1. Tenemos que

- $1 = 0 \cdot 7 + 1 \implies c_0 = 0, r_0 = 1$
- $2 \cdot 1 = 0 \cdot 7 + 2 \implies c_1 = 0, r_1 = 2$
- $2 \cdot 2 = 0 \cdot 7 + 4 \implies c_2 = 0, r_2 = 4$
- $2 \cdot 4 = 1 \cdot 7 + 1 \implies c_3 = 1, r_3 = 1$

A partir de aquí, empezamos a obtener cocientes repetidos, luego

$$\frac{1}{7} = (0'001001001\ldots)_2 = (0'\overline{001})_2$$

Como la cifra b_8 es cero, entonces el redondeo en base 2 es $rd_7(\frac{1}{7}) = (0'001001)_2$. Por otra parte,

$$\frac{1}{7} = 7^{-1} = (0'1)_7$$

así que el redondeo en base 7 es $rd_7(\frac{1}{7}) = (0'1)_7$. En el primer caso, el error cometido es

$$\left|\frac{1}{7} - (0'001001)_2\right| = \left|\frac{1}{7} - 2^{-3} - 2^{-6}\right| = \left|\frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{64}\right| = \left|\frac{512 - 448 - 56}{3584}\right| = \frac{1}{448} \le \frac{1}{256} = \frac{1}{2}2^{-7}$$

que satisface la cota $|x - rd_n(x)| \le \frac{1}{2}\beta^{-n}$. Por otra parte, el error en el segundo caso es 0, que evidentemente también satisface la cota.

2.

(a) La única raíz positiva de la ecuación es $l = \sqrt{a}$. La función de iteración del método de punto fijo es $g(x) = x + \lambda(x^2 - a)$. Vamos a elegir $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma que sea $|g'(\sqrt{a})| < 1$. Tenemos que $g'(x) = 1 + 2x\lambda$, luego

$$\begin{aligned} |g'(\sqrt{a})| < 1 &\iff |1 + 2\sqrt{a}\lambda| < 1 \iff -1 < 1 + 2\sqrt{a}\lambda < 1 \iff -1 < \sqrt{a}\lambda < 0 \\ &\iff -\frac{1}{\sqrt{a}} < \lambda < 0 \end{aligned}$$

Por tanto, para cualquier $\lambda \in (-\frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$, el método converge localmente hacia la raíz positiva de la ecuación. Para que el método sea de orden 2, vamos a tomar $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma que $g'(\sqrt{a}) = 0$ y $g''(\sqrt{a}) \neq 0$.

- $g'(\sqrt{a}) = 0 \iff 1 + 2\sqrt{a}\lambda = 0 \iff \lambda = -\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
- $g''(\sqrt{a}) \neq 0 \iff 2\lambda \neq 0 \iff \lambda \neq 0$

Por tanto, tomando $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$, el método es de orden 2. La constante de error asintótico es

$$C = \frac{|g''(\sqrt{a})|}{2} = \frac{|2\lambda|}{2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

(b) La función de iteración es $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$. Entonces $g'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2})$, luego

$$|g'(\sqrt{a})| = \left|\frac{1}{2}(1 - \frac{a}{a})\right| = 0 < 1$$

así que el método es localmente convergente y de orden al menos 2. Además,

$$g''(x) = \frac{a}{x^3} \neq 0 \ \forall \ x \neq 0$$

luego $g''(\sqrt{a}) \neq 0$ y el método es de orden 2. La constante de error asintótico es

$$C = \frac{|g''(\sqrt{a})|}{2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

(c) Sea $f(x) = x^2 - a$. Entonces $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$. Si tomamos la semilla a la derecha de la raíz ($0 < \sqrt{a} < x_0$), entonces, en cualquier intervalo J de la forma $[b, x_0]$ con $0 < b < \sqrt{a}$, se tiene que

- $f(b)f(b) < 0$ porque $0 < b < a \implies b^2 - a^2 < 0$ y $0 < \sqrt{a} < x_0 \implies x_0^2 - a^2 > 0$.
- $f'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in J$, pues $0 \notin J$.
- $f''(x) \neq 0 \ \forall \ x \in J$.
- $f(x_0)f''(x_0) = 2f(x_0) \geq 0$.

Por tanto, la convergencia del método de Newton hacia la raíz positiva de la ecuación está asegurada.

3.

(a) Las diferencias divididas son

- $f[x_0] = 1; f[x_1] = 2; f[x_2] = 3$
- $f[x_0, x_1] = \dfrac{1}{15}; f[x_1, x_2] = \dfrac{1}{65}$
- $f[x_0, x_1, x_2] = -\dfrac{1}{1560}$

luego

$$p(x) = 1 + \frac{1}{15}(x - 1) - \frac{1}{1560}(x - 1)(x - 16)$$

Como $2 = \sqrt[4]{16}, 3 = \sqrt[4]{81}$, el polinomio aproxima a la función $f(x) = \sqrt[4]{x}$ en el intervalo $[1, 81]$.

(b) La aproximación de $\sqrt[4]{20}$ es $p(20) = 1 + \frac{19}{15} - \frac{76}{1560} = \frac{1560+1976-76}{1560} = \frac{173}{78}$, mientras que la aproximación de $\sqrt[4]{50}$ es $p(50) = 1 + \frac{49}{15} - \frac{1666}{1560} = \frac{1560+5096-1666}{1560} = \frac{499}{156}$.

Esta última aproximación es menos exacta, ya que $\frac{499}{156}$ está cerca de 3, mientras que $\sqrt[4]{50}$ está cerca de $2'5$. Esto se debe a que 20 se encuentra cerca de uno de los nodos de interpolación, mientras que 50 está alrededor del centro del intervalo $[1, 81]$, muy lejos de los nodos de interpolación.

(c) La cota del error vista en clase es

$$|\sqrt[4]{50} - p(50)| \leq \frac{M_3}{6}|50-1|^2|50-16|^2|50-81|^2 = \frac{21}{384} \cdot 49^2 \cdot 34^2 \cdot 31^2$$

donde

$$M_3 = \max_{x\in[1,81]} |f'''(x)| = \max_{x\in[1,81]} |\frac{21}{64}x^{-\frac{11}{4}}| = \frac{21}{64}$$

La cota obtenida es enorme como consecuencia de la gran distancia a la que se encuentran los nodos de interpolación.

4.

(a) Para que la fórmula sea de grado al menos 1, debe cumplirse

$$I_2(f) = \int_{-1}^{1} 1\, dx \iff A + A = 2 \iff A = 1$$

Para que sea de grado al menos 2,

$$I_2(f) = \int_{-1}^{1} x\, dx \iff x_0 + x_1 = 0 \iff x_0 = -x_1$$

Para que sea de grado al menos 3,

$$I_2(f) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx \iff x_0^2 + x_1^2 = \frac{2}{3} \iff x_1^2 + x_1^2 = \frac{2}{3} \iff x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

En resumen, si $A = 1, x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ó si $A = 1, x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces la fórmula tiene grado máximo.

(b) Veamos si la fórmula es de grado de exactitud 3. Si $A = 1, x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$
- $I_2(f) = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = 0$

Lo mismo se obtiene en el caso $A = 1, x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto, la fórmula es de grado al menos 4. Veamos si es de grado 4: si $A = 1, x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4\, dx = \frac{2}{5}$
- $I_2(f) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} \neq \dfrac{2}{5}$

Lo mismo se obtiene para $A = 1, x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto, la fórmula es de grado 4. Se trata de la fórmula de Gauss con 2 puntos.

(c) Sea $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$. Entonces $f \in \mathcal{C}^4([-1,1])$, así que existe $\xi \in [-1,1]$ con

$$\int_{-1}^{1} x^4 \, dx = I_2(f) + K f^{(4)}(\xi) \iff \frac{2}{5} = \frac{2}{9} + 24K \iff K = \frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9}}{24} = \frac{1}{135}$$