Facultad de Ciencias – Universidad de Málaga
ANÁLISIS NUMÉRICO
3º de Grado en Matemáticas – Curso 2021/22
2 de septiembre de 2022

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Nombre: ____________________

– Examen –

1. Se considera un método RK de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{1,1} & \dots & a_{q,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_q & a_{q,1} & \dots & a_{q,q} \\ \hline & b_1 & \dots & b_q \end{array}$$

con

$$c_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}, \quad i = 1, \dots q.$$

Usando la caracterización del orden de los métodos unipaso vista en clase, pruebe que el método es de orden al menos 2 si y sólo si se verifican las relaciones

$$\sum_{i=1}^{q} b_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{q} b_i c_i = \frac{1}{2}.$$

Ponga, si es posible, un ejemplo de método explícito de tres etapas y orden 2.

2. Se considera el método:

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_k + \tfrac{h}{4}, y_k + \tfrac{h}{4} k_1\right), \\ k_2 &= f\left(t_k + \tfrac{3}{4} h, y_k + \tfrac{h}{2} k_1 + \tfrac{h}{4} k_2\right) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} k_1 + \frac{h}{2} k_2. \end{aligned}$$

a) Calcuie el orden, p, del método. Proponga, si es posible, un método encajado RK$p-1(p)$ cuyo método de orden p sea este.

b) Encuentre la función de estabilidad absoluta del método. ¿Es el método A-estable?

3. El método BDF de q pasos se define de la siguiente manera:

$$R_q'(t_{k+q}) = f(t_{k+q}, y_{k+q}), \quad k = 0, 1, \dots$$

siendo $R_q(t)$ el polinomio que interpola los $q+1$ datos:

$$(t_k, y_k), \dots, (t_{k+q}, y_{k+q}).$$

a) Obtenga la expresión del método BDF de dos pasos en la forma

$$y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = h(\beta_2 f_{k+2} + \beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k), \quad k = 0, 1, \dots \tag{1}$$

b) Estudie el orden y la estabilidad del método.

4. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x) y = r(x), & x \in [0, L], \\ y(0) = \alpha, \\ y(L) = \beta, \end{cases}$$

siendo q, r dos funciones continuas de $[0, L]$ en $\mathbb{R}$, con $q(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [0, L]$, y α, β dos números reales.

a) Proponga un método de diferencias finitas de segundo orden que use una malla uniforme de $N+2$ puntos

$$x_i = i\,h, \quad i = 0, \ldots, N+1,$$

siendo

$$h = L/(N+1).$$

b) Exprese el sistema a resolver para hallar las aproximaciones en forma matricial. ¿Es la matriz simétrica? En ese caso, ¿es definida positiva?