Geometría Diferencial de Curvas y Superficies **Examen de septiembre de 2018**

1. *Considérese la curva* $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $\alpha(t) = (t - t^3/3, t^2, t + t^3/3)$.

(a) *Pruébese que* α *es una hélice, y calcula su eje y su ángulo.*

(b) *Calcula su plano osculador en cada punto.*

(a) Una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ es una hélice cuando el vector tangente en cada punto forma un ángulo constante con una dirección fija, es decir, cuando existe un vector $v \in \mathbb{R}^3$ unitario y una constante $\alpha \in [0, 2\pi)$ verificando $\langle T(s), v\rangle = \cos\alpha$ para todo $s \in I$. Se considera la curva

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}, t^2, t + \frac{t^3}{3}\right) \end{aligned}$$

Se tiene que

$$T(s) = \frac{\alpha'(s)}{||\alpha'(s)||} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

Sea $v = (0, 0, 1)$. Se tiene que

$$\frac{\langle T(s), v\rangle}{||T(s)||\,||v||} = \frac{1 + t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$$

luego α es una hélice de eje $(0, 0, 1)$ y ángulo $\frac{\pi}{4}$.

(b) El plano osculador de α en el punto s es el plano generado por $\{T(s), N(s)\}$ que pasa por $\alpha(s)$. La ecuación de dicho plano será entonces

$$A(x - x(s)) + B(y - y(s)) + C(z - z(s)) = 0$$

donde $B(s) = (A, B, C)$ y $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$. El vector binormal es

$$B(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{||\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)||}$$

y lo que queda de ejercicio es hacer un par de cuentas.

2. *Considérense las superficies*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2\} \qquad S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\}$$

(a) *Demuéstrese que son difeomorfas.*

(b) *Compruébese si el difeomorfismo hallado en el apartado anterior es una isometría.*

(a) Se trata de comprobar que la aplicación

$$\begin{aligned} f\colon S &\longrightarrow S' \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (x, y, 0) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo. La inyectividad, sobreyectividad y diferenciabilidad de f son inmediatas. También se comprueba fácilmente que la inversa es

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon S' &\longrightarrow S \\ (x,y,z) &\longmapsto f(x,y,z) = (x,y,x^2) \end{aligned}$$

que evidentemente es diferenciable. Por tanto, S y S' son difeomorfas.

(b) Hay que investigar si se verifica o no

$$\langle df_p v, df_p w\rangle = \langle v, w\rangle$$

para todo $p \in S$ y para todos $v, w \in T_pS$. Dado $p \in S$, primero se hallará df_p. Sea $v \in T_pS$ y sea α una curva con componentes x, y, z tal que $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. Entonces

$$df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = (x(t), y(t), 0)'(0) = (x'(0), y'(0), 0) = (v_1, v_2, 0)$$

Por tanto, para todos $v, w \in T_pS$ se tiene que

$$\langle df_p v, df_p w\rangle = v_1w_1 + v_2w_2$$

que no coincide con $\langle v, w\rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ en todos los puntos del plano tangente. En consecuencia, f no es una isometría.

3. *Considérese el subconjunto de* $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x^2 - y^2 - 2z^2 = 2\}$$

(a) Pruébese que es una superficie regular y proporciona una orientación suya.

(b) Hállese el plano tangente en el punto $p = (1, 0, 0)$.

(c) Calcúlense las direcciones y curvaturas principales de S en p.

(a) Se tiene que $S = f^{-1}\{0\}$, donde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la función dada por $f(x,y,z) = 2x^2-y^2-2z^2-2$. Se trata de una función diferenciable en un abierto de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz jacobiana es

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x & -2y & -4z \end{pmatrix}$$

que solo se anula en el punto $(0,0,0)$. Como $f(0,0,0) = -2 \neq 0$, entonces $(0,0,0) \notin f^{-1}\{0\}$ y puede asegurarse que 0 es un valor regular de f. Por tanto, S es una superficie regular.

(b) Como S es la imagen inversa de un valor regular de f, el plano tangente en el punto $p = (1,0,0)$ es $T_pS = \ker df_p$. La matriz jacobiana en el punto p es

$$Jf(1,0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

así que la aplicación df_p está dada por

$$df_p(v) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 4v_1$$

Por tanto, T_pS es el plano de ecuación $x = 0$.

(c) La superficie regular S se puede recubrir mediante las cartas $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ y $(\mathbb{R}^2, \psi)$, donde

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto \varphi(u,v) = \left(\sqrt{1+\frac{u^2}{2}+v^2}, u, v\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \psi \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto \psi(u,v) = \left(-\sqrt{1+\frac{u^2}{2}+v^2}, u, v\right) \end{aligned}$$

Como $p = (1,0,0) = \varphi(0,0) \in \varphi(\mathbb{R}^2)$, para hallar las direcciones y curvauras principales se trabajará con la primera de las cartas. Derivando,

$$\varphi_u = \left(\frac{u}{2(1+\frac{u^2}{2}+v^2)^{1/2}}, 1, 0\right) \qquad \varphi_v = \left(\frac{v}{2(1+\frac{u^2}{2}+v^2)^{1/2}}, 0, 1\right)$$

Derivando otra vez,

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \left(\frac{1}{2(1+\frac{u^2}{2}+v^2)^{1/2}} - \frac{u^2}{4(1+\frac{u^2}{2}+v^2)^{3/2}}, 0, 0\right) \\ \varphi_{vv} &= \left(\frac{1}{2(1+\frac{u^2}{2}+v^2)^{1/2}} - \frac{v^2}{4(1+\frac{u^2}{2}+v^2)^{3/2}}, 0, 0\right) \\ \varphi_{uv} &= \left(-\frac{uv}{4(1+\frac{u^2}{2}+v^2)^{3/2}}, 0, 0\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo $u = 0, v = 0$, quedaría

$$\varphi_u = (0,1,0) \qquad \varphi_v = (0,0,1) \qquad \varphi_{uu} = (1/2,0,0) \qquad \varphi_{vv} = (1/2,0,0) \qquad \varphi_{uv} = (0,0,0)$$

En consecuencia,

$$E = 1 \qquad F = 0 \qquad G = 1 \qquad e = \frac{1}{2} \qquad f = 0 \qquad g = \frac{1}{2}$$

Para calcular las direcciones y curvaturas principales, se hallará la matriz de $d\mathcal{N}_p$ en la base coordenada mediante las ecuaciones de Weingarten:

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} = -\frac{1}{2} \qquad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2} = 0 \qquad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} = 0 \qquad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2} = -\frac{1}{2}$$

De aquí se deduce que los autovalores del operador de Weingarten son $\frac{1}{2}$, y los correspondientes autovectores son los vectores de la base coordenada. En otras palabras, las curvaturas principales son

$$k_1(p) = \frac{1}{2} \qquad k_2(p) = \frac{1}{2}$$

y las direcciones principales,

$$e_1 = (0,1,0) \qquad e_2 = (0,0,1)$$

4. *Pruébese que la suma de las curvaturas normales en un punto de una superficie regular a lo largo de cualquier par de direcciones ortogonales es constante.*

Sea S una superficie regular y sea $p \in S$. Considérense dos direcciones ortogonales, es decir, dos vectores $v, w \in T_pS$ unitarios tales que $\langle v, w \rangle = 0$, y veamos que $k_{n,p}(v) + k_{n,p}(w)$ es constante. Sea

$\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de autovectores del operador de Weingarten. Como v, w son unitarios, existen $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ tales que

$$v = \cos\theta_1\, e_1 + \operatorname{sen}\theta_1\, e_2 \qquad w = \cos\theta_2\, e_1 + \operatorname{sen}\theta_2\, e_2$$

y como son ortogonales, entonces

$$\langle \cos\theta_1\, e_1 + \operatorname{sen}\theta_1\, e_2, \cos\theta_2\, e_1 + \operatorname{sen}\theta_2\, e_2\rangle = 0 \iff \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 = 0$$

luego $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$, es decir, $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde $k \in \{0, 1\}$. Supóngase que $\theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{2}$. Entonces, utilizando la fórmula de Euler,

$$\begin{aligned}
k_{n,p}(v) + k_{n,p}(w) &= \cos^2\theta_1\, k_1(p) + \operatorname{sen}^2\theta_1\, k_2(p) + \cos^2\theta_2\, k_1(p) + \operatorname{sen}^2\theta_2\, k_2(p) \\
&= \cos^2\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) k_1(p) + \operatorname{sen}^2\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) k_2(p) + \cos^2\theta_2\, k_1(p) + \operatorname{sen}^2\theta_2\, k_2(p) \\
&= \operatorname{sen}^2\theta_2\, k_1(p) + \cos^2\theta_2\, k_2(p) + \cos^2\theta_2\, k_1(p) + \operatorname{sen}^2\theta_2\, k_2(p) \\
&= k_1(p) + k_2(p)
\end{aligned}$$

así que la suma de las curvaturas normales de S en el punto p a lo largo de dos direcciones ortogonales es constante, que es lo que quería probarse. El caso $\theta_1 = \theta_2 + \frac{3\pi}{2}$ es totalmente análogo.