1. *Sea $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco con curvatura positiva y torsión negativa. Se define $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ por $\beta(s) = \int_0^s B_\alpha(u)du$, siendo B_α el vector binormal de α en cada punto. Encuéntrese una condición necesaria y suficiente para que α y β se diferencien en un movimiento rígido directo.*

Primero se calcularán k_β y τ_β y de ahí se deducirán las hipótesis necesarias. Derivando β,

$$\beta'(s) = B_\alpha(s)$$

de donde se deduce que β está parametrizada por el arco. Derivando otra vez,

$$\beta''(s) = B'_\alpha(s) = \tau_\alpha(s)N_\alpha(s)$$

luego

$$k_\beta(s) = ||\beta''(s)|| = |\tau_\alpha(s)| = -\tau_\alpha(s)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} T_\beta(s) &= \beta'(s) = B_\alpha(s) \\ N_\beta(s) &= \frac{\beta''(s)}{||\beta''(s)||} = -\frac{B'_\alpha(s)}{\tau_\alpha(s)} \\ B_\beta(s) &= -\frac{1}{\tau_\alpha(s)} B_\alpha(s) \wedge B'_\alpha(s) = -B_\alpha(s) \wedge N_\alpha(s) = T_\alpha(s) \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\tau_\beta(s) = \langle B'_\beta(s) \wedge N_\beta(s)\rangle = -\frac{1}{\tau_\alpha(s)}\langle T'_\alpha(s), B'_\alpha(s)\rangle = -\langle T'_\alpha(s), N_\alpha(s)\rangle = -k_\alpha(s)$$

Todo esto sugiere que la condición necesaria y suficiente a probar va a ser la siguiente: *α y β se diferencian en un movimiento rígido directo si y solo si $k_\alpha = -\tau_\alpha$.*

$\Rightarrow$ Si α y β se diferencian en un movimiento rígido directo, entonces $\tau_\beta = \tau_\alpha$. Usando lo probado antes se tiene $k_\alpha = -\tau_\beta = -\tau_\alpha$.

$\Leftarrow$ Si $k_\alpha = -\tau_\alpha$, usando de nuevo lo de arriba se llega a $k_\beta = -\tau_\alpha = k_\alpha$ y $\tau_\beta = -k_\alpha = \tau_\alpha$. Como α y β están parametrizadas por el arco, el teorema fundamental dice que α y β se diferencian en un movimiento rígido directo.

2.

(a) *Sea V un espacio vectorial euclídeo bidimensional y sea A un endomorfismo autoadjunto de V. Demuéstrese que existe una base ortonormal de V formada por autovectores de A y que los autovalores asociados son los valores extremos de $Q(v) = \langle Av, v\rangle$ sobre la circunferencia unidad.*

(b) *Sea S una superficie regular orientable y orientada. Defínanse las curvaturas y direcciones principales de S en un punto $p \in S$.*

(c) *Dedúzcase la fórmula de Euler.*

(a) Sea V un espacio vectorial euclídeo bidimensional y considérese un endomorfismo autoadjunto $A\colon V \to V$. Que A sea autoadjunto significa que para todos $u, v \in V$ se tiene

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \iff v^t A u = v^t A^t u$$

luego la matriz A es simétrica. Por el teorema de Schur, A es diagonalizable con matriz de paso unitaria, lo que equivale a que exista una base ortonormal de autovectores, llámese $\{e_1, e_2\}$. Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ son los autovalores de A, hay que probar que

$$\lambda_1 \leq \langle Av, v\rangle \leq \lambda_2$$

para todo $v \in V$ con $||v|| = 1$, y también que existen vectores para los que se alcanza la igualdad. Sea $v \in V$ con $||v|| = 1$ y escríbase

$$v = xe_1 + ye_2$$

donde $x^2 + y^2 = 1$ por ser v unitario. Se tiene entonces

$$\langle Av, v\rangle = \langle A(xe_1 + ye_2), xe_1 + ye_2\rangle = x^2\lambda_1 + y^2\lambda_2$$

de donde se deduce que

$$\lambda_1 = \lambda_1 x^2 + \lambda_1 y^2 \leq \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \langle Av, v\rangle \leq \lambda_2 x^2 + \lambda_2 y^2 = \lambda_2$$

La igualdad del mínimo se alcanza en e_1 y la del máximo en e_2, concluyendo así la demostración.

(b) Sea S una superficie regular y orientada. Los autovalores del operador de Weingarten $\mathcal{S}_p$ en cada punto $p \in S$ se denominan *curvaturas principales*, mientras que los autovectores que constituyen la base ortonormal se llaman *direcciones principales*.

(c) Dado un vector $w \in T_pS$ unitario, la fórmula de Euler es

$$\mathbb{I}_p(w, w) = \cos^2\theta\, k_1(p) + \operatorname{sen}^2\theta\, k_2(p)$$

donde $k_1(p), k_2(p)$ son las curvaturas principales en p y $\theta \in [0, 2\pi)$ es tal que

$$w = \cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2$$

siendo e_1, e_2 las direcciones principales. En efecto,

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_p(w, w) &= \langle \mathcal{S}_p(\cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2), \cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2\rangle \\ &= \cos^2\theta \langle \mathcal{S}_p(e_1), e_1\rangle + 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta \langle \mathcal{S}_p(e_1), e_2\rangle + \operatorname{sen}^2\theta \langle \mathcal{S}_p(e_2), e_2\rangle \\ &= \cos^2\theta\, k_1(p) + \operatorname{sen}^2\theta\, k_2(p)\end{aligned}$$

3. *Sea S una superficie regular y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(p) = ||p - p_0||$, siendo $p_0 \in \mathbb{R}^3$ un punto fijo.*

(a) ¿Es la función f diferenciable?

(b) En los casos en los que f sea diferenciable, pruébese que $df_p = 0$ si y solo si la recta que pasa por p y p_0 es normal a S en p.

(a) Se tiene que $f = \overline{f}_S$, donde

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \overline{f}(p) = ||p - p_0|| = \sqrt{\langle p - p_0, p - p_0\rangle} \end{aligned}$$

Si $p_0 \in S$, entonces $\overline{f}_S$ no es derivable en p_0 y por tanto f no es diferenciable. Si $p_0 \notin S$, entonces $\sqrt{\langle p - p_0\rangle} \neq 0$ para todo $p \in S$ y puede afirmarse que $\overline{f}_S$ es diferenciable, luego f también lo es.

(b) Sea $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \notin S$ y sea $p = (p_1, p_2, p_3) \in S$. Se va a calcular df_p. Tómese un vector $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_pS$ y una curva $\alpha = (x, y, z)$ que lo represente. Entonces

$$f \circ \alpha(t) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}$$

Las derivadas parciales serían

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f\circ\alpha)}{\partial x} &= \frac{x(t) - x_0}{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}} \\ \frac{\partial(f\circ\alpha)}{\partial y} &= \frac{y(t) - y_0}{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}} \\ \frac{\partial(f\circ\alpha)}{\partial z} &= \frac{z(t) - z_0}{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}} \end{aligned}$$

luego

$$df_p = \frac{1}{\sqrt{(p_1 - x_0)^2 + (p_2 - y_0)^2 + (p_3 - z_0)^2}} \begin{pmatrix} p_1 - x_0 & p_2 - y_0 & p_3 - z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{\langle p - p_0, v\rangle}{||p - p_0||}$$

Como $p - p_0$ es el vector normal de la recta r que pasa por p y p_0, se tiene que $df_p = 0$ si y solo si r es normal a S en p.

4. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable y sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \neq 0, \frac{z}{x} = f(\frac{y}{x})\}$. Demuéstrese que S es una superficie regular y que todos sus planos tangentes pasan por el origen de coordenadas.*

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \neq 0, \frac{z}{x} = f(\frac{y}{x})\}$. Considérese la función $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus r \to \mathbb{R}$ (donde r es la recta $x = 0$) definida por $g(x, y) = xf(\frac{y}{x})$. Se tiene que g es diferenciable por ser producto de funciones diferenciables y $S = \text{gráf}(g)$, luego S es superficie regular. Además, la ecuación del plano tangente en un punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ es

$$z = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Se tiene que $g_x(x, y) = f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x} f'(\frac{y}{x})$ y $g_y(x, y) = f'(\frac{y}{x})$, luego

$$T_pS \equiv z = x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right)(x - x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y - y_0)$$

Poniendo $x = 0, y = 0$ se obtiene $z = 0$, luego $(0, 0, 0) \in T_pS$.