Facultad de Ciencias – Universidad de Málaga
ANÁLISIS NUMÉRICO
3º de Grado en Matemáticas – Curso 2021/22
2 de septiembre de 2022

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Nombre: ____

– Examen –

1. Se considera un método RK de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{1,1} & \dots & a_{q,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_q & a_{q,1} & \dots & a_{q,q} \\ \hline & b_1 & \dots & b_q \end{array}$$

con

$$c_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}, \quad i = 1, \dots q.$$

Usando la caracterización del orden de los métodos unipaso vista en clase, pruebe que el método es de orden al menos 2 si y sólo si se verifican las relaciones

$$\sum_{i=1}^{q} b_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{q} b_i c_i = \frac{1}{2}.$$

Ponga, si es posible, un ejemplo de método explícito de tres etapas y orden 2.

2. Se considera el método:

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_k + \tfrac{h}{4}, y_k + \tfrac{h}{4} k_1\right), \\ k_2 &= f\left(t_k + \tfrac{3}{4} h, y_k + \tfrac{h}{2} k_1 + \tfrac{h}{4} k_2\right) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} k_1 + \frac{h}{2} k_2. \end{aligned}$$

a) Calcuie el orden, p, del método. Proponga, si es posible, un método encajado RK$p-1(p)$ cuyo método de orden p sea este.

b) Encuentre la función de estabilidad absoluta del método. ¿Es el método A-estable?

3. El método BDF de q pasos se define de la siguiente manera:

$$R_q'(t_{k+q}) = f(t_{k+q}, y_{k+q}), \quad k = 0, 1, \dots$$

siendo $R_q(t)$ el polinomio que interpola los $q+1$ datos:

$$(t_k, y_k), \dots, (t_{k+q}, y_{k+q}).$$

a) Obtenga la expresión del método BDF de dos pasos en la forma

$$y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = h(\beta_2 f_{k+2} + \beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k), \quad k = 0, 1, \dots \tag{1}$$

b) Estudie el orden y la estabilidad del método.

4. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x) y = r(x), \quad x \in [0, L], \\ y(0) = \alpha, \\ y(L) = \beta, \end{cases}$$

siendo q, r dos funciones continuas de $[0, L]$ en $\mathbb{R}$, con $q(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [0, L]$, y α, β dos números reales.

a) Proponga un método de diferencias finitas de segundo orden que use una malla uniforme de $N+2$ puntos

$$x_i = i\,h, \quad i = 0, \ldots, N+1,$$

siendo

$$h = L/(N+1).$$

b) Exprese el sistema a resolver para hallar las aproximaciones en forma matricial. ¿Es la matriz simétrica? En ese caso, ¿es definida positiva?

– Resolución –

1. La función incremento del método RK con el tablero del enunciado es

$$\Phi(t,y,h)=\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{(i)},y^{(i)}),$$

donde, para cada $i\in\{1,2,\dots,q\}$,

$$t^{(i)}=t+c_i h, \qquad y^{(i)}=y+h\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f(t^{(j)},y^{(j)})$$

son funciones de (t,y,h). Por tanto,

$$\Phi(t,y,0)=\sum_{i=1}^{q} b_i f(t,y)=f(t,y)\sum_{i=1}^{q} b_i$$

Además,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial h}(t,y,h)=\sum_{i=1}^{q} b_i\frac{d}{dh}f(t^{(i)},y^{(i)})=\sum_{i=1}^{q} b_i\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,y,h)\frac{\partial t^{(i)}}{\partial h}(t,y,h)+\frac{\partial f}{\partial y}(t,y,h)\frac{\partial y^{(i)}}{\partial h}(t,y,h)\right) \qquad (*)$$

Por un lado,

$$\frac{\partial t^{(i)}}{\partial h}(t,y,h)=c_i$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial y^{(i)}}{\partial h}(t,y,h)=\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f(t^{(j)},y^{(j)})+h\frac{d}{dh}\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f(t^{(j)},y^{(j)})$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial t^{(i)}}{\partial h}(t,y,0)=c_i, \qquad \frac{\partial y^{(i)}}{\partial h}(t,y,0)=\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f(t,y)=c_i f(t,y),$$

donde se ha usado que en $h=0$ es $f(t^{(j)},y^{(j)})=f(t,y)$ y que

$$c_i=\sum_{j=1}^{q} a_{i,j}$$

Volviendo a $(*)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial h}(t,y,0)&=\sum_{i=1}^{q} b_i\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,y,0)\frac{\partial t^{(i)}}{\partial h}(t,y,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(t,y,0)\frac{\partial y^{(i)}}{\partial h}(t,y,0)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{q} b_i\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,y,0)c_i+\frac{\partial f}{\partial y}(t,y,0)c_i f(t,y)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{q} b_i c_i\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,y,0)+f(t,y)\frac{\partial f}{\partial y}(t,y,0)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{q} b_i c_i f^{(1)}(t,y)
\end{aligned}$$

Ahora bien, se sabe que el método es de orden al menos 2 si y solo si

$$\Phi(t,y,0)=f(t,y), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial h}(t,y,0)=\frac{1}{2}f^{(1)}(t,y)$$

Pero hemos probado que

$$\Phi(t,y,0)=f(t,y)\sum_{i=1}^{q} b_i, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial h}(t,y,0)=\sum_{i=1}^{q} b_i c_i f^{(1)}(t,y),$$

concluyéndose que el método es de orden al menos 2 si y solo si

$$\sum_{i=1}^{q} b_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{q} b_i c_i = \frac{1}{2}$$

En consecuencia, un método RK explícito de tres etapas y orden 2 debe ser de la forma

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array}$$

En efecto, este método verifica

$$c_i = \sum_{j=1}^{3} a_{i,j},\ i \in \{1,2,3\}, \qquad \sum_{i=1}^{3} b_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{3} b_i c_i = \frac{1}{2}$$

2. Nótese que

$$k_1 = f\left(t_k + \tfrac{h}{4}, y_k + \tfrac{h}{4}k_1\right) \iff y_k + \tfrac{h}{4}k_1 = y_k + \tfrac{h}{4} f\left(t_k + \tfrac{h}{4}, y_k + \tfrac{h}{4}k_1\right)$$

Llamando $y_k^{(1)} = y_k + \frac{h}{4}k_1$, se tiene

$$y_k^{(1)} = y_k + \tfrac{h}{4} f(t_k + \tfrac{h}{4}, y_k^{(1)})$$

Por otra parte,

$$k_2 = f\left(t_k + \tfrac{3}{4}h, y_k + \tfrac{h}{2}k_1 + \tfrac{h}{4}k_2\right) \iff y_k + \tfrac{h}{2}k_1 + \tfrac{h}{4}k_2 = y_k + \tfrac{h}{2}k_1 + \tfrac{h}{4} f\left(t_k + \tfrac{3}{4}h, y_k + \tfrac{h}{2}k_1 + \tfrac{h}{4}k_2\right)$$

Llamando $y_k^{(2)} = y_k + \frac{h}{2}k_1 + \frac{h}{4}k_2$, se tiene

$$y_k^{(2)} = y_k + \tfrac{h}{2}k_1 + \tfrac{h}{4} f\left(t_k + \tfrac{3}{4}h, y_k + \tfrac{h}{2}k_1 + \tfrac{h}{4}k_2\right) = y_k + \tfrac{h}{2} f\left(t_k + \tfrac{h}{4}, y_k^{(1)}\right) + \tfrac{h}{4} f\left(t_k + \tfrac{3}{4}h, y_k^{(2)}\right)$$

Por último,

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{h}{2}k_1 + \tfrac{h}{2}k_2 = y_k + \tfrac{h}{2} f\left(t_k + \tfrac{h}{4}, y_k^{(1)}\right) + \tfrac{h}{2} f\left(t_k + \tfrac{3}{4}h, y_k^{(2)}\right)$$

En consecuencia, las tres ecuaciones del método se pueden escribir como

$$\begin{cases} y_k^{(1)} &= y_k + \frac{h}{4} f(t_k + \frac{h}{4}, y_k^{(1)}) \\ y_k^{(2)} &= y_k + h\big(\frac{1}{2} f(t_k + \frac{h}{4}, y_k^{(1)}) + \frac{1}{4} f(t_k + \frac{3}{4}h, y_k^{(2)})\big) \\ y_{k+1} &= y_k + h\big(\frac{1}{2} f(t_k + \frac{h}{4}, y_k^{(1)}) + \frac{1}{2} f(t_k + \frac{3}{4}h, y_k^{(2)})\big) \end{cases}$$

Se trata de un método RK con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

a) Estudiemos el orden del método. Sean

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$B^t E = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

luego el método es de orden 1. Además,

$$B^t A E = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2},$$

así que el método es de orden 2. Seguimos:

$$B^tC^2E = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \frac{5}{16} \neq \frac{1}{3}$$

Esto indica que el método no es de orden 3, así que es de orden exactamente 2.

b) La función de estabilidad absoluta viene dada por

$$\begin{aligned} R(\hat{h}) = \frac{|I - \hat{h}A + \hat{h}EB^t|}{|I - \hat{h}A|} &= \begin{vmatrix} 1-\hat{h}/4 & 0 \\ -\hat{h}/2 & 1-\hat{h}/4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1-\hat{h}/4+\hat{h}/2 & \hat{h}/2 \\ -\hat{h}/2+\hat{h}/2 & 1-\hat{h}/4+\hat{h}/2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\hat{h}/4 & 0 \\ -\hat{h}/2 & 1-\hat{h}/4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1+\hat{h}/4 & \hat{h}/2 \\ 0 & 1+\hat{h}/4 \end{vmatrix} = \frac{(1+\hat{h}/4)^2}{(1-\hat{h}/4)^2} = \frac{(4+\hat{h})^2}{(4-\hat{h})^2} \end{aligned}$$

Sea $\hat{h} = x + iy \in \mathbb{C}^-$. Entonces

$$|R(\hat{h})| < 1 \iff |4+\hat{h}|^2 < |4-\hat{h}|^2 \iff (4+x)^2 + y^2 < (4-x)^2 + y^2 \iff 16 + x^2 + 8x < 16 + x^2 - 8x$$

Esto último es siempre cierto por ser $x < 0$, así que $\mathbb{C}^- \subset D_A$ y por tanto el método es A-estable.

3.

a) El polinomio que interpola los datos

$$(t_k, y_k), (t_{k+1}, y_{k+1}), (t_{k+2}, y_{k+2})$$

es

$$R(t) = \widetilde{R}\left(\frac{t - t_{k+2}}{h}\right),$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(s) = \sum_{j=0}^{2} \nabla^j y_{k+2} \binom{s+j-1}{j} &= y_{k+2}\binom{s-1}{0} + (y_{k+2} - y_{k+1})\binom{s}{1} + (y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)\binom{s+1}{2} \\ &= y_{k+2} + (y_{k+2} - y_{k+1})s + \frac{1}{2}(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)s(s+1) \\ &= y_{k+2} + (y_{k+2} - y_{k+1})s + \frac{1}{2}(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)s^2 + \frac{1}{2}(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)s \\ &= y_{k+2} + \left(\frac{3}{2}y_{k+2} - 2y_{k+1} + \frac{1}{2}y_k\right)s + \frac{1}{2}(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)s^2 \end{aligned}$$

Por la regla de la cadena,

$$R'(t) = \frac{1}{h}\widetilde{R}'\left(\frac{t - t_{k+2}}{h}\right)$$

En particular,

$$R'(t_{k+2}) = \frac{1}{h}\widetilde{R}'(0) = \frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}y_{k+2} - 2y_{k+1} + \frac{1}{2}y_k\right)$$

Por tanto, la expresión del método BDF de dos pasos es

$$\frac{3}{2}y_{k+2} - 2y_{k+1} + \frac{1}{2}y_k = hf_{k+2}, \qquad k = 0, 1, \dots$$

Equivalentemente,

$$y_{k+2} - \frac{4}{3}y_{k+1} + \frac{1}{3}y_k = \frac{2h}{3}f_{k+2}, \qquad k = 0, 1, \dots$$

b) El primer polinomio característico del método es

$$\rho(z) = z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3},$$

cuyas raíces son 1 y $\frac{1}{3}$. Las raíces de ρ son de módulo menor que 1 y las que son de módulo 1 son simples, así que el método es estable. Estudiemos el orden. En primer lugar,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

Además,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}, \qquad \sum_{j=0}^{2} \beta_j = \frac{2}{3},$$

luego el método es de orden 1. Y como

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^2 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3}, \qquad 2\sum_{j=0}^{q} \beta_j j = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3},$$

entonces el método es de orden 2. Sin embargo,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^3 = -\frac{4}{3} + 8 = \frac{20}{3}, \qquad 3\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^2 = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2^2 = 8 \neq \frac{20}{3},$$

así que el método es de orden exactamente 2.

4.

a) Consideremos la fórmula de derivación numérica

$$y''(\bar{x}) \approx D_3^2(y) = \frac{y(\bar{x}+h) - 2y(\bar{x}) + y(\bar{x}-h)}{h^2}$$

En particular, para $i = 1, 2, \ldots, N$,

$$y''(x_i) \approx D_3^2(y) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}$$

Llamemos u_i a la aproximación de $y(x_i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, mientras que $u_0 = \alpha$, $u_{N+1} = \beta$. Entonces

$$y''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Sustituyendo estas aproximaciones en el problema se obtiene un método adecuado para aproximar la solución de dicho problema:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \\ \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = q(x_i)u_i - r(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \\ u_{N+1} = \beta \end{cases}$$

b) Se va a tratar de transformar este método en un sistema de N ecuaciones con N incógnitas. La ecuación del sistema para $i = 1$ es, usando que $u_0 = \alpha$,

$$\frac{u_2 - 2u_1 + \alpha}{h^2} = q(x_1)u_1 - r(x_1),$$

o, equivalentemente,

$$\left(-2 - h^2 q(x_1)\right) u_1 + u_2 = -h^2 r(x_1) - \alpha$$

Y para $i = N$, usando que $u_{N+1} = \beta$,

$$\frac{\beta - 2u_N + u_{N-1}}{h^2} = q(x_N)u_N - r(x_N),$$

es decir,

$$u_{N-1} + \left(-2 - h^2 q(x_N)\right) u_N = -h^2 r(x_N) - \beta$$

Por tanto, el método se escribe de forma equivalente como

$$\begin{cases} \left(-2-h^2q(x_1)\right)u_1+u_2=-h^2r(x_1)-\alpha, \\ \dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=q(x_i)u_i-r(x_i), \qquad i=2,3,\dots,N-1, \\ u_{N-1}+\left(-2-h^2q(x_N)\right)u_N=-h^2r(x_N)-\beta, \end{cases}$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{cases} \left(-2-h^2q(x_1)\right)u_1+u_2=-h^2r(x_1)-\alpha, \\ u_{i-1}+\left(-2-h^2q(x_i)\right)u_i+u_{i+1}=-h^2r(x_i), \qquad i=2,3,\dots,N-1, \\ u_{N-1}+\left(-2-h^2q(x_N)\right)u_N=-h^2r(x_N)-\beta, \end{cases}$$

En forma matricial,

$$AU=F,$$

donde la matriz de coeficientes es

$$A=\begin{pmatrix} -2-h^2q(x_1) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2-h^2q(x_2) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2-h^2q(x_{N-1}) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2-h^2q(x_N) \end{pmatrix}$$

Esta matriz es simétrica, y como es tridiagonal con elementos diagonales negativos, entonces es definida negativa.