# Relación 2

**Ejercicio 1.** *Determinar los puntos en que las siguientes funciones complejas de variable compleja son derivables y aquellos en que son holomorfas:*

*(a)* $f(z) = |z|$

*(b)* $f(z) = |z|^3$

*(c)* $f(z) = x^2$

*(d)* $f(z) = y^3$

*Solución.*

($a$) Sean $u(z) = \text{Re}(f(z)) = \sqrt{x^2+y^2}, v(z) = \text{Im}(f(z)) = 0$. Tenemos que $u$ y $v$ son diferenciables en sentido real en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y además, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$u_x(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad u_y(z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad v_x(z) = 0, \qquad v_y(z) = 0,$$

luego $f$ no es derivable en $z \neq 0$ porque no se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Es más, $f$ no es derivable en 0 porque no es diferenciable en sentido real. Por tanto, $f$ no es holomorfa en ningún punto de $\mathbb{C}$.

($b$) Sean $u(z) = \text{Re}(f(z)) = (x^2+y^2)^{3/2}, v(z) = \text{Im}(f(z)) = 0$. Tenemos que $u$ y $v$ son diferenciables en sentido real en $\mathbb{C}$, pues tienen derivadas parciales continuas: si $z \in \mathbb{C}$,

$$u_x(z) = 3x\sqrt{x^2+y^2}, \qquad u_y(z) = 3y\sqrt{x^2+y^2}, \qquad v_x(z) = 0, \qquad v_y(z) = 0$$

Se tiene que

$$u_x(z) = v_y(z) \iff x = 0, \qquad u_y(z) = -v_x(z) \iff y = 0$$

Por tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann solo se verifican en 0, así que $f$ solo es derivable en 0 y, en consecuencia, no es holomorfa en ningún punto de $\mathbb{C}$.

($c$) Sean $u(z) = \text{Re}(f(z)) = x^2, v(z) = \text{Im}(f(z)) = 0$. Tenemos que $u$ y $v$ son diferenciables en sentido real en $\mathbb{C}$, pues tienen derivadas parciales continuas: si $z \in \mathbb{C}$,

$$u_x(z) = 2x, \qquad u_y(z) = 0, \qquad v_x(z) = 0, \qquad v_y(z) = 0$$

Se tiene que

$$u_x(z) = v_y(z) \iff x = 0, \qquad u_y(z) = -v_x(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

Por tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann solo se verifican en el eje imaginario, así que $f$ solo es derivable en el eje imaginario. Además, no es holomorfa en ningún punto de $\mathbb{C}$, pues un entorno de cualquier punto del eje imaginario siempre contiene puntos donde $f$ no es derivable.

($d$) Sean $u(z) = \text{Re}(f(z)) = y^3, v(z) = \text{Im}(f(z)) = 0$. Tenemos que $u$ y $v$ son diferenciables en sentido real en $\mathbb{C}$, pues tienen derivadas parciales continuas: si $z \in \mathbb{C}$,

$$u_x(z) = 0, \qquad u_y(z) = 3y^2, \qquad v_x(z) = 0, \qquad v_y(z) = 0$$

Se tiene que

$$u_x(z) = v_y(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{C}, \qquad u_y(z) = -v_x(z) \iff y = 0$$

Por tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann solo se verifican en el eje real, así que $f$ solo es derivable en el eje real. Además, no es holomorfa en ningún punto de $\mathbb{C}$, pues un entorno de cualquier punto del eje real siempre contiene puntos donde $f$ no es derivable.

**Ejercicio 2.** *Para cada una de las siguientes funciones $f = u + iv$ con $u = \mathrm{Re}(f)$ y $v = \mathrm{Im}(f)$, estudiar si existen o no las derivadas parciales de $u$ y $v$ en $0$, si $u$ y $v$ satisfacen o no las condiciones de Cauchy-Riemann en $0$ y, finalmente, estudiar la derivabilidad de $f$ en $0$ (en cada caso, se usa la notación $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$).*

*(a)* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{|z|^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

*(b)* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

*(c)* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(z) = \begin{cases} \sqrt{|xy|} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

*(d)* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

*(e)* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(z) = \begin{cases} (1+i)\dfrac{\mathrm{Im}\left(z^2\right)}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

*Solución.*

$(a)$ Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x) - u(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{u(y) - u(0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^3}{y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

Por tanto, existen las derivadas parciales de $u$ en 0: $u_x(0) = 1$ y $u_y(0) = -1$. Por otra parte,

$$\lim_{x\to 0} \frac{v(x) - v(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{v(y) - v(0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y^3}{y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} 1 = 1,$$

luego existen las derivadas parciales de $v$ en 0: $v_x(0) = 1$ y $v_y(0) = 1$. Y como $u_x(0) = v_y(0) = 1$ y $u_y(0) = -v_y(0) = -1$, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0. Para estudiar la derivabilidad de $f$ en 0, comprobamos si $u$ y $v$ son diferenciables en sentido real en 0. Si $u$ fuese diferenciable en 0 en sentido real, entonces $d_{\mathbb{R}}u_0(x,y) = u_x(0)x + u_y(0)y = x - y$. Se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{u(x,y) - u(0,0) - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{y^3} - \cancel{x^3} - xy^2 + x^2 y + \cancel{y^3}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pero este límite no existe, pues

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=2x}} \frac{x^2 y - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=2x}} -\frac{2x^3}{(5x^2)^{3/2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=2x}} -\frac{2}{5^{3/2}} \frac{x^3}{|x|^3},$$

y en consecuencia,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x,\ x>0}} -\frac{2}{5^{3/2}}\frac{x^3}{|x|^3} = -\frac{2}{5^{3/2}}, \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x,\ x<0}} -\frac{2}{5^{3/2}}\frac{x^3}{|x|^3} = \frac{2}{5^{3/2}}$$

Se concluye que $u$ no es diferenciable en sentido real en 0, luego $f$ no es derivable en 0.

($b$) Se tiene que

$$(x+iy)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{5-k}(iy)^k = x^5 + 5ix^4y - 10x^3y^2 - 10ix^2y^3 + 5xy^4 + iy^5,$$

luego, si $x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$u(x+iy) = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \qquad v(x+iy) = \frac{5x^4y - 10x^2y^3 + y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

Estudiemos la existencia de las derivadas parciales de $u$ en 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(x^2)^2} = 1$$

Por tanto, $u_x(0) = 1$, mientras que

$$\lim_{y\to 0}\frac{u(y)-u(0)}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

así que $u_y(0) = 0$. Estudiemos ahora la existencia de las derivadas parciales de $v$ en 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{v(x)-v(0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

luego $v_x(0) = 0$. Por otra parte,

$$\lim_{y\to 0}\frac{v(y)-v(0)}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

En consecuencia, $v_y(0) = 0$, y no se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0, así que $f$ no es derivable en 0.

($c$) Se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{u(y)-u(0)}{y} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

luego $u_x(0) = 0$ y $u_y(0) = 0$. Es claro que $v_x(0) = 0$ y $v_y(0) = 0$, así que se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0. Estudiemos la diferenciabilidad en sentido real de $u$ en 0. Si $u$ fuese diferenciable en sentido real en 0, entonces $d_{\mathbb{R}}u_0(x,y) = u_x(0)x + u_y(0)y = 0$. Se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{u(x,y)-u(0,0)-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pero este límite no existe, pues

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} 0 = 0, \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{\sqrt{|x^2|}}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|x|}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se concluye que $f$ no es derivable en 0.

($d$) Se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{u(y)-u(0)}{y} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

luego $u_x(0) = 0$ y $u_y(0) = 0$. Es claro que $v_x(0) = 0$ y $v_y(0) = 0$, así que se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0. Estudiemos la diferenciabilidad en sentido real de $u$ en 0. Si $u$ fuese diferenciable en sentido real en 0, entonces $d_{\mathbb{R}}u_0(x,y) = u_x(0)x + u_y(0)y = 0$. Se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{u(x,y)-u(0,0)-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pero este límite no existe, pues

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^4}{2x^4\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+x^4}} = +\infty$$

Por tanto, $f$ no es derivable en 0.

(*e*) Si $z = x+iy \in \mathbb{C}$,

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

luego $\operatorname{Im}(z^2) = 2xy$ y, por tanto, si $x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$u(x+iy) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = v(x+iy)$$

Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{u(y)-u(0)}{y} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

luego $u_x(0) = 0$ y $u_y(0) = 0$. Por tenerse $u = v$ es claro que $v_x(0) = 0$ y $v_y(0) = 0$, así que se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0. Estudiemos la diferenciabilidad en sentido real de $u$ (o de $v$, da lo mismo) en 0. Si $u$ fuese diferenciable en sentido real en 0, entonces se tendría $d_{\mathbb{R}}u_0(x,y) = u_x(0)x + u_y(0)y = 0$. Pero

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{u(x,y)-u(0,0)-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

y este límite no existe, ya que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{2xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{2x^2}{2x^2\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$$

Se concluye que $f$ no es derivable en 0.

**Ejercicio 3.** *Para cada una de las siguientes funciones $f = u+iv$ con $u = \operatorname{Re}(f)$ y $v = \operatorname{Im}(f)$, estudiar si existen las derivadas parciales de $u$ y $v$ en 0, si satisfacen o no las condiciones de Cauchy-Riemann en 0 y, finalmente, estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f$ en 0. Para cada $r > 0$, calcular $f(\{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| < r\})$.*

(*a*) *$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$f(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{z}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

(*b*) *$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$f(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{z^2}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

(*c*) *$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$f(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{z^4}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

*Solución.*

(*a*) Como $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}}$, entonces, para cada $x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$u(x+iy) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right), \qquad v(x+iy) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \operatorname{sen}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x},$$

pero este límite no existe, pues

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

ya que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Por otra parte,

$$\lim_{y\to 0} \frac{u(y)-u(0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(-\frac{1}{y}\right)}{y},$$

y este límite tampoco existe, porque la sucesión $\{\frac{1}{2\pi k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene límite 0 y verifica

$$\frac{\cos(-2\pi k)}{\frac{1}{2\pi k}} = 2\pi k \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$$

Por tanto, las derivadas parciales de $u$ en 0 no existen. Análogamente se prueba que $v$ tampoco tiene derivadas parciales en 0. Con esto queda probado que $f$ no es derivable en 0; falta estudiar la continuidad. Se tiene que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}^+}} f(z) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}^+}} e^{\frac{1}{z}} = +\infty,$$

luego $f$ no es continua en 0. Por último, la función $z \mapsto \frac{1}{z}$ transforma $\{z\in\mathbb{C}\colon 0<|z|<r\}$ en $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}\colon 0<|z|<\frac{1}{r}\} = \{z\in\mathbb{C}\colon \frac{1}{r}\le |z|\}$. Por otra parte, la función exponencial transforma $\frac{1}{z}$ en un número complejo de módulo $e^{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)} = e^{\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}}$ y argumento $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2}$. Como $\operatorname{Re}(z)$ puede tomar cualquier valor real (no nulo en caso de que $\operatorname{Im}(z)=0$), entonces $\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}$ también, así que $e^{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)}$ puede ser cualquier número positivo. Análogamente, $\operatorname{Im}(z)$ toma cualquier valor real (no nulo en caso de que $\operatorname{Re}(z)=0$), luego $-\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2}$ también. Así, $f(\{z\in\mathbb{C}\colon 0<|z|<r\}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(*b*) Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^3},$$

pero este límite no existe, pues

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^3} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

Por otro lado,

$$\lim_{y\to 0} \frac{u(y)-u(0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{y^2}}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{y^2}}{e^{\frac{1}{y^2}}} y = 0,$$

ya que

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = 0, \qquad \lim_{y\to 0} y = 0$$

Por tanto, $u_x(0)$ no existe y $u_y(0) = 0$. Por otra parte,

$$\lim_{x\to 0} \frac{v(x)-v(0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{v(y)-v(0)}{x} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

luego $v_x(0) = 0$ y $v_y(0) = 0$. Estudiemos la continuidad de $f$ en 0: se tiene que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty,$$

así que $f$ no es continua en 0. Evidentemente, tampoco es derivable en 0. Razonando como en el apartado anterior, $f(\{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| < r\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

($c$) Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^4}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^4}}}{\frac{1}{x^4}} \frac{1}{x^5},$$

pero este límite no existe, pues

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^4}}}{\frac{1}{x^4}} \frac{1}{x^5} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x^4}}}{\frac{1}{x^4}} \frac{1}{x^5} = -\infty$$

Por otro lado,

$$\lim_{y\to 0} \frac{u(y)-u(0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{\frac{1}{y^4}}}{y},$$

y se acaba de ver que este límite no existe. Por tanto, $u$ no tiene derivadas parciales en 0. Por otra parte,

$$\lim_{x\to 0} \frac{v(x)-v(0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{v(y)-v(0)}{x} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

luego $v_x(0) = 0$ y $v_y(0) = 0$. Estudiemos la continuidad de $f$ en 0: se tiene que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} e^{\frac{1}{x^4}} = +\infty,$$

así que $f$ no es continua en 0. Evidentemente, tampoco es derivable en 0. Razonando como en el apartado primero, $f(\{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| < r\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

**Ejercicio 4.** *Si es posible, encontrar una función $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que sea derivable en cada punto de la parábola de ecuación $y = x^2$ y no lo sea en ningún otro punto.*

*Solución.* La idea es buscar una función $F = u + iv$ de manera que $u$ y $v$ tengan derivadas parciales continuas en $\mathbb{C}$ y se verifique, por ejemplo,

$$v_x(z) = 0, \qquad v_y(z) = y, \qquad u_x(z) = x^2, \qquad u_y(z) = 0$$

Basta tomar

$$u(z) = \frac{x^3}{3}, \qquad v(z) = \frac{y^2}{2}$$

Tenemos entonces que $u$ y $v$ son diferenciables en sentido real en $\mathbb{C}$ (tienen derivadas parciales continuas en $\mathbb{C}$) y se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y solo si $y = x^2$, concluyéndose que la función $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $F(z) = \frac{x^3}{3} + i\frac{y^2}{2}$ es derivable única y exclusiavmente en los puntos de la parábola $y = x^2$.

**Ejercicio 5.** *Sea $D$ un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $f$ una función holomorfa (y de clase $\mathscr{C}^2$) y nunca nula en $D$. Probar que $\Delta|f| = |f|^{-1}|f'|^2$. Calcular también $\Delta\big(|f|^2\big)$.*

*Solución.* Si $f = u + iv$, entonces $|f| = \sqrt{u^2+v^2}$. Sea $x+iy \in \mathbb{C}$. Por la regla de la cadena,

$$|f|_x = \frac{uu_x}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

Derivando otra vez,

$$\begin{aligned}
|f|_{xx} &= \frac{u_x^2+uu_{xx}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{uu_x}{2(u^2+v^2)^{3/2}}(2uu_x+2vv_x) + \frac{v_x^2+vv_{xx}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{vv_x}{2(u^2+v^2)^{3/2}}(2uu_x+2vv_x) \\
&= \frac{u_x^2+uu_{xx}+v_x^2+vv_{xx}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{u^2u_x^2+2uvu_xv_x+v^2v_x^2}{(u^2+v^2)^{3/2}} \\
&= \frac{u_x^2+uu_{xx}+v_x^2+vv_{xx}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{(uu_x+vv_x)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$|f|_{yy} = \frac{u_y^2+uu_{yy}+v_y^2+vv_{yy}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{(uu_y+vv_y)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

Aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$|f|_{yy} = \frac{v_x^2+uu_{yy}+u_x^2+vv_{yy}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{(vu_x-uv_x)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

Por tanto, usando las expresiones anteriores y también que $u_{xx}+u_{yy} = v_{xx}+v_{yy} = 0$ (pues $u$ y $v$ son armónicas por ser $f$ de clase $\mathscr{C}^2$), se llega a

$$\begin{aligned}
\Delta|f| &= |f|_{xx}+|f|_{yy} \\
&= \frac{2(u_x^2+v_x^2)}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{(uu_x+vv_x)^2+(vu_x-uv_x)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}} \\
&= \frac{2(u_x^2+v_x^2)}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{u^2u_x^2+v^2v_x^2+v^2u_x^2+u^2v_x^2}{(u^2+v^2)^{3/2}} \\
&= \frac{2(u_x^2+v_x^2)}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{u_x^2(u^2+v^2)+v_x^2(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^{3/2}} \\
&= \frac{2(u_x^2+v_x^2)}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{u_x^2}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{v_x^2}{\sqrt{u^2+v^2}} \\
&= \frac{2(u_x^2+v_x^2)-(u_x^2+v_x^2)}{\sqrt{u^2+v^2}} \\
&= \frac{u_x^2+v_x^2}{\sqrt{u^2+v^2}} \\
&= |f|^{-1}|f'|^2
\end{aligned}$$

Por otra parte, como $|f|^2 = u^2+v^2$, entonces

$$|f|_x^2 = 2uu_x + 2vv_x,$$

luego

$$|f|_{xx}^2 = 2u_x^2 + 2uu_{xx} + 2v_x^2 + 2vv_{xx}$$

Análogamente,

$$|f|_{yy}^2 = 2u_y^2 + 2uu_{yy} + 2v_y^2 + 2vv_{yy}$$

Por tanto, empleando de nuevo las condiciones de Cauchy-Riemann y la armonicidad de $u$ y $v$,

$$\Delta|f|^2 = |f|_{xx}^2 + |f|_{yy}^2 = 4u_x^2 + 4v_x^2 = 4|f'|^2$$

**Ejercicio 6.** *Sean $D$ un dominio en $\mathbb{C}$ y $u\colon D \to \mathbb{R}$ una función armónica. ¿Cuándo es $u^2$ también armónica en $D$?*

*Solución.* Se tiene que
$$u_x^2 = 2uu_x,$$
luego
$$u_{xx}^2 = 2u_x^2 + 2uu_{xx}$$
Análogamente,
$$u_{yy}^2 = 2u_y^2 + 2uu_{yy}$$
Por tanto, si $u$ es armónica,
$$\Delta u^2 = 2(u_x^2 + u_y^2)$$
Pero $u_x^2$ y $u_y^2$ toman valores reales, luego $\Delta u^2 = 0$ si y solo si $u_x = u_y = 0$, concluyéndose que $u^2$ es también armónica si y solo si $u$ es constante.

**Ejercicio 7.** *Sean $D$ un dominio en $\mathbb{C}$ y $u : D \to \mathbb{R}$ una función armónica. Sea $f = u_x - iu_y$. Probar que $f$ es holomorfa en $D$.*

*Solución.* Como $u$ es armónica, entonces es de clase $\mathscr{C}^2$, luego $u_x$ y $-u_y$ tienen derivadas parciales continuas, así que $f = u_x - iu_y$ es diferenciable en sentido real. Además, llamando $\widetilde{u} = u_x$ y $\widetilde{v} = -u_y$, se tiene
$$\widetilde{u}_x = u_{xx}, \qquad \widetilde{u}_y = u_{xy}, \qquad \widetilde{v}_x = -u_{yx}, \qquad \widetilde{v}_y = -u_{yy}$$
Por un lado, como $u$ es armónica, entonces $u_{xx} + u_{yy} = 0$, esto es,
$$\widetilde{u}_x = \widetilde{v}_y$$
Por otro lado, como $u$ es de clase $\mathscr{C}^2$, entonces $u_{xy} = u_{yx}$, luego
$$\widetilde{u}_y = -\widetilde{v}_x$$
Como $f$ es diferenciable en sentido real y se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en todo punto de $D$, entonces $f$ es derivable en $D$, o lo que es lo mismo (por ser $D$ un dominio), $f$ es holomorfa en $D$.

**Ejercicio 8.** *Sean $D_1$ y $D_2$ dos dominios en $\mathbb{C}$, $u : D_2 \to \mathbb{R}$ armónica y $f : D_1 \to D_2$ holomorfa (y de clase $\mathscr{C}^2$). Probar que $u \circ f$ es armónica en $D_1$.*

*Solución.* En primer lugar, $u \circ f$ es de clase $\mathscr{C}^2$ por serlo $u$ y $f$, así que tiene sentido preguntarse si es armónica o no. Pongamos $f = U + iV$ y tomemos $z = x + iy \in D_1$. Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, se tendría que $u \circ f(x, y) = u(U(x, y), V(x, y))$, luego
$$\frac{\partial(u \circ f)}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(U(x, y), V(x, y))\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(U(x, y), V(x, y))\frac{\partial V}{\partial x}(x, y),$$
o lo que es lo mismo, volviendo a la notación compleja,
$$(u \circ f)_x(z) = u_x(f(z))U_x(z) + u_y(f(z))V_x(z)$$
Derivando otra vez y omitiendo los puntos en los que se evalúan las funciones para facilitar la legibilidad,
$$\begin{aligned}(u \circ f)_{xx} &= (u_{xx}U_x + u_{xy}V_x)U_x + u_xU_{xx} + (u_{yx}U_x + u_{yy}V_x)V_x + u_yV_{xx}\\ &= u_{xx}U_x^2 + u_{xy}U_xV_x + u_xU_{xx} + u_{yx}U_xV_x + u_{yy}V_x^2 + u_yV_{xx}\end{aligned}$$
Como $u$ es de clase $\mathscr{C}^2$, entonces $u_{xy} = u_{yx}$, luego
$$(u \circ f)_{xx} = u_{xx}U_x^2 + u_{yy}V_x^2 + 2u_{xy}U_xV_x + u_xU_{xx} + u_yV_{xx}$$
Por otra parte,
$$(u \circ f)_y(z) = u_x(f(z))U_y(z) + u_y(f(z))V_y(z)$$

Derivando otra vez,

$$\begin{aligned}(u\circ f)_{yy} &= (u_{xx}U_y + u_{xy}V_y)U_y + u_xU_{yy} + (u_{yx}U_y + u_{yy}V_y)V_y + u_yV_{yy}\\ &= u_{xx}U_y^2 + u_{xy}U_yV_y + u_xU_{yy} + u_{yx}U_yV_y + u_{yy}V_y^2 + u_yV_{yy}\end{aligned}$$

De nuevo, como $u_{xy} = u_{yx}$,

$$(u\circ f)_{yy} = u_{xx}U_y^2 + u_{yy}V_y^2 + 2u_{xy}U_yV_y + u_xU_{yy} + u_yV_{yy}$$

Al ser $f$ holomorfa, se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, $U_x = V_y$ y $U_y = -V_x$, así que

$$(u\circ f)_{yy} = u_{xx}V_x^2 + u_{yy}U_x^2 - 2u_{xy}U_xV_x + u_xU_{yy} + u_yV_{yy}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}(u\circ f)_{xx} + (u\circ f)_{yy} &= u_{xx}(U_x^2+V_x^2) + u_{yy}(U_x^2+V_x^2) + u_x(U_{xx}+U_{yy}) + u_y(V_{xx}+V_{yy})\\ &= (u_{xx}+u_{yy})(U_x^2+V_x^2) + u_x(U_{xx}+U_{yy}) + u_y(V_{xx}+V_{yy})\end{aligned}$$

Pero $u$, $U$ y $V$ son armónicas ($u$ por hipótesis; $U$ y $V$ por ser, respectivamente, parte real e imaginaria de una función de clase $\mathscr{C}^2$), así que $u_{xx}+u_{yy} = U_{xx}+U_{yy} = V_{xx}+V_{yy} = 0$ y podemos concluir que

$$(u\circ f)_{xx} + (u\circ f)_{yy} = 0,$$

luego $u\circ f$ es armónica.

**Ejercicio 9.** *Sea $D$ un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $f$ una función holomorfa en $D$ con $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$. Probar que $f$ es constante si satisface alguna de las siguientes condiciones:*

*(a)* $v = u^2$ *en* $D$.

*(b)* $u^2 + v^2$ *es constante en* $D$.

*(c)* $27u^2 + 3v^2 = 12$ *en* $D$.

*Solución.*

($a$) Si $v = u^2$ en $D$, entonces $v_x = 2uu_x$ y $v_y = 2uu_y$, y, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann (se verifican porque $f$ es holomorfa), es $u_x = 2uu_y$ y $u_y = -2uu_x$. Multiplicando por $u_y$ en la primera y por $u_x$ en la segunda se obtiene $u_xu_y = 2uu_y^2 = -2uu_x^2$, de donde se deduce que $2u(u_x^2+u_y^2) = 0$ en $D$, luego, teniendo en cuenta que $u$, $u_x$ y $u_y$ toman valores reales, puede afirmarse que o bien $u = 0$ en $D$, o bien $u_x = u_y = 0$ en $D$. En cualquier caso, $u$ es constante en $D$, luego $v = u^2$ y $f = u + iv$ también lo son.

*Otra forma*: utilizar el Ejercicio 6.

($b$) Supongamos que existe una constante $c \in \mathbb{C}$ con $u^2 + v^2 = c$ (se puede suponer que $c > 0$; en caso contrario tendríamos $u = v = 0$ y por tanto $f$ sería la función nula, que es constante). Al derivar parcialmente se obtiene

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \qquad 2uu_y + 2vv_y = 0,$$

es decir,

$$uu_x + vv_x = 0, \qquad uu_y + vv_y = 0,$$

o lo que es lo mismo, por Cauchy-Riemann,

$$uu_x + vv_x = 0, \qquad -uv_x + vu_x = 0$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} u & v\\ v & -u\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x\\ v_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Se observa que $u_x$ y $v_x$ son solución de un sistema lineal cuya matriz de coeficientes tiene determinante $-u^2 - v^2 = -c < 0$, luego la única solución del sistema es la trivial, concluyéndose que $u$ y $v$ son constantes en $D$ y, por tanto, $f$ es constante en $D$.

(c) Si $27u^2+3v^2=12$ en $D$, al derivar parcialmente se obtiene

$$54uu_x+6vv_x=0, \qquad 54uu_y+6vv_y=0,$$

o lo que es lo mismo, por Cauchy-Riemann,

$$9uu_x+vv_x=0, \qquad -9uv_x+vu_x=0$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} 9u & v \\ v & -9u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que $u_x$ y $v_x$ constituyen la solución de un sistema lineal cuya matriz de coeficientes tiene determinante $-81u^2-v^2$. Como $u$ y $v$ toman valores reales, se tiene que $-81u^2-v^2=0$ si y solo si $u=v=0$, que es imposible porque, por hipótesis $27u^2+3v^2=12$. Así, $-81u^2-v^2<0$, luego el sistema anterior tiene como única solución a la solución trivial, pudiéndose afirmar que $u_x=v_x=0$ y por tanto $f$ es constante en $D$.

**Ejercicio 10.** *Si $u$ y $v$ son funciones reales en las variables $(x,y)\neq(0,0)$, el cambio a coordenadas polares, $\{x=r\cos\theta, y=r\operatorname{sen}\theta\}$, permite escribir $u$ y $v$ como funciones de $(r,\theta)$,*

$$u(x,y)=U(r,\theta), \qquad v(x,y)=V(r,\theta)$$

*(a) Probar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas cartesianas,*

$$(C\text{-}R)\ \begin{cases} u_x = \ \ v_y \\ u_y=-v_x, \end{cases}$$

*adoptan el siguiente aspecto en coordenadas polares:*

$$(C\text{-}R)_p\ \begin{cases} U_r=\dfrac{1}{r}V_\theta \\ U_\theta=-rV_r \end{cases}$$

*(b) Si $f=u+iv$ es derivable, entonces*

$$f'=u_x+iv_x \leftrightarrow \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$$

*Probar que el aspecto que toma en coordenadas polares es*

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_r \\ V_r \end{pmatrix}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_\theta \\ V_\theta \end{pmatrix}$$

*(c) Probar que el laplaciano en coordenadas cartesianas para $u$, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, adopta el siguiente aspecto en coordenadas polares:*

$$\Delta_p U=\frac{1}{r}U_r+U_{rr}+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}\equiv\frac{1}{r}(rU_r)_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}$$

*(d) Como aplicación del último apartado, usar coordenadas polares para probar que la función $u$ dada por $u(z)=\operatorname{Arg}(z)\log|z|$ es armónica en $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Probarlo también de otra forma.*

*Solución.*

(a) Como $U(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$ y $V=(r,\theta)=v(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$, al derivar se obtiene

$$U_r=u_x\cos\theta+u_y\operatorname{sen}\theta, \qquad V_\theta=-v_xr\operatorname{sen}\theta+v_yr\cos\theta$$

Aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$U_r=u_x\cos\theta+u_y\operatorname{sen}\theta, \qquad V_\theta=u_yr\operatorname{sen}\theta+u_xr\cos\theta$$

Por tanto,

$$\frac{1}{r}V_\theta = u_y \operatorname{sen}\theta + u_x \cos\theta = U_r$$

Por otra parte,

$$U_\theta = -u_x r \operatorname{sen}\theta + u_y r \cos\theta, \qquad V_r = v_x \cos\theta + v_y \operatorname{sen}\theta$$

Aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$U_\theta = -u_x r \operatorname{sen}\theta + u_y r \cos\theta, \qquad V_r = -u_y \cos\theta + u_x \operatorname{sen}\theta$$

Por tanto,

$$-rV_r = u_y r \cos\theta - u_x r \operatorname{sen}\theta = U_\theta$$

Así, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se han traducido en

$$(C\text{-}R)_p \quad \begin{cases} U_r = \frac{1}{r}V_\theta \\ U_\theta = -rV_r \end{cases}$$

($b$) Utilizando las expresiones del apartado anterior,

$$\begin{aligned} U_r \cos\theta + V_r \operatorname{sen}\theta &= (u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta)\cos\theta + (-u_y \cos\theta + u_x \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta \\ &= u_x \cos^2\theta + \cancel{u_y \operatorname{sen}\theta\cos\theta} - \cancel{u_y \operatorname{sen}\theta\cos\theta} + u_x \operatorname{sen}^2\theta \\ &= u_x \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} -U_r \operatorname{sen}\theta + V_r \cos\theta &= -(u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + (-u_y \cos\theta + u_x \operatorname{sen}\theta)\cos\theta \\ &= \cancel{-u_x \cos\theta \operatorname{sen}\theta} - u_y \operatorname{sen}^2\theta - u_y \cos^2\theta + \cancel{u_x \operatorname{sen}\theta\cos\theta} \\ &= -u_y \\ &= v_x \end{aligned}$$

Con esto se ha probado la igualdad

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_r \\ V_r \end{pmatrix}$$

Para la otra se procede de forma totalmente análoga.

($c$) Por la regla de la cadena,

$$u_x = U_r r_x + U_\theta \theta_x, \qquad v_x = V_r r_x + V_\theta \theta_x$$

Por el apartado primero, $U_\theta = -rV_r$ y $V_\theta = rU_r$, luego

$$u_x = U_r r_x - rV_r \theta_x, \qquad v_x = V_r r_x + rU_r \theta_x$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & -r\theta_x \\ r\theta_x & r_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_r \\ V_r \end{pmatrix}$$

Pero, por el apartado anterior,

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_r \\ V_r \end{pmatrix}$$

De aquí se deduce que $r_x = \cos\theta$ y $\theta_x = -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta$. Ahora se trata de encontrar expresiones similares para $r_y$ y $\theta_y$. Se tiene que

$$u_y = U_r r_y + U_\theta \theta_y, \qquad v_y = V_r r_y + V_\theta \theta_y$$

De nuevo, por el apartado primero, $U_\theta = -rV_r$ y $V_\theta = rU_r$, luego

$$u_y = U_r r_y - rV_r\theta_y, \qquad v_y = V_r r_y + rU_r\theta_y$$

Matricialmente y teniendo en cuenta que $u_y = -v_x$ y $v_y = u_x$,

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\theta_y & r_y \\ -r_y & r\theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_r \\ V_r \end{pmatrix}$$

Por tanto, $r_y = \operatorname{sen}\theta$ y $\theta_y = \frac{1}{r}\cos\theta$. Averigüemos ahora quién es $u_{xx} + u_{yy}$. Al derivar en

$$u_x = U_r \cos\theta + V_r \operatorname{sen}\theta$$

se obtiene

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (U_{rr} r_x + U_{r\theta}\theta_x)\cos\theta - U_r\theta_x \operatorname{sen}\theta + (V_{rr} r_x + V_{r\theta}\theta_x)\operatorname{sen}\theta + V_r\theta_x\cos\theta \\ &= (U_{rr}\cos\theta - \frac{1}{r}U_{r\theta}\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + \frac{1}{r}U_r \operatorname{sen}^2\theta + (V_{rr}\cos\theta - \frac{1}{r}V_{r\theta}\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{r}V_r \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= U_{rr}\cos^2\theta - \frac{1}{r}U_{r\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{1}{r}U_r\operatorname{sen}^2\theta + V_{rr}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{1}{r}V_{r\theta}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{1}{r}V_r\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \end{aligned}$$

y al derivar en

$$u_y = -v_x = U_r \operatorname{sen}\theta - V_r\cos\theta$$

se obtiene

$$\begin{aligned} u_{yy} &= (U_{rr} r_y + U_{r\theta}\theta_y)\operatorname{sen}\theta + U_r\theta_y\cos\theta - (V_{rr} r_y + V_{r\theta}\theta_y)\cos\theta + V_r\theta_y \operatorname{sen}\theta \\ &= (U_{rr}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r}U_{r\theta}\cos\theta)\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r}U_r\cos^2\theta - (V_{rr}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r}V_{r\theta}\cos\theta)\cos\theta + \frac{1}{r}V_r\cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ &= U_{rr}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{r}U_{r\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{1}{r}U_r\cos^2\theta - V_{rr}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{1}{r}V_{r\theta}\cos^2\theta + \frac{1}{r}V_r\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$u_{xx} + u_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r - \frac{1}{r}V_{r\theta}$$

Ya casi está: por el apartado primero tenemos $V_r = -\frac{1}{r}U_\theta$, luego $-\frac{1}{r}V_{r\theta} = \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}$ y queda probado que

$$u_{xx} + u_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta},$$

pudiendo concluirse que el aspecto del laplaciano en coordenadas polares no es más que

$$\Delta_p U = \frac{1}{r}U_r + U_{rr} + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} \equiv \frac{1}{r}(rU_r)_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}$$

**Ejercicio 11.** *En cada uno de los siguientes casos, probar que la función dada es armónica en $D$, y encontrar (si es que existe) una conjugada armónica de $u$ en $D$ (se vuelve a usar la ntoación $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$).*

*(a)* $D = \mathbb{C}$ *y* $u(z) = x^2 - y^2$.

*(b)* $D = \mathbb{C}$ *y* $u(z) = xy + 3x^2y - y^3$.

*(c)* $D = \mathbb{C}$ *y* $u(z) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$.

*(d)* $D = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) > 0\}$ *y* $u(z) = \arctan\frac{y}{x}$.

*(e)* $D = \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ *y* $u(z) = \operatorname{Arg}\sqrt{z}$*, denotando por* $\sqrt{\cdot}$ *a la rama principal de la raíz cuadrada en* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

*Solución.*

($a$) Se observa que $x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z^2)$, siendo $f(z) = z^2$ holomorfa en $\mathbb{C}$. Por tanto, $\operatorname{Im}(z^2) = 2xy$ es una conjugada armónica de $u$ en $\mathbb{C}$.

(b) Se tiene que
$$u_x(z) = y + 6xy, \qquad u_y(z) = x + 3x^2 - 3y^2$$
De existir, una conjugada armónica $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de $u$ debe satisfacer
$$v_x(z) = -u_y(z) = -x - 3x^2 + 3y^2, \qquad v_y(z) = u_x(z) = y + 6xy$$
De la primera condición se deduce que
$$v(z) = -\frac{x^2}{2} - x^3 + 3y^2x + c_1(y),$$
siendo $c_1(y) \in \mathbb{C}$ una constante que depende de $y$. Y de la segunda condición deducimos
$$v(z) = \frac{y^2}{2} + 3xy^2 + c_2(x),$$
siendo $c_2(x) \in \mathbb{C}$ una constante que depende de $x$. Como debe cumplirse
$$-\frac{x^2}{2} - x^3 + \cancel{3y^2x} + c_1(y) = \frac{y^2}{2} + \cancel{3xy^2} + c_2(x),$$
podemos tomar $c_1(y) = \frac{y^2}{2}, c_2(x) = -\frac{x^2}{2} - x^3$, y tenemos que la función $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por
$$v(z) = -\frac{x^2}{2} - x^3 + 3y^2x + \frac{y^2}{2}$$
es, por construcción, una conjugada armónica de $u$ en $\mathbb{C}$.

(c) Se tiene que $u(z) = e^{\mathrm{Re}(z^2)}\cos(\mathrm{Im}(z^2))$, así que $u(z) = \mathrm{Re}(e^{z^2})$. Como $f(z) = e^{z^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, concluimos que la función $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $v(z) = \mathrm{Im}(e^{z^2}) = e^{x^2-y^2}\,\mathrm{sen}(2xy)$ es una conjugada armónica de $u$ en $\mathbb{C}$.

(d) Tenemos que $u(z) = \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Im}(\mathrm{Log}(z))$ para todo $z \in D$. Como $f(z) = \mathrm{Log}(z)$ es holomorfa en $D \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, entonces $g(z) = -i\mathrm{Log}(z)$ también lo es, y se tiene que $u(z) = \mathrm{Re}(g(z))$. Por tanto, $v(z) = \mathrm{Im}(g(z)) = -\log|z|$ es una conjugada armónica de $u$ en $D$.

(e) Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la rama principal de la raíz cuadrada en $\mathbb{C}$ viene dada por
$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}}$$
Así, $u(z) = \mathrm{Arg}(\sqrt{z}) = \frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}$ y, razonando como en el apartado anterior, una conjugada armónica de $u$ en $D$ sería $v(z) = -\frac{\log|z|}{2}$.

**Ejercicio 12.** *Sea $f$ una función entera tal que* $\mathrm{Re}(f(z)) = x^3 - 3x + axy^2$, $v = \mathrm{Im}(f)$, *para $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y cierto $a \in \mathbb{R}$. Determinar $a$ y* $\mathrm{Im}(f)$.

*Solución.* Como $f$ es una función entera, entonces $u = \mathrm{Re}(f)$ es una función armónica, así que debe cumplirse $u_{xx} + u_{yy} = 0$ en $\mathbb{C}$. Se tiene que
$$u_x(z) = 3x^2 - 3 + ay^2, \qquad u_y(z) = 2axy,$$
luego
$$u_{xx}(z) = 6x, \qquad u_{yy}(z) = 2ax$$
Por tanto, ha de ser $2a = -6$, es decir, $a = -3$. Por otra parte, que $f$ sea entera también dice que deben satisfacerse las condiciones de Cauchy-Riemann:
$$u_x(z) = 3x^2 - 3 - 3y^2 = v_y(z), \qquad u_y(z) = -6xy = -v_x(z)$$
De aquí se obtiene
$$v(z) = 3x^2y - 3y - y^3 + c_1(x), \qquad v(z) = 3x^2y + c_2(y),$$
siendo $c_1(x), c_2(y) \in \mathbb{C}$ constantes que dependen de $x$ e $y$, respectivamente. Al comprar los dos términos se deduce que $c_1(x) = 0$, y se concluye que $v(z) = 3x^2y - 3y - y^3$.