Convocatoria extraordinaria

1. Se considera el método predictor-corrector que tiene por predictor el método de Euler explícito, por corrector el método de Euler implícito y en el que se hacen L correcciones

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)} &= y_k + hf(t_k, y_k), \\ y_{k+1}^{(l+1)} &= y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}^{(l)}), \quad l = 0, \dots, L-1, \\ y_{k+1} &= y_{k+1}^{(L)}. \end{cases}$$

   (a) Interprete el método como un método RK: identifique su tablero y estudie el orden.

   (b) Calcule la función de estabilidad absoluta del método. Pruebe que, cuando $L \to \infty$, tiende a la del método corrector.

   (c) En caso de que no se sepa interpretar el método como RK, se valorará si se estudia al menos el caso $L = 1$.

2. Se considera la familia de métodos numéricos multipaso

$$y_{k+1} = \alpha y_k + (1-\alpha) y_{k-1} + 2hf_k + \frac{h\alpha}{2}\left(f_{k+1} - 3f_k\right),$$

   donde α es un parámetro.

   (a) Estudie la estabilidad y el orden del método en función del parámetro α. ¿Para qué valores de α es convergente?

   (b) Seleccione un valor del parámetro para que el método sea estable y del mayor orden posible y calcule la función de estabilidad absoluta del método correspondiente.

3. Se considera el problema de contorno

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in [0,1], \\ u'(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases}$$

   siendo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Proponga un método de diferencias finitas de segundo orden para aproximar la solución del problema, usando la técnica del nodo fantasma para tratar la condición de contorno que se da en $x = 0$.

   (b) Pruebe que es posible escribir el esquema en forma matricial

$$AU = F,$$

   con matriz A simétrica. Estudie si la matriz es definida positiva.