En esta práctica se implementan varios esquemas en diferencias finitas implícitos para la ecuación del calor.

Si llamamos N al número de puntos de la discretización en espacio, habrá que resolver un sistema lineal de N ecuaciones y N incógnitas. Primero consideramos condiciones de contorno de Dirichlet, D_L a la izquierda y D_R a la derecha. Tenemos entonces $N-2$ ecuaciones y $N-2$ incógnitas, pues u_0^{n+1} y u_{N-1}^{n+1} son conocidos.

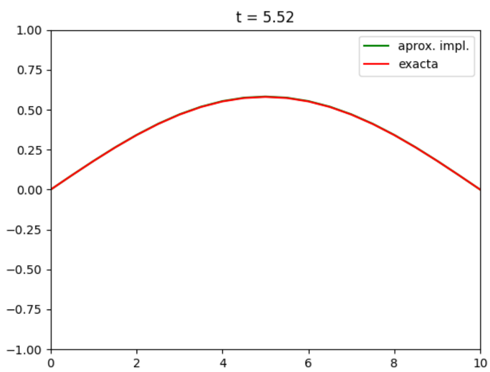
El esquema a considerar en el primer apartado de la práctica es, como vimos en clase, $AU^{n+1} = B^n$, es decir,

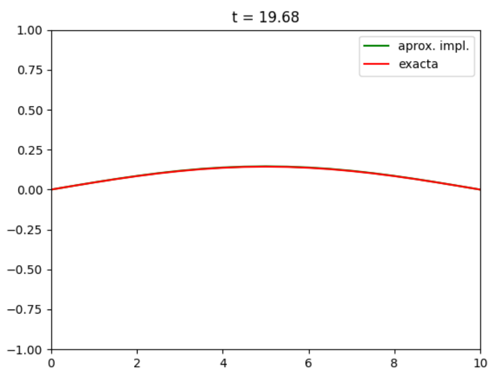
$$\begin{pmatrix} 1+2s & -s & \cdots & 0 & 0 \\ -s & 1+2s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+2s & -s \\ 0 & 0 & \cdots & -s & 1+2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-3}^{n+1} \\ u_{N-2}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n + sD_L(t_{n+1}) \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-3}^n \\ u_{N-2}^n + sD_R(t_{n+1}) \end{pmatrix},$$

con $s = \frac{k\Delta t}{\Delta x^2}$. Este esquema es incondicionalmente estable, así que no hay condición CFL. El esquema de Crank-Nicholson tiene la misma matriz de coeficientes que el anterior, y el término independiente es

$$B^n = \begin{pmatrix} (1-2s)u_1^n + su_2^n + sD_L(t_n) + sD_L(t_{n+1}) \\ (1-2s)u_2^n + su_1^n + su_3^n \\ \vdots \\ (1-2s)u_{N-3}^n + su_{N-4}^n + su_{N-2}^n \\ (1-2s)u_{N-2}^n + su_{N-3}^n + sD_R(t_n) + sD_R(t_{n+1}) \end{pmatrix}.$$

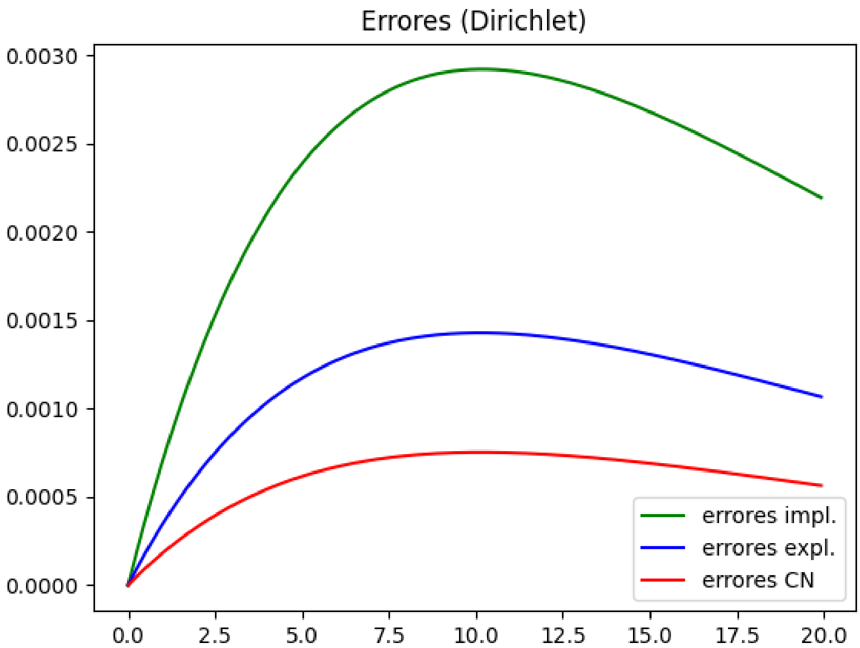
Primero ejecutamos la función `calor_implicito_dirichlet` en el intervalo $[0, 10]$, con tiempo máximo $T = 20$, y tomando $\Delta x = 0'5$, $\Delta t = 0'12$ y $k = 1$. Consideramos el dato inicial $f(x) = \text{sen}(\frac{\pi x}{10})$ y condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas en los extremos, de forma que la solución exacta es $u(x,t) = \text{sen}(\frac{\pi x}{10})\exp(-(\frac{\pi}{10})^2 t)$.





Vemos que la solución tiende a cero el tiempo tiende a infinito.

Ahora comparamos resultados con `calor_cn_dirichlet`, que implementa el esquema de Crank-Nicholson, y con `calor_explicito_dirichlet`, que implementa el esquema explícito de la práctica anterior.



El tiempo de ejecución del esquema implícito es 0'010281801223754883, el del explícito, 0'010136842727661133, y el de Crank-Nicholson, 0'012889385223388672. Vemos que el esquema de Crank-Nicholson es el que comete menor error, y el esquema explícito es el más rápido. La principal desventaja del esquema explícito es que la condición CFL restringe la elección de Δx y Δt.

Supongamos que las condiciones de contorno son de Neumann, N_L a la izquierda y N_R a la derecha. Supongamos también que la ecuación tiene un término fuente F. Como hay condiciones de Neumann, el sistema a resolver tiene N ecuaciones y N incógnitas. El esquema implícito es $AU^n = B^n$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1+2s & -2s & \cdots & 0 & 0 \\ -s & 1+2s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+2s & -s \\ 0 & 0 & \cdots & -2s & 1+2s \end{pmatrix}, \qquad U^n = \begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix},$$

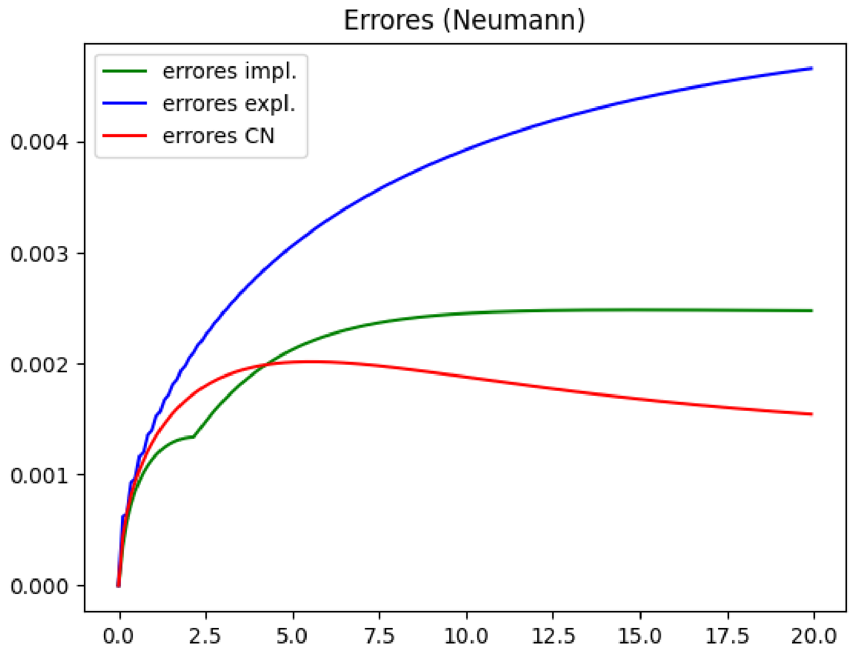
$$B^n = \begin{pmatrix} u_0^n - 2s\Delta x N_L(t_{n+1}) \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n + 2s\Delta x N_R(t_{n+1}) \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} F_0^{n+1} \\ F_1^{n+1} \\ \vdots \\ F_{N-2}^{n+1} \\ F_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix},$$

siendo $s = \frac{k\Delta t}{\Delta x^2}$ y $F_i^{n+1} = F(x_i, t_{n+1})$. El de Crank-Nicholson tiene la misma matriz de coeficientes, y el término independiente sería

$$B^n = \begin{pmatrix} (1-2s)u_0^n + 2su_1^n - 2s\Delta x N_L(t_n) - 2s\Delta x N_L(t_{n+1}) \\ (1-2s)u_1^n + su_0^n + su_2^n \\ \vdots \\ (1-2s)u_{N-2}^n + su_{N-3}^n + su_{N-1}^n \\ (1-2s)u_{N-1}^n + 2su_{N-2}^n + 2s\Delta x N_R(t_n) + 2s\Delta x N_R(t_{n+1}) \end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} F_0^{n+1} + F_0^n \\ F_1^{n+1} + F_1^n \\ \vdots \\ F_{N-2}^{n+1} + F_{N-2}^n \\ F_{N-1}^{n+1} + F_{N-1}^n \end{pmatrix},$$

con $s = \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2}$.

Para terminar, comparamos los resultados de las funciones `calor_implicito_neumann`, `calor_explicito_neumann` y `calor_cn_neumann`.



Ahora es el esquema explícito el que comete mayor error. El tiempo de ejecución del esquema implícito es 0'0102386474609375, el del explícito es 0'01095890998840332, y el de Crank-Nicholson es 0'01751565933227539.