Examen final de Ecuaciones Diferenciales II
Viernes, 23 de junio de 2023

1.

(a) *Supongamos que $A\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es continua y ω-periódica, con $\omega \in (0,\infty)$. Consideramos el sistema*

$$(H) \quad x' = A(t)x$$

(a.i) *Probar que si φ es una solución de (H) en $\mathbb{R}$ con $\varphi(0) = \varphi(\omega)$, entonces φ es ω-periódica.*

(a.ii) *Supongamos que $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz fundamental de (H). ¿Qué significa eso? ¿Y que sea matriz fundamental canónica de (H) en 0? Si Φ no es matriz fundamental canónica de (H) en 0, dar una función matricial Ψ que sí lo sea (en términos de Φ). Expresar el conjunto de soluciones de (H) en términos de Φ.*

(a.iii) *Supongamos que Φ es una matriz fundamental canónica de (H) en 0. Probar que (H) tiene solución ω-periódica no trivial si y solo si un autovalor de $\Phi(\omega)$ es $\lambda = 1$.*

(b) *Sean p y q constantes reales. Consideremos la ecuación (E) $y'' + py' + qy = 0$. Probar que son equivalentes:*

(b.i) $p = 0$, $q > 0$.

(b.ii) *Todas las soluciones no triviales de (E) son periódicas.*

Determinar en este caso el periodo minimal de las soluciones no triviales de (E).

(a) Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una solución de (H) verificando $\varphi(0) = \varphi(\omega)$. Sea $x^0 = \varphi(0) = \varphi(\omega)$. Como (S) es un sistema diferencial lineal de primer orden, el problema

$$(P)\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

tiene solución única en $\mathbb{R}$. Por una parte, tenemos que φ es solución de (P). Por otra parte, si se define $\varphi_\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mediante $\varphi_\omega(t) = \varphi(t+\omega)$, se tiene que

(i) φ_ω es derivable por serlo φ.

(ii) $\text{gráf}(\varphi_\omega) \subset \mathbb{R}^2$, evidentemente.

(iii) Por la regla de la cadena,

$$\varphi_\omega'(t) = \varphi'(t+\omega) = A(t+\omega)\varphi(t+\omega) = A(t)\varphi(t+\omega) = A(t)\varphi_\omega(t),$$

donde se ha usado que A es ω-periódica.

(iv) $\varphi_\omega(0) = \varphi(\omega) = x^0$.

Por tanto, φ_ω es también solución de (P), así que debe ser $\varphi_\omega = \varphi$ por asuntos de unicidad, concluyéndose que φ es periódica de periodo ω.

Sea Φ una matriz fundamental de (H). Esto significa que sus columnas forman una base del espacio de las soluciones de (H), que es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Que Φ sea matriz fundamental canónica de (H) en 0 significa que Φ es matriz fundamental de (H) y, además, es la única que verifica $\Phi(0) = \mathrm{Id}$. Si Φ no fuese matriz fundamental de Ψ en 0, entonces la función matricial dada por $\Psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$ sí lo es. Por último, si $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una solución de (H), entonces llamando $x^0 = \varphi(0)$, se tiene que

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^0$$

Por otra parte, sea Φ una matriz fundamental canónica de (H) en 0, y sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es solución ω-periódica de (H) no trivial. Sea $x^0 = \varphi(0)$ y considérese el problema

$$(P)\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

Como Φ es matriz fundamental canónica en 0, la única solución de (P) en $\mathbb{R}$ viene dada por

$$\psi(t) = \Phi(t)x^0,$$

y como φ es solución de (P), entonces

$$\varphi(t) = \Phi(t)x^0$$

Pero, por lo probado anteriormente, $\varphi(0) = \varphi(\omega)$, luego

$$x^0 = \Phi(\omega)x^0$$

Equivalentemente,

$$(\Phi(\omega) - \mathrm{Id})x^0 = 0,$$

Obsérvese que $x^0 \neq 0$ (si fuese x^0 se contradiría que φ es no trivial, ya que la función nula resolvería (P)), luego x^0 es un autovector de $\Phi(\omega)$ asociado al autovalor $\lambda = 1$.

Recíprocamente, supóngase que existe $x^0 \neq 0$ tal que $\Phi(\omega)x^0 = x^0$. Sea $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ la función definida por $\varphi(t) = \Phi(t)x^0$. Se tiene que

(i) φ es solución de (E), pues $\varphi'(t) = \Phi'(t)x^0 = A(t)\Phi(t)x^0 = A(t)\varphi(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

(ii) φ no es la función nula, pues $x^0 \neq 0$ y Φ es una matriz regular.

(iii) $\varphi(0) = \Phi(0)x^0 = x^0 = \Phi(\omega)x^0 = \varphi(\omega)$, así que φ es una función ω-periódica.

(b) Se va a resolver (E). La ecuación característica de (E) es $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, y sus raíces,

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Se distinguen los siguientes casos:

(i) $p^2 - 4q > 0$. Entonces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $m(\lambda_1) = m(\lambda_2) = 1$, luego un sistema fundamental de soluciones de (E) es $\mathcal{F} = \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$. Por tanto, cualquier solución de (E) es de la forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) $p^2 - 4q < 0$. Entonces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y $m(\lambda_1) = m(\lambda_2) = 1$. La parte real de cada raíz es

$$\alpha = -\frac{p}{2},$$

y la imaginaria,

$$\beta = \pm\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2},$$

luego un sistema fundamental de soluciones de (E) es $\mathcal{F} = \{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)\}$. Por tanto, cualquier solución de (E) es de la forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(iii) $p^2-4q=0$. Entonces $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{p}{2}$, luego un sistema fundamental de soluciones de (E) es

$$\mathcal{F}=\{e^{-\frac{p}{2}t}, te^{-\frac{p}{2}t}\}$$

Por tanto, cualquier solución de (E) es de la forma

$$\varphi(t)=c_1e^{-\frac{p}{2}t}+c_2te^{-\frac{p}{2}t}, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Como la exponencial no es una función periódica, en los casos (i) y (iii) no puede obtenerse ninguna solución no trivial y periódica. Por tanto, la única posibilidad de obtener soluciones periódicas no triviales se encuentra en el caso (ii); concretamente, cuando se tenga $\alpha=0$, es decir, cuando se tenga $p=0$. En estas circunstancias, todas las soluciones no triviales de (E) serían periódicas.

Se concluye que todas las soluciones no triviales de (E) son periódicas si y solo si $p^2-4q<0$ y $p=0$, es decir, si y solo si $p=0$ y $q>0$. En ese caso, las soluciones en cuestión son de la forma

$$\varphi(t)=c_1\cos(\beta t)+c_2\operatorname{sen}(\beta t), \quad c_1,c_2\in\mathbb{R},$$

luego el periodo minimal es $\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\sqrt{q}}$.

---

2. *Resolver el siguiente problema de datos iniciales, justificando los cálculos con los resultados teóricos vistos en clase:*

$$(P)\begin{cases} y'''-y''+y'-y=5\operatorname{sen}(t)e^t \\ y(0)=0,\ y'(0)=-3,\ y''(0)=-1 \end{cases}$$

La ecuación (E) $y'''-y''+y'-y=5\operatorname{sen}(t)e^t$ es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden 3. Por tanto, su solución general es $\varphi(t)=\varphi_h(t)+\varphi_p(t)$, donde φ_h es la solución general de (H) $y'''-y''+y'-y=0$, y φ_p es una solución particular de (E).

Para hallar φ_h, se va a tratar de encontrar un sistema fundamental de soluciones de (H). La ecuación característica asociada a (H) es $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=0$, o sea, $(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0$. Los autovalores de (H) son $\lambda_1=1$, $\lambda_2=i$ y $\lambda_3=-i$, luego un sistema fundamental de soluciones de (H) es

$$\mathcal{F}=\{e^t,\cos(t),\operatorname{sen}(t)\},$$

luego

$$\varphi_h(t)=c_1e^t+c_2\cos(t)+c_3\operatorname{sen}(t), \qquad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$$

Para el cálculo de φ_p, se empleará el método de los coeficientes indeterminados. Obsérvese que el término independiente de (E) es de la forma

$$a(t)=e^{\alpha t}(q_1(t)\cos(\beta t)+q_2(t)\operatorname{sen}(\beta t)),$$

donde $\alpha=1$, $\beta=1$ y $q_1(t)=0$, $q_2(t)=5$ son polinomios de grado 0. Por tanto, (E) dispone de una solución particular de la forma

$$\varphi_p(t)=t^{m(\mu)}e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos(\beta t)+Q_2(t)\operatorname{sen}(\beta t)),$$

donde $m(\mu)$ es la multiplicidad de $\mu=\alpha+i\beta=1+i$ como autovalor de (H) (o sea, $m(\mu)=0$), y $Q_1(t)=A$, $Q_2(t)=B$ son polinomios de grado 0. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\varphi_p(t)&=Ae^t\cos(t)+Be^t\operatorname{sen}(t);\\
\varphi_p'(t)&=(A+B)e^t\cos(t)+(B-A)e^t\operatorname{sen}(t);\\
\varphi_p''(t)&=2Be^t\cos(t)-2Ae^t\operatorname{sen}(t);\\
\varphi_p'''(t)&=(2B-2A)e^t\cos(t)-(2A+2B)e^t\operatorname{sen}(t),
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\varphi_p \text{ es solución de } (E) &\iff \varphi_p'''(t) - \varphi_p''(t) + \varphi_p'(t) - \varphi_p(t) = 5e^t \operatorname{sen}(t)\\ &\iff (B-2A)e^t\cos(t) - (A+2B)e^t\operatorname{sen}(t) = 5e^t\operatorname{sen}(t)\\ &\iff B-2A=0,\ A+2B=-5\\ &\iff A=-1, B=-2,\end{aligned}$$

así que $\varphi_p(t) = -e^t\cos(t) - 2e^t\operatorname{sen}(t)$ es solución de (E), así que la solución general de (E) sería

$$\varphi(t) = c_1e^t + (c_2 - e^t)\cos(t) + (c_3 - 2e^t)\operatorname{sen}(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Para resolver el problema dado, hay que encontrar el valor que deben tomar las constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ para que se satisfagan los datos iniciales. Se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= c_1e^t + (c_3 - c_2 - e^t)\cos(t) + (-c_2 - 2c_3 + 5e^t)\operatorname{sen}(t);\\ \varphi''(t) &= c_1e^t + (-3c_3 + 6e^t)\cos(t) + (-4c_2 - 11c_3 + 26e^t)\operatorname{sen}(t),\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= c_1 + c_2 - 1 = 0;\\ \varphi'(0) &= c_1 + c_3 - c_2 - 1 = -3;\\ \varphi''(0) &= c_1 - 3c_3 + 6 = -1,\end{aligned}$$

de donde se deduce que $c_1 = -10/7, c_2 = 17/7$ y $c_3 = 13/7$. A la vista de estas cifras tan feas, es altamente probable que existan errores de cálculo.

---

3. *Realizar un estudio, lo más exhaustivo posible, de las soluciones no prolongables de la ecuación*

$$(E) \quad x' = t\sqrt{1 - t^2 - x^2}$$

¿En qué región puede asegurarse que la ecuación (E) satisface la PUG porque se dan las hipótesis del TUG? El estudio debe incluir: datos iniciales posibles, intervalos maximales de definición de soluciones, comportamiento en los extremos de estos intervalos, monotonía de las soluciones, simetría, soluciones constantes (si las hay)...

En primer lugar, obsérvese que la función dada por $f(t,x) = t\sqrt{1-t^2-x^2}$ está bien definida en el conjunto

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 :\ t^2 + x^2 \le 1\} = \overline{B}((0,0);1),$$

considerando como norma en $\mathbb{R}^2$ la norma euclídea. Además, si $(t,x) \in \mathring{D}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\frac{tx}{\sqrt{1-t^2-x^2}},$$

que es una función continua en $\mathring{D}$. Por tanto, $f \in \mathcal{C}(\mathring{D}, \mathbb{R}) \cap \operatorname{Lip}_{\text{loc}}(x, \mathring{D}, \mathbb{R})$, así que, al verificarse las hipótesis del TUG, puede asegurarse que (E) satisface la PUG en $\mathring{D}$. Sin embargo, si tomamos $(t,x) \in \partial D$ y $(t,y) \in \mathring{D}$, se tiene que

$$\frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x-y|} = \frac{|t|\sqrt{1-t^2-y^2}}{|x-y|},$$

que tiene límite infinito cuando $y \to x$. Por tanto, f no es de Lipschitz en ningún entorno de cualquier punto de la frontera de D, así que las hipótesis del TUG no se verifican en D; solo en su interior.

Consecuentemente, para cada dato inicial $(t_0, x_0) \in \mathring{D}$, puede asegurarse que el problema de Cauchy

$$(P)\begin{cases} x' = t\sqrt{1-t^2-x^2} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

posee solución local única (por el TEUL) con gráfica en $\mathring{D}$, que puede extenderse a una solución maximal $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ con gráfica en $\mathring{D}$, que además es única por satisfacerse la PUG en la región $\mathring{D}$. Además, como $\mathring{D}$ es abierto, entonces, por el resultado sobre soluciones maximales con gráficas en abiertos, se tiene que $I = (a, b)$, donde $-1 \leq a < t_0 < b \leq 1$. Además, por el mismo resultado, como los extremos de I son finitos, si t^* es un extremo de I, entonces se verifica una de las siguientes circunstancias:

(i) $\lim_{t\to t^*} |\varphi(t)| = \infty$.

(ii) La gráfica de φ tiene un punto límite para $t \to t^*$, y este y todos los puntos límite de la gráfica de φ para $t \to t^*$ se hallan en ∂D.

Por otra parte, considérese la función $\psi\colon (-b, -a) \to \mathbb{R}$ definida mediante $\psi(t) = \varphi(-t)$. Se tiene que, por la regla de la cadena, ψ es derivable y, para todo $t \in (-b, -a)$,

$$\psi'(t) = -\varphi'(-t) = t\sqrt{1-(-t)^2-\varphi(-t)^2} = t\sqrt{1-t^2-\psi(t)^2},$$

luego $\psi(t)$ es también solución de (E) con gráfica en $\mathring{D}$. Pero φ es la única solución maximal de (E) con gráfica en $\mathring{D}$, así φ debe ser una prolongación de ψ, es decir, $(a, b) \subset (-b, -a)$ y $\varphi|_{(-b,-a)} = \psi$. Ahora bien, que sea $(a, b) \subset (-b, -a)$ implica $a = -b$, luego, en realidad, $\varphi = \psi$, y por tanto φ es una función par, lo que conlleva $I = (-b, b)$.

Por otra parte, obsérvese que, por ser $t^2 + \varphi(t)^2 < 1$ para todo $t \in (-b, b)$, se tiene que $\varphi'(t) < 0$ para todo $t \in (-b, 0)$ y $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in (0, b)$, así que φ es estrictamente decreciente en $(-b, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, b)$.

También puede observarse que f es acotada en D, así que, por ser los extremos de I finitos, el resultado sobre soluciones con derivada acotada permite afirmar que existen $A = \lim_{t\to -b^+} \varphi(t)$ y $B = \lim_{t\to b^-} \varphi(t)$. Al unir esto con lo obtenido mediante el resultado sobre soluciones maximales con gráficas en abiertos, se puede descartar el caso (i). En consecuencia, los puntos límite de la gráfica de φ para $t \to -b$ son de la forma $(-b, \pm\sqrt{1-b^2})$, y para $t \to b$, de la forma $(b, \pm\sqrt{1-b^2})$. Pero sabemos que φ tiene límite en t^*, así que los únicos posibles puntos límite son $(-b, A)$ y (b, B), deduciéndose que, o bien $A = B = \sqrt{1-b^2}$, o bien $A = B = -\sqrt{1-b^2}$. Todo esto nos lleva a considerar la función $\widetilde{\varphi}\colon [-b, b] \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} B & \text{si } t \in \{-b, b\} \\ \varphi(t) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y tenemos que $\widetilde{\varphi}$ es una prolongación estricta de φ como solución de (E). Obsérvese que esto no contradice la maximalidad de φ como solución de (E) con gráfica en $\mathring{D}$, pues la gráfica de $\widetilde{\varphi}$ se sale de D.

Por último, nótese que la ecuación (E) no posee soluciones constantes. Supongo que con toda esta cantinela se dan por satisfechos los requerimentos del ejercicio.

---

4. *Realizar un estudio, lo más exhaustivo posible, de las soluciones no prolongables de la ecuación*

$$(E) \quad x' = 1 - e^{1-x^2}$$

En este estudio debe probarse asimismo que el intervalo maximal de definición de cualquier solución no prolongable de (E) es $\mathbb{R}$ (para ello, quizás haga falta recurrir a algún resultado sobre soluciones con derivada acotada). Esbozar el aspecto de las gráficas de estas posibles soluciones.

Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = 1 - e^{1-x^2}$. La ecuación (E) $x' = g(x)$ es una ecuación diferencial escalar autónoma de primer orden. Se tiene que

$$1 - e^{1-x^2} = 0 \iff e^{1-x^2} = 1 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x = 1, x = -1$$

Por tanto, $\varphi_{-1} \equiv -1$ y $\varphi_1 \equiv 1$ son las únicas soluciones constantes en $\mathbb{R}$ de la ecuación (E). Como (E) verifica la PUG en $\mathbb{R}$ (pues $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), entonces la gráfica de cualquier solución maximal no constante no debe cortar a la gráfica de ninguna solución constante. En otras palabras, si $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ es una solución maximal de (E) y consideramos las regiones

$$D_1 = \mathbb{R} \times (-\infty, -1), \qquad D_2 = \mathbb{R} \times (-1, 1) \qquad \text{y} \qquad D_3 = \mathbb{R} \times (1, \infty),$$

entonces $\text{gráf}(\varphi) \subset D_i$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$. Además, el resultado sobre soluciones maximales con gráficas en abiertos (sí, $\mathbb{R}^2$ es abierto) permite asegurar que $I = (a, b)$, y si t^* es un extremo finito de I, entonces $\text{lím}_{t\to t^*} |\varphi(t)| = \infty$ (la casuística de los puntos límite es imposible por tener $\mathbb{R}^2$ frontera vacía). Se distinguen tres casos:

(i) $\text{gráf}(\varphi) \subset D_1$. Entonces $\varphi(t) < -1$, así que $1 - \varphi(t)^2 < 0$, y se verifica $\varphi'(t) = 1 - e^{1-\varphi(t)^2} > 0$ para todo $t \in I$, obteniéndose que φ es estrictamente creciente. Por tanto, existen $A = \text{lím}_{t\to a^+} \varphi(t)$ y $B = \text{lím}_{t\to b^-} \varphi(t)$. Si fuese $b < \infty$, entonces $\text{lím}_{t\to b^-} |\varphi(t)| = \text{lím}_{t\to b^-} -\varphi(t) = \infty$, luego $B = -\infty$, que es imposible por ser φ estrictamente creciente. Por tanto, $b = \infty$, y como no puede ser $B = -\infty$, entonces $B = -1$ (si fuera $-\infty < B < -1$, se obtendría una nueva solución constante de (E)). En el otro extremo, en principio, pudiera ocurrir $a > -\infty$ o $a = -\infty$, pero en cualquier caso, $A = -\infty$ ($A = -1$ no puede ser por el crecimiento de φ; tampoco puede ser $-\infty < A < -1$ porque se obtendría otra solución constante). El resumen de este caso es que, o bien

$$a > -\infty, \qquad A = -\infty, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = -1,$$

o bien

$$a = -\infty, \qquad A = -\infty, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = -1,$$

(ii) $\text{gráf}(\varphi) \subset D_2$. Resulta que la gráfica de φ queda encerrada entre la gráfica de dos soluciones constantes, así que ha de ser $I = \mathbb{R}$. Además, como $-1 < \varphi(t) < 1$, entonces $1 - \varphi(t)^2 > 0$, y, por tanto, $\varphi'(t) = 1 - e^{1-\varphi(t)^2} < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así que φ decrece estrictamente. De esto se deduce que $A = 1$ y que $B = -1$. El resumen de este caso es

$$a = -\infty, \qquad A = 1, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = -1,$$

(iii) $\text{gráf}(\varphi) \subset D_3$. Entonces $\varphi(t) > 1$, así que $1 - \varphi(t)^2 < 0$, y se verifica $\varphi'(t) = 1 - e^{1-\varphi(t)^2} > 0$ para todo $t \in I$, obteniéndose que φ es estrictamente creciente. Por tanto, existen $A = \text{lím}_{t\to a^+} \varphi(t)$ y $B = \text{lím}_{t\to b^-} \varphi(t)$. Si fuese $a > -\infty$, entonces $\text{lím}_{t\to a^+} |\varphi(t)| = \text{lím}_{t\to a^+} \varphi(t) = \infty$, luego $A = \infty$, que es imposible por ser φ estrictamente creciente. Por tanto, $a = -\infty$, y como no puede ser $A = \infty$, entonces $A = 1$ (si fuera $1 < A < \infty$, se obtendría una nueva solución constante de (E)). En el otro extremo, en principio, pudiera ocurrir $b < \infty$ o $b = \infty$, pero en cualquier caso, $B = \infty$ ($B = 1$ no puede ser por el crecimiento de φ; tampoco puede ser $1 < B < \infty$ porque se obtendría otra solución constante). El resumen de este caso es que, o bien

$$a = -\infty, \qquad A = 1, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = \infty,$$

o bien

$$a = -\infty, \qquad A = 1, \qquad b < \infty \qquad \text{y} \qquad B = \infty,$$

Por último, vamos a adentrarnos en el caso (i) para descartar la posibilidad de $a > -\infty$. Por reducción al absurdo, supóngase que $a > -\infty$, y sea $t_0 \in I$. Como $g = \varphi'$ es acotada en $(a, t_0]$, el resultado sobre soluciones con derivada acotada diría que $A = \text{lím}_{t \to a^+} \in \mathbb{R}$, y esto contradice que $A = -\infty$, como se había visto en (i). Por tanto, no puede ser $a > -\infty$, así que, en el caso (i), $I = \mathbb{R}$. En el caso (ii) ya se tiene $I = \mathbb{R}$, y en (iii), se demuestra de forma totalmente análoga que ha de ser $I = \mathbb{R}$.