Geometría Diferencial de Curvas y Superficies **Examen de abril de 2021**

1. *Sea* $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *una curva parametrizada por el arco y periódica, es decir, tal que* $\alpha(s) = \alpha(s+A)$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$, *siendo* $A > 0$ *fijo.*

(a) Demuéstrese que dado $v \in \mathbb{R}^2$, *existe un vector tangente a* α *y perpendicular a* v.

(b) Dedúzcase del apartado anterior que dado $w \in \mathbb{R}^2$, *existe una recta tangente a* α *y paralela a* w.

(a) Sea $v \in \mathbb{R}$. Se considera la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f(s) = \langle \alpha(s), v\rangle \end{aligned}$$

Fíjese cualquier $s \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces $f(s) = f(s+A)$. Además, f es continua en $[s, s+A]$ y derivable en $(s, s+A)$, así que por el teorema de Rolle, existe $c \in (s, s+A)$ tal que

$$f'(c) = 0 \iff \langle \alpha'(c), v\rangle = 0$$

luego $\alpha'(c)$ es un vector tangente a α y perpendicular a v.

(b) Sea $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Aplicando el teorema anterior a $w' = (-w_2, w_1)$, existe un vector $\alpha'(c)$ tangente a α y perpendicular a w'. Como w es perpendicular a w' y w' es perpendicular a $\alpha'(c)$, entonces w y $\alpha'(c)$ llevan la misma dirección. La recta que pasa por $\alpha(c)$ y lleva la dirección de $\alpha'(c)$ es tangente a α y paralela a w.

2. *Sea* $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular definida por* $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, e^t + e^{-t})$. *Calcúlese su curvatura y su torsión.*

Se tiene que $\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t}, e^t - e^{-t})$, así que α no es parametrizada por el arco. La curvatura y la torsión serán entonces

$$k(t) = \frac{||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^3} \qquad \tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)||^2}$$

y el desafío que plantea este ejercicio es tener la voluntad de realizar un puñado de cálculos tediosos e insulsos.

3.

(a) Defínanse los puntos críticos (o singulares) de una función $f\colon V \to \mathbb{R}$, *siendo* V *un abierto de* $\mathbb{R}^3$.

(b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, *se considera el conjunto* $S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - az^2 = a\}$. *¿Para qué valores de* a *es* S_a *una superficie regular?*

(a) Sea $f\colon V \to \mathbb{R}$ una función definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$. Un punto $p \in V$ se dice que es *punto crítico* (o *singular*) cuando la aplicación df_p es no sobreyectiva.

(b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, considérese la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - az^2 - a$. La matriz

$$Jf_p = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2az \end{pmatrix}_p$$

no tiene rango máximo si y solo si $p=(0,0,0)$, es decir, df_p es no sobreyectiva si y solo si $p=(0,0,0)$. Ahora bien, para todo $a\neq 0$ se tiene que $(0,0,0)\notin f^{-1}(0)$, luego 0 es valor regular y por tanto S_a es superficie regular. Si fuese $a=0$, entonces el conjunto

$$S_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x=0,y=0\}$$

es el eje z, que no es una superficie regular. Se concluye que S_a es una superficie regular si y solo si $a\neq 0$.