Práctica 9 **David López del Pino**

En esta práctica se implementan varios esquemas en diferencias finitas para la ecuación de ondas no lineal $u_{tt} - u_{xx} + \gamma u^3 = 0$, con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas y con condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$.

1. *Esquema explícito*. Se realizan las aproximaciones

$$u_{tt}(x_i,t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}, \qquad u_{xx}(x_i,t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

y se sustituyen en la ecuación, quedando

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \gamma (u_i^n)^3 = 0.$$

Multiplicando por Δt^2 y despejando,

$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} u_{i-1}^n + (2 - 2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}) u_i^n + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} u_{i+1}^n - u_i^{n-1} - \gamma \Delta t^2 (u_i^n)^3.$$

Si N es el número de puntos de la discretización en espacio, hay que tener en cuenta en las ecuaciones $i = 1$ e $i = N-2$ que $u_0^k = 0$ y $u_{N-1}^k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pues en los extremos hay condiciones de Dirichlet homogéneas. Esto también se aplicará a los demás esquemas de la práctica.

Las aproximaciones u_i^0 vienen dadas por los datos iniciales, pero también es necesario conocer u_i^1 para implementar los esquemas. Para aproximar $u(x_i, \Delta t)$, se realiza el desarrollo de Taylor siguiente:

$$u(x_i,\Delta t) = u(x_i,0) + \Delta t u_t(x_i,0) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x_i,0) + O(\Delta t^3).$$

Como $u(x_i,0) = f(x_i)$, $u_t(x_i,0) = g(x_i)$ y $u_{tt}(x_i,0) = u_{xx}(x_i,0) - \gamma f(x_i)^3$, se obtiene

$$u(x_i,\Delta t) = f(x_i) + \Delta t g(x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{xx}(x_i,0) - \frac{\gamma \Delta t^2}{2} f(x_i)^3 + O(\Delta t^3).$$

Y como $u_{xx}(x_i,0) = f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2}$,

$$u(x_i,\Delta t) \approx f(x_i) + \Delta t g(x_i) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) - \frac{\gamma \Delta t^2}{2} f(x_i)^3.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} u_i^1 &= f(x_i) + \Delta t g(x_i) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) - \frac{\gamma \Delta t^2}{2} f(x_i)^3 \\ &= (1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}) f(x_i) + \Delta t g(x_i) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) - \frac{\gamma \Delta t^2}{2} f(x_i)^3, \end{aligned}$$

y con esto ya está bien definido el esquema. Este esquema se implementa en la función `ondas_no_lineal_expl`.

2. *Esquema semi-implícito*. Se realizan las aproximaciones

$$u_{tt}(x_i,t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}, \qquad u_{xx}(x_i,t_n) \approx \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2},$$

y se sustituyen en la ecuación, quedando

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \gamma (u_i^n)^3 = 0.$$

Multiplicando por Δt^2 y reagrupando términos,

$$-\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}) u_i^{n+1} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} u_{i+1}^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} - \gamma \Delta t^2 (u_i^n)^3.$$

En cada iteración de tiempo hay que resolver el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cccc} 1+2s & -s & \cdots & 0 \\ -s & 1+2s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+2s \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{n+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 2u_1^n - u_1^{n-1} - \gamma \Delta t^2 (u_1^n)^3 \\ 2u_2^n - u_2^{n-1} - \gamma \Delta t^2 (u_2^n)^3 \\ \vdots \\ 2u_{N-2}^n - u_{N-2}^{n-1} - \gamma \Delta t^2 (u_{N-2}^n)^3 \end{array} \right),$$

donde $s = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$. Este esquema se implementa en la función `ondas_no_lineal_semi`.

3. *Otro esquema semi-implícito*. Se realizan las aproximaciones

$$\begin{aligned} u_{tt}(x_i, t_n) &\approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}, \\ u_{xx}(x_i, t_n) &\approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \\ u(x_i, t_n)^3 &\approx \frac{1}{4}((u_i^{n+1})^3 + (u_i^{n+1})^2 u_i^{n-1} + u_i^{n+1}(u_i^{n-1})^2 + (u_i^{n-2})^3), \end{aligned}$$

y se sustituyen en la ecuación, quedando

$$\begin{aligned} &\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \\ &+ \frac{\gamma}{4}((u_i^{n+1})^3 + (u_i^{n+1})^2 u_i^{n-1} + u_i^{n+1}(u_i^{n-1})^2 + (u_i^{n-2})^3) = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por Δt^2,

$$\begin{aligned} &u_i^{n+1} + \frac{\gamma \Delta t^2}{4}((u_i^{n+1})^3 + (u_i^{n+1})^2 u_i^{n-1} + u_i^{n+1}(u_i^{n-1})^2 + (u_i^{n-2})^3) \\ &- 2u_i^n + u_i^{n-1} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = 0. \end{aligned}$$

Para cada $i = 1, 2, \ldots, N-2$, u_i^{n+1} debe ser solución de la ecuación $F(x) = 0$, siendo

$$F(x) = x + \frac{\gamma \Delta t^2}{4}(x^3 + u_i^{n-1} x^2 + (u_i^{n-1})^2 x + (u_i^{n-2})^3) - 2u_i^n + u_i^{n-1} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n).$$

Derivando,

$$F'(x) = 1 + \frac{\gamma \Delta t^2}{4}(3x^2 + 2u_i^{n-1} x + (u_i^{n-1})^2).$$

Para hallar una solución de $F(x) = 0$, se construye la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Cuando un término de la sucesión verifique $|F(x_k)| < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ fijado previamente, se escoge $u_i^{n+1} = x_k$ y se tendrá que $F(u_i^{n+1}) \approx 0$. También hay que establecer previamente un número máximo de iteraciones para que asegurar que el bucle finaliza. Este esquema se implementa en la función `ondas_no_lineal_semi_newton`. Se ha escogido, por ejemplo, $\varepsilon = 10^{-6}$ y un número máximo de iteraciones de 200.

4. *Esquema implícito.* Se realizan las aproximaciones

$$u_{tt}(x_i,t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}, \qquad u_{xx}(x_i,t_n) \approx \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}.$$

El término no lineal también se discretiza implícitamente. Sustituyendo en la ecuación, quedaría

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \gamma (u_i^{n+1})^3 = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$-\frac{1}{\Delta x^2} u_{i-1}^{n+1} + (\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t^2}) u_i^{n+1} + \gamma (u_i^{n+1})^3 - \frac{1}{\Delta x^2} u_{i+1}^{n+1} - \frac{2}{\Delta t^2} u_i^n + \frac{1}{\Delta t^2} u_i^{n-1} = 0.$$

Hay que resolver la ecuación vectorial $F(U) = 0$, donde $F\colon \mathbb{R}^{N-2} \to \mathbb{R}^{N-2}$ es la función dada por

$$F(X) = \begin{pmatrix} (\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t^2})x_1 + \gamma x_1^3 - \frac{1}{\Delta x^2}x_2 - \frac{2}{\Delta t^2}u_1^n + \frac{1}{\Delta t^2}u_1^{n-1} \\ -\frac{1}{\Delta x^2}x_1 + (\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t^2})x_2 + \gamma x_2^3 - \frac{1}{\Delta x^2}x_3 - \frac{2}{\Delta t^2}u_2^n + \frac{1}{\Delta t^2}u_2^{n-1} \\ \vdots \\ -\frac{1}{\Delta x^2}x_{N-4} + (\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t^2})x_{N-3} + \gamma x_{N-3}^3 - \frac{1}{\Delta x^2}x_{N-2} - \frac{2}{\Delta t^2}u_{N-3}^n + \frac{1}{\Delta t^2}u_{N-3}^{n-1} \\ -\frac{1}{\Delta x^2}x_{N-3} + (\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t^2})x_{N-2} + \gamma x_{N-2}^3 - \frac{2}{\Delta t^2}u_{N-2}^n + \frac{1}{\Delta t^2}u_{N-2}^{n-1} \end{pmatrix},$$

donde se está denotando $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-2})^t$. Para resolver esta ecuación vectorial, se utilizará de nuevo el método de Newton. La matriz jacobiana de F es

$$J_F(X) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t^2} + 3\gamma x_1^2 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t^2} + 3\gamma x_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t^2} + 3\gamma x_{N-2}^2 \end{pmatrix},$$

es decir, el elemento i-ésimo de la diagonal principal es $\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t^2} + 3\gamma x_i^2$, y los elementos por encima y por debajo de la diagonal principal son $-\frac{1}{\Delta x^2}$. Se construye la sucesión $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, \\ X_{k+1} &= X_k - J_F^{-1}(X_k)F(X_k), \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Para evitar el cálculo de matrices inversas, tenemos en cuenta que

$$X_{k+1} = X_k - J_F^{-1}(X_k)F(X_k) \iff J_F(X_k)(X_{k+1} - X_k) = -F(X_k),$$

así que podemos resolver el sistema lineal $J_F(X_k)Y = -F(X_k)$ y definir $X_{k+1} = Y + X_k$.

Al igual que en el esquema anterior, cuando se obtenga un término de la sucesión que verifique $\|F(X_k)\|_\infty < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ fijado previamente, se escoge $U^{n+1} = X_k$ y se tendrá que $F(U^{n+1}) \approx 0$. También hay que establecer previamente un número máximo de iteraciones para que asegurar que el bucle finaliza. Este esquema se implementa en la función `ondas_no_lineal_impl`. Se ha escogido, como antes, $\varepsilon = 10^{-6}$ y un número máximo de iteraciones de 200.