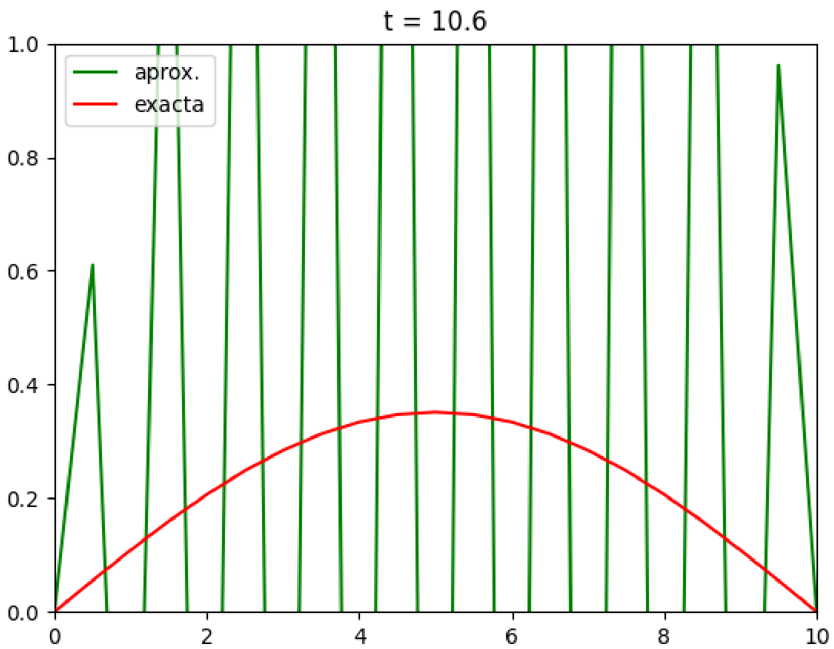
En esta práctica se implementa un esquema en diferencias finitas explícito para la ecuación del calor. El esquema es el siguiente:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1} - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \Delta t F(x_i, t_n),$$

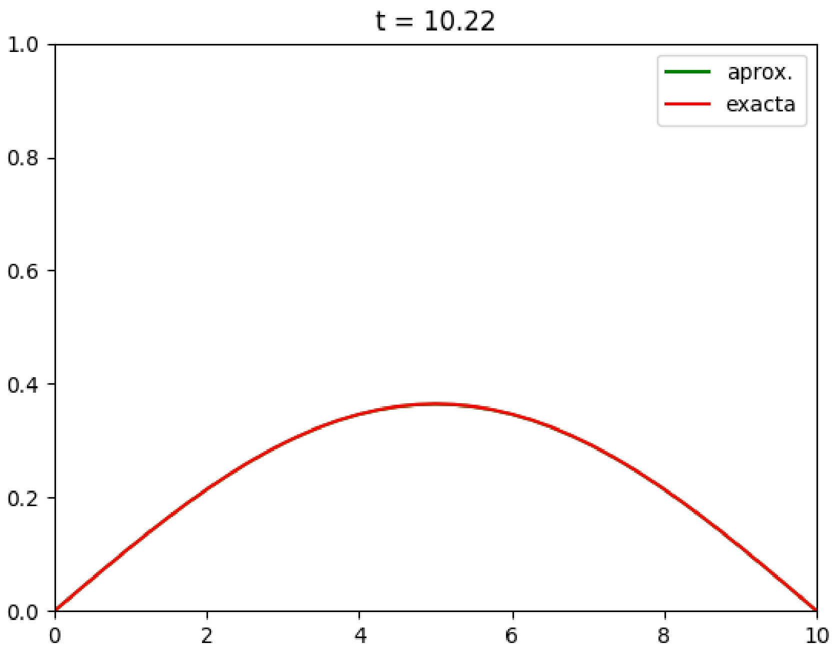
donde F es el término fuente y k es el coeficiente de difusión. Este esquema es estable bajo la condición CFL $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2k}$.

Resolveremos la ecuación en el intervalo $[0, 10]$ con tiempo máximo $T = 20$ y tomando $\Delta x = 0'5$ y $k = 1$. Con el dato inicial $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{10})$, la solución exacta del problema es $u(x,t) = \mathrm{sen}(\frac{\pi x}{10})\exp(-(\frac{\pi}{10})^2 t)$.

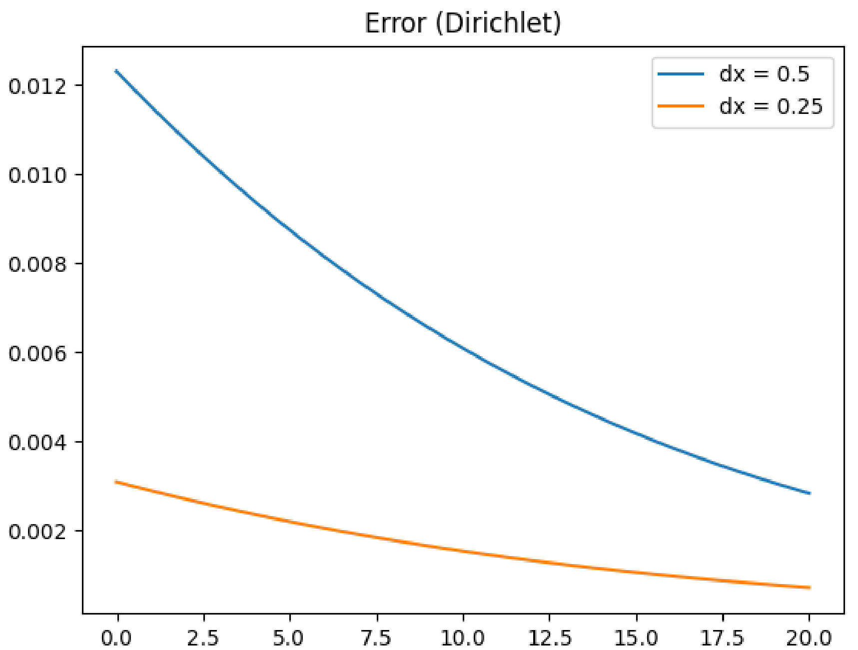
Primero consideramos condiciones de Dirichlet homogéneas en los extremos. Tomando $\Delta t = 0'2$, no se verifica la condición CFL porque $\frac{\Delta x^2}{2k} = 0'125$. Al ejecutar la función `calor_dirichlet` con estos datos se observa que la solución aproximada explota alrededor de $t = 10$.



Tomando $\Delta t = 0'125$, sí se verifica la condición CFL y al ejecutar la función anterior se observa que la gráfica de la solución aproximada coincide con la de la solución exacta.



Ahora comparamos el error cometido con $\Delta x = 0'5$ y $\Delta x = 0'25$. En ambos casos, se toma $\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2}$ para que se verifique la condición CFL.

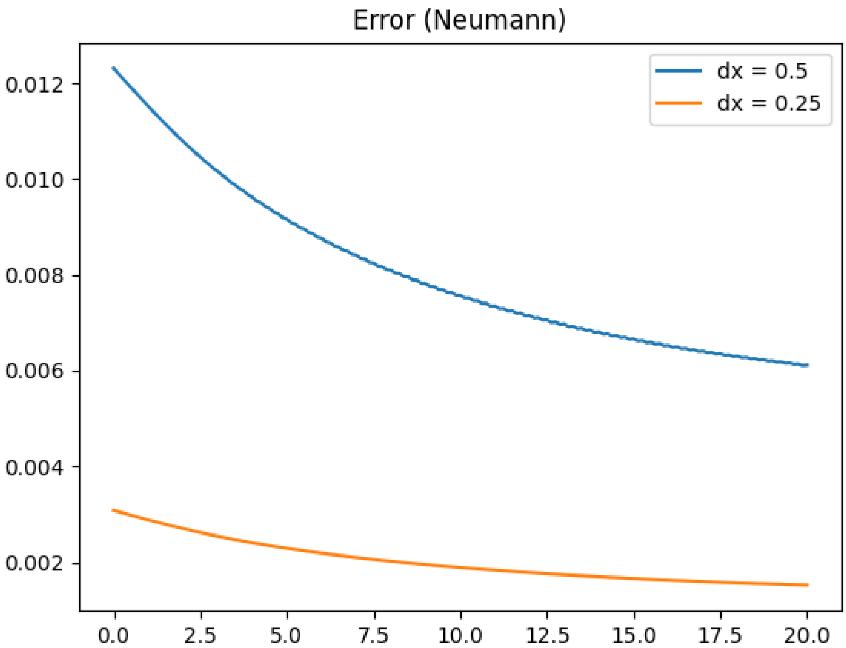


Vemos que al reducir Δx a la mitad, el error cometido es aproximadamente cuatro veces menor. Esto ocurre porque el esquema empleado es de orden 2 en x.

A continuación, construimos un problema con condiciones de Neumann en los extremos que siga teniendo a $u(x,t) = \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{10})\exp(-(\frac{\pi}{10})^2 t)$ como solución exacta. Para obtener las condiciones de Neumann, derivamos u respecto de x y evaluamos en los extremos:

$$u_x(0,t) = \frac{\pi}{10}\exp\Big(-\Big(\frac{\pi}{10}\Big)^2 t\Big),$$
$$u_x(10,t) = -\frac{\pi}{10}\exp\Big(-\Big(\frac{\pi}{10}\Big)^2 t\Big).$$

Ahora ejecutamos la función `calor_neumann` con $\Delta x = 0'5$ y $\Delta x = 0'25$, tomando en ambos casos $\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2}$ para que se cumpla la condición CFL.



De nuevo, al reducir Δx a la mitad se comete un error aproximadamente cuatro veces menor, y esto se debe a que el esquema es de orden 2 en x.