Relación 7

Ejercicio 1. *Determinar los ceros y las singularidades aisladas de las siguientes funciones. Para los ceros, decir su orden, y para las singularidades, el tipo de singularidad, así como su orden en el caso de los polos.*

(a) z^9+9

(b) $\dfrac{z^2+9}{z^4}$

(c) $z\,\mathrm{sen}(z)$

(d) $(1-e^z)^2$

(e) $\dfrac{e^z-1}{z^2(z-2\pi i)}$

(f) $1-\cos(z)$

(g) $\mathrm{sen}(z^3)$

(h) $z^2e^{\frac{1}{z}}$

(i) $\dfrac{z^4}{1+z^4}$

(j) $\dfrac{z^5}{1-z^2}$

(k) $\dfrac{e^z}{1+z^2}$

(l) $\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$

(m) $e^{-\frac{1}{z^2}}$

(n) $e^{\frac{z}{1-z}}$

(ñ) $\dfrac{1}{z^3(2-\cos(z))}$

(o) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$

Solución.

(a) La función dada por $f(z)=z^9+9$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, así que no tiene singularidades aisladas en $\mathbb{C}$. La función $g(z)=f(\frac{1}{z})=\frac{1}{z^9}+9$ tiene un polo en 0, luego f tiene un polo en ∞. Como además

$$\lim_{z\to 0} z^9 g(z)=\lim_{z\to 0}(1+9z^9)=1,$$

entonces ∞ es un polo de orden 9 de f.

Los ceros de f son $\xi^k\sqrt[9]{-9}$, $k\in\{0,1,\dots,8\}$, donde $\xi=e^{i\frac{2\pi}{9}}$. Como f es un polinomio con 9 ceros distintos, todos estos ceros son simples.

(b) La función dada por $f(z)=\frac{z^2+9}{z^4}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, así que 0 es una singularidad aislada de f, y es un polo porque

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2+9}{z^4}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{z^2}+\frac{9}{z^4}}{1}=\infty$$

Como

$$\lim_{z\to 0} z^4 f(z)=\lim_{z\to 0}(z^2+9)=9,$$

entonces 0 es un polo de f de orden 4. El infinito también es una singularidad aislada de f, y es evitable porque la función

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\frac{1}{z^2}+9}{\frac{1}{z^4}}=z^2+9z^4$$

tiene una singularidad aislada evitable en 0.

Los ceros de f son $3i$ y $-3i$, que claramente son simples.

(c) La función dada por $f(z)=z\,\mathrm{sen}(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, así que no tiene singularidades aisladas en $\mathbb{C}$. La función $g(z)=f(\frac{1}{z})=\frac{1}{z}\,\mathrm{sen}(\frac{1}{z})$ no tiene límite en 0: si consideramos la sucesión $\{\frac{1}{\pi n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuyo límite es 0, se tiene

$$g\left(\frac{1}{\pi n}\right)=\pi n\,\mathrm{sen}(\pi n)=0\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

y si consideramos la sucesión $\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuyo límite es también cero, se tiene

$$g\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)=\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

Por tanto, 0 es una singularidad aislada esencial de $f(\frac{1}{z})$, es decir, ∞ es una singularidad aislada esencial de f.

En cuanto a los ceros, se tiene que $f(z)=0$ si y solo si $z=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Como $f'(z)=\operatorname{sen}(z)+z\cos(z)$ y $f'(\pi k)=(-1)^k\pi k\neq 0$ si y solo si $k\neq 0$, todos los ceros de la forma πk con $k\neq 0$ son simples. Por último, como $f''(z)=2\cos(z)-z\operatorname{sen}(z)$ y $f''(0)\neq 0$, concluimos que 0 es un cero doble de f.

(*d*) La función dada por $f(z)=(1-e^z)^2$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, así que no tiene singularidades aisladas en $\mathbb{C}$. La función $g(z)=f(\frac{1}{z})=(1-e^{\frac{1}{z}})^2$ no tiene límite en 0; basta considerar las sucesiones $\{\frac{1}{2\pi ni}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)i}\}_{n\in\mathbb{N}}$, que tienen límite 0 y verifican

$$g\left(\frac{1}{2\pi ni}\right)=0, \qquad g\left(\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)i}\right)=(1-i)^2$$

Por tanto, ∞ es una singularidad aislada esencial de f.

Respecto a los ceros, $f(z)=0$ si y solo si $e^z=1=e^0$, es decir, si y solo si $z=2\pi ki$, $k\in\mathbb{Z}$. Se tiene que $f'(z)=-2e^z(1-e^z)=-2e^z+2e^{2z}$ y $f'(2\pi ki)=0$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Además, $f''(z)=-2e^z+4e^{2z}$ y $f''(2\pi ki)=-2+4=2\neq 0$ para todo $k\in\mathbb{Z}$, luego todos los ceros de f son dobles.

(*e*) La función dada por $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2(z-2\pi i)}=\frac{e^z-1}{z^3-2\pi iz^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0,2\pi i\}$. Se tiene que

$$\lim_{z\to 2\pi i}(z-2\pi i)f(z)=\lim_{z\to 2\pi i}\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{e^{2\pi i}-1}{(2\pi i)^2}=0,$$

luego $2\pi i$ es una singularidad evitable. Por otra parte,

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z^2(z-2\pi i)}=\infty,$$

donde se ha usado que

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$$

Por tanto, 0 es un polo de f, y es orden 1, pues

$$\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\frac{1}{z-2\pi i}=-\frac{1}{2\pi i}\neq 0$$

Además, f no tiene límite no tiene límite en ∞; basta considerar las sucesiones $\{-n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que en $\mathbb{C}$ tienen límite ∞, y verifican

$$f(-n)=\frac{e^{-n}-1}{-n^3-2\pi in^2}\xrightarrow{n\to\infty}0, \qquad f(n)=\frac{e^n-1}{n^3-2\pi in^2}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

En consecuencia, ∞ es una singularidad esencial de f.

Los ceros de f son de la forma $2\pi ki$, con $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$. Como las funciones e^z-1 y $z-2\pi ki$ son holomorfas en $\mathbb{C}$ y se anulan en $2\pi ki$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\lim_{z\to 2\pi ki}\frac{e^z-1}{z-\pi ki}=\lim_{z\to 2\pi ki}=e^z=1$$

Por tanto,

$$\lim_{z\to 2\pi ki}\frac{f(z)}{z-2\pi ki}=\lim_{z\to 2\pi ki}\frac{1}{z^2(z-2\pi i)}\frac{e^z-1}{z-2\pi ki}=\frac{1}{(2\pi ki)^2\cdot 2\pi i(k-1)}\neq 0$$

Concluimos que todos los ceros de f son simples.

(*f*) La función $f(z)=1-\cos(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, luego no presenta singularidades aisladas en $\mathbb{C}$. En el infinito no tiene límite: de nuevo, basta estudiar las sucesiones $\{2n\pi\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{(2n+1)\pi\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto, ∞ es una singularidad aislada esencial de f.

En cuanto a los ceros,

$$f(z)=0 \iff \cos(z)=1 \iff \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1 \iff e^{iz}+e^{-iz}=2 \iff (e^{iz})^2+1-2e^{iz}=0$$
$$\iff (e^{iz}-1)^2=0 \iff e^{iz}=1 \iff z=2\pi k,\, k\in\mathbb{Z}$$

Tenemos que $f'(z)=\operatorname{sen}(z)$ y $f'(2\pi k)=0$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Además, $f''(z)=\cos(z)$ y $f''(2\pi k)=1\neq 0$ para todo $k\in\mathbb{Z}$, concluyéndose que todos los ceros de f son dobles.

(g) La función $f(z)=\operatorname{sen}(z^3)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ (luego no hay singularidades aisladas en $\mathbb{C}$) y, razonando como siempre, tiene a ∞ como singularidad aislada esencial.

Respecto a los ceros,

$$\operatorname{sen}(z^3)=0 \iff \frac{e^{iz^3}-e^{-iz^3}}{2i}=0 \iff e^{iz^3}=e^{-iz^3} \iff z^3=\pi k,\, k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff z=\xi^i\sqrt[3]{\pi k},\, k\in\mathbb{Z},\, i=0,1,2,$$

siendo $\xi=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Si $k\neq 0$, $i=0,1,2$,

$$f'(z)=3z^2\cos(z^3), \qquad f'\left(\xi^i\sqrt[3]{\pi k}\right)=3\xi^{2i}(\pi k)^{\frac{2}{3}}\cos(\pi k)=3\xi^{2i}(\pi k)^{\frac{2}{3}}(-1)^k\neq 0,$$

pero en $k=0$ es $f'(0)=0$. Una derivada más:

$$f''(z)=6z\cos(z^3)-9z^4\operatorname{sen}(z^3), \qquad f''(0)=0$$

Mala suerte. A seguir derivando.

$$f'''(z)=6\cos(z^3)-39z^3\operatorname{sen}(z^3)-27z^6\cos(z^3), \qquad f'''(0)=6\neq 0$$

Concluimos que 0 es un cero triple de f y todos los demás ceros son simples.

(h) La función $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Estudiemos el límite en 0. Si se consideran las sucesiones $\{\frac{1}{2\pi ni}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, ambas con límite cero, se tiene

$$f\left(\frac{1}{2\pi ni}\right)=\frac{1}{(2\pi ni)^2}\xrightarrow{n\to\infty}0, \qquad f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{e^n}{n^2}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

Por tanto, 0 es una singularidad aislada esencial de f. En el infinito, como

$$\lim_{z\to\infty} e^{\frac{1}{z}}=1, \qquad \lim_{z\to\infty} z^2=\infty,$$

entonces

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty,$$

así que ∞ es un polo de f. Además, como

$$\lim_{z\to 0} z^2 f\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0} e^z=1\neq 0,$$

entonces ∞ es un polo de f de orden 2.

Por último, f no tiene ceros en $\mathbb{C}$.

(i) La función

$$f(z)=\frac{z^4}{(1+z^4)}=\frac{z^4}{(z^2+i)(z^2-i)}=\frac{z^4}{(z-e^{-i\frac{\pi}{4}})(z+e^{-i\frac{\pi}{4}})(z-e^{i\frac{\pi}{4}})(z+e^{i\frac{\pi}{4}})}$$

es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{e^{-i\frac{\pi}{4}},-e^{-i\frac{\pi}{4}},e^{i\frac{\pi}{4}},-e^{i\frac{\pi}{4}}\}$. Se comprueba inmediatamente que todos estos puntos son polos simples de f, y el infinito también lo es, ya que

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=1$$

El único cero de f es, valga la redundancia, el cero, y es de orden 4 porque

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z^4}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{1+z^4}=1\neq 0$$

(*j*) La función $f(z)=\frac{z^5}{1-z^2}=\frac{z^5}{(1+z)(1-z)}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$. Se comprueba inmediatamente que -1 y 1 son polos simples de f, y como

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty,$$

entonces ∞ es un polo de f, y es de orden 3 porque

$$\lim_{z\to 0} z^3 f\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0} z^3\frac{\frac{1}{z^5}}{1-\frac{1}{z^2}}=\lim_{z\to 0}\frac{z^3}{z^5-z^3}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^2-1}=-1\neq 0$$

El único cero de f es 0, y su orden es 5 porque

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z^5}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{1-z^2}=1\neq 0$$

(*k*) La función $f(z)=\frac{e^z}{1+z^2}=\frac{e^z}{(z+i)(z-i)}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$. Es claro que i y $-i$ son polos simples de f. Si consideramos las sucesiones $\{2\pi i n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{n\}$, ambas con límite ∞, se tiene

$$f(2\pi i n)=\frac{1}{1-(2\pi n)^2}\xrightarrow{n\to\infty} 0,\qquad f(n)=\frac{e^n}{1+n^2}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

Por tanto, ∞ es una singularidad aislada esencial de f.

Por último, se observa que f no tiene ningún cero.

(*l*) La función $f(z)=\frac{1}{z(z^2+4)^2}=\frac{1}{z(z+2i)^2(z-2i)^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0,2i,-2i\}$. Se comprueba inmediatamente que 0 es un polo simple de f y que $2i$ y $-2i$ son polos dobles de f. Además, como

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0,$$

entonces ∞ es una singularidad aislada evitable de f.

Por último, se observa que f no tiene ningún cero.

(*m*) La función $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y presenta una singularidad aislada esencial en 0. En efecto, si se consideran las sucesiones $\{\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{(2n+1)\pi}}\}_{n\in\mathbb{N}}$, ambas con límite 0, se tiene

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n i}}\right)=e^{-2\pi n e^{i\frac{\pi}{2}}}=e^{2\pi n i}=1,\qquad f\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{(2n+1)\pi}}\right)=e^{-(2n+1)\pi e^{i\frac{\pi}{2}}}=e^{-(2n+1)\pi i}=-1$$

Por tanto, f no tiene límite en 0. En el infinito se tiene

$$\lim_{z\to\infty} e^{-\frac{1}{z^2}}=e^0=1,$$

luego ∞ es una singularidad aislada evitable de f.

Por último, f no tiene ningún cero en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(*n*) La función $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Como

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}=\infty,\qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1-x}=-\infty,$$

entonces

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{1-x}}=1,\qquad \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{1-x}}=0$$

Por tanto, f presenta en 1 una singularidad aislada esencial. Como

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z}{1-z}=-1,$$

entonces

$$\lim_{z\to\infty} e^{\frac{z}{1-z}}=e^{-1}$$

Así, ∞ es una singularidad aislada evitable de f.

Se observa además que f no tiene ceros en $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

($\tilde{n}$) Nótese que

$$\begin{aligned}\cos(z)=2 &\iff \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2 \iff e^{iz}+e^{-iz}=4 \iff (e^{iz})^2-4e^{iz}+1=0\\ &\iff e^{iz}\in\left\{\frac{4+\sqrt{16-4}}{2},\frac{4-\sqrt{16-4}}{2}\right\} \iff e^{iz}\in\left\{2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\right\}\end{aligned}$$

Si $e^{iz}=2+\sqrt{3}=e^{\log(2+\sqrt{3})}$, entonces $iz=\log(2+\sqrt{3})+2\pi ki$, esto es, $z=2\pi k-\log(2+\sqrt{3})i$, $k\in\mathbb{Z}$. Análogamnte, si $e^{iz}=2-\sqrt{3}=e^{\log(2-\sqrt{3})}$ (nótese que $2-\sqrt{3}>0$), entonces $z=2\pi k-\log(2-\sqrt{3})i$, $k\in\mathbb{Z}$. Así,

$$z^3(2-\cos(z))=0 \iff z\in A=\{2\pi k-\log(2+\sqrt{3})i : k\in\mathbb{Z}\}\cup\{2\pi k-\log(2-\sqrt{3})i : k\in\mathbb{Z}\}\cup\{0\}$$

y por tanto la función $f(z)=\frac{1}{z^3(2-\cos(z))}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus A$. Es claro que 0 es un polo de f de orden 3. Por otro lado, si $z_0\in A$ y $z_0\neq 0$, entonces $\cos(z_0)=2$ y, en consecuencia,

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{z^3(2-\cos(z))}=-\lim_{z\to z_0}\frac{1}{z^3}\frac{z-z_0}{\cos(z)-\cos(z_0)}=-\frac{\operatorname{sen}(z_0)}{z_0^3}\neq 0,$$

ya que $\cos^2(z_0)+\operatorname{sen}^2(z_0)=4+\operatorname{sen}^2(z_0)=1$ y por tanto no puede ser $\operatorname{sen}(z_0)=0$. Se tiene entonces que todos los elementos no nulos de A son polos simples de f. Nótese que ∞ no es singularidad aislada de f porque en todo conjunto de la forma $\{z\in\mathbb{C} : |z|>R\}$ con $R>0$ hay puntos donde el denominador de f se anula. En otras palabras, f no es holomorfa en ningún entorno de ∞.

La función f no tiene ceros.

(o) La función $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{2\pi ki : k\in\mathbb{Z}\}$. Por tanto, ∞ no es singularidad aislada de f y los puntos de la forma $2\pi ki$, $k\in\mathbb{Z}$ sí lo son. Si $k\neq 0$, entonces

$$\lim_{z\to 2\pi ki} f(z)=\infty,$$

así que $2\pi ki$ es un polo de f. Estudiemos su orden. Las funciones $z-2\pi ki$ y e^z-1 son holomorfas en $\mathbb{C}$ y anulan al punto $2\pi ki$, luego, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{z\to 2\pi ki}\frac{z-2\pi ki}{e^z-1}=\lim_{z\to 2\pi ki}\frac{1}{e^z}=e^{-2\pi ki}\neq 0$$

En consecuencia,

$$\lim_{z\to 2\pi ki}(z-2\pi ki)f(z)=\lim_{z\to 2\pi ki}\left(\frac{z-2\pi ki}{e^z-1}-\frac{z-2\pi ki}{z}\right)=e^{-2\pi ki}$$

Estudiemos el límite en 0. Como las funciones $z-e^z+1$ y ze^z-z son holomorfas en $\mathbb{C}$ y se anulan en 0, por la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z-e^z+1}{ze^z-z}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z}{e^z+ze^z-1}$$

De nuevo, $1-e^z$ y e^z+ze^z-1 definen funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ y que se anulan en 0. Otra vez por L'Hôpital,

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z}{e^z+ze^z-1}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{-e^z}{2e^z+ze^z}=\lim_{z\to 0}-\frac{1}{2+z}=-\frac{1}{2}$$

Concluimos que 0 es una singularidad evitable de f.

Parece que hallar los ceros de f no va a ser plato de buen gusto, así que se da por concluido el ejercicio. $\square$

Ejercicio 2. *Dar los desarrollos de Laurent de las siguientes funciones, indicando en cada caso la región de validez del mismo.*

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$ *en entornos perforados de* 0 *e* ∞.

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ *en entornos perforados de* 0, 1, 2 *e* ∞.

(c) $f(z) = \dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ *en el anillo* $\{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < 2\}$.

Solución.

(a) Como f es holomorfa en el entorno de 0 $\Delta(0,3)$, entonces su desarrollo de Laurent en dicho entorno coincide con su desarrollo de Taylor:

$$f(z) = -\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}z^n$$

Por otra parte, si $|\frac{3}{z}| < 1$, es decir, si $|z| > 3$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{z^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{3^n}z^n$$

Este desarrollo es válido en $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 3\} = A(0;3,\infty)$.

(b) Se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n,$$

expresión válida en $\Delta(0,1)$. Si lo queremos centrado en 1, pues

$$f(z) = \frac{1}{1+z-1} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,$$

expresión válida siempre que $|z-1| < 1$, o sea, válida en $\Delta(1,1)$. Y para el 2,

$$f(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{z-2}{2}} - \frac{1}{1+z-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + (-1)^{n+1}\right)(z-2)^n$$

Esto es válido siempre que $|z-2| < 2$ y $|z-2| < 1$, es decir, en el disco $\Delta(2,1)$. Por último, en el infinito,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{1}{z}-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n,$$

expresión válida mientras $|z| > 1$, o sea, en el anillo $A(0;1,\infty)$.

(c) Tratemos de descomponer f en fracciones simples: se tiene

$$\begin{aligned}\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i} &= \frac{A(z^2+1) + B(z-2)(z-i) + C(z-2)(z+i)}{(z-2)(z+i)(z-i)} \\ &= \frac{Az^2 + A + Bz^2 - Bzi - 2Bz + 2Bi + Cz^2 + Czi - 2Cz - 2Ci}{(z-2)(z+i)(z-i)} \\ &= \frac{(A+B+C)z^2 + (-2B-2C+Ci-Bi)z + A + 2Bi - 2Ci}{(z-2)(z+i)(z-i)}\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{cases} A+B+C = 1 \\ (-2-i)B + (-2+i)C = -2 \\ A + 2iB - 2iC = 5 \end{cases} \iff (\ldots) \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -i \\ C = i \end{cases}$$

Tenemos entonces

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{i}{z+i} + \frac{i}{z-i}$$

Por otra parte,

- Si $|\frac{z}{2}| < 1$, o sea, si $|z| < 2$, entonces

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

- Si $|\frac{i}{z}| < 1$, es decir, si $|z| > 1$, entonces

$$-\frac{i}{z+i} = -\frac{i}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}} = -\frac{i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\frac{1}{z^b} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-i)^n}z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}i^n z^n$$

- Si $|\frac{i}{z}| < 1$, es decir, si $|z| > 1$, entonces

$$\frac{i}{z-i} = \frac{i}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}i^n\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{i^n}z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-i)^n z^n$$

La conclusión es que

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}(i^n + (-i)^n)z^n$$

Todo esto es válido en el anillo $\{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < 2\}$. □

Ejercicio 3. *Hallar las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{i}{z}}\,dz.$

(b) $\displaystyle\int_{\partial Q}\frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z^3)-1}\,dz$*, donde* $Q = \{x+iy \in \mathbb{C} \colon |x|+|y| \le 1\}$ *y* ∂Q *está recorrido simple y positivamente.*

(c) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z}{e^z-1}\,dz.$

(d) $\displaystyle\int_{|z-6\pi i|=4\pi}\frac{\operatorname{Log}(z)}{1+e^z}\,dz.$

(e) $\displaystyle\int_{|z|=18}\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-7)(z^2+1)(z-6)^3}\,dz.$

Solución.

(a) La función $f(z) = z^2 e^{\frac{i}{z}}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, luego, por el teorema de los residuos,

$$\int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{i}{z}}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{n}(|z|=1,0)\operatorname{Res}(f,0) = 2\pi i\operatorname{Res}(f,0)$$

Se tiene que

$$z^2 e^{\frac{i}{z}} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{i^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}z^{2-n}$$

El coeficiente del término $\frac{1}{z}$ sería $\frac{i^3}{3!} = -\frac{i}{6}$, así que

$$\int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{i}{z}}\,dz = \frac{\pi}{3}$$

(*b*) En un ejercicio anterior se probó que $\cos(z^3) = 1$ si y solo si $z^3 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, así que $\cos(z^3) = 1$ si y solo si

$$z \in \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\pi k e^{i\frac{2\pi}{3}} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\pi k e^{i\frac{4\pi}{3}} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Se comprueba que el único de estos puntos que está en Q es 0. Por el teorema de los residuos,

$$\int_{\partial Q} \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z^3) - 1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$

Se tiene que

$$\cos(z^3) - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{6n}}{(2n)!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{6n}}{(2n!)}$$

Observamos que 0 es un cero de orden 6 de $\cos(z^3) - 1$, así que existe una función h holomorfa en $\mathbb{C}$ y no nula en 0 con

$$\cos(z^3) - 1 = z^6 g(z),$$

luego

$$\frac{\cos(z^3) - 1}{\operatorname{sen}(z)} = z^5 \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} g(z)$$

Como

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = 1 \neq 0,$$

entonces puede extenderse de forma continua la función dada por $h(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} g(z)$ a todo el plano y, llamando también h a dicha extensión, tenemos

$$\frac{\cos(z^3) - 1}{\operatorname{sen}(z)} = z^5 h(z),$$

con h holomorfa en $\mathbb{C}$ y no nula en 0. Todo esto para obtener que 0 es un cero de $\frac{1}{f}$ de orden 5 y, en consecuencia, que 0 es un polo de f de orden 5. Así, $\operatorname{Res}(f, 0)$ es el coeficiente de $n = 4$ de la serie de Taylor en 0 de la función $z^5 f(z)$: se tiene que

$$\begin{aligned}
z^5 f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &\iff z^5 \operatorname{sen}(z) = (\cos(z^3) - 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
&\iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+6}}{(2n+1)!} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{6n}}{(2n)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \\
&\iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+6}}{(2n+1)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{6n+6}}{(2n+2)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \\
&\iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{6n}}{(2n+2)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)
\end{aligned}$$

En el término de la derecha, al multiplicar a_4 (que es el coeficiente de z^4 en $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$) por $-\frac{1}{2!}$ (que es el término independiente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{6n}}{(2n+2)!}$), obtenemos el coeficiente de z^4 en la serie a la izquierda de la igualdad, que sería $\frac{1}{5!}$. En otras palabras,

$$\frac{1}{5!} = -\frac{1}{2!} a_4 = -\frac{1}{2!} \operatorname{Res}(f, 0),$$

es decir,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{60}$$

Concluimos que

$$\int_{\partial Q} \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z^3) - 1}\, dz = -\frac{2\pi i}{60} = -\frac{\pi i}{30}$$

(c) Por el teorema de los residuos,

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{e^z-1}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0),$$

ya que los ceros del denominador son $2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$, y $\mathrm{n}(|z|=2, 2\pi k i) = 0$ siempre que $k \neq 0$. Como además

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z-1} = 1,$$

entonces 0 es una singularidad evitable de $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$, luego $\operatorname{Res}(f,0) = 0$ y

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{e^z-1}\,dz = 0$$

(d) Se tiene que

$$e^{x+iy} = -1 \iff e^x \cos(y) + i \operatorname{sen}(y) = -1,$$

luego ha de ser $\operatorname{sen}(y) = 0$ y por tanto $\cos(y) = \pm 1$, así que

$$e^{x+iy} = -1 \iff y = (2k+1)\pi,\, e^x = 1 \iff y = (2k+1)\pi,\, x = 0,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Los únicos ceros del denominador que están en el disco de centro $6\pi i$ y radio 4π son $3\pi i$, $5\pi i$, $7\pi i$ y $9\pi i$. Si además observamos que la función Log es holomorfa en $\Delta(6\pi i, 5\pi)$ (disco que no contiene ningún punto de $(-\infty, 0]$ y que contiene a la circunferencia $|z-6\pi i| = 4\pi$), el teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{|z-6\pi i|=4\pi} \frac{\operatorname{Log}(z)}{e^z+1}\,dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f,3\pi i) + \operatorname{Res}(f,5\pi i) + \operatorname{Res}(f,7\pi i) + \operatorname{Res}(f,9\pi i))$$

Dado $k \in \{3,5,7,9\}$, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{z\to \pi k i} \frac{z-\pi k i}{e^z+1} = \frac{1}{e^{\pi k i}} = -1,$$

así que

$$\lim_{z\to \pi k i} (z-\pi k i)\frac{\operatorname{Log}(z)}{e^z+1} = -\operatorname{Log}(\pi k i) = -\log(\pi k) - i\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, $\pi k i$ es un polo simple de f y entonces

$$\operatorname{Res}(f, \pi k i) = -\log(\pi k) - i\frac{\pi}{2}$$

La conclusión es que

$$\begin{aligned}\int_{|z-6\pi i|=4\pi} \frac{\operatorname{Log}(z)}{e^z+1}\,dz &= 2\pi i\left(-\log(3\pi) - i\frac{\pi}{2} - \log(5\pi) - i\frac{\pi}{2} - \log(7\pi) - i\frac{\pi}{2} - \log(9\pi) - i\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 4\pi^2 - 2\pi i(\log(3\pi) + \log(5\pi) + \log(7\pi) + \log(9\pi))\\ &= 4\pi^2 - 2\pi i \log(945\pi^4)\end{aligned}$$

(e) La función

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-7)(z+i)(z-i)(z-6)^3}$$

es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{1,2,6,7,i,-i\}$, y todas las singularidades son tales que el índice de $|z| = 18$ con respecto a las mismas es 1. Por el teorema de los residuos,

$$\int_{|z|=18} f(z)\,dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,2) + \operatorname{Res}(f,6) + \operatorname{Res}(f,7) + \operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i) + \operatorname{Res}(f,6))$$

Ahora bien, f es una función racional, así que

$$\operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,2) + \operatorname{Res}(f,6) + \operatorname{Res}(f,7) + \operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i) + \operatorname{Res}(f,6) + \operatorname{Res}(f,\infty) = 0$$

y el problema se reduce a calcular $\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}(-\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0)$. Se tiene que

$$-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z}-2)(\frac{1}{z}-7)(\frac{1}{z}+i)(\frac{1}{z}-i)(\frac{1}{z}-6)^3} = \frac{z^8}{(1-z)(1-2z)(1-7z)(1+iz)(1-iz)(1-6z)^3}$$

Como

$$\lim_{z\to 0} -\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = 0,$$

entonces $\mathrm{Res}(-\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0) = \mathrm{Res}(f,\infty) = 0$ y se concluye que

$$\int_{|z|=18} f(z)\,dz = 0$$

□

Ejercicio 4. *Hallar las siguientes integrales usando el cálculo de residuos:*

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{4+2\cos\theta}\,d\theta.$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+r\cos\theta)^2}\,d\theta$, $0<r<1$.

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $a>0$.

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(4x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $a>0$.

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^2 dx.$

(g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^3 dx.$

(h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1-x^2}\,dx.$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x+x^2+x^3}\,dx.$

Solución.

(a) Una parametrización de la circunferencia unidad $|z|=1$ recorrida de forma simple y en sentido positivo es $\varphi(t)=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$. Se va a usar que $2\cos\theta = e^{i\theta}+e^{-i\theta}$, que $2i\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{i\theta}-e^{i\theta}$ y que $\frac{1}{z}=z$ en la circunferencia unidad:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{4+2\cos\theta}\,d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{(\frac{1}{2i})^2(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^2}{4+e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\frac{ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{4i^3}\int_{|z|=1} \frac{(z-\frac{1}{z})^2}{4+z+\frac{1}{z}}\frac{1}{z}\,dz \\
&= \frac{i}{4}\int_{|z|=1} \frac{z^2+\frac{1}{z^2}-2}{z^2+4z+1}\,dz \\
&= \frac{i}{4}\int_{|z|=1} \frac{z^2+\frac{1}{z^2}-2}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}\,dz \\
&= \frac{i}{4}\int_{|z|=1} \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}\,dz \\
&= \frac{i}{4}\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}\,dz
\end{aligned}$$

Por el teorema de los residuos,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{4+2\cos\theta}\,d\theta = \frac{i}{4}2\pi i(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,\sqrt{3}-2)) = -\frac{\pi}{2}(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,\sqrt{3}-2)),$$

donde se ha usado que

$$\mathrm{n}(|z|=1,0)=1, \qquad \mathrm{n}(|z|=1,\sqrt{3}-2)=1, \qquad \mathrm{n}(|z|=1,-\sqrt{3}-2)=0$$

Por otra parte...

- 0 es un polo doble de f:

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{(z^2-1)^2}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})} = \frac{1}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 1$$

  Por tanto,

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{d}{dz}\bigg|_{z=0} \left(\frac{(z^2-1)^2}{z^2+4z+1} \right) = \left(\frac{4z(z^2-1)}{z^2+4z+1} - \frac{(2z+4)(z^2-1)^2}{(z^2+4z+1)^2} \right)\bigg|_{z=0} = -4$$

- $z_0 = \sqrt{3}-2$ es un polo simple de f:

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+2+\sqrt{3})} = \frac{(z_0^2-1)^2}{2z_0^2\sqrt{3}} = \frac{(z_0-\frac{1}{z_0})^2}{2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

  Por tanto,

$$\operatorname{Res}(f,\sqrt{3}-2) = 2\sqrt{3}$$

Se concluye que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{4+2\cos\theta}\,d\theta = -\frac{\pi}{2}(-4+2\sqrt{3}) = (2-\sqrt{3})\pi$$

(b) Sea $r\in(0,1)$. Razonando como antes,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+r\cos\theta)^2}\,d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\frac{r}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}))^2}\,\frac{ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}}d\theta \\
&= -i\int_{|z|=1} \frac{1}{z(1+\frac{r}{2}z+\frac{r}{2z})^2}\,dz \\
&= -i\int_{|z|=1} \frac{z}{(\frac{r}{2}z^2+z+\frac{r}{2})^2}\,dz \\
&= -4i\int_{|z|=1} \frac{z}{(rz^2+2z+r)^2}\,dz
\end{aligned}$$

Se tiene que

$$rz^2+2z+r=0 \iff z = \frac{-2\pm\sqrt{4-4r^2}}{2r} = \frac{-1\pm\sqrt{1-r^2}}{r}$$

Sean

$$z_0 = \frac{-1+\sqrt{1-r^2}}{r} \qquad \text{y} \qquad z_1 = \frac{-1-\sqrt{1-r^2}}{r}$$

Puede probarse que para todo $r\in(0,1)$ se tiene $|z_0|<1$ y $|z_1|>1$. Por tanto, $\mathrm{n}(|z|=1,z_0)=1$ y $\mathrm{n}(|z|=1,z_1)=0$. Por el teorema de los residuos,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+r\cos\theta)^2}\,d\theta = (-4i)2\pi i\operatorname{Res}(f,z_0) = 8\pi\operatorname{Res}(f,z_0)$$

Se tiene que

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{z}{(z-z_1)^2} = \frac{z_0}{(z_0-z_1)^2} \neq 0$$

Por tanto, z_0 es un polo doble de f y entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,z_0) &= \frac{d}{dz}\bigg|_{z=z_0}\left(\frac{z}{(z-z_1)^2}\right) = \frac{(z-z_1)^2-2z(z-z_1)}{(z-z_1)^4}\bigg|_{z=z_0} = \frac{(z_0-z_1)^2-2z_0(z_0-z_1)}{(z_0-z_1)^4} \\
&= \frac{z_0-z_1-2z_0}{(z_0-z_1)^3} = -\frac{z_0+z_1}{(z_0-z_1)^3} = \frac{\frac{2}{r}}{(\frac{2}{r}\sqrt{1-r^2})^3} = \frac{r^2}{4(1-r^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

La integral pedida es

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+r\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{2\pi r^2}{(1-r^2)^{3/2}}$$

(c) Observamos que la función

$$f(z)=\frac{z^2}{z^4+6z^2+13}$$

es par y, en consecuencia,

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx$$

Por otra parte,

$$z^4+6z^2+13=0 \iff z^2=\frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{-6\pm 4i}{2}=-3\pm 2i$$

En forma polar, $-3+2i=\sqrt{13}e^{i\varphi}$ y $-3-2i=\sqrt{13}e^{-i\varphi}$ para algún $\varphi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. Tenemos entonces

$$z^4+6z^2+13=0 \iff z\in\left\{\sqrt[4]{13}e^{i\frac{\varphi}{2}},-\sqrt[4]{13}e^{i\frac{\varphi}{2}},\sqrt[4]{13}e^{-i\frac{\varphi}{2}},-\sqrt[4]{13}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right\}$$

Llamemos

$$z_0=\sqrt[4]{13}e^{i\frac{\varphi}{2}},\qquad z_1=-\sqrt[4]{13}e^{i\frac{\varphi}{2}},\qquad z_2=\sqrt[4]{13}e^{-i\frac{\varphi}{2}},\qquad z_3=-\sqrt[4]{13}e^{-i\frac{\varphi}{2}}$$

Sea $R_0>0$ de forma que los cuatro elementos de S tienen módulo menor que R_0. Si $R>R_0>0$, consideramos el ciclo

$$\gamma_R=[-R,R]+\sigma_R,$$

donde σ_R es la semicircunferencia de radio R en el semiplano superior recorrida de forma simple y en sentido positivo.

- Como f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{z_0,z_1,z_2,z_3\}$ y γ_R es un ciclo en $\mathbb{C}\setminus\{z_0,z_1,z_2,z_3\}$ homólogo a cero módulo $\mathbb{C}$, por el teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma_R}\frac{z^2}{z^4+6z^2+13}\,dz=2\pi i\sum_{i=0}^{3}\operatorname{Res}(f,z_i)\operatorname{n}(\gamma_R,z_i)=2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,z_0)+\operatorname{Res}(f,z_3)\right),$$

donde se ha usado que $\operatorname{n}(\gamma_R,z)=0$ si $\operatorname{Im}(z)<0$ y $\operatorname{n}(\gamma_R,z)=1$ si $\operatorname{Im}(z)>0$, junto con que $\operatorname{sen}(\frac{\varphi}{2})>0$ porque $\varphi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. Esta integral no depende de R y podemos tomar límite cuando $R\to\infty$. Se tiene que

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)}\neq 0,$$

luego z_0 es un polo simple de f y entonces

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)}$$

Análogamente, z_3 es otro polo simple de f y entonces

$$\operatorname{Res}(f,z_3)=\frac{z_3^2}{(z_3-z_0)(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\neq 0,$$

Por tanto,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{z^2}{z^4+6z^2+13}\,dz=2\pi i\left(\frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)}+\frac{z_3^2}{(z_3-z_0)(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\right)$$

- La integral de $f(z)$ sobre $[-R,R]$ tiene límite cuando $R\to\infty$ y es la que interesa calcular:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]}\frac{z^2}{z^4+6z^2+13}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx$$

- Como las integrales sobre γ_R y $[-R,R]$ tienen límite cuando $R\to\infty$, entonces la integral sobre σ_R también. Además, como

$$\lim_{z\to\infty} z^2 f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^4}{z^4+6z^2+13} = 1,$$

entonces $z^2 f(z)$ está acotada en $\{z\in\mathbb{C}\colon |z|>R_0\}$, esto es, existe $C>0$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z^2|}$$

para todo $z\in\{z\in\mathbb{C}\colon |z|>R_0\}$. Y si $z\in\mathrm{sop}(\sigma)$, entonces $|z|=R>R_0$ y por tanto

$$|f(z)| \leq \frac{C}{R^2}$$

En consecuencia,

$$\left|\int_{\sigma_R} \frac{z^2}{z^4+6z^2+13}\right| \leq \max_{z\in\mathrm{sop}(\sigma_R)} |f(z)|\,\mathrm{long}(\sigma_R) \leq \frac{C}{R^2}\pi R = \frac{C\pi}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Al tomar límite cuando $R\to\infty$ en la expresión

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$$

obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx = 2\pi i\left(\frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} + \frac{z_3^2}{(z_3-z_0)(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\right)$$

Por tanto,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx = \pi i\left(\frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} + \frac{z_3^2}{(z_3-z_0)(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\right)$$

(d) Nótese que la función

$$g(x) = \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{(x^2+a^2)^2}$$

es par, ya que

$$g(-x) = \frac{-x\,\mathrm{sen}(-x)}{((-x)^2+a^2)^2} = \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{(x^2+a^2)^2}$$

Por tanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{(x^2+a^2)^2}$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+a^2)^2} = \frac{ze^{iz}}{(z-ai)^2(z+ai)^2},$$

holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{ai,-ai\}$. Sea $R_0>0$ tal que $R_0>|ai|=a$ y, dado $R>R_0>0$, consideremos el mismo ciclo del apartado anterior:

$$\gamma_R = [-R,R]+\sigma_R$$

Se tiene que

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$$

Calculamos por separado cada una de las integrales.

- γ_R es un ciclo en $\mathbb{C}\setminus\{ai,-ai\}$ homólogo a cero módulo $\mathbb{C}$, luego estamos en condiciones de aplicar el teorema de los residuos, teniendo en cuenta que $\mathrm{n}(\gamma_R, ai) = 1$ y $\mathrm{n}(\gamma, -ai) = 0$:

  $$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ai)$$

  Se tiene que

  $$\lim_{z\to ai}(z-ai)^2 f(z) = \lim_{z\to ai}\frac{ze^{iz}}{(z+ai)^2} = \frac{aie^{-a}}{-4a^2} \neq 0,$$

  así que ai es un polo doble de f. Por tanto,

  $$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, ai) &= \frac{d}{dz}\bigg|_{z=ai}\left(\frac{ze^{iz}}{(z+ai)^2}\right) = \left(\frac{e^{iz}+ze^{iz}i}{(z+ai)^2} - \frac{2ze^{iz}}{(z+ai)^3}\right)\bigg|_{z=ai} = \frac{e^{-a}-ae^{-a}}{-4a^2} + \frac{2ae^{-a}i}{8a^3 i}\\ &= -\frac{e^{-a}}{4a^2} + \frac{e^{-a}}{4a^2} + \frac{e^{-a}}{4a} = \frac{e^{-a}}{4a}\end{aligned}$$

  En consecuencia,

  $$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi e^{-a}}{2a} i$$

  Como esta integral no depende de γ_R,

  $$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi e^{-a}}{2a} i$$

- Al tomar límite cuando $\mathbb{R}\to\infty$ en la integral sobre $[-R, R]$ aparece la integral que interesa calcular, que es convergente:

  $$\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

- Como se tiene

  $$\lim_{z\to\infty} z^3 f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{z^4}{z^4+a^4+2z^2a^2}e^{iz} = 1,$$

  entonces $z^3 f(z)$ es acotada en $\{z\in\mathbb{C} \colon |z| > R_0\}$: existe $C > 0$ tal que

  $$|f(z)| \leq \frac{C}{|z^3|}$$

  para todo $z\in\mathbb{C}$ con $|z| > R_0$. En consecuencia, si $z \in \operatorname{sop}(\sigma_R)$, entonces $|z| = R > R_0$ y

  $$|f(z)| \leq \frac{C}{|z^3|} = \frac{C}{R^3}$$

  Así,

  $$\left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq \max_{z\in\operatorname{sop}(\sigma_R)} |f(z)| \operatorname{long}(\sigma_R) \leq \frac{C}{R^3}\pi R = \frac{C\pi}{R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Al tomar límite cuando $R\to\infty$ en

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$$

se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\operatorname{sen}(x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a} i$$

Se concluye que

$$\int_0^{\infty}\frac{x\operatorname{sen}(x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\pi e^{-a}}{2a} = \frac{\pi e^{-a}}{4a}$$

(e) De nuevo, por la paridad del integrando,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(4x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{e^{4iz}}{(z^2+a^2)^2}$$

f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{ai,-ai\}$ y, de nuevo, tomamos $R_0 > |ai| = a > 0$ y el ciclo de siempre:

$$\gamma_R = [-R,R] + \sigma_R$$

Hay que hallar tres integrales distintas.

- Por el teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{4iz}}{(z^2+a^2)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,ai)$$

  Es inmediato comprobar que ai es un polo doble de f. Por tanto,

$$\operatorname{Res}(f,ai) = \frac{d}{dz}\bigg|_{z=ai}\left(\frac{e^{4iz}}{(z+ai)^2}\right) = \left(\frac{4ie^{4iz}}{(z+ai)^2} - \frac{2e^{4iz}}{(z+ai)^3}\right)\bigg|_{z=ai} = -\frac{4e^{-4a}i}{4a^2} + \frac{2e^{-4a}}{8a^3 i}$$
$$= \left(-\frac{e^{-4a}}{a^2} - \frac{e^{-4a}}{4a^3}\right)i = -e^{-4a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^3}\right)i$$

  En consecuencia,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi e^{-4a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^3}\right) = 2\pi e^{-4a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^3}\right)$$

  Como esta integral no depende de R,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi e^{-4a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^3}\right)$$

- Al tomar límite cuando $R\to\infty$ se obtiene algo similar a integral deseada:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} \frac{e^{4iz}}{(z^2+a^2)^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+a^2)^2}\,dx$$

- Como

$$\lim_{z\to\infty} z^2 f(z) = \lim_{z\to\infty} e^{4iz}\frac{z^2}{z^4+a^4+2z^2a^2} = 0,$$

  entonces $z^2 f(z)$ es acotada en $\{z\in\mathbb{C} : |z| > R_0\}$, así que existe $C>0$ tal que

$$|f(z)| \le \frac{C}{|z^2|}$$

  para todo $z\in\mathbb{C}$ con $|z|>R_0$. En particular, si $z\in \operatorname{sop}(\sigma_R)$, entonces $|z| = R > R_0$ y

$$|f(z)| \le \frac{C}{|z^2|} = \frac{C}{R^2}$$

  Por tanto,

$$\left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \le \max_{z\in\operatorname{sop}(\sigma_R)} |f(z)|\operatorname{long}(\sigma_R) \le \frac{C}{R^2}\pi R = \frac{C\pi}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Tomando límite cuando $R \to \infty$ en

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$$

se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx\right) i = 2\pi e^{-4a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^3}\right)$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = 2\pi e^{-4a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^3}\right)$$

y se concluye que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(4x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \pi e^{-4a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^3}\right)$$

(f) Una vez más,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 dx,$$

donde se entiende que la integral de la derecha es realmente su valor principal, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 dx\right)$$

Es mala idea tratar de integrar la función $\frac{e^{2iz}}{z^2}$, pues tiene un cero doble en 0. Se trata de buscar otra función cuya parte real o imaginaria tenga que ver con $\operatorname{sen}^2(x)$ y que tenga un cero simple en 0, en el peor de los casos. Observamos que

$$\operatorname{sen}^2(z) = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}-2}{4} = -\frac{\cos(2z)-1}{2} = \frac{1-\cos(2z)}{2}$$

Esto sugiere que se escoja la función

$$f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{2z^2}$$

que es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Se tiene que

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-e^{2iz}}{2z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{1-e^{(2z)i}}{2z}\cdot\frac{1}{z} = \infty,$$

luego 0 es un polo de f. Pero es un polo simple porque

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-e^{(2z)i}}{2z} \overset{\text{L'H}}{=} -i$$

Esto también nos dice que $\operatorname{Res}(f,0)=1$, que se usará más adelante. Sea $R>0$ y sea $\varepsilon>0$ tal que $R>\varepsilon>0$. Consideramos el ciclo

$$\gamma_{R,\varepsilon} = [-R,-\varepsilon] - \sigma_\varepsilon + [\varepsilon,R] + \sigma_R,$$

donde σ_ε es el camino que recorre la semicircunferencia de centro 0 y radio ε del semiplano superior de forma simple y positiva, y lo mismo para σ_R. Se tiene entonces

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz - \int_{\sigma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$$

Hallamos las integrales anteriores:

- $\gamma_{R,\varepsilon}$ es un ciclo en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ homólogo a cero módulo $\mathbb{C}$ y $\mathrm{n}(\gamma_{R,\varepsilon},0)=0$. Como f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, por el teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0$$

Como esto no depende de R ni de ε, al tomar límites cuando $R\to\infty$ y $\varepsilon\to 0^+$ la integral no se entera.

- Como f presenta un polo simple en 0, su desarrollo de Laurent es de la forma

$$f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n = \frac{\mathrm{Res}(f,0)}{z}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = -\frac{i}{z}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

La función

$$f(z)-\frac{i}{z}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y presenta una singularidad aislada evitable en 0, así que es acotada en un entorno perforado de 0, esto es, existen $\varepsilon_0, C_0>0$ tales que

$$\left|f(z)-\frac{i}{z}\right|\le C_0$$

para todo $z\in\Delta(0,\varepsilon_0)\setminus\{0\}$. Por tanto, si $\varepsilon_0>\varepsilon>0$,

$$\left|\int_{\sigma_\varepsilon}\left(f(z)-\frac{i}{z}\right)dz\right| \le \max_{z\in\mathrm{sop}(\sigma_R)}\left|f(z)-\frac{i}{z}\right|\mathrm{long}(\sigma_R)\le C_0\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0$$

Por otra parte, como σ_R está parametrizada por $\varphi(t)=\varepsilon e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$, entonces

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{i}{z}\,dz=\int_0^{\pi}\frac{i^2\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta=-\pi$$

En consecuencia,

$$\int_{\sigma_\varepsilon} f(z)\,dz=\int_{\sigma_\varepsilon}\left(f(z)-\frac{i}{z}\right)dz+\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{i}{z}\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty} -\pi$$

- La integral sobre $[-R,-\varepsilon]+[\varepsilon,R]$ proporciona la integral que interesa calcular, pues

$$\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz+\int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz=\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

- Para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ se tiene

$$|z^2 f(z)|=\left|\frac{1-e^{2iz}}{2}\right|\le\frac{1}{2}+\left|\frac{e^{2iz}}{2}\right|=1,$$

luego

$$|f(z)|\le\frac{1}{|z^2|}$$

Si $z\in\mathrm{sop}(\sigma_R)$, entonces $|z|=R$ y en consecuencia

$$|f(z)|\le\frac{1}{R^2}$$

Por tanto,

$$\left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right|\le\max_{z\mathrm{sop}(\sigma_R)}|f(z)|\,\mathrm{long}(\sigma_R)\le\frac{\pi R}{R^2}=\frac{\pi}{R}\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty} 0$$

Todo lo anterior nos dice que al tomar límites cuando $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0^+$ en

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz - \int_{\sigma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$$

se obtiene, teniendo en cuenta que $\mathrm{Re}(f(x)) = \frac{1-\cos(2x)}{2x^2} = \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2}$ e $\mathrm{Im}(f(x)) = \frac{1-\mathrm{sen}(2x)}{2x^2}$,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{2ix}}{2x^2}\,dx + \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2}\,dx + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\mathrm{sen}(2x)}{2x^2}\,dx\right) i + \pi,$$

luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2}\,dx = -\pi$$

La conclusión es que

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^2 dx = -\frac{\pi}{2}$$

(*g*) Una vez más,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^3 dx,$$

donde se entiende que la integral de la derecha es realmente su valor principal, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^3 dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon} \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^3 dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^3 dx\right)$$

Es mala idea tratar de integrar la función $\frac{e^{3iz}}{z^3}$, pues tiene un cero triple en 0. Se trata de buscar otra función cuya parte real o imaginaria tenga que ver con $\mathrm{sen}^3(x)$ y que tenga un cero simple en 0, en el peor de los casos. Observamos que

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}^3(z) &= \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^3 = -\frac{e^{3iz}-3e^{2iz}e^{-iz}+3e^{iz}e^{-2iz}-e^{-3iz}}{8i} = \frac{e^{3iz}-e^{-3iz}-3(e^{iz}-e^{-iz})}{8} i \\ &= \frac{2i\,\mathrm{sen}(3z)-6i\,\mathrm{sen}(z)}{8} i = \frac{3\,\mathrm{sen}(z)-\mathrm{sen}(3z)}{4}\end{aligned}$$

Esto sugiere que se escoja la función

$$g(z) = \frac{3e^{iz}-e^{3iz}}{4z^3}$$

que es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y verifica, para $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Im}(g(x)) = \frac{3\,\mathrm{sen}(x)-\mathrm{sen}(3x)}{4x^3} = \frac{\mathrm{sen}^3(x)}{x^3}$$

Se tiene que

$$\lim_{z\to 0} \frac{3e^{iz}-e^{3iz}}{4z^3} = \lim_{z\to 0} e^{iz}\cdot\frac{3-e^{2iz}}{2z}\cdot\frac{1}{2z^2} = \infty,$$

luego 0 es un polo de g... y no es simple. Estamos en problemas: hay que buscar otra función. Si hallamos los términos por debajo de $n=-1$ en el desarrollo de Laurent de g en el punto 0 y se los restamos, la función resultante tendrá un polo simple en 0 y se podrá proceder como en el apartado anterior.

$$g(z) = \frac{1}{4z^3}\left(3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3i)^n}{n!}z^n\right) = \frac{1}{z^3}\left(\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}z^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3i)^n}{n!}z^n\right)$$

La suma de los términos de orden -3 y -2 es

$$\frac{1}{z^3}\left(\frac{3}{4}(1+iz)-\frac{1}{4}(1+3iz)\right) = \frac{1}{z^3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}z-\frac{3}{4}z\right)i\right) = \frac{1}{2z^3}$$

Todo esto nos dice que la función

$$f(z)=g(z)-\frac{1}{2z^3}=\frac{3e^{iz}-e^{3iz}-2}{4z^3}$$

es holomorfa en $\mathbb{C}$ y tiene un polo simple en 0. Nótese que si $x\in\mathbb{R}$, el término añadido no afecta a la parte imaginaria, de forma que se tiene

$$\operatorname{Im}(f(x))=\operatorname{Im}(g(x))=\frac{\operatorname{sen}^3(x)}{x^3}$$

Además, de los coeficientes de la serie de antes también se deduce que

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{3}{4}\frac{i^2}{2!}-\frac{1}{4}\frac{(3i)^2}{2!}=-\frac{3}{8}+\frac{9}{8}=\frac{3}{4}$$

Ya se puede copiar y pegar lo que resta del ejercicio de antes. Sea $R>0$ y sea $\varepsilon>0$ tal que $R>\varepsilon>0$. Consideramos el ciclo

$$\gamma_{R,\varepsilon}=[-R,-\varepsilon]-\sigma_\varepsilon+[\varepsilon,R]+\sigma_R,$$

donde σ_ε es el camino que recorre la semicircunferencia de centro 0 y radio ε del semiplano superior de forma simple y positiva, y lo mismo para σ_R. Se tiene entonces

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}}f(z)dz=\int_{[-R,-\varepsilon]}f(z)dz-\int_{\sigma_\varepsilon}f(z)dz+\int_{[\varepsilon,R]}f(z)dz+\int_{\sigma_R}f(z)dz$$

Hallamos las integrales anteriores:

- $\gamma_{R,\varepsilon}$ es un ciclo en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ homólogo a cero módulo $\mathbb{C}$ y $\operatorname{n}(\gamma_{R,\varepsilon},0)=0$. Como f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, por el teorema de los residuos,

  $$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}}f(z)dz=0$$

  Como esto no depende de R ni de ε, al tomar límites cuando $R\to\infty$ y $\varepsilon\to0^+$ la integral no se entera.

- Como f presenta un polo simple en 0, su desarrollo de Laurent es de la forma

  $$f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}a_nz^n=\frac{\operatorname{Res}(f,0)}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\frac{3}{4z}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

  La función

  $$f(z)-\frac{3}{4z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

  es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y presenta una singularidad aislada evitable en 0, así que es acotada en un entorno perforado de 0, esto es, existen $\varepsilon_0,C_0>0$ tales que

  $$\left|f(z)-\frac{3}{4z}\right|\le C_0$$

  para todo $z\in\Delta(0,\varepsilon_0)\setminus\{0\}$. Por tanto, si $\varepsilon_0>\varepsilon>0$,

  $$\left|\int_{\sigma_\varepsilon}\left(f(z)-\frac{3}{4z}\right)dz\right|\le\max_{z\in\operatorname{sop}(\sigma_R)}\left|f(z)-\frac{3}{4z}\right|\operatorname{long}(\sigma_R)\le C_0\pi\varepsilon\xrightarrow{\varepsilon\to0^+}0$$

  Por otra parte, como σ_R está parametrizada por $\varphi(t)=\varepsilon e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$, entonces

  $$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{3}{4z}dz=\int_0^\pi\frac{3i\varepsilon e^{i\theta}}{4\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=\frac{3\pi}{4}i$$

  En consecuencia,

  $$\int_{\sigma_\varepsilon}f(z)dz=\int_{\sigma_\varepsilon}\left(f(z)-\frac{3}{4z}\right)dz+\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{3}{4z}dz\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{R\to\infty}\frac{3\pi}{4}i$$

- La integral sobre $[-R,-\varepsilon]+[\varepsilon,R]$ proporciona la integral que interesa calcular, pues

$$\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz + \int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

- Para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ se tiene

$$|z^3 f(z)| = \left|\frac{3e^{iz}-e^{3iz}-2}{4}\right| \le \frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

luego

$$|f(z)| \le \frac{3}{2|z^3|}$$

Si $z\in \operatorname{sop}(\sigma_R)$, entonces $|z|=R$ y en consecuencia

$$|f(z)| \le \frac{3}{2R^3}$$

Por tanto,

$$\left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \le \max_{z \operatorname{sop}(\sigma_R)} |f(z)| \operatorname{long}(\sigma_R) \le \frac{3\pi R}{2R^3} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty} 0$$

Todo lo anterior nos dice que al tomar límites cuando $R\to\infty$ y $\varepsilon\to 0^+$ en

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz - \int_{\sigma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$$

se obtiene

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \frac{3\pi}{4} i = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(f(x))\,dx + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{x}\,dx\right) i - \frac{3\pi}{4} i,$$

luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\,dx = \frac{3\pi}{4}$$

La conclusión es que

$$\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 dx = \frac{3\pi}{8}$$

(h) Consideremos la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1-z^2} = \frac{e^{iz}}{(1-z)(1+z)},$$

holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$. Dado $R_0>1$ y dado $\varepsilon>0$ con $R>1+\varepsilon$, se toma el ciclo

$$\gamma_R = [-R,-1-\varepsilon] - \sigma_\varepsilon^1 + [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] - \sigma_\varepsilon^2 + [1+\varepsilon, R] + \sigma_R$$

Lo que queda de ejercicio es razonar como en los apartados anteriores y hacer infinitas cuentas.

(i) Considérese la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2+z^3}$$

Como $z^4-1=(z-1)(1+z+z^2+z^3)$ y las raíces de z^4-1 son 1, -1, i y $-i$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-i)(z+i)},$$

y f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-1,i,-i\}$. Fijemos $R_0>1$. Si $R>R_0$ y $\varepsilon>0$ son tales que $R>1+\varepsilon$, el ciclo a considerar ahora es

$$\gamma_R = [-R,-1-\varepsilon] - \sigma_\varepsilon + [-1+\varepsilon, R] + \sigma_R,$$

Se tiene entonces

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,-1-\varepsilon]} f(z)\,dz - \int_{\sigma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{[-1+\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$$

A calcular integrales:

- Como γ_R es un ciclo en $\mathbb{C}\setminus\{-1,i,-i\}$ homólogo a cero módulo $\mathbb{C}$ y
$$\mathrm{n}(\gamma_R,-1)=0, \qquad \mathrm{n}(\gamma_R,i)=1, \qquad \mathrm{n}(\gamma_R,-i)=0,$$
entonces, por el teorema de los residuos,
$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i)$$
Se tiene que
$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+1)(z+i)}=\frac{1}{2i(1+i)}=\frac{1}{2i-2}=\frac{-2-2i}{8}=-\frac{1}{4}(1+i)\neq 0,$$
así que i es un polo simple y $\mathrm{Res}(f,i)=-\frac{1}{4}(1+i)$, luego
$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=-\frac{2\pi i}{4}(1+i)=-\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi}{2}\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty}-\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi}{2}$$

- La integral sobre $[-R,-1-\varepsilon]+[-1+\varepsilon,R]$ es la que interesa calcular tras tomar límites cuando $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0^+$:
$$\int_{[-R,-1-\varepsilon]} f(z)\,dz+\int_{[-1+\varepsilon,R]} f(z)\,dz\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

- Se tiene que
$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{1}{2}\neq 0,$$
así que -1 es un polo simple de f. En consecuencia, la función
$$f(z)-\frac{\mathrm{Res}(f,-1)}{z+1}=f(z)-\frac{1}{2(z+1)}$$
presenta una singularidad aislada evitable en -1, luego es acotada en un entorno perforado de -1, esto es, existen $C_0,\varepsilon_0>0$ tales que
$$\left|f(z)-\frac{1}{2(z+1)}\right|\leq C_0$$
para todo $z\in\Delta(-1,\varepsilon_0)\setminus\{-1\}$. Por tanto, si $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,
$$\left|\int_{\sigma_\varepsilon}\left(f(z)-\frac{1}{2(z+1)}\right)dz\right|\leq \max_{z\in\mathrm{sop}(\sigma_\varepsilon)}\left|f(z)-\frac{1}{2(z+1)}\right|\mathrm{long}(\sigma_\varepsilon)\leq C_0\varepsilon\pi\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty}0$$
Por otra parte, parametrizando σ_ε mediante $\varphi(\theta)=-1+\varepsilon e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$,
$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{1}{2(z+1)}\,dz=\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{-1+\varepsilon e^{i\theta}+1}\,d\theta=\frac{\pi i}{2}\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty}$$
Así,
$$\int_{\sigma_\varepsilon} f(z)\,dz=\int_{\sigma_\varepsilon}\left(f(z)-\frac{1}{2(z+1)}\right)dz+\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{1}{2(z+1)}\,dz\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty}\frac{\pi i}{2}$$

- Como
$$\lim_{z\to\infty} z^2 f(z)=0,$$
entonces $z^2 f(z)$ es acotada en $\{z\in\mathbb{C}\colon |z|>R_0\}$, esto es, existe $C>0$ tal que
$$|f(z)|\leq\frac{C}{|z^2|}$$
para todo $z\in\mathbb{C}$ con $|z|>R_0$. En particular, si $z\in\mathrm{sop}(\sigma_R)$,
$$|f(z)|\leq\frac{C}{|z^2|}=\frac{C}{R^2}$$
Por tanto,
$$\left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right|\leq\max_{z\in\mathrm{sop}(\sigma_R)}|f(z)|\,\mathrm{long}(\sigma_R)\leq\frac{C}{R^2}\pi R\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty}0$$

De todo esto se deduce que al tomar límites cuando $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0^+$ en la igualdad

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,-1-\varepsilon]} f(z)\,dz - \int_{\sigma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{[-1+\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz,$$

se llega a

$$-\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x+x^2+x^3}\,dx - \frac{\pi i}{2}$$

Resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x+x^2+x^3}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \square$$