Facultad de Ciencias – Universidad de Málaga
ANÁLISIS NUMÉRICO
3º de Grado en Matemáticas – Curso 2022/23
5 de junio de 2023

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Nombre: ____________________

– Primera convocatoria ordinaria–

1. Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad t \in [0,T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función p veces diferenciable.

a) Escriba la expresión del método de Taylor de orden p en la forma

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k; h), \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

y pruebe, usando las condiciones de orden vistas en clase, que el método es efectivamente de orden p.

b) Considere el caso particular

$$f(t,y) = \lambda y,$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$. Aplique el método de Taylor de orden p y deduzca su función de estabilidad absoluta, es decir, busque una función $R(\hat{h})$ tal que

$$y_k = R(\hat{h})^k y_0, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

siendo $\hat{h} = \lambda h$. ¿Es el método A-estable para algún valor de p?

2. Dado $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se considera el método RK de tablero

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \alpha & -\alpha \\ 2\alpha & \alpha & \alpha \\ \hline & 1-\beta & \beta. \end{array} \tag{2}$$

a) Estudie el orden del método.

b) Proponga para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, si es posible, dos valores β y β^* de tal manera que los métodos correspondientes constituyan un método RK encajado.

c) Se aplica cualquier método de tablero (2) a un problema de Cauchy (1) con f de Lipschitz en la variable y. Encuentre $h^* > 0$ tal que se pueda asegurar que si $h \in (0, h^*)$ el método está bien definido, es decir, que una vez calculado y_k, el sistema no lineal a resolver para obtener y_{k+1} tiene solución y es única. Proponga un algoritmo para resolver dicho sistema.

3. Dado $q \in \mathbb{N}$ distinto de 0, se considera el método numérico:

$$p_q'(t_k) = f(t_k, y_k), \quad k = q, q+1, \dots$$

siendo $p_q(t)$ el polinomio de grado menor o igual que q que interpola los $q+1$ puntos

$$(t_{k+1}, y_{k+1}), \dots, (t_{k-q+1}, y_{k-q+1}).$$

a) ¿Se trata de un método unipaso o mutlipaso? ¿Explícito o implícito? Responda razonadamente.

b) Deduzca la expresión del método para $q = 2$ y estudie su estabilidad, consistencia, orden y región de estabilidad absoluta.

– Resolución –

1.

a) El método de Taylor de orden p es el método definido por

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{i=1}^{p} \frac{f^{(i-1)}(t_k, y_k)}{i!} h^i, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

donde, dado $n \in \mathbb{N}$, se define $f^{(n)}(t,y) := f_t^{(n-1)}(t,y) + f(t,y) f_y^{(n)}(t,y)$ y para $n = 0$, $f^{(0)}(t,y) = f(t,y)$. El método de Taylor se puede escribir como

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^{p} \frac{f^{(i-1)}(t_k, y_k)}{i!} h^{i-1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \qquad k = 0,1,2,\dots$$

donde

$$\Phi(t,y,h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{f^{(i-1)}(t,y)}{i!} h^{i-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{f^{(i)}(t,y)}{(i+1)!} h^i$$

Veamos que el método es de orden p o, equivalentemente, que para todo $j \in \{0,1,\dots,p-1\}$ se verifica

$$\frac{\partial^j \Phi}{\partial h^j}(t,y,0) = \frac{1}{j+1} f^{(j)}(t,y) \qquad (*)$$

En $j = 0$,

$$\frac{\partial^0 \Phi}{\partial h^0}(t,y,0) = \Phi(t,y,0) = \frac{f^{(0)}(t,y)}{0!} = f(t,y),$$

así que se verifica la igualdad $(*)$. Para $j = 1$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,h) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{i}{(i+1)!} f^{(i)}(t,y) h^{i-1}$$

Poniendo $h = 0$, el único sumando no nulo es el primero, así que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,0) = \frac{1}{2} f^{(1)}(t,y)$$

y también se da $(*)$. Hagámoslo también para $j = 2$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t,y,h) = \sum_{i=2}^{p-1} \frac{i(i-1)}{(i+1)!} f^{(i)}(t,y) h^{i-2}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t,y,0) = \frac{2 \cdot 1}{3!} f^{(2)}(t,y) = \frac{1}{3} f^{(2)}(t,y)$$

Por inducción se prueba inmediatamente que para todo $j \in\in \{0,1,\dots,p-1\}$ se tiene

$$\frac{\partial^j \Phi}{\partial h^j}(t,y,h) = \sum_{i=j}^{p-1} \frac{i(i-1)\dots(i-j+1)}{(i+1)!} f^{(i)}(t,y) h^{i-j}$$

Por tanto, como en $h = 0$ el único sumando no nulo es el de $i = j$,

$$\frac{\partial^j \Phi}{\partial h^j}(t,y,0) = \frac{j(j-1)\dots(j-j+1)}{(j+1)!} f^{(j)}(t,y) = \frac{1}{j+1} f^{(j)}(t,y),$$

así que también se verifica $(*)$ y por tanto el método es de orden p.

b) Si $f(t,y)=\lambda y$, entonces

$$f^{(1)}(t,y)=\cancel{f_t(t,y)}+f(t,y)f_y(t,y)=\lambda y\cdot\lambda=\lambda^2 y$$

Además,

$$f^{(2)}(t,y)=\cancel{f_t^{(1)}(t,y)}+f(t,y)f_y^{(1)}(t,y)=\lambda y\cdot\lambda^2=\lambda^3 y$$

En general, se prueba fácilmente por inducción que

$$f^{(i)}(t,y)=\lambda^{i+1}y$$

para todo $i\in\{0,1,\ldots,p-1\}$, luego el método de Taylor adopta la expresión

$$y_{k+1}=y_k+h\sum_{i=1}^{p}\frac{f^{(i-1)}(t_k,y_k)}{i!}h^{i-1}=y_k+h\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda^i y_k}{i!}h^{i-1}=y_k\left(1+\sum_{i=1}^{p}\frac{(\lambda h)^i}{i!}\right)=y_k\sum_{i=0}^{p}\frac{(\lambda h)^i}{i!}$$

Razonando por recurrencia,

$$y_k=y_{k-1}\sum_{i=0}^{p}\frac{(\lambda h)^i}{i!}=y_{k-2}\left(\sum_{i=0}^{p}\frac{(\lambda h)^i}{i!}\right)^2=\ldots=y_0\left(\sum_{i=0}^{p}\frac{(\lambda h)^i}{i!}\right)^k$$

Por tanto, la función de estabilidad absoluta del método es

$$R(\hat h)=\sum_{i=0}^{p}\frac{\hat h^i}{i!}$$

Nótese que el método de Taylor es un método RK explícito, así que no puede ser A-estable para ningún valor de p.

2.

a) Sean

$$B=\begin{pmatrix}1-\beta\\ \beta\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\\ \alpha & \alpha\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\alpha\end{pmatrix}$$

Estudiemos el orden del método. Se tiene que

$$B^tE=\begin{pmatrix}1-\beta & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1-\beta+\beta=1,$$

así que el método es de orden 1. Además,

$$B^tAE=\begin{pmatrix}1-\beta & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\\ \alpha & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 2\alpha\beta-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2\alpha\beta,$$

así que el método es de orden 2 si y solo si $2\alpha\beta=\frac{1}{2}$, es decir, si y solo si $\alpha\beta=\frac{1}{4}$. Más aún,

$$B^tC^2E=\begin{pmatrix}1-\beta & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\alpha\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\alpha\end{pmatrix}=2\alpha\cdot 2\alpha\beta$$

$$B^tACE=\begin{pmatrix}1-\beta & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\\ \alpha & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 2\alpha\beta-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\alpha\end{pmatrix}=2\alpha(2\alpha\beta-\alpha)$$

El método será de orden 3 si se verifican las siguientes condiciones:

$$\left\{\begin{aligned}2\alpha\beta&=\frac{1}{2}\\ 2\alpha\cdot 2\alpha\beta&=\frac{1}{3}\\ 2\alpha(2\alpha\beta-\alpha)&=\frac{1}{6}\end{aligned}\right.\iff\left\{\begin{aligned}2\alpha\beta&=\frac{1}{2}\\ 2\alpha\cdot\frac{1}{2}&=\frac{1}{3}\\ 2\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)&=\frac{1}{6}\end{aligned}\right.\iff\left\{\begin{aligned}2\alpha\beta&=\frac{1}{2}\\ \alpha&=\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)&=\frac{1}{6}\end{aligned}\right.$$

Como la última ecuación no se verifica, concluimos que el método no es de orden 3 para ningún valor de α y β, y es de orden 2 si y solo si $\alpha\beta=\frac{1}{4}$.

b) Los métodos encajados no entran este año.

c) El método del enunciado viene dado por

$$\begin{cases} y_k^{(1)} = y_k + h\big(\alpha f(t_k, y_k^{(1)}) - \alpha f(t_k + 2\alpha h, y_k^{(2)})\big) \\ y_k^{(2)} = y_k + h\big(\alpha f(t_k, y_k^{(2)}) + \alpha f(t_k + 2\alpha h, y_k^{(2)})\big) \\ y_{k+1} = y_k + h\big((1-\beta) f(t_k, y_k^{(1)}) + \beta f(t_k + 2\alpha h, y_k^{(2)})\big) \end{cases}$$

Para que el método esté bien definido, se necesita que el sistema

$$(S)\ \begin{cases} y_k^{(1)} = y_k + h\big(\alpha f(t_k, y_k^{(1)}) - \alpha f(t_k + 2\alpha h, y_k^{(2)})\big) \\ y_k^{(2)} = y_k + h\big(\alpha f(t_k, y_k^{(2)}) + \alpha f(t_k + 2\alpha h, y_k^{(2)})\big) \end{cases}$$

tenga una única solución. Esto equivale a que la función $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$G(Y) = G\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_k + h\big(\alpha f(t_k, y^1) - \alpha f(t_k + 2\alpha h, y^2)\big) \\ y_k + h\big(\alpha f(t_k, y^1) + \alpha f(t_k + 2\alpha h, y^2)\big) \end{pmatrix}$$

tenga un único punto fijo. El objetivo es tomar h^* de manera que G sea contractiva siempre que $h \in (0, h^*)$ y poder aplicar el teorema del punto fijo de Banach. Sean $Y, Z \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} |G_1(Y) - G_1(Z)| &= \big|\cancel{y_k} + h\big(\alpha f(t_k, y^1) - \alpha f(t_k + 2\alpha h, y^2)\big) - \cancel{y_k} - h\big(\alpha f(t_k, z^1) - \alpha f(t_k + 2\alpha h, z^2)\big)\big| \\ &\leq h|\alpha|\,\big|f(t_k, y^1) - f(t_k, z^1)\big| + h|\alpha|\,\big|f(t_k + 2\alpha h, z^2) - f(t_k + 2\alpha h, y^2)\big| \\ &\leq hL|\alpha||y^1 - z^1| + hL\alpha|y^2 - z^2| \\ &\leq 2hL|\alpha|||Y - Z||_\infty, \end{aligned}$$

donde L es la constante de Lipschitz de f. De forma totalmente análoga se prueba que

$$|G_2(Y) - G_2(Z)| \leq 2hL|\alpha|||Y - Z||_\infty$$

Por tanto,

$$||G(Y) - G(Z)||_\infty \leq 2hL|\alpha|||Y - Z||_\infty$$

Si tomamos el paso de malla de forma que se verifique

$$0 < h < \frac{1}{2L|\alpha|}$$

entonces se tendrá $2hL|\alpha| < 1$, G será contractiva y el teorema del punto fijo de Banach dirá que G tiene un único punto fijo, lo que proporcionará una única solución para el sistema (S) y asegurará la buena definición del método del enunciado. Por tanto, basta tomar

$$h^* = \frac{1}{2L|\alpha|}$$

Un algoritmo adecuado para resolver (S) es el siguiente algoritmo de punto fijo:

$$\begin{cases} Y_0 \in \mathbb{R}^2 \\ Y_{n+1} = G(Y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

El teorema del punto fijo de Banach también asegura que la sucesión dada por este método es convergente y su límite es el único punto fijo de G, que es la única solución del sistema (S).

3.

a) Se trata de un método multipaso, pues $p'_q(t_k)$ se calcula a partir de $y_{q+1}, y_q, \dots, y_1$, es decir, para que el método arrance necesitan conocerse las $q+1$ primeras aproximaciones (y $q+1>1$ porque $q \neq 0$). Concretamente, el método es de q pasos, y como $p'_q(t_k)$ puede calcularse sin conocer f_k, el método es explícito.

b) El método para $q=2$ es

$$p'(t_k) = f(t_k, y_k), \quad k = 2, 3, \dots$$

donde p es el polinomio de grado menor o igual que 2 que interpola los 3 puntos

$$(t_{k+1}, y_{k+1}), (t_k, y_k), (t_{k-1}, y_{k-1})$$

La forma regresiva de Gregory-Newton para el polinomio de interpolación es

$$p(t) = \widetilde{p}\left(\frac{t - t_{k+1}}{h}\right),$$

donde

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}(s) &= \sum_{i=0}^{2} \nabla^i y_{k+1} \binom{s+i-1}{i} = \nabla^0 y_{k+1} \binom{s-1}{0} + \nabla^1 y_{k+1} \binom{s}{1} + \nabla^2 y_{k+1} \binom{s+1}{2} \\
&= y_{k+1} + (y_{k+1} - y_k)s + \frac{1}{2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})s(s+1) \\
&= y_{k+1} + (y_{k+1} - y_k)s + \frac{1}{2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})s^2 + \frac{1}{2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})s \\
&= y_{k+1} + \left(\frac{3}{2}y_{k+1} - 2y_k + \frac{1}{2}y_{k-1}\right)s + \frac{1}{2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})s^2
\end{aligned}$$

Se tiene que

$$\widetilde{p}'(s) = \frac{3}{2}y_{k+1} - 2y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} + (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})s$$

Por la regla de la cadena,

$$p'(t) = \frac{1}{h}\widetilde{p}'\left(\frac{t - t_{k+1}}{h}\right)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
p'(t_k) = \frac{1}{h}\widetilde{p}'\left(\frac{t_k - t_{k+1}}{h}\right) = \frac{1}{h}\widetilde{p}'(-1) &= \frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}y_{k+1} - 2y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} - y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}y_{k+1} - \frac{1}{2}y_{k-1}\right)
\end{aligned}$$

La expresión del método es

$$p'(t_k) = f(t_k, y_k), \quad k = 2, 3, \dots$$

es decir,

$$\frac{1}{2}y_{k+1} - \frac{1}{2}y_{k-1} = hf_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{2}y_{k+2} - \frac{1}{2}y_k = hf_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Los polinomios característicos del método son

$$\rho(z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}, \qquad \sigma(z) = z$$

Las raíces de ρ son 1 y -1, ambas de módulo 1 y simples, así que el método es estable. Estudiemos el orden. Se tiene que

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Además,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1, \qquad \sum_{j=0}^{2} \beta_j = 1$$

Por tanto, el método es de orden 1 (luego es consistente). De hecho,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^2 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 = 2, \qquad 2\sum_{j=0}^{2} \beta_j j = 2\cdot 1 = 2,$$

así que el método es de orden 2. Más aún,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^3 = \frac{1}{2}\cdot 2^3 = 4, \qquad 3\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^2 = 3\cdot 1 = 3 \neq 4$$

El método es de orden exactamente 2. La frontera de la región de estabilidad absoluta es

$$\partial D_A = \{\hat{h} \in \mathbb{C} \colon \pi_{\hat{h}} \text{ tiene alguna raíz de módulo } 1\},$$

donde $\pi_{\hat{h}}(z) = \rho(z) - \hat{h}\sigma(z) = \frac{1}{2}z^2 - \hat{h}z - \frac{1}{2}$. Sea $\hat{h} \in \partial D_A$ y sea $e^{i\theta}$ una raíz de $\pi_{\hat{h}}$ de módulo 1, con $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces $\sigma(e^{i\theta}) = e^{i\theta} \neq 0$, así que

$$\hat{h} = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} = \frac{\frac{1}{2}e^{2i\theta} - \frac{1}{2}}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{2}e^{-i\theta} = \frac{1}{2}2i\operatorname{sen}\theta = i\operatorname{sen}\theta$$

Esto nos dice que $\partial D_A \subset \{iy \colon y \in [-1,1]\}$, así que hay dos posibilidades: $D_A = \mathbb{C}\setminus D_A$ o $D_A = \emptyset$. La primera opción es imposible porque D_A no contiene a un intervalo de la forma $(0,\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$, así que tiene que ser $D_A = \emptyset$.