Relación 3

Ejercicio 1. *Sean* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *las sucesiones dadas por* $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 0$. *Probar que las series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *son convergentes, no absolutamente convergentes, y su producto de Cauchy no lo es.*

Solución. La sucesión $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 0$, es decreciente y con límite 0. Por el criterio de Leibniz, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n$ es convergente. Por otra parte, como para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ no converge, entonces, por el criterio de comparación, tenemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ tampoco converge. Esto demuestra que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen pero no convergen absolutamente. En cuanto al producto de Cauchy,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$$

Si $k, n \in \mathbb{N}_0$ son tales que $0 \leq k \leq n$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1,$$

luego $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$ no tiene límite cero, concluyéndose que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ no converge.

Ejercicio 2. *Determinar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n z^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n) z^{2n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^3+2n) z^{4n}$

Solución.

(*a*) Se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

luego $R = 1$.

(*b*) Se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|3^n|} = \limsup_{n\to\infty} 3 = 3,$$

luego $R = \frac{1}{3}$.

(*c*) Sea

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n! \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, y como

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1,$$

se concluye que $R = 1$.

(*d*) Sea

$$a_k = \begin{cases} 2^{\sqrt{k}} & \text{si } k = n^2 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. Se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{\sqrt{k+1}}}{2^{\sqrt{k}}} = \lim_{k\to\infty} 2^{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = 1,$$

donde en la última igualdad se ha usado que

$$\lim_{k\to\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 0$$

Se concluye que $R = 1$.

Otra forma: como

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{|a_{n^2}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{2^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

entonces $R = 1$.

(*e*) Sea $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e},$$

luego $R = e$.

(*f*) Sea

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, y como

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1,$$

se concluye que $R = 1$.

(g) Sea

$$a_k = \begin{cases} 3+(-1)^{\frac{k}{2}} & \text{si } k = 2n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} = \begin{cases} 4 & \text{si } k = 2n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ par} \\ 2 & \text{si } k = 2n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ impar} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(3+(-1)^n)z^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, y como

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{4} = 1,$$

se concluye que $R = 1$.

(h) Sea

$$a_k = \begin{cases} (\frac{k}{4})^3 + 2\frac{k}{4} & \text{si } k = 4n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} = \begin{cases} \frac{k^3}{64} + \frac{k}{2} & \text{si } k = 4n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(n^3+2n)z^{4n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. Se tiene que

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[4n]{n^3+2n} = 1,$$

ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^3+2x)}{4x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{4(x^3+2x)} = 0,$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3+2n\right)^{\frac{1}{4n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{4n}\log(n^3+2n)} = e^0 = 1,$$

concluyéndose que $R = 1$.

Ejercicio 3. *Las siguientes series de potencias convergen en el disco unidad $\mathbb{D}$. Encontrar una fórmula para las mismas que sea válida en dicho disco.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(n+1)z^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(2n+\frac{1}{n!}\right)z^n$

Solución.

(a) En el disco unidad, se sabe que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Derivando,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

Multiplicando por z,

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

(b) Por el apartado anterior, en el disco unidad se verifica

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

Derivando,
$$\frac{1+z}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1}$$
Multiplicando por z^2,
$$\frac{z^2+z^3}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n+1}$$
Derivando otra vez,
$$\frac{2z+3z^2}{(1-z)^3} + \frac{3(z^2+z^3)}{(1-z)^4} = \frac{2z+3z^2-2z^2-\cancel{3z^3}+3z^2+\cancel{3z^3}}{(1-z)^4} = \frac{2z(1+2z)}{(1-z)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(n+1)z^n$$

(c) Si $|z|<1$, entonces
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n+\frac{1}{n!}\right)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2nz^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$
ya que todas las series anteriores convergen en el disco unidad. Se tiene que
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nz^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \frac{2z}{(1-z)^2} + e^z - 1,$$
luego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n+\frac{1}{n!}\right)z^n = \frac{2z}{(1-z)^2} + e^z - 1$$

Ejercicio 4. *Expresar cada función como serie de potencias centrada en* 1 *e indicar la región de validez de su desarollo.*

(a) $\dfrac{z}{z-6}$

(b) $\dfrac{z+1}{(z-4)(z+3)}$

(c) $\dfrac{1}{1+z^2}$

Solución.

(a) Se tiene que
$$\frac{z}{z-6} = \frac{z-6+6}{z-6} = 1+\frac{6}{z-6} = 1-\frac{6}{6-z} = 1-\frac{6}{5-(z-1)} = 1-\frac{\frac{6}{5}}{1-\frac{z-1}{5}} = 1-\frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{5}\right)^n$$
siempre que $|\frac{z-1}{5}|<1$, es decir, siempre que $z\in\Delta(1,5)$.

(b) Se tiene que
$$\begin{aligned}\frac{z+1}{(z-4)(z+3)} &= \frac{\frac{5}{7}}{z-4} + \frac{\frac{2}{7}}{z+3} = -\frac{\frac{5}{7}}{4-z} - \frac{\frac{2}{7}}{-3-z} = -\frac{\frac{5}{7}}{3-(z-1)} - \frac{\frac{2}{7}}{-4-(z-1)}\\ &= -\frac{\frac{5}{21}}{1-\frac{z-1}{3}} + \frac{\frac{1}{14}}{1+\frac{z-1}{4}} = -\frac{5}{21}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n + \frac{1}{14}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n\end{aligned}$$
siempre que $|\frac{z-1}{3}|<1$ y $|\frac{z-1}{4}|<1$, es decir, siempre que $z\in\Delta(1,3)$.

(c) Se tiene que
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z^2} &= \frac{\frac{i}{2}}{z+i} - \frac{\frac{i}{2}}{z-i} = -\frac{\frac{i}{2}}{-i-z} + \frac{\frac{i}{2}}{i-z} = -\frac{\frac{i}{2}}{-1-i-(z-1)} + \frac{\frac{i}{2}}{i-1-(z-1)} = \frac{\frac{i}{2(1+i)}}{1+\frac{z-1}{1+i}} + \frac{\frac{i}{2(i-1)}}{1-\frac{z-1}{i-1}}\\ &= \frac{i}{2(1+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{1+i}\right)^n + \frac{i}{2(i-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{i-1}\right)^n = \frac{1+i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{1+i}\right)^n + \frac{1-i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{i-1}\right)^n\end{aligned}$$
siempre que $|\frac{z-1}{1+i}|<1$ y $|\frac{z-1}{i-1}|<1$, es decir, siempre que $z\in\Delta(1,\sqrt{2})$.

Ejercicio 5. *Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tal que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia R. Determinar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3 z^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{5n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$

Solución.

(a) Se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R},$$

luego

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^3|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|^3} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^3 = \frac{1}{R^3}$$

Por tanto, el radio de convergencia es R^3.

(b) Sea

$$b_k = \begin{cases} a_{\frac{k}{5}} & \text{si } k = 5n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{5n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_k z^k$, y como

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[5n]{|b_{5n}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[5n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{R}},$$

entonces el radio de convergencia es $\sqrt[5]{R}$.

Otra forma: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{5n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^5)^n$ converge si $|z^5| = |z|^5 < R$, es decir, si $|z| < \sqrt[5]{R}$.

(c) Supongamos que $\rho = \frac{1}{R} \notin \{0, \infty\}$. Sea

$$b_k = \begin{cases} a_{\sqrt{k}} & \text{si } k = n^2 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_k z^k$, y como

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{|b_{n^2}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

entonces el radio de convergencia es 1. En los casos $\rho = 0$ o $\rho = \infty$ no podemos decir nada del límite superior de $\sqrt[n]{|a_n|}$. Por ejemplo, si $a_n = \frac{1}{n^n}$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

y además,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Pero si $a_n = \frac{1}{2^{n^n}}$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

y además,

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

En el caso $\rho = \infty$ sucede lo mismo.

Ejercicio 6. *La sucesión de Fibonacci $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ está definida por la relación de recurrencia*

$$c_0 = c_1 = 1, \qquad c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Probar que $0 \leq c_{n+1} \leq 2c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y deducir que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$ y, por tanto, define una función f holomorfa en el disco $\Delta(0,R)$. Dar una fórmula explícita para f, determinar R, y dar una fórmula explícita para los c_n.

Solución. Como $c_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $c_{n-1} \leq c_{n-1} + c_{n-2} = c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ (si $n = 1$ también se tiene $c_{n-1} \leq c_n$). Por tanto,

$$0 \leq c_{n+1} = c_n + c_{n-1} < c_n + c_n = 2c_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por inducción se prueba fácilmente que $c_n \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En efecto, si $n = 0$ la desigualdad es trivialmente cierta, y si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es tal que $c_n \leq 2^n$, entonces, por lo ya probado, $c_{n+1} \leq 2c_n \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Por tanto, para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica $0 \leq c_n|z|^n \leq 2^n|z|^n = |2z|^n$, y como la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n$ converge absolutamente siempre que $|2z| < 1$, por el criterio de comparación, podemos afirmar que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge absolutamente siempre que $|2z| < 1$, es decir, $|z| < \frac{1}{2}$, con lo que queda probado que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ tiene radio de convergencia $R \geq \frac{1}{2} > 0$, y en consecuencia, define una función $f : \Delta(0,R) \to \mathbb{C}$ holomorfa. Se tiene que

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty}(c_{n-1} + c_{n-2})z^n = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1}z^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}z^n \\
&= 1 + z + z\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1}z^{n-1} + z^2\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}z^{n-2} = 1 + z + z\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + z^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\
&= 1 + z + z\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - 1\right) + z^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 1 + z + z(f(z) - 1) + z^2 f(z) = 1 + zf(z) + z^2 f(z),
\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{1}{(z + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(z + \frac{1-\sqrt{5}}{2})} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{z + \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{-z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{-z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{(-\frac{2}{1+\sqrt{5}})\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{2z}{1+\sqrt{5}}} + \frac{\frac{2}{1-\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{2z}{1-\sqrt{5}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2z}{1+\sqrt{5}}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{1-\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2z}{1-\sqrt{5}}\right)^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^{n+1} - \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right)z^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)z^n
\end{aligned}$$

siempre que $|\frac{2z}{1+\sqrt{5}}| < 1$ y $|\frac{2z}{1-\sqrt{5}}|$, esto es, siempre que $|z| < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. El radio de convergencia sería entonces $R = \text{mín}\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, y, finalmente,

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

es la fórmula explícita de la sucesión de Fibonacci.

Ejercicio 7. *Dar el desarrollo de Taylor alrededor de a de las siguientes funciones, indicando su radio de convergencia y el valor de la derivada n-ésima en a.*

(a) $\dfrac{e^z}{1-z}$, $a = 0$.

(b) $\dfrac{z}{z^2-2z-3}$, $a=0$.

(c) $\cos^2(z)$, $a=0$.

(d) e^{z^2}, $a=0$.

(e) $\dfrac{2z}{z^2-1}$, $a=i$.

Solución.

(a) Si $|z|<1$, se tiene que
$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\qquad \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$
Como ambas series son absolutamente convergentes, entonces, por la fórmula del producto de Cauchy,
$$f(z)=\frac{e^z}{1-z}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{z^m}{m!}z^{n-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\right)z^n$$
El radio de convergencia de la serie es 1 y, además,
$$f^{(n)}(0)=n!\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}$$

(b) Se tiene que
$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{z}{(z-3)(z+1)}=\frac{\frac{3}{4}}{z-3}+\frac{\frac{1}{4}}{z+1}=\frac{-\frac{3}{4}}{3-z}+\frac{\frac{1}{4}}{1+z}=\frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{z}{3}}+\frac{\frac{1}{4}}{1+z}\\&=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}z^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left((-1)^n-\frac{1}{3^n}\right)z^n,\end{aligned}$$
siempre que $|\frac{z}{3}|<1$ y $|z|<1$, es decir, siempre que $|z|<1$. De esto se deduce que
$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{4}\left((-1)^n-\frac{1}{3^n}\right)$$

(c) Para todo $z\in\mathbb{C}$ se verifica
$$\cos(2z)=\cos(z+z)=\cos^2(z)-\operatorname{sen}^2(z)=\cos^2(z)-(1-\cos^2(z))=2\cos^2(z)-1,$$
luego
$$f(z)=\cos^2(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}z^{2n}$$
si llamamos $g(z)=2\cos^2(z)-1$, se tiene que
$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}z^{2n},$$
luego
$$g^{(k)}(0)=\begin{cases}k!\dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}2^k}{k!} & \text{si } k \text{ es par}\\ 0 & \text{si } k \text{ es impar}\end{cases}=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}}2^k & \text{si } k \text{ es par}\\ 0 & \text{si } k \text{ es impar}\end{cases}$$
Como $f(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}g(z)$, entonces
$$f^{(k)}(0)=\frac{1}{2}g^{(k)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}}2^{k-1} & \text{si } k \text{ es par}\\ 0 & \text{si } k \text{ es impar}\end{cases}$$

(d) Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Por tanto,

$$f(z) = e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

donde

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{(\frac{k}{2})!} & \text{si } k = 2n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En consecuencia,

$$f^{(k)}(0) = a_k k! = \begin{cases} \dfrac{k!}{(\frac{k}{2})!} & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

(e) Se tiene que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z}{z^2-1} = \frac{2z}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{-1-z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{-1-i-(z-i)} - \frac{1}{1-i-(z-i)} \\ &= \frac{\frac{1}{1+i}}{1+\frac{z-i}{1+i}} - \frac{\frac{1}{1-i}}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)^n - \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right)(z-i)^n, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$f^{(n)}(i) = n!\left(\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right)$$

Todo esto es válido si $|\frac{z-i}{1+i}| < 1$ y $|\frac{z-i}{1-i}| < 1$, luego el radio de convergencia es $\sqrt{2}$.

Ejercicio 8. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(0) = 0$ y $f(z) = e^{-\frac{1}{z^4}}$ si $z \neq 0$. Probar que $u \equiv \mathrm{Re}(f)$ y $v \equiv \mathrm{Im}(f)$ satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en todo el plano. ¿Es f una función entera?*

Solución. Si $z \neq 0$, entonces f es derivable en 0 y verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z. Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^4}}} x^3 = 0,$$

ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^3 = 0$$

Por tanto, $u_x(0) = 0$. Además,

$$\lim_{y\to 0} \frac{u(iy)-u(0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{Re}\left(e^{-\frac{1}{(iy)^4}}\right)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{y^4}}}{y} = 0,$$

así que $u_y(0) = 0$. Seguimos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{v(x)-v(0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{v(iy)-v(0)}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

así que $v_x(0) = v_y(0) = 0$ y f verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0. Sin embargo, f no es una función entera, pues ni siquiera es continua en 0: si se considera la semirrecta $s = \{r^{e^{i(\pi/4)}} : r > 0\}$, se tiene

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in r}} -\frac{1}{z^4} = \lim_{r\to 0^+} -\frac{1}{(re^{i\frac{\pi}{4}})^4} = \lim_{r\to 0^+} -\frac{1}{r^4 e^{i\pi}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r^4} = +\infty,$$

luego

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in r}} f(z)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in r}} e^{-\frac{1}{z^4}}=+\infty$$

Ejercicio 9.

(a) *Sea* $\delta>0$. *Probar que la función exponencial toma cada valor complejo salvo el* 0 *infinitas veces en el sector* $\{z\in\mathbb{C}\colon |\arg(z)-\frac{\pi}{2}|<\delta\}$.

(b) *Sea* $f(z)=e^{\frac{1}{z}}, z\neq 0$. *Probar que para cada* $r>0$, f *toma cada valor complejo salvo* 0 *infinitas veces en* $\{z\in\mathbb{C}\colon 0<|z|<r\}$.

Solución.

(a) Sea $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y consideremos la recta vertical

$$r=\{x+iy\in\mathbb{C}\colon x=\log|z|\}$$

Como la intersección de $S_{\frac{\pi}{2}}=\{z\in\mathbb{C}\colon |\arg(z)-\frac{\pi}{2}|<\delta\}$ con cualquier recta vertical es no vacía, podemos tomar $w=\log|z|+iy\in r\cap S_{\frac{\pi}{2}}$. Así, la semirrecta vertical contenida en r que parte de w_0 hacia arriba está contenida en $S_{\frac{\pi}{2}}$. Por tanto, tomando cualquier $\theta_0\in\arg(z)\cap[y,y+2\pi)$ se tiene que $w_0=\log|z|+i\theta_0\in S_{\frac{\pi}{2}}$, así que $w_k=\log|z|+i(\theta_0+2\pi k)\in S_{\frac{\pi}{2}}$ para cualquier $k\in\mathbb{N}$. Como además $e^{w_k}=z$, tenemos que la función exponencial toma el valor z infinitas veces (una vez por cada $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$).

(b) Sea $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y consideremos la recta vertical

$$r=\{x+iy\in\mathbb{C}\colon x=\log|z|\}$$

Como la intersección de $D_2=\{z\in\mathbb{C}\colon \frac{1}{r}<|z|\}$ con cualquier recta vertical es no vacía, podemos tomar $w=\log|z|+iy\in r\cap D_2$. Así, la semirrecta vertical contenida en r que parte de w_0 hacia arriba está contenida en D_2. Por tanto, tomando cualquier $\theta_0\in\arg(z)\cap[y,y+2\pi)$ se tiene que $w_0=\log|z|+i\theta_0\in D_2$, así que $w_k=\log|z|+i(\theta_0+2\pi k)\in D_2$ para cualquier $k\in\mathbb{N}$. Además, si $g(z)=\frac{1}{z}$ para $z\neq 0$ y $D_1=\{z\in\mathbb{C}\colon 0<|z|<r\}$, se tiene que $g(D_1)=D_2$, luego existe $\widetilde{w}_k\in D_1$ tal que $w_k=\frac{1}{\widetilde{w}_k}$, y por tanto $f(\widetilde{w}_k)=e^{w_k}=z$, concluyéndose que f toma el valor z infinitas veces (una vez por cada $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$).

Ejercicio 10. *Si* $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$ *para* $z\neq 0$ *y* $f(0)=1$, *probar que* f *es una función entera.*

Solución. Para todo $z\in\mathbb{C}$ se verifica

$$e^z-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Por tanto, si $z\neq 0$,

$$\frac{e^z-1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

Esta serie de potencias tiene radio de convergencia infinito (hemos visto que converge en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, y en 0 evidentemente también), así que

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

define una función holomorfa en $\mathbb{C}$, es decir, una función entera. Pero es que $g(0)=1=f(0)$ y también se ha probado que $f(z)=g(z)$ para todo $z\neq 0$, así que $f=g$ en $\mathbb{C}$ y puede concluirse que f es una función entera.

Ejercicio 11. *Estudiar la existencia de los siguientes límites y calcular los que existen:*

(a) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{e^{z^2}-1}{z^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3z)}{z}$

(c) $\lim_{z\to 1} \dfrac{e^{z^2-z}-1}{z^2-1}$

Solución.

(a) Si $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!},$$

luego

$$e^{z^2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!},$$

y si $z \neq 0$,

$$\frac{e^{z^2}-1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n+1)!} = g(z)$$

Como g es una función entera (pues la serie de potencias tiene radio de convergencia infinito), entonces es continua en 0, así que

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{z^2}-1}{z^2} = \lim_{z\to 0} g(z) = g(0) = 1$$

(b) Si $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{sen}(3z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3z)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

y si $z \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{sen}(3z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n} = g(z)$$

Como g es una función entera (pues la serie de potencias tiene radio de convergencia infinito), entonces es continua en 0, así que

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3z)}{z} = \lim_{z\to 0} g(z) = g(0) = 3$$

(c) Si $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{z^2-z} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2-z)^n}{n!},$$

y si $z \notin \{-1, 1\}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{e^{z^2-z}-1}{z^2-1} &= \frac{1}{(z+1)(z-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n(z-1)^n}{n!} = \frac{1}{z+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n(z-1)^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}(z-1)^n}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{z(z+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2-z)^n}{(n+1)!}\end{aligned}$$

La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(n+1)!}$ tiene radio de convergencia infinito (pues $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$), así que la función dada por $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(n+1)!}$ es continua en 1. Por tanto,

$$\lim_{z\to 1} \frac{e^{z^2-z}-1}{z^2-1} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z(z+1)} g(z^2-z) = \frac{1}{2},$$

ya que

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{z\to 1} g(z^2-z) = g(0) = 1$$

Ejercicio 12. *Realizar un estudio del comportamiento de $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $z \neq 0$, sobre circunferencias centradas en 0 y sobre semirrectas que parten de 0. Determinar dominios maximales de inyectividad de f, así como las imágenes de dichos dominios.*

Solución. Si $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta\right)$$

Si $u \equiv \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$ y $v \equiv \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta$, entonces

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right)^2} = 1$$

De aquí puede deducirse que f transforma una circunferencia de radio $r \neq 1$ centrada en 0 en una elipse centrada en 0, con vértices principales en $\pm\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ y vértices secundarios en $\pm\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$ (ya que $|\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})| > |\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})|$). También, como $(r + \frac{1}{r})^2 - (r - \frac{1}{r})^2 = 4$, entonces se satisface la relación

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

Si θ es constante se observa que f transforma una semirrecta que parte de 0 y forma ángulo constante con el origen θ (se llamará, de aquí en adelante, r_θ) en una hipérbola centrada en cero con vértices principales en $\pm\cos\theta$ y asíntotas de pendientes $\pm\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

Habría que estudiar a parte los casos en los que las divisiones realizadas causan problemas. Primero, si $r = 1$, entonces $f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos\theta$, luego f envía la circunferencia unidad en el segmento $[-1,1]$ (recorrido dos veces). Si fuera $\cos^2\theta = 0$, o sea, $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces $f(re^{i\theta}) = i\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$, y como

$$\lim_{r\to\infty}\left(r - \frac{1}{r}\right) = \infty, \qquad \lim_{r\to 0^+}\left(r - \frac{1}{r}\right) = -\infty,$$

entonces f envía la semirrecta $r_{\frac{\pi}{2}+\pi k}$ en el eje imaginario. De forma análoga, si $\operatorname{sen}^2\theta = 0$, o sea, si $\theta = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $f(re^{i\theta}) = (-1)^k\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, y además,

$$\lim_{r\to\infty}\left(r + \frac{1}{r}\right) = \infty, \qquad \lim_{r\to 0^+}\left(r + \frac{1}{r}\right) = \infty,$$

Si k es par, entonces la parametrización $r \mapsto \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, $r \in (0,\infty)$ de $f(r_{\pi k})$ recorre la semirrecta del eje real $\{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 1\}$, empezando por el infinito, llegando hasta 1 y volviendo al infinito. Y si k es impar, entonces $f(r_{\pi k})$ es la semirrecta $\{x \in \mathbb{R} \colon x \leq -1\}$ recorrida empezando por $-\infty$, llegando hasta -1 y volviendo a $-\infty$.

Analicemos ahora cuándo f es inyectiva. Se tiene que

$$\begin{aligned} f(z) = f(w) &\iff z + \frac{1}{z} = w + \frac{1}{w} \iff z^2 + 1 = zw + \frac{z}{w} \iff z^2 w + w = zw^2 + z \\ &\iff z^2 w + w - zw^2 - z = 0 \iff (zw-1)(z-w) = 0 \iff \begin{cases} \text{o bien } z = w^{-1} \\ \text{o bien } z = w \end{cases} \end{aligned}$$

Obsérvese que f es inyectiva en cualquier dominio D en el que se verifique la propiedad siguiente: $z \in D \implies z^{-1} \notin$. Sean $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 \leq |z| < 1\}$ y $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z|\}$. Entonces $z^{-1} \in D_2$ para todo $z \in D_1$, y al revés, $z^{-1} \in D_1$ para todo $z \in D_2$. Observamos entonces que f es inyectiva en D_1 y D_2 y no puede ser inyectiva en un dominio que contenga a alguno de los dos.

Ejercicio 13. *Sean $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ y $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ dos sucesiones de números complejos. Consideremos la sucesión $\{A_n\}_{n=0}^\infty$ de sumas parciales asociada a $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k, n \geq 0$.*

(a) Demostrar la fórmula de sumación por partes: para $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$$

(b) *Demostrar los siguientes resultados:*

Teorema 1 (Teorema de Abel). *Si* $\sum_{k=0}^{\infty}|b_k - b_{k+1}| < \infty$, $\lim b_n = 0$ *y la sucesión* $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ *está acotada, entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

Teorema 2. *Si* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión decreciente,* $\lim b_n = 0$ *y la sucesión* $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es acotada, entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

Dar resultados análogos que garanticen la convergencia uniforme para series funcionales.

(c) *Sabemos que las series de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ *tienen radio de convergencia* 1. *Estudiar la convergencia de las mismas en* $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(d) *Probar el siguiente resultado:*

Teorema 3 (Teorema de Abel). *Supongamos que la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *tiene radio de convergencia* 1 *y que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge, digamos a* A. *Entonces* $\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ *existe y vale* A.

Indicación: usar la fórmula de sumación por partes para deducir que si $|z| < 1$, *entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1-z)\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A = (1-z)\sum_{k=0}^{\infty} (A_k - A) z^k$$

Solución.

(a) Usando que $a_n = A_n - A_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_0 = A_0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = A_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\
&= A_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = \cancel{A_0 b_0} - \cancel{A_0 b_0} + A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\
&= A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})
\end{aligned}$$

(b) *Demostración del Teorema 1.* Si $|A_n| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces, aplicando el apartado anterior y la desigualdad triangular, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| \le M|b_n| + M\sum_{k=0}^{n-1} |b_k - b_{k+1}|$$

Como por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| = L < \infty,$$

al tomar límites en la desigualdad anterior se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| \le L < \infty,$$

luego $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \le L < \infty$ y por tanto la serie converge.

Demostración del Teorema 2. Si la sucesión $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente, entonces $b_k - b_{k+1} > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1},$$

luego, tomando límites,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |b_k - b_{k+1}| = b_0$$

y el apartado anterior termina la prueba.

Resultados análogos que garanticen la convergencia uniforme para series funcionales. Sean $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones definidas en $\Omega \subset \mathbb{C}$ y tomando valores complejos. Sea $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de sumas parciales asociada a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k, n \geq 0$.

Teorema. *Si $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k - g_{k+1}|$ converge uniformemente, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a 0 y $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ es uniformemente acotada, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ es converge uniformemente.*

Teorema. *Si $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ verifica $g_{n+1}(z) \leq g_n(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \Omega$, la sucesión $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a 0 y la sucesión $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ es uniformemente acotada, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ converge uniformemente.*

(*c*) En primer lugar, para todo $z \in \partial\mathbb{D}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\left|\frac{z^2}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2},$$

y como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces, por el criterio de Weierstrass, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2}{n^2}$ es absoluta y uniformemente convergente en $\partial\mathbb{D}$. Veamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ es puntualmente convergente en $\partial D \setminus \{1\}$. Sea $z = e^{i\theta} \in \partial D$ con $z \neq 1$ (o sea, $\theta \not\in \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$). Sean $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n = z^n$. La sucesión $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente y con límite cero, y, por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^n\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{1+|e^{i(n+1)\theta}|}{|1-e^{i\theta}|} = M$$

Por el apartado anterior, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ es convergente. Sin embargo, la serie no converge absolutamente, pues $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge. Por último, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ no converge de ninguna de las maneras, pues la sucesión $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ no tiene límite 0 para ningún $z \in \partial\mathbb{D}$.

(*d*) *Demostración del Teorema 3*. Si $|z| < 1$, por la fórmula de sumación por partes aplicada a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = A_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (z^k - z^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = A_n z^n + (1-z) \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k$$

Por hipótesis se tiene

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k < \infty$$

Además, por ser $|z| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0$$

Por tanto, podemos tomar límite en límite en la igualdad anterior para obtener

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = A \cdot 0 + (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k = (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k,$$

y en consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - A = (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k - (1-z)\frac{A}{1-z} = (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k - (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} A z^k = (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} (A_k - A) z^k$$

Veamos ahora que

$$\lim_{r\to 1^-} (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} (A_k - A) r^k = 0,$$

lo que dejará demostrado el teorema. Hay que probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $r \in \mathbb{D}$ con $0 < |r-1| < \delta$ se tiene que

$$\left|(1-r)\sum_{k=0}^{\infty}(A_k - A)r^k\right| < \varepsilon$$

Sea $\varepsilon > 0$. En primer lugar, como

$$\lim_{k\to\infty}(A_k - A) = 0,$$

entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq k_0$ es

$$|A_k - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Por otra parte, como

$$\lim_{r\to 1^-}|1-r|\sum_{k=0}^{k_0-1}|A_k - A||r|^k = 0,$$

entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $r \in \mathbb{D}$ con $0 < |r-1| < \delta$ se verifica

$$|1-r|\sum_{k=0}^{k_0-1}|A_k - A||r|^k < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por último, sea $M \geq 0$ de forma que para todo $r \in \mathbb{D}$ con $0 < |r-1| < \delta$ se tenga

$$\frac{|1-r|}{1-|r|} < M$$

Entonces, si $r \in \mathbb{D}$ y $0 < |r-1| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|(1-r)\sum_{k=0}^{\infty}(A_k - A)r^k\right| &\leq |1-r|\sum_{k=0}^{\infty}|A_k - A||r|^k = |1-r|\sum_{k=0}^{k_0-1}|A_k - A||r|^k + |1-r|\sum_{k=k_0}^{\infty}|A_k - A||r|^k \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M}|1-r|\sum_{k=k_0}^{\infty}|r|^k = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M}\frac{|1-r||r|^{k_0}}{1-|r|} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon M|r|^{k_0}}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon|r|^{k_0}}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ejercicio 14.

(a) *Sea* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *el disco unidad. Probar que existe una rama de* $\log(\frac{1}{1+z})$ *en* $\mathbb{D}$. *Tomar la que en* 0 *vale* 0 *y obtener su desarollo en serie de potencias alrededor de* 0.

(b) *Usar el teorema de Abel anterior para comprobar que* $\mathrm{Log}(2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

(c) *Para* $|z-1| \leq r < 1$ *y la rama principal de* $\log(z)$, *probar que* $|\mathrm{Log}(z)| \leq \mathrm{Log}(\frac{1}{1-r})$.

Solución.

(a) Si $z = x + iy \in \mathbb{D}$, entonces

$$\frac{1}{1+z} = \frac{\overline{1+z}}{|1+z|^2} = \frac{1+x-iy}{(1+x)^2+y^2} = \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2} - i\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

Como $x \in (-1,1)$ (pues $z \in \mathbb{D}$), entonces $1+x > 0$, luego

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+z}\right) = \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2} > 0$$

así que la imagen de la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{1+z}$ está contenida en $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, donde existe una rama del $\arg(z)$; concretamente, el argumento principal. Por tanto, $g(z) = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1+z}\right)$ es una rama de $\log(\frac{1}{1+z})$ y además en 0 vale $\operatorname{Log}(1) = 0$. Como f es derivable en el abierto $\mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces g es derivable en $\mathbb{D}$ y

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{\frac{1}{(1+z)^2}}{\frac{1}{1+z}} = -\frac{1}{1+z} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

de donde se deduce que

$$g(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$$

siempre que $z \in \mathbb{D}$.

(b) Como la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$$

tiene radio de convergencia 1 y la serie

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente (por el criterio de Leibniz), entonces el teorema de Abel permite afirmar que

$$\lim_{z\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n = \lim_{z\to 1^-} g(z)$$

existe y vale A, concluyéndose que podemos extender g a $\mathbb{D} \cup \{1\}$ de manera continua mediante $g(1) = A$, es decir, $\operatorname{Log}\left(\frac{1}{2}\right) = -\operatorname{Log}(2) = A$, con lo que

$$\operatorname{Log}(2) = -A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

(c) Si $r < 1$ y $z \in \Delta(1, r)$, entonces

$$\begin{aligned}|\operatorname{Log}(z)| &= \left|-\operatorname{Log}\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \left|-\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1+z-1}\right)\right| = |-g(z-1)| = \left|-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(z-1)^n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|z-1|^n \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-r)^n = g(-r) = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-r}\right),\end{aligned}$$

donde se ha usado que $z - 1 \in \mathbb{D}$ y que $-r \in \mathbb{D}$.

Ejercicio 15. *Estudiar el comportamiento de las siguientes series de potencias en las fronteras de sus respectivos discos de convergencia.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{Log}(n)} z^{3n-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$

Solución.

(*a*) Sea

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{\mathrm{Log}(n)} & \text{si } k = 3n-1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[3n-1]{|a_{3n-1}|} = \limsup_{n\to\infty} \mathrm{Log}(n)^{\frac{1}{1-3n}} = \limsup_{n\to\infty} e^{\frac{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(n))}{1-3n}}$$

Se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(x))}{1-3x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(x))}{3x-1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x\,\mathrm{Log}(x)} = 0,$$

así que

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$$

y el radio de convergencia es 1. Como además la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mathrm{Log}(n)}$$

es convergente (por el criterio de Leibniz), entonces $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ también, así que el teorema de Abel permite afirmar que

$$\lim_{z\to 1^-} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mathrm{Log}(n)} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

con lo que la serie de potencias converge en la frontera del disco de convergencia.

(*b*) Sea

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & \text{si } k = n! \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n!]{|a_{n!}|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n!]{n^2}} = 1$$

y el radio de convergencia es 1. Como además la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ también, así que el teorema de Abel permite afirmar que

$$\lim_{z\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

con lo que la serie de potencias converge en la frontera del disco de convergencia.

(*c*) Se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

luego el radio de convergencia es 1. Como además la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente (por el criterio de Leibniz), entonces el teorema del límite de Abel permite afirmar que

$$\lim_{z\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

con lo que la serie de potencias converge en la frontera del disco de convergencia.