Topología General

Curso 2022-2023

Índice

Tema 0

Espacios métricos

0.1. Introducción

Recordemos las siguientes definiciones:

Definición 0.1. Una sucesión $\{x_n\}$ de números reales converge a $x_0 \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ se verifica $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Definición 0.2. Una aplicación $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x - x_0| < \delta$ se verifica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

En ambas definiciones, las desigualdades $|x_n - x_0| < \varepsilon$ y $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ quieren decir que la *distancia* entre x_n y x_0 y entre $f(x)$ y $f(x_0)$ es menor que ε. A partir de esta idea, podemos dar la siguiente definición:

Definición 0.3. Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto dotado de una aplicación $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ (denominada distancia) que satisface las siguientes propiedades:

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x, y) \geq 0 \ \forall\ x, y \in X$

(iii) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall\ x, y \in X$

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \forall\ x, y, z \in X$ (desigualdad triangular)

Ejemplo 0.1. Sea $X = \mathbb{R}$ y sea $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y veamos que d es una distancia.

(i) $d(x, y) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x, y) = |x - y| \geq 0$

(iii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$

(iv) $d(x, y) = |x - y| = |x - y + z - z| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$

Ejemplo 0.2. Sea $X = \mathbb{R}^n$ y sea $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$. Entonces d es una distancia sobre $\mathbb{R}^n$ y recibe el nombre de distancia euclídea

Ejemplo 0.3. Sea X un conjunto no vacío y sea $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Entonces d es una distancia sobre X y recibe el nombre de distancia discreta.

En un espacio métrico (X,d) cualquiera podemos definir de la siguiente manera la convergencia de una sucesión y la continuidad de una aplicación:

Definición 0.4. Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de X converge a $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ se verifica $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Definición 0.5. Sea (X,d) un espacio métrico. Una aplicación $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ es continua en $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $d(x,x_0) < \delta$ se verifica $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

0.2. Bolas y abiertos en un espacio métrico

Definición 0.6. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $x_0 \in X,\ r > 0$. Se define la bola abierta de centro x_0 y radio r como

$$B(x_0;r) = \{x \in X \mid d(x,x_0) < r\}$$

Definición 0.7. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $x_0 \in X,\ r > 0$. Se define la bola cerrada de centro x_0 y radio r como

$$\overline{B}(x_0;r) = \{x \in X \mid d(x,x_0) \leq r\}$$

Proposición 0.1. *Sea (X,d) un espacio métrico y sean $x_0 \in X,\ r \leq s$. Se tiene que*

(i) $B(x_0;r) \subset B(x_0;s)$

(ii) $B(x_0;r) \subset \overline{B}(x_0;r)$

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 0.4. Sean $X = \mathbb{R}$, d la distancia euclídea. Sean $x_0 \in \mathbb{R},\ r > 0$. Entonces

- $B(x_0;r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x_0 - x| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$
- $\overline{B}(x_0;r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,x_0) \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x_0 - x| \leq r\} = [x_0 - r, x_0 + r]$

Ejemplo 0.5. Sea $(X,d) = (\mathbb{R}^2, d)$ (espacio euclídeo) y sean $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2,\ r > 0$. Entonces

- $$\begin{aligned} B(x_0;r) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(x_0,y_0)) < r\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\} \end{aligned}$$

- $\overline{B}(x_0;r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}$

Ejemplo 0.6. Sea (X,d) un espacio métrico discreto (d es la distancia discreta) y sean $x_0 \in X,\ r > 0$. Entonces

$$B(x_0;r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{si } r \leq 1 \\ X & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Definición 0.8. Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto $\theta \subset X$ se dice que es <u>abierto</u> si dado $x \in \theta$ existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset \theta$.

Observación.

- Toda bola abierta es un conjunto abierto. En efecto, sea (X,d) un espacio métrico y sean $x_0 \in X,\ r > 0$. Veamos que $B(x_0;r)$ es abierto. Tomemos $y \in B(x_0;r),\ s = d(x_0,y)$. Vamos a comprobar que $B(y;r-s) \subset B(x_0;r)$. Sea $z \in B(y;r-s)$. Entonces se verifica que
$$d(x_0,z) \leq d(x_0,y) + d(y,z) < s + r - s = r \implies z \in B(x_0;r)$$
luego $B(y;r-s) \subset B(x_0;r)$ y $B(x_0;r)$ es abierto.
- No todo abierto es una bola abierta.
- Las bolas cerradas, en general, no son abiertos.

Proposición 0.2. *Sea (X,d) un espacio métrico. Se tiene que*

(i) $\emptyset$ y X son abiertos.

(ii) Si $\{\theta_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos, entonces $\bigcup_{i\in I} \theta_i$ es abierto.

(iii) Si $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de abiertos, entonces $\bigcap_{i=1}^n \theta_i$ es abierto.

Demostración.

(i) Trivial.

(ii) Sea $\{\theta\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de abiertos y veamos que $\bigcup_{i\in I} \theta_i$ es abierto. Sea $x \in \bigcup_{i\in I} \theta_i$. Entonces $x \in \theta_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$. Como θ_{i_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que
$$B(x;r) \subset \theta_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} \theta_i$$
Por tanto, $\bigcup_{i\in I} \theta_i$ es abierto.

(iii) Sea $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ una familia de n abiertos y veamos que $\bigcap_{i=1}^n \theta_i$ es abierto. Sea $x \in \bigcap_{i=1}^n \theta_i$. Entonces $x \in \theta_i\ \forall\ i = 1,\dots,n$. Como θ_i es abierto $\forall\ i$, existen $r_1, r_2, \dots, r_n > 0$ tales que
$$B(x;r_1) \subset \theta_1, B(x;r_2) \subset \theta_2, \dots, B(x;r_n) \subset \theta_n$$

Sea $r = \text{mín}\,\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Entonces

$$B(x;r) \subset B(x;r_i) \subset \theta_i \;\forall\; i = 1, \ldots, n \implies B(x;r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \theta_i$$

y esto desmuestra que $\bigcap_{i=1}^{n} \theta_i$ es abierto.

□

Observación. En general, la intersección arbitraria de abiertos no es un abierto. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ consideremos $\{B(x_0; \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_0; \frac{1}{n}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) = \{x_0\}$$

que no es abierto.

Llegados a este punto, es fácil comprobar los siguientes resultados:

Proposición 0.3. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio métrico (X, d). Son equivalentes:*

(i) $\{x_n\}$ *converge a* x_0.

(ii) Dado θ abierto con $x_0 \in \theta$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $x_n \in \theta$.

Demostración. Ejercicio 7 de la Relación 0. □

Proposición 0.4. *Sea $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una aplicación entre espacios métricos. Son equivalentes:*

(i) f es continua en $x_0 \in X$.

(ii) Dado V abierto de Y con $f(x_0) \in V$, existe un abierto U de X con $x_0 \in U$ tal que $f(U) \subset V$.

Demostración. Ejercicio 8 de la Relación 0. □

Todo esto nos lleva a...

Tema 1

Espacios topológicos

1.1. Introducción

Definición 1.1. Un espacio topológico (X, τ) es un conjunto X dotado de una familia de subconjuntos de X, τ, llamada topología, que satisface

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Si $\{\theta_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de τ, entonces $\bigcup_{i\in I} \theta_i \in \tau$.

(iii) Si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{j=1}^{n} \theta_j \in \tau$.

A los elementos de τ se les llama abiertos del espacio topológico.

En ocasiones no se hará mención específica de τ si no existe confusión, diciendo simplemente que X es un espacio topológico.

Ejemplo 1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Consideramos

$$\tau = \{\theta \in X \mid \forall\, x \in \theta,\ \exists\, r > 0\colon B(x; r) \subset \theta\}$$

La Proposición 0.2 nos garantiza que (X, τ) es un espacio topológico.

Antes de seguir, veamos que el concepto de espacio topológico es más general que el concepto de espacio métrico, es decir, que existen espacios topológicos en los que τ no es la colección asociada a ninguna distancia (en este caso diremos que X no es metrizable).

Definición 1.2. Un espacio topológico (X, τ) es Hausdorff si "separa puntos por abiertos", es decir, si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos $\theta_x \ni x, \theta_y \ni y$ tales que $\theta_x \cap \theta_y = \emptyset$.

Proposición 1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico que proviene de una distancia d en X, es decir, un espacio topológico cuya topología es*

$$\tau = \{\theta \in X \mid \forall\, x \in \theta,\ \exists\, r > 0\colon B(x; r) \subset \theta\}$$

Entonces (X, τ) es Hausdorff.

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ y tomemos los abiertos $B(x; \frac{r}{4}) \ni x, B(y; \frac{r}{4}) \ni y$, donde $r = d(x, y)$. Veamos que $B(x; \frac{r}{4}) \cap B(y; \frac{r}{4}) = \emptyset$ y, por tanto, (X, τ) es Hausdorff.. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $z \in B(x; \frac{r}{4}) \cap B(y; \frac{r}{4})$. Entonces $d(x, z) < \frac{r}{4}$ y $d(y, z) < \frac{r}{4}$. Por la desigualdad triangular,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \implies r \leq \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}$$

que es imposible. Por tanto, $B(x; \frac{r}{4}) \cap B(y; \frac{r}{4}) = \emptyset$, luego (X, τ) es Hausdorff. $\square$

Ejemplo 1.2. Sean $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. El espacio topológico (X, τ) no es Hausdorff, pues el único abierto que contiene a b contiene también a a.

Definición 1.3. Un espacio topológico (X, τ) es <u>metrizable</u> si τ es la topología asociada a una distancia, es decir, si

$$\tau = \{\theta \in X \mid \forall\, x \in \theta,\ \exists\, r > 0\colon B(x; r) \subset \theta\}$$

Ejemplo 1.3. Dado un conjunto X, se define la <u>topología grosera</u> como $\tau_g = \{\emptyset, X\}$. Siempre que X tenga más de un punto, el espacio topológico (X, τ_g) no es metrizable, pues no es Hausdorff.

Ejemplo 1.4. Dado un conjunto X, se define la <u>topología discreta</u> como $\tau_d = \mathcal{P}(X)$. Veamos que (X, τ_d) es metrizable comprobando que τ_d es la topología asociada a la distancia discreta. Sabemos que

- $B(x; r) = \{x\}$ si $r \geq 1$.
- $B(x; r)$ es abierto.

Sea $A \subset X$. Entonces $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} = \bigcup_{a \in A} B(a; \frac{1}{2})$, luego A es abierto (la unión de abiertos es un abierto). Como hemos probado que $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ es la topología asociada a la distancia discreta, tenemos que X es metrizable.

Ejemplo 1.5. Sea X un conjunto infinito. Se define la <u>topología de los complementos finitos</u> como

$$\tau_c = \{\emptyset,\ \theta \subset X \mid \theta^c \text{ es finito}\}$$

Veamos que (X, τ_c) es espacio topológico:

(i) $\emptyset \in \tau_c$ y $X \in \tau_c$ por ser $X^c = \emptyset$ finito.

(ii) Sea $\{\theta_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos y veamos que $\bigcup_{i \in I} \theta_i \in \tau_c$. Si $\bigcup_{i \in I} \theta_i = \emptyset$, hemos terminado. Supongamos que $\bigcup_{i \in I} \theta_i \neq \emptyset$. Esto significa que $\theta_{i_0} \neq \emptyset$ para algún $i_0 \in I$. Por tanto,

$$\left(\bigcup_{i \in I} \theta_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} \theta_i^c \subset \theta_{i_0}^c$$

Este último conjunto es finito por ser $\theta_{i_0} \neq \emptyset$, luego $\bigcup_{i \in I} \theta_i \in \tau_c$.

(iii) Sean $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \tau_c$. Si $\bigcap_{j=1}^n \theta_j = \emptyset$ hemos terminado. Supongamos que $\bigcap_{j=1}^n \theta_j \neq \emptyset$. Esto significa que $\theta_j \neq \emptyset \ \forall \ j = 1, \ldots, n$. Tenemos que

$$\left(\bigcap_{j=1}^n \theta_j \right)^c = \bigcup_{j=1}^n \theta_j^c$$

Este último conjunto es finito por ser unión de conjuntos finitos, luego $\bigcap_{j=1}^n \theta_j \in \tau_c$.

Veamos ahora que (X, τ_c) no es metrizable comprobando que no es Hausdorff. Supongamos, por reducción al absurdo, que (X, τ_c) es Hausdorff. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ y tomemos $\theta_x \ni x, \theta_y \ni y$ abiertos tales que $\theta_x \cap \theta_y = \emptyset$. Entonces

- $(\theta_x \cap \theta_y)^c = \theta_x^c \cup \theta_y^c$ (finito)
- $(\theta_x \cap \theta_y)^c = \emptyset^c = X$ (infinito)

Esto es una contradicción, así que (X, τ_c) no es Hausdorff.

1.2. Cerrados en un espacio topológico

Definición 1.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si F^c es abierto, es decir, si $F^c \in \tau$.

Proposición 1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se tiene que*

(i) $\emptyset$ y X son cerrados.

(ii) Si $\{F_i\}_{i \in I}$ es una familia de cerrados, entonces $\bigcap_{i \in I} F_i$ es cerrado.

(iii) Si $\{F_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^n F_i$ es cerrado.

Demostración. Ejercicio. □

Observación. Un conjunto se diferencia de una puerta en que una puerta debe estar abierta o cerrada y un conjunto puede no ser abierto ni cerrado (el intervalo $(0, 1] \subset \mathbb{R}^2$) o ser abierto y cerrado al mismo tiempo ($\emptyset$, $\mathbb{R}$).

Ejemplo 1.6. En la topología de los complementos finitos (X, τ_c), los cerrados son X y los subconjuntos finitos.

Ejemplo 1.7. En los espacios métricos o espacios topológicos metrizables, las bolas cerradas son cerrados.

1.3. Puntos interiores y adherentes

Definición 1.5. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Un punto $x \in A$ es interior a A (lo denotamos $x \in \mathring{A}$) si existe un abierto θ tal que $x \in \theta \subset A$.

Definición 1.6. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Un punto $x \in X$ es adherente a A (lo denotamos $x \in \overline{A}$) si para todo abierto θ con $x \in \theta$ se tiene que $\theta \cap A \neq \emptyset$.

Observación. Siempre se cumple que $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.

Proposición 1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Entonces*

(i) $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{\theta \text{ ab.} \\ \theta \subset A}} \theta$

(ii) $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ cer.} \\ F \supset A}} F$

Demostración.

(i) $\underline{\subset|}$ Sea $x \in \mathring{A}$. Entonces existe un abierto θ_0 con $x \in \theta_0 \subset A$, luego $x \in \bigcup_{\substack{\theta \text{ ab.} \\ \theta \subset A}} \theta$.

$\underline{\supset|}$ Sea $x \in \bigcup_{\substack{\theta \text{ ab.} \\ \theta \subset A}} \theta$. Entonces $x \in \theta_0$ con θ_0 abierto de X, luego $x \in \mathring{A}$.

(ii) $\underline{\subset|}$ Sea $x \notin \bigcap_{\substack{F \text{ cer.} \\ F \supset A}} F$. Entonces existe un cerrado F_0 con $F_0 \supset A$ y $x \notin F_0$, luego $x \in F_0^c$ (que es abierto) y $F_0^c \subset A^c$. Por tanto, $F_0^c \cap A = \emptyset$, así que $x \notin \overline{A}$.

$\underline{\supset|}$ Sea $x \notin \overline{A}$. Entonces existe un abierto θ_0 tal que $x \in \theta_0$ y $\theta_0 \cap A = \emptyset$, luego $x \notin \theta_0^c$ (que es cerrado) y $\theta_0^c \supset A$, así que $x \notin \bigcap_{\substack{F \text{ cer.} \\ F \supset A}} F$.

□

Corolario 1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Entonces*

(i) $\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en A.

(ii) $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.

Proposición 1.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces*

(i) $A \subset X$ es abierto $\iff$ $A = \mathring{A}$.

(ii) Si $A \subset B$, entonces $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

(iii) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Demostración.

(i) Supongamos que $A \subset X$ es abierto y veamos que $A = \mathring{A}$.

$\underline{\subset|}$ Sea $x \in A$. Como A es abierto, $x \in \bigcup_{\substack{\theta \text{ ab.} \\ \theta \subset A}} \theta = \mathring{A}$.

$\underline{\supset|}$ Sea $x \in \mathring{A}$. Como $\mathring{A} \subset A$, tenemos que $x \in A$.

Supongamos ahora que $\mathring{A} = A$. Entonces A es abierto porque $\mathring{A}$ lo es.

(ii) Supongamos que $A \subset B$ y sea $x \in \mathring{A}$. Entonces existe un abierto θ con $x \in \theta \subset A \subset B$, luego $x \in \mathring{B}$.

(iii) $\subset\rfloor$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subset A \\ A\cap B\subset B \end{array}\right\} \overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{A\cap B}\subset \mathring{A} \\ \overset{\circ}{A\cap B}\subset \mathring{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\circ}{A\cap B}\subset \mathring{A}\cap\mathring{B}$$

$\supset\rfloor$ Sea $x\in \mathring{A}\cap\mathring{B}$.

$$\left.\begin{array}{l} x\in\mathring{A} \Longrightarrow \exists \text{ un abierto } U \text{ con } x\in U\subset A \\ x\in\mathring{B} \Longrightarrow \exists \text{ un abierto } V \text{ con } x\in V\subset B \end{array}\right\} \Longrightarrow x\in U\cap V\subset A\cap B$$

Por tanto, $x\in \overset{\circ}{A\cap B}$.

$\square$

Observación. Nótese que $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subset \overset{\circ}{A\cup B}$ pero, en general, $\overset{\circ}{A\cup B}\not\subset \mathring{A}\cup\mathring{B}$. Por ejemplo, en $X=\mathbb{R}$, consideremos $A=(0,1), B=[1,2)$. Se tiene que $A\cup B=(0,2)$, que es abierto, luego $\overset{\circ}{A\cup B}=A\cup B=(0,2)$. Sin embargo, por ser $\mathring{A}=A=(0,1)$ y $\mathring{B}=(1,2)$, tenemos $\mathring{A}\cup\mathring{B}=(0,2)\setminus\{1\}$.

Proposición 1.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces*

(i) $A\subset X$ *es cerrado* $\iff A=\overline{A}$.

(ii) Si $A\subset B$, *entonces* $\overline{A}\subset\overline{B}$.

(iii) $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$

Demostración.

(i) Es elemental.

(ii) Sean $A\subset B,\ x\in\overline{A}$. Entonces para todo abierto θ con $x\in\theta$ se tiene que $\theta\cap A\neq\emptyset$ (por definición de $\overline{A}$) y también $\theta\cap B\neq\emptyset$ (por lo anterior y por $A\subset B$), luego $x\in\overline{B}$.

(iii) $\subset\rfloor$

$$\left.\begin{array}{l} A\subset A\cup B \\ B\subset A\cup B \end{array}\right\} \overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} \overline{A}\subset \overline{A\cup B} \\ \overline{B}\subset \overline{A\cup B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$$

$\supset\rfloor$ Sea $x\notin\overline{A}\cup\overline{B}$.

$$\left.\begin{array}{l} x\notin\overline{A} \Longrightarrow \exists \text{ un abierto } U \text{ con } x\in U \text{ y } U\cap A=\emptyset \\ x\notin\overline{B} \Longrightarrow \exists \text{ un abierto } V \text{ con } x\in V \text{ y } V\cap B=\emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x\in U\cap V=\theta \text{ (abierto) y } \theta\cap(A\cup B)=(\theta\cap A)\cup(\theta\cap B)=\emptyset$$

Por tanto, $x\notin\overline{A\cup B}$.

$\square$

Observación. Por (ii) se cumple que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$, pero en general $\overline{A}\cap\overline{B}\not\subset\overline{A\cap B}$. Por ejemplo, tomemos $X=\mathbb{R},\ A=[0,1), B=(1,2]$. Tenemos que $\overline{A}=[0,1], \overline{B}=[1,2]$, pero

- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$

Definición 1.7. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Se define la frontera de A como

$$fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

Observación. Se tiene que $fr(A)$ es siempre cerrado, pues $fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (\mathring{A})^c$ es intersección de cerrados.

Ejemplo 1.8. Sean $X = \{a, b\}, \tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}, A = \{a\}, B = \{b\}$. Entonces

- $\mathring{A} = \{a\}$
- $\overline{A} = X$
- $fr(A) = X \setminus \{a\} = \{b\}$
- $\mathring{B} = \emptyset$
- $\overline{B} = B$
- $fr(B) = B \setminus \emptyset = B$

Para calcular $\mathring{A}$ y $\overline{A}$ suele ser útil el Corolario 1.1.

1.4. Puntos de acumulación y aislados

Definición 1.8. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Un punto $x \in X$ es de acumulación de A (lo denotamos $x \in A'$) si para todo abierto $\theta \ni x$ se tiene que $\theta \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, es decir, $\theta \cap A \neq \emptyset$ y $\theta \cap A \neq \{x\}$.

Definición 1.9. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Un punto $x \in X$ es aislado (lo denotamos $x \in Ais(A)$) de A si existe un abierto $\theta \ni x$ tal que $\theta \cap A = \{x\}$.

Ejemplo 1.9. En $\mathbb{R}$, tomemos $A = (1, 2) \cup \{3\}$. Entonces $A' = [1, 2],\ Ais(A) = 3$.

Proposición 1.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Entonces $\overline{A} = A' \dot{\cup} Ais(A)$.*

Demostración. Ejercicio. □

Definición 1.10. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ es denso si todo abierto no vacío de X corta a A, es decir, si dado $\theta \in \tau$ con $\theta \neq \emptyset$ se tiene que $\theta \cap A \neq \emptyset$.

Proposición 1.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces $A \subset X$ es denso si y solo si $\overline{A} = X$.*

Demostración.

$\Rightarrow\rfloor$ Sea $A \subset X$ un subconjunto denso y veamos que $\overline{A} = X$.

$\subset\rfloor$ Trivial.

$\underline{\supset|}$ Sea $x \in X$ y sea θ un abierto con $x \in \theta$ (por tanto $\theta \neq \emptyset$). Como A es denso, $\theta \cap A \neq \emptyset$, luego $x \in \overline{A}$.

$\underline{\Leftarrow|}$ Sea $A \subset X$ con $\overline{A} = X$ y veamos que A es denso. Sea θ un abierto no vacío y sea $x \in \theta$. Como $x \in \overline{A}$, se tiene que $\theta \cap A \neq \emptyset$, luego A es denso.

$\square$

Ejemplo 1.10. En $\mathbb{R}$, consideremos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Sea θ un abierto no vacío. Sean $x_0 \in \theta$, $\varepsilon > 0$. Entonces $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset \theta$ y $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, luego $\theta \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

En general, en $\mathbb{R}^n$, el subconjunto $\mathbb{Q}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Q} \; \forall \, i = 1, \dots, n\}$ es denso, pues cualquier abierto $\theta \neq \emptyset$ ha de contener a una bola abierta que corta a $\mathbb{Q}^n$.

Ejemplo 1.11. Sea (X, τ_g) un espacio grosero. Cualquier subconjunto $A \neq \emptyset$ es denso, pues $\overline{A} = X$.

Ejemplo 1.12. Sea (X, τ_d) un espacio discreto. X es el único subconjunto denso, pues dado $A \subsetneq X$, se tiene que $\overline{A} = A \neq X$, luego A no es denso.

1.5. Subespacios topológicos

Definición 1.11. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Definimos la <u>topología inducida</u> en Y por X, o <u>topología de subespacio</u>, como

$$\tau_Y = \{\theta \cap Y \mid \theta \in \tau\}$$

τ_Y es, en efecto, una topología en Y:

(i) $\emptyset, Y \in \tau_Y$, pues $Y = X \cap Y$, $\emptyset = \emptyset \cap Y$, y $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos de τ_Y ($U_i = \theta_i \cap Y$ con $\theta_i \in \tau \; \forall \, i \in I$). Tenemos que $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (\theta_i \cap Y) = (\bigcup_{i \in I} \theta_i) \cap Y \in \tau_Y$ ya que $\bigcup_{i \in I} \theta_i \in \tau$.

(iii) Sea $\{U_j\}_{j=1}^n$ una familita de n elementos de τ_Y ($U_j = \theta_j \cap Y$ con $\theta_j \in \tau \; \forall \, j = 1, \dots, n$). Entonces $\bigcap_{j=1}^n U_j = \bigcap_{j=1}^n (\theta_j \cap Y) = (\bigcap_{j=1}^n \theta_j) \cap Y \in \tau_Y$ ya que $\bigcap_{j=1}^n \theta_j \in \tau$.

Decimos que (Y, τ_Y) es un <u>subespacio topológico</u> de X.

Proposición 1.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Un subconjunto $A \subset Y$ es cerrado de Y si y solo si $A = F \cap Y$ con F cerrado de X.*

Demostración.

$\underline{\Rightarrow|}$ Supongamos que $A \subset Y$ es cerrado de Y. Esto significa que $Y \setminus A$ es abierto de Y, es decir, $Y \setminus A = \theta \cap Y$ con θ abierto de X. Esto quiere decir que $Y \cap A^c = \theta \cap Y$, luego

$$A = (Y \cap A^c) \setminus A = (\theta \cap Y) \setminus A = (\theta \setminus A) \cap Y = \theta^c \cap Y$$

con θ^c cerrado de X.

$\Leftarrow$ Supongamos que $A = F \cap Y$ con F cerrado de Y. Queremos ver que A es cerrado de Y, es decir, que $Y \setminus A$ es abierto de Y. Tenemos que

$$Y \setminus A = Y \cap A^c = Y \cap (F \cap Y)^c = Y \cap (F^c \cup Y^c) = (Y \cap F^c) \cup (Y \cap Y^c) = Y \cap F^c$$

Como F^c es abierto de X, tenemos que $Y \setminus A$ es abierto de Y, luego A es cerrado de Y.

□

Proposición 1.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$ abierto de X. Un subconjunto $A \subset Y$ es abierto de Y si y solo si es abierto de X.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Sea $A \subset Y$ abierto de Y. Entonces $A = \theta \cap Y$ con θ abierto de X, luego A es abierto de X por ser intersección de abiertos de X.

$\Leftarrow$ Sea $A \subset Y$ abierto de X. Podemos escribir $A = A \cap Y$ con A abierto de X, luego A es abierto de Y.

□

Proposición 1.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$ cerrado de X. Un subconjunto $A \subset Y$ es cerrado de Y si y solo si es cerrado de X.*

Demostración. Es análoga a la anterior. □

Proposición 1.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un <u>recubrimiento abierto</u> de X (una familia de abiertos cuya unión es X). Un subconjunto $A \subset X$ es abierto de X si y solo si $A \cap U_i$ es abierto de U_i $\forall\ i \in I$.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Si A es abierto de X, por definición, $A \cap U_i$ es abierto de U_i $\forall\ i \in I$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $A \cap U_i$ es abierto de U_i $\forall\ i \in I$. Entonces, por la Proposición 1.9, $A \cap U_i$ es abierto de X $\forall\ i \in I$. Tenemos que

$$A = A \cap X = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap U_i)$$

Como $A \cap U_i$ es abierto de X $\forall\ i \in I$ y la unión de abiertos de X es un abierto de X, entonces A es abierto de X.

□

Proposición 1.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\{F_j\}_{j=1}^n$ un <u>recubrimiento cerrado</u> de X (una familia de cerrados cuya unión es X) finito. Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado de X si y solo si $A \cap F_j$ es cerrado de F_j $\forall\ j = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Es análoga a la anterior. □

1.6. Base de una topología

Definición 1.12. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia de abiertos de X no vacíos $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ es una base de X (o de τ) si cualquier abierto no vacío se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Ejemplo 1.13. Sea (X, d) un espacio métrico y veamos que $\mathcal{B} = \{B(x; r) \mid x \in X,\ r > 0\}$ es base de X. En efecto, sea θ abierto de X no vacío. Esto significa que dado $x \in \theta$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x; r_x) \subset \theta$. Podemos escribir

$$\theta = \bigcup_{x \in \theta} B(x; r_x)$$

Proposición 1.13. *Sea $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ una colección de abiertos no vacíos de X. Entonces $\mathcal{B}$ es base de X si y solo si dado θ abierto de X y dado $x \in \theta$ existe $B_{i_0} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_{i_0} \subset \theta$.*

Demostración. Ejercicio 7 de la Relación 1. □

Definición 1.13. Se dice que un espacio topológico (X, τ) es ANII o satisface el segundo axioma de numerabilidad si tiene una base numerable.

Ejemplo 1.14. $\mathbb{R}^n$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, ya que

$$\mathcal{B} = \{B(x; r) \mid x \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}\}$$

es base numerable de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.14. Un espacio topológico (X, τ) es separable si tiene un subconjunto denso numerable.

Ejemplo 1.15. $\mathbb{R}^n$ es separable, pues $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.14. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si X es ANII, entonces X es separable.*

Demostración. Supongamos que X es ANII y sea $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable. Tomemos $x_n \in B_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ y consideremos $A = \{x_n\}_{n \in N}$. Veamos que A es denso. Sea θ abierto no vacío. Como $\mathcal{B}$ es base, $\theta = \bigcup_{k \in K} B_k$ $(K \subset \mathbb{N})$. En particular, $x_k \in \theta\ \forall\ k \in K$, es decir, $\theta \cap A \neq \emptyset$, luego A es denso. □

Observación. Hay espacios separables que no son ANII. Sin embargo, si X es un espacio métrico, se tiene que X es separable si y solo si es ANII.

Definición 1.15. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $x_0 \in X$. Un entorno de x_0 es un subconjunto $A \subset X$ tal que existe un abierto $\theta \subset A$ con $x_0 \in \theta$.

Ejemplo 1.16. En $\mathbb{R}$, el intervalo $[2, 3]$ no es un abierto pero es entorno de cualquier punto de $(2, 3)$. En general, todo abierto de un espacio topológico es entorno de todos sus puntos. También, en un espacio topológico (X, τ), dado $A \subset X$ se tiene que A es entorno de cualquier punto de $\mathring{A}$.

1.7. Aplicaciones continuas

Por comodidad, en ocasiones escribiremos simplemente $f\colon X \to Y$ para denotar una aplicación entre espacios topológicos (X, τ_X) y (Y, τ_Y).

Definición 1.16. Sea $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una aplicación entre espacios topológicos y sea $x_0 \in X$. Se dice que f es <u>continua en x_0</u> si para todo abierto V de Y con $f(x_0) \in V$ existe un abierto U de X con $x_0 \in U$ tal que $f(U) \subset V$. Se dice que f es <u>continua</u> si lo es en todos los puntos de X.

Ejemplo 1.17. Toda aplicación entre espacios métricos continua en un punto con la definición clásica lo es con esta definición (Proposición 0.4).

Teorema 1.1 (Caracterización de las funciones continuas). *Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Son equivalentes:*

(i) f es continua.

(ii) Para todo abierto θ de Y, $f^{-1}(\theta)$ es abierto de X (es decir, $f^{-1}(\theta) \in \tau_X \ \forall\, \theta \in \tau_Y$).

(iii) Para todo cerrado F de Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado de X.

(iv) Dada una base $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ de Y, $f^{-1}(B_i)$ es abierto de X $\forall\, i \in I$.

Demostración. En primer lugar, veamos que $(i) \iff (ii)$.

$\underline{\Rightarrow}|$ Supongamos que f es continua. Sea θ abierto de Y y veamos que $f^{-1}(\theta)$ es abierto de X comprobando que $f^{-1}(\theta) = \mathring{\overbrace{f^{-1}(\theta)}}$.

$\underline{\subset}|$ Siempre es cierto.

$\underline{\supset}|$ $x_0 \in f^{-1}(\theta) \implies f(x_0) \in \theta \overset{\text{(i)}}{\implies} \exists$ un abierto U de X con $x_0 \in U$ y $f(U) \subset \theta \implies U \subset f^{-1}(\theta) \implies x_0 \in \mathring{\overbrace{f^{-1}(\theta)}}$.

$\underline{\Leftarrow}|$ Sea $x_0 \in X$ y veamos que f es continua en x_0. Sea V abierto de Y tal que $f(x_0) \in V$, es decir, tal que $x_0 \in f^{-1}(V)$. Por (ii), $f^{-1}(V)$ es abierto de X, y como $f(f^{-1}(V)) \subset V$, entonces f es continua en x_0.

Veamos ahora que $(ii) \iff (iii)$.

$\underline{\Rightarrow}|$ Supongamos que $f^{-1}(\theta) \in \tau_X \ \forall\, \theta \in \tau_Y$. Sea F cerrado de Y. Entonces

$$f^{-1}(F) \text{ es cerrado de X} \iff f^{-1}(F)^c = f^{-1}(F^c) \text{ es abierto de X}$$

Por (ii), esto último es cierto, ya que F^c es abierto de Y.

$\underline{\Leftarrow}|$ Es análoga a la anterior.

Por último, veamos que $(ii) \iff (iv)$.

$\underline{\Rightarrow}|$ Trivial.

$\underline{\Leftarrow}\rfloor$ Sea $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ base de Y y supongamos que $f^{-1}(B_i)$ es abierto de X $\forall\, i \in I$. Sea θ un abierto cualquiera de Y. Entonces $\theta = \bigcup_{j\in J} B_j$ para cierto $J \subset I$. Se tiene que

$$f^{-1}(\theta) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$$

Por tanto, $f^{-1}(\theta)$ es abierto por ser unión de abiertos.

$\square$

Ejemplo 1.18. Toda aplicación $f\colon X \to Y$ con Y espacio grosero es continua, ya que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(Y) = X$ son abiertos de X.

Ejemplo 1.19. Toda aplicación $f\colon X \to Y$ con X espacio discreto es continua, pues dado $\theta \in \tau_Y$, $f^{-1}(\theta)$ es siempre abierto (todos los subconjuntos de X son abiertos).

Ejemplo 1.20. Toda aplicación $f\colon X \to Y$ constante es continua. En efecto, sea $y_0 \in Y$, sea $f\colon X \to Y$, $f(x) = y_0$ $\forall\, x \in X$ y sea $\theta \in \tau_Y$. Entonces

$$f^{-1}(\theta) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y_0 \notin \theta \\ X & \text{si } y_0 \in \theta \end{cases}$$

Observación. Las aplicaciones continuas, en general, no llevan abiertos a abiertos o cerrados a cerrados. Por ejemplo, si definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_0$ para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $f(-1, 1) = \{x_0\}$.

Las aplicaciones que llevan abiertos a abiertos o cerrados a cerrados son, respectivamente, las siguientes:

Definición 1.17. Una aplicación $f\colon X \to Y$ entre espacios topológicos es <u>abierta</u> si $f(\theta)$ es abierto de Y para todo θ abierto de X.

Definición 1.18. Una aplicación $f\colon X \to Y$ entre espacios topológicos es <u>cerrada</u> si $f(F)$ es cerrado de Y para todo F cerrado de X.

Observación. En general, no existe ninguna relación entre aplicaciones abiertas y aplicaciones cerradas.

Proposición 1.15.

(i) Sean $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ dos aplicaciones entre espacios topológicos continuas en $x_0 \in X$ y $f(x_0) \in Y$, respectivamente. Entonces $g \circ f\colon X \to Z$ es continua en x_0. En particular, la composición de aplicaciones continuas (siempre que tenga sentido) es continua.

(ii) Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación continua y sea $A \subset X$. Entonces la restricción de f a A, $f|_A : A \to Y$, es continua.

(iii) Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación continua. Entonces $f\colon X \to Im(f) = f(X)$ es también continua.

Demostración.

(i) Sea V abierto de Z con $g \circ f(x_0) = g(f(x_0)) \in V$. Como g es continua en $f(x_0)$ existe θ abierto de Y con $f(x_0) \in \theta$ tal que $g(\theta) \subset V$, y como f es continua en x_0, existe U abierto de X con $x_0 \in U$ y $f(U) \subset \theta$, luego $g \circ f(U) \subset g(\theta) \subset V$.

(ii) Sea θ abierto de Y. Entonces $f|_A^{-1}(\theta) = f^{-1}(\theta) \cap A$ es abierto de A porque $f^{-1}(\theta)$ es abierto de X al ser f continua.

(iii) Sea V abierto de $Im(f) = f(X)$. Entonces $V = \theta \cap f(X)$ con θ abierto de Y. Además,
$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\theta \cap f(X)) = f^{-1}(\theta) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\theta) \cap X = f^{-1}(\theta)$$
Como f es continua, $f^{-1}(V) = f^{-1}(\theta)$ es abierto de X.

□

Observación. En (ii) de la proposición anterior, se considera la topología inducida de A por X para que la restricción $f|_A : A \to Y$ sea aplicación entre espacios topológicos.

Proposición 1.16. *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto o cerrado finito de X. Para todo $i \in I$, sean $f_i \colon A_i \to Y$ continuas tales que si $x \in A_j \cap A_k$ entonces $f_j(x) = f_k(x)$ (esto es lo mismo que decir $f_j|_{A_j\cap A_k} = f_k|_{A_j\cap A_k}$ $\forall\, j,k \in I$). Entonces la aplicación $f \colon X \to Y$ definida por $f(x) = f_i(x)$ si $x \in A_i$ es continua.*

Demostración. Nótese que f está bien definida: si tomamos $x \in A_j \cap A_k$, se tiene que $f(x) = f_j(x) = f_k(x)$. Veamos que f es continua. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X (la demostración del caso cerrado finito es igual) y sea θ abierto de Y. Entonces
$$f^{-1}(\theta) \text{ es ab. de X} \iff f^{-1}(\theta) \cap A_i \text{ es ab. de } A_i\ \forall\, i \in I \iff f_i^{-1}(\theta) \text{ es ab. de } A_i\ \forall\, i \in I$$
Esto último es cierto porque $f_i \colon A_i \to Y$ es continua $\forall\, i \in I$, luego f es también continua. □

1.8. Homeomorfismos

Definición 1.19. Una aplicación $f \colon X \xrightarrow{\cong} Y$ entre espacios topológicos es un <u>homeomorfismo</u> si f es continua y biyectiva y f^{-1} es continua. En ese caso, se dice que X e Y son <u>homeomorfos</u> y se escribe $X \cong Y$.

Ejemplo 1.21. Hay aplicaciones continuas y biyectivas cuya inversa no es continua: sea X un conjunto con más de un elemento y consideremos $id_X \colon (X, \tau_d) \to (X, \tau_g)$. Esta aplicación es biyectiva y continua (Ejemplo 1.18) pero su inversa, que es $id_X \colon (X, \tau_g) \to (X, \tau_d)$, no es continua (para cualquier $x_0 \in X$, $\{x_0\}$ es abierto de (X, τ_d) pero no lo es de (X, τ_g)).

Observación. El carácter homeomorfo es una relación de equivalencia:

- $(X, \tau) \cong (X, \tau)$ mediante la identidad.
- Si $X \cong Y$ mediante $f \colon X \xrightarrow{\cong} Y$, entonces $f^{-1} \colon Y \xrightarrow{\cong} X$ es también homeomorfismo.

- Si $X \cong Y$, $Y \cong Z$, existen homeomorfismos $f\colon X \xrightarrow{\cong} Y$, $g\colon Y \xrightarrow{\cong} Z$, y la composición de homeomorfismos $g \circ f\colon X \xrightarrow{\cong} Z$ es también homeomorfismo.

Proposición 1.17. *Sea $f\colon X \to Y$ continua y biyectiva. Son equivalentes:*

(i) f es homeomorfismo.

(ii) f es una aplicación abierta (además de continua y biyectiva).

(iii) f es una aplicación cerrada (además de continua y biyectiva).

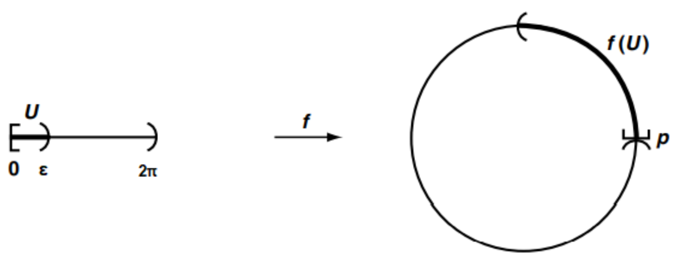
Demostración. Veamos que $(i) \iff (ii)$. Sea $f\colon X \to Y$ continua y biyectiva.

$$\begin{aligned} f \text{ es homeomorfismo} &\iff f^{-1} \text{ es continua} \\ &\iff (f^{-1})^{-1}(\theta) \text{ es abierto de } Y \ \forall\, \theta \text{ abierto de X} \\ &\iff f(\theta) \text{ es abierto de } Y \ \forall\, \theta \text{ abierto de } X \\ &\iff f \text{ es abierta} \end{aligned}$$

La equivalencia $(ii) \iff (iii)$ se demuestra análogamente. □

Ejemplo 1.22. Consideremos $[0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Sea $f\colon [0, 2\pi) \to S^1$, $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. f es continua y biyectiva pero no es homeomorfismo.

- f es continua: sea $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Entonces $\tilde{f}$ es continua y por la Proposición 1.15, restringiendo el dominio y el codominio, tenemos que f es continua.
- f es biyectiva:
  - Sea $(x, y) \in S^1$. Como $x^2 + y^2 = 1$, existe $t \in [0, 2\pi)$ tal que $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, es decir, $(x, y) = f(t)$.
  - Supongamos que $f(t_1) = f(t_2)$. Entonces $\cos t_1 = \cos t_2$ y $\operatorname{sen} t_1 = \operatorname{sen} t_2$, luego $t_1 - t_2 = 2k\pi$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Pero como $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$, tiene que ser $k = 0$, luego $t_1 = t_2$.
- f no es abierta: si tomamos el abierto $[0, \varepsilon)$ de $[0,2\pi)$ tenemos que $f([0, \varepsilon))$ no es abierto de S^1 ($p = f(0)$ no pertenece a ningún abierto $V \subset \mathbb{R}^2$ con $V \cap S^1 \subset f(U)$).



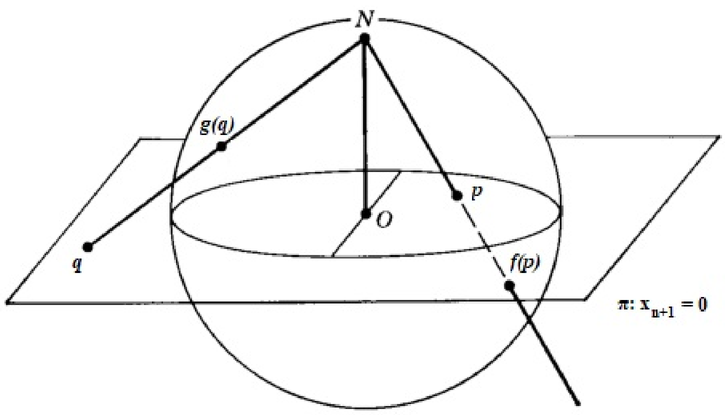
Ejemplo 1.23. Consideremos $B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$ y veamos que $B(0; 1) \cong \mathbb{R}^n$. Sea $f\colon B(0; 1) \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{x}{1 - ||x||}$. Nótese que f está bien definida, pues si $x \in B(0; 1)$, entonces $d(x, 0) = ||x - 0|| = ||x|| < 1$, luego $1 - ||x|| > 0$. Veamos que f es homeomorfismo.

- f es continua por ser cociente de aplicaciones continuas.
- Describimos f^{-1}: sea $g\colon \mathbb{R}^n \to B(0;1)$, $g(y) = \frac{y}{1+||y||}$. Nótese que g es continua por ser cociente de aplicaciones continuas y está bien definida, ya que $Im(g) \subset B(0;1)$:
$$d(g(y),0) = ||g(y)|| = ||\frac{y}{1+||y||}|| = \frac{||y||}{1+||y||} < 1 \implies g(y) \in B(0;1)\ \forall\ y \in \mathbb{R}^n$$
Hay que comprobar que $g \circ f = id_{B(0;1)}$ y que $f \circ g = id_{\mathbb{R}^n}$. Tenemos que
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{1+||f(x)||} = \frac{\frac{x}{1-||x||}}{1+\frac{||x||}{1-||x||}} = \frac{\frac{x}{1-||x||}}{\frac{1-||x||+||x||}{1-||x||}} = x$$
La otra comprobación es similar. Por tanto, $g = f^{-1}$ y f es también biyectiva.

Ejemplo 1.24. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $r > 0$. Veamos que $B(0;1) \cong B(x_0;r)$. Definimos $f\colon B(0;1) \to B(x_0;r)$, $f(x) = rx + x_0$. Nótese que si $x \in B(0;1)$ (por tanto $||x|| < 1$), entonces $f(x) \in B(x_0;r)$, pues
$$d(f(x),x_0) = ||f(x) - x_0|| = ||rx|| = r||x|| < r$$
Sea $g\colon B(x_0;r) \to B(0;1)$, $g(y) = \frac{y-x_0}{r}$ (que es continua). Nótese que si $y \in B(x_0;r)$, entonces $g(y) \in B(0;1)$, pues
$$d(g(y),0) = ||g(y)|| = \frac{||y-x_0||}{r} = \frac{d(y,x_0)}{r} < \frac{r}{r} = 1$$
Trivialmente, $g \circ f = id_{B(0;1)}$ y $f \circ g = id_{B(x_0;r)}$. Por tanto, $g = f^{-1}$ así que f es homeomorfismo.

Observación. Como vimos que el carácter homeomorfo es una relación de equivalencia, de estos dos últimos ejemplos deducimos que $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a cualquiera de sus bolas abiertas.

Ejemplo 1.25. Consideremos $S^n = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sea $N = \{(0,0,\ldots,0,1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se comprueba que $S^n \setminus N \cong \mathbb{R}^n$ (Ejercicio 10 de la Relación 2).



1.9. Topología cociente

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Si pensamos en $\mathcal{R}$ como una "manipulación" del espacio X, queremos dotar al conjunto cociente $X/\mathcal{R}$ de una topología que refleje tal "manipulación". Observamos que dicha "manipulación" es la proyección canónica:

$$\begin{aligned} p\colon X &\longrightarrow X/\mathcal{R} \\ x &\longmapsto \overline{x} \end{aligned}$$

Vamos a dotar a X de la mayor topología que haga que p sea continua.

Definición 1.20. Un subconjunto $\theta \subset X/\mathcal{R}$ de clases de equivalencia es abierto si $p^{-1}(\theta)$ es abierto de X.

En efecto, esto resulta ser una topología en $X/\mathcal{R}$:

(i) Tanto $\emptyset$ como $X/\mathcal{R}$ son abiertos.

(ii) Si $\{\theta_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos de $X/\mathcal{R}$, entonces

$$p^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}\theta_i\right) = \bigcup_{i\in I} p^{-1}(\theta_i)$$

y como $\bigcup_{i\in I} p^{-1}(\theta_i)$ es abierto de X por ser unión de abiertos de X, entonces $\bigcup_{i\in I}\theta_i$ es abierto de $X/\mathcal{R}$.

(iii) Análogo a (ii).

A esta topología se le denomina topología cociente, y a $X/\mathcal{R}$ espacio cociente.

Observación. La topología cociente es la topología más grande que hace que la proyección canónica p sea continua:

- p es continua con esta topología por definición.
- Sea τ otra topología que hace que p sea continua y tomemos $\theta \in \tau$. Por la continuidad de p, se tiene que $p^{-1}(\theta)$ es abierto de X. Esto significa que θ es abierto de la topología cociente.

Proposición 1.18. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X y $X/\mathcal{R}$ el espacio cociente resultante. Una aplicación $f\colon X/\mathcal{R} \to Y$ es continua si y solo si $f\circ p\colon X \to Y$ es continua.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Supongamos que $f\colon X/\mathcal{R} \to Y$ es continua. Como hemos visto que $p\colon X \to X/\mathcal{R}$ es continua, entonces $f\circ p\colon X\to Y$ es continua.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $f \circ p \colon X \to Y$ es continua. Tenemos que

$$\begin{aligned} f \text{ es continua } &\iff f^{-1}(\theta) \text{ es abierto de } {}^{X}\!/_{\mathcal{R}} \;\forall\, \theta \text{ abierto de } Y \\ &\iff p^{-1}(f^{-1}(\theta)) \text{ es abierto de } X \;\forall\, \theta \text{ abierto de } Y \\ &\iff (f \circ p)^{-1}(\theta) \text{ es abierto de } X \;\forall\, \theta \text{ abierto de } Y \end{aligned}$$

Esto último es cierto porque $f \circ p$ es continua.

$\square$

Observación. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, vamos a denotar por ${}^{X}\!/_{A}$ al espacio cociente resultante de identificar todos los puntos de A entre sí, es decir, $a \sim b$ si $a, b \in A$ y $x \sim x$ si $x \notin A$.

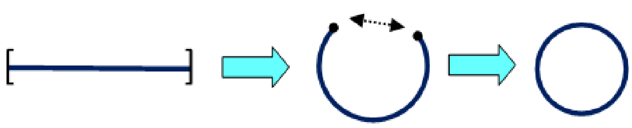
Ejemplo 1.26. En $[0,1]$, consideramos la relación de equivalencia $0 \sim 1$, $1 \sim 0$ y $t \sim t$ si $t \in [0,1]$. Tomamos ${}^{[0,1]}\!/_{\sim} = {}^{[0,1]}\!/_{\{0,1\}}$. Veamos que ${}^{[0,1]}\!/_{\sim} \cong S^1$. Definimos la aplicación $f \colon {}^{[0,1]}\!/_{\sim} \to S^1$, $f(\bar{t}) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. Tenemos que

- f está bien definida, pues si $t \sim t'$, puede ocurrir que
  - $t = t' \implies f(\bar{t}) = f(\bar{t'})$
  - $t = 0$ y $t' = 1$ (o viceversa) $\implies f(\bar{t}) = (1, 0) = f(\bar{t'})$
- f es continua, pues la composición $f \circ p \colon [0,1] \to S^1, f(p(t)) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ es claramente continua.
- f es inyectiva, ya que si $f(\overline{t_1}) = f(\overline{t_2})$ con $t_1, t_2 \in [0,1]$, entonces

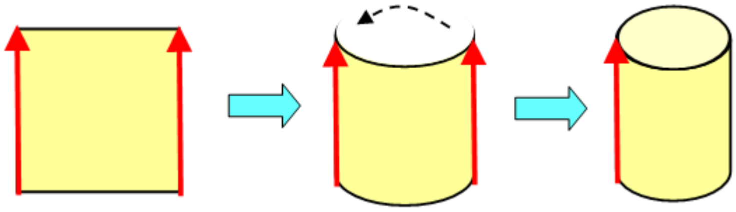
  $$\begin{cases} \cos 2\pi t_1 = \cos 2\pi t_2 \\ \operatorname{sen} 2\pi t_1 = \operatorname{sen} 2\pi t_2 \end{cases} \implies t_1 - t_2 = k \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} t_1 = t_2 \implies \overline{t_1} = \overline{t_2} \\ t_1 = 0, t_2 = 1 \implies \overline{t_1} = \overline{t_2} \\ t_1 = 1, t_2 = 0 \implies \overline{t_1} = \overline{t_2} \end{cases}$$

  En cualquier caso, $\overline{t_1} = \overline{t_2}$.
- f es sobreyectiva, pues si $(x, y) \in S^1$ podemos escribir $x = \cos 2\pi t, y = \operatorname{sen} 2\pi t$ para algún $t \in [0,1]$, luego $(x, y) = f(\bar{t})$.
- f es cerrada, pues ${}^{[0,1]}\!/_{\sim}$ es compacto y S^1 es Hausdorff (Corolario 3.4).

Por tanto, f es homeomorfismo.



Ejemplo 1.27. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$. En X, consideramos la relación de equivalencia $(0, t) \sim (1, t)\ \forall\, t \in [0,1]$. Veamos que ${}^{X}\!/_{\sim} \cong C$. Tomamos $f \colon {}^{X}\!/_{\sim} \to C$, $f(\overline{s,t}) = (\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s, t)$. De forma similar al ejemplo anterior se comprueba que f está bien definida y es continua, biyectiva y cerrada, por lo que f es homeomorfismo.



1.10. Topología producto

Sean X, Y espacios topológicos. Queremos dotar a $X \times Y$ de una topología "compatible" con X e Y.

Definición 1.21. La topología producto en $X \times Y$ es la que tiene por base a

$$\{U \times V \mid U \text{ abierto de } X,\ V \text{ abierto de } Y\}$$

Esto significa que cualquier abierto θ de $X \times Y$ es de la forma

$$\theta = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i)$$

con U_i y V_i abiertos de X e Y $\forall\, i \in I$. Por tanto, podemos escribir

$$\tau_{X \times Y} = \left\{ \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i) \mid U_i \text{ y } V_i \text{ abiertos de } X \text{ e } Y\ \forall\, i \in I \right\}$$

Proposición 1.19. *La topología en $X \times Y$ definida anteriormente es la menor topología en $X \times Y$ que hace que las proyecciones $p_X \colon X \times Y \to X$, $p_X(x, y) = x$ y $p_Y \colon X \times Y \to Y$, $p_Y(x, y) = y$ sean continuas.*

Demostración.

- Veamos que $p_X \colon (X \times Y, \tau_{X \times Y}) \to X$ y $p_Y \colon (X \times Y, \tau_{X \times Y}) \to Y$ son continuas. Sean U y V abiertos de X e Y, respectivamente. Entonces $p_X^{-1}(U) = U \times Y \in \tau_{X \times Y}$ y $p_Y^{-1}(V) = X \times V \in \tau_{X \times Y}$. Por tanto, p_X y p_Y son continuas.

- Sea τ otra topología en $X \times Y$ tal que $p_X \colon (X \times Y, \tau) \to X$, $p_Y \colon (X \times Y, \tau) \to Y$ son continuas. Veamos que $\tau_{X \times Y} \subset \tau$. Sean $\{U_i\}_{i \in I}$ y $\{V_i\}_{i \in I}$ familias de abiertos de X e Y, respectivamente. Como $p_X^{-1}(U_i) = U_i \times Y \in \tau\ \forall\, i \in I$ y $p_Y^{-1}(V_i) = X \times V_i \in \tau\ \forall\, i \in I$ por ser p_X, p_Y continuas, entonces $(U_i \times Y) \cap (X \times V_i) \in \tau\ \forall\, i \in I$. Además,

  $$(U_i \times Y) \cap (X \times V_i) = (U_i \cap X) \times (Y \cap V_i) = U_i \times V_i \in \tau\ \forall\, i \in I$$

  Por tanto,

  $$\bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i) \in \tau \implies \tau_{X \times Y} \subset \tau$$

$\square$

Observación. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos. En $X \times Y$ podemos definir la distancia producto como

$$D \colon (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R},\ D((x, y), (x', y')) = (d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2)^{\frac{1}{2}}$$

Se comprueba que la topología asociada a $(X \times Y, D)$ es, precisamente, la topología producto de $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, la distancia usual d es la distancia producto de $(\mathbb{R}, |\ |) \times (\mathbb{R}, |\ |)$, ya que

$$d((x,y),(x',y')) = ((x-x')^2 + (y-y')^2)^{\frac{1}{2}}$$

Se observa claramente que no todo abierto de la topología producto en $X \times Y$ es de la forma $U \times V$ con U abierto de X y V abierto de Y, ya que $B(0;1) \subset \mathbb{R}^2$ es abierto de $\mathbb{R}^2$, pero no es de la forma $U \times V$ con U, V abiertos de $\mathbb{R}$.

Tema 2

Conexidad

2.1. Introducción

Definición 2.1. Un espacio topológico X es <u>conexo</u> si no puede escribirse como unión disjunta de dos abiertos no vacíos, es decir, si $X \neq \theta_1 \dot{\cup} \theta_2$ con θ_1, θ_2 abiertos no vacíos y tales que $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$.

Teorema 2.1 (Caracterización de los espacios conexos). *Sea X espacio topológico. Son equivalentes:*

(i) X es conexo.

(ii) Los únicos abiertos y cerrados (simultáneamente) de X son $\emptyset$ y X.

(iii) No existe ninguna aplicación $f\colon X \to \{a, b\}$ con $\{a, b\}$ espacio discreto que sea continua y sobreyectiva.

Demostración. Veamos primero que $(i) \iff (ii)$.

$\Rightarrow$| Supongamos que $A \subset X$ con $A \neq X$ y $A \neq \emptyset$ es abierto y cerrado. Entonces tenemos que $X = A \dot{\cup} A^c$, luego X no es conexo.

$\Leftarrow$| Supongamos que X no es conexo. Esto significa que $X = \theta_1 \dot{\cup} \theta_2$ con θ_1, θ_2 abiertos no vacíos y tales que $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$. Por tanto, $\theta_1 = \theta_2^c$ es cerrado, así que θ_1 es abierto y cerrado distinto de X y de $\emptyset$.

Veamos ahora que $(i) \iff (iii)$.

$\Rightarrow$| Supongamos que $f\colon X \to \{a, b\}$ es continua y sobreyectiva con $\{a, b\}$ espacio discreto. Entonces $X = f^{-1}(\{a\}) \cup f^{-1}(\{b\})$ con ambos abiertos (en la topología discreta todo subconjunto es abierto) y no vacíos (f es sobreyectiva). Por tanto, X no es conexo.

$\Leftarrow$| Supongamos que X no es conexo, es decir, $X = \theta_1 \dot{\cup} \theta_2$ con θ_1, θ_2 abiertos no vacíos y tales que $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$. Entonces la aplicación $f\colon X \to \{a, b\}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in \theta_1 \\ b & \text{si } x \in \theta_2 \end{cases}$$

para cualquier espacio discreto $\{a, b\}$ es sobreyectiva ($\theta_1, \theta_2 \neq \emptyset$) y continua, ya que

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\{a\}) = \theta_1, f^{-1}(\{b\}) = \theta_2, f^{-1}(\{a, b\}) = X$$

□

Observación. Si $Y \subset X$ con X espacio topológico, en adelante, para ahorrar escritura, diremos simplemente que Y es (o no) conexo. La conexidad es una característica propia de los espacios topológicos, así que lo que estamos diciendo en realidad es que el subconjunto Y con la topología de subespacio es (o no) un espacio conexo.

Ejemplo 2.1. Sea X un espacio discreto de más de un punto. Entonces X no es conexo, pues cualquier subconjunto de X es abierto y cerrado.

Ejemplo 2.2. Todo espacio grosero es conexo.

Ejemplo 2.3. Sea X un conjunto infinito dotado de la topología de los complementos finitos (Ejemplo 1.5). Entonces X es conexo, pues si $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$ es cerrado y abierto, entonces A^c es finito por ser A abierto y A es también finito por ser A cerrado. Por tanto, $X = A \cup A^c$ tendría que ser finito, que es una contradicción.

Ejemplo 2.4. Sea X un espacio dotado de la topología del punto excluido (ver Relación 1). Entonces X es conexo, pues si $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$ es cerrado y abierto, entonces $x_0 \in A$ y $x_0 \notin A$, lo cual es imposible.

Ejemplo 2.5. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ no es conexo, ya que si tomamos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, podemos escribir $\mathbb{Q}$ como unión de abiertos disjuntos y no vacíos:

$$\mathbb{Q} = ((-\infty, x) \cap \mathbb{Q}) \,\dot{\cup}\, ((x, \infty) \cap \mathbb{Q})$$

De igual forma se comprueba que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es conexo.

Ejemplo 2.6. En $\mathbb{R}^3$, consideramos $X = \overline{B}(0; 1) \,\dot{\cup}\, \{(0, 2, 0)\}$. Entonces X no es conexo.

Ejemplo 2.7. En $\mathbb{R}^2$, consideramos $X = B(0; 1) \,\dot{\cup}\, B((2, 0); 1)$. Entonces X no es conexo.

2.2. Propiedades de la conexidad

Proposición 2.1. *Sea X un espacio topológico y $B \subset X$ conexo. Entonces $\overline{B}$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\overline{B}$ no es conexo. Entonces existe $f : \overline{B} \to \{a, b\}$ continua y sobreyectiva, con $\{a, b\}$ espacio discreto. Es claro que $f(B) \subset \{a, b\}$ y también tenemos que $f(B) \supset \{a, b\}$, ya que

$$\{a, b\} = f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)} = f(B)$$

En la primera igualdad hemos usado que f es sobreyectiva, en la contención el Ejercicio 1 de la Relación 2 y en la segunda igualdad que $f(B)$ es cerrado del espacio discreto $\{a, b\}$. Por tanto, la restricción de f a B, $f|_B : B \to \{a, b\}$, es también continua (Proposición 1.15) y sobreyectiva (porque $f(B) = \{a, b\}$), lo que significa que B no es conexo. □

Proposición 2.2. *Sea X un espacio topológico y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios conexos de X tales que $A_i \cap A_j \neq \emptyset \ \forall \ i,j \in I$. Entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo.*

Demostración. Sea $f\colon \bigcup_{i\in I} A_i \to \{a,b\}$ continua con $\{a,b\}$ espacio discreto y veamos que f no puede ser sobreyectiva, es decir, es necesariamente constante. Sean $x,y \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Entonces $x \in A_j$, $y \in A_k$ para ciertos $j,k \in I$. Puesto que $A_j \cap A_k \neq \emptyset$, podemos tomar $z \in A_j \cap A_k$. Consideremos $f|_{A_j} : A_j \to \{a,b\}$, que es continua. Como A_j es conexo, $f|_{A_j}$ no puede ser sobreyectiva, es decir, debe ser constante, por lo que $f(x) = f(z)$. Repetimos el mismo razonamiento con A_k y tenemos que $f(y) = f(z) = f(x)$, por lo que f es constante y $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo. $\square$

Proposición 2.3. *Sean X, Y espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$ continua. Si X es conexo, entonces $Im(f)$ es un subespacio conexo de Y.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $Im(f)$ no es conexo. Entonces existe $g\colon Im(f) \to \{a,b\}$ continua y sobreyectiva con $\{a,b\}$ espacio discreto. Por tanto, la composición $g \circ f\colon X \to \{a,b\}$ es continua y sobreyectiva. Esto significa que X no es conexo, lo que contradice la hipótesis. $\square$

Observación. Si $f\colon X \to Y$ es continua y X es conexo, Y no tiene por qué ser conexo. Por ejemplo, si tomamos $f\colon (0,1) \to (0,1) \dot\cup (4,5)$, $f(x) = x$, tenemos que X es conexo ($Im(f)$ también), pero Y no lo es.

El siguiente teorema nos dice que un espacio topológico homeomorfo a un espacio conexo es también conexo. En general, se dice que una propiedad p es un <u>invariante topológico</u> si es invariante por homeomorfismos, esto es, si X verifica p y $X \cong Y$, entonces Y verifica p.

Teorema 2.2. *La conexidad es un invariante topológico.*

Demostración. Sea X un espacio topológico conexo y supongamos que $X \cong Y$ mediante un homeomorfismo $f\colon X \xrightarrow{\cong} Y$. Como f es sobreyectiva, entonces $Im(f) = Y$, y como f es continua, por la prosición anterior, tenemos que Y es conexo. $\square$

2.3. Conexidad de los subespacios de $\mathbb{R}$

Teorema 2.3. *$[a,b]$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $[a,b]$ no es conexo, es decir, $[a,b] = U \dot\cup V$ con U, V abiertos de $[a,b]$ disjuntos y no vacíos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \in U$. Por ser U abierto, para cierto $\varepsilon > 0$ se tiene que $[a,\varepsilon) \subset U$. Sea $B = \{t \in [a,b] \mid t < v \ \forall \ v \in V\}$. Tenemos que $B \subset U$, $B \neq \emptyset$ (ya que $[a,\varepsilon) \subset B$) y B está acotado superiormente, por lo que tiene supremo t_0. Nótese que $t_0 < b$, pues si fuese $t_0 = b$, tendríamos que $U = [a,b]$ y $V = \{b\}$, que no es abierto. Tomemos $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a,b]$ para cierto $\delta > 0$. Entonces $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap U \neq \emptyset$, pues t_0 es el supremo de B. Por tanto, $t_0 \in \overline{U} = U$ (ya que U es abierto y cerrado de $[a,b]$), pero, por otra parte, $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap V \neq \emptyset$, porque en otro caso tendríamos que $[a, t_0 + \delta) \subset U$ y esto contradiría que $t_0 = \sup U$. Por tanto, $t_0 \in \overline{V} = V$ y $t_0 \in U \cap V = \emptyset$. Esto es una contradicción, así que $[a,b]$ es conexo. $\square$

Corolario 2.1. *Los únicos subespacios conexos de* $\mathbb{R}$ *son los intervalos:*

$$\mathbb{R}, [a,b), (a,b], [a,b], (a,b), (-\infty,a), (-\infty,a], (a,\infty), [a,\infty)$$

Demostración. Cualquier intervalo puede escribirse como unión de intervalos cerrados de intersección no vacía. Por ejemplo,

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}]$$

Por el teorema anterior, como los intervalos cerrados son conexos, concluimos que todos los intervalos son conexos. Por último, sea $X \subset \mathbb{R}$ no intervalo y veamos que X no es conexo. Como X no es un intervalo, existen $x_0 < y < x_1$ con $x_0, x_1 \in X, y \notin X$. Teniendo en cuenta que $x_0 \in X \cap (-\infty, y)$, $x_1 \in X \cap (y, \infty)$, podemos escribir X como unión disjunta de abiertos no vacíos:

$$X = (X \cap (-\infty, y)) \dot{\cup} (X \cap (y, \infty))$$

Por tanto, X no es conexo. □

Teorema 2.4 (Teorema de los valores intermedios). *Sea* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *continua con* X *conexo. Si* $f(x_0) = a, f(x_1) = b$, *con* $x_0, x_1 \in X$ *y* $a < b$, *entonces para todo* $c \in [a,b]$ *existe* $y \in X$ *tal que* $f(y) = c$.

Demostración. En las condiciones del enunciado, tenemos que $f(X)$ es un subespacio conexo de $\mathbb{R}$, es decir, $f(X)$ es un intervalo con $a, b \in f(X)$. Por tanto, $[a,b] \subset f(X)$. □

Corolario 2.2 (Teorema de Bolzano). *Sea* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *continua con* X *conexo. Supongamos que* $f(x_0) < 0$ *y* $f(x_1) > 0$ *para ciertos* $x_0, x_1 \in X$. *Entonces existe* $y \in X$ *tal que* $f(y) = 0$.

2.4. Componentes conexas de un espacio topológico

Sea X un espacio topológico. Vamos a establecer en X la siguiente relación: $x \sim y$ si existe $C \subset X$ conexo tal que $x, y \in C$. Comprobemos, en primer lugar, que esta relación es de equivalencia:

- $x \sim x$ porque $\{x\}$ es conexo.
- La relación es simétrica por definición.
- Supongamos que $x \sim y$, $y \sim z$. Entonces existe $C \subset X$ conexo tal que $x, y \in C$ y existe $D \subset X$ conexo tal que $y, z \in D$. Por tanto, $x, z \in C \cup D$, que es conexo por ser unión de conexos con intersección no vacía ($y \in C \cap D$), así que $x \sim z$.

A cada clase de equivalencia la llamamos componente conexa. Denotamos por $C(x)$ a la componente conexa del punto $x \in X$.

Proposición 2.4. *Sea* X *un espacio topológico. La componente conexa de un punto* $x \in X$ *es el mayor subespacio conexo de* X *que contiene a* x.

Demostración.

- Veamos que $C(x)$ es un subespacio conexo. Para cada $y \in C(x)$, existe un conexo D_y tal que $x, y \in D_y$. Comprobemos que $C(x) = \bigcup_{y \in C(x)} D_y$:

  $\subset\rfloor$ Elemental.

  $\supset\rfloor$ Sea $z \in \bigcup_{y \in C(x)} D_y$. Entonces $z \in D_{y_0}$ para algún $y_0 \in C(x)$, y como D_{y_0} es conexo, $z \sim y_0 \sim x$, luego $z \in C(x)$.

  Tenemos que $C(x)$ es conexo por ser unión de conexos con intersecciones dos a dos no vacías ($x \in D_y \ \forall \ y \in C(x)$).

- Veamos que $C(x)$ es el mayor conexo que contiene a x. Supongamos que C es conexo con $C \supsetneq C(x)$. Entonces existe $y \in C$ con $y \notin C(x)$. Tenemos que $y \nsim x$, pero $x, y \in C$ y C es conexo, así que $y \sim x$, que es una contradicción.

$\square$

Corolario 2.3. *Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. Entonces*

$$C(x) = \bigcup_{\substack{C \text{ con.} \\ x \in C}} C$$

Observación. $C(x) = C(y) \ \forall \ y \in C(x)$, ya que $\overline{x} = \overline{y} \iff x \sim y$.

Proposición 2.5. *El conjunto de componentes conexas constituye una partición en X por subespacios conexos y cerrados de X.*

Demostración. Es obvio que el conjunto de componentes conexas constituye una partición en X y que todas con conexas. Veamos que son cerradas. Sea C una componente conexa y veamos que $C = \overline{C}$. Sabemos que $C \subset \overline{C}$ y $\overline{C}$ es conexo, así que tiene que ser $C = \overline{C}$ porque C es el mayor conexo que contiene a cualquiera de sus puntos. $\square$

Observación.

- En general, las componentes conexas no son abiertos.

- Se tiene que X es conexo si y solo si X solo tiene una componente conexa.

Ejemplo 2.8. Sea $X = (0,1) \cup (2,3) \cup (4,6)$. Veamos que las componentes conexas de X son $(0,1)$, $(2,3)$ y $(4,6)$. Tenemos que $(0,1)$ es conexo por ser un intervalo. Si existiera $C \subset X$ conexo con $C \supsetneq (0,1)$, existiría $x_0 \in C$ con $x_0 \notin (0,1)$, por lo que C tendría que contener un intervalo que contenga a $(0,1)$ y a $x_0 \in (2,3) \cup (4,6)$, lo cual es imposible. Con el mismo argumento se prueba que $(2,3)$ y $(4,6)$ son componentes conexas de X.

Ejemplo 2.9. Sea $x \in \mathbb{Q}$. Entonces $C(x)$ ha de ser un intervalo que solo contenga a x y a números racionales, por lo que solo puede ser $C(x) = [x,x] = \{x\}$. Como las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ se reducen a los puntos de $\mathbb{Q}$, decimos que $\mathbb{Q}$ es <u>totalmente disconexo</u>. $\mathbb{Q}$ tiene una cantidad numerable de componentes conexas y ninguna de ellas es un abierto.

Ejemplo 2.10. Sea X un espacio discreto y sea $x \in X$. Entonces $C(x) = \{x\}$, pues $\{x\}$ es conexo y si tomamos $Y \supsetneq \{x\}$ podemos escribir $Y = \{x\} \dot\cup (Y \setminus \{x\})$. Como $\{x\}$ y $Y \setminus \{x\}$ son abiertos no vacíos, tenemos que Y no es conexo.

Teorema 2.5. *El cardinal del conjunto de componentes conexas de un espacio topológico es un invariante topológico.*

Demostración. Denotamos $C(X)$ al conjunto de componentes conexas de X. Consideremos un homeomorfismo $f\colon X \to Y$. Vamos a construir una biyección $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$. Sea $C \in C(X)$ una componente conexa de X. Como f es continua y C es conexo, entonces $f(C) \subset Y$ es conexo. Además, $f(C)$ ha de estar contenido en una componente conexa D de Y. Definimos $C(f)(C) = D$. Veamos que $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ es biyectiva comprobando que tiene inversa $C(f^{-1})\colon C(Y) \to C(X)$. Tomamos $f^{-1}\colon Y \to X$, que es continua, así que podemos definir $C(f^{-1})$ como antes. Veamos que $C(f^{-1}) \circ C(f) = id_{C(X)}$. Sea $C \in C(X)$. Entonces

$$C(f^{-1}) \circ C(f)(C) = C(f^{-1})(C(f)(C)) = C(f^{-1})(D)$$

donde D es la única componente conexa de Y con $f(C) \subset D$. Por otra parte,

$$f^{-1}(D) \supset f^{-1}(f(C)) = C$$

Como $f^{-1}(D)$ es un conexo de X que contiene a la componente conexa C, deben ser iguales. Tenemos entonces que $f^{-1}(D) = C$ está contenido en la componente conexa C de X. Por definición de $C(f^{-1})$, esto significa que $C(f^{-1})(D) = C = C(f^{-1}) \circ C(f)(C)$. Análogamente se comprueba que $C(f) \circ C(f^{-1}) = id_{C(Y)}$, por lo que $C(f^{-1})$ es la inversa de $C(f)$ y $C(f)$ es biyectiva. $\square$

2.5. Arcoconexidad

Definición 2.2. Una curva en un espacio topológico X es una aplicación $\alpha\colon [0,1] \to X$ continua.

Dada una curva $\alpha\colon [0,1] \to X$, podemos definir una nueva curva $\alpha^{-1}\colon [0,1] \to X$ por $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$. Nótese que α^{-1} es continua, pues la composición

$$\begin{aligned} [0,1] &\xrightarrow{\cong} [0,1] \xrightarrow{\alpha} X \\ t &\longmapsto 1-t \longmapsto \alpha(1-t) \end{aligned}$$

es continua. Se cumple que $Im(\alpha) = Im(\alpha^{-1})$ pero $\alpha \neq \alpha^{-1}$. Además, $\alpha^{-1}(0) = \alpha(1)$ y $\alpha^{-1}(1) = \alpha(0)$.

Sean $\alpha, \beta\colon [0,1] \to X$ curvas en X con $\alpha(1) = \beta(0)$. Definimos una nueva curva

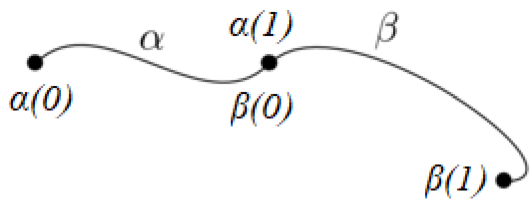
$$\alpha\beta\colon [0,1] \to X,\ \alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Veamos que $\alpha\beta$ es, en efecto, continua:

- $\alpha\beta$ está definida en dos cerrados, $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$, con $[0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1] = [0,1]$.

- En cada uno de los cerrados, $\alpha\beta$ es continua por ser composición de funciones continuas.
- En la intersección de los cerrados, tenemos $\alpha\beta(\frac{1}{2}) = \alpha(2\frac{1}{2}) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(2\frac{1}{2} - 1)$.

Por la Proposición 1.16, $\alpha\beta$ es continua.



Definición 2.3. Un espacio topológico X es arcoconexo si dos puntos cualesquiera de X pueden unirse por una curva, es decir, si dados $x, y \in X$, existe una curva $\alpha\colon [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$.

Teorema 2.6 (Caracterización de la arcoconexidad). *Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$. Son equivalentes:*

(i) *X es arcoconexo.*

(ii) *Todo punto de X se une con x_0 por una curva, es decir, dado $y \in X$, existe una curva $\alpha\colon [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = y$.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Es evidente.

$\Leftarrow$ Sean $y, z \in X$. Hay que encontrar una curva que una y con z. Por hipótesis, existen curvas $\alpha_y, \alpha_z\colon [0,1] \to X$ con $\alpha_y(0) = x_0, \alpha_y(1) = y, \alpha_z(0) = x_0, \alpha_z(1) = z$. Nótese que $\alpha_y^{-1}(1) = \alpha_y(0) = x_0 = \alpha_z(0)$ y tiene sentido, por tanto, la curva $\alpha_y^{-1}\alpha_z\colon [0,1] \to X$. Además,

- $\alpha_y^{-1}\alpha_z(0) = \alpha_y^{-1}(2 \cdot 0) = \alpha_y^{-1}(0) = \alpha_y(1) = y$
- $\alpha_y^{-1}\alpha_z(1) = \alpha_z(2 \cdot 1 - 1) = \alpha_z(1) = z$

Por tanto, X es arcoconexo.

□

Para los ejemplos que siguen, serán necesarias las siguientes definiciones:

Definición 2.4. Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si dados dados $x_0, x_1 \in X$, se verifica que $\overline{x_0x_1} = \{(1-t)x_0 + tx_1 \mid t \in [0,1]\} \subset X$.

Definición 2.5. Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado respecto de $x_0 \in X$ si dado $x \in X$ se verifica que $\overline{x_0x} = \{(1-t)x_0 + tx \mid t \in [0,1]\} \subset X$.

Ejemplo 2.11. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio convexo, entonces es arcoconexo. En efecto, dados $x, y \in X$, tomamos la curva $\alpha\colon [0,1] \to X$, $\alpha(t) = (1-t)x + ty$, que es continua y está bien definida por ser X convexo. Tenemos que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$, así que X es arcoconexo.

Ejemplo 2.12. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio estrellado respecto de $x_0 \in X$, entonces es arcoconexo. En efecto, usando el Teorema 2.6, si tomamos $x \in X$, la curva $\alpha\colon [0,1] \to X$, $\alpha(t) = (1-t)x_0 + tx$ está bien definida (por ser X estrellado respecto de x_0) y además cumple $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x$. Por tanto, X es arcoconexo.

Teorema 2.7. *Todo espacio arcoconexo es conexo.*

Demostración. Sea X un espacio topológico arcoconexo. Por reducción al absurdo, supongamos que X no es conexo. Entonces existe $f\colon X \to \{a, b\}$ continua y sobreyectiva con $\{a, b\}$ espacio discreto. Sean $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) = a$, $f(x_1) = b$. Por ser X arcoconexo, existe una curva $\alpha\colon [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$. Consideremos la composición $f \circ \alpha\colon [0,1] \to \{a, b\}$, que es continua y sobreyectiva (ya que $f \circ \alpha(0) = a$, $f \circ \alpha(1) = b$). Esto significa que $[0,1]$ no es conexo, que es imposible. □

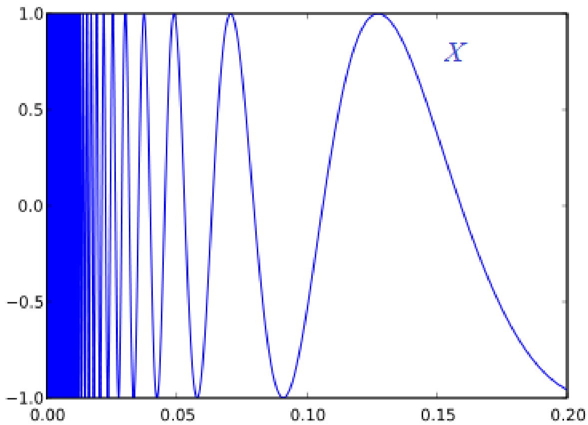
Corolario 2.4. $\mathbb{R}^n$ *y cualquier bola (abierta o cerrada) de* $\mathbb{R}^n$ *son espacios conexos.*

Observación. En general, el recíproco del teorema anterior no es cierto, como se comprueba en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.13. Sea $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Definimos

$$X = gráf(f) \cup (\{0\} \times [-1,1]) \subset \mathbb{R}^2$$

Tenemos que $gráf(f) \cong \mathbb{R} \cong (0,1]$ (para el primer homeomorfismo, ver el Ejercicio 9 de la Relación 2) y $(0,1]$ es conexo, así que $gráf(f)$ también lo es. Por tanto, $\overline{gráf(f)} = X$ es conexo. Sin embargo, X no es arcoconexo (Ejercicio 8 de la Relación 4).



No obstante...

Observación. Sea $X \subset \mathbb{R}$. X es conexo $\iff$ X es arcoconexo $\iff$ X es un intervalo.

En el ejemplo anterior hemos usado que si $A \subset X$ es conexo entonces $\overline{A}$ es también conexo (Proposición 2.1). Sin embargo, existen subespacios $A \subset X$ arcoconexos tales que $\overline{A}$ no es arcoconexo. Por ejemplo, en el conjunto X del ejemplo de antes, tomamos $A = gráf(f) \subset X$. Tenemos que A es arcoconexo (pues es homeomorfo a $(0,1]$) pero $\overline{A} = X$ no lo es.

Proposición 2.6. *Sea X un espacio topológico y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios arcoconexos de X tales que $A_j \cap A_k \neq \emptyset \ \forall \ j,k \in I, j \neq k$. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un subespacio arcoconexo de X.*

Demostración. Sean $x, y \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Entonces $x \in A_j, y \in A_k$ para ciertos $j, k \in I$. Tomemos $z \in A_j \cap A_k$. Como A_j es arcoconexo, existe una curva $\alpha \colon [0,1] \to A_j$ con $\alpha(0) = x, \alpha(1) = z$, y como A_k es arcoconexo, existe una curva $\beta \colon [0,1] \to A_k$ tal que $\beta(0) = z, \beta(1) = y$. Tomamos la curva $\alpha\beta \colon [0,1] \to \bigcup_{i \in I} A_i$, que está bien definida porque $\alpha(1) = \beta(0) = z$, y cumple que $\alpha\beta(0) = \alpha(0) = x, \alpha\beta(1) = \beta(1) = y$. Por tanto, $\bigcup_{i \in I} A_i$ es arcoconexo. □

Proposición 2.7. *Sea $f \colon X \to Y$ continua con X arcoconexo. Entonces $Im(f) = f(X)$ es un subespacio arcoconexo de Y.*

Demostración. Sean $y_0, y_1 \in Im(f)$. Entonces $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$ para ciertos $x_0, x_1 \in X$. Como X es arcoconexo, existe una curva $\alpha \colon [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$. Entonces la composición $f \circ \alpha \colon [0,1] \to Im(f)$ es una curva en $Im(f)$ con $f \circ \alpha(0) = y_0, f \circ \alpha(1) = y_1$, luego $Im(f)$ es arcoconexo. □

Corolario 2.5. *La arcoconexidad es un invariante topológico.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio arcoconexo homeomorfo a Y mediante un homeomorfismo $f \colon X \xrightarrow{\cong} Y$. Por la proposición anterior, $Im(f) = Y$ es arcoconexo. □

Corolario 2.6. $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ *no es homeomorfo a* $\mathbb{R}$.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}$ y tomemos un homeomorfismo $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R} \setminus \{f(x_0)\}$ es también homeomorfismo, con inversa $f^{-1}|_{\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}}$. Tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ es arcoconexo (Ejercicio 5 de la Relación 4) pero $\mathbb{R} \setminus \{f(x_0)\}$ no lo es (pues no es conexo), así que es imposible que sean homeomorfos. □

Corolario 2.7. *Sea X un espacio topológico arcoconexo y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Entonces $X/\sim$ es arcoconexo.*

Demostración. Recordemos que la proyección canónica

$$\begin{aligned} p \colon X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto \overline{x} \end{aligned}$$

es continua y sobreyectiva, luego $Im(f) = X/\sim$ es arcoconexo por serlo X. □

Observación. En particular, todo espacio cociente $X/\sim$ con $X = [0,1] \times [0,1]$ es arcoconexo (banda de Moebius, toro, S^2, botella de Klein...).

2.6. Componentes arcoconexas

Sea X un espacio topológico. Definimos en X la siguiente relación: $x \sim y$ si existe un subespacio arcoconexo $C \subset X$ tal que $x, y \in C$. Esta relación es de equivalencia y la comprobación es totalmente análoga a la que se hizo en la sección de las componentes conexas. A cada clase de equivalencia de esta relación la llamamos componente arcoconexa.

Proposición 2.8. *Sea X un espacio topológico. La componente arcoconexa de un punto $x \in X$ es el mayor subespacio arcoconexo de X que contiene a x.*

Demostración. Totalmente análoga a la de la Proposición 2.4. □

Corolario 2.8. *Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. Entonces, si llamamos $C(x)$ a la componente arcoconexa que contiene a x, se tiene que*

$$C(x) = \bigcup_{\substack{C \text{ arcoc.} \\ x \in C}} C$$

Observación. El conjunto de componentes arcoconexas de X constituye una partición de X por subespacios arcoconexos. Sin embargo, como veremos en el ejemplo siguiente, las componentes arcoconexas, en general, no son cerrados de X, al contrario de las componentes conexas (Proposición 2.5).

Ejemplo 2.14. Sea $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Definimos

$$X = gráf(f) \cup (\{0\} \times [-1,1]) \subset \mathbb{R}^2$$

Las componentes arcoconexas de X son $C_1 = gráf(f)$ y $C_2 = \{0\} \times [-1,1]$, ya que

- C_1 es homeomorfo a $gráf(f) \cong (0,1]$ y es, por tanto, arcoconexo. Además, si tenemos que $C_1 \subsetneq A \subset X$, entonces A no es arcoconexo.
- C_2 es homeomorfo a $[-1,1]$ y es, por tanto, arcoconexo. Igual que antes, si $C_2 \subsetneq B \subset X$, entonces B no es arcoconexo.

Sin embargo, C_1 no es cerrado de X, pues $\overline{C_1} = X \neq C_1$.

Teorema 2.8. *El cardinal del conjunto de componentes arcoconexas de un espacio topológico es un invariante topológico.*

Demostración. Totalmente análoga a la del Teorema 2.5. □

Para terminar el tema, vamos a estudiar qué le falta a un espacio topológico conexo para ser arcoconexo. Para ello, necesitaremos el siguiente resultado:

Proposición 2.9. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(i) Cada punto de X admite un entorno arcoconexo.

(ii) Las componentes arcoconexas son abiertos de X (y, por tanto, cerrados).

Demostración. Veamos que $(i) \implies (ii)$. Sea C una componente arcoconexa de X y probemos que $C = \mathring{C}$.

$\subset$ | Siempre es cierto.

$\supset$ | Sea $x \in C$. Sabemos, por hipótesis, que x admite un entorno arcoconexo E, así que existe un abierto θ con $x \in \theta \subset E$. Como E es arcoconexo y C es el mayor arcoconexo que contiene a x, debe ser $E \subset C$, luego $x \in \mathring{C}$.

Veamos ahora que $(ii) \implies (i)$. Sea $x \in X$. Entonces $C(x)$ es un entorno de x (pues es un abierto que contiene a x) y es también arcoconexo.

Nótese que si todas las componentes arcoconexas de X son abiertas, podemos tomar una de ellas y su complementario es la unión del resto (pues constituyen una partición en X), que es abierto por ser unión de abiertos. Por tanto, todas las componentes arcoconexas son también cerradas. □

Teorema 2.9. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(i) *X es arcoconexo.*

(ii) *X es conexo y cada punto de X admite un entorno arcoconexo.*

Demostración. Veamos que $(i) \implies (ii)$. Ya sabemos que si X es arcoconexo, entonces es conexo. Además, X es entorno arcoconexo de cualquier punto $x \in X$.

Veamos ahora que $(ii) \implies (i)$. Por la proposición anterior, como cada punto de X admite un entorno arcoconexo, se tiene que las componentes arcoconexas de X son abiertos y cerrados. Sea C una de ellas. Entonces $C \neq \emptyset$ y C es abierto y cerrado de X. Como X es conexo, debe ser $C = X$ (Teorema 2.1), por lo que X es arcoconexo. □

Corolario 2.9. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces X es arcoconexo si y solo si es conexo.*

Demostración.

$\Rightarrow$ | Es evidente.

$\Leftarrow$ | Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo y abierto. Dado $x \in X$, existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset X$ por ser X abierto. Como $B(x; r)$ es un entorno arcoconexo de x (pues es convexa), por el teorema anterior, X es arcoconexo.

□

Tema 3

Compacidad

3.1. Introducción

Definición 3.1. Un espacio topológico X es compacto si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito, esto es, si dada una familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ con $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$.

Observación.

- La compacidad es la "generalización topológica de la finitud".
- Al igual que en el tema anterior, si $Y \subset X$ con X espacio topológico, para ahorrar escritura, diremos simplemente que Y es (o no) compacto. La compacidad es una característica propia de los espacios topológicos, así que lo que estamos diciendo en realidad es que el subconjunto Y con la topología de subespacio es (o no) un espacio compacto.

Proposición 3.1. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(i) X es compacto.

(ii) Para toda familia de cerrados $\{F_i\}_{i\in I}$ de X con $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} = \emptyset$.

Demostración. Veamos que $(i) \implies (ii)$. Supongamos que X es compacto y sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados de X con $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Esto significa que $(\bigcap_{i\in I} F_i)^c = \bigcup_{i\in I} F_i^c = X$, luego $\{F_i^c\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X. Por hipótesis, existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que $X = F_{i_1}^c \cup \ldots \cup F_{i_n}^c$. Por tanto, $\emptyset = (F_{i_1}^c \cup \ldots \cup F_{i_n}^c)^c = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$.

Veamos ahora que $(ii) \implies (i)$. Supongamos que se cumple (ii) y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Esto significa que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, por lo que $\emptyset = (\bigcup_{i\in I} U_i)^c = \bigcap_{i\in I} U_i^c$. Por hipótesis, existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que $\emptyset = U_{i_1}^c \cap \ldots U_{i_n}^c$, luego $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$, así que X es compacto. □

El siguiente teorema nos permite expresar la compacidad de un subespacio A de X en términos de los abiertos de X.

Teorema 3.1 (Caracterización de los subespacios compactos). *Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$. Son equivalentes:*

(i) A es compacto.

(ii) Dada una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos de X con $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Demostración. Veamos que $(i) \implies (ii)$. Supongamos que A es compacto y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de X con $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Entonces

$$A = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} U_i \right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap U_i)$$

Como $A \cap U_i$ es un abierto de A para todo $i \in I$, entonces $\{A \cap U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de A. Por ser A compacto, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que

$$A = (A \cap U_{i_1}) \cup \dots \cup (A \cap U_{i_n}) = A \cap (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n})$$

luego $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Veamos ahora que $(ii) \implies (i)$. Supongamos que se cumple (ii) y sea $\{\theta_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de A. Entonces $A = \bigcup_{i\in I} \theta_i$ y $\theta_i = A \cap U_i$ con U_i abierto de X $\forall\, i \in I$. Por tanto,

$$A = \bigcup_{i\in I} (A \cap U_i) = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} U_i \right)$$

luego $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Por hipótesis, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Por tanto,

$$A = A \cap (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}) = (A \cap U_{i_1}) \cup \dots \cup (A \cap U_{i_n}) = \theta_{i_1} \cup \dots \cup \theta_{i_n}$$

Esto significa que A es compacto. $\square$

Ejemplo 3.1. Todo espacio topológico finito es compacto pues si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un espacio topológico finito y $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X, entonces existen $i_1, \dots, i_n$ tales que $x_1 \in U_{i_1}, \dots, x_n \in U_{i_n}$, luego $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Ejemplo 3.2. Veamos que un espacio discreto es compacto si y solo si es finito.

$\underline{\Rightarrow|}$ Si X es discreto y compacto, tomamos el recubrimiento abierto $\{\{x\}\}_{x\in X}$. Por ser X compacto, existen $x_1, \dots, x_n$ tales que $X = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$, por lo que X es finito (tiene n elementos).

$\underline{\Leftarrow|}$ Ya lo hemos visto en el ejemplo anterior.

Ejemplo 3.3. $\mathbb{R}^n$ no es compacto. En efecto, veamos que $\{B(0;k)\}_{k\in N}$ (que es un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}^n$) no admite ningún subrecubrimiento finito. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathbb{R}^n = B(0;k_1) \cup \dots \cup B(0;k_m)$. Entonces $\mathbb{R}^n = B(0;N)$, donde $N = \text{máx}\,\{k_1, \dots, k_m\}$, lo cual es imposible.

Teorema 3.2. *$[a,b]$ es compacto.*

Demostración. Para demostrarlo, usaremos el teorema anterior. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos de $\mathbb{R}$ tales que $[a,b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Definimos $A \subset [a,b]$ como

$$A = \{x \in [a,b] \mid [a,x] \text{ está contenido en una unión finita de abiertos de } \mathcal{U}\}$$

Tenemos que $A \neq \emptyset$, pues $a \in A$ (ya que $[a,a] \subset U_{i_0}$ para cierto $i_0 \in I$). Además, A está acotado superiormente, así que tiene supremo. Sea $\alpha = \sup A$ y veamos que $\alpha = b$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\alpha < b$. Entonces $\alpha \in U_{i_0}$ para cierto $i_0 \in I$, y como U_{i_0} es un abierto de $\mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset U_{i_0}$. Por ser $\alpha = \sup A$, tenemos que $\alpha - \varepsilon \in A$, así que $[a, \alpha - \varepsilon] \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ para ciertos $i_1, \ldots, i_n \in I$. Por tanto, $[a, \alpha + \varepsilon] \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$, luego $\alpha + \varepsilon \in A$ y esto contradice que $\alpha = \sup A$.

Ya sabemos que $\alpha = b$. Como $b \in U_{i_0}$ con U_{i_0} abierto de $\mathbb{R}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $[b - \varepsilon, b] \subset U_{i_0}$ y $b - \varepsilon \geq a$. Por ser $b = \sup A$, se tiene que $[a, b - \varepsilon] \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ para ciertos $i_1, \ldots, i_n \in I$, luego $[a,b] \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$, y esto significa que $[a,b]$ es compacto. □

3.2. Propiedades de la compacidad

Proposición 3.2. *Sea X un espacio topológico Hausdorff y $A \subset X$ compacto. Entonces A es cerrado.*

Demostración. Veamos que A^c es abierto, es decir, que $A^c = (A^c)^{\circ}$.

$\subset$ Sea $x \in A^c$. Para cada $y \in A$, por ser X Hausdorff, existen abiertos $U_x^y \ni x$, $V_y \ni y$ tales que $U_x^y \cap V_y = \emptyset$. Consideremos la familia de abiertos $\{V_y\}_{y \in A}$. Es claro que $A \subset \bigcup_{y \in A} V_y$. Por ser A compacto, $A \subset V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_p}$ para ciertos $y_1, \ldots, y_p \in A$. Definimos $\theta = U_x^{y_1} \cap \ldots \cap U_x^{y_p}$, que es un abierto (es intersección de abiertos) con $x \in \theta$. Veamos que $\theta \subset A^c$, o lo que es lo mismo, que $\theta \cap A = \emptyset$. Tenemos que

$$\theta \cap A \subset \theta \cap (V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_p}) = (\theta \cap V_{y_1}) \cup \ldots \cup (\theta \cap V_{y_p}) \subset (U_x^{y_1} \cap V_{y_1}) \cup \ldots \cup (U_x^{y_p} \cap V_{y_p})$$

Como $U_x^{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset \ \forall\, i = 1, \ldots, p$, entonces $\theta \cap A = \emptyset$ y $x \in \theta \subset A^c$, luego $x \in (A^c)^{\circ}$.

$\supset$ Siempre se cumple.

□

Proposición 3.3. *Sea X un espacio topológico compacto y sea $A \subset X$ cerrado. Entonces A es compacto.*

Demostración. Veamos que A es compacto. Sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados de A con $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Como A es cerrado, cada F_i es cerrado de X, y como X es compacto, existen $i_1, \ldots, i_p \in I$ tales que $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_p} = \emptyset$. □

Corolario 3.1. *Sea X un espacio métrico y sea $A \subset X$ compacto. Entonces A es cerrado y acotado.*

Demostración. Por ser X espacio métrico, es también Hausdorff. Por una proposición anterior, A es cerrado. Veamos que es también acotado. Sea $x_0 \in X$ y consideremos la familia de abiertos $\{B(x_0;n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Nótese que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0;n)$. Como A es compacto, entonces $A \subset B(x_0;n_1) \cup \ldots \cup B(x_0;n_p)$ para ciertos $n_1,\ldots,n_p \in \mathbb{N}$. Pero se tiene que $B(x_0;n_1) \cup \ldots \cup B(x_0;n_p) = B(x_0;N)$ con $N = \max\{n_1,\ldots,n_p\}$. Por tanto, $A \subset B(x_0;N)$, así que A es acotado, pues si $a, a' \in A$, entonces

$$d(a,a') \leq d(a,x_0) + d(x_0,a') \leq 2N$$

□

Ejemplo 3.4. Existen espacios métricos acotados (y cerrados, evidentemente) que no son compactos. Por ejemplo, sea X un espacio discreto e infinito. X es el espacio asociado a la distancia discreta, que es acotada. Sin embargo, X no es compacto, pues es infinito.

Proposición 3.4. *Sea $f\colon X \to Y$ continua con X compacto. Entonces $f(X)$ es un subespacio compacto de Y.*

Demostración. Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de Y tales que $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Entonces

$$X = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$$

Como f es continua, entonces $f^{-1}(V_i)$ es abierto de X $\forall\ i \in I$, luego $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X, y como X es compacto, entonces existen $i_1,\ldots,i_p \in I$ tales que $X = f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_p})$. Por tanto,

$$f(X) = f(f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_p})) = f \circ f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f \circ f^{-1}(V_{i_p}) \subset V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_p}$$

□

Corolario 3.2. *La compacidad es un invariante topológico.*

Demostración. Es inmediata usando la proposición anterior. □

Corolario 3.3. *Sea X compacto y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Entonces $X/\sim$ es compacto.*

Demostración. Totalmente análoga a la del Corolario 2.7. □

Corolario 3.4. *Sea $f\colon X \to Y$ continua con X compacto e Y Hausdorff. Entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea $F \subset X$ cerrado de X. Como X es compacto, F es un subespacio compacto de X. Por ser f continua, $f(F)$ es un subespacio compacto de Y, y como Y es Hausdorff, entonces $f(F)$ es cerrado de Y. □

Corolario 3.5. *Toda aplicación $f\colon X \to Y$ continua y biyectiva con X compacto e Y Hausdorff es homeomorfismo.*

Demostración. Es inmediata usando la proposición anterior y la Proposición 1.17. □

Teorema 3.3 (Teorema de Tychonoff). *Sean $X, Y \neq \emptyset$. Entonces $X \times Y$ es compacto si y solo si X es compacto e Y es compacto.*

Demostración.

$\underline{\Rightarrow}|$ Supongamos que $X \times Y$ es compacto. Dado que las proyecciones $p_X : X \times Y \to X$, $p_X(x,y) = x$ y $p_Y : X \times Y \to Y$, $p_Y(x,y) = y$ son continuas y sobreyectivas, entonces $Im(p_X) = X$ y $Im(p_Y) = Y$ son compactos.

$\underline{\Leftarrow}|$ Supongamos que X e Y son compactos y veamos que $X \times Y$ es compacto. Sea $\mathcal{W}$ un recubrimiento abierto de $X \times Y$. Fijemos $x \in X$. Para cada $y \in Y$, tomamos el par $(x,y) \in W_x^y$ para algún abierto W_x^y de $X \times Y$. Por tanto, existen abiertos U_x^y de X con $x \in U_x^y$ y V_x^y de Y con $y \in Y_x^y$ tales que $(x,y) \in U_x^y \times V_x^y \subset W_x^y$. Consideramos la familia $\{V_x^y\}_{y \in Y}$ de abiertos de Y, que es claramente es un recubrimiento abierto de Y. Por ser Y compacto, existen $y_1, \ldots, y_p \in Y$ tales que $Y = V_x^{y_1} \cup \ldots \cup V_x^{y_p}$. Definimos $U_x = U_x^{y_1} \cap \ldots \cap U_x^{y_p}$, que es un abierto de X con $x \in U_x$.

Repitiendo este proceso para cada $x \in X$, construimos una familia de abiertos $\{U_x\}_{x \in X}$ con $x \in U_x \; \forall \, x \in X$. Por tanto, $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. Como X es compacto, existen $x_1, \ldots, x_q$ tales que $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_q}$. Para terminar la demostración, veamos que

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,q}} W_{x_j}^{y_i}$$

La contención $\supset$ es evidente. Sea $(x,y) \in X \times Y$. Entonces $x \in U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_q}$, luego $x \in U_{x_k}$ para algún $k = 1, \ldots, q$. Además, $y \in V_{x_k}^{y_1} \cup \ldots \cup V_{x_k}^{y_p}$, así que $y \in V_{x_k}^{y_l}$ para algún $l = 1, \ldots, p$. Por tanto,

$$(x,y) \in U_{x_k} \times V_{x_k}^{y_l} = (U_{x_k}^{y_1} \cap \ldots \cap U_{x_k}^{y_p}) \times V_{x_k}^{y_l} \subset U_{x_k}^{y_l} \times V_{x_k}^{y_l} \subset W_{x_k}^{y_l} \implies (x,y) \in \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,q}} W_{x_j}^{y_i}$$

□

Corolario 3.6. *Los subespacios compactos de $\mathbb{R}^n$ son los cerrados y acotados.*

Demostración. Ya sabemos que cualquier subespacio compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado. Recíprocamente, sea $K \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado y veamos que es compacto. Como K es acotado, existe $N > 0$ tal que $K \subset B(0;N)$. Veamos que

$$B(0;N) \subset [-N,N] \times \ldots \times [-N,N] = [-N,N]^n$$

En efecto, si $x \in B(0;N)$, entonces $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2} < N \implies \sqrt{x_i^2} = |x_i^2| < N$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Por el teorema anterior, como el intervalo $[-N,N]$ es compacto, se tiene que $[-N,N]^n$ es compacto, así que K (que es cerrado) es también compacto. □

3.3. Compactaciones

Dado un espacio topológico X no compacto, la idea de esta sección es "completar X hasta que sea compacto". De aquí en adelante, todos los espacios que consideremos serán Hausdorff.

Definición 3.2. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Una compactación de X es un par $(h, \hat{X})$ tal que

(i) $\hat{X}$ es compacto y Hausdorff.

(ii) $h\colon X \to \hat{X}$ es un homeomorfismo sobre su imagen, esto es, la aplicación $h\colon X \to h(X)$ es homeomorfismo.

(iii) $h(X)$ es denso en $\hat{X}$.

En otros términos, una compactación de X es "un espacio compacto $\hat{X}$ que contiene a X como subespacio denso".

Observación. Nótese que si X es compacto y Hausdorff, las únicas compactaciones de X son el propio X y espacios homeomorfos. En efecto, si X es compacto y Hausdorff y $(h, \hat{X})$ es una compactación de X, entonces $h(X)$ es compacto por ser $h\colon X \to \hat{X}$ continua. Como además $\hat{X}$ es Hausdorff, entonces $h(X)$ es cerrado, luego $h(X) = \overline{h(X)}$, y por ser $h(X)$ denso en $\hat{X}$, se tiene que $\overline{h(X)} = \hat{X}$, así que $h\colon X \to \hat{X} = h(X)$ es homeomorfismo.

Teorema 3.4 (Compactación de Alexandroff). *Sea X un espacio Hausdorff no compacto tal que cada $x \in X$ admite un entorno compacto. Entonces existe una compactación $(h, \hat{X})$ de X tal que $\hat{X} \setminus h(X)$ es un solo punto. Además, esta compactación es única salvo homeomorfismos.*

Demostración. Definimos $\hat{X} = X \,\dot\cup\, \{x_0\}$ para algún $x_0 \notin X$ y tomamos como h la inclusión:

$$\begin{aligned} \iota\colon X &\hookrightarrow \hat{X} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Vamos a definir la topología $\hat{\tau}$ de $\hat{X}$ como

$$\hat{\tau} = \tau \cup \{(X \setminus K) \cup \{x_0\}\}_{K \text{ compacto de } X} = \tau \cup \{K^c \cup \{x_0\}\}_{K \text{ compacto de } X}$$

Veamos que $(\hat{X}, \hat{\tau})$ es un espacio topológico:

(i) $\hat{X} \in \hat{\tau}$ porque $\hat{X} = X \cup \{x_0\} = \emptyset^c \cup \{x_0\}$ y $\emptyset$ es compacto de X. Además, $\emptyset \in \tau \subset \hat{\tau}$.

(ii) Una unión arbitraria de elementos de $\hat{\tau}$ se puede escribir como

$$\left(\bigcup_{i\in I} \theta_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} ((X \setminus K_j) \cup \{x_0\})\right) = \theta \cup \left(\bigcup_{j\in J} (K_j^c \cup \{x_0\})\right)$$

donde θ_i es abierto de X $\forall\, i \in I$ y K_j es compacto de X $\forall\, j \in J$. Además,

$$\theta \cup \left(\bigcup_{j\in J} (K_j^c \cup \{x_0\})\right) = \theta \cup \left(\left(\bigcap_{j\in J} K_j\right)^c \cup \{x_0\}\right) = \theta \cup ((X \setminus K) \cup \{x_0\})$$

con $K = \bigcap_{j\in J} K_j$ compacto (es intersección de compactos). Podemos escribir

$$\theta \cup ((X \setminus K) \cup \{x_0\}) = (\theta^c)^c \cup K^c \cup \{x_0\} = (\theta^c \cap K)^c \cup \{x_0\} = (X \setminus (\theta^c \cap K)) \cup \{x_0\}$$

Como θ^c y K son cerrados de X, entonces $\theta^c \cap K \subset K$ es cerrado de X, y como $K \subset X$ es compacto, entonces $\theta^c \cap K$ es compacto. Por tanto, $(X \setminus (\theta^c \cap K)) \cup \{x_0\} \in \hat{\tau}$.

(iii) Una intersección finita de elementos de $\hat{\tau}$ se puede escribir como

$$(\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_p) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{q} ((X \setminus K_j) \cup \{x_0\}) \right) = \theta \cap \left(\bigcap_{j=1}^{q} (K_j^c \cup \{x_0\}) \right)$$

donde θ_i es abierto de X $\forall\, i = 1, \ldots, p$ y K_j es compacto de X $\forall\, j = 1, \ldots, q$. Además,

$$\theta \cap \left(\bigcap_{j=1}^{q} (K_j^c \cup \{x_0\}) \right) = \theta \cap \left(\left(\bigcup_{j=1}^{q} K_j \right)^c \cup \{x_0\} \right) = \theta \cap ((X \setminus K) \cup \{x_0\})$$

con $K = \bigcup_{j=1}^{q} K_j$ compacto (es unión finita de compactos). Podemos escribir

$$\theta \cap ((X \setminus K) \cup \{x_0\}) = (\theta \cap (X \setminus K)) \cup (\theta \cap \{x_0\}) = \theta \cap (X \setminus K)$$

ya que $\theta \cap \{x_0\} = \emptyset$ por ser $\theta \subset X$ y $x_0 \notin X$. Como K es compacto y X es Hausdorff, entonces K es cerrado, luego $X \setminus K$ es abierto de X y $\theta \cap (X \setminus K)$ también (es intersección de dos abiertos). Por tanto, $\theta \cap (X \setminus K) \in \tau \subset \hat{\tau}$.

Así pues, $(\hat{X}, \hat{\tau})$ es espacio topológico.

Nótese que la topología inducida por $(\hat{X}, \hat{\tau})$ en X es precisamente τ, pues la intersección de abiertos de $\hat{\tau}$ con X es

$$\theta \cap X = \theta$$

si $\theta \in \tau$, ó

$$((X \setminus K) \cup \{x_0\}) \cap X = X \setminus K$$

si $\theta \in \{K^c \cup \{x_0\}\}_{K \text{ compacto de } X}$. Vemos en cualquier caso que $\theta \in \tau$.

Veamos ahora que ι es homeomorfismo sobre su imagen. En efecto, $\iota\colon X \to \iota(X) = X$ es la identidad en X, así que, teniendo en cuenta lo anterior, es homeomorfismo.

Comprobemos que $\hat{X}$ es Hausdorff.

- Si $x, y \in X$ con $x \neq y$, por ser X Hausdorff, existen abiertos U_x, U_y de X (y por tanto de $\hat{X}$) con $x \in U_x$, $y \in U_y$ y $U_x \cap U_y = \emptyset$.

- Si $x \in X$, $x_0 \in \hat{X}$, por hipótesis, x admite un entorno compacto K, así que existe un abierto θ de X con $x \in \theta \subset K$. Además, $(X \setminus K) \cup \{x_0\}$ es abierto de $\hat{X}$ con $x_0 \in (X \setminus K) \cup \{x_0\}$ y cumple que

$$\theta \cap ((X \setminus K) \cup \{x_0\}) = \emptyset$$

Esto demuestra que $\hat{X}$ es Hausdorff. Probemos ahora que $\hat{X}$ es compacto. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de $\hat{X}$. Tenemos que

$$\mathcal{U} = \{U_i, (X \setminus K_j) \cup \{x_0\}\}_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$$

con U_i abierto de X $\forall\, i \in I$ y K_j compacto de X $\forall\, j \in J$. Tomemos $j_0 \in J$ y consideremos $(X \setminus K_{j_0}) \cup \{x_0\}$ con $K_{j_0} \subset X$ compacto. Como $\mathcal{U}$ es recubrimiento abierto de $\hat{X}$ (y por tanto de X), tenemos que

$$K_{j_0} \subset \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cup \left(\bigcup_{j \neq j_0} (X \setminus K_j) \right)$$

y por ser K_{j_0} compacto,

$$K_{j_0} \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_p} \cup (X \setminus K_{j_1}) \cup \ldots \cup (X \setminus K_{j_q})$$

para ciertos $i_1, \ldots, i_p \in I$, $j_1, \ldots, j_q \neq j_0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\hat{X} &= K_{j_0} \cup ((X \setminus K_{j_0}) \cup \{x_0\}) \\ &= U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_p} \cup ((X \setminus K_{j_1}) \cup \{x_0\}) \cup \ldots \cup ((X \setminus K_{j_q}) \cup \{x_0\}) \cup ((X \setminus K_{j_0}) \cup \{x_0\})\end{aligned}$$

luego $\mathcal{U}$ admite un subrecubrimiento finito.

Para terminar, veamos que una tal compactación es única salvo homeomorfismos. Sea (h, Y) otra compactación de X tal que $Y \setminus h(X) = \{y_0\}$ y $h\colon X \to Y$ es homeomorfismo sobre su imagen. Veamos que $\hat{X} \cong Y$. Definimos $f\colon \hat{X} \to Y$ por

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in X \\ y_0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Se comprueba que f es continua y biyectiva (ejercicio) y como $\hat{X}$ es compacto e Y es Hausdorff, entonces f es también cerrada, luego es homeomorfismo. □

Observación. En la demostración anterior hemos usado que la unión finita de compactos es compacto y que la intersección arbitraria de compactos es compacto. Para más detalle, ver el Ejercicio 3 de la Relación 5.

Corolario 3.7. *Sea X no compacto, Hausdorff y tal que cada $x \in X$ admite un entorno compacto. Sea Y espacio topológico compacto y Hausdorff que contiene a X como subespacio denso y tal que $Y \setminus X = \{y_0\}$. Entonces (Y, ι) con ι la inclusión es la compactación de Alexandroff de X.*

Demostración. Inmediata usando el teorema anterior. □

Observación. Si (h, Y) es una compactación de X y $\varphi\colon Z \to X$ es homeomorfismo, entonces $(h \circ \varphi, Y)$ es una compactación de Z.

Ejemplo 3.5. Sea $X = (0, 1]$, que es no compacto, Hausdorff y tal que cada punto admite un entorno compacto. Por el teorema anterior, tiene compactación de Alexandroff, y por el corolario anterior, es $Y = [0, 1]$, pues Y contiene a X como subespacio denso, es compacto y Hausdorff y cumple que $Y \setminus \iota(X) = Y \setminus X = \{0\}$.

Ejemplo 3.6. Sea $X = \mathbb{R}^n$, que es no compacto, Hausdorff y tal que cada punto admite un entorno compacto. Por el teorema anterior, tiene compactación de Alexandroff. Veamos que es S^n. Recordemos que $S^n \setminus N \cong \mathbb{R}^n$ (Ejemplo 1.25) mediante un homeomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} S^n \setminus N$ $(N = \{(1, 0, \ldots, 0)\})$. Tomamos $h = \iota \circ \varphi$:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} S^n \setminus N \xhookrightarrow{\iota} S^n$$

Entonces $h(\mathbb{R}^n) = S^n \setminus N$ y tenemos que

- h es homeomorfismo sobre su imagen.
- S^n contiene a $S^n \setminus N$ como subespacio denso.

- S^n es compacto y Hausdorff.
- $S^n \setminus (S^n \setminus N) = N$.

Por unicidad, (h, S^n) es la compactación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$. Además, como $\mathbb{R}^n \cong B(x_0; r)$, concluimos que la compactación de Alexandroff de cualquier bola abierta es S^n.

Ejemplo 3.7. Sea $X = \mathbb{Q}$, que es no compacto y Hausdorff. Sin embargo, ningún punto de $\mathbb{Q}$ admite un entorno compacto en $\mathbb{Q}$, pues ningún entorno de ningún punto es cerrado, y por tanto, no es compacto. Esto significa que no se puede usar el teorema anterior. Es más, se comprueba que $\mathbb{Q}$ no admite compactación de Alexandroff.

Tema 4

Axiomas de separación

En este tema, exigiremos a una topología que "separe" distintos tipos de subconjuntos y estudiaremos las propiedades que resultan de ello.

4.1. Espacios Hausdorff

Recordamos la definición:

Definición 4.1. Un espacio topológico X es Hausdorff si "separa puntos por abiertos", es decir, si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos $\theta_x \ni x, \theta_y \ni y$ tales que $\theta_x \cap \theta_y = \emptyset$.

Algunas propiedades sobre los espacios Hausdorff que no se han visto hasta ahora:

Proposición 4.1. *Todo subespacio de un espacio Hausdorff es Hausdorff.*

Demostración. Sea X Hausdorff y sea $A \subset X$. Sean $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$. Como X es Hausdorff, existen abiertos θ_1, θ_2 de X con $a_1 \in \theta_1, a_2 \in \theta_2$ y $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$. Los abiertos $A \cap \theta_1, A \cap \theta_2$ de A cumplen que $a_1 \in A \cap \theta_1, a_2 \in A \cap \theta_2$ y $(A \cap \theta_1) \cap (A \cap \theta_2) = \emptyset$, luego A es Hausdorff. □

Proposición 4.2. *Sean X, Y espacios topológicos no vacíos. Entonces $X \times Y$ es Hausdorff si y solo si X es Hausdorff e Y es Hausdorff.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Supongamos que $X \times Y$ es Hausdorff y veamos que X también es Hausdorff. Tomemos $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$. Sea $y \in Y$. Como $(x_1, y) \neq (x_2, y)$ y $X \times Y$ es Hausdorff, existen abiertos U, V de $X \times Y$ tales que $(x_1, y) \in U$, $(x_2, y) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sabemos que

$$U = \bigcup_{i \in I} (\theta_i \times W_i) \qquad V = \bigcup_{j \in J} (\theta_j \times W_j)$$

con θ_i, θ_j abiertos de X $\forall\, i \in I, j \in J$ y W_i, W_j abiertos de Y $\forall\, i \in I, j \in J$. Por tanto, existen $i_0 \in I$ tal que $(x_1, y) \in \theta_{i_0} \times W_{i_0} \subset U$ y $j_0 \in J$ tal que $(x_2, y) \in \theta_{j_0} \times W_{j_0} \subset V$. Además,

$$(\theta_{i_0} \cap \theta_{j_0}) \times (W_{i_0} \cap W_{j_0}) = (\theta_{i_0} \times W_{i_0}) \cap (\theta_{j_0} \times W_{j_0}) \subset U \cap V = \emptyset$$

luego $(\theta_{i_0} \cap \theta_{j_0}) \times (W_{i_0} \cap W_{j_0}) = \emptyset$. Como $W_{i_0} \cap W_{j_0} \neq \emptyset$ (pues $y \in W_{i_0} \cap W_{j_0}$), tiene que ser $\theta_{i_0} \cap \theta_{j_0} = \emptyset$, así que X es Hausdorff. De forma totalmente análoga se demuestra que Y es Hausdorff.

$\Leftarrow$ Supongamos que X, Y son Hausdorff y veamos que $X \times Y$ también es Hausdorff. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y, (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Supongamos que $x_1 \neq x_2$. Como X es Hausdorff, existen abiertos $\theta_1 \ni x_1, \theta_2 \ni x_2$ tales que $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$. Entonces los abiertos $\theta_1 \times Y, \theta_2 \times Y$ de $X \times Y$ cumplen que $(x_1, y_1) \in \theta_1 \times Y$, $(x_2, y_2) \in \theta_2 \times Y$ y $(\theta_1 \times Y) \cap (\theta_2 \times Y) = \emptyset$, luego $X \times Y$ es Hausdorff. El caso $y_1 \neq y_2$ es análogo.

$\square$

Observación. El carácter Hausdorff no se preserva por continuidad. Por ejemplo, si (X, τ) es Hausdorff, consideremos la aplicación $id\colon (X, \tau) \to (X, \tau_g)$ con τ_g la topología grosera. Entonces id es continua (Ejemplo 1.18) pero $id(X, \tau) = (X, \tau_g)$ no es Hausdorff.

A pesar de esto...

Proposición 4.3. *El carácter Hausdorff es un invariante topológico.*

Demostración. Sea X Hausdorff y $f\colon X \xrightarrow{\cong} Y$ homeomorfismo. Veamos que Y es Hausdorff. Sean $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$. Como f es biyectiva, tomamos $x_1 = f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2) = x_2$. Por ser X Hausdorff, existen abiertos $\theta_1 \ni x_1, \theta_2 \ni x_2$ tales que $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$, por lo que $f(\theta_1 \cap \theta_2) = f(\theta_1) \cap f(\theta_2) = \emptyset$ (nótese que la primera igualdad es cierta porque f es biyectiva, aunque en realidad basta con que sea inyectiva para que se cumpla). Como f es abierta (por ser homeomorfismo), entonces $f(\theta_1) \ni y_1, f(\theta_2) \ni y_2$ son abiertos disjuntos de Y, y esto demuestra que Y es Hausdorff. $\square$

Proposición 4.4. *En los espacios Hausdorff, los puntos son cerrados.*

Demostración. Supongamos que X es Hausdorff y sea $x \in X$. Veamos que $\{x\}$ es cerrado, esto es, que $\{x\}^c = (\{x\}^c)^{\circ}$.

$\subset$ Sea $y \in \{x\}^c$. Entonces $y \neq x$, y como X es Hausdorff, existen abiertos $\theta_x \ni x, \theta_y \ni y$ tales que $\theta_x \cap \theta_y = \emptyset$. En particular, $y \in \theta_y \subset \theta_x^c \subset \{x\}^c$ (la primera contención se tiene porque $\theta_x \cap \theta_y = \emptyset \implies \theta_y \subset \theta_x^c$, y la última porque $\{x\} \subset \theta_x \implies \theta_x^c \subset \{x\}^c$), luego $y \in (\{x\}^c)^{\circ}$.

$\supset$ Siempre es cierto.

Por tanto, $\{x\}^c$ es abierto y $\{x\}$ es cerrado. $\square$

Corolario 4.1. *Sea X Hausdorff y sea $A \subset X$ finito. Entonces A es cerrado.*

Demostración. Inmediata usando la proposición anterior. $\square$

4.2. Espacios regulares

Definición 4.2. Un espacio Hausdorff X es regular si "separa puntos de cerrados por abiertos", esto es, si dados $x \in X$ y $F \subset X$ cerrado con $x \notin F$, existen abiertos θ_x, θ_F tales que $x \in \theta_x, F \subset \theta_F$ y $\theta_x \cap \theta_F = \emptyset$.

Estudiemos algunas propiedades de los espacios regulares:

Proposición 4.5. *Todo subespacio de un espacio regular es regular.*

Demostración. Ejercicio 3 de la Relación 6. □

Proposición 4.6. *Si X, Y son espacios no vacíos, $X \times Y$ es regular si y solo si X es regular e Y es regular.*

Demostración. Ejercicio 3 de la Relación 6. □

Observación. Al igual que sucede con los espacios Hausdorff, la regularidad no se mantiene por continuidad. Sin embargo...

Proposición 4.7. *El carácter regular es un invariante topológico.*

Demostración. Análoga a la de la Proposición 4.3. □

Proposición 4.8. *Todo espacio compacto Hausdorff es regular.*

Demostración. Ejercicio 5 de la Relación 6. □

Teorema 4.1 (Caracterización de los espacios regulares). *Sea X Hausdorff. Son equivalentes:*

(i) *X es regular.*

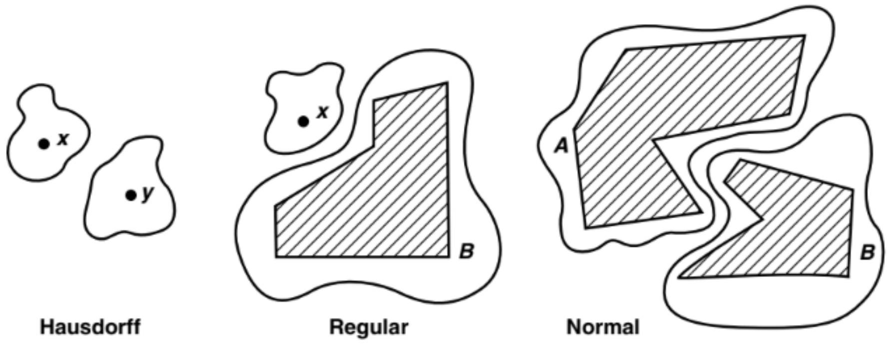
(ii) *Dado $x \in U$ con U abierto, existe otro abierto V con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demostración. Veamos primero que $(i) \implies (ii)$. Supongamos que X es regular y sea $x \in U$ con U abierto. Entonces $x \notin U^c$, que es cerrado. Como X es regular, existen abiertos V, W tales que $x \in V$, $U^c \subset W$ y $V \cap W = \emptyset$. Se tiene entonces que $x \in V \subset \overline{V}$. Además, $V \cap W = \emptyset \iff V \subset W^c$, luego $\overline{V} \subset \overline{W^c} = W^c$ (W^c es cerrado). Como además $U^c \subset W$, entonces $W^c \subset U$, luego $x \in V \subset \overline{V} \subset W^c \subset U$.

Veamos ahora que $(ii) \implies (i)$. Supongamos que se cumple (ii). Sea $x \in X$ y sea F cerrado con $x \notin F$, es decir, $x \in F^c$, que es abierto. Por (ii), existe un abierto V con $x \in V \subset \overline{V} \subset F^c$. La última contención nos dice que $F \subset \overline{V}^c$ ($\overline{V}^c$ es abierto). Como $x \in V$, $F \subset \overline{V}^c$ y $V \cap \overline{V}^c = \emptyset$ (esto último es cierto porque $V \subset \overline{V}$), entonces X es regular. □

4.3. Espacios normales

Definición 4.3. Un espacio Hausdorff X es normal si "separa cerrados disjuntos por abiertos", es decir, si dados F, G cerrados con $F \cap G = \emptyset$, existen abiertos $\theta_F \supset F, \theta_G \supset G$ tales que $\theta_F \cap \theta_G = \emptyset$.



Observación. Algunas de las propiedades que se tenían en espacios Hausdorff y regulares ahora no son ciertas:

- No todo subespacio de un espacio normal es normal.
- $X \times Y$ normal $\implies$ X normal e Y normal, pero el recíproco no es cierto.

Proposición 4.9. *La normalidad es un invariante topológico.*

Demostración. Análoga a la de la Proposición 4.3. □

Proposición 4.10. *Todo espacio compacto Hausdorff es normal.*

Demostración. Ejercicio 5 de la Relación 6. □

Teorema 4.2 (Caracterización de los espacios normales). *Sea X Hausdorff. Son equivalentes:*

(i) X es normal.

(ii) Dado $F \subset U$ con F cerrado y U abierto, existe otro abierto V tal que $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Demostración. Similar a la del Teorema 4.1. □

En la demostración del próximo teorema, vamos a utilizar lo siguiente: dado un espacio métrico X y dado $A \subset X$...

- Si $x \in X$, definimos la distancia de x a A como
$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}$$
- $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

- La aplicación
$$\begin{aligned} h_A \colon X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) \end{aligned}$$
es continua.

Teorema 4.3. *Todo espacio métrico es normal.*

Demostración. Sea X espacio métrico y sean $F, G \subset X$ cerrados disjuntos. Definimos
$$\theta_F = \{x \in X \mid d(x, F) < d(x, G)\} \qquad \theta_G = \{x \in X \mid d(x, G) < d(x, F)\}$$
Comprobemos lo necesario:

- $F \subset \theta_F$, pues dado $x \in F = \overline{F}$, se tiene que $d(x, F) = 0$, y como $x \notin G = \overline{G}$, entonces $d(x, G) > 0$, luego $d(x, F) < d(x, G)$.
- $G \subset \theta_G$ (análogo al punto anterior).
- Es claro que $\theta_F \cap \theta_G = \emptyset$.
- θ_F es abierto, pues la aplicación
$$\begin{aligned} h_A \colon X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) \end{aligned}$$
es continua para cualquier $A \subset X$, y tenemos que
$$\theta_F = (h_G - h_F)^{-1}((0, \infty))$$
que es abierto por ser la imagen inversa de un abierto mediante una aplicación continua.
- θ_G es abierto (análogo al punto anterior).

Por tanto, X es normal. $\square$

Observación. En general, se tiene que
$$\text{Métrico} \overset{(i)}{\Longrightarrow} \text{Normal} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \text{Regular}$$
$$\text{Métrico} \not\Longleftarrow \text{Normal} \overset{(iii)}{\not\Longleftarrow} \text{Regular}$$
ya que (i) es cierto por el teorema anterior, (ii) es consecuencia de la Proposición 4.4, y para un ejemplo que demuestre (iii), ver el Ejercicio 8 de la Relación 6.

Sin embargo, si X es ANII,
$$\text{Métrico} \iff \text{Normal} \iff \text{Regular}$$

Teorema 4.4 (Lema de Urysohn). *Sea X Hausdorff. Son equivalentes:*

(i) X es normal.

(ii) Dados $F, G \subset X$ cerrados disjuntos, existe una aplicación $f \colon X \to [0, 1]$ continua con $f(F) = \{0\}, f(G) = \{1\}$.

Demostración. Veamos primero que $(ii) \implies (i)$. Supongamos que se cumple (ii). Sean $F, G \subset X$ cerrados disjuntos y sea $f\colon X \to [0,1]$ continua tal que $f(F) = \{0\}, f(G) = \{1\}$. Los conjuntos $\theta_F = f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \subset F$, $\theta_G = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \subset G$ son abiertos (f es continua y $[0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1]$ son abiertos de $[0,1]$) y cumplen $\theta_F \cap \theta_G = \emptyset$, luego X es normal.

Solo vamos a demostrar $(i) \implies (ii)$ para espacios métricos. Sean F, G cerrados disjuntos. Definimos

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)} \end{aligned}$$

que es continua por ser cociente de funciones continuas (el denominador nunca se anula) y cumple $f(F) = \{0\}, f(G) = \{1\}$. $\square$

Corolario 4.2. *Todo espacio normal conexo de más de un punto tiene cardinal no numerable.*

Demostración. Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Como los puntos son cerrados, por el lema de Urysohn, existe $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Como X es conexo, por el teorema de los valores intermedios, dado $t \in [0,1]$, existe $x_t \in X$ tal que $f(x_t) = t$, luego $\mathcal{X}(X) > \mathcal{X}_0$. $\square$

Teorema 4.5 (Teorema de extensión de Tietze). *Sea X Hausdorff. Son equivalentes:*

(i) X es normal.

(ii) Dado $A \subset X$ cerrado y $f\colon A \to \mathbb{R}$ continua, existe $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ continua con $\tilde{f}\big|_A = f$.

Demostración. Solo vamos a demostrar $(ii) \implies (i)$. Supongamos que se cumple (ii). Sean F, G cerrados disjuntos. Tomemos $A = F \cup G$. Definimos $f\colon A \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in F \\ 1 & \text{si } x \in G \end{cases}$$

que es continua (Proposición 1.16). Por (ii), existe $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ continua con $\tilde{f}\big|_A = f$. Sean

$$\theta_F = \tilde{f}^{-1}((-\infty, \frac{1}{2})) \supset F \qquad \theta_G = \tilde{f}^{-1}((\frac{1}{2}, \infty)) \supset G$$

Entonces $\theta_F \cap \theta_G = \emptyset$, luego X es normal. $\square$