– Examen –

1. Se considera un problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad t \in [0,T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $f : [0,T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua y de Lispchitz en la variable y.

a) Enuncie la definición de estabilidad para un método unipaso

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k; h), \quad k = 0, 1 \ldots$$

b) Pruebe que, si existen $\Lambda > 0$ y $h^* > 0$ tales que

$$|\Phi(t,y;h) - \Phi(t,z;h)| \leqslant |y - z|, \quad \forall t \in [0,T],\ y,z \in \mathbb{R},\ h \in (0,h^*],$$

entonces el método es estable.

c) Pruebe que el método de Heun es estable.

2. El método de Simpson se define de la siguiente manera:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} Q_2(s)\,ds,$$

siendo Q_2 el polinomio de grado menor o igual que 2 que interpola los puntos

$$(t_{k+1}, f_{k+1}),\ (t_k, f_k),\ (t_{k-1}, f_{k+1}).$$

a) Deduzca la expresión del método de Simpson.

b) Estudie su estabilidad y determine su orden.

3. Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a + \lambda y, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

siendo $\lambda < 0$ y a, y_0 números reales arbitrarios.

a) Resuelva el problema de Cauchy y pruebe que su solución verifica

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = -\frac{a}{\lambda}.$$

b) Aplique el método de Heun al problema de Cauchy y encuentre, razonando por recurrencia, la expresión de y_k en función de y_0.

c) Usando la expresión hallada en el apartado anterior, pruebe que se tiene

$$\lim_{k\to\infty} y_k = -\frac{a}{\lambda}$$

si y sólo si $h\lambda$ está en la región de estabilidad del método.

4. Se considera el problema de contorno:

$$\left\{\begin{array}{l} -u'' = f(x), \quad x \in [0,1], \\ u(0) - u'(0) = \alpha, \\ u(1) + u'(1) = \beta, \end{array}\right. \tag{3}$$

siendo $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y α, β dos números reales arbitrarios.

a) Pruebe que las fórmulas de derivación numérica

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}, \quad y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

son de orden 2.

b) Con ayuda de las fórmulas de derivación del apartado anterior y de la técnica del nodo fantasma, proponga un esquema de diferencias finitas de segundo orden para el problema de contorno (3) usando una partición equidistante del intervalo $[0,1]$ con $N+1$ puntos $\{x_0, \ldots, x_N\}$.

c) Si es posible, escriba el sistema lineal a resolver en forma matricial $AU = b$ de manera que A sea una matriz simétrica. ¿Es la matriz A definida positiva?