Examen final de Ecuaciones Diferenciales II
Miércoles, 20 de julio de 2022

---

1. *Considérese el problema de Cauchy*

$$(P)\begin{cases} x' = x^2 + \operatorname{sen}^2(tx) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

(a) *Probar que* (P) *tiene una única solución maximal* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, *siendo* I *de la forma* $I = (a,b)$, *con* $0 \in I$. *¿Presenta* φ *algún tipo de monotonía?*

(b) *Probar que* $a = -\infty$.

(c) *El objetivo ahora es probar que* $b \leq 1$. *Para ello, se propone seguir los siguientes pasos:*

(i) *Probar que, para cada* $t \in [0,b)$, *se tiene que* $\varphi(t) \geq \psi(t)$, *siendo*

$$\psi(t) = 1 + \int_0^t \varphi^2(s)\,ds, \quad t \in [0,b)$$

(ii) *Probar que* ψ *es derivable en* $[0,b)$ *y que* $\psi'(t) \geq \psi^2(t)$, $t \in [0,b)$.

(iii) *Probar que, para cada* $t \in [0,b)$,

$$\psi(t) \geq \frac{1}{1-t}$$

Concluir que, necesariamente, $b \leq 1$.

(d) *Probar que* $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$.

(a) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(t,x) = x^2 + \operatorname{sen}^2(tx)$. Al ser $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, se tiene que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(x,\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, y como $0 \in \mathring{\mathbb{R}}^2$, por el TEUL, (P) posee solución local única, que puede extenderse (de manera única gracias a la PUG) a una solución maximal $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$. Además, por el resultado sobre soluciones maximales con gráficas en abiertos (evidentemente, $\mathbb{R}^2$ es abierto), I es de la forma $I = (a,b)$, con $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$.

Por otro lado, como la función nula es solución de la ecuación (E) $x' = x^2 + \operatorname{sen}^2(tx)$ en $\mathbb{R}$ pero no del problema (P), entonces, por la PUG, la gráfica de φ no puede cortar a la de la función nula, o, en otras palabras, $\varphi(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Como $\varphi(0) = 1 > 0$ y φ es continua, se deduce que $\varphi(t) > 0$ para todo $t \in I$. En consecuencia, $\varphi'(t) = \varphi(t)^2 + \operatorname{sen}^2(t\varphi(t)) > 0$ para todo $t \in I$, luego φ es estrictamente creciente.

(b) Por reducción al absurdo, supóngase que $a > -\infty$. En virtud del resultado sobre soluciones maximales con gráficas en abiertos, se presenta una de las siguientes circunstancias:

(i) $\lim\limits_{t\to a^+} |\varphi(t)| = \infty$, o, equivalentemente, $\lim\limits_{t\to a^+} \varphi(t) = \infty$.

(ii) La gráfica de φ tiene un punto límite para $t \to a$, y este y todos los puntos límite de la gráfica de φ para $t \to a$ están en $\partial\mathbb{R}^2$.

Lo primero es imposible por ser φ estrictamente creciente; lo segundo tampoco puede darse porque $\partial\mathbb{R}^2 = \emptyset$. Habiéndose llegado a una contradicción, se concluye que $a = -\infty$.

(c) Si $t \in [0,b)$, por ser φ solución de (E), para todo $s \in [0,t]$ se tiene

$$\varphi'(s) = \varphi^2(s) + \operatorname{sen}^2(s\varphi(s)) > \varphi^2(s)$$

Obsérvese que tanto φ' como φ^2 son integrables en $[0,t]$ por ser continuas. Por tanto, por la monotonía de la integral y la regla de Barrow,

$$\int_0^t \varphi'(s)\,ds = \varphi(t) - \varphi(0) = \varphi(t) - 1 \geq \int_0^t \varphi^2(s)\,ds,$$

de donde se deduce que

$$\psi(t) = 1 + \int_0^t \varphi^2(s)\,ds \leq \varphi(t)$$

Además, por el primer TFC, ψ es derivable en $[0,b)$ (por la izquierda en b) y $\psi'(t) = \varphi^2(t)$. Pero como se tiene $\psi(t) \leq \varphi(t)$ y también $\psi(t), \varphi(t) > 0$, entonces $\psi^2(t) \leq \varphi^2(t) = \psi'(t)$, o, equivalentemente, $\psi'(t)\psi^{-2}(t) \geq 1$, para todo $t \in [0,b)$. Integrando en $[0,t]$ y usando que $\psi(0) = 1$, se obtiene

$$\int_0^t \psi'(s)\psi^{-2}(s)\,ds = \left[-\psi^{-1}(s)\right]_0^t = 1 - \frac{1}{\psi(t)} \geq \int_0^t 1\,ds = t,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{\psi(t)} \leq 1 - t,$$

de donde se deduce que

$$\varphi(t) \geq \psi(t) \geq \frac{1}{1-t}$$

Si fuese $b > 1$, se podría tomar límites en la expresión anterior cuando $t \to 1^-$ para obtener $\lim_{t\to 1^-} \varphi(t) = \infty$, que no es posible por la continuidad de φ en $(-\infty, b)$. Por tanto, ha de ser $b \leq 1$.

(d) En primer lugar, como φ es estrictamente creciente, entonces existe $A = \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) \in \mathbb{R}$, y por ser $\varphi(t) > 0$ para todo $t \in (-\infty, b)$, debe tenerse $A \geq 0$. Veamos que $A = 0$.

Considérese el problema

$$(\tilde{P}) \begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

y defínase la función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $g(t,x) = x^2$. Como $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, entonces es $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(x, \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, luego la ecuación (E) $x' = x^2$ verifica la PUG en $\mathbb{R}^2$, y además $(\tilde{P})$ tiene solución maximal única a la izquierda de 0, llámese $\psi\colon J \to \mathbb{R}$. Como la función nula es solución de $(\tilde{P})$ en $\mathbb{R}^2$ pero no resuelve $(\tilde{P})$, entonces ψ no corta a la gráfica de la función nula, esto es, $\psi(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Y como $\psi(0) = 1 > 0$, entonces $\psi(t) > 0$ para todo $t \in J$ por temas de continuidad, así que podemos despejar en (E) sin preocupación alguna:

$$x'(t) = x^2(t) \implies x'(t)x^{-2}(t) = 1 \implies \int_0^t x'(s)x^{-2}(s)\,ds = \int_0^t 1\,ds \implies \left[-x^{-1}(s)\right]_0^t = t$$
$$\implies 1 - \frac{1}{x(t)} = t \implies x(t) = \frac{1}{1-t}$$

Obtenemos entonces que

$$\psi(t) = \frac{1}{1-t}$$

es solución de $(\tilde{P})$ en $(-\infty,0]$. Como además $f(t,x) \geq g(t,x)$ para todo $(t,x) \in (-\infty,0] \times \mathbb{R}$ y $\psi(0) = \varphi(0)$, por el teorema de comparación de soluciones de ecuaciones diferenciales escalares, se tiene $0 < \varphi(t) \leq \psi(t)$ para todo $t \in (-\infty,0]$. Como $\lim_{t\to-\infty} \psi(t) = 0$, tomando límites en la desigualdad anterior se concluye que $A = \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$.

---

2. *Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y $f\colon [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Supóngase que existe una función continua y no negativa $a\colon [t_0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que*

$$\|f(t,x)\| \leq a(t) \quad \textit{para todo } t \geq t_0 \textit{ y todo } x \in \mathbb{R}^n$$

Probar que, para cada $x^0 \in \mathbb{R}^n$, todas las soluciones maximales del problema

$$(P_{(t_0,x^0)}) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

están definidas en $[t_0,\infty)$.

Sea $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ una solución maximal del problema $(P_{(t_0,x^0)})$. Tenemos tres opciones: $I = [t_0,t_1)$, $I = [t_0,t_1]$ y $I = [t_0,\infty)$ (con $t_1 < \infty$). El objetivo es descartar las dos primeras opciones.

(i) Supóngase que $I = [t_0,t_1)$, con $t_1 < \infty$. Al ser a continua en el compacto $[t_0,t_1]$, entonces a alcanza el máximo, es decir, existe $M > 0$ tal que $a(t) \leq M$ para todo $t \in [t_0,t_1]$. Por tanto,

$$\|f(t,x)\| \leq a(t) \leq M \quad \text{para todo } t \in [t_0,t_1) \text{ y todo } x \in \mathbb{R}^n$$

En consecuencia, f es acotada en la gráfica de φ, y el resultado sobre soluciones con derivada acotada (versión lateral derecha) permite afirmar que $x^1 = \lim_{t\to t_1^-} \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, y como $(t_1,x^1) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, el mismo resultado garantiza que φ puede ser prolongada al intervalo $[t_0,t_1]$, lo que contradice que φ sea solución maximal de $(P_{(t_0,x^0)})$.

(ii) Supóngase que $I = [t_0,t_1]$, con $t_1 < \infty$. Considérese el problema

$$(P_{(t_1,\varphi(t_1))}) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_1) = \varphi(t_1) \end{cases}$$

Para todos $a,b > 0$ se tiene que

$$Q^+_{a,b} = [t_1,t_1+a] \times \overline{B}_{\|\cdot\|}(x^1,b) \subset D = [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n,$$

y como f es continua en D, entonces también lo es en $Q^+_{a,b}$. Por tanto, por el TEL, el problema $(P_{(t_1,\varphi(t_1))})$ tiene al menos una solución ψ definida en $I_h^+ = [t_1,t_1+h]$ para cierto $h > 0$. Ahora se considera la función $\tilde{\varphi}\colon [t_0,t_1+h] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \psi(t) & \text{si } t_1 \leq t \leq t_1+h \end{cases}$$

Como $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$ y tanto φ como ψ son soluciones de (E) $x' = f(t,x)$, por el lema del pegamento, $\tilde{\varphi}$ es otra solución de (E), que además es prolongación estricta de φ a la derecha (pues $[t_0,t_1] \subset [t_0,t_1+h]$ y $\tilde{\varphi}|_{[t_0,t_1]} = \varphi$), lo que contradice la maximalidad de φ como solución de $(P_{(t_0,x_0)})$.

3. *Realizar un estudio, lo más exhaustivo posible, de las soluciones maximales de la ecuación*

$$(E) \quad x' = (x-1)\log(1+x^2)$$

y esbozar el aspecto de las gráficas de estas posibles soluciones.

En primer lugar, se observa que la ecuación (E) es una ecuación diferencial escalar autónoma de primer orden. Considérese la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (x-1)\log(1+x^2)$. Como $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, entonces $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(x,\mathbb{R},\mathbb{R})$, así que la ecuación (E) $x' = (x-1)\log(1+x^2)$ verifica la PUG en $\mathbb{R}^2$.

Se tiene que $(x-1)\log(1+x^2) = 0$ si y solo si $x = 1$ o $x = 0$, luego $\varphi_1 \equiv 1$ y $\varphi_0 \equiv 0$ son las únicas soluciones constantes de (E), definidas en $\mathbb{R}$. Como se verifica la PUG, cualquier solución maximal de (E) no constante tendrá su gráfica contenida en una de las siguientes regiones:

$$D_1 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0), \qquad D_2 = \mathbb{R} \times (0,1) \qquad \text{o} \qquad D_3 = \mathbb{R} \times (1, \infty)$$

Sea $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ una solución maximal de la ecuación (E). Como $\mathbb{R}^2$ es abierto, por el resultado sobre soluciones maximales con gráficas en abiertos, los intervalos de definición de las soluciones maximales de (E) son de la forma $I = (a,b)$, con $-\infty \le a < b \le \infty$. Además, por el mismo resultado, si t^* es un extremo finito de I, entonces ha de tenerse $\lim_{t\to t^*} |\varphi(t)| = \infty$ (pues $\partial\mathbb{R}^2 = \emptyset$). Ahora se distinguen los siguientes casos:

(i) $\text{gráf}(\varphi) \subset D_1$. Entonces $\varphi(t) < 0$ para todo $t \in I$. Por tanto, $\varphi(t) - 1 < 0$ para todo $t \in I$, luego $\varphi'(t) = (\varphi(t)-1)\log(1+\varphi^2(t)) < 0$ para todo $t \in I$, así que φ es estrictamente decreciente. Sabemos además que si t^* es un extremo finito de I, entonces $\lim_{t\to t^*} |\varphi(t)| = \infty$, o lo que es lo mismo, $\lim_{t\to t^*} \varphi(t) = -\infty$. El decrecimiento estricto de φ impide que sea $t^* = a$, luego $a = -\infty$, mientras que b podría ser ∞ o menor que ∞. Por otro lado, que φ sea estrictamente decreciente también indica que φ tiene límite en los extremos de I. Sean $A = \lim_{t\to-\infty} \varphi(t)$ y $B = \lim_{t\to b^-} \varphi(t)$. Como $A \le 0$ y no puede ser $A = -\infty$, entonces $A = 0$ (si fuese $-\infty < A < 0$, tendríamos otra solución constante). Por otra parte, si b es finito ya sabemos que $B = -\infty$. Pero si fuese $b = \infty$, al ser $B \le 0$ y φ estrictamente decreciente, solo puede suceder $B = \infty$ (de nuevo, si ocurriese $-\infty < B < 0$ se tendrían nuevas soluciones constantes). La conclusión de este caso es que o bien

$$a = -\infty, \qquad A = 0, \qquad b < \infty \qquad \text{y} \qquad B = -\infty,$$

o bien

$$a = -\infty, \qquad A = 0, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = -\infty,$$

(ii) $\text{gráf}(\varphi) \subset D_2$. Como la gráfica de φ está comprendida entre la gráfica de dos soluciones constantes, entonces $I = \mathbb{R}$. Y como $0 < \varphi(t) < 1$, entonces $\varphi(t) - 1 < 0$, y por tanto se tiene $\varphi'(t) = (\varphi(t)-1)\log(1+\varphi^2(t)) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego φ es estrictamente decreciente. De esto se deduce que $A = \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = 1$ y $B = \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$. La conclusión de este caso es

$$a = -\infty, \qquad A = 1, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = 0$$

(iii) $\text{gráf}(\varphi) \subset D_3$. Entonces $\varphi(t) > 1$ para todo $t \in I$. Por tanto, $\varphi(t) - 1 > 0$ para todo $t \in I$, luego $\varphi'(t) = (\varphi(t)-1)\log(1+\varphi^2(t)) > 0$ para todo $t \in I$, así que φ es estrictamente creciente. Sabemos además que si t^* es un extremo finito de I, entonces $\lim_{t\to t^*} |\varphi(t)| = \infty$, o lo que es lo mismo, $\lim_{t\to t^*} \varphi(t) = \infty$. El crecimiento estricto de φ impide que sea $t^* = a$, luego $a = -\infty$, mientras que b podría ser ∞ o menor que ∞. Por otro lado, que φ sea estrictamente

creciente también indica que φ tiene límite en los extremos de I. Sean $A = \lim_{t\to-\infty}\varphi(t)$ y $B = \lim_{t\to b^-}\varphi(t)$. Como $A \geq 1$ y no puede ser $A = \infty$, entonces $A = 1$ (si fuese $1 < A < \infty$, tendríamos otra solución constante). Por otra parte, si b es finito ya sabemos que $B = \infty$. Pero si fuese $b = \infty$, al ser $B \geq 1$ y φ estrictamente creciente, solo puede suceder $B = \infty$ (de nuevo, si ocurriese $1 < A < \infty$ se tendrían nuevas soluciones constantes). La conclusión de este caso es que o bien

$$a = -\infty, \qquad A = 1, \qquad b < \infty \qquad \text{y} \qquad B = \infty,$$

o bien

$$a = -\infty, \qquad A = 1, \qquad b = \infty \qquad \text{y} \qquad B = \infty,$$

---

4. *Supóngase que* $A\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *y* $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *son continuas y periódicas, de periodo* $\omega \in (0,\infty)$, *y considérense los sistemas*

$$(S) \quad x' = A(t)x + b(t), \qquad\qquad (H) \quad x' = A(t)x$$

(a) Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *una solución de* (S). *Demostrar que* φ *es periódica de periodo* ω *si y solo si* $\varphi(0) = \varphi(\omega)$.

(b) Probar que si Φ *es una matriz fundamental de* (H), *entonces* $\Psi(t) = \Phi(t+\omega)$ *también es matriz fundamental de* (H).

(c) Supongamos que Φ *es una matriz fundamental de* (H). *Probar que* (H) *tiene solución periódica no trivial de periodo* ω *si y solo si* $\det(\Phi(0) - \Phi(\omega)) = 0$.

(d) Probar que (S) *tiene una única solución periódica de periodo* ω *si y solo si* (H) *no tiene más soluciones periódicas de periodo* ω *que la solución trivial.*

(a) Supóngase que $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una solución de (S) periódica y de periodo ω. Esto significa que $\varphi(t) = \varphi(t+\omega)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Evaluando en 0 se obtiene $\varphi(0) = \varphi(\omega)$.

Recíprocamente, supóngase que $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una solución de (S) verificando $\varphi(0) = \varphi(\omega)$. Sea $x^0 = \varphi(0) = \varphi(\omega)$. Como (S) es un sistema diferencial lineal de primer orden, el problema

$$(P)\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

tiene solución única en $\mathbb{R}$. Por una parte, tenemos que φ es solución de (P). Por otra parte, si se define $\varphi_\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mediante $\varphi_\omega(t) = \varphi(t+\omega)$, se tiene que

(i) φ_ω es derivable por serlo φ.

(ii) $\text{gráf}(\varphi_\omega) \subset \mathbb{R}^2$, evidentemente.

(iii) Por la regla de la cadena,

$$\varphi_\omega'(t) = \varphi'(t+\omega) = A(t+\omega)\varphi(t+\omega) + b(t+\omega) = A(t)\varphi(t+\omega) + b(t) = A(t)\varphi_\omega(t) + b(t),$$

donde se ha usado que A y b son periódicas de periodo ω.

(iv) $\varphi_\omega(0) = \varphi(\omega) = x^0$.

Por tanto, φ_ω es también solución de (P), así que debe ser $\varphi_\omega = \varphi$ por asuntos de unicidad, concluyéndose que φ es periódica de periodo ω.

(b) Sea Φ una matriz fundamental de (H), y sea $\Psi(t) = \Phi(t+\omega)$. Por la regla de la cadena, Ψ es derivable en $\mathbb{R}$ y $\Psi'(t) = \Phi'(t+\omega) = A(t+\omega)\Phi(t+\omega) = A(t)\Psi(t)$, donde se ha usado que A es periódica de periodo ω y que Φ es matriz solución de (H). Además, como $\det(\Phi(t)) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ por ser Φ matriz fundamental, entonces $\det(\Phi(t+\omega)) = \det(\Psi(t)) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego Ψ es también matriz fundamental de (H).

(c) Sea Φ una matriz fundamental de (H), y supóngase que $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es solución ω-periódica de (H) no trivial. Sea $x^0 = \varphi(0)$ y considérese el problema

$$(P)\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

Como Φ es matriz fundamental, la única solución de (P) en $\mathbb{R}$ viene dada por

$$\psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^0,$$

y como φ es solución de (P), entonces

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^0$$

Pero, por el apartado *(a)*, $\varphi(0) = \varphi(\omega)$, luego

$$x^0 = \Phi(\omega)\Phi^{-1}(0)x^0$$

Equivalentemente,

$$(\Phi(\omega)\Phi^{-1}(0) - \mathrm{Id})x^0 = (\Phi(\omega) - \Phi(0))\Phi^{-1}(0)x^0 = 0,$$

Obsérvese que $x^0 \neq 0$ (si fuese x^0 se contradiría que φ es no trivial, ya que la función nula resolvería (P)) y $\Phi^{-1}(0) \neq 0$ (de lo contrario sería $\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^0 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo que también contradice que φ es no trivial). Por tanto, $\mathrm{rg}(\Phi(\omega) - \Phi(0)) < n$, o lo que es lo mismo, $\det(\Phi(\omega) - \Phi(0)) = \det(\Phi(0) - \Phi(\omega)) = 0$.

Recíprocamente, supóngase que $\det(\Phi(0)-\Phi(\omega)) = 0$. Entonces el sistema $(\Phi(0)-\Phi(\omega))X = 0$ tiene solución no trivial, llámese x^0. Nótese que $\Phi(0)x^0 = \Phi(\omega)x^0$. Sea $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ la función definida por $\varphi(t) = \Phi(t)x^0$. Se tiene que

- *(i)* φ es solución de (E), pues $\varphi'(t) = \Phi'(t)x^0 = A(t)\Phi(t)x^0 = A(t)\varphi(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.
- *(ii)* φ no es la función nula, pues $x^0 \neq 0$ y Φ es una matriz regular.
- *(iii)* $\varphi(0) = \Phi(0)x^0 = \Phi(\omega)x^0 = \varphi(\omega)$, luego, por (a), φ es periódica de periodo ω.

(d) Supongamos que (S) tiene una única solución periódica $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de periodo ω y, por reducción al absurdo, que $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una solución periódica no trivial de (H) de periodo ω. Consideremos la función $\varphi - \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Se tiene que

- *(i)* $\varphi - \psi$ es solución de (S), pues es derivable (ya que φ y ψ lo son) y, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi-\psi)'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) - A(t)\psi(t) = A(t)(\varphi(t) - \psi(t)) + b(t) = A(t)(\varphi-\psi)(t) + b(t)$$

- *(ii)* $\varphi - \psi$ es periódica de periodo ω, pues si $t \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi-\psi)(t+\omega) = \varphi(t+\omega) - \psi(t+\omega) = \varphi(t) - \psi(t) = (\varphi-\psi)(t),$$

  donde se ha usado que tanto φ como ψ son periódicas y de periodo ω.
- *(iii)* $\varphi - \psi$ es distinta de φ, pues ψ es no trivial.

Esto contradice la unicidad de φ como solución periódica de (S).

Recíprocamente, supóngase que (H) no tiene más soluciones periódicas de periodo ω que la solución trivial, y veamos que (S) tiene una única solución periódica de periodo ω. Sean $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soluciones periódicas de (S) de periodo ω y veamos que $\varphi = \psi$. En efecto, tenemos que $\varphi - \psi$ es solución de (H), pues es derivable (ya que φ y ψ lo son), y además

$$(\varphi-\psi)'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) - A(t)\psi(t) - b(t) = A(t)(\varphi(t) - \psi(t)) = A(t)(\varphi - \psi)(t)$$

Obsérvese que $\varphi - \psi$ es periódica de periodo ω por serlo φ y ψ, así que $\varphi - \psi$ es solución periódica de periodo ω. Por hipótesis, ha de ser $\varphi - \psi = 0$, o, equivalentemente, $\varphi = \psi$.

---

5. *Dar la solución del sistema diferencial lineal*

$$(S)\begin{cases} x' = Ax + b(t) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \qquad t_0 = 0 \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como (S) es un sistema diferencial lineal de primer orden, entonces tiene solución única, y dicha solución es la función $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = e^{tA}x^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\,ds$$

Por tanto, el problema se reduce al cálculo de la exponencial de tA, $t \in \mathbb{R}$. Como A ya es una matriz formada por bloques de Jordan, la matriz exponencial se calcula fácilmente:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t-3s} & te^{3t-3s} - se^{3t-3s} \\ 0 & 0 & e^{3t-3s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3s} \\ e^{3s} \\ e^{3s} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^t \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t+2s} \\ e^{3t} + te^{3t} - se^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^t \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{t+2s} \\ se^{3t} + ste^{3t} - \frac{1}{2}s^2e^{3t} \\ se^{3t} \end{pmatrix}\right]_0^t \\
&= \begin{pmatrix} e^t \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t \\ te^{3t} + t^2e^{3t} - \frac{1}{2}t^2e^{3t} \\ te^{3t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t(1 + e^{2t}) \\ e^{3t}(1 + t + \frac{1}{2}t^2) \\ te^{3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$