

– Examen –

1. (a) Encuentre todos los posibles métodos encajados RK1(2) en los que el método de segundo orden sea el de Heun.

(b) Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Elija un método encajado de los hallados en el apartado anterior, calcule la aproximación y_1 de $y(h)$ que se obtiene con un paso del método de orden 1 del par así como la estimación de error $\tilde{\epsilon}_0$ que proporciona el método encajado. Compare la estimación de error con el error exacto: ¿es del orden esperado?

2. (a) Estudie la estabilidad y el orden del método multipaso definido por

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = \frac{h}{4}(f_{k+2} + 8f_{k+1} + 3f_k), \quad k = 0, \dots, N-2.$$

(b) Aplique el método al problema de Cauchy (1) con paso h y encuentre la aproximación y_2 de $y(2h)$ que se obtiene si se usa el método de Euler explícito para arrancar.

3. Se considera un método RK de s etapas y orden p .

a) Pruebe que la función de estabilidad del método viene dada por:

$$R(\hat{h}) = 1 + \hat{h}b^t(I - \hat{h}A)^{-1}\vec{e},$$

siendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,s} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_s \end{bmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Pruebe

$$R(h) = e^h + O(h^{p+1}).$$

(Indicación: aplique el método con paso h al problema de Cauchy (1) y use el apartado anterior). Deduzca que 0 está en la frontera de la región de estabilidad absoluta.

4. (a) Calcule los coeficientes a, b, c de la fórmula de derivación numérica

$$y'(1) \approx \frac{ay(1-2h) + by(1-h) + cy(1)}{h}$$

para que su orden sea lo mayor posible. ¿Cuál es la orden de la fórmula resultante?

(b) Proponga un esquema de diferencias finitas de segundo orden para el problema de contorno

$$\begin{cases} -y'' + 2y' + y = \cos(x), & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \\ y'(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

que use la fórmula hallada en el apartado (a) para discretizar la condición de contorno en $x = 1$. Escriba el esquema en forma matricial y estudie si la matriz es de diagonal dominante.