Título del tfg en español

Título del tfg en inglés

Trabajo Fin de Grado en Matemáticas

Universidad de Málaga

Autor: (Nombre y apellidos)

Área de conocimiento y/o departamento:

Fecha de presentación: (mes y año)

Tema:

Tipo: (trabajo de revisión bibliográfica, de iniciación a la investigación,...)

Modalidad: (individual o grupal)

Número de páginas (sin incluir introducción, bibliografía ni anexos):

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD DEL TFG

D./Dña. *(nombre del autor)*, con DNI (NIE o pasaporte) *(DNI, NIE o pasaporte)*, estudiante del Grado en *(titulación)* de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga, **DECLARO:**

Que he realizado el Trabajo Fin de Grado titulado "*(Título)*" y que lo presento para su evaluación. Dicho trabajo es original y todas las fuentes bibliográficas utilizadas para su realización han sido debidamente citadas en el mismo.

De no cumplir con este compromiso, soy consciente de que, de acuerdo con la normativa reguladora de los procesos de evaluación de los aprendizajes del estudiantado de la Universidad de Málaga de 23 de julio de 2019, esto podrá conllevar la calificación de suspenso en la asignatura, sin perjuicio de las responsabilidades disciplinarias en las que pudiera incurrir en caso de plagio.

Para que así conste, firmo la presente en Málaga, el *(fecha)*

Fdo:..

Índice general

El Título aquí

Resumen

Texto.

Palabras clave:

PONER AQUÍ LAS PALABRAS CLAVE.

El Título (en inglés) aquí

Abstract

Text.

Key words:

KEY WORDS.

Introducción

Las series de Fourier y el estudio de su convergencia han constituido un tema central en el desarrollo del Análisis Matemático de los siglos XIX y XX. El interés por representar una función arbitraria mediante una serie trigonométrica aparece a finales del siglo XVIII e inicios del siglo XIX, cuando se estudiaban fenómenos físicos como la vibración en una cuerda o la propagación del calor en un cuerpo. Joseph Fourier fue el primero que trató de probar que toda función admite una representación en serie trigonométrica, pero la falta de precisión formal en sus resultados publicados en 1807 y 1811 provocó cierto escepticismo en los matemáticos de la época. Aun así, este problema de representar funciones mediante series trigonométricas tuvo una influencia considerable en la evolución de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático, poniendo de manifiesto la necesidad de definir con precisión las ideas de función, convergencia, integral o suma de series.

En un principio, se pensaba que la continuidad de una función era suficiente para que su serie de Fourier convergiese puntualmente a dicha función. Sin embargo, en 1873, Paul du Bois-Reymond consiguió demostrar que existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto. Más adelante, en 1913, Nikolai Lusin conjeturó que la serie de Fourier de una función de L^2 converge en casi todo punto. Esta cuestión se mantuvo abierta durante más de cuarenta años. En 1923, Andrei Kolmogorov consiguió resolverla para los espacios L^1, probando que existe una función de L^1 cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto. Tres años después, el propio Kolmogorov consiguió llevar la divergencia a todo punto. La conjetura de Lusin no obtuvo respuesta hasta 1965, cuando Lennart Carleson demostró que dicha conjetura era cierta. Poco después, Richard Hunt extendió el resultado de Carleson a los espacios L^p con $1 < p < \infty$.

A principios del siglo XX también comenzó a desarrollarse la teoría de los espacios de Hilbert, obteniéndose resultados sobre los espacios L^2 y l^2 que condujeron a la prueba de que la serie de Fourier de una función de L^2 converge en norma a dicha función. Esto motivó el estudio del problema análogo en los espacios L^p para $p < \infty$. En 1918, Stefan Banach y Hugo Steinhaus probaron que para $p = 1$, la respuesta al problema de la convergencia en norma de las series de Fourier es negativa. Posteriormente, en 1923, Marcel Riesz consiguió demostrar que para $1 < p < \infty$, la respuesta es afirmativa.

Este trabajo se centra en el estudio riguroso de los dos tipos de convergencia de series de Fourier mencionados anteriormente: la convergencia puntual y la convergencia en L^p.

En el capítulo 1 se establecen los preliminares necesarios para el desarrollo del trabajo. En concreto, se estudian brevemente los conceptos necesarios para definir las series de Fourier, como los espacios L^p, los coeficientes de Fourier o los núcleos de Dirichlet. También se enuncian varios resultados que son utilizados en capítulos posteriores y que han sido probados en otras asignaturas del grado. Entre ellos se encuentran la desigualdad de Hölder, el teorema de Riesz-Fischer o el principio del módulo máximo para funciones holomorfas. Además, se repasan herramientas del Análisis Funcional como la norma de aplicaciones lineales y continuas, los espacios duales o el teorema de la acotación uniforme.

El capítulo 2 trata sobre la convergencia puntual de las series de Fourier, y consta de tres resultados principales. Primero se prueba que existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto. Para ello, no seguiremos el mismo camino que originalmente siguió Du Bois-Reymond, sino que damos una demostración no constructiva que se basa en el teorema de la acotación uniforme. En segundo lugar, demostramos que existe una función de L^1 cuya serie de Fourier diverge en todo punto. Esta demostración requiere el desarrollo previo de varios lemas que ocupan el grueso del capítulo 2. Finalmente, se enuncia sin demostración el teorema de Carleson-Hunt.

El capítulo 3 aborda la convergencia en L^p de las series de Fourier. Se estudian por separado los casos $p = 1$, $p = \infty$ y $1 < p < \infty$. El caso $p = 1$ se deduce del teorema de la acotación uniforme, y el caso $p = \infty$, de la relación entre la norma de L^∞ y la convergencia uniforme. El caso $1 < p < \infty$ se demuestra en tres pasos: primero se prueba para p par, luego se prueba para $p > 2$ usando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin, y finalmente se prueba para $1 < p < 2$ mediante un argumento de dualidad.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo recoge definiciones y resultados básicos estudiados en las asignaturas de Análisis Real, Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis de Fourier.

1.1. Espacios L^p

En esta sección introducimos brevemente los espacios $L^p(\mathbb{T})$ y l^p. En primer lugar, si $1 \leq p < \infty$, se define

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{T}) = \Big\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es medible, } 2\pi\text{-periódica y tal que } \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt < \infty \Big\}.$$

En este conjunto, se define la relación $\sim$ como sigue: si $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, $f \sim g$ si y solo si $f = g$ en casi todo punto. Esta relación resulta ser de equivalencia, y el conjunto cociente se denota

$$L^p(\mathbb{T}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{T}) / \sim .$$

Junto con la suma y el producto por escalares habituales, $L^p(\mathbb{T})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$. Además, la aplicación $\| \cdot \|_p \colon L^p(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma sobre $L^p(\mathbb{T})$, y el espacio normado $(L^p(\mathbb{T}), \| \cdot \|_p)$ es de Banach. En particular, para $p = 2$, la norma anterior proviene del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon L^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\langle f, g \rangle = \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} \, dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, definimos

$$\mathcal{L}^\infty(T) = \Big\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es medible, } 2\pi\text{-periódica y tal que } \sup_{x \in \mathbb{R}} \text{es} \, |f(x)| < \infty \Big\},$$

y se denota

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \mathcal{L}^\infty(T) / \sim ,$$

donde $\sim$ es la relación definida como antes: si $f, g \in \mathcal{L}^\infty(T)$, $f \sim g$ si y solo si $f = g$ en casi todo punto. Esta relación también es de equivalencia, y junto con la suma y el producto por escalares habituales, $L^\infty(\mathbb{T})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$. Por último, la aplicación $\|\cdot\|_\infty\colon L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{es}\, |f(x)|$$

es una norma sobre $L^\infty(\mathbb{T})$, y el espacio normado $(L^\infty(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ también es de Banach.

Los espacios $L^p(\mathbb{T})$ son espacios de medida finita, y por tanto se tiene la cadena de contenciones

$$L^\infty(\mathbb{T}) \subset \ldots \subset L^q(T) \subset \ldots \subset L^p(\mathbb{T}) \subset \ldots \subset L^1(\mathbb{T}),$$

siendo $1 \leq p < q \leq \infty$. Además, los conjuntos

$$\mathcal{C}(\mathbb{T}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua y } 2\pi\text{-periódica}\},$$
$$\mathcal{C}^k(\mathbb{T}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es de clase } k \text{ y } 2\pi\text{-periódica}\},$$
$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es de clase } \infty \text{ y } 2\pi\text{-periódica}\},$$

son densos en $L^p(\mathbb{T})$, con $1 \leq p \leq \infty$. Si $1 \leq p < \infty$, también es denso en $L^p(\mathbb{T})$ el conjunto

$$S = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es medible, simple y } 2\pi\text{-periódica}\}.$$

Recordamos la desigualdad de Hölder y un resultado que relaciona la convergencia en $L^p(\mathbb{T})$ con la convergencia en casi todo punto.

Teorema 1.1.1 (Desigualdad de Hölder). *Sean p y p' exponentes conjugados con $1 \leq p, p' \leq \infty$. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$, entonces $fg \in L^1(\mathbb{T})$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Teorema 1.1.2. *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$. Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ y sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones de $L^p(\mathbb{T})$ que converge a f en $L^p(\mathbb{T})$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ que converge a f en casi todo punto.*

Introducimos ahora los espacios l^p. Todas las sucesiones consideradas en estos espacios tendrán índices en $\mathbb{Z}$. En primer lugar, si $1 \leq p < \infty$, se define

$$l^p = \Big\{ \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \mid a_k \in \mathbb{C} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ y } \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^p < \infty \Big\}.$$

Resulta que l^p es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$, y la aplicación $\|\cdot\|_{l^p}\colon l^p \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^p} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma sobre l^p. En particular, para $p = 2$, esta norma proviene del producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2}\colon l^2 \times l^2 \to \mathbb{C}$ definido por

$$\langle \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \rangle_{l^2} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \overline{b_k} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, definimos l^∞ como el conjunto de las sucesiones de números complejos que son acotadas. También se tiene que l^∞ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$, y que la aplicación $\|\cdot\|_{l^\infty}\colon l^\infty \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^\infty} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|$$

es una norma sobre l^∞.

1.2. Series de Fourier

Estudiamos a continuación algunas nociones básicas sobre coeficientes de Fourier y series de Fourier.

Definición 1.2.1. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, se definen los *coeficientes de Fourier de f* como

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

La *serie de Fourier de f* es la serie formal

$$Sf(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de f se va a denotar por S_nf. Al tratarse de una serie con índices enteros, esta suma parcial es

$$S_nf(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

Llamando $a_0(f) = 2c_0(f)$, $a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f)$ y $b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f))$, la serie de Fourier de f también puede escribirse como

$$Sf(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\,\mathrm{sen}(kx)),$$

y la suma parcial n-ésima, como

$$S_nf(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\,\mathrm{sen}(kx)).$$

Se demuestra que

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \qquad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},\\ b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(kt)\,dt, \qquad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En general, una función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$F(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

con $c_n \neq 0$ o $c_{-n} \neq 0$, se dice que es un *polinomio trigonométrico de grado n*. Denotamos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todos los polinomios trigonométricos.

Definición 1.2.2. Dado $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, a la función $D_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

se le denomina *núcleo de Dirichlet de orden n*.

Se sabe que los núcleos de Dirichlet son funciones pares, continuas y 2π-periódicas, así que están en $L^1(\mathbb{T})$. Además, toman valores reales y para todo $t \in [-\pi, \pi]$ se verifica

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } t = 0, \\ \dfrac{\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)}{\operatorname{sen}(\frac{t}{2})} & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

Haciendo uso de los núcleos de Dirichlet, la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ se puede escribir como

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t)\, dt, \tag{1.2.3}$$

o también como

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt, \tag{1.2.4}$$

es decir, $S_n f = f * D_n$.

Respecto a la convolución de funciones de $L^1(\mathbb{T})$, se sabe que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $g \in L^p(\mathbb{T})$, con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f * g$ está definida en casi todo punto de $\mathbb{R}$. Tras extenderla a todo $\mathbb{R}$, se tiene que $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ y que

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

También se conoce que si $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, entonces $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$. Por tanto, si $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$, se tiene que $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$.

Definición 1.2.5. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a la función $K_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

se le denomina *núcleo de Fejér de orden n.*

Los núcleos de Fejér poseen propiedades similares a los de Dirichlet. Son funciones pares, continuas y 2π-periódicas que toman valores reales no negativos y que verifican, para $t \in [-\pi, \pi]$,

$$K_n(t) = \begin{cases} n+1 & \text{si } t = 0, \\ \dfrac{1}{n+1} \dfrac{\operatorname{sen}^2(\frac{n+1}{2}t)}{\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})} & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

Como los núcleos de Dirichlet son polinomios trigonométricos de término constante 1, los núcleos de Fejér también. Además,

$$\|K_n\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = 1.$$

Tomemos $f \in L^1(\mathbb{T})$ y consideremos la sucesión de medias de Cesàro de f, $\{\sigma_n f\}_{n=0}^{\infty}$, donde

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_n f(x).$$

Entonces

$$\sigma_n f(x) = f * K_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t)\, dt,$$

y se tiene el resultado siguiente.

Teorema 1.2.6. *Sea $p \in \overline{\mathbb{R}}$ con $1 \leq p \leq \infty$ y sea $f \in L^p(\mathbb{T})$.*

(a) *Si $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n f - f\|_p = 0.$$

(b) *Si $p = \infty$ y $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n f - f\|_\infty = 0.$$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ son tales que $c_k(f) = c_k(g)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\sigma_n f(x) = \sigma_n g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y todo $x \in \mathbb{R}$, y de la unicidad del límite en $L^1(\mathbb{T})$ se deduce el resultado que sigue.

Corolario 1.2.7. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ son tales que $c_k(f) = c_k(g)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces $f = g$ en casi todo punto.*

Enunciamos a continuación algunos resultados relacionados con las series de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$.

Teorema 1.2.8 (Teorema de Riesz-Fischer). *La aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi \colon L^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow l^2 \\ f &\longmapsto \Phi(f) = \{c_k(f)\}_{k\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

es un isomorfismo isométrico.

Por tanto, si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, como los isomorfismos isométricos preservan el producto escalar, tenemos

$$\langle f, g \rangle = \langle \{c_k(f)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{c_k(g)\}_{k\in\mathbb{Z}} \rangle,$$

es decir,

$$\Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(g)}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

luego

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(g)}. \tag{1.2.9}$$

Más adelante se demostrará que si $1 < p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{T})$, entonces la serie de Fourier de f converge a f en $L^p(\mathbb{T})$. Para $p = 2$, este resultado ya lo conocemos.

Teorema 1.2.10. *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, entonces $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en $L^2(\mathbb{T})$.*

Recordamos a continuación un criterio básico sobre la convergencia puntual de series de Fourier.

Teorema 1.2.11 (Criterio de Dini). *Sea* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *y sea* $x \in \mathbb{R}$. *Si existen* $\delta > 0$ *y* $A \in \mathbb{C}$ *tales que*

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right| \frac{1}{t}\, dt < \infty,$$

entonces $Sf(x) = A$, *es decir, la serie de Fourier de* f *converge puntualmente a* A *en* x.

Por último, enunciamos una versión del principio del módulo máximo para funciones holomorfas que fue estudiada en la asignatura de Variable Compleja.

Teorema 1.2.12 (Principio del módulo máximo). *Sea* D *un dominio acotado y sea* $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ *una función continua en* $\overline{D}$ *y holomorfa en* D. *Entonces*

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

1.3. Resultados de Análisis Funcional

Si $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son dos espacios normados y $T\colon X \to Y$ es una aplicación lineal, se tiene que T es continua si y solo si existe $C > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$$

para todo $x \in X$. En ese caso, la *norma de* T se define como

$$\|T\| = \inf\{C > 0\colon \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ para todo } x \in X\}.$$

Esta norma admite algunas expresiones alternativas.

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y.$$

También se sabe que $\|\cdot\|$ es una norma sobre

$$B(X,Y) = \{T\colon X \to Y \mid T \text{ es lineal y continua}\},$$

que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función.

Si en lugar de un espacio normado cualquiera $(Y, \|\cdot\|_Y)$ consideramos $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, donde $\mathbb{K}$ denota a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$, llamamos $X^* = B(X, \mathbb{K})$ y decimos que $(X^*, \|\cdot\|)$ es el *espacio dual de* $(X, \|\cdot\|_X)$. Así,

$$X^* = \{f\colon X \to \mathbb{K} \mid f \text{ es lineal y continua}\},$$

y para toda $f \in X^*$,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_X = 1} |f(x)|.$$

Otros resultados de Análisis Funcional de los que haremos uso son el teorema de la acotación uniforme y un resultado básico sobre extensión de aplicaciones lineales y continuas.

Teorema 1.3.1 (Teorema de la acotación uniforme). *Sean* $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *dos espacios normados y sea* $\{T_j\}_{j \in I}$ *una familia de aplicaciones lineales y continuas de* X *en* Y. *Supongamos que*

(a) $(X, \|\cdot\|_X)$ *es de Banach.*

(b) *Para cada* $x \in X$*, el conjunto* $\{T_j(x) \colon j \in I\}$ *es acotado en* Y*.*

Entonces el conjunto $\{\|T_j\| \colon j \in I\}$ *es acotado en* $\mathbb{R}$*.*

Teorema 1.3.2. *Ñ Sean* $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *dos espacios normados. Supongamos que* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *es de Banach. Sea* M *un subespacio vectorial denso en* X *y sea* $f \colon M \to Y$ *una aplicación lineal y continua. Consideremos la aplicación* $F \colon X \to Y$ *definida por*

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

siendo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión cualquiera en* M *con* $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_X = 0$*. Entonces* F *está bien definida, es lineal, es continua y verifica* $F|_M = f$ *y* $\|F\| = \|f\|$*.*

Como consecuencia del resultado anterior se obtiene que si $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son dos espacios normados con $(Y, \|\cdot\|_Y)$ de Banach, $F \colon X \to Y$ es lineal y continua y M es un subespacio vectorial denso en X, entonces $\|F|_M\| = \|F\|$, es decir,

$$\sup_{\|x\|_X=1} \|F(x)\|_Y = \sup_{\substack{\|x\|_X=1\\ x\in M}} \|F(x)\|_Y. \tag{1.3.3}$$

Capítulo 2

Convergencia puntual

En este capítulo se exponen resultados relacionados con la convergencia puntual de las series de Fourier. Principalmente, probaremos que existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto, y que existe una función de $L^1(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en todo punto.

2.1. Una función continua cuya serie de Fourier no converge en un punto

Se sabe que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $x \in \mathbb{R}$ son tales que $f(x^+)$ y $f(x^-)$ existen, entonces el único $A \in \mathbb{C}$ que puede verificar las hipótesis del criterio de Dini es $A = \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$. En particular, si f es continua en x, el único $A \in \mathbb{C}$ posible es $A = f(x)$. Sin embargo, esto no garantiza que la serie de Fourier de f converja puntualmente a f en x.

En esta sección se demuestra que existe una función continua con serie de Fourier divergente en un punto. Para ello, se va a seguir el mismo camino que en [3], utilizando el teorema de la acotación uniforme y el lema siguiente.

Lema 2.1.1. *Los núcleos de Dirichlet verifican*

$$\lim_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \infty.$$

Demostración. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)|}{|\operatorname{sen}(\frac{t}{2})|}\,dt \\
&\overset{(*)}{\geq} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)|}{|\frac{t}{2}|}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)|}{|t|}\,dt \\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)|}{t}\,dt \overset{(\circledast)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\operatorname{sen}(s)|}{s}\,ds \\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen}(s)|}{s}\,ds = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen}(s)|}{s}\,ds \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen}(s)|}{k\pi}\,ds = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen}(s)|\,ds \overset{(**)}{=} \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},
\end{aligned}$$

y como $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}\|D_n\|_1 = \infty$. Algunas aclaraciones:

($*$) Se ha usado que $|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

($\overset{*}{*}$) Se ha realizado el cambio de variable $(n+\frac{1}{2})t = s$, $dt = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\,ds$.

($\overset{*}{**}$) Se usa que

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen}(s)|\,ds = \int_0^{\pi} |\operatorname{sen}(s)|\,ds = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(s)\,ds = 2,$$

teniendo en cuenta en la primera igualdad que la función $|\operatorname{sen}|$ es π-periódica. □

Teorema 2.1.2. *Existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.*

Demostración. En el espacio de Banach $(\mathcal{C}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty)$, consideremos la familia de aplicaciones $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $T_n\colon \mathcal{C}([-\pi,\pi]) \to \mathbb{R}$, $T_n(g) = S_n g(0)$. Utilizando (1.2.4) y teniendo en cuenta que D_n es par,

$$T_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)D_n(-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)D_n(t)\,dt.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. La linealidad de T_n se deduce inmediatamente de la linealidad de la integral. Si $g \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$,

$$|T_n(g)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)||D_n(t)|\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|g\|_\infty |D_n(t)|\,dt = \|D_n\|_1 \|g\|_\infty,$$

luego T_n es continua y $\|T_n\| \leq \|D_n\|_1$. Veamos que esta desigualdad es en realidad una igualdad. Sea $f_n\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } D_n(t) \geq 0, \\ -1 & \text{si } D_n(t) < 0. \end{cases}$$

Para todo $t \neq 0$ se tiene que $D_n(t) = \frac{\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)}{\operatorname{sen}(\frac{t}{2})}$, luego

$$D_n(t) = 0 \iff \big(n + \frac{1}{2}\big)t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff t = \frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}},\ k \in \mathbb{Z}.$$

De esto se deduce que D_n se anula un número finito de veces en el intervalo $[-\pi,\pi]$, así que f_n tiene un número finito de discontinuidades. Modificándola en un entorno de cada discontinuidad, puede obtenerse una sucesión $\{g_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ de funciones continuas en $[-\pi,\pi]$ tales que $\lim_{m\to\infty} g_{n,m}(t) = f_n(t)$ para todo $t \in [-\pi,\pi]$ y $\|g_{n,m}\|_\infty = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} T_n(g_{n,m}) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_{n,m}(t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{m\to\infty} g_{n,m}(t)D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt = \|D_n\|_1,\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad el intercambio del límite con la integral está justificado por el teorema de la convergencia dominada: si $m \in \mathbb{N}$ y $t \in [-\pi,\pi]$,

$$|g_{n,m}(t)D_n(t)| \leq |D_n(t)|,$$

y $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt < \infty$. Tenemos entonces que para todo $\varepsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m_0$ se verifica

$$\|D_n\|_1 - |T_n(g_{n,m})| \leq |T_n(g_{n,m}) - \|D_n\|_1| < \varepsilon,$$

luego, usando que $\|g_{n,m}\|_\infty = 1$,

$$\|D_n\|_1 \leq |T_n(g_{n,m})| + \varepsilon \leq \sup_{\|g\|_\infty = 1} |T_n(g)| + \varepsilon = \|T_n\| + \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, entonces $\|D_n\|_1 \leq \|T_n\|$ y queda probado que $\|D_n\|_1 = \|T_n\|$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = \lim_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \infty$. Como el conjunto de números reales $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado, el contrarrecíproco del teorema de la acotación uniforme permite afirmar que existe $g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ tal que el conjunto $\{T_n(g) : n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(g)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n g(0)| = \infty.$$

Se concluye que existe una función continua, g, cuya serie de Fourier en 0 no converge. □

2.2. Una función de L^1 cuya serie de Fourier diverge en todo punto

El teorema que protagoniza esta sección fue probado originalmente por Kolmogorov. La demostración aquí expuesta se basa en [8], y para realizarla se necesita demostrar previamente varios lemas. También se ha seguido [7] para probar el Lema 2.2.3.

Lema 2.2.1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$|S_n f(x)| \leq (4n + 1)\|f\|_1.$$

Demostración. Para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$|a_k(f)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\,dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt = 2\|f\|_1.$$

Análogamente, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|b_k(f)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt)\,dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt = 2\|f\|_1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
|S_n f(x)| &= \left| \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\operatorname{sen}(kx)) \right| \\
&\leq \frac{|a_0(f)|}{2} + \sum_{k=1}^{n} |a_k(f)| + \sum_{k=1}^{n} |b_k(f)| \\
&\leq \|f\|_1 + \sum_{k=1}^{n} 2\|f\|_1 + \sum_{k=1}^{n} 2\|f\|_1 \\
&= (4n+1)\|f\|_1.
\end{aligned}$$

□

Antes de enunciar el próximo lema, introducimos la parte fraccionaria de un número real.

Definición 2.2.2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \geq 0$, se define la *parte fraccionaria de* α como $\langle \alpha \rangle = \alpha - E(\alpha)$, donde $E(\alpha)$ es el único número entero que satisface $E(\alpha) \leq \alpha < E(\alpha) + 1$.
- Si $\alpha < 0$, se define la *parte fraccionaria de* α como $\langle \alpha \rangle = \langle -\alpha \rangle$.

Estudiemos algunas propiedades elementales de la parte fraccionaria que se usarán en resultados posteriores.

(a) $\langle \alpha \rangle \in [0, 1)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto es inmediato usando que $E(\alpha) \leq \alpha < E(\alpha) + 1$.

(b) Si $|\alpha| < 1$, entonces $\langle \alpha \rangle = |\alpha|$. En efecto, si $0 \leq \alpha < 1$, entonces $E(\alpha) = 0$ y por tanto $\langle \alpha \rangle = \alpha - E(\alpha) = \alpha = |\alpha|$. Y si $-1 < \alpha \leq 0$, entonces $0 \leq -\alpha < 1$ y usando lo que se acaba de probar obtenemos $\langle \alpha \rangle = \langle -\alpha \rangle = |-\alpha| = |\alpha|$.

(c) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\langle \alpha + n \rangle = \langle \alpha \rangle$. Veámoslo. Supongamos primero que $\alpha \geq 0$. Se distinguen dos casos:

- Si $\alpha + n \geq 0$, entonces
$$\langle \alpha + n \rangle = \alpha + n - E(\alpha + n) = \alpha + n - (E(\alpha) + n) = \alpha - E(\alpha) = \langle \alpha \rangle.$$
- Si $\alpha + n < 0$, entonces
$$\begin{aligned}\langle \alpha + n \rangle &= \langle -\alpha - n \rangle = -\alpha - n - E(-\alpha - n) = -\alpha - n - (E(-\alpha) - n)\\ &= -\alpha - E(-\alpha) = \langle -\alpha \rangle = \langle \alpha \rangle.\end{aligned}$$

Si $\alpha < 0$, aplicando lo que se acaba de probar obtenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple $\langle -\alpha \rangle = \langle -\alpha - n \rangle$ y por tanto $\langle \alpha \rangle = \langle \alpha + n \rangle$.

(d) Si $\alpha, \beta > 0$, entonces $\langle \alpha + \beta \rangle = \langle \langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle \rangle$. En efecto, por definición de parte fraccionaria,
$$\langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle = \alpha - E(\alpha) + \beta - E(\beta),$$
luego
$$\langle \langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle \rangle = \langle \alpha - E(\alpha) + \beta - E(\beta) \rangle \overset{(c)}{=} \langle \alpha + \beta \rangle.$$

Lema 2.2.3. *Dado* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, el conjunto* $\{\langle k\alpha \rangle \mid k \in \mathbb{N}\}$ *es denso en* $[0, 1)$*.*

Demostración. Como $\langle k\alpha \rangle = \langle -k\alpha \rangle$ para todo $k \in \mathbb{N}$, basta probar el resultado para $\alpha > 0$. Hay que demostrar que

$$\text{para todo } x \in [0, 1) \text{ y todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ con } |\langle k\alpha \rangle - x| < \varepsilon. \tag{2.2.4}$$

Antes de probar esto, fijemos $m \in \mathbb{N}$ con $m > 1$ y consideremos los intervalos

$$I_n = \left[\frac{n}{m}, \frac{n+1}{m}\right), \qquad n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}. \tag{2.2.5}$$

Es claro que $\bigcup_{n=0}^{m-1} I_n = [0,1)$ y que estos intervalos son disjuntos. Se consideran los números reales

$$\langle n\alpha\rangle, \qquad n \in \{0,1,\ldots,m\}.$$

Estos números son todos distintos, pues si existiesen $n_1, n_2 \in \{0,1,\ldots,m\}$ con $n_1 \neq n_2$ y $\langle n_1\alpha\rangle = \langle n_2\alpha\rangle$, se tendría $n_1\alpha - E(n_1\alpha) = n_2\alpha - E(n_2\alpha)$ y por tanto

$$\alpha = \frac{E(n_1\alpha) - E(n_2\alpha)}{n_1 - n_2} \in \mathbb{Q},$$

que es una contradicción.

Como además $\langle n\alpha\rangle \in [0,1)$ para todo $n \in \{0,1,\ldots,m\}$, entonces alguno de los m intervalos dados en (2.2.4) contiene a al menos dos de los $m+1$ números anteriores. Es decir, existen $n_1, n_2 \in \{0,1,\ldots,m\}$ tales que $n_1 \neq n_2$ y $\langle n_1\alpha\rangle, \langle n_2\alpha\rangle \in I_n$ para algún $n \in \{0,1,\ldots,m-1\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n_1 > n_2$. Como I_n es un intervalo de longitud $\frac{1}{m}$, entonces

$$|\langle n_1\alpha\rangle - \langle n_2\alpha\rangle| = |(n_1-n_2)\alpha - (E(n_1\alpha) - E(n_2\alpha))| \leq \frac{1}{m}.$$

Nótese que $|\langle n_1\alpha\rangle - \langle n_2\alpha\rangle| < 1$ porque $\langle n_1\alpha\rangle, \langle n_2\alpha\rangle \in [0,1)$. Usando las propiedades de la parte fraccionaria mencionadas antes del lema,

$$|(n_1-n_2)\alpha - (E(n_1\alpha) - E(n_2\alpha))| \overset{\text{(b)}}{=} \langle (n_1-n_2)\alpha - (E(n_1\alpha) - E(n_2\alpha))\rangle \overset{\text{(c)}}{=} \langle (n_1-n_2)\alpha\rangle.$$

Llamando $k = n_1 - n_2 \in \mathbb{N}$ (recordamos que $n_1 > n_2$), se ha obtenido que para todo $m \in \mathbb{N}$ con $m > 1$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle k\alpha\rangle \leq \frac{1}{m}.$$

Ya estamos en condiciones de demostrar (2.2.3). Sea $x \in [0,1)$ y sea $\varepsilon > 0$. Si $x = 0$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{m} < \varepsilon$ y por lo probado anteriormente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\langle k\alpha\rangle - x| = \langle k\alpha\rangle \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$.

Supongamos entonces que $x > 0$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \operatorname{mín}\{\varepsilon, x\}$. Por lo probado anteriormente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle k\alpha\rangle \leq \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Sea n el mayor número natural tal que $n\langle k\alpha\rangle \leq x$ (existe porque $\langle k\alpha\rangle \leq \frac{1}{m} < x$). Entonces $n\langle k\alpha\rangle \leq x \leq (n+1)\langle k\alpha\rangle$, y como

$$(n+1)\langle k\alpha\rangle - n\langle k\alpha\rangle = \langle k\alpha\rangle < \varepsilon,$$

entonces

$$|n\langle k\alpha\rangle - x| < \varepsilon.$$

Veamos que $n\langle k\alpha\rangle = \langle nk\alpha\rangle$, lo que finalizará la prueba de (2.2.3). Por definición de la parte fraccionaria,

$$n\langle k\alpha\rangle = nk\alpha - nE(k\alpha),$$

luego

$$\langle n\langle k\alpha\rangle\rangle = \langle nk\alpha - nE(k\alpha)\rangle.$$

Se tiene que

- $\langle n\langle k\alpha\rangle\rangle = n\langle k\alpha\rangle$ por la propiedad (b) de la parte fraccionaria, teniendo en cuenta que $0 \leq n\langle k\alpha\rangle \leq x < 1$.
- $\langle nk\alpha - nE(k\alpha)\rangle = \langle nk\alpha\rangle$ por la propiedad (c) de la parte fraccionaria.

Por tanto, $n\langle k\alpha\rangle = \langle nk\alpha\rangle$ y concluimos que $|n\langle k\alpha\rangle - x| = |\langle nk\alpha\rangle - x| < \varepsilon$. □

Para ahorrar escritura en los próximos resultados, será conveniente emplear la notación siguiente:

$$\mathbb{P} = \{2n \colon n \in \mathbb{N}\}, \qquad \mathbb{I} = \{2n-1 \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Lema 2.2.6. *Dado $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, el conjunto $\{\langle k\alpha\rangle \mid k \in \mathbb{I}\}$ es denso en $[0,1)$.*

Demostración. Al igual que en el lema anterior, basta probar el resultado para $\alpha > 0$. Sea $\varepsilon > 0$, sea $x \in [0,1)$ y veamos que existe $k \in \mathbb{I}$ tal que $|\langle k\alpha\rangle - x| < \varepsilon$. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\langle(2n+1)\alpha\rangle - x| &= |\langle 2n\alpha + \alpha\rangle - x| \overset{(*)}{=} |\langle\langle 2n\alpha\rangle + \langle\alpha\rangle\rangle - x| \\ &= |\langle 2n\alpha\rangle + \langle\alpha\rangle - E(\langle 2n\alpha\rangle + \langle\alpha\rangle) - x| \\ &\leq |\langle 2n\alpha\rangle - (x - \langle\alpha\rangle)| + |E(\langle 2n\alpha\rangle + \langle\alpha\rangle)|, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

donde en $(*)$ se ha usado la propiedad (d) de la parte fraccionaria. Como $2\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, entonces $\{\langle 2n\alpha\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0,1]$, y como $x - \langle\alpha\rangle \in [0,1)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle 2n_0\alpha\rangle - (x - \langle\alpha\rangle)| < \widetilde{\varepsilon},$$

donde $\widetilde{\varepsilon} = \min\{\varepsilon, 1-x\} > 0$. Tenemos entonces $\langle 2n_0\alpha\rangle - (x - \langle\alpha\rangle) < \widetilde{\varepsilon} \leq 1 - x$, luego $0 \leq \langle 2n_0\alpha\rangle + \langle\alpha\rangle < 1$ y por tanto $E(\langle 2n_0\alpha\rangle + \langle\alpha\rangle) = 0$. Llevando esto a (2.2.7), concluimos

$$|\langle(2n_0+1)\alpha\rangle - x| \leq |\langle 2n_0\alpha\rangle - (x - \langle\alpha\rangle)| < \widetilde{\varepsilon} \leq \varepsilon.$$ □

Lema 2.2.8. *Sea $\rho \in \mathbb{N}$ y sea $\theta \in (0,1)$ con $\theta \neq \frac{1}{2}$. Entonces existe $\rho_\theta \in \mathbb{I}$ con $\rho_\theta \geq \rho$ y tal que*

$$\operatorname{sen}(2\pi\rho_\theta\theta) > \frac{1}{2}.$$

Demostración. Sea $\rho \in \mathbb{N}$ y sea $\theta \in (0,1)$ con $\theta \neq \frac{1}{2}$. Si $s \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\operatorname{sen}(x) > \frac{1}{2}$ para todo $x \in (2\pi s + \frac{\pi}{6}, 2\pi s + \frac{5\pi}{6})$. Basta probar que existe $\rho_\theta \in \mathbb{I}$ con $\rho_\theta \geq \rho$ y tal que para algún $s \in \mathbb{Z}$ se tiene $2\pi\rho_\theta\theta \in (2\pi s + \frac{\pi}{6}, 2\pi s + \frac{5\pi}{6})$, es decir, $\rho_\theta\theta \in (s + \frac{1}{12}, s + \frac{5}{12})$. Sea $J = (\frac{1}{12}, \frac{5}{12})$.

Supongamos primero que $\theta \in \mathbb{Q}$, de manera que existen $p, q \in \mathbb{N}$ con $\operatorname{mcd}(p,q) = 1$ y tales que $\theta = \frac{p}{q}$. Se distinguen dos casos.

- Supongamos que $q \in \mathbb{I}$. Nótese que $q > 1$ porque $\theta \notin \mathbb{N}$. Como $\operatorname{mcd}(2,q) = 1$, entonces $\mathbb{Z}_q = 2\mathbb{Z}_q$, luego

  $$\mathbb{Z}_q = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{q-1}\} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \ldots, \overline{2q-2}\}.$$

  Al sumar ρ, las clases de equivalencia no cambian:

  $$\mathbb{Z}_q = \{\overline{\rho}, \overline{\rho+2}, \overline{\rho+4}, \ldots, \overline{\rho+2q-2}\}.$$

  Y como $\mathbb{Z}_q = p\mathbb{Z}_q$ por ser $\operatorname{mcd}(p,q) = 1$,

  $$\mathbb{Z}_q = \{\overline{\rho p}, \overline{(\rho+2)p}, \ldots, \overline{(\rho+2q-2)p}\}.$$

Esto permite afirmar que los números

$$(\rho + 2k)p, \qquad k \in \{0, 1, \dots, q-1\},$$

son todos distintos módulo q, así que al dividirlos entre q, los restos obtenidos son $0, 1, \dots, q-1$. Si $q > 3$, como J es un intervalo de longitud $\frac{1}{3}$ y la distancia entre los números $0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$ es $\frac{1}{q} < \frac{1}{3}$, existe $r \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ tal que $\frac{r}{q} \in J$. Para $q = 3$, esto último sigue siendo cierto porque $\frac{1}{3} \in J$. Sea $k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ tal que r es el resto de dividir $(\rho + 2k)p$ entre q. Entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\rho + 2k)p = sq + r,$$

es decir,

$$\frac{(\rho + 2k)p}{q} = (\rho + 2k)\theta = s + \frac{r}{q}.$$

Llamando $\rho_\theta = \rho + 2k$, se tiene que $\rho_\theta \in \mathbb{I}$, que $\rho_\theta \geq \rho$ y que $\rho_\theta\theta \in (s + \frac{1}{2}, s + \frac{5}{12})$.

- Supongamos que $q \in \mathbb{P}$, es decir, que existe $q' \in \mathbb{N}$ tal que $q = 2q'$. Nótese que $q > 2$; no puede tenerse $\theta = \frac{p}{2}$ porque $\theta \in (0, 1)$ y $\theta \neq \frac{1}{2}$. Además, $p \in \mathbb{I}$; no puede ser par porque $\mathrm{mcd}(p, q) = 1$. Razonando como antes,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_q &= \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{2q'-1}\} \\ &= \{\overline{\rho}, \overline{\rho+1}, \overline{\rho+2}, \dots, \overline{\rho+2q'-1}\} \\ &= \{\overline{\rho p}, \overline{(\rho+1)p}, \overline{(\rho+2)p}, \dots, \overline{(\rho+2q'-1)p}\}. \end{aligned}$$

Consideramos los representantes impares de estas clases de equivalencia,

$$(\rho + 2k)p, \qquad k \in \{0, 1, \dots, q'-1\}.$$

Estos números son todos distintos módulo q, y al dividirlos entre q se obtienen todos los restos impares, es decir, $1, 3, \dots, 2q'-1$. Si $q > 6$, como J es un intervalo de longitud $\frac{1}{3}$ y la distancia entre los números $\frac{1}{q}, \frac{3}{q}, \dots, \frac{2q'-1}{q}$ es $\frac{2}{q} < \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, existe $r \in \{1, 3, \dots, 2q'-1\}$ tal que $\frac{r}{q} \in J$. Si $q = 4$ o $q = 6$, esto último sigue siendo cierto porque $\frac{1}{4}, \frac{1}{6} \in J$. Sea $k \in \{0, 1, \dots, q'-1\}$ tal que r es el resto de dividir $(\rho + 2k)p$ entre q. Entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\rho + 2k)p = sq + r,$$

es decir,

$$\frac{(\rho + 2k)p}{q} = (\rho + 2k)\theta = s + \frac{r}{q}.$$

Llamando $\rho_\theta = \rho + 2k$, se tiene que $\rho_\theta \in \mathbb{I}$, que $\rho_\theta \geq \rho$ y que $\rho_\theta\theta \in (s + \frac{1}{2}, s + \frac{5}{12})$.

Supongamos ahora que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por el lema anterior, el conjunto $\{\langle k\theta \rangle \mid k \in \mathbb{I}\}$ es denso en $[0, 1)$, y como $J \subset [0, 1)$, existen infinitos $k \in \mathbb{I}$ tales que $\langle k\theta \rangle \in J$. Por tanto, existe $\rho_\theta \in \mathbb{I}$ con $\rho_\theta \geq \rho$ y tal que $\langle \rho_\theta\theta \rangle \in J$. Llamando $s = E(\rho_\theta\theta)$, concluimos que $s \in \mathbb{Z}$ y que $\rho_\theta\theta = s + \langle \rho_\theta\theta \rangle \in (s + \frac{1}{12}, s + \frac{5}{12})$. □

Lema 2.2.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\delta \in (0, \frac{\pi}{2n+1})$. Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$, sea*

$$x_j = \frac{2\pi j}{2n+1},$$

y para cada $j \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, sea

$$I_j = (x_j + \delta, x_{j+1} - \delta).$$

Entonces existen $m_0, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ con $m_0 < m_1 < \ldots < m_n$ y tales que para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y todo $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$, existe $k_x \in \mathbb{N}$ verificando las siguientes propiedades:

(a) $2k_x + 1$ *es múltiplo de* $2n+1$.

(b) $m_j \leq k_x < \frac{1}{2} m_{j+1}$.

(c) $\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})x) < -\frac{1}{2}$.

Demostración. En primer lugar, nótese que los intervalos I_j tienen sentido porque

$$x_{j+1} - \delta - (x_j + \delta) = \frac{2\pi(j+1)}{2n+1} - \frac{2\pi j}{2n+1} - 2\delta = \frac{2\pi}{2n+1} - 2\delta > \frac{2\pi}{2n+1} - \frac{2\pi}{2n+1} = 0,$$

utilizándose en la desigualdad que $\delta < \frac{\pi}{2n+1}$.

La definición de los números naturales $m_0, m_1, \ldots, m_n$ se realizará más adelante. Por ahora, fijemos $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $N \in \mathbb{N}$. Para cada $\rho \in \mathbb{I}$, sea

$$k_\rho = \frac{\rho(2n+1) - 1}{2},$$

y para cada $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$ sea

$$\theta_x = \frac{2n+1}{4\pi}(x_{2j+2} - x).$$

Nótese que $\rho(2n+1) \in \mathbb{I}$ por ser producto de números impares, luego $\rho(2n+1) - 1 \in \mathbb{P}$ y por tanto $k_\rho \in \mathbb{N}$. Además, $2k_\rho + 1 = \rho(2n+1)$, luego $2k_\rho + 1$ es múltiplo de $2n+1$. Por otra parte,

$$\operatorname{sen}\Big(\Big(k_\rho + \frac{1}{2}\Big)x\Big) = \operatorname{sen}\Big(\Big(\frac{\rho(2n+1) - 1}{2} + \frac{1}{2}\Big)x\Big) = \operatorname{sen}\Big(\frac{\rho(2n+1)}{2}x\Big).$$

Como $(2n+1)x_{2j+2} = 2\pi(2j+2)$ y $\frac{\rho}{2} \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{\rho(2n+1)}{2}x_{2j+2}$ es un múltiplo de 2π, y por tanto, usando que el seno es una función impar y 2π-periódica,

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}\Big(\Big(k_\rho + \frac{1}{2}\Big)x\Big) &= \operatorname{sen}\Big(-\frac{\rho(2n+1)}{2}x\Big) = \operatorname{sen}\Big(\frac{\rho(2n+1)}{2}(x_{2j+2} - x)\Big) \\ &= \operatorname{sen}(2\pi\rho\theta_x). \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Acotemos θ_x usando que $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1} = (x_{2j} + \delta, x_{2j+1} - \delta) \cup (x_{2j+1} + \delta, x_{2j+2} - \delta)$. Sea $\eta = \frac{2n+1}{4\pi}\delta$. Nótese que $\eta > 0$ y que, por ser $\delta < \frac{\pi}{2n+1}$, se tiene que $\eta < \frac{1}{4}$.

- Como $x > x_{2j} + \delta$, entonces

$$x_{2j+2} - x < x_{2j+2} - x_{2j} - \delta = \frac{2\pi}{2n+1}(2j + 2 - 2j) - \delta = \frac{4\pi}{2n+1} - \delta,$$

  luego

$$\theta_x = \frac{2n+1}{4\pi}(x_{2j+2} - x) < 1 - \frac{2n+1}{4\pi}\delta = 1 - \eta.$$

- Como $x < x_{2j+2} - \delta$, entonces

$$x_{2j+2} - x > x_{2j+2} - x_{2j+2} + \delta = \delta,$$

  luego

$$\theta_x = \frac{2n+1}{4\pi}(x_{2j+2} - x) > \frac{2n+1}{4\pi}\delta = \eta.$$

- Se da una de las dos situaciones siguientes: $x < x_{2j+1} - \delta$ o $x > x_{2j+1} + \delta$. En el primer caso, se tendría

$$x_{2j+2} - x > x_{2j+2} - x_{2j+1} + \delta = \frac{2\pi}{2n+1}(2j + 2 - 2j - 1) + \delta = \frac{2\pi}{2n+1} + \delta,$$

  luego

$$\theta_x = \frac{2n+1}{4\pi}(x_{2j+2} - x) > \frac{1}{2} + \frac{2n+1}{4\pi}\delta = \frac{1}{2} + \eta.$$

  En el segundo caso, se tendría

$$x_{2j+2} - x < x_{2j+2} - x_{2j+1} - \delta = \frac{2\pi}{2n+1}(2j + 2 - 2j - 1) - \delta = \frac{2\pi}{2n+1} - \delta,$$

  luego

$$\theta_x = \frac{2n+1}{4\pi}(x_{2j+2} - x) < \frac{1}{2} - \frac{2n+1}{4\pi}\delta = \frac{1}{2} - \eta.$$

Sea $S = (\eta, \frac{1}{2} - \eta) \cup (\frac{1}{2} + \eta, 1 - \eta)$, que por ser $\eta \in (0, \frac{1}{4})$ verifica $S \subset (0, 1)$ y $\frac{1}{2} \notin S$. Los razonamientos anteriores prueban que

$$x \in I_{2j} \cup I_{2j+1} \iff \theta_x \in S.$$

Para cada $\theta \in S$, sea ρ_θ el menor número natural impar con $\rho_\theta \geq N$ y tal que

$$\operatorname{sen}(2\pi\rho_\theta\theta) > \frac{1}{2}.$$

Este ρ_θ existe por el lema anterior. De hecho, como $\overline{S} = [\eta, \frac{1}{2} - \eta] \cup [\frac{1}{2} + \eta, 1 - \eta] \subset (0, 1)$ y $\frac{1}{2} \notin \overline{S}$, esto también tiene sentido para $\theta \in \overline{S}$. Por (2.2.5), para todo $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$ se tiene

$$-\operatorname{sen}\Big(\Big(k_{\rho_{\theta_x}} + \frac{1}{2}\Big)x\Big) > \frac{1}{2}.$$

Para cada $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$, sea

$$k_x = k_{\rho_{\theta_x}} = \frac{\rho_{\theta_x}(2n+1) - 1}{2}.$$

Como $\rho_{\theta_x} \geq N$, entonces $k_x \geq \frac{N(2n+1)-1}{2}$. Además, k_x verifica (a) y (c).

Recapitulando, hemos probado que si $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $N \in \mathbb{N}$, entonces para todo $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$ existe $k_x \in \mathbb{N}$ con $k_x \geq \frac{N(2n+1)-1}{2}$ y tal que se verifican (a) y (c).

Finalmente, definamos $m_0, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$. Tomemos como m_0 cualquier número natural y definamos m_1. Aplicando lo que se acaba de probar con $j = 0$ y cualquier $N \in \mathbb{N}$ verificando $N \geq \frac{2m_0+1}{2n+1}$, obtenemos que para todo $x \in I_0 \cup I_1$ existe $k_x \in \mathbb{N}$ con $k_x \geq \frac{N(2n+1)-1}{2} \geq \frac{2m_0+1-1}{2} = m_0$ y verificando (a) y (c). Veamos que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ con $m_0 < m_1$ y tal que para todo $x \in I_0 \cup I_1$ se tiene que $k_x < \frac{1}{2}m_1$.

Sea $\theta \in \overline{S}$. Como $\operatorname{sen}(2\pi\rho_\theta\theta) > \frac{1}{2}$ y el seno es una función continua, existe $\delta_\theta > 0$ tal que para todo $\xi \in (\theta - \delta_\theta, \theta + \delta_\theta)$ se tiene que $\operatorname{sen}(2\pi\rho_\theta\xi) > \frac{1}{2}$. Como $\rho_\theta \in \mathbb{I}$, $\rho_\theta \geq N$ y $\operatorname{sen}(2\pi\rho_\theta\xi) > \frac{1}{2}$, entonces $\rho_\xi \leq \rho_\theta$, ya que ρ_ξ es el menor número natural impar con $\rho_\xi \geq N$ y $\operatorname{sen}(2\pi\rho_\xi\xi) > \frac{1}{2}$. Y como

$$\overline{S} \subset \bigcup_{\theta \in \overline{S}} (\theta - \delta_\theta, \theta + \delta_\theta)$$

y $\overline{S}$ es compacto, existen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in \overline{S}$ tales que

$$S \subset \overline{S} \subset \bigcup_{i=1}^{k} (\theta_i - \delta_{\theta_i}, \theta_i + \delta_{\theta_i}).$$

Por tanto, para todo $\theta \in S$ se tiene que $\rho_\theta \leq \text{máx}\{\rho_{\theta_1}, \rho_{\theta_2}, \ldots, \rho_{\theta_n}\}$. Tomando

$$m_0' > \text{máx}\{\rho_{\theta_1}, \rho_{\theta_2}, \ldots, \rho_{\theta_n}\},$$

tenemos que $\rho_\theta < m_0'$ para todo $\theta \in S$. Así,, para todo $x \in I_0 \cup I_1$ se tiene

$$k_x = \frac{\rho_{\theta_x}(2n+1) - 1}{2} < \frac{m_0'(2n+1) - 1}{2}.$$

Llamando $m_1 = m_0'(2n+1) - 1$, tenemos que $m_0 \leq k_x < \frac{1}{2}m_1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$. Además, $m_0 < \frac{1}{2}m_1 < m_1$.

Razonando de forma análoga, hallamos $m_2 \in \mathbb{N}$ con $m_0 < m_1 < m_2$ y tal que para todo $x \in I_2 \cup I_3$ existe $k_x \in \mathbb{N}$ satisfaciendo (a) y (c) y tal que $m_1 \leq k_x < \frac{1}{2}m_2$.

Reiterando este proceso, encontramos $m_0, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ con $m_0 < m_1 < \ldots < m_n$ y tales que para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y todo $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$, existe $k_x \in \mathbb{N}$ cumpliendo las propiedades (a), (b) y (c). □

Lema 2.2.11. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\log(n)} = 1.$$

Demostración. La sucesión $\{\log(n)\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente y $\lim_{n\to\infty} \log(n) = \infty$. Como además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_{n+1} - H_n}{\log(n+1) - \log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log(\frac{n+1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log(1+\frac{1}{n}) + \log(1+\frac{1}{n})}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log((1+\frac{1}{n})^n) + \log(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{\log(e) + \log(1)} = 1,$$

el criterio de Stolz permite afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{H_{n+1} - H_n}{\log(n+1) - \log(n)} = 1.$$ □

Lema 2.2.12. *Existen una sucesión de polinomios trigonométricos $\{F_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, una sucesión de números reales positivos $\{A_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, una sucesión de intervalos $\{E_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ y una sucesión de números naturales $\{\lambda_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ verificando las siguientes propiedades:*

(a) *Para cada $n \geq n_0$, F_n es un polinomio trigonométrico no negativo de la forma*

$$F_n(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\nu_n}(a_j(n)\cos(jt) + b_j(n)\operatorname{sen}(jt)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$.

(c) $E_n \subset [0, 2\pi]$ *para cada* $n \geq n_0$.

(d) $E_n \subset E_{n+1}$ *para cada* $n \geq n_0$.

(e) $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} E_n = [0, 2\pi)$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

(g) *Para cada $n \geq n_0$ y cada $x \in E_n$, existe $k \in \mathbb{N}$ con $S_kF_n(x) > A_n$ y tal que $\lambda_n \leq k \leq \nu_n$, donde ν_n es el grado del polinomio trigonométrico F_n.*

Demostración. Vamos a definir F_n, A_n, E_n y λ_n para n tan grande como se necesite, de ahí que las sucesiones del enunciado comiencen en $n_0 \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño (se concretará más adelante). Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$, sean

$$x_j = \frac{2\pi j}{2n+1}, \qquad I'_j = [x_j - \delta, x_j + \delta],$$

y para cada $j \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, sea

$$I_j = (x_j + \delta, x_{j+1} - \delta).$$

Para que el intervalo I_j tenga sentido, tomamos $\delta < \frac{\pi}{2n+1}$, tal y como se vio en el Lema 2.2.4. Se observa que

$$\left(\bigcup_{j=0}^{2n} I'_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{2n-1} I_j\right) = [x_0 - \delta, x_{2n} + \delta].$$

Definimos

$$F_n = \phi_n + f_n,$$

donde:

- $\phi_n(x) = \frac{1}{2}K_{m_0}((2n+1)x)$, siendo $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_{m_0}(0) > 2n$ (se recuerda que K_{m_0} es el núcleo de Fejér de orden m_0). Esta elección de m_0 es posible porque

$$\lim_{m\to\infty} K_m(0) = \lim_{m\to\infty}(m+1) = \infty.$$

  Nótese que $K_{m_0}(0) = 2m_0 + 1 > 2n$ implica $m_0 > \frac{2n-1}{2}$.

Si $j \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$, entonces

$$\phi_n(x_j) = \frac{1}{2}K_{m_0}((2n+1)x_j) = \frac{1}{2}K_{m_0}(2\pi j) = \frac{1}{2}K_{m_0}(0) > \frac{1}{2}2n = n,$$

utilizándose en la tercera igualdad que K_{m_0} es 2π-periódica. Como ϕ_n es continua (pues K_{m_0} lo es), existe $\delta' > 0$ tal que para todo $x \in (x_j - \delta', x_j + \delta')$ se verifica $\phi_n(x) \geq n$. Tomando $\delta < \text{mín}\{\delta', \frac{\pi}{2n+1}\}$, se tiene que

$$\phi_n(x) \geq n \text{ para todo } x \in [x_j - \delta, x_j + \delta] = I'_j. \tag{2.2.13}$$

Por ser K_{m_0} un polinomio trigonométrico no negativo de término constante 1 y grado m_0, se tiene que ϕ_n es un polinomio trigonométrico no negativo de término constante $\frac{1}{2}$ y grado m_0.

Por otra parte, como $D_{m_0}(0) = 2m_0 + 1 > 0$ y D_{m_0} es continua, existe $\delta'' > 0$ tal que $D_{m_0}(x) \geq 0$ para todo $x \in (-\delta'', \delta'')$. Tomando $\delta < \text{mín}\{\delta', \delta'', \frac{\pi}{2n+1}\}$, se tiene que

$$D_{m_0}(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in [-\delta, \delta] = I'_0. \tag{2.2.14}$$

- $f_n(x) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} g_i(x)$, donde $g_i(x) = K_{m_i}(x - x_{2i})$ y $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son los números naturales proporcionados por el Lema 2.2.6 (en la demostración de dicho lema se vio que puede tomarse como m_0 cualquier número natural; en este caso, se escoge como m_0 el grado de ϕ_n). Como g_i es un polinomio trigonométrico no negativo de término constante 1, entonces f_n es un polinomio trigonométrico no negativo de término constante $\frac{1}{2}$.

De esta manera, tenemos que F_n es un polinomio trigonométrico no negativo de término constante 1, pues f_n y ϕ_n son polinomios trigonométricos no negativos de término constante $\frac{1}{2}$.

Antes de definir las otras tres sucesiones que aparecen en el enunciado, se van a probar las tres afirmaciones que siguen:

- *Si $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $k \in \mathbb{N}$ son tales que $m_j \leq k < \frac{1}{2}m_{j+1}$, entonces*

$$S_k f_n(x) \geq \frac{1}{2n}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{m_i - k}{m_i + 1}D_k(x - x_{2i}) \tag{2.2.15}$$

para todo $x \in \bigcup_{l=0}^{n-1} I_{2l} \cup I_{2l+1}$.

Sea $x \in \bigcup_{l=0}^{n-1} I_{2l} \cup I_{2l+1}$ y supongamos que existen $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $k \in \mathbb{N}$

tales que $m_j \leq k < \frac{1}{2}m_{j+1}$. Para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
g_i(x) = K_{m_i}(x - x_{2i}) &= \frac{1}{m_i+1}\sum_{l=0}^{m_i} D_l(x - x_{2i}) = \frac{1}{m_i+1}\Big(1 + \sum_{l=1}^{m_i} D_l(x - x_{2i})\Big) \\
&= \frac{1}{m_i+1}\Big(1 + \sum_{l=1}^{m_i}\Big(1 + 2\sum_{m=1}^{l}\cos(m(x - x_{2i}))\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{m_i+1}\Big(1 + m_i + 2\sum_{l=1}^{m_i}\sum_{m=1}^{l}\cos(m(x - x_{2i}))\Big) \\
&= \frac{1}{m_i+1}\Big(1 + m_i + 2\sum_{m=1}^{m_i}(m_i - m + 1)\cos(m(x - x_{2i}))\Big) \\
&= 1 + 2\sum_{m=1}^{m_i}\frac{m_i - m + 1}{m_i + 1}\cos(m(x - x_{2i})).
\end{aligned}$$

Si $j + 1 \leq i \leq n$, entonces $k < \frac{1}{2}m_{j+1} \leq m_{j+1} \leq m_i$, y como g_i es un polinomio trigonométrico de grado m_i,

$$S_k g_i(x) = 1 + 2\sum_{m=1}^{k}\frac{m_i - m + 1}{m_i + 1}\cos(m(x - x_{2i})),$$

mientras que si $i \leq j$, entonces $m_i \leq m_j \leq k$ y $S_k g_i(x) = g_i(x) = K_{m_i}(x - x_{2i})$. De todo esto se obtiene que

$$\begin{aligned}
S_k f_n(x) &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} S_k g_i(x) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{j} S_k g_i(x) + \frac{1}{2n}\sum_{i=j+1}^{n} S_k g_i(x) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{j} K_{m_i}(x - x_{2i}) + \frac{1}{2n}\sum_{i=j+1}^{n}\Big(1 + 2\sum_{m=1}^{k}\frac{m_i - m + 1}{m_i + 1}\cos(m(x - x_{2i}))\Big).
\end{aligned}$$

Como los núcleos de Fejér son no negativos,

$$S_k f_n(x) \geq \frac{1}{2n}\sum_{i=j+1}^{n}\Big(1 + 2\sum_{m=1}^{k}\frac{m_i - m + 1}{m_i + 1}\cos(m(x - x_{2i}))\Big).$$

Y como $m_i - m + 1 = (m_i - k) + (k - m + 1) \geq m_i - k$,

$$S_k f_n(x) \geq \frac{1}{2n}\sum_{i=j+1}^{n}\Big(1 + 2\sum_{m=1}^{k}\frac{m_i - k}{m_i + 1}\cos(m(x - x_{2i}))\Big).$$

Usando ahora que $1 \geq \frac{m_i - k}{m_i + 1}$ (pues $-k \leq 1$),

$$\begin{aligned}
S_k f_n(x) &\geq \frac{1}{2n}\sum_{i=j+1}^{n}\Big(\frac{m_i - k}{m_i + 1} + 2\sum_{m=1}^{k}\frac{m_i - k}{m_i + 1}\cos(m(x - x_{2i}))\Big) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{m_i - k}{m_i + 1}\Big(1 + 2\sum_{m=1}^{k}\cos(m(x - x_{2i}))\Big) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{m_i - k}{m_i + 1}D_k(x - x_{2i}).
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba de (2.2.12).

- *Existe $C > 0$ tal que para todo $j \in \{0, 1, \ldots, E(n - \sqrt{n})\}$ y todo $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$, se verifica*
$$S_{k_x} F_n(x) \geq C \log(n) \tag{2.2.16}$$
para algún $k_x \in \mathbb{N}$ con $m_j \leq k_x < \frac{1}{2} m_{j+1}$.

  Sea $j \in \{0, 1, \ldots, E(n - \sqrt{n})\}$ y sea $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$. El Lema 2.2.6 permite afirmar que existe $k_x \in \mathbb{N}$ tal que $2k_x + 1$ es múltiplo de $2n + 1$, $m_j \leq k_x < \frac{1}{2} m_{j+1}$ y $\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})x) < -\frac{1}{2}$.

  Sea $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $2k_x + 1 = \alpha(2n + 1)$. Como $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$, entonces $x < x_{2j+2}$. De esto se obtiene que si $i \geq j + 1$, entonces $x \neq x_{2i}$, luego
$$\begin{aligned} D_{k_x}(x - x_{2i}) &= \frac{\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})(x - x_{2i}))}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x - x_{2i}))} = \frac{\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})x - (k_x + \frac{1}{2})x_{2i})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x - x_{2i}))} \\ &= \frac{\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})x - \frac{\alpha}{2}(2n + 1)x_{2i})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x - x_{2i}))} = \frac{\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})x - \frac{\alpha}{2}(2n + 1)\frac{4\pi i}{2n+1})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x - x_{2i}))} \\ &= \frac{\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})x - 2\pi\alpha i)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x - x_{2i}))} = \frac{\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})x)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x - x_{2i}))}. \end{aligned}$$
  Usando esto y (2.2.12),
$$\begin{aligned} S_{k_x} f_n(x) &\geq \frac{1}{2n} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{m_i - k_x}{m_i + 1} D_{k_x}(x - x_{2i}) \\ &= \frac{\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})x)}{2n} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{m_i - k_x}{m_i + 1} \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x - x_{2i}))}, \end{aligned}$$
  y usando que el seno es una función impar,
$$S_{k_x} f_n(x) \geq -\frac{\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})x)}{2n} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{m_i - k_x}{m_i + 1} \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x_{2i} - x))}.$$
  Como $\operatorname{sen}((k_x + \frac{1}{2})x) < -\frac{1}{2}$,
$$S_{k_x} f_n(x) \geq \frac{1}{4n} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{m_i - k_x}{m_i + 1} \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x_{2i} - x))}.$$
  Si $j + 1 \leq i \leq n$, entonces $k_x < \frac{1}{2} m_{j+1} \leq \frac{1}{2} m_i$, luego $\frac{k_x}{m_i} \leq \frac{1}{2}$ y por tanto
$$\frac{m_i - k_x}{m_i + 1} \geq \frac{m_i - k_x}{m_i + m_i} = \frac{1}{2} - \frac{k_x}{2m_i} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$
  así que
$$S_{k_x} f_n(x) \geq \frac{1}{4n} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{4} \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x_{2i} - x))}.$$
  Como $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1} \subset (x_{2j} + \delta, x_{2j+2} - \delta)$ y $x_{2j+2} \leq x_{2i}$ siempre que $j + 1 \leq i \leq n$, entonces $x < x_{2j+2} \leq x_{2i}$, luego
$$\operatorname{sen}\Big(\frac{1}{2}(x_{2i} - x)\Big) \leq \Big|\operatorname{sen}\Big(\frac{1}{2}(x_{2i} - x)\Big)\Big| \leq \frac{1}{2}|x_{2i} - x| = \frac{1}{2}(x_{2i} - x).$$

Llevando esto a la desigualdad anterior,

$$S_{k_x} f_n(x) \geq \frac{1}{4n} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{1}{2}(x_{2i} - x)} = \frac{1}{16n} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{x_{2i} - x}.$$

Usando de nuevo que $x \in (x_{2j} + \delta, x_{2j+2} - \delta)$,

$$x_{2i} - x < x_{2i} - x_{2j} = \frac{4\pi i}{2n+1} - \frac{4\pi j}{2n+1} = \frac{4\pi}{2n+1}(i-j),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} S_{k_x} f_n(x) &\geq \frac{2n+1}{4\pi} \frac{1}{16n} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{i-j} = \frac{2n+1}{64\pi n} \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{i} = \frac{2n+1}{64\pi n} H_{n-j} \\ &= \frac{2n+1}{64\pi n} \log(n-j) \frac{H_{n-j}}{\log(n-j)}. \end{aligned}$$

Como $j \leq n - \sqrt{n}$, entonces $n - j \geq \sqrt{n}$ y por tanto $\lim_{n\to\infty}(n-j) = \infty$. Usando esto y el Lema 2.2.8,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{64\pi n} \frac{H_{n-j}}{\log(n-j)} = \frac{1}{32\pi} > 0,$$

luego existe $C > 0$ tal que $\frac{2n+1}{64\pi n} \frac{H_{n-j}}{\log(n-j)} > 2C$ para n suficientemente grande. En consecuencia,

$$S_{k_x} f_n(x) \geq 2C \log(n-j)$$

Como $n - j \geq \sqrt{n}$ y el logaritmo natural es estrictamente creciente,

$$S_{k_x} f_n(x) \geq 2C \log(\sqrt{n}) = C \log(n).$$

Por tanto,

$$S_{k_x} F_n(x) = S_{k_x} f_n(x) + S_{k_x} \phi_n(x) = S_{k_x} f_n(x) + \phi_n(x) \geq S_{k_x} f_n(x) \geq C \log(n),$$

utilizándose que ϕ_n es un polinomio trigonométrico no negativo de grado $m_0 \leq k_x$. Con esto queda probado (2.2.11).

- *Si n es suficientemente grande, para todo $x \in \bigcup_{j=0}^{2n} I'_j$ se verifica*

$$S_{m_0} F_n(x) > \frac{n}{2}. \tag{2.2.17}$$

Sea $x \in \bigcup_{j=0}^{2n} I'_j$, y sea $l \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$ tal que $x \in I'_l$. Veamos primero que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene

$$|x - x_{2i}| \geq \frac{\pi|l - 2i|}{2n+1}.$$

Si $l - 2i = 0$, la desigualdad se verifica trivialmente. Si $l - 2i > 0$, entonces $l - 2i \geq 1$, luego

$$\begin{aligned} |x - x_{2i}| &\geq x - x_{2i} > x_l - \delta - x_{2i} = \frac{2\pi l}{2n+1} - \delta - \frac{4\pi i}{2n+1} \\ &> \frac{2\pi l}{2n+1} - \frac{\pi}{2n+1} - \frac{4\pi i}{2n+1} = \frac{\pi(2l - 1 - 4i)}{2n+1} \geq \frac{\pi(l-2i)}{2n+1} = \frac{\pi|l-2i|}{2n+1}. \end{aligned}$$

Si $l-2i<0$, entonces $2i-l\geq 1$, luego

$$\begin{aligned}|x-x_{2i}| &\geq x_{2i}-x > x_{2i}-(x_l+\delta) = \frac{4\pi i}{2n+1}-\frac{2\pi l}{2n+1}-\delta \\ &> \frac{4\pi i}{2n+1}-\frac{2\pi l}{2n+1}-\frac{\pi}{2n+1} = \frac{\pi(4i-2l-1)}{2n+1} \geq \frac{\pi(2i-l)}{2n+1} = \frac{\pi|l-2i|}{2n+1}.\end{aligned}$$

En cualquier caso,

$$|x-x_{2i}| \geq \frac{\pi|l-2i|}{2n+1}.$$

Poniendo $k=m_0$ y $j=0$ en la desigualdad (2.2.12) (es claro que $m_j\leq k<m_{j+1}$ y por tanto dicha desigualdad es válida), tenemos

$$S_{m_0}f_n(x) \geq \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i-m_0}{m_i+1}D_{m_0}(x-x_{2i}).$$

Si l es impar, entonces $x-x_{2i}\neq 0$ (pues $|x-x_{2i}|\geq \frac{\pi|l-2i|}{2n+1}>0$), luego

$$S_{m_0}f_n(x) \geq \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i-m_0}{m_i+1}\frac{\operatorname{sen}((m_0+\frac{1}{2})(x-x_{2i}))}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x-x_{2i}))}.$$

Usando que $\operatorname{sen}(\alpha)\geq -1$ y $\operatorname{sen}(\alpha)\leq|\alpha|$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$S_{m_0}f_n(x) \geq -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i-m_0}{m_i+1}\frac{1}{\frac{1}{2}|x-x_{2i}|} = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i-m_0}{m_i+1}\frac{2}{|x-x_{2i}|}.$$

Para todo $i\in\{1,2,\dots,n\}$ se tiene $m_0\leq\frac{1}{2}m_i$, luego

$$\frac{m_i-m_0}{m_i+1} \geq \frac{m_i-m_0}{2m_i} = \frac{1}{2}-\frac{m_0}{2m_i} \geq \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

así que

$$S_{m_0}f_n(x) \geq -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4}\frac{2}{|x-x_{2i}|} = -\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|x-x_{2i}|}.$$

Como se ha probado que $|x-x_{2i}|\geq\frac{\pi|l-2i|}{2n+1}$, entonces $-\frac{1}{|x-x_{2i}|}\geq -\frac{2n+1}{\pi|l-2i|}$, luego

$$S_{m_0}f_n(x) \geq -\frac{2n+1}{4\pi n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|l-2i|}.$$

Si $i\in\{1,2,\dots,n\}$, como $l\neq 2i$, se tiene que $l-2i>0$ si y solo si $i\leq\frac{l-1}{2}$, mientras que $l-2i<0$ si y solo si $i\geq\frac{l+1}{2}$. Por tanto,

$$S_{m_0}f_n(x) \geq -\frac{2n+1}{4\pi n}\left(\sum_{i=1}^{(l-1)/2}\frac{1}{l-2i}+\sum_{i=(l+1)/2}^{n}\frac{1}{2i-l}\right).$$

Acotemos cada una de las sumas. Por un lado,

$$\sum_{i=1}^{(l-1)/2} \frac{1}{l-2i} = \sum_{i=1}^{(l-1)/2} \frac{1}{l-i-i} \leq \sum_{i=1}^{(l-1)/2} \frac{1}{l-i-\frac{l-1}{2}} = \sum_{i=1}^{(l-1)/2} \frac{1}{\frac{l+1}{2}-i} = \sum_{k=1}^{(l-1)/2} \frac{1}{k}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n,$$

utilizándose en la última desigualdad que $\frac{l-1}{2} \leq n$ por ser $l < 2n$. Por otro lado,

$$\sum_{i=(l+1)/2}^{n} \frac{1}{2i-l} = \sum_{i=(l+1)/2}^{n} \frac{1}{i+i-l} \leq \sum_{i=(l+1)/2}^{n} \frac{1}{\frac{l+1}{2}+i-l} = \sum_{i=(l+1)/2}^{n} \frac{1}{i-\frac{l-1}{2}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-(l-1)/2} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n.$$

En consecuencia,

$$S_{m_0} f_n(x) \geq -\frac{2n+1}{4\pi n}(H_n + H_n) = -\frac{2n+1}{2\pi n} H_n = -\frac{2n+1}{2\pi n} \log(n) \frac{H_n}{\log(n)}.$$

Usando de nuevo el Lema 2.2.6,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2\pi n} \frac{H_n}{\log(n)} = \frac{1}{\pi} > 0,$$

luego existe una constante $C' > 0$ de manera que para n suficientemente grande, se verifica $C' > \frac{2n+1}{2\pi n} \frac{H_n}{\log(n)}$ y por tanto

$$S_{m_0} f_n(x) \geq -C' \log(n).$$

Supongamos ahora que l es par, es decir, que existe $i_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tal que $l = 2i_0$. En tal caso, volviendo a usar (2.2.12) con $k = m_0$ y $j = 0$,

$$S_{m_0} f_n(x) \geq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i - m_0}{m_i + 1} D_{m_0}(x - x_{2i})$$
$$= \frac{1}{2n} \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq i_0}} \frac{m_i - m_0}{m_i + 1} D_{m_0}(x - x_{2i}) + \frac{1}{2n} \frac{m_{i_0} - m_0}{m_{i_0} + 1} D_{m_0}(x - x_l).$$

Utilizando (2.2.9) y que $x - x_l \in I_0'$ por ser $x \in I_l'$, se obtiene $D_{m_0}(x - x_l) \geq 0$, y en consecuencia,

$$S_{m_0} f_n(x) \geq \frac{1}{2n} \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq i_0}} \frac{m_i - m_0}{m_i + 1} D_{m_0}(x - x_{2i}).$$

Como $x - x_{2i} \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq i_0$, pueden repetirse los razonamientos anteriores para obtener que existe una constante $C'' > 0$ tal que

$$S_{m_0} f_n(x) \geq -\frac{2n+1}{4\pi n} \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq i_0}} \frac{1}{|l - 2i|} > -C'' \log(n),$$

siempre que se tome n suficientemente grande.

Definiendo $C''' = \text{máx}\{C', C''\}$, se tiene que

$$S_{m_0} f_n(x) > -C''' \log(n)$$

tanto si l es par como impar. Como $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{n}{\log(n)} = \infty$, para n suficientemente grande se verifica $\frac{n}{\log(n)} > 2C'''$, luego $\frac{n}{2} > C''' \log(n)$ y por tanto

$$\begin{aligned} S_{m_0} F_n(x) &= S_{m_0} f_n(x) + S_{m_0}\phi_n(x) = S_{m_0} f_n(x) + \phi_n(x) \geq S_{m_0} f_n(x) + n \\ &> -C''' \log(n) + n > -\frac{n}{2} + n = \frac{n}{2}, \end{aligned}$$

obteniéndose así (2.2.14). En la segunda igualdad se ha usado que ϕ_n es un polinomio trigonométrico de grado m_0, y en la primera desigualdad se ha usado (2.2.10).

Con todo lo anterior finaliza la definición de la sucesión $\{F_n\}_{n=n_0}^\infty$ para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$. Para cada $n \geq n_0$, sean

$$E_n = \Big[0, \frac{4\pi E(n-\sqrt{n})}{2n+1}\Big], \qquad A_n = C\log(n), \qquad \lambda_n = m_0,$$

donde C es la constante que aparece en (2.2.11). Es claro que $A_n > 0$ (podemos suponer $n > 1$) y que $\text{lím}_{n\to\infty} A_n = \infty$.

Obsérvese que m_0 depende de n, y como se razonó que $\lambda_n = m_0 > \frac{2n-1}{2}$, entonces $\text{lím}_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Por otro lado, la función $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{2x+1}$ es estrictamente creciente, pues es derivable y para todo $x \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})(2x+1) - 2(x-\sqrt{x})}{(2x+1)^2} = \frac{2x - \sqrt{x} + 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x + 2\sqrt{x}}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2x+1)^2} = \frac{2x + 2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(2x+1)^2} \geq \frac{3}{2\sqrt{x}(2x+1)^2} > 0, \end{aligned}$$

utilizándose en la penúltima desigualdad que $x \geq 1$ y que $\sqrt{x} \geq 1$. En consecuencia, la sucesión $\{\frac{4\pi E(n-\sqrt{n})}{2n+1}\}_{n=1}^\infty$ es estrictamente creciente, de donde se obtiene que $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$. Como además

$$\frac{4\pi(n-\sqrt{n}-1)}{2n+1} \leq \frac{4\pi E(n-\sqrt{n})}{2n+1} \leq \frac{4\pi(n-\sqrt{n})}{2n+1}$$

y los extremos de la desigualdad tienden a $\frac{4\pi}{2}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\pi E(n-\sqrt{n})}{2n+1} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi,$$

de donde se obtiene que $E_n \subset [0, 2\pi]$ para todo $n \geq n_0$ y $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = [0, 2\pi)$.

Solo queda por probar el apartado (g). Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $x \in E_n = [x_0, x_{2E(n-\sqrt{n})}]$. Se distinguen los siguientes casos:

- Supongamos que $x \in \bigcup_{j=0}^{2n} I'_j$. Llamando $k = m_0$, se tiene $\lambda_n = m_0 = k < m_n = \nu_n$. Por (2.2.14), también se verifica

$$S_k F_n(x) = S_{m_0} F_n(x) > \frac{n}{2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(n)} = 1$, tomando n suficientemente grande, se cumple $\frac{n}{\log(n)} > 2C$, obteniéndose $\frac{n}{2} > C\log(n) = A_n$ y por tanto $S_k F_n(x) > C\log(n) = A_n$.

- Supongamos que $x \in \bigcup_{j=0}^{n-1}(I_{2j} \cup I_{2j+1})$. Sea $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ con $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$. Como $x \le x_{2E(n-\sqrt{n})}$ (porque $x \in E_n$) y $x > x_{2j}$ (porque $x \in I_{2j} \cup I_{2j+1}$), tiene que ser $2j < 2(n - \sqrt{n})$, así que $j < n - \sqrt{n}$ y puede usarse (2.2.11) para obtener que existe $k \in \mathbb{N}$ con

$$m_0 \le m_j \le k < \frac{1}{2} m_{j+1} < \frac{1}{2} m_n < m_n$$

y tal que $S_k F_n(x) > C\log(n)$. Como $\nu_n = m_n$, $m_0 = \lambda_n$ y $C\log(n) = A_n$, se tiene que $\lambda_n \le k < \nu_n$ y que $S_k F_n(x) > A_n$.

Nótese que es imposible que se tenga $x \notin \bigcup_{j=0}^{2n} I'_j$ y $x \notin \bigcup_{j=0}^{n-1}(I_{2j} \cup I_{2j+1})$, pues en ese caso,

$$x \notin \left(\bigcup_{j=0}^{2n} I'_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{2n-1} I_j\right) = [x_0 - \delta, x_{2n} + \delta],$$

y como $[x_0 - \delta, x_{2n} + \delta] \supset [x_0, x_{2E(n-\sqrt{n})}] = E_n$, se tendría $x \notin E_n$.

De cualquier modo, existe $k \in \mathbb{N}$ con $S_k F_n(x) > A_n$ y tal que $\lambda_n \le k \le \nu_n$, concluyendo así la prueba de (g). $\square$

Teorema 2.2.18. *Existe una función de $L^1(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en todo punto.*

Demostración. Sean $\{F_n\}_{n=1}^\infty$, $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ las cuatro sucesiones del lema anterior. Consideramos la sucesión $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ definida por inducción de la siguiente manera:

- $n_1 = 1$.

- Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que n_i está definido. Escogemos $n_{i+1} \in \mathbb{N}$ tal que:

  (a) $n_{i+1} > n_i$.

  (b) $\lambda_{n_{i+1}} > \nu_{n_i}$.

  (c) $A_{n_{i+1}} > 4A_{n_i}$.

  (d) $\sqrt{A_{n_{i+1}}} > \nu_{n_i}$.

  Esto es posible porque $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Ahora consideramos la función $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}} F_{n_k}(t).$$

Veamos en primer lugar que $f \in L^1(\mathbb{T})$. Es claro que f es medible y 2π-periódica, pues las funciones F_{n_k} lo son. Además,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}} F_{n_k}(t)\, dt \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}} F_{n_k}(t)\, dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}} \int_{-\pi}^{\pi} F_{n_k}(t)\, dt \overset{(\ddagger)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{A_{n_k}}},\end{aligned}$$

así que basta ver que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}} < \infty$ para probar que $f \in L^1(\mathbb{T})$. Se aclara lo siguiente:

($*$) Puede intercambiarse la integral con la suma por el teorema de la convergencia monótona (las funciones $\frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}} F_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, son no negativas).

($\ddagger$) Se ha usado que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} F_{n_k}(t)\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(1 + \sum_{j=1}^{\nu_{n_k}} (a_j(n_k)\cos(jt) + b_j(n_k)\operatorname{sen}(jt))\Big)\, dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt + \sum_{j=1}^{\nu_{n_k}} \Big(a_j(n_k) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt)\, dt + b_j(n_k) \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(jt)\, dt\Big) \\ &= 2\pi + \sum_{j=1}^{\nu_{n_k}} \Big(a_j(n_k)\cdot 0 + b_j(n_k)\cdot 0\Big) = 2\pi.\end{aligned}$$

Veamos entonces que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}} < \infty$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_{n_{k+1}} > 4A_{n_k}$ y por tanto $\sqrt{A_{n_{k+1}}} > 2\sqrt{A_{n_k}}$, luego

$$\frac{\sqrt{A_{n_k}}}{\sqrt{A_{n_{k+1}}}} < \frac{\sqrt{A_{n_k}}}{2\sqrt{A_{n_k}}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} < 1.$$

Por el criterio del cociente, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}} < \infty$, lo que prueba que $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Como la serie de Fourier de f es 2π-periódica, basta probar que diverge en todos los puntos de $[0, 2\pi)$. Sea $x \in [0, 2\pi)$ y veamos que la sucesión de sumas parciales $\{S_n f(x)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0, 2\pi)$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_{i_0}}$. Y como $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in E_{n_i}$ para todo $i \geq i_0$. Sea $i \in \mathbb{N}$ con $i \geq i_0$. Se tiene que $f = u + v + w$, donde

$$v = \frac{1}{\sqrt{A_{n_i}}} F_{n_i}, \qquad u = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\sqrt{A_{n_j}}} F_{n_j}, \qquad w = \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_j}}} F_{n_j}.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n f(x) = S_n u(x) + S_n v(x) + S_n w(x).$$

Por el lema anterior, existe $k \in \mathbb{N}$ (que depende de i y de x) con $\lambda_{n_i} \leq k \leq \nu_{n_i}$ y tal que $S_k F_{n_i}(x) > A_{n_i}$. Acotemos inferiormente $S_k f(x)$. En primer lugar,

$$S_k v(x) = \frac{1}{\sqrt{A_{n_i}}} S_k F_{n_i}(x) > \frac{A_{n_i}}{\sqrt{A_{n_i}}} = \sqrt{A_{n_i}}.$$

Además,

$$S_k u(x) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\sqrt{A_{n_j}}} S_k F_{n_j}(x) > \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A_{n_j}}{\sqrt{A_{n_j}}} = \sum_{j=1}^{i-1} \sqrt{A_{n_j}} \geq 0.$$

Por otro lado, usando el Lema 2.2.1,

$$\begin{aligned}
|S_k w(x)| &\leq (4k+1)\|w\|_1 = \frac{4k+1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_j}}} F_{n_j}(t) \Big| \, dt \\
&= \frac{4k+1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_j}}} F_{n_j}(t)\, dt \overset{(*)}{=} \frac{4k+1}{\pi} \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_j}}} \int_{-\pi}^{\pi} F_{n_j}(t)\, dt \\
&= \frac{4k+1}{\pi} \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{A_{n_j}}} = 2(4k+1) \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_j}}} \overset{(\circledast)}{\leq} \frac{2(4k+1)}{\sqrt{A_{n_{i+1}}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{16k+4}{\sqrt{A_{n_{i+1}}}} \leq \frac{16\nu_{n_i}+4}{\sqrt{A_{n_{i+1}}}} \overset{(c)}{\leq} \frac{16\nu_{n_i}+4}{\nu_{n_i}} \leq \frac{16\nu_{n_i}+4\nu_{n_i}}{\nu_{n_i}} = 20,
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $S_k w(x) > -20$. Algunas alcaraciones:

- $(*)$ Se intercambia la integral con la suma por el teorema de la convergencia monótona, teniendo en cuenta que las funciones $\frac{1}{\sqrt{A_{n_j}}} F_{n_j}$, $j \in \mathbb{N}$, son no negativas.

- $(\circledast)$ Se usa que, por (c), para todo $j \in \mathbb{N}$ con $j \geq i+1$ se tiene que $A_{n_i} > 4A_{n_{i-1}}$ y por tanto
$$\sqrt{A_{n_j}} > 2\sqrt{A_{n_{j-1}}} > 2^2\sqrt{A_{n_{j-2}}} > \ldots > 2^{j-i-1}\sqrt{A_{n_{i+1}}},$$
de donde se obtiene que
$$\frac{1}{\sqrt{A_{n_j}}} < \frac{1}{2^{j-i-1}\sqrt{A_{n_{i+1}}}},$$
y en consecuencia,
$$\sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_j}}} \leq \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-i-1}\sqrt{A_{n_{i+1}}}} = \frac{1}{\sqrt{A_{n_{i+1}}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}.$$

Reuniendo todo lo anterior,

$$S_k f(x) = S_k u(x) + S_k v(x) + S_k w(x) > \sqrt{A_{n_i}} - 20.$$

Como $k \leq \nu_{n_i}$, entonces

$$S_{\nu_{n_i}} f(x) \geq S_k f(x) > \sqrt{A_{n_i}} - 20,$$

y esto es válido para todo $i \in \mathbb{N}$ con $i \geq i_0$. Como $\lim_{i\to\infty} n_i = \infty$ (pues $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales) y $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$, entonces

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt{A_{n_i}} = \infty.$$

Llevando esto a la desigualdad anterior, se obtiene

$$\lim_{i\to\infty} S_{\nu_{n_i}} f(x) = \infty.$$

Como $\{S_{\nu_{n_i}} f(x)\}_{i=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{S_n f(x)\}_{n=1}^{\infty}$ que no converge, entonces la serie de Fourier de f en x no converge. $\square$

2.3. El teorema de Carleson-Hunt

Como consecuencia de lo probado en la sección anterior, la convergencia en casi todo punto para series de Fourier de funciones de $L^1(\mathbb{T})$ falla por completo. No ocurre lo mismo en los demás espacios $L^p(\mathbb{T})$, con $1 < p \leq \infty$. Carleson probó en 1966 que si $f \in L^2(\mathbb{T})$, entonces la serie de Fourier de f converge a f en casi todo punto. Unos dos años después, Hunt generalizó el resultado de Carleson y probó lo siguiente.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Carleson-Hunt). *Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$, con $1 < p \leq \infty$. Entonces $\{S_n f\}_{n=0}^{\infty}$ converge a f en casi todo punto.*

La demostración de este resultado escapa al alcance de este trabajo. Puede encontrarse, por ejemplo, en [**?**].

Capítulo 3

Convergencia en L^p

Un resultado importante que se estudia en Análisis Real y Análisis Funcional es que para toda $f \in L^2(\mathbb{T})$ se cumple que $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en $L^2(\mathbb{T})$. El objetivo aquí es probar que esto se verifica para todo p con $1 < p < \infty$, y también probaremos que no se cumple para $p = 1$.

Para $p = \infty$ es claro que no se cumple: en el capítulo anterior se probó que existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tal que $\{S_n f(0)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge puntualmente, así que $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente.

Antes de estudiar los casos $p = 1$ y $1 < p < \infty$, probamos dos resultados auxiliares que serán fundamentales en ambos casos.

Lema 3.0.1. *El conjunto de los polinomios trigonométricos, $\mathcal{P}$, es denso en $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ y sea $\varepsilon > 0$. Hay que probar que existe $F \in \mathcal{P}$ tal que $\|f - F\|_\infty < \varepsilon$. Por el Teorema 1.2.6,

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n f - f\|_\infty = 0,$$

luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\sigma_{n_0} f - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Basta tomar $F = \sigma_{n_0} f$, que es un polinomio trigonométrico por ser suma de polinomios trigonométricos. □

Si $1 \leq p \leq \infty$, se sabe que $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ es denso en $L^p(\mathbb{T})$, así que $\mathcal{P}$ también es denso en $L^p(\mathbb{T})$.

Lema 3.0.2. *Si $1 \leq p < \infty$, son equivalentes:*

(a) *$\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en $L^p(\mathbb{T})$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.*

(b) *Existe $C_p > 0$ tal que*

$$\|S_n f\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Demostración. Supongamos que se cumple (a). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $T_n \colon L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ la aplicación dada por $T_n(f) = S_n f$. Es claro que T_n es lineal, y es continua porque para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ se verifica

$$\|T_n(f)\|_p = \|S_n f\|_p = \|D_n * f\|_p \leq \|D_n\|_1 \|f\|_p.$$

Por otra parte, si $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$0 \leq |\|S_n f\|_p - \|f\|_p| \leq \|S_n f - f\|_p.$$

Y como $\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_p = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|S_n f\|_p = \|f\|_p < \infty$. Por tanto, la sucesión $\{\|S_n f\|_p\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Así, se tiene que

(a) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de aplicaciones lineales y continuas de $L^p(\mathbb{T})$ en $L^p(\mathbb{T})$.

(b) $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

(c) Para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$, el conjunto $\{T_n(f) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $L^p(\mathbb{T})$.

Por el teorema de la acotación uniforme, el conjunto $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado, es decir, existe $C_p > 0$ tal que

$$\|T_n\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|T_n(f)\|_p}{\|f\|_p} = \sup_{f\neq 0} \frac{\|S_n f\|_p}{\|f\|_p} \leq C_p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, si $n \in \mathbb{N}$ y $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$\|S_n f\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

así que se verifica (b).

Supongamos ahora que se cumple (b) y veamos que para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_p = 0$.

En primer lugar, (a) se verifica para los polinomios trigonométricos, pues si F es un polinomio trigonométrico de grado N, entonces $S_n F = F$ para todo $n \geq N$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} \|S_n F - F\|_p = 0$.

Pasamos a probar el caso general. Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\mathcal{P}$ es denso en $L^p(\mathbb{T})$, existe $F \in \mathcal{P}$ tal que

$$\|f - F\|_p < \frac{\varepsilon}{C_p + 1}.$$

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ mayor que el grado de F,

$$\begin{aligned}
\|S_n f - f\|_p &\leq \|S_n f - S_n F\|_p + \|S_n F - f\|_p = \|S_n(f - F)\|_p + \|F - f\|_p \\
&\leq C_p \|f - F\|_p + \|f - F\|_p = \|f - F\|_p (C_p + 1) \\
&< \frac{\varepsilon}{C_p + 1}(C_p + 1) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Se concluye que $\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_p = 0$. □

3.1. Convergencia en L^1

En esta sección se probará que existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que la serie de Fourier de f no converge a f en $L^1(\mathbb{T})$. Esto será inmediato a partir del Lema 3.0.2 y el lema siguiente, que puede encontrarse en [5].

Lema 3.1.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $T_n : L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ la aplicación dada por $T_n(f) = S_n f$. Entonces*

$$\|T_n\| = \|D_n\|_1.$$

Demostración. En la demostración del lema anterior se probó que T_n es lineal y continua, así que $\|T_n\|$ tiene sentido. Como también se razonó que $\|T_n(f)\|_1 \leq \|D_n\|_1\|f\|_1$ para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\|T_n\| \leq \|D_n\|_1$.

Solo queda por demostrar que $\|T_n\| \geq \|D_n\|_1$. Dado $N \in \mathbb{N}$, el núcleo de Fejér K_N verifica

$$\|T_n(K_N)\|_1 = \|S_n K_N\|_1 = \|K_N * D_n\|_1 = \|\sigma_N D_n\|_1.$$

Por el Teorema 1.2.6,

$$\lim_{N\to\infty} \|\sigma_N D_n - D_n\|_1 = 0,$$

luego

$$\lim_{N\to\infty} \|T_n(K_N)\|_1 = \lim_{N\to\infty} \|\sigma_N D_n\|_1 = \|D_n\|_1.$$

Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n(K_N)\|_1 \geq \|D_n\|_1 - \varepsilon.$$

Como $\|K_N\|_1 = 1$, obtenemos

$$\|T_n\| = \sup_{\|f\|_1=1} \|T_n(f)\|_1 \geq \|T_n(K_N)\|_1 \geq \|D_n\|_1 - \varepsilon,$$

y como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, se concluye que $\|T_n\| \geq \|D_n\|_1$. □

Teorema 3.1.2. *Existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a f en $L^1(\mathbb{T})$.*

Demostración. Por el Lema 3.0.2, hay que probar que para todo $C > 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $f \in L^p(\mathbb{T})$ tales que

$$\|S_n f\|_1 > C\|f\|_1.$$

Sea $C > 0$. Usando el lema anterior y el Lema 2.1.1, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = \lim_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \infty,$$

siendo $T_n\colon L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ la aplicación dada por $T_n(f) = S_n f$. Por el contrarrecíproco del teorema de la acotación uniforme, existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que el conjunto $\{T_n(f)\colon n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado en $L^1(\mathbb{T})$. En consecuencia,

$$\|T_n(f)\|_1 = \|S_n f\|_1 > C\|f\|_1.$$ □

3.2. Convergencia en L^p para $1 < p < \infty$

La referencia principal de esta sección es [6]. Comenzamos con algunos resultados auxiliares que serán fundamentales en la demostración del teorema sobre la convergencia de series de Fourier en $L^p(\mathbb{T})$.

Estudiamos en primer lugar un resultado relacionado con el espacio dual de $L^p(\mathbb{T})$ para $1 < p < \infty$.

Lema 3.2.1. *Si $1 < p < \infty$ y p' es el exponente conjugado de p, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned}
\Phi\colon L^{p'}(\mathbb{T}) &\longrightarrow L^p(\mathbb{T})^* \\
g &\longmapsto \Phi(g)\colon L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{C} \\
&\qquad\qquad f \longmapsto \Phi(g)(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt
\end{aligned}$$

es lineal y continua. Además, para toda $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$ se verifica

$$\|g\|_{p'} = \|\Phi(g)\|.$$

Demostración. Veamos que Φ está bien definida. Sea $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$ y veamos que la aplicación $\Phi(g)\colon L^p(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Phi(g)(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$

es lineal y continua. La linealidad es consecuencia directa de la linealidad de la integral. La continuidad se deduce fácilmente de la desigualdad de Hölder, pues para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ se tiene

$$|\Phi(g)(f)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(t)|\,dt = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

Esto también prueba que $\|\Phi(g)\| \leq \|g\|_{p'}$.

De nuevo, la linealidad de Φ es consecuencia directa de la linealidad de la integral: si $g, h \in L^{p'}(\mathbb{T})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ se tiene

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha g + \beta h)(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\alpha g(t) + \beta h(t))\,dt\\ &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt + \frac{\beta}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h(t)\,dt = \alpha\Phi(g)(f) + \beta\Phi(h)(f),\end{aligned}$$

luego $\Phi(\alpha g + \beta h) = \alpha\Phi(g) + \beta\Phi(h)$.

Probemos por último que $\|g\|_{p'} = \|\Phi(g)\|$ para toda $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$. Sea $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$ y veamos que $\|g\|_{p'} \leq \|\Phi(g)\|$. Si $g = 0$, la desigualdad es trivial. Si $g \neq 0$, tomamos

$$f = \frac{|g|^{p'-1}\overline{\operatorname{sgn}(g)}}{\|g\|_{p'}^{p'-1}},$$

donde, para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|} & \text{si } z \neq 0,\\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Se observa que $|\operatorname{sgn}(z)| = 1$ para casi todo $z \in \mathbb{C}$. Usando esto y que $p = \frac{p'}{p'-1}$ por ser p y p' exponentes conjugados, se obtiene

$$\|f\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(t)|^{(p'-1)p}\left|\overline{\operatorname{sgn}(g(t))}\right|^p}{\|g\|_{p'}^{(p'-1)p}}\,dt = \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^{p'}\,dt = 1,$$

luego

$$\begin{aligned}\|\Phi(g)\| \geq |\Phi(g)(f)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(t)|^{p'-1}\overline{\operatorname{sgn}(g(t))}g(t)}{\|g\|_{p'}^{p'-1}}\,dt\right|\\ &= \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'-1}}\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(t)|^{p'-1}\overline{g(t)}g(t)}{|g(t)|}\,dt\right| = \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'-1}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(t)|^{p'-1}|g(t)|^2}{|g(t)|}\,dt\\ &= \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'-1}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^{p'}\,dt = \|g\|_{p'}^{p'-(p'-1)} = \|g\|_{p'}.\end{aligned}$$

Como la desigualdad $\|g\|_{p'} \geq \|\Phi(g)\|$ se demostró junto con la continuidad de $\Phi(g)$, tenemos que $\|g\|_{p'} = \|\Phi(g)\|$. □

En [4] también se demuestra que Φ es biyectiva, y por tanto se trata de un isomorfismo isométrico. Aquí no usaremos la biyectividad de Φ; lo importante es que si $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$, entonces

$$\|g\|_{p'} = \|\Phi(g)\| = \sup_{\|f\|_p=1} |\Phi(g)(f)| = \sup_{\|f\|_p=1} \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt\Big|.$$

Es más, como el conjunto

$$S = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es medible, simple y } 2\pi\text{-periódica}\}$$

es denso en $L^p(\mathbb{T})$ y $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es de Banach, por (1.3.3) se tiene

$$\|g\|_{p'} = \sup_{\substack{\|f\|_p=1\\ f\in S}} \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt\Big|.$$

Análogamente, si $g \in L^p(\mathbb{T})$, entonces

$$\|g\|_{p} = \sup_{\|f\|_{p'}=1} \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt\Big| = \sup_{\substack{\|f\|_{p'}=1\\ f\in S}} \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt\Big|. \tag{3.2.2}$$

El siguiente resultado es una versión simplificada del teorema de interpolación de Riesz-Thorin, suficiente para los fines de este trabajo. Para demostrarlo se ha seguido [4], y previamente se necesita probar el lema que sigue.

Lema 3.2.3 (Lema de las tres líneas). *Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \operatorname{Re}(z) \le 1\}$ y sea $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ una función continua y acotada en A y holomorfa en $\mathring{A}$. Supongamos que existen $M_0, M_1 > 0$ tales que*

- $|\varphi(z)| \le M_0$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re}(z) = 0$.
- $|\varphi(z)| \le M_1$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re}(z) = 1$.

Si $0 < t < 1$, entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(z) = t$ se tiene que

$$|\varphi(z)| \le M_0^{1-t} M_1^t.$$

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $\varphi_\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z} e^{\varepsilon z(z-1)}.$$

Sea $z = x + iy \in A$, de forma que $0 \le x \le 1$. Entonces

$$\begin{aligned} |\varphi_\varepsilon(x+iy)| &= |\varphi(x+iy)||M_0^{x+iy-1}||M_1^{-x-iy}||e^{\varepsilon(x+iy)(x+iy-1)}| \\ &= |\varphi(x+iy)|M_0^{x-1}M_1^{-x}|e^{\varepsilon(x^2-y^2+2ixy-x-iy)}| \\ &= |\varphi(x+iy)|M_0^{x-1}M_1^{-x}e^{\varepsilon(x^2-x)}e^{-\varepsilon y^2} \\ &= |\varphi(x+iy)|M_0^{x-1}M_1^{-x}e^{\varepsilon x(x-1)}e^{-\varepsilon y^2}. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Como φ es acotada en A, existe $C > 0$ tal que $|\varphi(w)| \le C$ para todo $w \in A$. Además, como la función $t \mapsto M_0^{t-1}M_1^{-t}$ es continua en el compacto $[0,1]$, existe $C' > 0$ tal que $M_0^{t-1}M_1^{-t} \le C'$ para todo $t \in [0,1]$. Por tanto, $M_0^{x-1}M_1^{-x} \le C'$. Y como $x \ge 0$ y $x-1 \le 0$, entonces $e^{\varepsilon x(x-1)} \le 1$.

Llevando todo esto a (3.2.4), obtenemos que para todo $x \in [0,1]$ y todo $y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$|\varphi_\varepsilon(x+iy)| \leq CC' e^{-\varepsilon y^2},$$

y por tanto

$$\lim_{\substack{|\mathrm{Im}(z)|\to\infty \\ z\in A}} |\varphi_\varepsilon(z)| = 0,$$

luego existe $M > 0$ tal que para todo $z \in A$ con $|\mathrm{Im}(z)| \geq M$ se tiene que $|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1$.

Por otra parte, si $x = 0$, usando (3.2.4) y que por hipótesis se tiene $|\varphi(iy)| \leq M_0$, obtenemos

$$|\varphi_\varepsilon(iy)| = |\varphi(iy)| M_0^{-1} e^{-\varepsilon y^2} \leq M_0 M_0^{-1} e^{-\varepsilon y^2} = e^{-\varepsilon y^2} \leq 1.$$

Y si $x = 1$, usando (3.2.4) y que por hipótesis se tiene $|\varphi(1+iy)| \leq M_1$, obtenemos

$$|\varphi_\varepsilon(1+iy)| = |\varphi(1+iy)| M_1^{-1} e^{-\varepsilon y^2} \leq M_1 M_1^{-1} e^{-\varepsilon y^2} = e^{-\varepsilon y^2} \leq 1.$$

Consideremos el dominio acotado

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1, -M < \mathrm{Im}(z) < M\}.$$

Hemos probado que para todo $z \in \partial D$ se tiene $|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1$. Como φ es continua en $\overline{D}$ y holomorfa en D, por el principio del módulo máximo, $|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1$ para todo $z \in \overline{D}$, es decir, $|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1$ para todo $z \in A$ con $|\mathrm{Im}(z)| \leq M$. Pero también se sabe que $|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1$ para todo $z \in A$ con $|\mathrm{Im}(z)| \geq M$, así que $|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1$ para todo $z \in A$.

Supongamos entonces que $0 < t < 1$. Usando de nuevo (3.2.4), para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) = t$ se verifica

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} |\varphi_\varepsilon(z)| = \lim_{\varepsilon\to 0^+} |\varphi(z)| M_0^{t-1} M_1^{-t} e^{\varepsilon t(t-1)} e^{-\varepsilon \mathrm{Im}(z)^2} = |\varphi(z)| M_0^{t-1} M_1^{-t}.$$

Y como $|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1$ para todo $\varepsilon > 0$, también tenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} |\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1.$$

Por tanto, $|\varphi(z)| M_0^{t-1} M_1^{-t} \leq 1$, es decir,

$$|\varphi(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t. \qquad \square$$

Teorema 3.2.5 (Teorema de interpolación de Riesz-Thorin). *Sean $p, q, r \in \mathbb{R}$ con $1 < p < r < q < \infty$. Sea $T\colon L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ una aplicación lineal. Supongamos que existen $M_p, M_q > 0$ tales que*

- $\|T(f)\|_p \leq M_p \|f\|_p$ *para toda* $f \in L^p(\mathbb{T})$.
- $\|T(f)\|_q \leq M_q \|f\|_q$ *para toda* $f \in L^q(\mathbb{T})$.

Entonces existe $M_r > 0$ tal que

$$\|T(f)\|_r \leq M_r \|f\|_r$$

para toda $f \in L^r(\mathbb{T})$.

Demostración. Veamos primero que existe $M_r > 0$ tal que $\|T(f)\|_r \leq M_r$ para toda $f \in S$ con $\|f\|_r = 1$. Usaremos para ello (3.2.2), que afirma que

$$\|T(f)\|_r = \sup_{\substack{\|g\|_{r'}=1 \\ g \in S}} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} T(f)(s) g(s)\, ds \right|, \tag{3.2.6}$$

siendo r' el exponente conjugado de r. Sean $f, g \in S$ con $\|f\|_r = 1$ y $\|g\|_{r'} = 1$. Al ser funciones simples, f y g pueden escribirse como

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{E_k}, \qquad g = \sum_{k=1}^{n} d_k \chi_{F_k},$$

donde

- Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ se tiene $c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y además $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ con $i \neq j$.
- Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene $c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y además $F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

Dado $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, escribamos c_k y d_k en forma polar: $c_k = |c_k| e^{i\theta_k}$, $d_k = |d_k| e^{i\psi_k}$. Consideremos la función $\phi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\phi(z) = \frac{1-z}{p} + \frac{z}{q},$$

y para cada $z \in \mathbb{C}$, sean

$$f_z = \sum_{k=1}^{m} |c_k|^{r\phi(z)} e^{i\theta_k} \chi_{E_k}, \qquad g_z = \sum_{j=1}^{n} |d_j|^{\frac{r(1-\phi(z))}{r-1}} e^{i\psi_j} \chi_{F_j}.$$

Como $f_z, g_z \in S \subset L^p(\mathbb{T})$ para todo $z \in \mathbb{C}$, podemos definir la función $\varphi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mediante

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(f_z)(s) g_z(s)\, ds.$$

El objetivo es aplicar a φ el lema de las tres líneas. En primer lugar, usando la linealidad de T y de la integral, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T\Big(\sum_{k=1}^{m} |c_k|^{r\phi(z)} e^{i\theta_k} \chi_{E_k} \Big)(s) \sum_{j=1}^{n} |d_j|^{\frac{r(1-\phi(z))}{r-1}} e^{i\psi_j} \chi_{F_j}(s)\, ds \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |c_k|^{r\phi(z)} |d_j|^{\frac{r(1-\phi(z))}{r-1}} e^{i(\theta_k + \psi_j)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\chi_{E_k})(s) \chi_{F_j}(s)\, ds \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{k,j} |c_k|^{r\phi(z)} |d_j|^{\frac{r(1-\phi(z))}{r-1}} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{k,j} |d_j|^{\frac{r}{r-1}} |c_k|^{r\phi(z)} |d_j|^{-\frac{r\phi(z)}{r-1}},
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

donde

$$C_{k,j} = e^{i(\theta_k + \psi_j)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\chi_{E_k})(s) \chi_{F_j}(s)\, ds.$$

Como ϕ es una función entera, entonces φ también lo es. En particular, llamando

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\},$$

tenemos que φ es holomorfa en $\mathring{A}$ y continua en A. Si $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $z = x + iy \in A$, entonces

$$\mathrm{Re}(\phi(z)) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1-x-iy}{p} + \frac{x+iy}{q}\Big) = \frac{1-x}{p} + \frac{x}{q},$$

y por ser $0 \leq x \leq 1$, se tiene $0 \leq \mathrm{Re}(\phi(z)) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. En consecuencia,

$$\Big| |c_k|^{r\phi(z)} |d_j|^{-\frac{r\phi(z)}{r-1}} \Big| = |c_k|^{r\mathrm{Re}(\phi(z))} |d_j|^{-\frac{r\mathrm{Re}(\phi(z))}{r-1}} \leq |c_k|^{r(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})},$$

y volviendo a (3.2.6) obtenemos

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &= \Big| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{k,j} |d_j|^{\frac{r}{r-1}} |c_k|^{r\phi(z)} |d_j|^{-\frac{r\phi(z)}{r-1}} \Big| \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |C_{k,j}| |d_j|^{\frac{r}{r-1}} \Big| |c_k|^{r\phi(z)} |d_j|^{-\frac{r\phi(z)}{r-1}} \Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |C_{k,j}| |d_j|^{\frac{r}{r-1}} |c_k|^{r(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}, \end{aligned}$$

así que φ es acotada en A.

- Sea $z \in A$ con $\mathrm{Re}(z) = 0$, es decir, $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$. Entonces

  $$\mathrm{Re}(\phi(iy)) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1-iy}{p} + \frac{iy}{q}\Big) = \frac{1}{p}.$$

  Para cada $t \in \mathbb{R}$ existe un único $k_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ con $\chi_{E_{k_0}} = 1$, luego

  $$|f_{iy}(t)| = \Big| \sum_{k=1}^{m} |c_k|^{r\phi(iy)} e^{i\theta_k} \chi_{E_k}(t) \Big| = \Big| |c_{k_0}|^{r\phi(iy)} e^{i\theta_{k_0}} \Big| = |c_{k_0}|^{r\mathrm{Re}(\phi(iy))} = |c_{k_0}|^{\frac{r}{p}},$$

  mientras que

  $$|f(t)| = \Big| \sum_{k=1}^{m} |c_k| e^{i\theta_k} \chi_{E_k} \Big| = \Big| |c_{k_0}| e^{i\theta_{k_0}} \Big| = |c_{k_0}|.$$

  Vemos que $|f_{iy}|^p = |f|^r$, así que $\|f_{iy}\|_p^p = \|f\|_r^r$. Razonamos análogamente con g: para cada $t \in \mathbb{R}$ existe un único $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $\chi_{F_{j_0}} = 1$, luego

  $$\begin{aligned} |g_{iy}(t)| &= \Big| \sum_{j=1}^{n} |d_j|^{\frac{r(1-\phi(iy))}{r-1}} e^{i\psi_j} \chi_{F_j}(t) \Big| = \Big| |d_{j_0}|^{\frac{r(1-\phi(iy))}{r-1}} e^{i\psi_{j_0}} \Big| = |d_{j_0}|^{\frac{r(1-\mathrm{Re}(\phi(iy)))}{r-1}} \\ &= |d_{j_0}|^{\frac{r(1-\frac{1}{p})}{r-1}} = |d_{j_0}|^{\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{r}}} = |d_{j_0}|^{\frac{r'}{p'}}, \end{aligned}$$

  donde r' y p' son los exponentes conjugados de r y p, respectivamente. Por otra parte,

  $$|g(t)| = \Big| \sum_{j=1}^{n} |d_j| e^{i\psi_j} \chi_{F_j} \Big| = \Big| |d_{j_0}| e^{i\psi_{j_0}} \Big| = |d_{j_0}|.$$

Vemos que $|g_{iy}|^{p'} = |g|^{r'}$, así que $\|g_{iy}\|_{p'}^{p'} = \|g\|_{r'}^{r'}$. Usando todo esto, se obtiene

$$\begin{aligned}|\varphi(iy)| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} T(f_{iy})(t)g_{iy}(t)\,dt\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T(f_{iy})(t)||g_{iy}(t)|\,dt = \|T(f_{iy})g_{iy}\|_1 \\ &\overset{(*)}{\le} \|T(f_{iy})\|_p\|g_{iy}\|_{p'} \overset{(\circledast)}{\le} M_p\|f_{iy}\|_p\|g_{iy}\|_{p'} = M_p\|f\|_r^{r/p}\|g\|_{r'}^{r'/p'} \overset{(⁂)}{=} M_p,\end{aligned}$$

donde en $(*)$ se usa la desigualdad de Hölder, en $(\circledast)$ se usa una de las hipótesis del enunciado y en $(⁂)$ se recuerda que $\|f\|_r = 1 = \|g\|_{r'}$.

- Sea $z \in A$ con $\mathrm{Re}(z) = 1$, es decir, $z = 1 + iy$ con $y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathrm{Re}(\phi(1+iy)) = \mathrm{Re}\Big(\frac{iy}{p} + \frac{1+iy}{q}\Big) = \frac{1}{q}.$$

Razonando como en el caso anterior se obtiene $\|f_{1+iy}\|_q^q = \|f\|_r^r$ y $\|g_{1+iy}\|_{q'}^{q'} = \|g\|_{r'}^{r'}$, luego

$$\begin{aligned}|\varphi(1+iy)| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} T(f_{1+iy})(t)g_{1+iy}(t)\,dt\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T(f_{1+iy})(t)||g_{1+iy}(t)|\,dt \\ &\le \|T(f_{1+iy})g_{1+iy}\|_1 \overset{(*)}{\le} \|T(f_{1+iy})\|_q\|g_{1+iy}\|_{q'} \overset{(\circledast)}{\le} M_q\|f_{1+iy}\|_q\|g_{1+iy}\|_{q'} \\ &= M_q\|f\|_r^{r/q}\|g\|_{r'}^{r'/q'} \overset{(⁂)}{=} M_q,\end{aligned}$$

donde en $(*)$ se usa la desigualdad de Hölder, en $(\circledast)$ se usa otra de las hipótesis del enunciado y en $(⁂)$ se recuerda que $\|f\|_r = 1 = \|g\|_{r'}$.

Ya estamos en condiciones de aplicar el el lema de las tres líneas a φ. Veamos antes que existe $t \in (0,1)$ tal que $r\phi(t) = 1$, es decir, $\frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}$. Se tiene que

$$\frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q} \iff pq = rq(1-t) + rpt \iff t = \frac{q(p-r)}{r(p-q)}.$$

Sea $t = \frac{q(p-r)}{r(p-q)}$. Como $1 < p < r < q$, tenemos que $q(p-r) < 0$ y $r(p-q) < 0$, luego $t > 0$. Además,

$$t < 1 \iff q(p-r) > r(p-q) \iff qp > rp \iff q > r,$$

y esto último es cierto por hipótesis. Por tanto, $0 < t < 1$. Por el lema de las tres líneas, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) = t$ se tiene que $|\varphi(z)| \le M_0^{1-t}M_1^t$. En particular, $|\varphi(t)| \le M_0^{1-t}M_1^t$. Hallemos $|\varphi(t)|$. Como $r\phi(t) = 1$, se tiene que

$$f_t = \sum_{k=1}^m |c_k|^{r\phi(t)}e^{i\theta_k}\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^m |c_k|e^{i\theta_k}\chi_{E_k} = f,$$

y también que

$$g_t = \sum_{j=1}^n |d_j|^{\frac{r(1-\phi(t))}{r-1}}e^{i\psi_j}\chi_{F_j} = \sum_{j=1}^n |d_j|^{\frac{r-r\phi(t)}{r-1}}e^{i\psi_j}\chi_{F_j} = \sum_{j=1}^n |d_j|e^{i\psi_j}\chi_{F_j} = g.$$

En consecuencia,

$$|\varphi(t)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} T(f_t)(s)g_t(s)\,ds\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} T(f)(s)g(s)\,ds\Big| \le M_0^{1-t}M_1^t.$$

Como M_0, M_1 y t no dependen de f ni de g, tenemos que

$$\sup_{\substack{\|g\|_{r'}=1\\ g\in S}} \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} T(f)(s)g(s)\,ds\right| \leq M_0^{1-t}M_1^t.$$

Llamando $M_r = M_0^{1-t}M_1^t$ y usando (3.2.6), obtenemos que $\|T(f)\|_r \leq M_r$ para toda $f \in S$ con $\|f\|_r = 1$. Por ser T lineal, esto implica,, que $\|T(f)\|_r \leq M_r\|f\|_r$ para toda $f \in S$.

Finalmente, veamos que $\|T(f)\|_r \leq M_r\|f\|_r$ para toda $f \in L^r(\mathbb{T})$. Sea $f \in L^r(\mathbb{T})$. Como $f\mid_{[-\pi,\pi]}$ es medible, existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones medibles y simples que converge puntualmente a f en $[-\pi,\pi]$ y tal que $|f_n(s)| \leq |f(s)|$ para todo $s \in [-\pi,\pi]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, extendemos f_n a todo $\mathbb{R}$ de forma 2π-periódica, y seguimos llamando f_n a dicha extensión. Se obtiene así una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ en S que converge puntualmente a f y tal que $|f_n(s)| \leq |f(s)|$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Sea

$$E = \{x \in \mathbb{R} \colon |f(x)| > 1\},$$

y sean $g = f\chi_E$, $g_n = f_n\chi_E$, $h = f - g$ y $h_n = f_n - g_n$. Como $f \in L^r(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$, tenemos que $g \in L^p(\mathbb{T})$. Por otra parte, $h_n = f_n - f_n\chi_E = f_n\chi_{E^c}$, con $E^c = \{x \in \mathbb{R}\colon |f(x)| \leq 1\}$. En consecuencia, $|h_n| = |f_n|\chi_{E^c} \leq |f|\chi_{E^c} \leq 1$, luego $h_n \in L^q(\mathbb{T})$.

Por otro lado, como $|f_n - f|^r \leq (|f_n| + |f|)^r \leq 2^r|f|^r$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f^r \in L^1(\mathbb{T})$, puede utilizarse el teorema de la convergencia dominada para obtener

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_r^r = \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(s) - f(s)|^r\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{n\to\infty} |f_n(s) - f(s)|^r\,dt = 0.$$

Como $|g_n - g|^p = |f_n\chi_E - f\chi_E|^p = |f_n - f|^p\chi_E \leq |f_n - f|^r \leq 2^r|f|^r$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f^r \in L^1(\mathbb{T})$, de nuevo por el teorema de la convergencia dominada, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{n\to\infty} |g_n(s) - g(s)|^p\,dt = 0.$$

Y como $|h_n - h|^q = |f_n - f_n\chi_E - f + f\chi_E|^q = |f_n\chi_{E^c} - f\chi_{E^c}|^q \leq 2^q|f|^q\chi_{E^c} \leq 1$, también por el teorema de la convergencia dominada, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\|_q^q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{n\to\infty} |h_n(s) - h(s)|^q\,dt = 0.$$

Como T es lineal y continua,

$$\lim_{n\to\infty} \|T(g_n) - T(g)\|_p = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|T(h_n) - T(h)\|_p = 0.$$

Por el Teorema 1.1.2, existe una subsucesión $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\{T(g_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ converge a $T(g)$ en casi todo punto. Y como

$$\lim_{k\to\infty} \|T(h_{n_k}) - T(h)\|_p = 0,$$

existe una subsucesión $\{h_{n_{k_j}}\}_{j=1}^\infty$ de $\{h_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ que converge a $T(h)$ en casi todo punto. Como $T(f) = T(h) - T(g)$ y $T(f_n) = T(h_n) - T(g_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$\{T(f_{n_{k_j}})\}_{j=1}^{\infty}$ converge a $T(h) - T(g) = T(h-g) = T(f)$ en casi todo punto. Concluimos que

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_r^r &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T(f)(s)|^r\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{j\to\infty} |T(f_{n_{k_j}})(s)|^r\, ds \\ &\overset{(*)}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T(f_{n_{k_j}})(s)|^r\, ds = \liminf_{j\to\infty} \|T(f_{n_{k_j}})\|_r^r \overset{(\ddagger)}{\leq} \liminf_{j\to\infty} M_r^r \|f_{n_{k_j}}\|_r^r \\ &\overset{(\ast\ast\ast)}{=} M_r^r \|f\|_r^r.\end{aligned}$$

donde en $(*)$ se usa el lema de Fatou, en $(\ddagger)$ se usa que $\|T(f_{n_{k_j}})\|_r \leq M_r \|f_{n_{k_j}}\|_r$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y en $(\ast\ast\ast)$ se usa que $\lim_{j\to\infty} \|f_{n_{k_j}} - f\|_r = 0$ y por tanto $\lim_{j\to\infty} \|f_{n_{k_j}}\|_r = \|f\|_r$. $\square$

Antes de enunciar y probar el próximo lema, introducimos las series formales siguientes: si $f \in L^1(\mathbb{T})$, denotamos

- $f^+(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e^{ikt}$,
- $\widetilde{f}(t) = -i \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k) c_k(f) e^{ikt}$,

donde

$$\operatorname{sgn}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k > 0, \\ -1 & \text{si } k < 0, \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

En general, no se sabe para qué puntos estas dos series tienen sentido. Ahora bien, si $F \in \mathcal{P}$ y n es el grado de F, entonces $c_k(F) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $|k| > n$, así que las series anteriores tienen un número finito de términos no nulos. Es claro que $F^+, \widetilde{F} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Lema 3.2.8. *Si $1 < p < \infty$, entonces existe $C_p > 0$ tal que*

$$\|\widetilde{F}\|_p \leq C_p \|F\|_p$$

para todo $F \in \mathcal{P}$.

Demostración. Sea $F \in \mathcal{P}$. Como F es de la forma

$$F(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(F) e^{ikt},$$

entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(F(t)) &= \frac{F(t) + \overline{F(t)}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=-n}^{n} c_k(F) e^{ikt} + \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(F)} e^{-ikt}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=-n}^{n} c_k(F) e^{ikt} + \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_{-k}(F)} e^{ikt}\Big) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{c_k(F) + \overline{c_{-k}(F)}}{2} e^{ikt}.\end{aligned}$$

Razonando análogamente,

$$\operatorname{Im}(F(t)) = \frac{F(t) - \overline{F(t)}}{2i} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{c_k(F) - \overline{c_{-k}(F)}}{2i} e^{ikt}.$$

Por tanto, $\mathrm{Re}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$ también son polinomios trigonométricos, y sus coeficientes de Fourier son

$$c_k(\mathrm{Re}(F)) = \frac{c_k(F) + \overline{c_{-k}(F)}}{2}, \qquad c_k(\mathrm{Im}(F)) = \frac{c_k(F) - \overline{c_{-k}(F)}}{2i}.$$

Usando esto y la linealidad de los coeficientes de Fourier,

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(t) &= -i\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{sgn}(k) c_k(F) e^{ikt} = -i\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{sgn}(k) c_k(\mathrm{Re}(F) + i\mathrm{Im}(F)) e^{ikt} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{sgn}(k) c_k(\mathrm{Im}(F)) e^{ikt} - i\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{sgn}(k) c_k(\mathrm{Re}(F)) e^{ikt} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{sgn}(k) \frac{c_k(F) - \overline{c_{-k}(F)}}{2i} e^{ikt} - i\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{sgn}(k) \frac{c_k(F) + \overline{c_{-k}(F)}}{2} e^{ikt}. \qquad (3.2.9)
\end{aligned}$$

Primero demostraremos el lema para $p = 2m$, con $m \in \mathbb{N}$. Lo hacemos distinguiendo tres casos, cada uno más general que el anterior.

- Supongamos primero que F toma valores reales y que $c_0(F) = 0$. Entonces

$$\overline{c_{-k}(F)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{ikt}\,dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(t)} e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-ikt}\,dt = c_k(F)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo en (3.2.3),

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(t) &= -i\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{sgn}(k) c_k(F) e^{ikt} = -i\sum_{k=1}^{n} c_k(F) e^{ikt} + i\sum_{k=1}^{n} c_{-k}(F) e^{-ikt} \\
&= -i\sum_{k=1}^{n} c_k(F) e^{ikt} + i\sum_{k=1}^{n} \overline{c_k(F) e^{ikt}}.
\end{aligned}$$

Vemos que $\widetilde{F}(t) \in \mathbb{R}$ por ser suma de un número complejo y su conjugado. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
F(t) + i\widetilde{F}(t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(F) e^{ikt} - i^2 \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{sgn}(k) c_k(F) e^{ikt} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} c_k(F) e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} c_k(F) e^{ikt} - \sum_{k=-n}^{-1} c_k(F) e^{ikt} \\
&= c_0(F) + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(F) e^{ikt} = 2\sum_{k=1}^{n} c_k(F) e^{ikt}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $c_k(F + i\widetilde{F}) = 0$ para todo $k \leq 0$. Probemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (F(t) + i\widetilde{F}(t))^{2m}\,dt = 0$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. La función $G = (F + i\widetilde{F})^{2m}$ es suma y producto de polinomios trigonométricos, así que es un polinomio trigonométrico. Y como $c_k(F + i\widetilde{F}) = 0$

para todo $k \leq 0$, entonces $c_k(G) = 0$ para todo $k \leq 0$. En particular, $c_0(G) = 0$, luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} (F(t) + i\widetilde{F}(t))^{2m}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} G(t)\, dt = 2\pi c_0(G) = 0.$$

Por otro lado,

$$(F(t) + i\widetilde{F}(t))^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} F(t)^k i^{2m-k} \widetilde{F}(t)^{2m-k}.$$

Como F y $\widetilde{F}$ toman valores reales, tenemos que

$$\binom{2m}{k} F(t)^k i^{2m-k} \widetilde{F}(t)^{2m-k} \in \mathbb{R} \iff i^{2m-k} \in \{-1, 1\} \iff k \text{ es par.}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((F(t) + i\widetilde{F}(t))^{2m}) &= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} F(t)^{2k} i^{2m-2k} \widetilde{F}(t)^{2m-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{2m}{2k} F(t)^{2k} \widetilde{F}(t)^{2m-2k}. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} (F(t) + i\widetilde{F}(t))^{2m}\, dt = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} (F(t) + i\widetilde{F}(t))^{2m}\, dt\Big) &= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}((F(t) + i\widetilde{F}(t))^{2m})\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{2m}{2k} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)^{2k} \widetilde{F}(t)^{2m-2k}\, dt = 0. \end{aligned}$$

Separando el sumando $k = 0$ del resto,

$$(-1)^m \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}(t)^{2m}\, dt = -\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{2m}{2k} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)^{2k} \widetilde{F}(t)^{2m-2k}\, dt.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}(t)^{2m}\, dt &= (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{2m}{2k} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)^{2k} \widetilde{F}(t)^{2m-2k}\, dt \\ &= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{2m-k+1} \binom{2m}{2k} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)^{2k} \widetilde{F}(t)^{2m-2k}\, dt, \end{aligned}$$

Utilizando esto y que $\widetilde{F}^{2m}$, F^{2k} y $\widetilde{F}^{2m-2k}$ toman valores reales no negativos,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{F}\|_{2m}^{2m} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{F}(t)|^{2m}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}(t)^{2m}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{2m-k+1}\binom{2m}{2k}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)^{2k}\widetilde{F}(t)^{2m-2k}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{2m-k+1}\binom{2m}{2k}\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^{2k}|\widetilde{F}(t)|^{2m-2k}\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{2m-k+1}\binom{2m}{2k}\|F^{2k}\widetilde{F}^{2m-2k}\|_1 \\
&\le \sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{2k}\|F^{2k}\widetilde{F}^{2m-2k}\|_1.
\end{aligned}$$

Para $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, aplicamos la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados $\frac{2m}{2m-2k}$ y $\frac{2m}{2k}$, obteniendo

$$\begin{aligned}
\|F^{2k}\widetilde{F}^{2m-2k}\|_1 &\le \|F^{2k}\|_{\frac{2m}{2k}}\|\widetilde{F}^{2m-2k}\|_{\frac{2m}{2m-2k}} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)^{2k\frac{2m}{2k}}\,dt\right)^{\frac{2k}{2m}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}(t)^{2m-2k\frac{2m}{2m-2k}}\,dt\right)^{\frac{2m-2k}{2m}} \\
&= \|F\|_{2m}^{2k}\|\widetilde{F}\|_{2m}^{2m-2k}.
\end{aligned}$$

Si $k = m$, sigue siendo cierta la desigualdad $\|F^{2k}\widetilde{F}^{2m-2k}\|_1 \le \|F\|_{2m}^{2k}\|\widetilde{F}\|_{2m}^{2m-2k}$. Tenemos entonces

$$\|\widetilde{F}\|_{2m}^{2m} \le \sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{2k}\|F\|_{2m}^{2k}\|\widetilde{F}\|_{2m}^{2m-2k}.$$

Dividiendo por $\|\widetilde{F}\|_{2m}^{2m}$ (si fuese $\widetilde{F} = 0$ no hay nada que probar),

$$1 \le \sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{2k}\left(\frac{\|F\|_{2m}}{\|\widetilde{F}\|_{2m}}\right)^{2k}.$$

Sea $R = \frac{\|F\|_{2m}}{\|\widetilde{F}\|_{2m}}$ y consideremos la función $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{2k}t^{2k}.$$

La última desigualdad nos dice que $\varphi(R) \ge 1$. También tenemos que φ es continua, estrictamente creciente y tal que

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty, \qquad \varphi(0) = 0.$$

Por el teorema de los valores intermedios, existe $C > 0$ (que solo depende de m) tal que $\varphi(C) = 1$. Como $\varphi(R) \ge 1$ y φ es estrictamente creciente, tiene que ser $R \ge C$, luego

$$\|F\|_{2m} \ge C\|\widetilde{F}\|_{2m}.$$

Llamando $C_{2m} = \frac{1}{C}$, obtenemos que

$$\|\widetilde{F}\|_{2m} \le C_{2m}\|F\|_{2m}.$$

- Supongamos ahora que F toma valores reales. Aplicando lo que se acaba de probar a $G = F - c_0(F)$, que es un polinomio trigonométrico que toma valores reales y que verifica $c_0(G) = 0$, obtenemos

$$\|\widetilde{G}\|_{2m} \leq C_{2m}\|G\|_{2m}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(t) &= -i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)c_k(F)e^{ikt} = -i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)c_k(G + c_0(F))e^{ikt} \\ &= -i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)c_k(G)e^{ikt} - i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)c_k(c_0(F))e^{ikt} \\ &= -i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)c_k(G)e^{ikt} = \widetilde{G}(t),\end{aligned}$$

utilizándose la linealidad de los coeficientes de Fourier y que $c_k(c_0(F)) = 0$ para $k \neq 0$. Por tanto,

$$\|\widetilde{F}\|_{2m} = \|\widetilde{G}\|_{2m} \leq C_{2m}\|G\|_{2m} = C_{2m}\|F - c_0(F)\|_{2m} \leq C_{2m}(\|F\|_{2m} + \|c_0(F)\|_{2m}).$$

Ahora bien,

$$\|c_0(F)\|_{2m} = |c_0(F)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt\right| \leq \|F\|_1 \leq \|F\|_{2m},$$

aplicándose en la última desigualdad la desigualdad de Hölder a la función F y la función constante 1. Por tanto,

$$\|\widetilde{F}\|_{2m} \leq C_{2m}(\|F\|_{2m} + \|F\|_{2m}) = 2C_{2m}\|F_{2m}\|.$$

- Veamos el caso general. Como $\operatorname{Re}(F)$ e $\operatorname{Im}(F)$ son polinomios trigonométricos que toman valores reales, por lo probado anteriormente,

$$\|\widetilde{\operatorname{Re}(F)}\|_{2m} \leq 2C_{2m}\|\operatorname{Re}(F)\|_{2m}, \qquad \|\widetilde{\operatorname{Im}(F)}\|_{2m} \leq 2C_{2m}\|\operatorname{Im}(F)\|_{2m}.$$

Usando de nuevo la linealidad de los coeficientes de Fourier,

$$\begin{aligned}\widetilde{\operatorname{Re}(F)}(t) + i\widetilde{\operatorname{Im}(F)}(t) &= -i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)c_k(\operatorname{Re}(F))e^{ikt} - i^2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)c_k(\operatorname{Im}(F))e^{ikt} \\ &= -i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)c_k(\operatorname{Re}(F) + i\operatorname{Im}(F))e^{ikt} \\ &= -i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)c_k(F)e^{ikt} = \widetilde{F}(t).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{F}\|_{2m} &= \|\widetilde{\operatorname{Re}(F)} + i\widetilde{\operatorname{Im}(F)}\|_{2m} \leq \|\widetilde{\operatorname{Re}(F)}\|_{2m} + \|\widetilde{\operatorname{Im}(F)}\|_{2m} \\ &\leq 2C_{2m}(\|\operatorname{Re}(F)\|_{2m} + \|\operatorname{Im}(F)\|_{2m}) \leq 2C_{2m}(\|F\|_{2m} + \|F\|_{2m}) = 4C_{2m}\|F\|_{2m},\end{aligned}$$

utilizando en la última desigualdad que $|\operatorname{Re}(F(t))| \leq |F(t)|$ y $|\operatorname{Im}(F(t))| \leq |F(t)|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo que implica $\|\operatorname{Re}(F)\|_{2m} \leq \|F\|_{2m}$ y $\|\operatorname{Im}(F)\|_{2m} \leq \|F\|_{2m}$.

Con esto concluye la demostración del lema para $p \in 2\mathbb{N}$. Probémoslo ahora para $p > 2$. Sea $p > 2$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $2m \leq p \leq 2m + 2$. Entonces se tiene $L^{2m+2}(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T}) \subset L^{2m}(\mathbb{T})$. Las aplicaciones

$$\begin{aligned} T_1 \colon \mathcal{P} &\longrightarrow L^{2m}(\mathbb{T}) \\ F &\longmapsto \widetilde{F} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} T_2 \colon \mathcal{P} &\longrightarrow L^{2m+2}(\mathbb{T}) \\ F &\longmapsto \widetilde{F} \end{aligned}$$

son lineales (consecuencia inmediata de la linealidad de los coeficientes de Fourier) y continuas (por lo probado anteriormente). Como $\mathcal{P}$ es denso en $L^{2m}(\mathbb{T})$ y en $L^{2m+2}(\mathbb{T})$, por el Teorema 1.3.3, T_1 y T_2 pueden extenderse de forma lineal y continua a $L^{2m}(\mathbb{T})$ y $L^{2m+2}(\mathbb{T})$, respectivamente. Seguimos llamando T_1 y T_2 a estas extensiones. Nótese que si $f \in L^{2m+2}(\mathbb{T})$, entonces $T_2(f) = T_1(f)$, pues si $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{P}$ que converge a f en $L^{2m+2}(\mathbb{T})$, entonces también converge a f en $L^{2m}(\mathbb{T})$, así que, por definición de T_1 y T_2,

$$T_2(f) = \lim_{n\to\infty} T_2(F_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{F_n} = \lim_{n\to\infty} T_1(F_n) = T_1(f).$$

Sea $T = T_1$, que es una aplicación lineal que verifica

- Para toda $f \in L^{2m}(\mathbb{T})$,

$$\|T(f)\|_{2m} = \|T_1(f)\|_{2m} \leq \|T_1\| \|f\|_{2m}.$$

- Para toda $f \in L^{2m+2}(\mathbb{T})$,

$$\|T(f)\|_{2m+2} = \|T_1(f)\|_{2m+2} = \|T_2(f)\|_{2m+2} \leq \|T_2\| \|f\|_{2m+2}.$$

Como $2m < p < 2m + 2$, por el teorema de interpolación de Riesz-Thorin, existe $M_p > 0$ tal que

$$\|T(f)\|_p \leq M_p \|f\|_p$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$. En particular,

$$\|T(F)\|_p = \|\widetilde{F}\|_p \leq M_p \|F\|_p$$

para todo $F \in \mathcal{P}$.

Antes de estudiar el caso restante, resultará útil demostrar que para todo $k \in \mathbb{Z}$ y toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ se tiene

$$c_k(T(f)) = -i\operatorname{sgn}(k) c_k(f).$$

Sea $k \in \mathbb{Z}$. La aplicación

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{T}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto c_k(f) \end{aligned}$$

es lineal (por la linealidad de los coeficientes de Fourier) y es continua, pues para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$ se tiene

$$|c_k(f)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt = \|f\|_1.$$

Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ y sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{P}$ que converge a f en $L^p(\mathbb{T})$. Como $L^p(\mathbb{T}) \subset L^{2m}(T)$, entonces

$$T(f) = T_1(f) = \lim_{n\to\infty} T_1(F_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{F_n}.$$

En consecuencia,

$$c_k(T(f)) = c_k(\lim_{n\to\infty} \widetilde{F_n}) = \lim_{n\to\infty} c_k(\widetilde{F_n}) = \lim_{n\to\infty} -i\operatorname{sgn}(k)c_k(F_n) = -i\operatorname{sgn}(k)\lim_{n\to\infty} c_k(F_n)$$
$$= -i\operatorname{sgn}(k)c_k(\lim_{n\to\infty} F_n) = -i\operatorname{sgn}(k)c_k(f).$$

Ahora sí, pasamos a probar el lema para $1 < p < 2$. Supongamos que $1 < p < 2$. Sea p' el exponente conjugado de p. Como $p' > 2$, por lo probado anteriormente, existe una aplicación lineal y continua $T\colon L^{p'}(\mathbb{T}) \to L^{p'}(\mathbb{T})$ tal que $T(F) = \widetilde{F}$ para todo $F \in \mathcal{P}$. Esta aplicación verifica

- $\|T(f)\|_{p'} \leq \|T\|\|f\|_{p'}$ para toda $f \in L^{p'}(\mathbb{T})$.
- $c_k(T(f)) = -i\operatorname{sgn}(k)c_k(f)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y toda $f \in L^{p'}(\mathbb{T})$.

Sea $F \in \mathcal{P}$. Por (1.3.1),

$$\|\widetilde{F}\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}(t)g(t)\,dt\Big| = \sup_{\|\overline{g}\|_{p'}=1} \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}(t)\overline{g(t)}\,dt\Big|$$
$$= \sup_{\|g\|_{p'}=1} \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}(t)\overline{g(t)}\,dt\Big|.$$

Si $g \in L^{p'}(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ es tal que $\|g\|_{p'} = 1$, usando (1.2.9),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\widetilde{F})\overline{c_k(g)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} -i\operatorname{sgn}(k)c_k(F)\overline{c_k(g)}$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F)\overline{i\operatorname{sgn}(k)c_k(g)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F)\overline{-c_k(T(g))}$$
$$= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F)\overline{c_k(T(g))} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\overline{T(g)(t)}\,dt.$$

Tomando módulos,

$$\frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}(t)\overline{g(t)}\,dt\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\overline{T(g)(t)}\,dt\Big| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)||T(g)(t)|\,dt = \|F\cdot T(g)\|_1$$
$$\leq \|F\|_p\|T(g)\|_{p'} \leq \|T\|\|F\|_p\|g\|_{p'} = \|T\|\|F\|_p,$$

utilizándose la desigualdad de Hölder en la segunda desigualdad. Concluimos que

$$\|\widetilde{F}\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}(t)\overline{g(t)}\,dt\Big| \leq \|T\|\|F\|_p.$$ □

Lema 3.2.10. *Si $1 < p < \infty$, entonces existe $C_p > 0$ tal que*

$$\|F^+\|_p \leq C_p\|F\|_p.$$

para todo $F \in \mathcal{P}$.

Demostración. Por el lema anterior, existe $C_p' > 0$ tal que

$$\|\widetilde{F}\|_p \leq C_p'\|F\|_p$$

para todo $F \in \mathcal{P}$. Veamos también que para todo $F \in \mathcal{P}$ se tiene

$$F^+ = \frac{1}{2}(F + i\widetilde{F}) - \frac{1}{2}c_0(F).$$

Sea $F \in \mathcal{P}$ y sea n el grado de F. En la demostración del lema anterior se probó que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) + i\widetilde{F}(t) = c_0(F) + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(F)e^{ikt}.$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{2}(F(t) + i\widetilde{F}(t)) - \frac{1}{2}c_0(F) = \frac{1}{2}c_0(F) + \sum_{k=1}^{n} c_k(F)e^{ikt} - \frac{1}{2}c_0(F) = \sum_{k=1}^{n} c_k(F)e^{ikt} = F^+(t),$$

lo que prueba que $F^+ = \frac{1}{2}(F + i\widetilde{F}) - \frac{1}{2}c_0(F)$. Por otra parte, para todo $F \in \mathcal{P}$,

$$\|c_0(F)\|_p = |c_0(F)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt\right| \leq \|F\|_1 \leq \|F\|_p,$$

aplicando en la última desigualdad la desigualdad de Hölder a la función F y la función constante 1. Reuniendo todo lo anterior,

$$\begin{aligned}\|F^+\|_p &= \left\|\frac{1}{2}(F + i\widetilde{F}) - \frac{1}{2}c_0(F)\right\|_p \leq \frac{1}{2}(\|F\|_p + \|\widetilde{F}\|_p + \|c_0(F)\|_p) \\ &\leq \frac{1}{2}(\|F\|_p + C_p\|F\|_p + \|F\|_p) = \left(\frac{C_p}{2} + 1\right)\|F\|_p\end{aligned}$$

para todo $F \in \mathcal{P}$. □

Teorema 3.2.11. *Si $1 < p < \infty$, entonces $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en $L^p(\mathbb{T})$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.*

Demostración. Basta probar que se verifica el apartado (b) del Lema 3.0.2.

Lo probamos primero para los polinomios trigonométricos. Sea C_p la constante positiva proporcionada por el teorema anterior. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $F \in \mathcal{P}$. Entonces

$$S_nF(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(F)e^{ikx} = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n}(F)e^{i(k-n)x} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} c_{k-n}(F)e^{ikx}.$$

Por definición de los coeficientes de Fourier,

$$c_{k-n}(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-i(k-n)t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}F(t)e^{-ikt}\,dt = c_k(G),$$

donde $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es la función dada por $G(t) = e^{int}F(t)$. En consecuencia,

$$|S_nF(x)| = \left|e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} c_k(G)e^{ikx}\right| = \left|\sum_{k=0}^{2n} c_k(G)e^{ikx}\right|. \tag{3.2.12}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} c_k(G)e^{ikx} &= c_0(G) + \sum_{k=1}^{2n} c_k(G)e^{ikx} = c_0(G) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(G)e^{ikx} - \sum_{k=2n+1}^{\infty} c_k(G)e^{ikx} \\ &= c_0(G) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(G)e^{ikx} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{2n+k}(G)e^{i(2n+k)x} \\ &= c_0(G) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(G)e^{ikx} - e^{2inx}\sum_{k=1}^{\infty} c_{2n+k}(G)e^{ikx}.\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}c_{2n+k}(G) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)e^{-i(2n+k)t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2int}G(t)e^{-ikt}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2int}e^{int}F(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}F(t)e^{-ikt}\,dt = c_k(H),\end{aligned}$$

donde $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es la función dada por $H(t) = e^{-int}F(t)$. Llevando esto a las igualdades anteriores,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} c_k(G)e^{ikx} &= c_0(G) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(G)e^{ikx} - e^{2inx}\sum_{k=1}^{\infty} c_k(H)e^{ikx} \\ &= c_0(G) + G^+(x) - e^{2inx}H^+(x).\end{aligned}$$

Nótese que $G, H \in \mathcal{P}$ y por tanto G^+ y H^+ tienen sentido. Usando esto junto con (3.2.6),

$$\begin{aligned}\|S_nF\|_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_nF(x)|^p\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=0}^{2n} c_k(G)e^{ikx}\Big|^p\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |c_0(G) + G^+(x) - e^{2inx}H^+(x)|^p\,dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(|c_0(G)|^p + |G^+(x)|^p + |e^{2inx}H^+(x)|^p\Big)\,dx \\ &= |c_0(G)|^p + \|G^+\|_p^p + \|H^+\|_p^p \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Acotemos cada uno de los sumandos.

- Como $G, H \in \mathcal{P}$, entonces $\|G^+\|_p \leq C_p\|G\|_p$ y $\|H^+\|_p \leq C_p\|H\|_p$. Y como $|F(t)| = |G(t)| = |H(t)|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $\|F\|_p = \|G\|_p = \|H\|_p$. Por tanto,

$$\|G^+\|_p^p + \|H^+\|_p^p \leq C_p^p(\|G\|_p^p + \|H\|_p^p) = 2C_p^p\|F\|_p^p.$$

- Se tiene que

$$|c_0(G)| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,dt\Big| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|G(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|\,dt.$$

  Por la desigualdad de Hölder,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|\,dt \leq \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|^p\,dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dt\Big)^{\frac{1}{p'}} = \|F\|_p,$$

  luego $|c_0(G)|^p \leq \|F\|_p^p$.

Llevando esto a (3.2.7),

$$\|S_n F\|_p^p \leq \|F\|_p^p + 2C_p^p \|F\|_p^p = (2C_p^p + 1)\|F\|_p^p.$$

Llamando $C_p' = (2C_p^p + 1)^{\frac{1}{p}}$, se tiene

$$\|S_n F\|_p \leq C_p' \|F\|_p.$$

Esta desigualdad es válida para todo $F \in \mathcal{P}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f \in L^p(\mathbb{T})$. Por la densidad de $\mathcal{P}$ en $L^p(\mathbb{T})$, existe una sucesión $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathcal{P}$ tal que

$$\|f - F_k\|_p \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

Por un lado, por la continuidad de la norma,

$$\|F_k\|_p \xrightarrow{k \to \infty} \|f\|_p.$$

Por otro lado, como la aplicación

$$\begin{aligned} T_n \colon L^p(\mathbb{T}) &\longrightarrow L^p(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto S_n f \end{aligned}$$

es continua (se razonó en la demostración del Lema 3.0.2), entonces

$$\|S_n(f - F_k)\|_p \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

Por tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|S_n f\|_p = \|S_n f - S_n F_k + S_n F_k\|_p = \|S_n(f - F_k) + S_n F_k\|_p \leq \|S_n(f - F_k)\|_p + \|S_n F_k\|_p.$$

Por lo probado anteriormente,

$$\|S_n F_k\|_p \leq C_p' \|F_k\|_p,$$

luego

$$\|S_n f\|_p \leq \|S_n(f - F_k)\|_p + C_p' \|F_k\|_p.$$

Tomando límites cuando $k \to \infty$, concluimos que

$$\|S_n f\|_p \leq C_p' \|f\|_p. \qquad \square$$

Bibliografía

[1] Duoandikoetxea, Javier: *Fourier analysis*, volumen 29 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, ISBN 0-8218-2172-5. `https://doi.org/10.1090/gsm/029`, Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[2] Duoandikoetxea, Javier: *200 años de convergencia de las series de Fourier*. La Gaceta de la RSME, 10.3:651–688, 2007.

[3] Fierros Bobadilla, Jorge Usbaldo y Rivera Martínez, Hermenegildo: *Análisis de la convergencia de las series de Fourier*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Sonora, 1996. `https://lic.mat.uson.mx/tesis/93_94TesisMere_Fierros.PDF`.

[4] Folland, Gerald B.: *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edición, 1999, ISBN 0-471-31716-0. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[5] Katznelson, Yitzhak: *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edición, 2004, ISBN 0-521-83829-0; 0-521-54359-2. `https://doi.org/10.1017/CBO9781139165372`.

[6] Miao, Jing: *Convergence of Fourier series in L^p space*. Universidad de Chicago, 2014. `https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Miao.pdf`.

[7] Schmidt, Wolfgang M.: *Diophantine approximation*, volumen 785 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980, ISBN 3-540-09762-7.

[8] Zygmund, A.: *Trigonometric series. Vol. I, II.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edición, 2002, ISBN 0-521-89053-5. With a foreword by Robert A. Fefferman.