Relación 2

Ejercicio 1. *Sea X una variable aleatoria con $X \sim N(\mu = 12, \sigma = 0.04)$.*

(a) Se toma una muestra de tamaño $n = 16$. Calcular $P(11.99 < \bar{X} < 12.01)$.

(b) Para una muestra de tamaño $n = 16$, calcular $P(10^{-3} < S_c^2 < 2 \cdot 10^{-3})$.

Resolución.

(a) Sabemos que

$$\bar{X} \sim N(12, \frac{\sigma}{4}) \; = N(12, 0.01)$$

Por tanto,

$$P(11.99 < \bar{X} < 12.01) = P(-0.01 < \bar{X} - 12 < 0.01) = P\Big(-1 < \frac{\bar{X} - 12}{0.01} < 1\Big) = 2P\Big(\frac{\bar{X} - 12}{0.01} < 1\Big) - 1$$
$$\approx 2 \cdot 0.84134 - 1 = 0.68268$$

(b) Por el lema de Fischer, sabemos que

$$\frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} = 9375 \cdot S_c^2 = V \sim \chi^2_{15}$$

Por tanto,

$$P(10^{-3} < S_c^2 < 2 \cdot 10^{-3}) = P(9.375 < 9375 \cdot S_c^2 < 18.75) = P(V < 18.75) - P(V \leq 9.375)$$

Desgraciadamente, estas probabilidades no aparecen en la tabla de la distribución χ^2, así que van a aproximarse mediante interpolación lineal. Tenemos que

$$P(V \leq 18.2451) = 0.75 \qquad \text{y} \qquad P(V \leq 22.3071) = 0.9$$

Por tanto, si x es la aproximación de $P(V \leq 18.75)$ buscada, tenemos que

$$\frac{x - 0.75}{0.9 - 0.75} = \frac{18.75 - 18.2451}{22.3071 - 18.2451}$$

De aquí se deduce que

$$x = \frac{(0.9 - 0.75)(18.75 - 18.2451)}{22.3071 - 18.2451} + 0.75 \approx 0.76864$$

Por otra parte, como

$$P(V \leq 8.5468) = 0.1 \qquad \text{y} \qquad P(V \leq 11.0365) = 0.25,$$

si y es la aproximación de $P(V \leq 9.375)$ buscada, tenemos que

$$\frac{y - 0.1}{0.25 - 0.1} = \frac{9.375 - 8.5468}{11.0365 - 8.5468}$$

De aquí se deduce que

$$y = \frac{(0.25 - 0.1)(9.375 - 8.5468)}{11.0365 - 8.5468} + 0.1 \approx 0.15$$

En consecuencia,

$$P(10^{-3} < S_c^2 < 2 \cdot 10^{-3}) \approx 0.76864 - 0.15 = 0.61864$$

Ejercicio 2. *Las puntuaciones de un grupo de alumnos en una prueba siguen una distribución normal de media* 90 *y desviación típica* 12*. Si se extrae una muestra aleatoria simple de* 30 *alumnos, ¿por debajo de qué valor se encontrará el* 90% *de las veces el valor de la cuasivarianza muestral?*

Resolución. Sea $X \sim N(\mu = 90, \sigma = 12)$ la variable aleatoria en cuestión y sea $(X_1, \dots, X_{30})$ la muestra aleatoria de X de 30 alumnos. Hay que encontrar $x \in \mathbb{R}$ de manera que

$$P(S_c^2 \leq x) = 0.9$$

Por el lema de Fischer,

$$\frac{29 \cdot S_c^2}{144} = V \sim \chi^2_{29}$$

Por tanto, como

$$P(S_c^2 \leq x) = P(V \leq \frac{29x}{144}),$$

de la tabla de la distribución de χ^2 se obtiene

$$\frac{29x}{144} = 39.0875,$$

es decir,

$$x = \frac{39.0875 \cdot 144}{29} \approx 194.09$$

Ejercicio 3. *Sea* $(X_1, \dots, X_n)$ *una muestra aleatoria simple de* $X \sim N(\mu, \sigma)$*. Obtener una expresión para la probabilidad*

$$P\Big(\bar{X} > \mu + \frac{\sigma}{2}, |S_c^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}\Big)$$

Resolución. Por el lema de Fischer, $\bar{X}$ y S_c^2 son independientes, luego

$$P\Big(\bar{X} > \mu + \frac{\sigma}{2}, |S_c^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}\Big) = \underbrace{P\Big(\bar{X} > \mu + \frac{\sigma}{2}\Big)}_{(a)}\underbrace{P\Big(|S_c^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}\Big)}_{(b)}$$

Se tiene que

(*a*) $P\Big(\bar{X} > \mu + \frac{\sigma}{2}\Big) = P\Big(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} > \frac{1}{2}\Big) = P\Big(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{\sqrt{n}}{2}\Big) = 1 - P\Big(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\Big)$, donde

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1),$$

ya que

$$\bar{X} \sim N\Big(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)$$

(*b*)
$$\begin{aligned} P\Big(|S_c^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}\Big) &= 1 - P\Big(|S_c^2 - \sigma^2| \leq \frac{\sigma^2}{2}\Big) = 1 - P\Big(-\frac{\sigma^2}{2} \leq S_c^2 - \sigma^2 \leq \frac{\sigma^2}{2}\Big) \\ &= 1 - P\Big(\frac{\sigma^2}{2} \leq S_c^2 \leq \frac{3\sigma^2}{2}\Big) = 1 - P\Big(S_c^2 \leq \frac{3\sigma^2}{2}\Big) + P\Big(S_c^2 < \frac{\sigma^2}{2}\Big) \\ &= 1 - P\Big(\frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} \leq \frac{3(n-1)}{2}\Big) + P\Big(\frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} < \frac{n-1}{2}\Big) \\ &= 1 - P\Big(V \leq \frac{3(n-1)}{2}\Big) + P(V < \frac{n-1}{2}), \end{aligned}$$

donde, por el lema de Fischer,

$$V = \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Buscando en las tablas las probabilidades (a) y (b) y multiplicándolas, se obtiene la probabilidad del enunciado.

Ejercicio 4. *Sea $(X_1,\dots,X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim N(\mu,\sigma)$. Obtener una expresión para la probabilidad*

$$P\Big(\bar{X} > \mu + \frac{\sigma}{2} \,\Big|\, |S_c^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}\Big)$$

Resolución. No hay más que usar la independencia de $\bar{X}$ y S_c^2 junto con el ejercicio anterior:

$$P\Big(\bar{X} > \mu + \frac{\sigma}{2} \,\Big|\, |S_c^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}\Big) = \frac{P\Big(\bar{X} > \mu + \frac{\sigma}{2}, |S_c^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}\Big)}{P\Big(|S_c^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}\Big)} = P\Big(\bar{X} > \mu + \frac{\sigma}{2}\Big) = 1 - P\Big(Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}\Big),$$

donde

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Ejercicio 5. *Sean $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ las medias muestrales calculadas a partir de dos muestras independientes de tamaño n de una población con varianza σ^2. Hallar el menor valor de n que garantiza que*

$$P\Big(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| < \frac{\sigma}{5}\Big)$$

sea al menos 0.99*. Obtener dicho n mediante*

(a) *la desigualdad de Chebyshev;*

(b) *el TCL.*

Resolución.

(a) Al ser $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ las medias muestrales de dos muestras de una misma población X, entonces $E(\bar{X}_1) = E(\bar{X}_2) = E(X)$, luego $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = 0$, y por tanto, por la desigualdad de Chebyshev,

$$\begin{aligned} P\Big(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| < \frac{\sigma}{5}\Big) &= 1 - P\Big(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \ge \frac{\sigma}{5}\Big) \ge 1 - \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\frac{\sigma^2}{25}} = 1 - \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_1) + \mathrm{Var}(\bar{X}_2)}{\frac{\sigma^2}{25}} \\ &= 1 - \frac{\frac{2\sigma^2}{n}}{\frac{\sigma^2}{25}} = 1 - \frac{50}{n} \end{aligned}$$

Se necesita que

$$P\Big(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| < \frac{\sigma}{5}\Big) = 0.99 \iff 1 - \frac{50}{n} = 0.99 \iff n = \frac{50}{0.01} = 5000$$

(b) La variable aleatoria $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ tiene media 0 y varianza $\frac{2\sigma^2}{n}$, luego, por el teorema central del límite,

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{2}\sigma} \approx Z \sim N(0,1)$$

Tenemos que

$$P\Big(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| < \frac{\sigma}{5}\Big) = P\Big(-\frac{\sigma}{5} < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < \frac{\sigma}{5}\Big) = P\Big(-\frac{\sqrt{n}}{5\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{2}\sigma} < \frac{\sqrt{n}}{5\sqrt{2}}\Big) = 2P\Big(Z < \frac{\sqrt{n}}{5\sqrt{2}}\Big) - 1$$

Buscamos que

$$2P\Big(Z < \frac{\sqrt{n}}{5\sqrt{2}}\Big) - 1 = 0.99 \iff P\Big(Z < \frac{\sqrt{n}}{5\sqrt{2}}\Big) = 0.995$$

Observando la tabla se deduce que debe ser

$$\frac{\sqrt{n}}{5\sqrt{2}} = 2.58 \iff n = 50 \cdot 2.58^2 = 332.82$$

Por tanto, el menor n que ofrece el teorema central del límite es 333.

Ejercicio 6. *Sea $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim N(\mu = 0, \sigma = 2)$. Calcular*

$$P\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i^2 \geq 5.75\Big)$$

Resolución. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene

$$\frac{X_i}{2} \sim N(0,1)$$

Por tanto,

$$\frac{X_i^2}{4} \sim Ga\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)$$

Como la distribución gamma es reproductiva respecto del primer parámetro,

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5} X_i^2 \sim Ga\Big(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \chi_5^2$$

En consecuencia,

$$P\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i^2 \geq 5.75\Big) = P\Big(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5} X_i^2 \geq 1.4375\Big) = 1 - P\Big(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5} X_i^2 < 1.4375\Big)$$

Los valores más cercanos a 1.4375 que aparecen en la tabla de la distribución χ^2 con 5 grados de libertad son 1.1455 y 1.6103, con probabilidades 0.05 y 0.1, respectivamente. Podemos aproximar la probabilidad x de 1.4375 mediante interpolación lineal:

$$\frac{x - 0.05}{0.1 - 0.05} = \frac{1.4375 - 1.1455}{1.6103 - 1.1455} \iff x = \frac{(0.1 - 0.05)(1.4375 - 1.1455)}{1.6103 - 1.1455} + 0.05 \approx 0.08141$$

Por tanto,

$$P\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i^2 \geq 5.75\Big) \approx 1 - 0.08141 = 0.91859$$

Ejercicio 7. *Sea (X_1, X_2) una muestra aleatoria simple de $X \sim N(0,1)$. Encontrar la distribución de las siguientes variables aleatorias y calcular el percentil 35 de las mismas:*

(a) $\dfrac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}$

(b) $\dfrac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2}$

(c) $\dfrac{X_2 + X_1}{\sqrt{(X_1 - X_2)^2}}$

Resolución.

(a) Como $X_1 \sim N(0,1)$, entonces $-X_1 \sim N(0,1)$ y por tanto $X_2 - X_1 \sim N(0,2)$, luego

$$Z = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, \frac{1}{\sqrt{2}^2} \cdot 2) = N(0,1)$$

El percentil 35 es cualquier número real α verificando

$$P(Z \leq \alpha) = 0.35$$

Como 0.35 no está en la tabla de la distribución normal, hay que apañárselas de otra manera: por la simetría de la distribución normal, se tiene que

$$P(Z \leq \alpha) = 0.35 \iff P(Z \geq -\alpha) = 0.35 \iff 1 - P(Z < -\alpha) = 0.35 \iff P(Z < -\alpha) = 0.65$$

Ahora sí: de la tabla se deduce que $-\alpha \approx 0.39$, luego $\alpha \approx -0.39$ es el percentil buscado.

(b) Sabemos que $X_1 + X_2 \sim N(0,2)$ y $X_1 - X_2 \sim N(0,2)$, luego

$$\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \qquad \text{y} \qquad \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$$

En consecuencia,

$$\frac{(X_1 + X_2)^2}{2} \sim \chi_1^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{(X_1 - X_2)^2}{2} \sim \chi_1^2,$$

luego, usando que las variables $(X_1 + X_2)^2$ y $(X_1 - X_2)^2$ son independientes por serlo X_1 y X_2,

$$\frac{\frac{(X_1+X_2)^2}{2}}{\frac{(X_1-X_2)^2}{2}} = \frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2} \sim F_{1,1},$$

Según R, el percentil 35 es 0.3755248.

(c) Como

$$\frac{X_2 + X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1), \qquad \frac{(X_1 - X_2)^2}{2} \sim \chi_1^2$$

y las variables son independientes, entonces

$$T = \frac{\frac{X_2+X_1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(X_1-X_2)^2}{2}}} = \frac{X_2 + X_1}{\sqrt{(X_1 - X_2)^2}} \sim t_1$$

Por la simetría de la distribución t de Student, tenemos

$$P(T \leq \alpha) = 0.35 \iff P(T \geq -\alpha) = 0.35 \iff 1 - P(T < -\alpha) = 0.35 \iff P(T < -\alpha) = 0.65$$

Hallemos el percentil 65 mediante interpolación lineal a partir de los percentiles 60 y 75, que, por la tabla, se sabe que son 0.325 y 1. Se tiene que

$$\frac{65 - 60}{75 - 60} = \frac{-\alpha - 0.325}{1 - 0.325} \iff -\alpha = \frac{(65 - 60)(1 - 0.325)}{75 - 60} + 0.325 = 0.55$$

El percentil 35 sería, de forma aproximada, $\alpha = -0.55$.

Ejercicio 8. *Sea* $(X_1,\dots,X_{20})$ *una muestra aleatoria simple de una distribución* $X \sim N(0,1)$. *Sean*

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} X_i \qquad \bar{X}_2 = \frac{1}{8}\sum_{i=13}^{20} X_i$$

Para cada una de las siguientes variables aleatorias, indicar cuál es su distribución y obtener el percentil 40 de la distribución:

(a) $\frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)$

(b) $12\bar{X}_1^2 + 8\bar{X}_2^2$

Resolución.

(a) Por la propiedad reproductiva de la distribución normal, se tiene

$$\sum_{i=1}^{12} X_i \sim N(0,12)$$

Por tanto,

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} X_i \sim N\Big(0, \frac{1}{12^2}12\Big) = N\Big(0, \frac{1}{12}\Big)$$

Análogamente,

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{8}\sum_{i=13}^{20} X_i \sim N\Big(0, \frac{1}{8^2}8\Big) = N\Big(0, \frac{1}{8}\Big)$$

En consecuencia,

$$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 \sim N\Big(0, \frac{1}{12} + \frac{1}{8}\Big) = N\Big(0, \frac{5}{24}\Big),$$

luego

$$\frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \sim N\Big(0, \frac{5}{24\cdot 4}\Big) = N\Big(0, \frac{5}{96}\Big)$$

Tenemos entonces

$$Z = \frac{\sqrt{96}}{2\sqrt{5}}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \sim N(0,1)$$

El percentil 40 es cualquier número que verique

$$P\Big(\frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \le P_{40}\Big) = 0.4 \iff P\Big(Z \le \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}P_{40}\Big) = 0.4 \iff P\Big(Z < -\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}P_{40}\Big) = 0.6$$

De la tabla de la distribución normal se deduce que, aproximadamente,

$$-\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}P_{40} = 0.26 \iff P_{40} = -\frac{0.26\sqrt{5}}{4\sqrt{6}} \approx -0.05934$$

(b) Sabemos que

$$\bar{X}_1 \sim N\Big(0, \frac{1}{12}\Big) \qquad \text{y} \qquad \bar{X}_2 \sim N\Big(0, \frac{1}{8}\Big)$$

En consecuencia,

$$\sqrt{12}\bar{X}_1 \sim N(0,1) \qquad \text{y} \qquad \sqrt{8}\bar{X}_2 \sim N(0,1)$$

Por tanto,

$$(\sqrt{12}\bar{X}_1)^2 = 12\bar{X}_1^2 \sim \chi_1^2 \qquad \text{y} \qquad (\sqrt{8}\bar{X}_2)^2 = 8\bar{X}_2^2 \sim \chi_1^2,$$

luego

$$12\bar{X}_1^2 + 8\bar{X}_2^2 \sim \chi_2^2$$

En la tabla están los percentiles 25 y 50, que son, respectivamente, 0.5754 y 1.3863, así que hay que volver a interpolar linealmente:

$$\frac{40-25}{50-25} = \frac{P_{40} - 0.5754}{1.3863 - 0.5754} \iff P_{40} = \frac{(40-25)(1.3863-0.5754)}{50-25} + 0.5754 = 1.06194$$

Ejercicio 9. *Sean S_1^2 y S_2^2 las cuasivarianzas de dos muestras aleatorias simples de tamaños $n_1 = 5$ y $n_2 = 4$ de dos distribuciones normales que tienen varianza común σ^2 pero desconocida. Calcular la probabilidad*

$$P\Big(\Big\{\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{1}{5.2}\Big\} \cup \Big\{\frac{S_1^2}{S_2^2} > 6.25\Big\}\Big)$$

Resolución. Por el lema de Fischer, se sabe que

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$$

Por tanto, como ambas variables son independientes,

$$\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}} \frac{n_2-1}{n_1-1} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1} = F_{4,3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}}{\frac{(n_1-1)S^21}{\sigma^2}} \frac{n_1-1}{n_2-1} = \frac{S_2^2}{S_1^2} \sim F_{n_2-1,n_1-1} = F_{3,4}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
P\Big(\Big\{\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{1}{5.2}\Big\} \cup \Big\{\frac{S_1^2}{S_2^2} > 6.25\Big\}\Big) &= P\Big(\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{1}{5.2}\Big) + P\Big(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 6.25\Big) \\
&= P\Big(\frac{S_2^2}{S_1^2} > 5.2\Big) + P\Big(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 6.25\Big) \\
&= 2 - P\Big(\frac{S_2^2}{S_1^2} \leq 5.2\Big) - P\Big(\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq 6.25\Big) \\
&= 0.1545986,
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad se ha usado que los sucesos son disjuntos y en la última se han calculado las probabilidades con *R*.

Ejercicio 10. *Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim N(\mu, \sigma)$, siendo μ conocida y σ desconocida. Comparar las distribuciones en el muestreo, la media y la varianza de S_c^2 y del estadístico*

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

Resolución. Empecemos con S_c^2. Por el lema de Fischer,

$$\frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} = Ga\Big(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\Big)$$

Por tanto,

$$S_c^2 \sim Ga\Big(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2\sigma^2}\Big)$$

En consecuencia,
$$E(S_c^2) = \frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2\sigma^2}} = \sigma^2,$$
mientras que
$$\operatorname{Var}(S_c^2) = \frac{\frac{n-1}{2}}{(\frac{n-1}{2\sigma^2})^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$
Por otra parte, para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, como $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$, entonces
$$\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1),$$
luego
$$\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2,$$
y por tanto,
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2 = Ga\Big(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\Big),$$
deduciéndose que
$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim Ga\Big(\frac{n}{2}, \frac{n}{2\sigma^2}\Big)$$
En consecuencia,
$$E(T) = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2\sigma^2}} = \sigma^2 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Var}(T) = \frac{\frac{n}{2}}{(\frac{n}{2\sigma^2})^2} = \frac{2\sigma^4}{n}$$

Ejercicio 11. *Sea X una variable aleatoria con distribución $N(\mu_1,\sigma_1)$, donde μ_1 es conocida y σ_1 es desconocida, y sea Y una variable aleatoria independiente de X y con distribución $N(\mu_2,\sigma_2)$, siendo μ_2 y σ_2 desconocidas. Determinar un estadístico razonable para obtener información sobre el cociente σ_1^2/σ_2^2 basado en muestras aleatorias independientes de X e Y, de tamaños n_1 y n_2, respectivamente. Obtener la distribución en el muestreo.*

Resolución. Como consecuencia del lema de Fischer, se tiene que
$$F = \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$
Por otra parte, si $F \sim F_{n,m}$ y $m > 2$, se sabe que
$$E(F) = \frac{m}{m-2}$$
Por tanto, si fuese $n_2 - 1 > 2$, es decir, $n_2 > 3$, se tendría
$$E\Big(\frac{S_1^2}{S_2^2}\Big) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}E\Big(\frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}\Big) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{n_2-1}{n_2-3} \iff \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = E\Big(\frac{S_1^2}{S_2^2}\Big)\frac{n_2-3}{n_2-1}$$
Se concluye que S_1^2/S_2^2 parece *un estadístico razonable para obtener información sobre σ^1/σ_2^2*, lo que sea que esto signifique.