

## Ejercicios del Tema 3

**Ejercicio 1.** Dado un sistema dinámico  $(J, \mathbb{N}, \varphi)$ , donde  $J$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ , demostrar que existe una única función continua  $f: J \rightarrow J$  tal que

$$\varphi(n, x) = f^n(x), \quad x \in J, n \in \mathbb{N},$$

siendo  $f^n$  la composición de  $f$  consigo misma  $n$  veces. Probar que la órbita de un estado  $x_0 \in J$  es la sucesión definida por

$$(S) \begin{cases} x_0 \in J, \\ x_{n+1} = f(x_n), \end{cases} \quad n \geq 0.$$

*Solución.* Sea  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \varphi(1, x)$ . Se tiene que:

- $f$  es continua, pues  $\varphi$  lo es.
- $f(J) = J$ , pues  $\varphi(\mathbb{N} \times J) \subset J$  y por tanto  $f(x) = \varphi(1, x) \in J$  para todo  $x \in J$ .
- $\varphi(n, x) = f^n(x)$  para todo  $x \in J$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ . En efecto, para  $n = 0$  es evidente, y si  $n \in \mathbb{N}$  es tal que  $\varphi(n, x) = f^n(x)$  para todo  $x \in J$ , entonces

$$\varphi(n+1, x) = \varphi(n, \varphi(1, x)) = f^n(\varphi(1, x)) = f^n(f(x)) = f^{n+1}(x).$$

Es claro que  $f$  es la única función verificando estas propiedades, pues si existe  $g: J \rightarrow J$  continua y tal que  $\varphi(n, x) = g^n(x)$  para  $x \in J$  y  $n \in \mathbb{N}$  cualesquiera, entonces  $f(x) = \varphi(1, x) = g(x)$  para todo  $x \in J$ .

Sea  $x_0 \in J$ . La órbita de  $x_0$  es  $\gamma_{x_0} = \{f^n(x_0): n \in \mathbb{N}\}$ , así que hay que probar que  $f^n(x_0) = x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Razonando de nuevo por inducción, para  $n = 0$  es evidente, y si  $n \in \mathbb{N}$  es tal que  $f^n(x_0) = x_n$ , entonces

$$f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x_n) = x_{n+1}.$$

Se concluye que la sucesión dada por (S) coincide con la órbita de  $x_0$ .

**Ejercicio 2.** Dado un sistema dinámico  $(J, \mathbb{Z}, \varphi)$ , donde  $J$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ , demostrar que existe una única función continua y biyectiva  $f: J \rightarrow J$  tal que

$$\varphi(n, x) = f^n(x), \quad x \in J, n \in \mathbb{Z}.$$

Probar que la órbita de un estado  $x_0 \in J$  es la doble sucesión definida por

$$(S) \begin{cases} x_0 \in J, \\ x_{n+1} = f(x_n), \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Solución.* Sea  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \varphi(1, x)$ , y sea  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $g(x) = \varphi(-1, x)$ . Para todo  $x \in J$ ,

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= \varphi(1, \varphi(-1, x)) = \varphi(1-1, x) = \varphi(0, x) = x, \\ g \circ f(x) &= \varphi(-1, \varphi(1, x)) = \varphi(-1+1, x) = \varphi(0, x) = x. \end{aligned}$$

Por tanto,  $f$  es biyectiva y  $g = f^{-1}$ . Razonando como en el ejercicio anterior se prueba que  $f$  es continua, que  $f(J) \subset J$  y que para todo  $x \in J$  y todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\varphi(n, x) = f^n(x)$  y  $\varphi(-n, x) = g^n(x) = (f^{-1})^n(x) = f^{-n}(x)$ . Por tanto,

$$\varphi(n, x) = f^n(x), \quad x \in J, n \in \mathbb{N}.$$

Lo que queda por probar se razona como en el ejercicio anterior.

**Ejercicio 3.** Dado un sistema dinámico  $(S)$ , demostrar que  $l$  es un equilibrio si y solo si  $l$  es un punto fijo de  $f$ , es decir,  $f(l) = l$ .

*Solución.* Dado  $x_0 \in J$ , la órbita de  $x_0$  es la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  definida en  $(S)$ . También se sabe que  $f^n(x_0) = x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto,

$$x_0 \text{ es un equilibrio} \iff x_n = x_0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \iff f^n(x_0) = x_0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De esto se deduce que si  $l$  es un equilibrio, entonces  $f(l) = l$ , y si  $f(l) = l$ , entonces  $f^n(l) = l$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y por tanto  $l$  es un equilibrio.

**Ejercicio 4.** Dado un sistema dinámico  $(S)$ , demostrar que si la órbita de  $x_0$  es  $p$ -periódica, entonces  $x_0$  es un punto fijo de  $f^p$ , es decir,  $f^p(x_0) = x_0$ . ¿Es cierto el recíproco? ¿Qué se puede decir en general de un punto fijo de  $f^p$ ?

*Solución.* Supóngase que la órbita de  $x_0$  es  $p$ -periódica, es decir, que  $x_{n+p} = x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En particular,  $x_p = x_0$ , y como  $x_p = f^p(x_0)$ , se tiene que  $f^p(x_0) = x_0$ . Recíprocamente, si  $f^p(x_0) = x_0$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$x_{n+p} = f^{n+p}(x_0) = f^n(f^p(x_0)) = f^n(x_0) = x_n,$$

así que la órbita de  $x_0$  es  $p$ -periódica. Se concluye  $x_0$  es un punto fijo de  $f^p$  si y solo si la órbita de  $x_0$  es  $p$ -periódica.

**Ejercicio 5.** El modelo discreto  $(S)$  con  $I = [0, \infty)$  y

$$f(x) = \frac{\alpha x}{1 + \beta x},$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números positivos, aparece en modelos de genes y redes neuronales. Determinar sus equilibrios y analizar su estabilidad en función del valor de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , en los casos hiperbólicos.

*Solución.* Se sabe que los equilibrios del sistema dinámico son los puntos fijos de  $f$ :

$$f(x) = x \iff \alpha x = x(1 + \beta x) \iff x \in \left\{0, \frac{\alpha - 1}{\beta}\right\}.$$

Por otra parte,

$$f'(x) = \frac{\alpha(1 + \beta x) - \alpha\beta x}{(1 + \beta x)^2} = \frac{\alpha}{(1 + \beta x)^2}.$$

Como  $\frac{\alpha-1}{\beta} \geq 0$  si y solo si  $\alpha \geq 1$ , se distinguen los siguientes casos:

- Si  $\alpha \geq 1$ , los equilibrios del sistema son  $l_1 = 0$  y  $l_2 = \frac{\alpha-1}{\beta}$ . Se tiene que  $|f'(l_1)| = \alpha$  y  $|f'(l_2)| = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$ . Por tanto, si  $\alpha = 1$ , no hay equilibrios hiperbólicos, y si  $\alpha > 1$ ,  $l_1$  es un equilibrio hiperbólico, inestable y repulsor, mientras que  $l_2$  es un equilibrio hiperbólico y asintóticamente estable.
- Si  $0 < \alpha < 1$ , el único equilibrio del sistema es  $l = 0$ . Como  $|f'(l)| = \alpha < 1$ , se trata de un equilibrio hiperbólico y asintóticamente estable.

**Ejercicio 6.** El sistema dinámico discreto  $(S)$  con  $I = [0, 1]$  y

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 12x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 0.5, \\ 12x^2 - 18x + 7 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

ha sido utilizado para simular un oscilador biológico periódicamente estimulado. Estudiar los equilibrios y su estabilidad. ¿Hay alguna órbita 2-periódica?

*Solución.* Los equilibrios del sistema dinámico son los puntos fijos de  $f$ . Si  $0 \leq x \leq 0'5$ ,

$$f(x) = x \iff 6x - 12x^2 = x \iff 5x = 12x^2 \iff x \in \left\{0, \frac{5}{12}\right\},$$

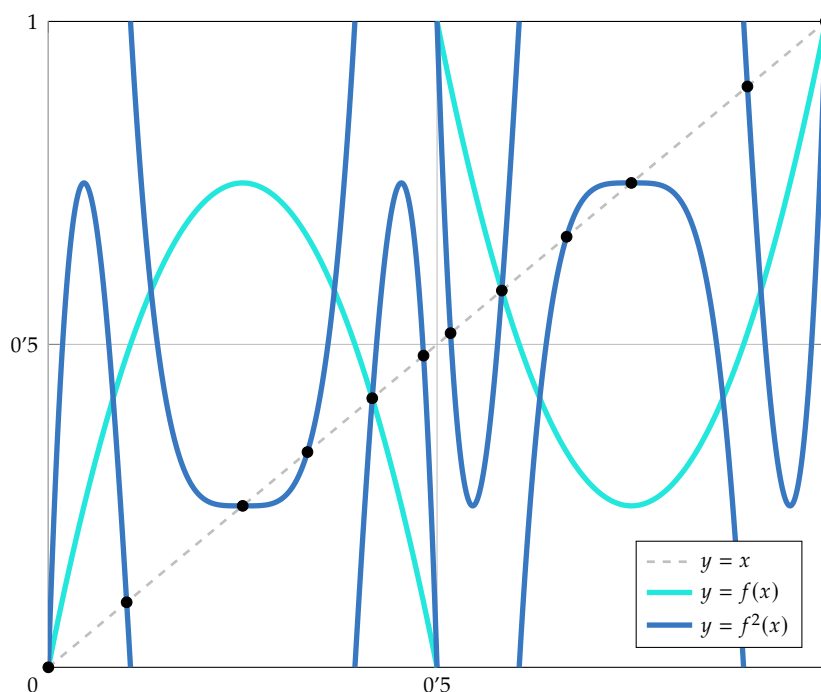
mientras que si  $0'5 < x \leq 1$ ,

$$f(x) = x \iff 12x^2 - 19x + 7 = 0 \iff x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 336}}{24} = \frac{19 \pm 5}{24} \iff x \in \left\{\frac{7}{12}, 1\right\}.$$

Por tanto, los equilibrios de  $f$  son  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = \frac{5}{12}$ ,  $l_3 = \frac{7}{12}$  y  $l_4 = 1$ . Por otra parte,  $f'$  es derivable en  $[0, 0'5) \cup (0'5, 1]$  y

$$f'(x) = \begin{cases} 6 - 24x & \text{si } 0 \leq x < 0'5, \\ 24x - 18 & \text{si } 0'5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Se observa que  $f$  también es derivable en  $0'5$  y  $f'(0'5) = -6$ . De hecho,  $f'$  es de clase 1, y como  $|f'(l_1)| = 6$ ,  $|f'(l_2)| = 4$ ,  $|f'(l_3)| = 4$  y  $|f'(l_4)| = 6$ , se tiene que todos los equilibrios de  $f$  son hiperbólicos, inestables y repulsores. Para estudiar si hay órbitas 2-periódicas, se halla el número de puntos fijos de  $f$  y  $f^2$ .



Como  $f$  tiene 4 puntos fijos y  $f^2$  tiene 12 puntos fijos, se concluye que hay  $\frac{12-4}{2} = 4$  órbitas 2-periódicas.

**Ejercicio 7.** Se considera el sistema dinámico discreto  $(S)$  en el que  $I = [0, 1]$  y

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}(1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dibujar las gráficas de  $f$ ,  $f^2$  y  $f^3$ . Deducir qué número de órbitas estacionarias y periódicas de periodo 2 y 3 hay, así como su estabilidad.

*Solución.* Las órbitas estacionarias son las formadas por puntos fijos de  $f$ . Si  $0 \leq x < \frac{1}{2}$ , se tiene

$$f(x) = x \iff \frac{3}{2}x = x \iff x = 0,$$

mientras que si  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ , se cumple

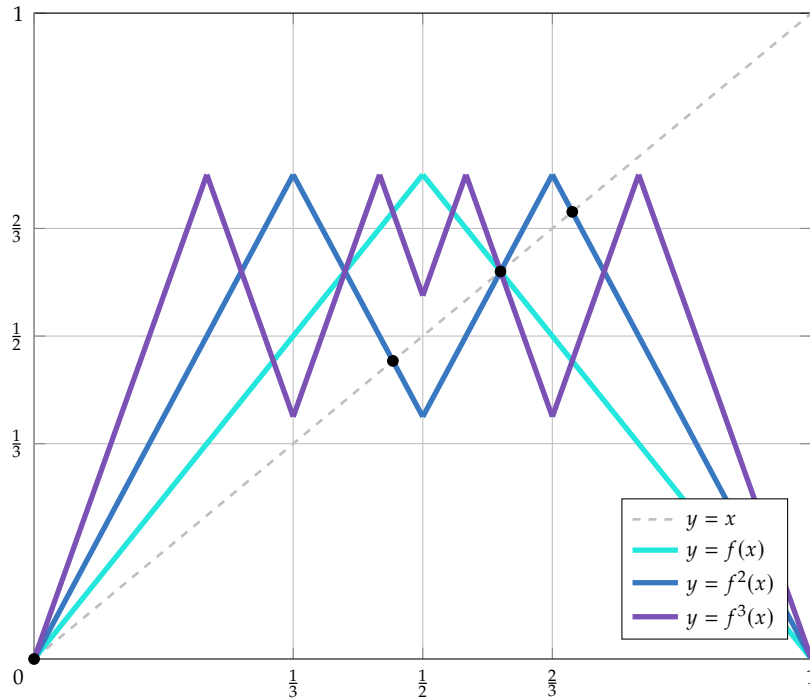
$$f(x) = x \iff \frac{3}{2}(1-x) = x \iff \frac{5}{2}x = \frac{3}{2} \iff x = \frac{3}{5} = 0'6.$$

Por tanto, las órbitas estacionarias del sistema son  $\{l_1\}$  y  $\{l_2\}$ , donde  $l_1 = 0$  y  $l_2 = 0'6$ . Además,  $f$  es clase 1 en  $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$  y

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Como  $|f'(l_1)| = |f'(l_2)| = \frac{3}{2} > 1$ , las dos órbitas estacionarias del sistema son inestables.

Por otra parte, para estudiar si hay órbitas 2-periódicas y 3-periódicas, se halla el número de puntos fijos de  $f$ ,  $f^2$  y  $f^3$ .



Se observa que  $f$  tiene 2 puntos fijos,  $f^2$  tiene 4 puntos fijos y  $f^3$  tiene 2 puntos fijos. Utilizando la fórmula

$$\text{n.º de órbitas } p\text{-periódicas} = \frac{1}{p} \left( \text{n.º de ptos. fijos de } f^p - \sum_{j|p, j \neq p} j \cdot \text{n.º de órbitas } j\text{-periódicas} \right),$$

se obtiene que el número de órbitas 2-periódicas es  $\frac{1}{2}(4 - 2) = 1$ , y el número de órbitas 3-periódicas es  $\frac{1}{3}(2 - 2) = 0$ .

La única órbita 2-periódica es  $\{p_1, p_2\}$ , siendo  $p_1$  y  $p_2$  puntos fijos de  $f^2$  que no son puntos fijos de  $f$ . Se tiene que

$$f^2(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ \frac{3}{2}(1 - \frac{3}{2}x) & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}(1 - \frac{3}{2}(1-x)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}, \\ \frac{9}{4}(1-x) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

En la gráfica se observa que  $p_1 \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  y  $p_2 \in (\frac{2}{3}, 1)$ . Como

$$\frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{2}x\right) = x \iff x + \frac{9}{4}x = \frac{3}{2} \iff x = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{13} = \frac{6}{13},$$

entonces  $p_1 = \frac{6}{13}$ . Y como

$$\frac{9}{4}(1-x) = x \iff x + \frac{9}{4}x = \frac{9}{4} \iff x = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{13} = \frac{9}{13},$$

entonces  $p_2 = \frac{9}{13}$ . Por otra parte,

$$(f^2)'(x) = \begin{cases} \frac{9}{4} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ -\frac{9}{4} & \text{si } \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{9}{4} & \text{si } \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}, \\ -\frac{9}{4} & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}$$

Como  $|(f^2)'(p_1)| = |(f^2)'(p_2)| = \frac{9}{4} > 1$ , la órbita  $\{p_1, p_2\}$  es inestable.

**Ejercicio 8.** Se considera el sistema dinámico discreto (S).

- (a) Si la función  $f$  es continua, demostrar que entre los dos estados de una órbita 2-periódica hay necesariamente un equilibrio  $l$ .
- (b) Mostrar, con un ejemplo, que este resultado no es cierto si  $f$  no es continua.

*Solución.*

- (a) Sea  $\{p_1, p_2\}$  una órbita 2-periódica. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que  $p_1 < p_2$ . Sea  $g: [p_1, p_2] \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $g(x) = f(x) - x$ . Como  $f$  es continua,  $g$  también lo es. Además,  $g(p_1) = f(p_1) - p_1 = p_2 - p_1$  y  $g(p_2) = f(p_2) - p_2 = p_1 - p_2$ , luego  $g(p_1)$  y  $g(p_2)$  tienen distinto signo. Por el teorema de Bolzano, existe  $l \in (p_1, p_2)$  tal que  $g(l) = 0$ , es decir,  $f(l) = l$ .
- (b) Considérese la función  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que

$$f^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Como  $f$  no tiene puntos fijos y  $f^2$  tiene dos puntos fijos, 0 y 1, se concluye que solo hay una órbita 2-periódica y entre sus estados no hay ningún punto fijo de  $f$ .

**Ejercicio 9.** Dado  $c = -1 + i$ , determinar las órbitas estacionarias y 2-periódicas del sistema dinámico complejo

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

*Solución.* Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la función dada por  $f(z) = z^2 + c$ . Se trata de hallar los puntos fijos de  $f$  y  $f^2$ . Por un lado,

$$f(z) = z \iff z^2 + c = z \iff z^2 - z + c = 0 \iff z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5-4i}}{2}$$

Los puntos fijos de  $f$  son  $l_1 = \frac{1+\sqrt{5-4i}}{2}$  y  $l_2 = \frac{1-\sqrt{5-4i}}{2}$ , así que las órbitas estacionarias son  $\{l_1\}$  y  $\{l_2\}$ . Para hallar las órbitas 2-periódicas, se estudian los puntos fijos de  $f^2$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} f^2(z) = z &\iff (z^2 + c)^2 + c = z \iff z^4 + 2cz^2 - z + c^2 + c = 0 \\ &\iff z^4 + (-2 + 2i)z^2 - z - 2i - 1 + i = 0 \iff z^4 + (-2 + 2i)z^2 - z - (1 + i) = 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación tiene cuatro soluciones distintas, así que  $f^2$  tiene 4 puntos fijos y por tanto el número de órbitas 2-periódicas es  $\frac{1}{2}(4 - 2) = 1$ . Esta órbita está formada por puntos fijos de  $f^2$  que no son puntos fijos de  $f$ , lo que permite afirmar que los puntos fijos de  $f$  son raíces del polinomio  $z^4 + (-2 + 2i)z^2 - z - (1 + i) = 0$ . En consecuencia, este polinomio es divisible entre  $(z - l_1)(z - l_2)$ . Una sarta de cuentas que no merece la pena reproducir demuestra que

$$z^4 + (-2 + 2i)z^2 - z - (1 + i) = (z^2 + z + i)(z - l_1)(z - l_2)$$

Como

$$z^2 + z + i = 0 \iff \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4i}}{2},$$

se concluye que la única órbita 2-periódica es  $\{p_1, p_2\}$ , donde  $p_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4i}}{2}$  y  $p_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4i}}{2}$ .

**Ejercicio 10.** Se considera el sistema dinámico  $(S)$  con  $I = \mathbb{R}$  y

$$f_\mu(x) = x^2 + \mu.$$

- (a) Estudiar las órbitas estacionarias y 2-periódicas, así como su estabilidad, en los casos  $\mu = 1$ ,  $\mu = \frac{1}{8}$ ,  $\mu = -\frac{1}{2}$  y  $\mu = -1$ . Deducir, en cada uno de los casos, la mayor información posible sobre el comportamiento asintótico de las órbitas.
- (b) Discutir qué tipo de bifurcación ocurre cuando  $\mu$  pasa por los valores  $-\frac{3}{4}$  y  $\frac{1}{4}$ .
- (c) Con ayuda del diagrama de órbitas, estudiar qué otros tipos de bifurcaciones aparecen cuando varía el parámetro.

*Solución.*

- (a) Se hallan los puntos fijos de  $f$  y  $f^2$ . Se tiene

$$f_\mu(x) = x \iff x^2 - x + \mu = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\mu}}{2},$$

mientras que

$$f_\mu^2(x) = x \iff (x^2 + \mu)^2 + \mu = x \iff x^4 + 2\mu x^2 - x + \mu^2 + \mu = 0.$$

Por otro lado,  $|f'_\mu(x)| = 2|x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- Para  $\mu = 1$ ,  $f_\mu$  no tiene puntos fijos y por tanto no hay órbitas estacionarias. Además, puede comprobarse que el polinomio  $x^4 + 2x^2 - x + 2$  no tiene raíces reales, así que  $f_\mu^2$  no tiene puntos fijos y por tanto tampoco hay órbitas 2-periódicas.
- Para  $\mu = \frac{1}{8}$ , los puntos fijos de  $f_\mu$  son

$$l_1 = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} \approx 0'85355339059, \quad l_2 = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} \approx 0'1464466094.$$

Por tanto, las órbitas estacionarias son  $\{l_1\}$  y  $\{l_2\}$ . Como  $|f'_\mu(l_1)| = 2l_1 > 1$  y  $|f'_\mu(l_2)| = 2l_2 < 1$ , la primera órbita es inestable y repulsora, mientras que la segunda es asintóticamente estable. Por otra parte, se prueba que las raíces reales del polinomio  $x^4 + \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{9}{64}$  son  $l_1$  y  $l_2$ , así que no hay órbitas 2-periódicas.

- Para  $\mu = -\frac{1}{2}$ , los puntos fijos de  $f_\mu$  son

$$l_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \approx 1'36602540378, \quad l_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \approx -0'36602540378$$

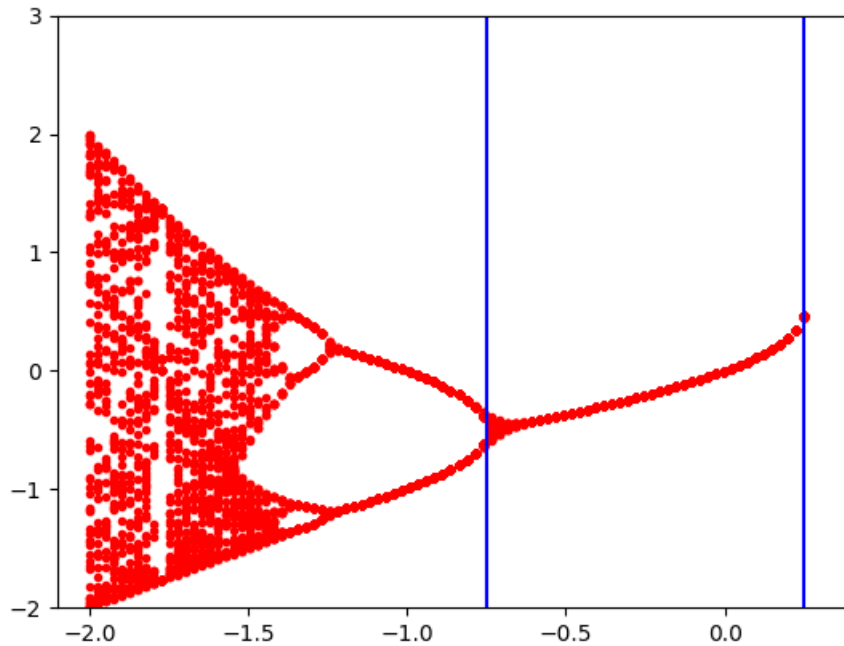
En consecuencia, las órbitas estacionarias son  $\{l_1\}$  y  $\{l_2\}$ . Como  $|f'_\mu(l_1)| = 2l_1 > 1$  y  $|f'_\mu(l_2)| = -2l_2 < 1$ , la primera órbita es asintóticamente estable, mientras que la segunda es inestable y repulsora. Por otra parte, se prueba que las raíces reales del polinomio  $x^4 - x^2 - x - \frac{1}{4}$  son  $l_1$  y  $l_2$ , así que no hay órbitas 2-periódicas.

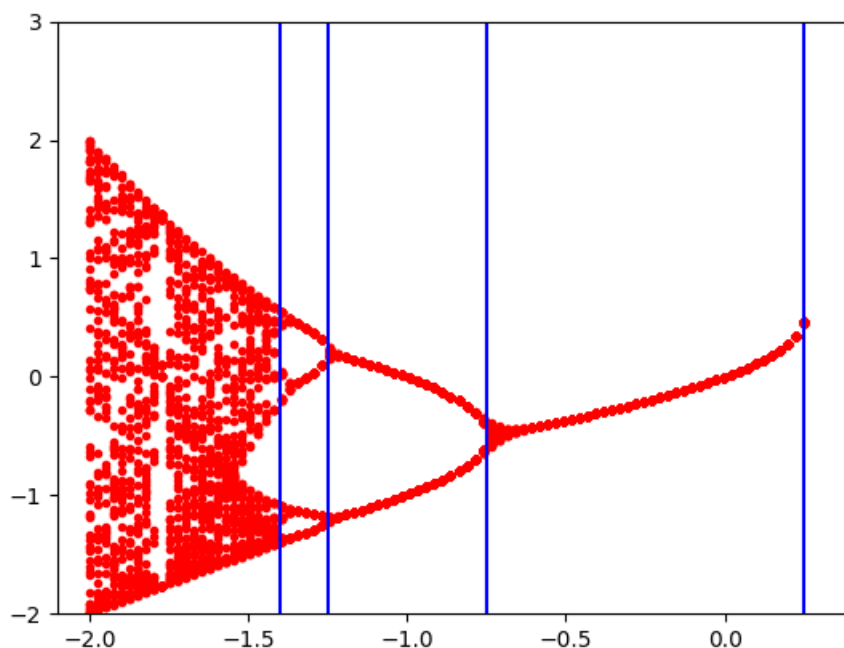
- Para  $\mu = -1$ , los puntos fijos de  $f_\mu$  son

$$l_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1'61803398875, \quad l_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0'61803398875$$

En consecuencia, las órbitas estacionarias son  $\{l_1\}$  y  $\{l_2\}$ . Como  $|f'_\mu(l_1)| = 2l_1 > 1$  y  $|f'_\mu(l_2)| = -2l_2 > 1$ , ambas órbitas son inestables y repulsoras. Por otra parte, se prueba que las raíces reales del polinomio  $x^4 - 2x^2 - x$  son  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $p_1 = 0$  y  $p_2 = -1$ , así que la única órbita 2-periódica es  $\{p_1, p_2\}$ . Se tiene que  $|(f_\mu^2)'(x)| = 4|x|(x^2 + \mu)$ , luego  $|(f_\mu^2)'(p_1)| = 0 < 1$  y por tanto  $p_1$  es un equilibrio asintóticamente estable para  $f^2$ , obteniéndose que la órbita  $\{p_1, p_2\}$  es asintóticamente estable.

- (b) Se observa que para  $\mu > \frac{1}{4}$  no hay puntos de equilibrio, pues  $1 - 4\mu < 0$  y por tanto la ecuación  $f_\mu(x) = x$  no tiene soluciones reales. Para  $-\frac{3}{4} < \mu \leq \frac{1}{4}$ , hay un equilibrio estable y no hay órbitas 2-periódicas, mientras que  $\mu < -\frac{3}{4}$ , aparece una órbita 2-periódica asintóticamente estable que acaba siendo inestable.





**Ejercicio 11.** Se considera el sistema dinámico (S) con  $I = \mathbb{R}$  y

$$f_\mu(x) = x^3 - \mu x.$$

- Estudiar las órbitas estacionarias y 2-periódicas, así como su estabilidad, para los valores  $\mu = -2$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu = 1$  y  $\mu = \frac{3}{2}$ . Deducir, en cada uno de los casos, la mayor información posible sobre el comportamiento asintótico de las órbitas.
- Discutir qué tipo de bifurcación ocurre cuando  $\mu$  pasa por los valores  $-1$  y  $1$ .
- Con ayuda del diagrama de órbitas, estudiar qué otros tipos de bifurcaciones aparecen cuando varía el parámetro.

*Solución.*

- Se hallan los puntos fijos de  $f$  y  $f^2$ . Se tiene que

$$f_\mu(x) = x \iff x^3 - (\mu + 1)x = 0 \iff x(x^2 - (\mu + 1)) = 0.$$

Por tanto,  $l_1 = 0$  siempre es un punto fijo de  $f_\mu$ , y si  $\mu \geq -1$ , entonces  $l_2 = \sqrt{\mu + 1}$  y  $l_3 = -\sqrt{\mu + 1}$  también son puntos fijos de  $f_\mu$ . Además,

$$\begin{aligned} f_\mu^2(x) = x &\iff (x^3 - \mu x)^3 - \mu(x^3 - \mu x) = x \iff x^3(x^2 - \mu)^3 - \mu x^3 + (\mu^2 - 1)x = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ó } x^2(x^2 - \mu)^3 - \mu x^2 + \mu^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado,  $|f'_\mu(x)| = |3x^2 - \mu|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- Para  $\mu = -2$ ,  $l_1 = 0$  es el único punto fijo de  $f_\mu$ , y es inestable y repulsor porque  $|f'_\mu(l_1)| = |\mu| = 2 > 1$ . Además, puede comprobarse que el polinomio  $x^2(x^2 + 2)^3 + 2x^2 + 3$  no tiene raíces reales, así que  $f_\mu^2$  no tiene puntos fijos y por tanto no hay órbitas 2-periódicas.
- Para  $\mu = 0$ , los puntos fijos de  $f_\mu$  son

$$l_1 = 0, \quad l_2 = \sqrt{\mu + 1} = 1, \quad l_3 = -\sqrt{\mu + 1} = -1.$$



Por tanto, las órbitas estacionarias son  $\{l_1\}$ ,  $\{l_2\}$  y  $\{l_3\}$ . Como  $|f'_\mu(l_1)| = 0 < 1$ ,  $|f'_\mu(l_2)| = 3 > 1$  y  $|f'_\mu(l_3)| = 3 > 1$ , la primera órbita es asintóticamente estable, mientras que las dos últimas son inestables y repulsoras. Por otra parte, se prueba que las raíces reales del polinomio  $x^8 - 1$  son  $l_2$  y  $l_3$ , que también son puntos fijos de  $f$ . Por tanto, tampoco hay órbitas 2-periódicas.

- Para  $\mu = 1$ , los puntos fijos de  $f_\mu$  son

$$l_1 = 0, \quad l_2 = \sqrt{\mu + 1} = \sqrt{2}, \quad l_3 = -\sqrt{\mu + 1} = -\sqrt{2}.$$

En consecuencia, las órbitas estacionarias son  $\{l_1\}$ ,  $\{l_2\}$  y  $\{l_3\}$ . Como  $|f'_\mu(l_1)| = 0 < 1$ ,  $|f'_\mu(l_2)| = 5 > 1$  y  $|f'_\mu(l_3)| = 5 > 1$ , la primera órbita es asintóticamente estable, mientras que las dos últimas son inestables y repulsoras. Por otra parte, se prueba que las raíces reales del polinomio  $x^2(x^2 - 1)^3 - x^2$  son  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ , que también son puntos fijos de  $f$ . Por tanto, tampoco hay órbitas 2-periódicas.

- Para  $\mu = \frac{3}{2}$ , los puntos fijos de  $f_\mu$  son

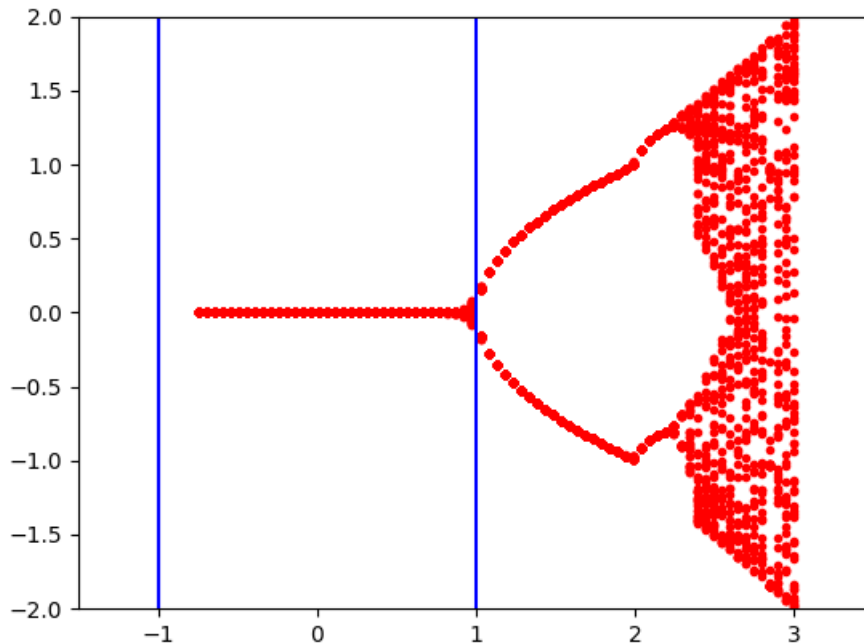
$$l_1 = 0, \quad l_2 = \sqrt{\mu + 1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad l_3 = -\sqrt{\mu + 1} = -\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

En consecuencia, las órbitas estacionarias son  $\{l_1\}$ ,  $\{l_2\}$  y  $\{l_3\}$ . Como  $|f'_\mu(l_1)| = 0 < 1$ ,  $|f'_\mu(l_2)| = |3\frac{10}{4} - \frac{3}{2}| = 6 > 1$  y  $|f'_\mu(l_3)| = 6 > 1$ , la primera órbita es asintóticamente estable, mientras que las dos últimas son inestables y repulsoras. Por otra parte, se prueba que las raíces reales del polinomio  $x^2(x^2 - \frac{3}{2})^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$  son  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  y  $p_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Por tanto, la única órbita 2-periódica es  $\{p_1, p_2\}$ . Se tiene que

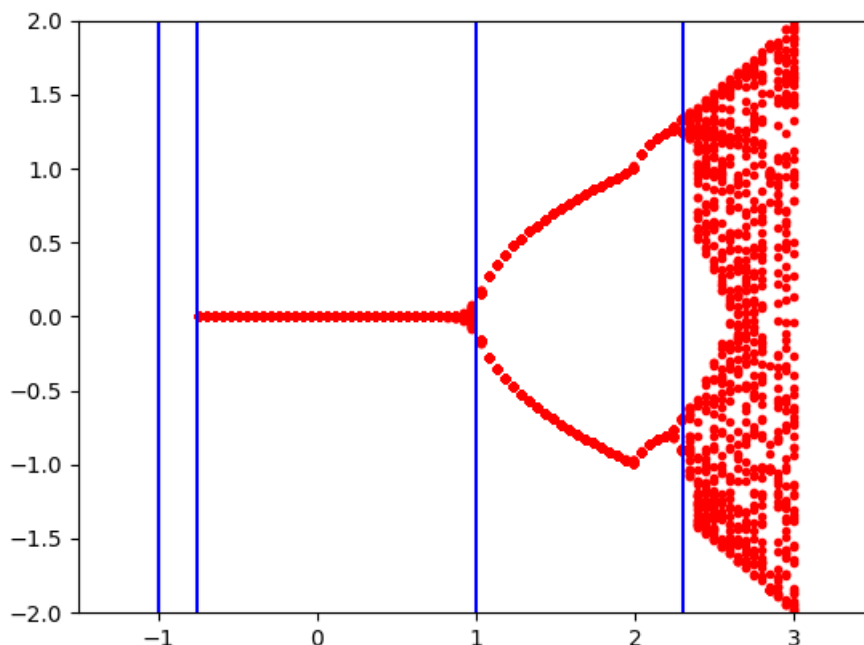
$$|(f_\mu^2)'(x)| = 3(3x^2 - \mu)(x^3 - \mu x)^2 - \mu(3x^2 - \mu) = (3x^2 - \mu)(3(x^3 - \mu x)^2 - \mu).$$

Como  $3p_1^2 - \frac{3}{2} = 0$ , entonces  $|(f_\mu^2)'(p_1)| = 0 < 1$  y se concluye que la órbita  $\{p_1, p_2\}$  es asintóticamente estable.

- (b) Se observa que para  $\mu < -1$  no hay puntos de equilibrio, pues  $\mu + 1 < 0$  y por tanto la ecuación  $f_\mu(x) = x$  no tiene soluciones reales. Para  $-1 < \mu < 1$ , no hay órbitas periódicas de periodo mayor que 1, mientras que para  $\mu > 1$ , aparece una órbita 2-periódica que se acaba volviendo inestable.



- (c) En el diagrama de bifurcación también se observa que para  $-0.75 \leq \mu \leq 1$ , hay un equilibrio estable, mientras que alrededor de  $\mu = 2.3$ , la órbita 2-periódica se torna inestable. Para  $\mu > 2.3$ , aparecen órbitas de mayor periodo y el sistema entra en un régimen caótico.



**Ejercicio 12.** Se considera el sistema dinámico (S) con  $I = \mathbb{R}$  y

$$f_{\mu}(x) = \mu \sin(x).$$

- (a) Estudiar las órbitas estacionarias y 2-periódicas, así como su estabilidad, para los valores  $\mu = \frac{1}{2}$ ,  $\mu = \frac{3}{2}$  y  $\mu = \frac{5}{2}$ . Deducir, en cada uno de los casos, la mayor información posible sobre el comportamiento asintótico de las órbitas.
- (b) Discutir qué tipo de bifurcación ocurre cuando  $\mu$  pasa por los valores  $\mu = 1$  y  $\mu \approx 2.26$ .
- (c) Con ayuda del diagrama de órbitas, estudiar qué otros tipos de bifurcaciones aparecen cuando varía el parámetro.

*Solución.* Extremadamente similar a los ejercicios anteriores.

**Ejercicio 13.** Se considera el sistema dinámico (S) con  $I = \mathbb{R}$  y

$$f_{\mu}(x) = \mu e^x.$$

- (a) Estudiar las órbitas estacionarias y 2-periódicas, así como su estabilidad, para los valores  $\mu = -3$ ,  $\mu = -e^{-1}$ ,  $\mu = e^{-1}$  y  $\mu = 1$ . Deducir, en cada uno de los casos, la mayor información posible sobre el comportamiento asintótico de las órbitas.
- (b) Discutir qué tipo de bifurcación ocurre cuando  $\mu$  pasa por los valores  $-e$ ,  $0$  y  $e^{-1}$ .
- (c) Con ayuda del diagrama de órbitas, estudiar qué otros tipos de bifurcaciones aparecen cuando varía el parámetro.

*Solución.* Extremadamente similar a los ejercicios anteriores.

**Ejercicio 14.** Se considera el sistema dinámico (S) con  $I = \mathbb{R}$  y

$$f_{\mu}(x) = x + x^2 + \mu.$$

- (a) Estudiar las órbitas estacionarias y 2-periódicas, así como su estabilidad, para los valores  $\mu = -1'2$ ,  $\mu = -0'5$  y  $\mu = 0'5$ . Deducir, en cada uno de los casos, la mayor información posible sobre el comportamiento asintótico de las órbitas.
- (b) Discutir qué tipo de bifurcación ocurre cuando  $\mu$  pasa por los valores  $-1$  y  $0$ .
- (c) Con ayuda del diagrama de órbitas, estudiar qué otros tipos de bifurcaciones aparecen cuando varía el parámetro.

*Solución.* Extremadamente similar a los ejercicios anteriores.

**Ejercicio 15.** Se considera el sistema dinámico  $(S)$  con  $I = \mathbb{R}$  y

$$f_{\mu}(x) = x + \mu x^2.$$

Estudiar sus equilibrios y sus dominios de atracción y repulsión.

*Solución.* Se tiene que

$$f_{\mu}(x) = x \iff \mu x^2 = 0 \iff x = 0 \text{ ó } \mu = 0.$$

Se barajan los siguientes casos:

- (a) Si  $\mu = 0$ , todos los números reales son equilibrios del sistema dinámico. Sea  $l \in \mathbb{R}$ . Se trata de estudiar el dominio de atracción y repulsión de  $l$ . Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , usando que  $x$  es punto fijo de  $f$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = l \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x = l \iff x = l.$$

De forma análoga,

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x) = l \iff x = l.$$

Por tanto,  $S_l = \{l\}$  y  $U_l = \{l\}$ .

- (b) Si  $\mu \neq 0$ , el único equilibrio del sistema dinámico es  $l = 0$ . Como  $|f'_{\mu}(l)| = |1 + 2\mu l| = 1$ , este equilibrio es no hiperbólico, así que se va a recurrir a razonamientos geométricos para determinar los dominios de atracción y de repulsión de  $l$ .

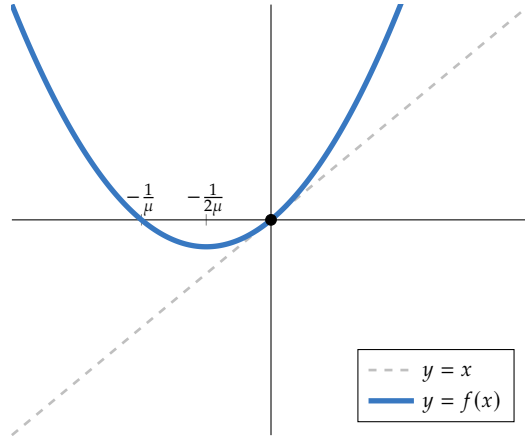
- Supóngase que  $\mu > 0$ . Entonces

$$f'_{\mu}(x) > 0 \iff 2\mu x > -1 \iff x > -\frac{1}{2\mu},$$

mientras que

$$f'_{\mu}(x) < 0 \iff 2\mu x < -1 \iff x < -\frac{1}{2\mu}.$$

Así,  $f_{\mu}$  es estrictamente creciente en  $(-\frac{1}{2\mu}, \infty)$  y estrictamente decreciente en  $(-\infty, -\frac{1}{2\mu})$ . Los puntos de corte de la gráfica de  $f$  con los ejes son  $(0, 0)$  y  $(-\frac{1}{\mu}, 0)$ . Con esta información se puede esbozar la gráfica de  $f$ .



Dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , se observa que la sucesión definida por  $x_{n+1} = f(x_n)$  se aleja de 0 cuando  $x_0 > 0$  y  $x_0 < -\frac{1}{\mu}$ , y se acerca a 0 cuando  $-\frac{1}{\mu} \leq x_0 \leq 0$ . Por tanto,  $S_0 = [-\frac{1}{\mu}, 0]$  y  $U_0 = (-\infty, -\frac{1}{\mu}) \cup [0, \infty)$ .

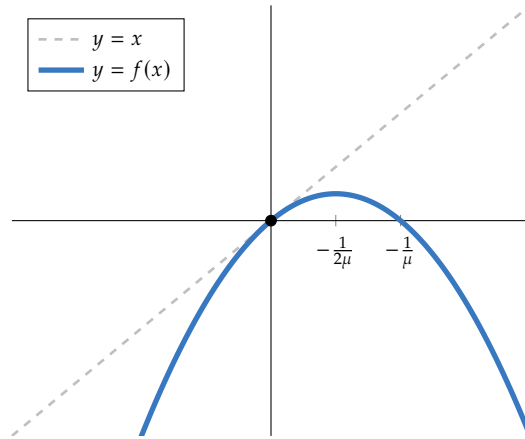
- Supóngase que  $\mu < 0$ . Entonces

$$f'_\mu(x) > 0 \iff 2\mu x > -1 \iff x < -\frac{1}{2\mu},$$

mientras que

$$f'_\mu(x) < 0 \iff 2\mu x < -1 \iff x > -\frac{1}{2\mu}.$$

Así,  $f_\mu$  es estrictamente decreciente en  $(-\frac{1}{2\mu}, \infty)$  y estrictamente creciente en  $(-\infty, -\frac{1}{2\mu})$ . Igual que antes, los puntos de corte de la gráfica de  $f$  con los ejes son  $(0, 0)$  y  $(-\frac{1}{\mu}, 0)$ . Con esta información se puede esbozar la gráfica de  $f$ .



Dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , se observa que la sucesión definida por  $x_{n+1} = f(x_n)$  se aleja de 0 cuando  $x_0 < 0$  y  $x_0 > -\frac{1}{\mu}$ , y se acerca a 0 cuando  $0 \leq x_0 \leq -\frac{1}{\mu}$ . Por tanto,  $S_0 = [0, -\frac{1}{\mu}]$  y  $U_0 = (-\infty, 0] \cup (-\frac{1}{\mu}, \infty)$ .

**Ejercicio 16.** La población de insectos en un manglar sigue el modelo (S) con  $I = [0, \infty)$  y

$$f(x) = \begin{cases} 0'01x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq K, \\ 0'01K^2e^{-r(x-K)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo  $K = 1000$  y  $r = 1'75 \cdot 10^{-4}$ .

(a) Probar que, con un cambio de variables adecuado, el modelo puede escribirse en la forma adimensional

$$u_{n+1} = g(u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

siendo

$$g(u) = \begin{cases} \alpha u^2 & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ \alpha e^{-\beta(u-1)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  dos constantes positivas a determinar. En los siguientes apartados se considerará la forma adimensional del modelo.

(b) Estudiar los equilibrios y su estabilidad.

(c) Estudiar el comportamiento asintótico del número de individuos en función del número inicial.

*Solución.* En primer lugar, se observa que  $f$  es continua en  $I$  y que  $f(I) \subset I$ , así que el sistema dinámico considerado tiene sentido.

(a) Nótese que  $x$  y  $K$  tienen las mismas unidades porque en la definición de  $f$  aparece  $x - K$ . En consecuencia, el cambio de variables

$$u = \frac{x}{K}$$

es adimensional. Si  $n = 0, 1, 2, \dots$ , se tiene que

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{K} = \frac{f(x_n)}{K} &= \begin{cases} \frac{0'01x_n^2}{K} & \text{si } 0 \leq x \leq K, \\ 0'01Ke^{-r(x_n-K)} & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{0'01u_n^2K^2}{K} & \text{si } 0 \leq uK \leq K, \\ 0'01Ke^{-r(u_nK-K)} & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0'01Ku_n^2 & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ 0'01Ke^{-rK(u_n-1)} & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Sea  $\alpha = 0'01K = 10$ , sea  $\beta = rK = 0'175$  y sea  $g: I \rightarrow I$  la función dada por

$$g(u) = \begin{cases} \alpha u^2 & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ \alpha e^{-\beta(u-1)} & \text{en otro caso.} \end{cases} = \begin{cases} 10u^2 & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ 10e^{-0'175(u-1)} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los razonamientos anteriores prueban que el modelo se puede escribir como

$$u_{n+1} = g(u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(b) Si  $0 \leq u \leq 1$ , se tiene

$$g(u) = u \iff \alpha u^2 = u \iff u = 0 \text{ ó } u = \frac{1}{\alpha} = 0'1,$$

mientras que si  $u > 1$ ,

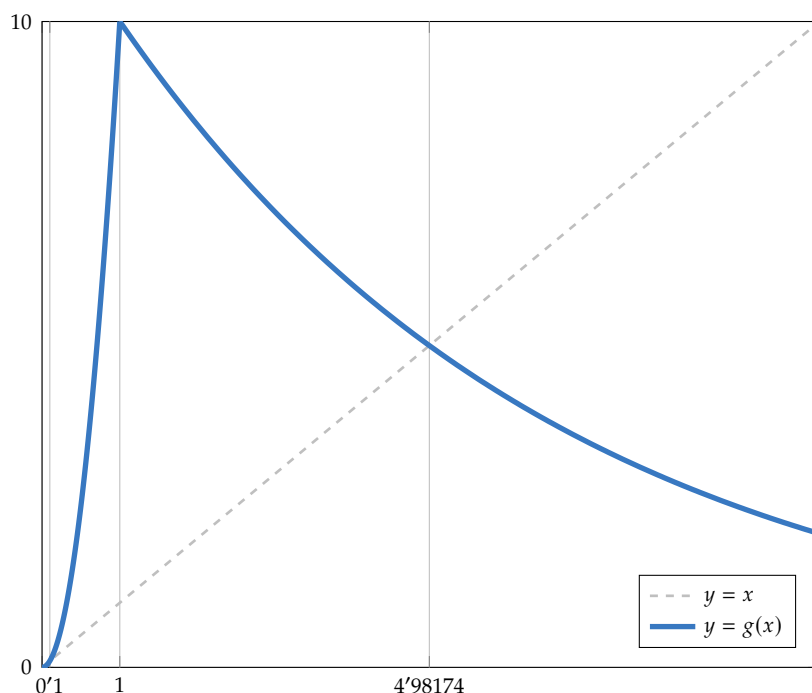
$$g(u) = u \iff 10e^{-0'175(u-1)} = u.$$

Puede probarse que esta ecuación tiene una única solución,  $u \approx 4'98174$ . Por otro lado,

$$g'(u) = \begin{cases} 20u & \text{si } 0 \leq u < 1, \\ -1'75e^{-0'175(u-1)} & \text{si } u > 1. \end{cases}$$

Los equilibrios del sistema son  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 0'1$  y  $l_3 \approx 4'98174$ . Se tiene que  $|g'(l_1)| = 0 < 1$ ,  $|g'(l_2)| = 20 \cdot 0'1 = 2 > 1$  y  $|g'(l_3)| = 1'75e^{-0'175(l_3-1)} = 1'75 \frac{l_3}{10} = 0'175l_3 \approx 0'8718045 < 1$ . Por tanto,  $l_1$  y  $l_3$  son asintóticamente estables, mientras que  $l_2$  es inestable y repulsor.

- (c) Sea  $u_0 \in [0, \infty)$  el número inicial de individuos. Se trata de estudiar geoméricamente el comportamiento de la sucesión definida por  $u_{n+1} = g(u_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$



Se observa que:

- Si  $0 \leq u_0 < 0'1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .
- Si  $u_0 = 0'1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0'1$ .
- Si  $0'1 < u \leq l_3$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l_3$ .
- Si  $u > l_3$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l_3$ .

**Ejercicio 17.** La población de una especie sigue el modelo

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \infty), \\ x_{n+1} = ax_n e^{-x_n}, \quad n \geq 0, \end{cases}$$

donde  $a$  es un número real mayor que 0.

- (a) Determinar los equilibrios y estudiar su estabilidad. ¿Para qué valores de  $a$  se extingue la población, sea cual sea la condición inicial?
- (b) Estudiar la existencia de órbitas 2-periódicas para  $a = 4$  y  $a = 10$ . En caso de haber alguna, determinar su tipo de estabilidad. ¿Para qué valor de  $a$  se produce la primera bifurcación por duplicación del periodo?
- (c) Con ayuda de un diagrama de órbitas, estudiar qué otras bifurcaciones se producen cuando  $a$  aumenta.
- (d) Comentar cuál es la evolución esperada de la especie en función del valor de  $a$ .

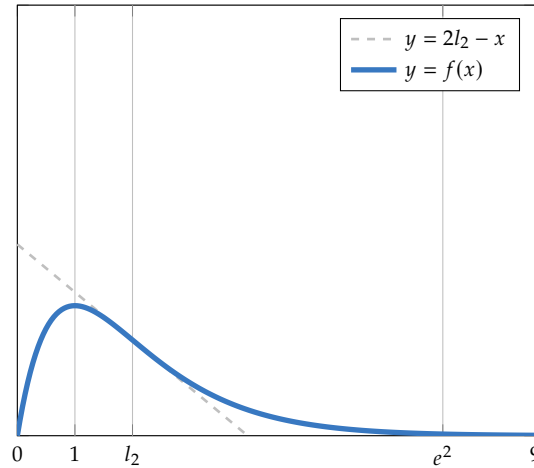
**Solución.** Sea  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $f(x) = axe^{-x}$ . Es claro que  $f$  es continua y que  $f([0, \infty)) \subset [0, \infty)$ , así que el sistema dinámico considerado tiene sentido.

(a) Se tiene que

$$f(x) = x \iff axe^{-x} = x \iff x = 0 \text{ ó } x = \log(a).$$

Por otro lado,  $f'(x) = ae^{-x} - axe^{-x} = ae^{-x}(1 - x)$  para todo  $x \geq 0$ . Se distinguen dos casos:

- Si  $0 < a < 1$ , entonces  $\log(a) < 0$  y por tanto el único equilibrio es  $l = 0$ . Como  $|f'(l)| = a < 1$ , dicho equilibrio es asintóticamente estable.
- Si  $a \geq 1$ , entonces  $\log(a) \geq 0$  y por tanto los equilibrios son  $l_1 = 0$  y  $l_2 = \log(a)$ . Además,  $|f'(l_1)| = a$  y  $|f'(l_2)| = |1 - \log(a)|$ . Se distinguen otros cuantos casos:
  - Si  $a = 1$ , entonces  $|f'(l_1)| = 1$  y  $|f'(l_2)| = 0 < 1$ , luego  $l_1$  es un equilibrio no hiperbólico y  $l_2$  es un equilibrio asintóticamente estable. Para estudiar la estabilidad de  $l_1$ , se observa que  $f'(x) = ae^{-x}(1 - x) > 0$  para todo  $x \in (l_1, 1)$ , luego  $f$  es estrictamente creciente en  $(l_1, 1)$ . Como además  $f(x) = xe^{-x} < x$  para todo  $x \in (l_1, 1)$ , entonces  $l_1$  es un equilibrio asintóticamente estable.
  - Si  $1 < a \leq e$ , entonces  $0 < \log(a) \leq 1$  y por tanto se tiene  $|f'(l_1)| = a > 1$  y  $|f'(l_2)| = |1 - \log(a)| = 1 - \log(a) < 1$ . Así,  $l_1$  es un equilibrio inestable y repulsor y  $l_2$  es un equilibrio asintóticamente estable.
  - Si  $e < a < e^2$ , entonces  $1 < \log(a) < 2$  y por tanto se tiene  $|f'(l_1)| = a > 1$  y  $|f'(l_2)| = |1 - \log(a)| = \log(a) - 1 < 1$ . Así,  $l_1$  es un equilibrio inestable y repulsor y  $l_2$  es un equilibrio asintóticamente estable.
  - Si  $a = e^2$ , entonces  $|f'(l_1)| = e^2 > 1$  y  $|f'(l_2)| = |1 - \log(e^2)| = 1$ , luego  $l_1$  es un equilibrio inestable y repulsor y  $l_2 = \log(e^2) = 2$  es un equilibrio no hiperbólico.



Se observa que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f$  es decreciente en  $(l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ ,  $f(x) < 2l_2 - x$  para todo  $x \in (l_2 - \varepsilon, l_2)$ , y  $f(x) > 2l_2 - x$  para todo  $x \in (l_2, l_2 + \varepsilon)$ . En consecuencia,  $l_2$  es un equilibrio asintóticamente estable.

- Si  $a > e^2$ , entonces se tiene  $\log(a) > 2$  y, consecuentemente,  $|f'(l_1)| = a > 1$  y  $|f'(l_2)| = |1 - \log(a)| = \log(a) - 1 > 1$ . Así,  $l_1$  y  $l_2$  son equilibrios inestables y repulsores.

Si  $0 < a < 1$ , la población siempre se extingue independientemente de la población inicial, pues el único equilibrio es  $l = 0$  y es estable y atractor.

(b) Para estudiar las órbitas 2-periódicas, se hallan los puntos fijos de  $f^2$ :

$$f^2(x) = x \iff a(axe^{-x})e^{-(axe^{-x})} = x \iff a^2xe^{-x(1+ae^{-x})} = x$$

Se observa que  $l_1 = 0$  es un punto fijo de  $f^2$ . Para  $x \neq 0$ ,

$$f^2(x) = x \iff a^2e^{-x(1+ae^{-x})} = 1 \iff e^{-x(1+ae^{-x})} = a^{-2} \iff -x(1+ae^{-x}) = -2\log(a).$$

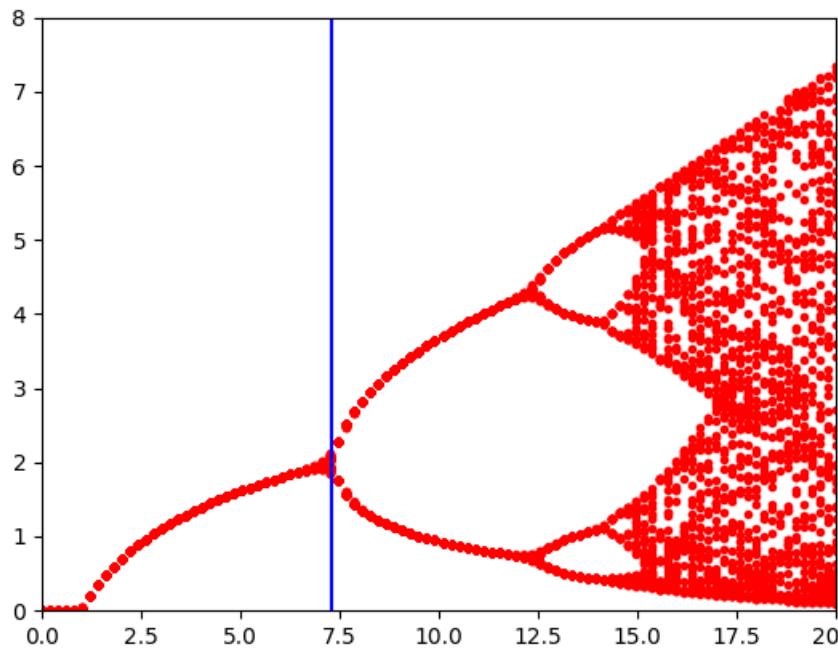
Para  $a = 4$ , se prueba que la única solución de la ecuación anterior es  $l_2 = \log(4)$ , que es también punto de  $f$ . Por tanto, los dos puntos fijos de  $f^2$  son también puntos fijos de  $f$ , así que no hay órbitas 2-periódicas.

Para  $a = 10$ , las soluciones de la ecuación son  $l_2 = \log(10)$ ,  $p_1 \approx 0'934596$  y  $p_2 \approx 3'67057$ . Como hay dos puntos fijos de  $f^2$  que no son puntos fijos de  $f$ , la única órbita 2-periódica es  $\{p_1, p_2\}$ . Se tiene que

$$|f'(p_1)f'(p_2)| = |10e^{-p_1}(1 - p_1)| \cdot |10e^{-p_2}(1 - p_2)| \approx 0'174667 < 1,$$

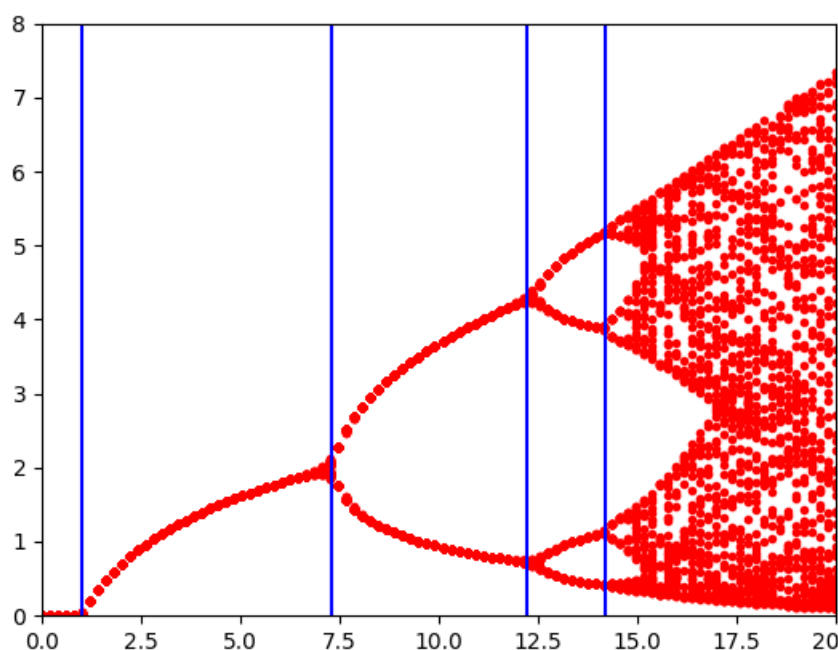
así que la órbita es asintóticamente estable.

En el diagrama de bifurcación de  $f$  se observa que en  $a \approx 7'3$  se produce la primera bifurcación por duplicación del periodo, pues para  $a < 7'3$  no hay órbitas 2-periódicas, mientras que para  $a > 7'3$  sí las hay.



- (c) También se observa en el diagrama de bifurcación que en  $a = 1$  aparece un equilibrio asintóticamente estable no nulo. En  $a \approx 12'2$ , la órbita 2-periódica se vuelve inestable y aparece una órbita 4-periódica asintóticamente estable. En  $a \approx 14'2$ , la órbita 4-periódica se vuelve inestable y aparece una órbita 8-periódica asintóticamente estable. Finalmente, para  $a > 14'2$  aparecen órbitas estables de cada vez mayor periodo y el sistema transiciona a un régimen caótico.





- (d) Si  $0 < a < 1$ , la especie siempre se extingue porque el único equilibrio es  $l = 0$ , y es asintóticamente estable. Si  $1 \leq a < 7'3$ , la especie tiende al equilibrio  $l = \log(a)$ , pues dicho equilibrio es asintóticamente estable. Para  $7'3 \leq a < 12'2$ , la especie sigue un patrón 2-periódico. Para  $a \leq 12'2 < 14'2$ , la especie sigue un patrón 4-periódico. Finalmente, para  $a > 14'2$ , la evolución de la población se vuelve impredecible.

**Ejercicio 18.** El sistema dinámico discreto

$$t_{n+1} = \frac{K}{t_n - 90} + 100, \quad n = 0, 1, \dots$$

modela el tiempo  $t_n$  (medido en microsegundos) que tarda en llegar la señal eléctrica inducida por un marcapasos desde el atria (lugar que se estimula) hasta los ventrículos del corazón, en el  $n$ -ésimo latido;  $K$  es una constante positiva.

- (a) Probar que, usando un cambio de variables adecuado, el modelo puede ser reescrito en la forma adimensional

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \alpha, \quad n = 0, 1, \dots$$

siendo  $\alpha > 0$  un parámetro. Sabiendo que  $t_n$  es siempre mayor que 90, ¿en qué intervalo toma valores la variable adimensional  $x_n$ ?

- (b) Estudiar los equilibrios y su estabilidad (solo se considerarán los que pertenezcan al intervalo determinado en el apartado anterior).
- (c) Con ayuda del apartado anterior y de los diagramas web, describe el comportamiento esperado de  $t_n$  cuando  $n$  tiende a infinito.
- (d) ¿Qué ocurre si  $\alpha = 0$ ?

*Solución.*

- (a) Llámese  $T$  a la unidad para medir el tiempo (microsegundos, en este caso). Como  $[t_n - 90] = T$  y  $[\frac{K}{t_n - 90}] = [t_{n+1} - 100] = T$ , entonces  $[K] = T^2$ . Considérese el cambio de variables

$$x = \frac{t - 90}{\sqrt{K}},$$

que es adimensional porque  $[\sqrt{K}] = T$  y  $[t - 90] = T$ . Se tiene que

$$x_{n+1} = \frac{t_{n+1} - 90}{\sqrt{K}} = \frac{\frac{K}{t_n - 90} + 10}{\sqrt{K}} = \frac{K}{(t_n - 90)\sqrt{K}} + \frac{10}{\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{K}}{t_n - 90} + \frac{10}{\sqrt{K}} = \frac{1}{x_n} + \frac{10}{\sqrt{K}}.$$

Por tanto, el modelo se puede escribir en la forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \alpha, \quad n = 0, 1, \dots,$$

siendo  $\alpha = \frac{10}{\sqrt{K}} > 0$ . Además,

$$t_n > 90 \iff \sqrt{K}x_n + 90 > 90 \iff \sqrt{K}x_n > 0 \iff x_n > 0,$$

así que el intervalo en el que toma valores la nueva variable adimensional es  $(0, \infty)$ .

- (b) Se considera la función  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{x} + \alpha$ . Nótese que  $f$  es continua y verifica  $f((0, \infty)) \subset (0, \infty)$ , así que el sistema dinámico a considerar tiene perfecto sentido. Por otro lado,

$$f(x) = x \iff \frac{1}{x} + \alpha = x \iff x^2 - \alpha x - 1 = 0 \iff x = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}.$$

Ahora bien,

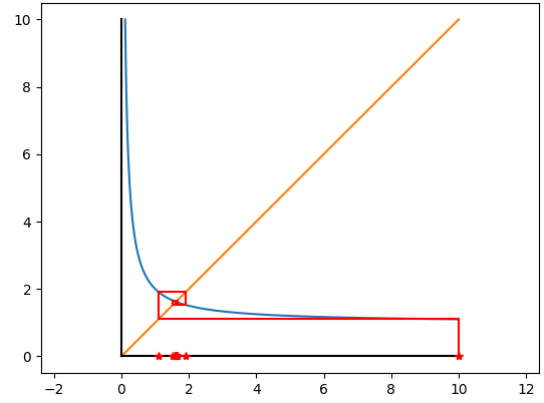
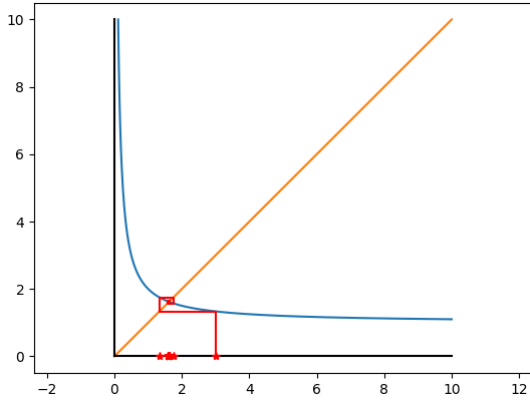
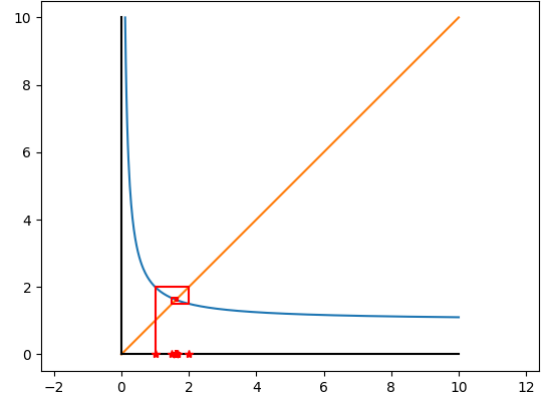
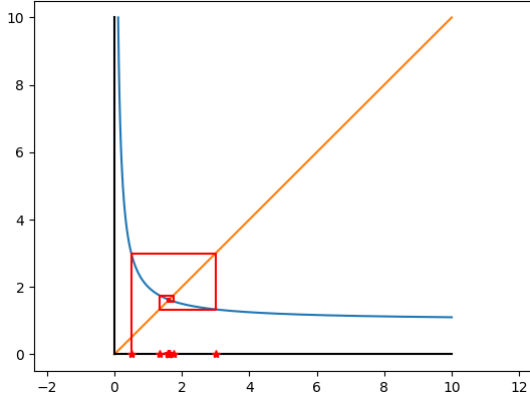
$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} > 0 \iff \alpha > \sqrt{\alpha^2 + 4} \iff \alpha^2 > \alpha^2 + 4,$$

y esto último es falso. Por tanto, el único equilibrio del sistema dinámico es  $l = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$ . Como  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , entonces

$$|f'(l_1)| = \frac{1}{l_1^2} = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2 + 4}{4} + \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4}} = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{2} + \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4} + 1} < 1,$$

así que dicho equilibrio es asintóticamente estable.

- (c) Tomando  $\alpha = 1$  (es decir,  $K = 100$ ) y representando los primeros términos de la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  para distintos valores de  $x_0$ , se observa que la sucesión converge a  $l \approx 1'61803$  para cualquier  $x_0 > 0$ . Por tanto, la sucesión  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$  convergerá a  $\sqrt{K}l + 90 = 10l + 90 \approx 106'18034$  para cualquier  $t_0 > 90$ .



- (d) Si  $\alpha = 0$ , el único equilibrio del sistema es  $l = 1$ , y es no hiperbólico porque  $|f'(l)| = \frac{1}{l^2} = 1$ . Representando gráficamente  $f$  y la recta  $y = 2 - x$ , se observa que  $f$  es estrictamente decreciente y  $f(x) > 2 - x$  para todo  $x \in (0, \infty)$ , así que  $l$  es un equilibrio inestable.

También se verifica  $f^2(x) = x$  para todo  $x > 0$ , así que para  $x, y \in (0, 1) \cup (1, \infty)$  cualesquiera con  $x \neq y$ , se tiene que  $\{x, y\}$  es una órbita 2-periódica. En consecuencia, todas las sucesiones de la forma

$$\begin{cases} x_0 \in (0, 1) \cup (1, \infty), \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

no convergen, pues no son más que  $\{x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \dots\}$ .