4. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Consideremos la siguiente familia de conjuntos:

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : \text{ existen } F, G \in \mathcal{M} \text{ tales que } F \subset A \subset G \text{ y } \mu(G \setminus F) = 0\}$$

(a) Demuestre que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra y que contiene a $\mathcal{M}$.

(b) Demuestre que si $A \in \mathcal{F}$ y existen $F, G \in \mathcal{M}$ con $F \subset A \subset G$ y $\mu(G \setminus F) = 0$ entonces $\mu(G) = \mu(F)$.

(c) Demuestre que si $A \in \mathcal{F}$ y existen $F_i, G_i \in \mathcal{M}, i = 1, 2$, con $F_i \subset A \subset G_i$ y $\mu(G_i \setminus F_i) = 0$ entonces $\mu(G_i) = \mu(F_j), i = 1, 2, j = 1, 2$.

(d) Para cada $A \in \mathcal{F}$ se define $\overline{\mu}(A) = \mu(G)$ si $F \subset A \subset G$, $F, G \in \mathcal{M}$ y $\mu(G \setminus F) = 0$. Justifique que $\overline{\mu}$ está bien definida y demuestre que $\overline{\mu}$ es una medida completa sobre $\mathcal{F}$ que extiende a μ.

(a) Veamos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$, pues $\emptyset \subset X$ y, tomando $F = G = \emptyset$, se tiene que $F \subset \emptyset \subset G$, que $F, G \in \mathcal{M}$ (por ser $\mathcal{M}$ una σ-álgebra) y que $\mu(G \setminus F) = \mu(\emptyset) = 0$ (por ser μ una medida).

(ii) Sea $A \in \mathcal{F}$ y veamos que $A^c \in \mathcal{F}$. Como $A \in \mathcal{F}$, existen $F, G \in \mathcal{M}$ tales que $F \subset A \subset G$ y $\mu(G \setminus F) = 0$. Como $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra, entonces $F^c, G^c \in \mathcal{M}$. Además, $G^c \subset A^c \subset F^c$, y $\mu(F^c \setminus G^c) = \mu(F^c \cap (G^c)^c) = \mu(F^c \cap G) = \mu(G \setminus F) = 0$, lo que demuestra que $A^c \in \mathcal{F}$.

(iii) Sea $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ una familia numerable de elementos de $\mathcal{F}$ y veamos que $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, como $A_i \in \mathcal{F}$, existen $F_i, G_i \in \mathcal{M}$ tales que $F_i \subset A_i \subset G_i$ y $\mu(G_i \setminus F_i) = 0$. Por tanto, $\bigcup_{i=1}^\infty F_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty G_i$, y como $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y $F_i, G_i \in \mathcal{M}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{i=1}^\infty F_i, \bigcup_{i=1}^\infty G_i \in \mathcal{M}$. Además,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty G_i \setminus \bigcup_{i=1}^\infty F_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty G_i \cap \left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty G_i \cap \bigcap_{i=1}^\infty F_i^c\right) \overset{(*)}{\leq} \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty (G_i \cap F_i^c)\right)$$
$$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty (G_i \setminus F_i)\right) \overset{(**)}{\leq} \sum_{i=1}^\infty \mu(G_i \setminus F_i) = \sum_{i=1}^\infty 0 = 0,$$

luego $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty G_i \setminus \bigcup_{i=1}^\infty F_i) = 0$, y esto prueba que $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$. En $(*)$ se ha usado que $\bigcup_{i=1}^\infty G_i \cap \bigcap_{i=1}^\infty F_i^c \subset \bigcup_{i=1}^\infty (G_i \cap F_i^c)$, pues si $x \in \bigcup_{i=1}^\infty G_i \cap \bigcap_{i=1}^\infty F_i^c$, entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in G_{i_0}$, y, por tanto, $x \in G_{i_0} \cap F_{i_0}^c$, así que $x \in \bigcup_{i=1}^\infty (G_i \cap F_i^c)$.

Así, tenemos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra, y si $A \in \mathcal{M}$, tomando $F = G = A$ se tiene que $F, G \in \mathcal{M}$, que $F \subset A \subset G$ y que $\mu(G \setminus F) = \mu(\emptyset) = 0$, luego $A \in \mathcal{F}$ y por tanto $\mathcal{F}$ contiene a $\mathcal{M}$.

(b) Sea $A \in \mathcal{F}$ y sean $F, G \in \mathcal{M}$ con $F \subset A \subset G$ y $\mu(G \setminus F) = 0$. Distinguimos dos casos:

(i) Si $\mu(F) < \infty$, entonces $\mu(G \setminus F) = \mu(G) - \mu(F)$. Pero $\mu(G \setminus F) = 0$, así que $\mu(G) - \mu(F) = 0$, o, equivalentemente, $\mu(G) = \mu(F)$.

(ii) Si $\mu(F) = \infty$, entonces, por ser $F \subset G$, se tiene que $\mu(G) = \infty$, luego $\mu(G) = \mu(F)$.

(c) Sea $A \in \mathcal{F}$ y sean $F_1, F_2, G_1, G_2 \in \mathcal{M}$ tales que $F_i \subset A \subset G_i$ y $\mu(G_i \setminus F_i) = 0$, para cada $i = 1, 2$. Distinguimos dos casos:

(i) Supongamos que $F_2 \subset F_1$. Entonces $F_1^c \subset F_2^c$, luego $G_2 \cap F_1^c \subset G_2 \cap F_2^c$, y, por tanto, $\mu(G_2 \setminus F_1) \leq \mu(G_2 \setminus F_2) = 0$, así que $\mu(G_2 \setminus F_1) = 0$. Como $F_1, G_2 \in \mathcal{M}$, $F_1 \subset A \subset G_2$ y $\mu(G_2 \setminus F_1) = 0$, por el apartado anterior, $\mu(G_2) = \mu(F_1)$. Pero el apartado anterior también permite afirmar que $\mu(G_1) = \mu(F_1)$ y que $\mu(G_2) = \mu(F_2)$, y uniendo las tres igualdades se obtiene $\mu(G_1) = \mu(F_1) = \mu(G_2) = \mu(F_2)$, que es lo que se quería probar.

(ii) Supongamos que $F_1 \subset F_2$. Entonces $F_2^c \subset F_1^c$, luego $G_1 \cap F_2^c \subset G_1 \cap F_1^c$, y, por tanto, $\mu(G_1 \setminus F_2) \leq \mu(G_1 \setminus F_1) = 0$, así que $\mu(G_1 \setminus F_2) = 0$. Como $F_2, G_1 \in \mathcal{M}$, $F_2 \subset A \subset G_1$ y $\mu(G_1 \setminus F_2) = 0$, por el apartado anterior, $\mu(G_1) = \mu(F_2)$. Pero el apartado anterior también permite afirmar que $\mu(G_1) = \mu(F_1)$ y que $\mu(G_2) = \mu(F_2)$, y uniendo las tres igualdades se obtiene $\mu(G_2) = \mu(F_2) = \mu(G_1) = \mu(F_1)$, que es lo que se quería probar.

(d) Para justificar que $\overline{\mu}$ está bien definida habría que demostrar que $\overline{\mu}(A)$ solo depende de A y no de G ni de F, es decir, que si $F_1, F_2, G_1, G_2 \in \mathcal{M}$ son tales que $F_i \subset A \subset G_i$ y $\mu(G_i \setminus F_i) = 0$ para cada $i = 1, 2$, entonces $\mu(G_1) = \mu(G_2)$. Esto ya ha sido probado en el apartado anterior, así que $\overline{\mu}$ está bien definida.

Veamos ahora que $\overline{\mu}$ es una medida sobre $\mathcal{F}$.

(i) $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$, pues, tomando $F = G = \emptyset$, se tiene que $F, G \in \mathcal{M}$, $F \subset \emptyset \subset G$ y $\mu(G \setminus F) = \mu(\emptyset) = 0$, luego, por definición de $\overline{\mu}$, es $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$, usando una vez más que μ es una medida.

(ii) Sea $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ una familia numerable y disjunta de elementos de $\mathcal{F}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, existen $F_i, G_i \in \mathcal{M}$ con $F_i \subset A_i \subset G_i$ y $\mu(G_i \setminus F_i) = 0$. En el apartado (a) se ha justificado que $\bigcup_{i=1}^\infty F_i, \bigcup_{i=1}^\infty G_i \in \mathcal{M}$, que $\bigcup_{i=1}^\infty F_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty G_i$ y que $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty G_i \setminus \bigcup_{i=1}^\infty F_i) = 0$, luego, por definición de $\overline{\mu}$,

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty G_i\right)$$

Veamos que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty G_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(G_i) \qquad (***)$$

La desigualdad $\leq$ se verifica por ser μ una medida (subaditividad numerable). Por otro lado, como $F_i \subset G_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty F_i) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^\infty G_i)$. Ahora bien, si $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$, entonces $F_i \cap F_j = \emptyset$ (si existiese $x \in F_i \cap F_j$, por ser $F_i \subset A$ y $F_j \subset A$, se tendría $x \in A_i \cap A_j = \emptyset$, lo que contradice que $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ sea una familia disjunta de elementos de $\mathcal{F}$). Así, por ser μ una medida,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(F_i)$$

Por el apartado anterior,

$$\sum_{i=1}^\infty \mu(F_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(G_i)$$

En resumen, tenemos que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty G_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(F_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(G_i),$$

con lo que queda demostrada la igualdad $(***)$. Usando que $\mu(G_i) = \overline{\mu}(A_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ (por definición de $\overline{\mu}$), se concluye que

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty G_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(G_i) = \sum_{i=1}^\infty \overline{\mu}(A_i)$$

Veamos ahora que la medida $\overline{\mu}$ es completa. Sea $N \in \mathcal{F}$ con $\overline{\mu}(N) = 0$ y sea $A \subset N$. Veamos que $A \in \mathcal{F}$. Como se tiene que $N \in \mathcal{F}$, existen $F, G \in \mathcal{M}$ con $F \subset N \subset G$ y $\mu(G \setminus F) = 0$, y además $\mu(G) = \overline{\mu}(N) = 0$. Por tanto, $\emptyset \subset A \subset G$, donde $\emptyset, G \in \mathcal{M}$ y $\mu(G \setminus \emptyset) = \mu(G) = 0$, lo que demuestra que $A \in \mathcal{F}$.

Por último, veamos que $\overline{\mu}$ extiende a μ, esto es, que si $A \in \mathcal{M}$, entonces $\mu(A) = \overline{\mu}(A)$. En efecto, tomando, $F = G = A$, se tiene que $F, G \in \mathcal{M}$, que $F \subset A \subset G$ y que $\mu(G \setminus F) = \mu(\emptyset) = 0$, luego, por definición de $\overline{\mu}$, se verifica $\overline{\mu}(A) = \mu(G) = \mu(A)$.