Examen final de Ecuaciones Diferenciales II
Viernes, 10 de noviembre de 2023

Los apartados que comienzan por (V-F) piden decidir si el enunciado que sigue es verdadero o falso. En esos casos, también se pide justificar la respuesta que se dé.

---

1. *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

   (a) *¿Qué se entiende por que la ecuación* $x' = f(t,x)$ *tenga la propiedad de unicidad global en una región* $D \subset \Omega$*?*

   (b) *Probar el teorema de unicidad global:* si $D \subset \Omega$ es una región tal que $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(x, D)$, entonces la ecuación (E) $x' = f(t,x)$ tiene la propiedad de unicidad global en D.

(a) Que la ecuación (E) $x' = f(t,x)$ tenga la propiedad de unicidad global en una región $D \subset \Omega$ significa que si $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^n$ y $\psi \colon J \to \mathbb{R}^n$ son soluciones de (E) con gráfica en D y existe $t_0 \in I \cap J$ tal que $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$, entonces $\varphi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in I \cap J$.

(b) Para la prueba, se va a hacer uso de la siguiente desigualdad de Gronwall: *si* $u, v \colon I \to [0, \infty)$ *son funciones continuas no negaivas y para todo* $t \in I$ *se verifica*

$$u(t) \le k + \left| \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds, \right|$$

donde $t_0 \in I$ *y* $k \ge 0$*, entonces se tiene*

$$u(t) \le k e^{\left|\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right|}$$

para todo $t \in I$.

Comienza la demostración como tal: fijemos una norma $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$. Sea $t \in I \cap J$ y supóngase que $t > t_0$ (el otro caso se demuestra de manera totalmente análoga). Como $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(x, D)$ y $K_1 = [t_0, t] \times \varphi([t_0, t]), K_2 = [t_0, t] \times \psi([t_0, t])$ son compactos contenidos en D (pues φ y ψ tienen gráfica en D), entonces $f \in \mathrm{Lip}(x, K)$, donde $K = K_1 \cup K_2$, luego existe $L \ge 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L\|x - y\| \tag{$*$}$$

para todos $(t,x), (t,y) \in K$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\|\varphi(t) - \psi(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,ds + \cancel{\varphi(t_0)} - \int_{t_0}^{t} \psi'(s)\,ds - \cancel{\psi(t_0)} \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} (\varphi'(s) - \psi'(s))\,ds \right\| \\ &\le \int_{t_0}^{t} \|\varphi'(s) - \psi'(s)\|\,ds = \int_{t_0}^{t} \|f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\|\,ds \overset{(*)}{\le} \int_{t_0}^{t} L\|\varphi(s) - \psi(s)\|\,ds\end{aligned}$$

En la primera igualdad se ha utilizado que, por ser $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$, φ y ψ son soluciones de la ecuación integral asociada a (E). Así, se verifican las hipótesis de la desigualdad de Gronwall con $u(t) = \|\varphi(t) - \psi(t)\|$, $v(t) = L$ (que son continuas y no negativas en $I \cap J$) y $k = 0$. Por tanto, se tiene

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \le 0 e^{L(t - t_0)} = 0,$$

luego $\varphi(t) = \psi(t)$.

2. *(V-F) El problema siguiente tiene solución única definida en* $(-1,\infty)$*:*

$$(P)\ \begin{cases} x' = \log(1+t) - |\cos(ty)|, & x(1) = 3 \\ y' = xe^t - 1 + \operatorname{sen}^2(1-ty), & y(1) = \pi \end{cases}$$

La afirmación es verdadera; probémoslo. Sea $D = (-1,\infty)\times\mathbb{R}^2$ y sea $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(t,x,y) = (f_1(t,x,y), f_2(t,x,y))$, con $f_1(t,x,y) = \log(1+t) - |\cos(ty)|$, $f_2(t,x,y) = xe^t - 1 + \operatorname{sen}^2(1-ty)$. Veamos que $f \in \mathrm{LipG}(x,D,\mathbb{R}^2)$, o, equivalentemente, que $f_1, f_2 \in \mathrm{LipG}(x,D,\mathbb{R})$ (nótese que D es una banda vertical).

(i) Si $(t,x,y),(t,x',y') \in D$, entonces

$$\begin{aligned}|f_1(t,x,y) - f_1(t,x',y')| &= |\log(1+t) - |\cos(ty)| - \log(1+t) + |\cos(ty')|| = ||\cos(ty)| - |\cos(ty')|| \\ &\leq |\cos(ty) - \cos(ty')| \overset{(*)}{\leq} |ty - ty'| = |t||y-y'| \leq |t|\|(x,y)-(x',y')\|_\infty\end{aligned}$$

Al ser $L_1(t) = |t|$ no negativa y acotada en cualquier subintervalo compacto de $(-1,\infty)$, se tiene $f_1 \in \mathrm{LipG}(x,D,\mathbb{R})$.

Probemos la desigualdad $(*)$. Sea I el intervalo compacto de extremos ty y ty', y sea $g\colon I \to \mathbb{R}$ la función definida mediante $g(x) = \cos(x)$. Como g es continua y derivable, por el teorema del valor medio, existe $c \in \mathring{I}$ tal que

$$|g(ty) - g(ty')| = |g'(c)||ty - ty'|,$$

es decir,

$$|\cos(ty) - \cos(ty')| = |-\operatorname{sen}(c)||ty - ty'| \leq |ty - ty'|,$$

donde se ha usado que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $(t,x,y),(t,x',y') \in D$, entonces

$$\begin{aligned}|f_2(t,x,y) - f_2(t,x',y')| &= |xe^t - 1 + \operatorname{sen}^2(1-ty) - x'e^t + 1 - \operatorname{sen}^2(1-ty')| \\ &\leq e^t|x-x'| + |\operatorname{sen}^2(1-ty) - \operatorname{sen}^2(1-ty')| \overset{(**)}{\leq} e^t|x-x'| + 2|t||y-y'| \\ &\leq (e^t + 2|t|)\|(x,y)-(x',y')\|_\infty\end{aligned}$$

Al ser $L_2(t) = e^t + 2|t|$ no negativa y acotada en cualquier subintervalo compacto de $(-1,\infty)$, se tiene $f_2 \in \mathrm{LipG}(x,D,\mathbb{R})$.

Probemos la desigualdad $(**)$. Sea I el intervalo compacto de extremos $1-ty$ y $1-ty'$, y sea $g\colon I \to \mathbb{R}$ la función definida mediante $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)$. Como g es continua y derivable, por el teorema del valor medio, existe $c \in \mathring{I}$ tal que

$$|g(1-ty) - g(1-ty')| = |g'(c)||1 - ty - 1 + ty'|,$$

es decir,

$$|\operatorname{sen}^2(1-ty) - \operatorname{sen}^2(1-ty')| = |2\operatorname{sen}(c)\cos(c)||ty' - ty| \leq 2|ty - ty'| = 2|t||y-y'|,$$

donde se ha usado que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ y $|\cos(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por tanto, como $f \in \mathcal{C}(D,\mathbb{R}) \cap \mathrm{LipG}(x,D,\mathbb{R}^2)$ y $(1,3,\pi) \in D$, por el TEUG, el problema (P) tiene solución única en $(-1,\infty)$.

---

3. *(V-F) El problema* (P) $\{x'' = \cos(x); x(0) = 1\}$ *tiene infinitas soluciones definidas en todo* $\mathbb{R}$.

La afirmación es verdadera; probémoslo. Para ello, se va a demostrar que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, el problema $(\widetilde{P})$ $\{x'' = \cos(x);\ x(0) = 1;\ x'(0) = x_0\}$ tiene solución única en $\mathbb{R}$, o, equivalentemente, que el sistema

$$(S)\ \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = \cos(z_1) \\ z_1(0) = 1,\ z_2(0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución única en $\mathbb{R}$. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(t,z_1,z_2) = (f_1(t,z_1,z_2), f_2(t,z_1,z_2)) = (z_2, \cos(z_1))$$

Veamos que $f \in \mathrm{LipG}(x,\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ (nótese que $\mathbb{R}^3$ es una banda vertical), o, equivalentemente, que $f_1, f_2 \in \mathrm{LipG}(x,\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

(i) Si $(t,z_1,z_2),(t,z_1',z_2') \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$|f_1(t,z_1,z_2) - f_1(t,z_1',z_2')| = |z_2 - z_2'| \leq \|(z_1,z_2) - (z_1',z_2')\|_\infty$$

Como $L_1(t) = 1$ es una función no negativa y acotada en cada subintervalo compacto de $\mathbb{R}$, entonces $f_1 \in \mathrm{LipG}(x,\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

(ii) Si $(t,z_1,z_2),(t,z_1',z_2') \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$|f_2(t,z_1,z_2) - f_2(t,z_1',z_2')| = |\cos(z_1) - \cos(z_2)| \overset{(*)}{\leq} |z_1 - z_2| \leq \|(z_1,z_2) - (z_1',z_2')\|_\infty$$

Como $L_2(t) = 1$ es una función no negativa y acotada en cada subintervalo compacto de $\mathbb{R}$, entonces $f_2 \in \mathrm{LipG}(x,\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. Para la desigualdad $(*)$, véase el ejercicio anterior.

En consecuencia, como $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{LipG}(x,\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$, en virtud del TEUG, el sistema (S) tiene solución única en $\mathbb{R}$, luego el problema $(\widetilde{P})$ también. Así, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, obtenemos una solución distinta de (P) en $\mathbb{R}$, concluyéndose que (P) tiene infinitas soluciones definidas en $\mathbb{R}$.

---

4. *(V-F) Las soluciones no prolongables de* (E) $x' = \sqrt{t} + \sqrt{x}$ *están definidas en intervalos compactos.*

La afirmación es falsa; probémoslo. Sea $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ una solución no prolongable de (E) y, por reducción al absurdo, supóngase que $I = [t_0,t_1]$, con $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$. Considérese el problema

$$(P)\ \begin{cases} x' = \sqrt{t} + \sqrt{x} \\ x(t_1) = x_1, \end{cases}$$

donde $x_1 = \varphi(t_1)$. Veamos primero que $x_1 > 0$. Como $\varphi'(t) = \sqrt{t} + \sqrt{\varphi(t)} > 0$ para todo $t \in (t_0,t_1]$ (solo podría anularse en el caso $t_0 = 0, \varphi(t_0) = 0$ y $t = t_0$), entonces φ es estrictamente creciente en $(t_0,t_1]$, y como $\varphi(t) \geq 0$ para todo $t \in [t_0,t_1]$, entonces $\varphi(t_1) = x_1 > 0$.

Sea $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$ y sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(t,x) = \sqrt{t} + \sqrt{x}$. Como $t_1 > 0$, para cualquier $a > 0$ se tiene que $[t_1, t_1 + a] \subset [0,\infty)$, y como $x_1 > 0$, existe $b > 0$ tal que $x_1 - b \geq 0$ y, por tanto, $[x_1 - b, x_1 + b] \subset [0,\infty)$. Así,

$$Q_{a,b}^+ = [t_1, t_1 + a] \times [x_1 - b, x_1 + b] \subset D$$

Como además $f \in \mathcal{C}(Q_{a,b}^+, \mathbb{R})$ (pues $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$), entonces, por el TEL, el problema (P) tiene solución local a la derecha de t_1, es decir, existe una solución ψ de (P) definida en un intervalo de la forma $[t_1, t_1 + h]$, con $h > 0$. Definamos la función $\widetilde{\varphi}\colon [t_0, t_1 + h] \to \mathbb{R}$ mediante

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ \psi(t) & \text{si } t \in [t_1, t_1 + h] \end{cases}$$

Como φ, ψ son soluciones de (E) y $\varphi(t_1) = \psi(t_1) = x_1$, entonces, por el lema del pegamento, $\widetilde{\varphi}$ es solución de (E). Pero $[t_0, t_1 + h] \supsetneq [t_0, t_1]$ y $\widetilde{\varphi}|_{[t_0,t_1]} = \varphi$, luego $\widetilde{\varphi}$ es una prolongación estricta de φ como solución de (E), lo que contradice que φ sea una solución no prolongable de (E).

---

5. *(V-F) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Entonces la función $\varphi\colon [-1, 0)$ dada por $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ no puede ser solución de (E) $x' = f(t, x)$.*

La afirmación es falsa; probémoslo. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(t, x) = -x^2$. Es claro que f es continua. Además, φ es solución de la ecuación (E) $x' = f(t, x)$, pues su gráfica está contenida en $\mathbb{R}^2$ (evidentemente), es derivable en $[-1, 0)$ y, para todo $t \in [-1, 0)$,

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} = -\varphi(t)^2 = f(t, \varphi(t))$$

---

6. *Probar que el problema (P) $\{x' = \frac{x}{t} + \operatorname{sen}(x^2); x(1) = 1\}$ tiene una única solución φ, definida en un intervalo de la forma $I = (0, b)$ con $1 < b \leq \infty$. Probar asimismo que $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0$.* Ayuda: $-1 \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq 1$ *para todo* $\theta \in \mathbb{R}$.

Considérese la función dada por $f(t, x) = \frac{x}{t} + \operatorname{sen}(x^2)$, que está bien definida en $D = (0, \infty) \times \mathbb{R}$. Se tiene que $(1, 1) \in \mathring{D}$ y $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$, luego $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(x, D, \mathbb{R})$. Por el TEUL, el problema (P) tiene solución local única, y como también se verifica la PUG (pues se satisfacen las hipótesis del TUG al tenerse $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(x, D, \mathbb{R})$), entonces dicha solución puede extenderse de manera única a una solución maximal $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$.

Obsérvese, por otra parte, que la función nula es solución de (E) $x' = \frac{x}{t} + \operatorname{sen}(x^2)$ pero no de (P). Como se verifica la PUG en D, entonces la gráfica de φ no corta la de la función nula, o, en otras palabras, $\varphi(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Pero $\varphi(1) = 1 > 0$, luego, por continuidad, debe ser $\varphi(t) > 0$ para todo $t \in I$.

Además, al ser D un abierto de $\mathbb{R}^2$, por el resultado sobre soluciones con gráficas en abiertos, se tiene que $I = (a, b)$, con $0 \leq a < 1 < b \leq \infty$. El mismo resultado afirma que si t^* es un extremo finito de I, entonces se verifica una de las siguientes circunstancias:

(i) $\lim_{t \to t^*} |\varphi(t)| = \lim_{t \to t^*} \varphi(t) = \infty$.

(ii) La gráfica de φ tiene un punto límite para $t \to t^*$, y este y todos los puntos límite de la gráfica de φ para $t \to t^*$ están en $\partial D = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Veamos que $a = 0$. Como a es un extremo finito de I, entonces se verifica (i) o (ii). Por reducción al absurdo, supóngase que se tiene (i). Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (a, \delta]$ se verifica $\varphi(t) > t$, luego $\frac{\varphi(t)}{t} > 1$, y, por tanto, para todo $t \in (a, \delta]$

$$\varphi'(t) = \frac{\varphi(t)}{t} + \operatorname{sen}(\varphi(t)^2) \geq \frac{\varphi(t)}{t} - 1 > 0,$$

luego φ es estrictamente creciente en $(a,\delta]$, que es imposible porque $\lim_{t\to a^+}\varphi(t)=\infty$. Por tanto, tiene que darse el caso (ii). Ahora bien, cualquier punto límite de la gráfica de φ para $t\to a$ es de la forma (a,A), y como debe ser $(a,A)\in\partial D=\{0\}\times\mathbb{R}$, entonces $a=0$.

Para demostrar que $\lim_{t\to 0^+}\varphi(t)=0$, considérese el problema (Q) $\{x'=\frac{x}{t}-1; x(1)=1\}$. La ecuación (E) $x'=\frac{x}{t}-1$ es una ecuación diferencal lineal no homogénea de primer orden, así que (Q) tiene solución única, y la solución general de (E) es $\psi(t)=\psi_h(t)+\psi_p(t)$, donde ψ_h es la solución general de (H) $x'=\frac{x}{t}$, y ψ_p es una solución particular de (E). La solución general de (H) es

$$\psi_h(t)=ce^{\int\frac{1}{t}\,dt}=ce^{\log(t)}=ct,\quad c\in\mathbb{R}$$

Se va a tratar de hallar una solución particular de la forma $\psi_p(t)=c(t)t$. Se tendría entonces $\psi_p'(t)=c'(t)t+c(t)$, luego

$$\begin{aligned}\psi_p \text{ es solución de } (E) &\iff \psi_p'(t)=\frac{\psi_p(t)}{t}-1 \iff c'(t)t+c(t)=c(t)-1 \iff c'(t)=-\frac{1}{t}\\ &\iff c(t)=-\log(t)+d,\quad d\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $d=0$, se obtiene la solución particular $\psi_p(t)=-\log(t)t$, $t\in(0,\infty)$. Por tanto, la solución general de (E) es

$$\psi(t)=ct-\log(t)t,\quad c\in\mathbb{R}$$

Como buscamos que $\psi(1)=1$, debe tomarse $c=1$, con lo que $\psi(t)=t-\log(t)t$ es la única solución de (Q) en $(0,\infty)$.

Obsérvese que $f(t,x)=\frac{x}{t}+\operatorname{sen}(x^2)\geq g(t,x)=\frac{x}{t}-1$ para todo $(t,x)\in D$ y $\varphi(1)=\psi(1)$. Por tanto, por el teorema de comparación de soluciones de ecuaciones escalares, para todo $t\in(0,1]$ se tiene que $0<\varphi(t)\leq\psi(t)$. Nótese que $\lim_{t\to 0^+}\log(t)t=0$, así que, tomando límites cuando $t\to 0^+$ en la desigualdad anterior, se obtiene

$$\lim_{t\to 0^+}\varphi(t)=0$$

---

7. *Resolver el siguiente problema de datos iniciales:*

$$(P)\begin{cases} x'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2te^t\\-3t^2e^t\\0\end{pmatrix}\\ x(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\end{cases}$$

El sistema asociado al problema dado es un sistema diferencial lineal de primer orden de coeficientes constantes, así que (P) tiene solución única en $\mathbb{R}$, y viene dada por

$$\varphi(t)=e^{(t-t_0)A}x^0+\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)\,ds,$$

donde

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\qquad b(t)=\begin{pmatrix}2te^t\\-3t^2e^t\\0\end{pmatrix}\qquad t_0=0\qquad x^0=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

El problema se reduce entonces al cálculo de e^{tA}. Para ello, se va a tratar de hallar una matriz de Jorden J semejante a A. En primer lugar, se calculan los autovalores de A. Se tiene que

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \iff (1-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0,$$

así que los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, de multiplicidades $m(\lambda_1) = 2$ y $m(\lambda_2) = 1$. Por tanto, debe ser $\dim(\ker(A+\mathrm{Id})) = 1$, pero hay que hallar $\dim(\ker(A-\mathrm{Id}))$. Para ello, va a resolverse el sistema $(A - \mathrm{Id})X = 0$:

$$(A-\mathrm{Id})X = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff x_3 = 0$$

En consecuencia, $\dim(\ker(A - \lambda\mathrm{Id})) = 2$. Con toda esta información, se sabe que J contiene tantas cajas de Jordan del tipo $D_r(\lambda_j)$ como indique $\dim(\ker(A - \lambda_j\mathrm{Id}))$, y la suma de los tamaños de estas cajas tiene que ser $m(\lambda_j)$, $j = 1,2$. Así, hay una caja del tipo $D_r(-1)$ de tamaño 1, y dos cajas del tipo $D_r(1)$ de tamaño 1. Por tanto,

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, hay que encontrar la matriz de paso, esto es, la matriz P inversible tal que $AP = PJ$. Se tiene que

$$\begin{aligned} AP = PJ &\iff A\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} J \iff \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & AP_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} (A+\mathrm{Id})P_1 = 0 \\ (A-\mathrm{Id})P_2 = 0 \\ (A-\mathrm{Id})P_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Se observa que P_1 es solución del sistema $(A + \mathrm{Id})X = 0$, así que se resuelve dicho sistema y se escoge una solución cualquiera:

$$(A+\mathrm{Id})X = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 & = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases}$$

Podemos tomar entonces

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, P_2 y P_3 son soluciones linealmente independientes (pues P ha de ser inversible) del sistema $(A - \mathrm{Id})X = 0$, que ya ha sido resuelto antes, así que puede tomarse, por ejemplo,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 2se^s \\ -3s^2e^s \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} & e^{t-s} - e^{s-t} \\ 0 & 0 & e^{s-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2se^s \\ -3s^2e^s \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2se^t \\ -3s^2e^t \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} s^2e^t \\ -s^3e^t \\ 0 \end{pmatrix} \right]_0^t \\
&= \begin{pmatrix} t^2e^t + e^t \\ -t^3e^t + e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$