$ y $B = \text{lím}_{t\to b^-} \varphi(t)$ (pudiendo ser infinitos). Si fuese $b < \infty$, entonces $\text{lím}_{t\to b^-} |\varphi(t)| = \text{lím}_{t\to b^-} -\varphi(t) = \infty$, luego $B = -\infty$, que es imposible por ser φ estrictamente creciente. Por tanto, $b = \infty$, y como no puede ser $B = -\infty$, entonces $B = -1$ (si fuera $-\infty < B < -1$, se obtendría una nueva solución constante de (E)). En el otro extremo, en principio, pudiera ocurrir $a > -\infty$ o $a = -\infty$, pero en cualquier caso, $A = -\infty$ ($A = -1$ no puede ser por el crecimiento de φ; tampoco puede ser $-\infty < A < -1$ porque se obtendría otra solución constante). El resumen de este caso es que, o bien

$$a > -\infty, \qquad A = -\infty, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = -1,$$

o bien

$$a = -\infty, \qquad A = -\infty, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = -1,$$

(ii) $\text{gráf}(\varphi) \subset D_2$. Resulta que la gráfica de φ queda encerrada entre la gráfica de sendas soluciones constantes, así que ha de ser $I = \mathbb{R}$. Además, como $-1 < \varphi(t) < 1$, entonces $\varphi(t)^2 - 1 < 0$, y, por tanto, $\varphi'(t) = e^{\varphi(t)^2-1} - 1 < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así que φ decrece estrictamente. De esto se deduce que $A = 1$ y que $B = -1$. El resumen de este caso es

$$a = -\infty, \qquad A = 1, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = -1,$$

(iii) $\text{gráf}(\varphi) \subset D_3$. Entonces $\varphi(t) > 1$, así que $\varphi(t)^2 - 1 > 0$, y, en consecuencia, se verifica $\varphi'(t) = e^{\varphi(t)^2-1} - 1 > 0$ para todo $t \in I$, obteniéndose que φ es estrictamente creciente. Por tanto, existen $A = \text{lím}_{t\to a^+} \varphi(t)$ y $B = \text{lím}_{t\to b^-} \varphi(t)$ (pudiendo ser infinitos). Si fuese $a > -\infty$, entonces $\text{lím}_{t\to a^+} |\varphi(t)| = \text{lím}_{t\to a^+} \varphi(t) = \infty$, luego $A = \infty$, que es imposible por ser φ estrictamente creciente. Por tanto, $a = -\infty$, y como no puede ser $A = \infty$, entonces $A = 1$ (si fuera $1 < A < \infty$, se obtendría una nueva solución constante de (E)). En el otro extremo, en principio, pudiera ocurrir $b < \infty$ o $b = \infty$, pero en cualquier caso, $B = \infty$

($B = 1$ no puede ser por el crecimiento de φ; tampoco puede ser $1 < B < \infty$ porque se obtendría otra solución constante). El resumen de este caso es que, o bien

$$a = -\infty, \qquad A = 1, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = \infty,$$

o bien

$$a = -\infty, \qquad A = 1, \qquad b < \infty \qquad \text{y} \qquad B = \infty,$$

Por otra parte, sea $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ la única solución maximal del problema

$$(P)\begin{cases} x' = e^{x^2-1} - 1 \\ x(0) = e \end{cases}$$

La existencia y unicidad de φ son garantizadas por el apartado (a). Considérese el problema

$$(\widetilde{P})\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ x(0) = e \end{cases}$$

La ecuación $(\widetilde{E})$ $x' = x^2 - 1$ es de Ricatti. Se busca una solución particular del tipo $x_p(t) = A$:

$$x' = x^2 - 1 \iff 0 = A^2 - 1 \iff A = 1, A = -1$$

Se escoge $A = 1$, y se realiza el cambio $y(t) = x(t) - 1$. Entonces $x(t) = y(t) + 1$, luego

$$y'(t) = x'(t) = x(t)^2 - 1 = (1 + y(t))^2 - 1 = 1 + y(t)^2 + 2y(t) - 1 = y(t)^2 + 2y(t)$$

Ahora se resuelve la ecuación (B) $y' = y^2 + 2y$, que es de Bernoulli. Obsérvese que la solución de $(\widetilde{P})$ verifica $x(t) > 1$ para todo t, luego $y(t) \neq 0$ para todo t, y por tanto,

$$y' = y^2 + 2y \iff y'y^{-2} = 1 + 2y^{-1} \iff -y'y^{-2} = -1 - 2y^{-1}$$

Haciendo el cambio $z = y^{-1}$, se tiene $z' = -y'y^{-2}$, luego ahora se resuelve (L) $z' = -1 - 2z$, que es lineal. La solución general de la ecuación homogénea (L) $z' = -2z$ es

$$z_h(t) = ce^{\int -2\,dt} = ce^{-2t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Se va a hallar una solución particular de (L), recurriendo al método de variación de los parámetros. La idea es buscar una solución de la forma $z(t) = c(t)e^{-2t}$. Se tendría entonces

$$z'(t) = -1 - 2z(t) \iff c'(t)e^{-2t} - 2c(t)e^{-2t} = -1 - 2c(t)e^{-2t} \iff c'(t) = -e^{2t}$$
$$\iff c(t) = \int -e^{2t}\,dt + d = -\frac{1}{2}e^{2t} + d$$

Tomando, por ejemplo, $d = 0$, se llega a la solución general de (L), que es

$$z(t) = ce^{-2t} - \frac{1}{2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Haciendo $z = y^{-1}$, se obtiene

$$y(t) = \frac{1}{ce^{-2t} - \frac{1}{2}}$$

Por último, haciendo $y = x - 1$ se llega a

$$x(t) = \frac{1}{ce^{-2t} - \frac{1}{2}} + 1$$

Como debe ser $x(0) = e$, hay que escoger

$$c = \frac{1}{e-1} + \frac{1}{2}$$

Total, que tenemos una solución de $(\widetilde{P})$ dada por

$$\psi(t) = \frac{1}{(\frac{1}{e-1} + \frac{1}{2})e^{-2t} - \frac{1}{2}} + 1,$$

y está bien definida en los puntos donde no se tenga

$$\left(\frac{1}{e-1} + \frac{1}{2}\right)e^{-2t_0} - \frac{1}{2} = 0 \iff e^{2t_0} = 2\left(\frac{1}{e-1} + \frac{1}{2}\right) \iff t_0 = \frac{\log(2(\frac{1}{e-1} + \frac{1}{2}))}{2}$$

Como $t_0 > 0$, entonces ψ está bien definida en $[0, t_0)$. Como en D_3 se tiene $e^{x^2-1} - 1 \geq x^2 - 1$ y además $\varphi(0) = \psi(0) = e$, entonces, suponiendo que $b \geq t_0$ (de lo contrario no habría nada que demostrar), por el teorema de comparación de soluciones de ecuaciones escalares, se tiene que $\varphi(t) \geq \psi(t)$ para todo $t \in [0, t_0)$. Pero es que

$$\lim_{t \to t_0^-} \psi(t) = \infty,$$

luego

$$\lim_{t \to t_0^-} \varphi(t) = \infty$$

y esto implica que $b = t_0$. Se concluye que $b \leq t_0 < \infty$, luego $I \neq \mathbb{R}$.

3.

(a) *Supóngase que* $A\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *es continua y* ω*-periódica, con* $\omega \in (0, \infty)$*. Considérese el sistema*

$$(H) \qquad x' = A(t)x$$

(a.i) *Probar que si* φ *es una solución de* (H) *en* $\mathbb{R}$ *con* $\varphi(0) = \varphi(\omega)$*, entonces* φ *es* ω*-periódica.*

(a.ii) *Sea* Φ *una matriz fundamental de* (H)*. Demostrar que* H *tiene solución* ω*-periódica no trivial si y solo si* $\det(\Phi(0) - \Phi(\omega)) = 0$. Ayuda: *el determinante de una matriz* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *es cero y si solo si existe un vector* $c \in \mathbb{R}^n$ *no nulo tal que* $Bc = 0$.

(b) *Considérese la ecuación* (E) $y'' + a(t)y = 0$, *con* $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua y* ω*-periódica, y supongamos que* φ_1 *y* φ_2 *son soluciones de* (E) *tales que*

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(0) \\ \varphi_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \varphi_2(0) \\ \varphi_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b.i) *Probar que* $W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. Ayuda: *calcular* $W(\varphi_1, \varphi_2)'(t)$.

(b.ii) *Probar que* (E) *tiene una solución* ω*-periódica no trivial si y solo si* $\varphi_1(\omega) + \varphi_2'(\omega) = 2$.

(a) Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una solución de (H) verificando $\varphi(0) = \varphi(\omega)$. Sea $x^0 = \varphi(0) = \varphi(\omega)$. Como (S) es un sistema diferencial lineal de primer orden, el problema

$$(P)\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

tiene solución única en $\mathbb{R}$. Por una parte, tenemos que φ es solución de (P). Por otra parte, si se define $\varphi_\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mediante $\varphi_\omega(t) = \varphi(t + \omega)$, se tiene que *(i)* φ_ω es derivable por serlo φ.

(ii) $\text{gráf}(\varphi_\omega) \subset \mathbb{R}^2$, evidentemente.

(iii) Por la regla de la cadena,

$$\varphi_\omega'(t) = \varphi'(t+\omega) = A(t+\omega)\varphi(t+\omega) = A(t)\varphi(t+\omega) = A(t)\varphi_\omega(t),$$

donde se ha usado que A es ω-periódica.

(iv) $\varphi_\omega(0) = \varphi(\omega) = x^0$.

Por tanto, φ_ω es también solución de (P), así que debe ser $\varphi_\omega = \varphi$ por asuntos de unicidad, concluyéndose que φ es periódica de periodo ω.

Sea Φ una matriz fundamental de (H), y supóngase que $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es solución ω-periódica de (H) no trivial. Sea $x^0 = \varphi(0)$ y considérese el problema

$$(P)\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

Como Φ es matriz fundamental, la única solución de (P) en $\mathbb{R}$ viene dada por

$$\psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^0,$$

y como φ es solución de (P), entonces

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^0$$

Pero, por el apartado *(a)*, $\varphi(0) = \varphi(\omega)$, luego

$$x^0 = \Phi(\omega)\Phi^{-1}(0)x^0$$

Equivalentemente,

$$(\Phi(\omega)\Phi^{-1}(0) - \text{Id})x^0 = (\Phi(\omega) - \Phi(0))\Phi^{-1}(0)x^0 = 0,$$

Obsérvese que $x^0 \neq 0$ (si fuese x^0 se contradiría que φ es no trivial, ya que la función nula resolvería (P)) y $\Phi^{-1}(0) \neq 0$ (de lo contrario sería $\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^0 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo que también contradice que φ es no trivial). Por tanto, $\text{rg}(\Phi(\omega) - \Phi(0)) < n$, o lo que es lo mismo, $\det(\Phi(\omega) - \Phi(0)) = \det(\Phi(0) - \Phi(\omega)) = 0$.

Recíprocamente, supóngase que $\det(\Phi(0) - \Phi(\omega)) = 0$. Entonces el sistema $(\Phi(0) - \Phi(\omega))X = 0$ tiene solución no trivial, llámese x^0. Nótese que $\Phi(0)x^0 = \Phi(\omega)x^0$. Sea $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ la función definida por $\varphi(t) = \Phi(t)x^0$. Se tiene que

(i) φ es solución de (E), pues $\varphi'(t) = \Phi'(t)x^0 = A(t)\Phi(t)x^0 = A(t)\varphi(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

(ii) φ no es la función nula, pues $x^0 \neq 0$ y Φ es una matriz regular.

(iii) $\varphi(0) = \Phi(0)x^0 = \Phi(\omega)x^0 = \varphi(\omega)$, luego, por lo probado anteriormente, φ es periódica de periodo ω.

(b) Obsérvese que

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(0) = \det\begin{pmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Por otra parte, por la fórmula de Abel-Liouville-Jacobi, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = W(\varphi_1, \varphi_2)(0)e^{-\int_0^t b(s)\,ds},$$

donde $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de y' en (E). En nuestro caso, $b = 0$, luego

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = W(\varphi_1, \varphi_2)(0)e^{-\int_0^t 0\,ds} = W(\varphi_1, \varphi_2)(0) = 1$$

para todo $t \in I$.

Para el apartado segundo, considérese el sistema de primer orden asociado a la ecuación (E):

$$(S)\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -a(t)z_1 \end{cases}$$

Como φ_1 y φ_2 son soluciones de la ecuación (E) en $\mathbb{R}$, entonces $\widetilde{\varphi_1} = (\varphi_1, \varphi_1')$ y $\widetilde{\varphi_2} = (\varphi_2, \varphi_2')$ son soluciones de (S) en $\mathbb{R}$, así que $\Phi = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi_1} & \widetilde{\varphi_2} \end{pmatrix}$ es matriz solución de (S). Además,

$$\det(\Phi(0)) = \det\begin{pmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

luego $\det(\Phi(t)) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, por tanto, Φ es matriz fundamental de (S). Se tiene que

$$\begin{aligned}
\det(\Phi(0) - \Phi(\omega)) &= \det\begin{pmatrix} \varphi_1(0) - \varphi_1(\omega) & \varphi_2(0) - \varphi_2(\omega) \\ \varphi_1'(0) - \varphi_1'(\omega) & \varphi_2'(0) - \varphi_2'(\omega) \end{pmatrix} \\
&= (\varphi_1(0) - \varphi_1(\omega))(\varphi_2'(0) - \varphi_2'(\omega)) - (\varphi_2(0) - \varphi_2(\omega))(\varphi_1'(0) - \varphi_1'(\omega)) \\
&= \varphi_1(0)\varphi_2'(0) - \varphi_1(0)\varphi_2'(\omega) - \varphi_1(\omega)\varphi_2'(0) + \varphi_1(\omega)\varphi_2'(\omega) + \\
&\quad \varphi_2(0)\varphi_1'(\omega) + \varphi_2(\omega)\varphi_1'(0) - \varphi_2(0)\varphi_1'(0) - \varphi_2(\omega)\varphi_1'(\omega) \\
&= W(\varphi_1, \varphi_2)(0) + W(\varphi_1, \varphi_2)(\omega) + \det\begin{pmatrix} \varphi_2(0) & \varphi_1(\omega) \\ \varphi_2'(0) & \varphi_1'(\omega) \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(\omega) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(\omega) \end{pmatrix} \\
&= 2 + \det\begin{pmatrix} 0 & \varphi_1(\omega) \\ 1 & \varphi_1'(\omega) \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & \varphi_2(\omega) \\ 0 & \varphi_2'(\omega) \end{pmatrix} \\
&= 2 - \varphi_1(\omega) - \varphi_2'(\omega)
\end{aligned}$$

Por el apartado (a), (S) tiene solución ω-periódica no trivial si y solo si $\varphi_1(\omega) + \varphi_2'(\omega) = 2$. Para terminar el ejercicio, se va a probar que (S) tiene solución ω-periódica no trivial si y solo si (E) tiene solución ω-periódica no trivial.

En efecto, si (φ_1, φ_2) es solución ω-periódica de (S), entonces φ_1 es solución de (E), y como $(\varphi_1, \varphi_2)(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (\varphi_1(t+\omega), \varphi_2(t+\omega))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ por la periodicidad de (φ_1, φ_2), entonces, en particular, $\varphi_1(t) = \varphi_1(t+\omega)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego φ_1 es ω-periódica.

Recíprocamente, si φ es solución ω-periódica de (E), entonces (φ, φ') es solución de (S). Por la periodicidad de φ se tiene $\varphi(t) = \varphi(t+\omega)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y derivando se obtiene $\varphi'(t) = \varphi'(t+\omega)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, concluyéndose que $(\varphi(t), \varphi'(t)) = (\varphi(t+\omega), \varphi'(t+\omega))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y, por tanto, (φ, φ') es ω-peródica.