1. *Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco de curvatura nunca nula. Demostrar que todos los planos normales de α pasan por un punto fijo si y solo si la traza de α está contenida en una esfera.*

$\boxed{\Rightarrow}$ Supóngase que todos los planos normales de α pasan por un punto fijo $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$. La ecuación del plano normal de α en el punto $\alpha(s)$ es

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

siendo $\alpha'(s) = T(s) = (A, B, C)$. Como el punto $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ pertenece al plano, entonces

$$A(x(s) - x_0) + B(y(s) - y_0) + C(z(s) - z_0) = 0 \iff \langle \alpha'(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0$$

Esto significa que la función $s \mapsto \langle \alpha(s) - p_0, \alpha(s) - p_0 \rangle = ||\alpha(s) - p_0||^2$ es una constante no negativa. Llamando r a esta constante, se tiene que $||\alpha(s) - p_0||^2 = r$, de donde se deduce que la traza de α está contenida en la esfera de centro p_0 y radio $\sqrt{r}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supóngase que la traza de α está contenida en una esfera de centro c y radio r, es decir, que $||\alpha(s) - c||^2 = r^2$ para todo $s \in I$, siendo $c \in \mathbb{R}^3$, $r \in (0, \infty)$ fijos. Derivando,

$$2\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c \rangle = 0 \iff \langle T(s), \alpha(s) - c \rangle = 0$$

Llamando $T(s) = (A, B, C), \alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ $c = (x_0, y_0, z_0)$, se tiene que

$$A(x(s) - x_0) + B(y(s) - y_0) + C(z(s) - z_0) = 0$$

de donde se deduce que c está en el plano de ecuación

$$A(x - x(s)) + B(y - y(s)) + C(z - z(s)) = 0$$

que no es más que el plano normal de α en el punto $\alpha(s)$.

2. *Demuéstrese que una curva parametrizada diferenciable regular admite una reparametrización por la longitud de arco.*

Sea $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada diferenciable regular. Sea $u_0 \in (a, b)$ y sea

$$\begin{aligned} s\colon (a, b) &\longrightarrow (c, d) \\ u &\longmapsto s(u) = \int_{u_0}^{u} ||\alpha'(t)||\, dt \end{aligned}$$

Se tiene que s es diferenciable y $s'(u) = ||\alpha'(u)|| > 0$ para todo $u \in (a, b)$. Por el teorema de la función inversa, s es un difeomorfismo cuya inversa es $t\colon (c, d) \to (a, b)$, que además verifica

$$t'(u) = \frac{1}{s'(t(u))} \iff t'(u)s'(t(u)) = 1$$

para todo $u \in (c, d)$. Nótese que además $t'(u) > 0$ por ser $s'(t(u)) > 0$ para todo $u \in (c, d)$. Se considera la reparametrización $\beta\colon (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\beta(u) = \alpha(t(u))$. Entonces

$$||\beta'(u)|| = ||\alpha'(t(u))t'(u)|| = |t'(u)|\, ||\alpha'(t(u))|| = t'(u)s'(t(u)) = 1$$

así que α admite una reparametrización por la longitud de arco.

3. *Sea S una superficie regular y sea $p \in S$. Dados $v, w \in T_pS$ no nulos, se dirá que v y w definen* direcciones conjugadas *si $\mathbb{I}_p(v, w) = 0$.*

(a) *Demuéstrese que si v y w definen direcciones conjugadas, ocurre lo mismo entre cualquier par de múltiplos no nulos de v y w.*

(b) *Demuéstrese que si p es punto llano, entonces todo par de direcciones son conjugadas.*

(c) *Demuéstrese que si p es punto umbílico no llano, entonces todo par de direcciones ortogonales son conjugadas.*

(d) *Demuéstrese que si p no es punto umbílico, entonces las direcciones principales en p son siempre conjugadas.*

(e) *Demuéstrese que una dirección asintótica es conjugada de sí misma.*

(a) Sean $v, w \in T_pS$ tales que $\mathbb{I}_p(v, w) = 0$ y sean $\lambda v, \mu w$ múltiplos suyos no nulos. Entonces

$$\mathbb{I}_p(\lambda v, \mu w) = \langle \mathcal{S}_p(\lambda v), \mu w\rangle = \lambda\mu \langle \mathcal{S}_p(v), w\rangle = \lambda\mu\, \mathbb{I}_p(v, w) = 0$$

luego λv y μw también definen direcciones conjugadas.

(b) Sea $p \in S$ un punto llano, es decir, con $k = 0$ y $\mathcal{S}_p = 0$. Sean $v, w \in T_pS$. Entonces

$$\mathbb{I}_p(v, w) = \langle \mathcal{S}_p(v), w\rangle = \langle 0, w\rangle = 0$$

luego v, w definen direcciones conjugadas.

(c) Sea $p \in S$ un punto umbílico no llano y sean $v, w \in T_pS$ tales que $\langle v, w\rangle$. Como p es punto umbílico, la segunda forma fundamental es proporcional a la métrica, luego

$$\mathbb{I}_p(v, w) = c\langle v, w\rangle = 0$$

para alguna constante $c \in \mathbb{R}$, así que v, w son direcciones conjugadas.

(d) Si p no es punto umbílico, las direcciones principales e_1, e_2 son distintas y ortogonales, luego

$$\mathbb{I}_p(e_1, e_2) = \langle \mathcal{S}_p(e_1), e_2\rangle = k_1(p)\langle e_1, e_2\rangle = 0$$

luego las direcciones principales definen direcciones conjugadas.

(e) Sea $w \in T_pS$ una dirección asintótica. Por definición de dirección asintótica, se tiene que $\mathbb{I}_p(w, w) = 0$, y por tanto la dirección es conjugada de sí misma.

4. *Considérense las funciones $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$f(x, y, z) = x(x-1) + y^2 + z^2 \qquad g(x, y, z) = x^2 + y(y-1) + z^2$$

(a) *Pruébese que $S_1 = f^{-1}\{0\}$ y $S_2 = g^{-1}\{0\}$ son superficies regulares.*

(b) *Pruébese que en cualquier punto $p \in S_1 \cap S_2$ las superficies se cortan ortogonalmente, es decir, sus campos normales unitarios son ortogonales.*

(a) Hay que demostrar que 0 es valor regular de f y g. Las matrices jacobianas en cada punto son

$$Jf_p = \begin{pmatrix} 2x-1 & 2y & 2z \end{pmatrix}_p \qquad\qquad Jg_p = \begin{pmatrix} 2x & 2y-1 & 2z \end{pmatrix}_p$$

La primera solo se anula en $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, pero $f(\frac{1}{2}, 0, 0) \neq 0$, así que $(\frac{1}{2}, 0, 0) \notin f^{-1}\{0\}$ y por tanto 0 es valor regular de f. La segunda solo se anula en $(0, \frac{1}{2}, 0)$, pero $g(0, \frac{1}{2}, 0) \neq 0$, así que $(0, \frac{1}{2}, 0) \notin g^{-1}\{0\}$ y por tanto 0 es valor regular de g. Esto prueba que tanto S_1 como S_2 son superficies regulares.

(b) Un campo normal unitario definido en toda la superficie S_1 es

$$\mathcal{N}_p^1 = \frac{(f_x, f_y, f_z)_p}{||(f_x, f_y, f_z)_p||} = \frac{1}{\sqrt{(2x-1) + 4y^2 + 4z^2}}(2x-1, 2y, 2z)$$

Un campo normal unitario definido en toda la superficie S_2 es

$$\mathcal{N}_p^2 = \frac{(g_x, g_y, g_z)_p}{||(g_x, g_y, g_z)_p||} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + (2y-1)^2 + 4z^2}}(2x, 2y-1, 2z)$$

A partir de ahora se van a ignorar las dos raíces cuadradas de arriba con el fin de ahorrar escritura. Esto no supone ningún inconveniente porque va a resultar que los vectores son ortogonales. Sea $p = (x, y, z) \in S_1 \cap S_2$. Entonces

$$f(p) = 0 \iff y^2 = -z^2 - x(x-1)$$

$$g(p) = 0 \iff x^2 = -z^2 - y(y-1)$$

luego

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{N}_p^1, \mathcal{N}_p^2 \rangle &= 4x^2 - 2x + 4y^2 - 2y + 4z^2 \\
&= -4z^2 - 4y(y-1) - 2x - 4z^2 - 4x(x-1) - 2y + 4z^2 \\
&= -4z^2 - 4y(y-1) - 2x - 4z^2 - 4x^2 + 4x - 2y + 4z^2 \\
&= -4(x^2 + y(y-1) + z^2) - 2x + 4x - 2y \\
&= 2(x-y)
\end{aligned}$$

Ahora bien, como se tiene que

$$y^2 = -z^2 - x^2 + x \iff x = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 = -z^2 - y^2 + y \iff y = x^2 + y^2 + z^2$$

entonces $\langle \mathcal{N}_p^1, \mathcal{N}_p^2 \rangle = 2(x-y) = 0$ y por tanto las superficies se cortan ortogonalmente.