Facultad de Ciencias – Universidad de Málaga
ANÁLISIS NUMÉRICO
3º de Grado en Matemáticas – Curso 2022/23
5 de junio de 2023

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Nombre: ____________________

– Primera convocatoria ordinaria–

1. Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función p veces diferenciable.

a) Escriba la expresión del método de Taylor de orden p en la forma

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k; h), \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

y pruebe, usando las condiciones de orden vistas en clase, que el método es efectivamente de orden p.

b) Considere el caso particular

$$f(t, y) = \lambda y,$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$. Aplique el método de Taylor de orden p y deduzca su función de estabilidad absoluta, es decir, busque una función $R(\hat{h})$ tal que

$$y_k = R(\hat{h})^k y_0, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

siendo $\hat{h} = \lambda h$. ¿Es el método A-estable para algún valor de p?

2. Dado $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se considera el método RK de tablero

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \alpha & -\alpha \\ 2\alpha & \alpha & \alpha \\ \hline & 1-\beta & \beta. \end{array} \tag{2}$$

a) Estudie el orden del método.

b) Proponga para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, si es posible, dos valores β y β^* de tal manera que los métodos correspondientes constituyan un método RK encajado.

c) Se aplica cualquier método de tablero (2) a un problema de Cauchy (1) con f de Lipschitz en la variable y. Encuentre $h^* > 0$ tal que se pueda asegurar que si $h \in (0, h^*)$ el método está bien definido, es decir, que una vez calculado y_k, el sistema no lineal a resolver para obtener y_{k+1} tiene solución y es única. Proponga un algoritmo para resolver dicho sistema.

3. Dado $q \in \mathbb{N}$ distinto de 0, se considera el método numérico:

$$p_q'(t_k) = f(t_k, y_k), \quad k = q, q+1, \ldots$$

siendo $p_q(t)$ el polinomio de grado menor o igual que q que interpola los $q+1$ puntos

$$(t_{k+1}, y_{k+1}), \ldots, (t_{k-q+1}, y_{k-q+1}).$$

a) ¿Se trata de un método unipaso o mutlipaso? ¿Explícito o implícito? Responda razonadamente.

b) Deduzca la expresión del método para $q = 2$ y estudie su estabilidad, consistencia, orden y región de estabilidad absoluta.