Facultad de Ciencias – Universidad de Málaga
ANÁLISIS NUMÉRICO
3º de Grado en Matemáticas – Curso 2021/22
27 de Junio de 2022

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Nombre: ____________________

– Examen –

1. Se considera el método RK:

$$
\begin{aligned}
y_k^{(1)} &= y_k + \gamma h f\left(t_k + \gamma h, y_k^{(1)}\right),\\
y_k^{(2)} &= y_k + \frac{h}{2} f\left(t_k + \gamma h, y_k^{(1)}\right) + \gamma h f\left(t_k + \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) h, y_k^{(2)}\right),\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} f\left(t_k + \gamma h, y_k^{(1)}\right) + \frac{h}{2} f\left(t_k + \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) h, y_k^{(2)}\right).
\end{aligned}
$$

   a) Determine γ para que el método sea al menos de segundo orden. Estudie si el método hallado es de orden superior a 2. En los apartados que siguen se supondrá que γ toma el valor hallado en este apartado.

   b) Pruebe que, si la función f es de Lipschitz en la variable y y h es suficientemente pequeño, el método está bien definido, es decir, que las ecuaciones que satisfacen $y_k^{(i)}$, $i = 1, 2$ tienen una única solución. Proponga un método numérico para resolver dichas ecuaciones.

   c) Encuentre la función de estabilidad absoluta del método. Es el método A-estable?

   d) Proponga, si es posible, un método RK2(3) encajado en el que el método hallado sea el de segundo orden.

2. Se recuerda que el método de Adams-Moulton de q pasos, AMq, se define de la siguiente manera:

$$
y_{k+q} = y_{k+q-1} + \int_{t_{k+q-1}}^{t_{k+q}} Q_q(t)\, dt, \quad k = 0, 1, \ldots
$$

   siendo $Q_q(t)$ el polinomio que interpola los $q+1$ datos:

$$
(t_{k+q}, f_{k+q}), \ldots, (t_k, f_k).
$$

   a) Obtenga la expresión del método AM2 en la forma

$$
y_{k+2} - y_{k+1} = h(\beta_2 f_{k+2} + \beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1}
$$

   b) Estudie el orden y la estabilidad del método.

   c) Se aplica el método AM2 a los problemas de Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = (l+1)t^l, \\ y(0) = 0, \end{cases}
$$

   para $l = 0, 1, 2$ con valores iniciales

$$
y_0 = 0, \quad y_1 = h^{(l+1)},
$$

   y con h lo suficientemente pequeño para que el método esté bien definido (es decir, que haya un único y_{k+2} que satisfaga (1) para cada k). Pruebe que el método da la solución exacta, es decir

$$
y_k = y(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots
$$

3. Se considera el problema de contorno no lineal

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) + y(x)^2 = x^3, \quad x \in [0,1], \\ y'(0) = 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

a) Proponga un método de diferencias finitas de segundo orden que use una malla uniforme de $N+2$ puntos

$$x_i = i\,h, \quad i = 0, \dots, N+1,$$

siendo

$$h = 1/(N+1).$$

Use la técnica del nodo fantasma para tratar la condición de contorno en $x = 0$.

b) Exprese el sistema no lineal a resolver como la búsqueda de un cero de una función Φ de $\mathbb{R}^{N+1}$ en $\mathbb{R}^{N+1}$, es decir,

$$\Phi(U) = 0, \tag{2}$$

siendo $U = [u_0, u_1, \dots, u_N]^T$ el vector de aproximaciones.

c) Escriba la forma del método de Newton para resolver el sistema no lineal (2). En particular, escriba la matriz y el segundo miembro de los sistemas lineales a resolver en cada iteración del método.

– Resolución –

1. El tablero de Butcher del método dado es

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1/2+\gamma & 1/2 & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

a) Sean

$$B=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 1/2 & \gamma \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1/2+\gamma \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$B^tE=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=1,$$

así que el método es de orden 1. De hecho,

$$B^tAE=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 1/2 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma/2+1/4 & \gamma/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\gamma+\frac{1}{4}$$

El método es de orden 2 si y solo si $\gamma+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, o sea, si y solo si $\gamma=\frac{1}{4}$. Veamos si para $\gamma=\frac{1}{4}$ el método es de orden 3. Se tiene

$$B^tC^2E=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}=\frac{1}{32}+\frac{9}{32}=\frac{5}{16}\neq\frac{1}{3}$$

Por tanto, el método es de orden 2 si y solo si $\gamma=\frac{1}{4}$, y en ese caso no es de orden 3.

b) El sistema formado por las ecuaciones que satisfacen $y_k^{(i)}$, $i=1,2$ tiene solución única si y solo si la aplicación $G\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$G(Y)=G\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_k+\frac{h}{4}f(t_k+\frac{h}{4},y^1) \\ y_k+\frac{h}{2}f(t_k+\frac{h}{4},y^1)+\frac{h}{4}f(t_k+\frac{3h}{4},y^2) \end{pmatrix}$$

tiene un único punto fijo. Veamos cómo de pequeño debe ser h para que se tenga la contractividad de G. Si $Y,Z\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} |G_1(Y)-G_1(Z)| &= \left|y_k+\frac{h}{4}f\left(t_k+\frac{h}{4},y^1\right)-y_k-\frac{h}{4}f\left(t_k+\frac{h}{4},z^1\right)\right|=\frac{h}{4}\left|f\left(t_k+\frac{h}{4},y^1\right)-f\left(t_k+\frac{h}{4},z^1\right)\right| \\ &\leq \frac{hL}{4}|y^1-z^1|\leq\frac{hL}{4}||Y-Z||_\infty, \end{aligned}$$

donde L es la constante de Lipschitz de f. Además,

$$\begin{aligned} |G_2(Y)-G_2(Z)| &= \left|y_k+\frac{h}{2}f\left(t_k+\frac{h}{4},y^1\right)+\frac{h}{4}f\left(t_k+\frac{3h}{4},y^2\right)-y_k-\frac{h}{2}f\left(t_k+\frac{h}{4},z^1\right)-\frac{h}{4}f\left(t_k+\frac{3h}{4},z^2\right)\right| \\ &\leq \frac{h}{2}\left|f\left(t_k+\frac{h}{4},y^1\right)-f\left(t_k+\frac{h}{4},z^1\right)\right|+\frac{h}{4}\left|f\left(t_k+\frac{3h}{4},y^2\right)-f\left(t_k+\frac{3h}{4},z^2\right)\right| \\ &\leq \frac{hL}{2}|y^1-z^1|+\frac{hL}{4}|y^2-z^2|\leq\frac{3hL}{4}||Y-Z||_\infty \end{aligned}$$

Por tanto,

$$||G(Y)-G(Z)||_\infty\leq\frac{3hL}{4}||Y-Z||_\infty$$

Si tomamos h de forma que

$$0<h<\frac{4}{3L}$$

entonces se tendrá $0 < \frac{3hL}{4} < 1$, así que G será contractiva y el teorema del punto fijo de Banach dirá que G tiene un único punto fijo, que es la única solución del sistema del método RK. Es más, el teorema de Banach también dice que la sucesión dada por

$$\begin{cases} Y_0 \in \mathbb{R}^2 \\ Y_{n+1} = G(Y_n), \qquad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

converge al único punto fijo de G, así que este algoritmo de punto fijo es un buen método numérico para resolver las ecuaciones.

c) La función de estabilidad absoluta del método es

$$\begin{aligned} R(\hat{h}) &= \frac{|I - \hat{h}A + hEB^t|}{|I - \hat{h}A|} = \begin{vmatrix} 1-\hat{h}/4 & 0 \\ -\hat{h}/2 & 1-\hat{h}/4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1-\hat{h}/4+\hat{h}/2 & \hat{h}/2 \\ -\hat{h}/2+\hat{h}/2 & 1-\hat{h}/4+\hat{h}/2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\hat{h}/4 & 0 \\ -\hat{h}/2 & 1-\hat{h}/4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1+\hat{h}/4 & \hat{h}/2 \\ 0 & 1+\hat{h}/4 \end{vmatrix} = \frac{(1+\hat{h}/4)^2}{(1-\hat{h}/4)^2} = \frac{(4+\hat{h})^2}{(4-\hat{h})^2} \end{aligned}$$

Sea $\hat{h} = x + iy \in \mathbb{C}^-$. Entonces

$$|R(\hat{h})| < 1 \iff |4+\hat{h}|^2 < |4-\hat{h}|^2 \iff (4+x)^2 + y^2 < (4-x)^2 + y^2 \iff 16 + x^2 + 8x < 16 + x^2 - 8x$$

Esto último es siempre cierto por ser $x < 0$, así que $\mathbb{C}^- \subset D_A$ y por tanto el método es A-estable.

d) No entra.

2.

a) El polinomio que interpola los datos

$$(t_{k+2}, f_{k+2}), (t_{k+1}, f_{k+1}), (t_k, f_k)$$

es, en la forma regresiva de Gregory-Newton,

$$Q(t) = \widetilde{Q}\left(\frac{t - t_{k+2}}{h}\right),$$

donde

$$\widetilde{Q}(s) = \sum_{j=0}^{2} \nabla^j f_{k+2} \binom{s+j-1}{j} = \nabla^0 f_{k+2} + s\nabla^1 f_{k+2} + \frac{1}{2}(s^2+s)\nabla^2 f_{k+2}$$

Por tanto, la expresión del método AM2 es

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= y_{k+1} + \int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} Q(t)\,dt = y_{k+1} + \int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \widetilde{Q}\left(\frac{t-t_{k+2}}{h}\right) dt \overset{(*)}{=} y_{k+1} + h\int_{-1}^{0} \widetilde{Q}(s)\,ds \\ &= y_{k+1} + h\left(\nabla^0 f_{k+2}\int_{-1}^{0} 1\,ds + \nabla^1 f_{k+2}\int_{-1}^{0} s\,ds + \frac{1}{2}\nabla^2 f_{k+2}\int_{-1}^{0}(s^2+s)\,ds\right) \\ &= y_{k+1} + h\left(\nabla^0 f_{k+2} - \frac{1}{2}\nabla^1 f_{k+2} + \frac{1}{2}\nabla^2 f_{k+2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right) = y_{k+1} + h\left(\nabla^0 f_{k+2} - \frac{1}{2}\nabla^1 f_{k+2} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{k+2}\right) \\ &= y_{k+1} + h\left(f_{k+2} - \frac{1}{2}(f_{k+2} - f_{k+1}) - \frac{1}{12}(f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k)\right) \\ &= y_{k+1} + h\left(f_{k+2} - \frac{1}{2}(f_{k+2} - f_{k+1}) - \frac{1}{12}(f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k)\right) \\ &= y_{k+1} + h\left(\frac{5}{12}f_{k+2} + \frac{2}{3}f_{k+1} - \frac{1}{12}f_k\right) \end{aligned}$$

En $(*)$ se ha realizado el cambio de variable $t = sh + t_{k+2}$, $dt = h\,ds$.

b) El primer polinomio característico del método es $\rho(z) = z^2 - z = z(z-1)$, cuyas raíces son de módulo menor que 1 y la que es de módulo 1 es simple. Por tanto, el método es estable. Estudiemos el orden. En primer lugar,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 1 - 1 = 0$$

Además,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j = -1 + 2 = 1, \qquad \sum_{j=0}^{2} \beta_j = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} - \frac{1}{12} = 1,$$

luego el método es de orden 1. Más cuentas:

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^2 = -1 + 4 = 3, \qquad 2\sum_{j=0}^{2} \beta_j j = 2\left(2 \cdot \frac{5}{12} + \frac{8}{12}\right) = \frac{36}{12} = 3$$

Por tanto, el método es de orden 2. De hecho

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^3 = -1 + 8 = 7, \qquad 3\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^2 = 3\left(4 \cdot \frac{5}{12} + \frac{8}{12}\right) = \frac{3 \cdot 28}{12} = \frac{28}{4} = 7,$$

y entonces el método es de orden 3. Sin embargo,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^4 = -1 + 16 = 15, \qquad 4\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^3 = 4\left(8 \cdot \frac{5}{12} + \frac{8}{12}\right) = \frac{4 \cdot 48}{12} = \frac{48}{3} = 16,$$

así que el método no es de orden 4.

c) Sea $f(t,y) = (l+1)t^l$. El método AM2 para este problema es

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= y_{k+1} + h\left(\frac{5}{12}(l+1)t_{k+2}^l + \frac{2}{3}(l+1)t_{k+1}^l - \frac{1}{12}(l+1)t_k^l\right) \\ &= y_{k+1} + h^{l+1}(l+1)\left(\frac{5}{12}(k+2)^l + \frac{2}{3}(k+1)^l - \frac{1}{12}k^l\right) \end{aligned}$$

La solución exacta del problema es $y(t) = t^{l+1}$. Veamos que para $l = 0,1,2$ el método da la solución exacta. Si $l = 0$, entonces $y(t) = t$, $y_1 = h$ y el método adopta la expresión

$$y_{k+2} = y_{k+1} + h\left(\frac{5}{12} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12}\right) = y_{k+1} + h$$

Razonando por recurrencia,

$$y_k = y_{k-1} + h = y_{k-2} + 2h = \ldots = y_1 + (k-1)h = h + (k-1)h = kh = y(kh) = y(t_k),$$

luego el método da la solución exacta. Si $l = 1$, entonces $y(t) = t^2$, $y_1 = h^2$ y el método adopta la expresión

$$y_{k+2} = y_{k+1} + 2h^2\left(\frac{5}{12}(k+2) + \frac{2}{3}(k+1) - \frac{1}{12}k\right) = y_{k+1} + 2h^2\left(k + \frac{10}{12} + \frac{8}{12}\right) = y_{k+1} + 2h^2\left(k + \frac{3}{2}\right)$$

Razonando por recurrencia,

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + 2h^2\left(k - 2 + \frac{3}{2}\right) = y_{k-1} + 2h^2\left(k - \frac{1}{2}\right) = y_{k-2} + 2h^2\left(k - 1 - \frac{1}{2}\right) + 2h^2\left(k - \frac{1}{2}\right) \\ &= y_{k-2} + 2h^2\left(k + (k-1) - \frac{2}{2}\right) = \ldots = y_1 + 2h^2\left(\sum_{i=2}^{k} i - \frac{k-1}{2}\right) = h^2 + 2h^2\left(\frac{k(k+1)}{2} - 1 - \frac{k-1}{2}\right) \\ &= h^2 + 2h^2\left(\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} - 1 - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) = h^2 + 2h^2\left(\frac{k^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = h^2 + h^2k^2 - h^2 = h^2k^2 = y(kh) = y(t_k), \end{aligned}$$

luego el método da la solución exacta. Para $l = 2$ es altamente probable que las cuentas sean muy desagradables.

3.

a) Para cada $i \in \{0,1,\ldots,N+1\}$, sea u_i la aproximación de $y(x_i)$. Evidentente, tomamos $u_{N+1} = 1$ porque $y(x_{N+1}) = y(1) = 1$. Para $i = 1,2,\ldots,N$, se realizan las aproximaciones

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y_{x-i}}{h^2}, \qquad y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h},$$

es decir,

$$y''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \qquad y'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

Sustituyendo en la ecuación del problema, debe cumplirse

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + u_i^2 = x_i^3, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1 \qquad (*)$$

Para $i = N$, usando que $u_{N+1} = 1$,

$$\frac{1 - 2u_N + u_{N-1}}{h^2} + \frac{1 - u_{N-1}}{2h} + u_N^2 = x_N^3$$

Esto proporciona un sistema de N ecuaciones con $N+1$ incógnitas, $u_0, u_1, \ldots, u_N$ (u_{N+1} no es una incógnita), así que hay que añadir una ecuación más que trate la condición de contorno en x_0. Para $i = 0$, consideramos un nodo fantasma u_{-1} para aproximar $y'(x_0)$:

$$y'(x_0) \approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2h}$$

Como $y'(x_0) = y'(0) = 1$, entonces debe cumplirse

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = 1$$

Por tanto,

$$u_{-1} = 2h - u_1$$

y sustituyendo en $(*)$ para $i = 0$ tendríamos

$$\frac{u_1 - 2u_0 + 2h - u_1}{h^2} + \frac{u_1 - 2h - u_1}{2h} + u_0^2 = 0,$$

es decir,

$$\frac{-2u_0 + 2h}{h^2} - 1 + u_0^2 = 0$$

Uniendo esta ecuación con las $N+1$ anteriores ya se dispone de un sistema de $N+1$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas cuya solución (en caso de haberla) proporciona una aproximación de la solución del problema de partida:

$$(S) \begin{cases} \dfrac{-2u_0 + 2h}{h^2} - 1 + u_0^2 = 0 \\ \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + u_i^2 = x_i^3, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1 \\ \dfrac{1 - 2u_N + u_{N-1}}{h^2} + \dfrac{1 - u_{N-1}}{2h} + u_N^2 = x_N^3 \end{cases}$$

b) Resolver el sistema (S) es lo mismo que encontrar los ceros de la función $\Phi\colon \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}$ dada por

$$\Phi(U) = \Phi\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2u_0+2h}{h^2} - 1 + u_0^2 \\ \frac{u_2-2u_1+u_0}{h^2} + \frac{u_2-u_0}{2h} + u_1^2 - x_1^3 \\ \vdots \\ \frac{u_N-2u_{N-1}+u_{N-2}}{h^2} + \frac{u_N-u_{N-2}}{2h} + u_{N-1}^2 - x_{N-1}^3 \\ \frac{1-2u_N+u_{N-1}}{h^2} + \frac{1-u_{N-1}}{2h} + u_N^2 - x_N^3 \end{pmatrix}$$

c) El método de Newton para la resolución del sistema no lineal $\Phi(U) = 0$ es

$$U_{n+1} = U_n - J(U_n)^{-1}\Phi(U_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde

$$J(U_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_0}{\partial u_0} & \frac{\partial \Phi_0}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_0}{\partial u_N} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_0} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_N}{\partial u_0} & \frac{\partial \Phi_N}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_N}{\partial u_N} \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$U_{n+1} = U_n - J(U_n)^{-1}\Phi(U_n) \iff J(U_n)(U_n - U_{n+1}) = \Phi(U_n) \iff \begin{cases} J(U_n)V_n = \Phi(U_n) \\ U_{n+1} = U_n - V_n \end{cases}$$

De esta manera, evitamos el cálculo de la matriz inversa de $J(U_n)$ y el método de Newton se reduce a resolver un sistema lineal en cada iteración, con matriz de coeficientes

$$J(U_n) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{h^2} + 2u_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h^2} + 2u_1 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h^2} + 2u_2 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{2}{h^2} + 2u_N \end{pmatrix}$$

y vector de términos independientes $\Phi(U_n)$, que ya ha sido detallado antes.