Facultad de Ciencias – Universidad de Málaga
ANÁLISIS NUMÉRICO
3º de Grado en Matemáticas – Curso 2021/22
27 de Junio de 2022

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Nombre: ____________________

– Examen –

1. Se considera el método RK:

$$
\begin{aligned}
y_k^{(1)} &= y_k + \gamma h f\left(t_k + \gamma h, y_k^{(1)}\right),\\
y_k^{(2)} &= y_k + \frac{h}{2} f\left(t_k + \gamma h, y_k^{(1)}\right) + \gamma h f\left(t_k + \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) h, y_k^{(2)}\right),\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} f\left(t_k + \gamma h, y_k^{(1)}\right) + \frac{h}{2} f\left(t_k + \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) h, y_k^{(2)}\right).
\end{aligned}
$$

   a) Determine γ para que el método sea al menos de segundo orden. Estudie si el método hallado es de orden superior a 2. En los apartados que siguen se supondrá que γ toma el valor hallado en este apartado.

   b) Pruebe que, si la función f es de Lipschitz en la variable y y h es suficientemente pequeño, el método está bien definido, es decir, que las ecuaciones que satisfacen $y_k^{(i)}$, $i = 1, 2$ tienen una única solución. Proponga un método numérico para resolver dichas ecuaciones.

   c) Encuentre la función de estabilidad absoluta del método. Es el método A-estable?

   d) Proponga, si es posible, un método RK2(3) encajado en el que el método hallado sea el de segundo orden.

2. Se recuerda que el método de Adams-Moulton de q pasos, AMq, se define de la siguiente manera:

$$y_{k+q} = y_{k+q-1} + \int_{t_{k+q-1}}^{t_{k+q}} Q_q(t)\, dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

   siendo $Q_q(t)$ el polinomio que interpola los $q+1$ datos:

$$(t_{k+q}, f_{k+q}), \dots, (t_k, f_k).$$

   a) Obtenga la expresión del método AM2 en la forma

$$y_{k+2} - y_{k+1} = h(\beta_2 f_{k+2} + \beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k), \quad k = 0, 1, \dots \tag{1}$$

   b) Estudie el orden y la estabilidad del método.

   c) Se aplica el método AM2 a los problemas de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (l+1)t^l, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

   para $l = 0, 1, 2$ con valores iniciales

$$y_0 = 0, \quad y_1 = h^{(l+1)},$$

   y con h lo suficientemente pequeño para que el método esté bien definido (es decir, que haya un único y_{k+2} que satisfaga (1) para cada k). Pruebe que el método da la solución exacta, es decir

$$y_k = y(t_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

3. Se considera el problema de contorno no lineal

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) + y(x)^2 = x^3, \quad x \in [0,1], \\ y'(0) = 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

a) Proponga un método de diferencias finitas de segundo orden que use una malla uniforme de $N+2$ puntos

$$x_i = i\,h, \quad i = 0, \dots, N+1,$$

siendo

$$h = 1/(N+1).$$

Use la técnica del nodo fantasma para tratar la condición de contorno en $x = 0$.

b) Exprese el sistema no lineal a resolver como la búsqueda de un cero de una función Φ de $\mathbb{R}^{N+1}$ en $\mathbb{R}^{N+1}$, es decir,

$$\Phi(U) = 0, \tag{2}$$

siendo $U = [u_0, u_1, \dots, u_N]^T$ el vector de aproximaciones.

c) Escriba la forma del método de Newton para resolver el sistema no lineal (2). En particular, escriba la matriz y el segundo miembro de los sistemas lineales a resolver en cada iteración del método.