# Relación 5

**Ejercicio 1.**

*(a)* *Sean $\gamma_1$ y $\gamma_2$ dos curvas simples en $\mathbb{C}$ con el mismo origen, extremo y soporte. Probar que son la misma curva.*

*(b)* *Sean $J_1$ y $J_2$ dos curvas de Jordan en $\mathbb{C}$ con el mismo origen y el mismo soporte. ¿Qué se puede decir sobre ellas?*

*Solución.*

($a$) Sean $\varphi_1\colon [a_1,b_1]\to\mathbb{C}$, $\varphi_2\colon [a_2,b_2]\to\mathbb{C}$ parametrizaciones de las curvas $\gamma_1$ y $\gamma_2$, respectivamente. Como $\gamma_2$ es simple, entonces $\varphi_2$ tiene inversa, y como ambas curvas tienen el mismo soporte, entonces $\varphi_1([a_1,b_1]) = \varphi_2([a_2,b_2])$. En consecuencia, la aplicación $h = \varphi_2^{-1}\circ\varphi_1\colon [a_1,b_1]\to\mathbb{C}$ está bien definida. Además, usando que $\varphi_1(a_1)=\varphi_2(a_2)$ y que $\varphi_1(b_1)=\varphi_2(b_2)$ (pues $\gamma_1$ y $\gamma_2$ comparten origen y extremo), se tiene

$$h(a_1)=\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1(a_1)=\varphi_2^{-1}\circ\varphi_2(a_2)=a_2, \qquad h(b_1)=\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1(b_1)=\varphi_2^{-1}\circ\varphi_2(b_2)=b_2,$$

luego $h([a_1,b_1])=[a_2,b_2]$. Al ser $\varphi_2^{-1}$ y $\varphi_1$ inyectivas, $h\colon [a_1,b_1]\to[a_2,b_2]$, y por tanto es una biyección. Más aún, por ser $\varphi_1$ y $\varphi_2$ continuas, puede afirmarse que $h$ y $h^{-1}=\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2$ también lo son. Por último, como $h(a_1)=a_2$, $h(b_1)=b_2$ y $h$ es una biyección continua, entonces es creciente.

Hemos encontrado un homeomorfismo creciente $h\colon[a_1,b_1]\to[a_2,b_2]$ con $\varphi_1=\varphi_2\circ h$, luego $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son la misma curva.

($b$) Razonando de forma similar se prueba que o bien $J_1=J_2$ o bien $J_1=-J_2$. □

**Ejercicio 2.** *Sea $\gamma$ la curva parametrizada por $\varphi\colon[-\frac{2}{\pi},0]\to\mathbb{C}$, $\varphi(t)=t+it\operatorname{sen}\frac{1}{t}$ si $t\in[-\frac{2}{\pi},0)$, y $\varphi(0)=0$. Probar que $\gamma$ no es rectificable.*

*Solución.* Veamos que el conjunto

$$\left\{\mathrm{V}(\varphi,\Pi)\colon \Pi \text{ es partición de } \left[-\frac{2}{\pi},0\right]\right\}$$

no está acotado superiormente, lo que probará que $\gamma$ no es rectificable. Para cada $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, sea

$$t_n=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi n}$$

Dado $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, nótese que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t_n}\right)=1 \text{ si } n \text{ es par}, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t_n}\right)=-1 \text{ si } n \text{ es impar},$$

y por tanto,

$$\varphi(t_n)=t_n+it_n \text{ si } n \text{ es par}, \qquad \varphi(t_n)=t_n-it_n \text{ si } n \text{ es impar}$$

En consecuencia, si $n$ es par,

$$\left|\varphi(t_n)-\varphi(t_{n-1})\right|=|t_n+it_n-t_{n-1}+it_{n-1}|=\sqrt{2t_n^2+2t_{n-1}^2}=\sqrt{2}\sqrt{t_n^2+t_{n-1}^2}\geq\sqrt{2}|t_n|,$$

y si $n$ es impar,

$$\left|\varphi(t_n)-\varphi(t_{n-1})\right|=|t_n-it_n-t_{n-1}-it_{n-1}|=\sqrt{2t_n^2+2t_{n-1}^2}=\sqrt{2}\sqrt{t_n^2+t_{n-1}^2}\geq\sqrt{2}|t_n|$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ y consideremos la partición $\Pi_N = \{-\frac{2}{\pi} = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N < 0\}$ de $[-\frac{2}{\pi}, 0]$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\varphi, \Pi_N) &= \sum_{n=1}^{N} \left|\varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1})\right| + \left|\varphi(0) - \varphi(t_N)\right| = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N} \sqrt{t_n^2 + t_{n-1}^2} + \sqrt{2}|t_N| \\ &\geq \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N} |t_n| + \sqrt{2}|t_N| \end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$ no converge (se prueba fácilmente comparando con $\sum_{n=1}^{\infty}$) y la sucesión $\{|t_N|\}_{N=1}^{\infty}$ tiene límite cero, entonces

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sqrt{2} \sum_{n=1}^{N} |t_n| + \sqrt{2}|t_N|\right) = \infty,$$

luego

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{V}(\varphi, \Pi_N) = \infty,$$

lo que prueba que $\gamma$ no es rectificable. □

**Ejercicio 3.** *Sea $\gamma$ el segmento $[-i, 1+2i]$. Calcular las siguientes integrales:*

*(a)* $\displaystyle\int_\gamma y\, dz,$ *(b)* $\displaystyle\int_\gamma z\, dz,$ *(c)* $\displaystyle\int_\gamma z^2\, dz.$

*Solución.*

$(a)$ Una parametrización del segmento es la función $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(t) = (1+2i)t - i(1-t) = t + i(3t-1),$$

que es de clase $\mathscr{C}^1$ y su derivada es $\varphi'(t) = 1+3i$. Por tanto,

$$\int_\gamma y\, dz = \int_0^1 \mathrm{Im}(\varphi(t))(1+3i)\, dt = (1+3i)\int_0^1 (3t-1)\, dt = (1+3i)\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$(b)$ Como $f(z) = z$ tiene primitiva en $\mathbb{C}$, por la regla de Barrow se tiene

$$\int_\gamma z\, dz = \left.\frac{z^2}{2}\right]_{-i}^{1+2i} = \frac{(1+2i)^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$(c)$ Como $f(z) = z^2$ tiene primitiva en $\mathbb{C}$, por la regla de Barrow se tiene

$$\int_\gamma z^2\, dz = \left.\frac{z^3}{3}\right]_{-i}^{1+2i} = \frac{(1+2i)^3}{3} - \frac{1}{2}i$$ □

**Ejercicio 4.** *Sea $\gamma$ el arco de la parábola $y = x^2$ desde $1+i$ hasta $2+4i$. Calcular las siguientes integrales:*

*(a)* $\displaystyle\int_\gamma z\, dz,$ *(b)* $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\, dz,$ *(c)* $\displaystyle\int_\gamma y\, dz,$ *(d)* $\displaystyle\int_\gamma z^2\, dz.$

*Solución.*

$(a)$ Como $f(z) = z$ tiene primitiva en $\mathbb{C}$, por la regla de Barrow se tiene

$$\int_\gamma z\, dz = \left.\frac{z^2}{2}\right]_{1+i}^{2+4i} = \frac{(2+4i)^2}{2} - \frac{(1+i)^2}{2}$$

$(b)$ Una parametrización de $\gamma$ es la función $\varphi\colon [1,2] \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(t) = t + it^2$, que es de clase $\mathscr{C}^1$ y su derivada es $\varphi'(t) = 1+2it$. Por tanto,

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz = \int_1^2 \left(t - it^2\right)(1+2it)\, dt = \int_1^2 \left(t + 2t^3 - it^2 + 2it^2\right) dt = \left.\frac{t^2}{2}\right]_1^2 + \left.\frac{t^4}{2}\right]_1^2 + \left.\frac{it^3}{3}\right]_1^2 = (\ldots)$$

(*c*) Usando la parametrización del apartado anterior,

$$\int_\gamma y\,dz = \int_1^2 \mathrm{Im}(t+it^2)(1+2it)\,dt = \int_1^2 \left(t^2+2it^3\right)dt = \frac{t^3}{3}\Big]_1^2 + \frac{it^4}{2}\Big]_1^2 = (\ldots)$$

(*d*) Como $f(z)=z^2$ tiene primitiva en $\mathbb{C}$, por la regla de Barrow se tiene

$$\int_\gamma z^2\,dz = \frac{z^3}{3}\Big]_{1+i}^{2+4i} = \frac{(2+4i)^3}{3} - \frac{(1+i)^3}{3} = (\ldots) \qquad \square$$

**Ejercicio 5.** *Calcular las siguientes integrales:*

*(a)* $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}^2\,dz, \quad \gamma\colon \varphi(t)=e^{2\pi i t},\ t\in[0,1],$

*(b)* $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}^2\,dz, \quad \gamma\colon \varphi(t)=e^{4\pi i t},\ t\in[0,1],$

*(c)* $\displaystyle\int_\gamma z^n\,dz, \quad \gamma\colon \varphi(t)=e^{2\pi i t},\ t\in[0,1],\ n\in\mathbb{Z},$

*(d)* $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,dz, \quad \gamma=[1,1+i,i,0,1].$

*Solución.*

(*a*) La parametrización $\varphi$ es de clase $\mathscr{C}^1$ y su derivada es $\varphi'(t)=2\pi i e^{2\pi i t}$. Por tanto,

$$\int_\gamma \overline{z}^2\,dz = \int_0^1 2\pi i e^{2\pi i t}\overline{e^{2\pi i t}}^2\,dt = \int_0^1 2\pi i e^{2\pi i t}e^{-4\pi i t}\,dt = \int_0^1 2\pi i e^{-2\pi i t}\,dt = -e^{-2\pi i t}\Big]_0^1 = 1-e^{-2\pi i} = 0$$

*Otra forma*. Si $z\in \mathrm{sop}(\gamma)=\partial\mathbb{D}$, entonces $\overline{z}^2 = \frac{1}{z^2} = f(z)$, siendo $f$ una función que tiene primitiva en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Por tanto, por la regla de Barrow,

$$\int_\gamma \overline{z}^2\,dz = -\frac{1}{z}\Big]_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} = 0,$$

ya que $\varphi(0)=\varphi(1)=1$.

(*b*) La función $f(z)=\frac{1}{z^2}$ tiene primitiva en el dominio $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, así que la integral es independiente del camino. Además, $f(z)=\overline{z}^2$ para todo $z\in\mathrm{sop}(\gamma)$ y el camino $\gamma$ tiene el mismo soporte que el del apartado anterior. Por tanto, como la integral es independiente del camino,

$$\int_\gamma \overline{z}^2\,dz = 0$$

(*c*) Si $n\neq -1$, entonces $f(z)=z^n$ tiene primitiva en el dominio $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, luego la integral es independiente del camino en $D$. Por ser $\gamma$ un camino cerrado en $D$, se tiene

$$\int_\gamma z^n\,dz = 0$$

Si $n=-1$, usamos la parametrización para calcular la integral:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t}} 2\pi i e^{2\pi i t}\,dt = 2\pi i$$

*Otra forma*. Como $f(z)=1$ es holomorfa en el dominio convexo $\mathbb{C}$, $\gamma$ es un camino cerrado en $D$ y $0\notin\mathrm{sop}(\gamma)$, por la fórmula de Cauchy para dominios convexos,

$$\mathrm{n}(\gamma,0)f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi,$$

de donde se deduce que

$$\int_\gamma \frac{1}{\xi}\,d\xi = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$$

(*d*) Sean $\gamma_1 = [1, 1+i]$, $\gamma_2 = [1+i, i]$, $\gamma_3 = [i, 0]$ y $\gamma_4 = [0,1]$. Sean $\varphi_i \colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, las funciones dadas por

$$\varphi_1(t) = (1+i)t + (1-t), \qquad \varphi_2(t) = it + (1+i)(1-t), \qquad \varphi_3(t) = i(1-t), \qquad \varphi_4(t) = t,$$

es decir,

$$\varphi_1(t) = 1 + it, \qquad \varphi_2(t) = 1 - t + i, \qquad \varphi_3(t) = i(1-t), \qquad \varphi_4(t) = t,$$

Tenemos que $\varphi_i$ es una parametrización de clase $\mathscr{C}^1$ de la curva $\gamma_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$. Además,

$$\varphi_1'(t) = i, \qquad \varphi_2'(t) = -1, \qquad \varphi_3'(t) = -i, \qquad \varphi_4'(t) = 1,$$

Por tanto, como $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$,

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \bar{z}\, dz = \int_0^1 i(1-it)\, dt + \int_0^1 i\, dt - \int_0^1 i(t-1)\, dt = 3it + \frac{t^2}{2} - i\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i \qquad \square$$

**Ejercicio 6.** *Sea $\gamma_r$ la semicircunferencia de centro 0 y radio $r$ en el semiplano superior, parametrizada por $\varphi \colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) = re^{it}$. Probar que*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0$$

*Solución.* Dado $r > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{e^{i\varphi(t)}}{\varphi(t)}\varphi'(t)\, dt\right| = \left|\int_0^\pi ie^{ire^{it}}\, dt\right| \\
&\le \int_0^\pi |ie^{ire^{it}}|\, dt = \int_0^\pi |e^{ir(\cos t + i\,\mathrm{sen}\, t)}|\, dt = \int_0^\pi |e^{-r\,\mathrm{sen}\, t + ir\cos t}|\, dt = \int_0^\pi e^{-r\,\mathrm{sen}\, t}\, dt \overset{(*)}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\,\mathrm{sen}\, t}\, dt \\
&\overset{(**)}{\le} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2r}{\pi}t}\, dt = -\frac{\pi}{r}e^{-\frac{2r}{\pi}t}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{r} - \frac{\pi}{r}e^{-r} \xrightarrow{r\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Algunas aclaraciones:

($*$) La función $t \mapsto \mathrm{sen}\, t$, $t \in [0,\pi]$ es simétrica con respecto a $\frac{\pi}{2}$, luego $t \mapsto e^{-r\,\mathrm{sen}\, t}$, $t \in [0,\pi]$ también.

($**$) Si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, entonces $\mathrm{sen}\, t \ge \frac{2}{\pi}t$. En efecto, sea $g \colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(t) = \frac{\mathrm{sen}\, t}{t}$$

Tenemos que $g$ es derivable en $(0, \frac{\pi}{2})$ y

$$g'(t) = \frac{t\cos t - \mathrm{sen}\, t}{t^2} = \frac{h(t)}{t^2}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

donde $h \colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $h(t) = t\cos t - \mathrm{sen}\, t$ es también derivable en $(0, \frac{\pi}{2})$ y verifica

$$h'(t) = -t\,\mathrm{sen}\, t < 0, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Como $h(0) = 0$ y $h$ es decreciente en $(0, \frac{\pi}{2})$, entonces $h(t) < 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, de donde $g'(t) < 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ y por tanto $g$ también es decreciente en $(0, \frac{\pi}{2})$. Por tanto, $g(t) \ge g(\frac{\pi}{2})$ para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, lo que nos da la desigualdad deseada. $\square$

**Ejercicio 7.** *Sea $\gamma$ el arco de la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 2\}$ desde $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ hasta $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ recorrido de forma simple en sentido antihorario. Probar que*

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{z^3+1}\, dz\right| \le \frac{2\pi}{3\sqrt{65}}$$

*Solución.* Sea $\varphi\colon[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\to\mathbb{C}$ la función definida por $\varphi(t)=2e^{it}$. Tenemos que $\varphi$ es una parametrización de $\gamma$ de clase $\mathscr{C}^1$, luego

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{z^3+1}\,dz\right| = \left|\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{8e^{3it}+1}2ie^{it}\,dt\right| \le \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{|8e^{3it}+1|}|2ie^{it}|\,dt \overset{(*)}{\le} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\sqrt{65}}\,dt = \frac{2\pi}{3\sqrt{65}},$$

donde en $(*)$ se ha usado que

$$|8e^{3it}+1|^2 = (8e^{3it}+1)(8e^{-3it}+1) = 64+8e^{3it}+8e^{-3it}+1 = 65+16\cos(3t) \overset{(**)}{\ge} 65, \quad t\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right),$$

y en $(**)$ se ha usado que $\cos(t)>0$ para todo $t\in(-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2})$ y por tanto $\cos(3t)>0$ para todo $t\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$. □

**Ejercicio 8.** *Sea $\gamma$ el arco de la circunferencia $\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=r\}$ recorrido de forma simple y en sentido antihorario desde $r$ hasta $ir$. Probar que*

$$\left|\int_\gamma e^{iz^2}\,dz\right| \le \frac{\pi}{2r}\left(1-e^{-r^2}\right)$$

*Solución.* Sea $\varphi\colon[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{C}$ la función definida por $\varphi(t)=re^{it}$. Tenemos que $\varphi$ es una parametrización de $\gamma$ de clase $\mathscr{C}^1$, luego

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma e^{iz^2}\,dz\right| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ir^2e^{2it}}\,ire^{it}\,dt\right| \\
&\le r\int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{ir^2e^{2it}}|\,dt = r\int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{ir^2(\cos(2t)+i\,\mathrm{sen}(2t))}|\,dt = r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2\,\mathrm{sen}(2t)}\,dt \overset{(*)}{=} 2r\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2\,\mathrm{sen}(2t)}\,dt \\
&\le 2r\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4r^2}{\pi}t}\,dt = -\frac{\pi}{2r}e^{-\frac{4r^2}{\pi}t}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2r}-\frac{\pi}{2r}e^{-r^2} = \frac{\pi}{2r}\left(1-e^{-r^2}\right)
\end{aligned}$$

Algunas aclaraciones:

$(*)$ La función $t\mapsto \mathrm{sen}(t)$, $t\in[0,\pi]$ es simétrica con respecto a $\frac{\pi}{2}$, luego la función $t\mapsto\mathrm{sen}(2t)$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ es simétrica con respecto a $\frac{\pi}{4}$, y por tanto la función $t\mapsto e^{-r^2\,\mathrm{sen}(2t)}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ también lo es.

$(**)$ Si $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$, entonces $2t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ y, como se probó en el ejercicio anterior, $\mathrm{sen}(2t)\ge\frac{4}{\pi}t$, luego $-r^2\,\mathrm{sen}(2t)\le-\frac{4r^2}{\pi}t$ y por tanto

$$e^{-r^2\,\mathrm{sen}(2t)} \le e^{-\frac{4r^2}{\pi}t}$$

□

**Ejercicio 9.** *Calcular las siguientes integrales:*

*(a)* $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{z^2}\,dz$, *(b)* $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,dz$, *(c)* $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1}{z^2+1}\,dz$, *(d)* $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{sen}(z)}{z^3}\,dz$.

*Solución.*

($a$) La función $f(z)=e^{z^2}$, $z\in\mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, que es un dominio convexo. Como $|z|=1$ es un camino cerrado en $\mathbb{C}$, el teorema de Cauchy para dominios convexos permite afirmar que

$$\int_{|z|=1} e^{z^2}\,dz = 0$$

($b$) La función $f(z)=e^z$, $z\in\mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, que es un dominio convexo. Como $\gamma\equiv|z|=1$ es un camino cerrado en $\mathbb{C}$ y $0\in\mathbb{C}\setminus\mathrm{sop}(\gamma)$, la fórmula de Cauchy para dominios convexos permite afirmar que

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-0}\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{n}(\gamma,0)\cdot f(0) = 2\pi i$$

(*c*) Se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}\,dz &= \int_{|z|=2} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz \\ &= -\frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{1}{z+i}\,dz + \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{1}{z-i}\,dz \\ &= -\pi i \cdot \mathrm{n}(\gamma,-i) + \pi i \cdot \mathrm{n}(\gamma, i) = 0\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $i \notin \mathrm{sop}(\gamma)$ y $-i \notin \mathrm{sop}(\gamma)$, donde $\gamma \equiv |z| = 2$.

(*d*) La función $f(z) = \mathrm{sen}(z)$, $z \in \mathbb{C}$ es holomorfa en el dominio convexo $\mathbb{C}$, $\gamma \equiv |z| = 1$ es un camino cerrado en $\mathbb{C}$ y $0 \notin \mathrm{sop}(\gamma)$. Estamos en condiciones de aplicar la fórmula de Cauchy para la derivada $n$-ésima en dominios convexos, con $n = 2$:

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{sen}(z)}{z^3}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)^{2+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\cdot f^{(2)}(0)\cdot \mathrm{n}(\gamma,0) = 0,$$

ya que $f^{(2)}(0) = -\mathrm{sen}(0) = 0$. □

**Ejercicio 10.** *Sea $P$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y sea $R > 0$ lo suficientemente grande para que los ceros de $P$ tengan módulo menor que $R$. Hallar*

$$\int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz$$

*¿Qué sucede si solo $k$ (con $k \leq n$) de los ceros de $P$ tienen módulo menor que $R$?*

*Solución.* Como $P$ tiene $n$ raíces, se puede escribir

$$P(z) = A(z-a_1)\dots(z-a_n)$$

Por tanto, como la derivada logarítmica del producto es la suma de las derivadas logarítmicas,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \dots + \frac{1}{z-a_n}$$

para todo $z \in \mathrm{sop}(\gamma)$, con $\gamma \equiv |z| = R$. En consecuencia,

$$\int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{|z|=R} \frac{1}{z-a_i}\,dz = \sum_{i=1}^{n} 2\pi i \cdot \mathrm{n}(\gamma, a_i) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi i = 2\pi n i$$

Si solo $k$ (con $k \leq n$) de los ceros de $P$ tienen módulo menor que $R$, se prueba de forma análoga que

$$\int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = 2\pi k i,$$

pues el índice de los $k$ ceros respecto de $\gamma$ será 1, y el índice del resto de ceros será 0. □

**Ejercicio 11.** *Sea $z = Re^{i\phi}$ con $R > 0$ y sea $\gamma$ un camino en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ desde $1$ hasta $z$. Probar que*

$$\int_\gamma \frac{1}{\xi}\,d\xi = \mathrm{Log}(R) + i(\phi + 2N\pi)$$

*para algún $N \in \mathbb{Z}$.*

*Solución.* Sea $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización de $\gamma$. Como $\varphi(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$ y $\varphi$ es continua, entonces existe una rama del $\log(\varphi)$ en $[a,b]$. Si llamamos $h$ a esta rama, también sabemos que $h$ es derivable en $(a,b)$ y $h'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ para todo $t \in (a,b)$. Por otra parte, sabemos que $h$ es de la forma

$$h(t) = \mathrm{Log}|\varphi(t)| + i g(t),$$

donde $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ es una rama del $\arg(\varphi)$. Como $g(b) \in \arg(\varphi(b)) = \arg(z)$ y $\phi \in \arg(z)$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $g(b) = \phi + 2N_1\pi$. Y como $g(a) \in \arg(\varphi(a)) = \arg(1)$ y $0 \in \arg(1)$, entonces existe $N_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $g(a) = 2N_2\pi$. Así,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{\xi}\,d\xi &= \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_a^b h'(t)\,dt = h(b)-h(a) = \operatorname{Log}|\varphi(b)| + ig(b) - \operatorname{Log}|\varphi(a)| - ig(a)\\ &= \operatorname{Log}|z| + i(\phi+2N_1\pi) - \operatorname{Log}|1| - i2N_2\pi = \operatorname{Log}(R) + i(\phi + 2(N_1-N_2)\pi) = \operatorname{Log}(R) + i(\phi + 2Npi),\end{aligned}$$

con $N = N_1 - N_2 \in \mathbb{Z}$. □

**Ejercicio 12.** *Sea $D$ un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $\gamma$ un camino en $D$ con origen $a$ y extremo $b$. Si $f$ y $g$ son funciones holomorfas en $D$, probar que*

$$\int_\gamma f(z)g'(z)\,dz = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_\gamma g(z)f'(z)\,dz$$

*Solución.* Sea $\varphi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ una parametrización de $\gamma$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)g'(z)\,dz &= \int_c^d f(\varphi(t))g'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_c^d (f\circ\varphi)(t)(g\circ\varphi)'(t)\,dt\\ &= (f\circ\varphi)(d)(g\circ\varphi)(d) - (f\circ\varphi)(c)(g\circ\varphi)(c) - \int_c^d (f\circ\varphi)'(t)(g\circ\varphi)(t)\,dt\\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_c^d f'(\varphi(t))\varphi'(t)g(\varphi(t))\,dt\\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_\gamma g(z)f'(z)\,dz\end{aligned}$$

donde se ha empleado la regla de la cadena, la fórmula de integración por partes para integrales sobre intervalos reales y el hecho de que $\varphi(d) = b$, $\varphi(c) = a$. □

**Ejercicio 13.** *Para $n \in \mathbb{N}$, calcular*

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{z}\,dz$$

*Usar esto para obtener que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t)\,dt = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$$

*Solución.* Sea $\varphi\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) = e^{it}$. Como $\varphi$ es una parametrización de la circunferencia $|z| = 1$ de clase $\mathscr{C}^1$, entonces

$$\int_{|z|=1} \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \left(e^{it} + e^{-it}\right)^{2n} e^{-it} i e^{it}\,dt = 2^{2n} i \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t)\,dt \qquad (*)$$

Por otra parte,

$$\int_{|z|=1} \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{z}\,dz = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{|z|=1} \frac{z^k}{z^{2n-k+1}}\,dz$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, la función $f_k(z) = z^k$ es holomorfa en el dominio convexo $\mathbb{C}$. Como $\gamma \equiv |z| = 1$ es una curva cerrada en $\mathbb{C}$ y $0 \notin \operatorname{sop}(\gamma)$, por la fórmula de Cauchy para la derivada en dominios convexos,

$$f_k^{(2n-k)}(0)\,\mathrm{n}(\gamma,0) = \frac{(2n-k)!}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^k}{z^{2n-k+1}}\,dz$$

Pero $f_k^{(2n-k)}(0) = 0$ siempre que $2n-k \neq k$, es decir, siempre que $n \neq k$. Y si $n = k$, entonces

$$\int_{|z|=1} \frac{z^k}{z^{k+1}}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_{|z|=1}\frac{z^k}{z^{2n-k+1}}\,dz=\binom{2n}{n}2\pi i \tag{$**$}$$

Al igualar $(*)$ y $(**)$ se obtiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}(t)\,dt=\frac{(2n)!}{2^n n!\cdot 2^n n!}=\frac{(2n)!}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n)(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n)}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} \qquad \square$$

**Ejercicio 14.** *Calcular las siguientes integrales:*

*(a)* $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{(z+2)z^3}\,dz,$ *(b)* $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^{z^2}-1}{z^3}\,dz.$

*Solución.*

($a$) La función $f(z)=\frac{1}{z+2}$ en holomorfa en el dominio convexo $D=\Delta(0,\frac{3}{2})$, $\gamma\equiv|z|=1$ es un camino cerrado en $D$ y $0\in D\setminus\operatorname{sop}(\gamma)$. Por la fórmula de Cauchy para la derivada segunda en dominios convexos,

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{(z+2)z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}(0)\,\mathrm{n}(\gamma,0)=\frac{\pi i}{4},$$

donde se ha usado que $f^{(2)}(z)=\frac{2}{(z+2)^3}$, $z\in D$.

($b$) La función $f(z)=e^{z^2}-1$ en holomorfa en el dominio convexo $\mathbb{C}$, $\gamma\equiv|z|=1$ es un camino cerrado en $\mathbb{C}$ y $0\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{sop}(\gamma)$. Por la fórmula de Cauchy para la derivada segunda en dominios convexos,

$$\int_{|z|=1}\frac{e^{z^2}-1}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}(0)\,\mathrm{n}(\gamma,0)=2\pi i,$$

donde se ha usado que $f^{(2)}(z)=2e^{z^2}+4z^2e^{z^2}$, $z\in\mathbb{C}$. $\square$

**Ejercicio 15.** *Sea $\gamma$ la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a,b>0$, recorrida de forma simple y en sentido positivo. Expresar*

$$\int_\gamma\frac{1}{z}\,dz$$

*de dos formas distintas para deducir el valor de*

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$

*Solución.* Una parametrización de la elipse es $\varphi\colon[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $\varphi(t)=a\cos t+ib\operatorname{sen}t$, que es de clase $\mathscr{C}^1$ y verifica $\varphi'(t)=-a\operatorname{sen}t+ib\cos t$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\gamma\frac{1}{z}\,dz&=\int_0^{2\pi}\frac{-a\operatorname{sen}t+ib\cos t}{a\cos t+ib\operatorname{sen}t}\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{(-a\operatorname{sen}t+ib\cos t)(a\cos t-ib\operatorname{sen}t)}{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{-a^2\operatorname{sen}t\cos t+iab+b^2\operatorname{sen}t\cos t}{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{-a^2\operatorname{sen}t\cos t+b^2\operatorname{sen}t\cos t}{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt+iab\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{-2a^2\operatorname{sen}t\cos t+2b^2\operatorname{sen}t\cos t}{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt+iab\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt\\
&=\frac{1}{2}\log\big(a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t)\big]_0^{2\pi}+iab\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt\\
&=iab\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{n}(\gamma,0) = 2\pi i$$

Se concluye que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi i}{iab} = \frac{2\pi}{ab} \qquad \square$$

**Ejercicio 16.** *Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2+4)^2}\,dx$$

*Solución.* En primer lugar, como la función $x \mapsto \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ es par, entonces la función $x \mapsto \frac{\cos(x)}{(x^2+4)^2}$, $x \in \mathbb{R}$ también lo es, luego

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2+4)^2}\,dx$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}, \quad z \in D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > -2\},$$

y, dado $R > 0$, consideremos el camino

$$\gamma_R = [-R,R] + C_R,$$

donde $C_R$ es la semicircunferencia de centro el origen y radio $R$ en el semiplano superior. Tenemos que $f$ es holomorfa en el dominio convexo $D$, $\gamma$ es un camino cerrado en $D$ y $2i \in D \setminus \operatorname{sop}(\gamma)$ para $R$ lo suficientemente grande. Por la fórmula de Cauchy para la derivada primera en dominios convexos,

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\,dz = 2\pi i\, f'(2i)\,\mathrm{n}(\gamma_R, 2i)$$

Tenemos que

$$f'(z) = \frac{ie^{iz}}{(z+2i)^2} - \frac{2e^{iz}}{(z+2i)^3}, \quad z \in D$$

Por tanto,

$$f'(2i) = -\frac{ie^{-2}}{16} + \frac{2e^{-2}}{64i} = -\frac{4ie^{-2}}{64} - \frac{2ie^{-2}}{64} = -\frac{3ie^{-2}}{32},$$

así que

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\,dz = \frac{3\pi}{16e^2}$$

Por otra parte,

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\,dz = \underbrace{\int_{[-R,R]} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\,dz}_{(i)} + \underbrace{\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\,dz}_{(ii)} \qquad (*)$$

Hallamos las integrales:

($i$) Una parametrización de $[-R,R]$ es $\varphi_1 : [-R,R] \to \mathbb{C}$, $\varphi_1(t) = t$. Por tanto,

$$\int_{[-R,R]} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\,dz = \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{(t^2+4)^2}\,dt = \int_{-R}^R \frac{\cos(t)}{(t^2+4)^2} + \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen}(t)}{(t^2+4)^2}$$

Nótese que

$$\int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen}(t)}{(t^2+4)^4} = 0$$

porque $t \mapsto \operatorname{sen}(t)$ es una función impar, así que $t \mapsto \frac{\operatorname{sen}(t)}{(t^2+4)^2}$ también lo es, y por tanto su integral en cualquier intervalo centrado en el origen es nula. Consecuentemente,

$$\int_{[-R,R]} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\,dz \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it}}{(t^2+4)^2}\,dt$$

$(ii)$ Una parametrización de $C_R$ es $\varphi_2\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\varphi_2(t) = Re^{it}$. Por tanto,

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\, dz \right| = \left| iR \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{(R^2e^{2it}+4)^2}\, dt \right| \le R \int_0^{\pi} \frac{1}{|R^2e^{2it}+4|^2}\, dt$$

Pero

$$\begin{aligned} |R^2e^{2it}+4|^2 &= |R^2(\cos(2t)+i\operatorname{sen}(2t))+4|^2 \\ &= (R^2\cos(2t)+4)^2 + R^4\operatorname{sen}^2(2t) \\ &= R^4\cos^2(2t)+16+8R^2\cos(2t)+R^4\operatorname{sen}^2(2t) \\ &= R^4+16+8R^2\cos(2t) \\ &\ge R^4+16-8R^2, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{1}{|R^2e^{2it}+4|^2} \le \frac{1}{R^4+16-8R^2},$$

y por tanto,

$$R\int_0^{\pi} \frac{1}{|R^2e^{2it}+4|^2}\, dt \le \frac{R\pi}{R^4+16-8R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

En consecuencia,

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\, dz \right| \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Tomando límites cuando $R \to \infty$ en la expresión $(*)$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{(t^2+4)^2}\, dt = \frac{3\pi}{16e^2},$$

concluyéndose que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{(t^2+4)^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{(t^2+4)^2}\, dt = \frac{3\pi}{32e^2}$$ □

**Ejercicio 17.** *Para $a,b>0$, se considera el camino rectangular $\gamma = [-a,a,a+ib,-a+ib,-a]$. Calcular*

$$\int_\gamma e^{-z^2}\, dz$$

*y probar que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\, dx = \sqrt{\pi}e^{-b^2}$$

*Solución.* Si se consideran los caminos

$$\gamma_1 = [-a,a], \qquad \gamma_2 = [a,a+ib], \qquad \gamma_3 = [a+ib,-a+ib], \qquad \gamma_4 = [-a+ib,-a],$$

se tiene que $\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$. Parametrizamos los caminos:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) = t, && t\in[-a,a], && \varphi_2(t) = a+ibt, && t\in[0,1], \\ &\varphi_3(t) = ib-t, && t\in[-a,a], && \varphi_4(t) = -a+i(1-t), && t\in[0,b] \end{aligned}$$

Cada una de estas parametrizaciones es de clase $\mathscr{C}^1$, y además, se verifica

$$\varphi_1'(t) = 1, \qquad \varphi_2'(t) = ib, \qquad \varphi_3'(t) = -1, \qquad \varphi_4'(t) = -i$$

Tenemos que la $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida mediante $f(z) = e^{-z^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, que es un dominio convexo. Además, $\gamma$ es un camino cerrado en $\mathbb{C}$, así que el teorema de Cauchy para dominios convexos permite afirmar que

$$\int_\gamma e^{-z^2}\, dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} e^{-z^2}\, dz}_{(i)} + \underbrace{\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\, dz}_{(ii)} + \underbrace{\int_{\gamma_3} e^{-z^2}\, dz}_{(iii)} + \underbrace{\int_{\gamma_4} e^{-z^2}\, dz}_{(iv)} = 0 \qquad (*)$$

Calculemos o estimemos cada una de las integrales anteriores:

$(i)$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,dz = \int_{-a}^{a} e^{-t^2}\,dt \xrightarrow{a\to\infty} \sqrt{\pi}.$

$(ii)$ $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz\right| = \left|\int_0^1 ibe^{-a^2+b^2t^2-2iabt}\,dt\right| \le be^{-a^2}\int_0^1 |e^{b^2t^2}||e^{-2iabt}|\,dt = be^{-a^2}\int_0^1 e^{b^2t^2}\,dt \xrightarrow{a\to\infty} 0.$

$(iii)$ $\displaystyle\int_{\gamma_3} e^{-z^2}\,dz = -\int_{-a}^{a} e^{b^2-t^2+2ibt}\,dt = -e^{b^2}\int_{-a}^{a} e^{-t^2}\cos(2bt)\,dt - ie^{b^2}\underbrace{\int_{-a}^{a} e^{-t^2}\operatorname{sen}(2bt)\,dt}_{I}$

Nótese que $I = 0$ porque el seno es una función impar y por tanto la función $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{sen}(2bt)$ también, así que la integral en cualquier intervalo centrado en el origen vale cero.

$(iv)$ $\displaystyle\left|\int_{\gamma_4} e^{-z^2}\,dz\right| = \left|\int_0^b e^{-a^2+(1-t)^2+2ai(1-t)}\,dt\right| \le e^{-a^2}\int_0^b |e^{(1-t)^2}||e^{2ai(1-t)}|\,dt = e^{-a^2}\int_0^b e^{(1-t)^2}\,dt \xrightarrow{a\to\infty} 0$

Por tanto, al tomar límites cuando $a \to \infty$ en $(*)$ se obtiene

$$\sqrt{\pi} - e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(2bt)\,dt = 0,$$

y de aquí se llega a

$$\sqrt{\pi}e^{-b^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(2bt)\,dt$$

□

**Ejercicio 18.** *Calcular las siguientes integrales:*

*(a)* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^{27}}\,dz,$ *(b)* $\displaystyle\int_{|z|=1} \left(\frac{z-2}{2z-1}\right)^3 dz,$ *(c)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|^2}\,d\theta, \quad 0<r<1.$

*Solución.*

$(a)$ La función $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, que es un dominio convexo; $\gamma \equiv |z| = 1$ es un camino en $D$, y $0 \not\in \operatorname{sop}(\gamma)$. Por la fórmula de Cauchy para la derivada vigesimosexta en dominios convexos,

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^{27}}\,dz = \frac{2\pi i}{26!} f^{(26)}(0)\,\mathrm{n}(\gamma,0) = 0,$$

ya que $f^{(26)}(z)$ es o bien $\operatorname{sen}(z)$ o bien $-\operatorname{sen}(z)$.

$(b)$ La función $f(z) = (\frac{z}{2}-1)^3$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, que es un dominio convexo; $\gamma \equiv |z| = 1$ es un camino en $D$, y $\frac{1}{z} \not\in \operatorname{sop}(\gamma)$. Por la fórmula de Cauchy para la derivada segunda en dominios convexos,

$$\int_{|z|=1} \left(\frac{z-2}{2z-1}\right)^3 dz = \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z}{2}-1\right)^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{n}\left(\gamma,\frac{1}{2}\right) = -\frac{9\pi i}{8},$$

ya que para todo $z \in \mathbb{C}$ es $f'(z) = \frac{3}{2}\left(\frac{z}{2}-1\right)^2$ y $f''(z) = \frac{3}{2}\left(\frac{z}{2}-1\right)$, y por tanto $f''(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{8}$.

$(c)$ Sea $0 < r < 1$. Tenemos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{ire^{i\theta}(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}\,d\theta$$

Sea $\gamma$ la circunferencia de centro el origen y radio $r$ recorrida de forma simple en sentido positivo, y sea $\varphi\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ la función dada por $\varphi(\theta) = re^{i\theta}$. Entonces

$$-i\int_\gamma \frac{1}{(1-z)(z-r^2)}\,dz = \int_\gamma \frac{1}{iz(1-z)(1-\frac{r^2}{z})}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{ire^{i\theta}(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}\,d\theta$$

La función $f(z)=\frac{1}{1-z}$ está bien definida en $\mathbb{D}$. Además, $\mathbb{D}$ es un dominio convexo, $f$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, $\gamma$ es un camino en $\mathbb{D}$ y $r^2 \in \mathbb{D}\setminus \operatorname{sop}(\gamma)$ (pues $0<r^2<r<1$). Por la fórmula de Cauchy para dominios convexos,

$$\int_\gamma \frac{\frac{1}{1-z}}{z-r^2}\,dz = 2\pi i f(r^2)\operatorname{n}(\gamma,r^2) = \frac{2\pi i}{1-r^2}$$

Se concluye que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|^2} = -i\int_\gamma \frac{1}{(1-z)(z-r^2)}\,dz = \frac{2\pi}{1-r^2} \qquad \square$$

**Ejercicio 19.** *Sea $f$ una función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$. Supongamos que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\,dt \le \frac{r}{1-r}$$

*para cada $r\in(0,1)$. Si $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ es la serie de Taylor de $f$ en 0, probar que $|a_n|\le ne$ para cada $n\in\mathbb{N}$.*

*Solución.* Dado $r\in(0,1)$, llamamos $\gamma_r$ a la circunferencia de centro el origen y radio $r$ recorrida de forma simple y en sentido positivo. Como $\mathbb{D}$ es un dominio convexo, $f$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, $\gamma$ es un camino en $\mathbb{D}$ y $0\in\mathbb{D}\setminus\operatorname{sop}(\gamma)$, la fórmula de Cauchy para la derivada $n$-ésima en dominios convexos afirma que

$$f^{(n)}(0)\operatorname{n}(\gamma,0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

es decir,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

Sea $\varphi\colon[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ la función dada por $\varphi(t)=re^{it}$. Como $\varphi$ es una parametrización de $\gamma_r$ de clase $\mathscr{C}^1$, entonces

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{r^{n+1}e^{it(n+1)}}ire^{it}\,dt$$

Por tanto,

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|\,dt \le \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}$$

Dado $n\in\mathbb{N}$, sea $g\colon(0,1)\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(r)=\frac{1}{r^{n-1}(1-r)}$. Tenemos que $g$ es derivable y

$$g'(z) = -\frac{1}{(r^{n-1}-r^n)^2}\left((n-1)r^{n-2}-nr^{n-1}\right),\quad r\in(0,1)$$

Por tanto,

$$g'(z)=0 \iff (n-1)r^{n-2}=nr^{n-1} \iff r=\frac{n-1}{n}$$

Además,

$$g'(z)<0 \iff (n-1)r^{n-2}-nr^{n-1}>0 \iff (n-1)r^{n-2}>nr^{n-1} \iff n-1>nr \iff r<\frac{n-1}{n}$$

Observamos que $g$ es estrictamente decreciente en $(0,\frac{n-1}{n})$ y estrictamente creciente en $(\frac{n-1}{n},1)$. Por tanto, $\frac{n-1}{n}$ es el mínimo global de $g$, y el valor mínimo de $g$ sería

$$g\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}(1-\frac{n-1}{n})} = n\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} = n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

La sucesión $b_n=(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}$, $n\ge 2$ es creciente y con límite $e$, luego para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene

$$n(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\le e$$

En consecuencia,

$$g\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq ne$$

Usando que $|a_n| \leq g(r)$ para todo $r \in (0,1)$, concluimos que

$$|a_n| \leq g\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq ne$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

**Ejercicio 20.** *Hallar las series de Taylor en* 0 *de las siguientes funciones, especificando en cada caso el radio de convergencia.*

*(a)* $f(z) = \left(\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)^2$,

*(b)* $f(z) = \sqrt{1-z}$ *(la rama tal que* $f(0) = 1$*).*

*Solución.*

$(a)$ Estudiemos primero dónde es holomorfa la función $f$. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1-\overline{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} - i\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$$

Se tiene que

$$z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \iff y = 0, \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} \leq 0 \iff y = 0, \frac{1}{1-x} \leq 0 \iff y = 0, x \geq 1$$

Como la función logaritmo principal es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (y no puede ser holomorfa en un conjunto mayor), entonces la función definida por $g(z) = \operatorname{Log}(\frac{1}{1-z})$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ (y no puede ser holomorfa en un conjunto mayor), deduciéndose que $f$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. De aquí se deduce que la serie de Taylor de $f$ en 0 tendrá radio de convergencia menor o igual que 1.

Hallemos la serie de Taylor de $g$ centrada en 0. Si $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$,

$$g'(z) = \frac{1}{1-z}, \qquad g''(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \qquad g'''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$$

Se prueba fácilmente por inducción que

$$g^{(n)}(z) = \frac{(n-1)!}{(1-z)^{n-1}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n},$$

lo que nos dice que la serie de Taylor de $g$ centrada en cero es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, que converge siempre que $|z| < 1$. Por tanto,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

Si llamamos

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

se tiene, aplicando la fórmula para el producto de Cauchy,

$$f(z) = \left(\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k)}\right) z^n$$

Como esto es válido siempre que $|z| < 1$, concluimos que la serie anterior es la serie de Taylor de $f$ en 0 y el radio de convergencia es 1.

(*b*) Como $f$ no está definida en $z=1$, la serie de Taylor de $f$ en 0 tendrá radio de convergencia como mucho 1. La función $g(z)=1-z$ es holomorfa y nunca nula en $\mathbb{D}$, y como $\mathbb{D}$ es simplemente conexo, entonces existe una rama de la $\sqrt{g}$ en $\mathbb{D}$ y además es holomorfa. De esto se deduce que $f$ está bien definida y es holomorfa en $\mathbb{D}$, y además su serie de Taylor en 0 tiene radio de convergencia 1. Se tiene que

$$f'(z)=-\frac{1}{2\sqrt{1-z}}, \qquad f''(z)=\frac{1}{4(1-z)^{3/2}}, \qquad f'''(z)=-\frac{3}{8(1-z)^{5/2}},$$

luego

$$f'(0)=-\frac{1}{2}, \qquad f''(0)=\frac{1}{4}, \qquad f'''(0)=-\frac{3}{8}$$

Se demuestra fácilmente por inducción que para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 2$ se tiene

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n\frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}$$

En consecuencia,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,$$

donde, para $n\geq 2$,

$$a_n=(-1)^n\frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!2^n}$$

mientras que $a_0=1$ y $a_1=-\frac{1}{2}$.

$\square$