1. *Considérese una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. Demostrar que si todos los planos osculadores contienen a un punto fijo, entonces la curva es plana.*

Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco. Supóngase que existe $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que para cada $s \in I$, el plano osculador en $\alpha(s)$ contiene al punto p_0. El plano osculador es el que generan los vectores $\{T(s), N(s)\}$, y cada uno de estos planos tiene por ecuación

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

donde $B(s) = (A, B, C)$ es el vector normal al plano. Como $\alpha(s)$ está en el plano, debe verificar la ecuación del mismo:

$$A(x(s) - x_0) + B(y(s) - y_0) + C(z(s) - z_0) = 0 \iff \langle B(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0$$

Derivando,

$$\langle B'(s), \alpha(s) - p_0 \rangle + \langle B(s), T(s) \rangle = 0 \iff \tau(s)\langle N(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0$$

Si fuese $\tau(s)$ en todo $s \in I$ el ejercicio está resuelto. Si en algún punto se tuviese $\langle N(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0$, derivando se obtendría

$$\begin{aligned} \langle N'(s), \alpha(s) - p_0 \rangle + \langle N(s), T(s) \rangle = 0 &\iff \langle -k(s)T(s) - \tau(s)B(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0 \\ &\iff -k(s)\langle T(s), \alpha(s) - p_0 \rangle - \tau(s)\langle B(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0 \\ &\iff -k(s)\langle T(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Que sea $\langle T(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0$ es imposible porque entonces $\alpha(s) - p_0$ sería ortogonal a $T(s), N(s)$ y $B(s)$. Tampoco tendría sentido $k(s) = 0$ porque entonces no estaría definido el vector normal $N(s)$. Por tanto, $\langle N(s), \alpha(s) - p_0 \rangle$ no puede anularse y esto significa que $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$, luego la curva es plana.

2. *Demuéstrese que una superficie regular dada como la imagen inversa de un valor regular es orientable.*

Sea $S = f^{-1}\{a\}$ la imagen inversa de un valor regular de una función $f\colon U \to \mathbb{R}$ definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$. Que a sea valor regular significa que para todo $p \in f^{-1}\{a\}$ se tiene que df_p es sobreyectiva, es decir, que

$$Jf_p = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}_p$$

no se anula. Se va a probar que para cada $p \in S$, el vector

$$\mathcal{N}_p = \frac{(f_x, f_y, f_z)_p}{||(f_x, f_y, f_z)_p||}$$

es unitario y normal a $T_pS = \ker df_p$. En primer lugar, el vector está bien definido por ser p punto regular. Por otro lado, si $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_pS$, entonces

$$\langle \mathcal{N}_p, v \rangle = \frac{1}{||(f_x, f_y, f_z)||_p} \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{||(f_x, f_y, f_z)||_p} df_p(v) = 0$$

luego el vector $\mathcal{N}_p$ es normal a la superficie. Como S admite un campo normal unitario en toda la superficie, entonces es orientable.

3. *Sea* $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ *con* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *distintos de cero.*

(a) Demostrar que E *es una superficie regular.*

(b) Calcular el plano tangente y la recta normal a E *en el punto* $p = (a, 0, 0) \in E$*.*

(c) Clasificar los puntos de E *según su curvatura de Gauss.*

(d) Demostrar que E *es difeomorfo a la esfera unidad. ¿Es* E *isométrico a la esfera unidad?*

(a) Sea $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

Se tiene que f es diferenciable y

$$Jf_p = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}_p$$

solo se anula en el punto $(0,0,0) \notin f^{-1}\{0\}$. Por tanto, 0 es valor regular, así que $E = f^{-1}\{0\}$ es una superficie regular.

(b) Sea $p = (a, 0, 0) \in E$. Como E es la imagen inversa de un valor regular de f, se tiene que $T_pE = \ker df_p$, así que habrá que calcular df_p. Sea $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_pE$. Entonces

$$df_p(v) = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot a}{a^2} & \frac{2 \cdot 0}{b^2} & \frac{2 \cdot 0}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{2}{a} v_1$$

luego T_pS es el plano $x = 0$. La recta r normal a E en p tiene por ecuaciones paramétricas

$$r \equiv (x,y,z) = p + \lambda \mathcal{N}_p$$

Ya se vio en el ejercicio anterior que

$$\mathcal{N}_p = \frac{a}{2}\left(\frac{2}{a}, 0, 0\right) = (1, 0, 0)$$

es un vector normal unitario en el punto p. Por tanto, la recta normal a E en p es

$$r \equiv (a, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0)$$

(c) El elipsoide está parametrizado por

$$\begin{aligned} \varphi \colon (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u,v) = (a \cos u \operatorname{sen} v, b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c \cos v) \end{aligned}$$

Los vectores de la base coordenada son

$$\varphi_u = (-a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, b \cos u \operatorname{sen} v, 0) \qquad \varphi_v = (a \cos u \cos v, b \operatorname{sen} u \cos v, -c \operatorname{sen} v)$$

Derivando otra vez,

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= (-a \cos u \operatorname{sen} v, -b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, 0) \\ \varphi_{vv} &= (-a \cos u \operatorname{sen} v, -b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -c \cos v) \\ \varphi_{uv} &= (-a \operatorname{sen} u \cos v, b \cos u \cos v, 0) \end{aligned}$$

En cuanto a los coeficientes de la métrica,

$$
\begin{aligned}
E &= a^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + b^2 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v \\
F &= -a^2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \cos u \cos v + b^2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \cos u \cos v \\
G &= a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + c^2 \operatorname{sen}^2 v
\end{aligned}
$$

El capricho de bautizar al elipsoide por E en vez de por S causa un pequeño conflicto con la notación de uno de los coeficientes de la métrica, pero no cuesta trabajo hacer la vista gorda. Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{abc \operatorname{sen} v}{\sqrt{EG - F^2}} \\
f &= \frac{0}{\sqrt{EG - F^2}} = 0 \\
g &= \frac{abc \operatorname{sen} v (1 + \cos^2 v)}{\sqrt{EG - F^2}}
\end{aligned}
$$

La curvatura de Gauss sería

$$
k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{a^2 b^2 c^2 \operatorname{sen}^2 v (1 + \cos^2 v)}{(EG - F^2)^2} > 0
$$

No se sorprenderá nadie cuando se diga que todos los puntos del elipsoide son elípticos.

(d) Defínase la aplicación

$$
\begin{aligned}
g \colon S &\longrightarrow E \\
(x, y, z) &\longmapsto g(x, y, z) = (ax, by, cz)
\end{aligned}
$$

siendo S la esfera unidad. Puede comprobarse fácilmente que g es difeomorfismo. Se afirma que S y E no son isométricas, pues ni siquiera son localmente isométricas. Por reducción al absurdo, supóngase que $f \colon E \to S$ es una isometría local. Por el Teorema Egregium de Gauss, se tiene que $k^E = k^S \circ f$, que es claramente falso, pues S tiene curvatura constante (concretamente, $k^S = \frac{1}{r^2}$), y ya se ha visto que la curvatura de E no lo es.