Segunda parte

1. Sea $f\colon \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(|x|^\alpha y)}{x^4+y^4} & \text{si } x \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = (0,0) \end{cases}$$

Vamos a demostrar primero la desigualdad $|\arctan(x)| \leq |x| \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Para cualquier $x > 0$ aplicamos el teorema del valor medio a la función $g\colon [0,x] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \arctan(x)$ y tenemos que existe $c \in (0,x)$ tal que

$$\arctan(x) = \frac{x}{1+c^2} \leq x$$

luego $|\arctan(x)| \leq |x|$. Para $x < 0$, tenemos que

$$\arctan(-x) = -\arctan(x) \leq -x \implies |\arctan(x)| \leq |x|$$

El caso $x = 0$ es trivial. Veamos que f **es continua en** $(0,0)$ **si y solo si** $\alpha > 3$.

Si $\alpha > 3$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\frac{\arctan(|x|^\alpha y)}{x^4+y^4}\right| &\leq \frac{|x|^\alpha |y|}{x^4+y^4} = \frac{|x|^3|y|}{x^4+y^4}|x|^{\alpha-3} = \frac{|x^4|^{3/4}\cdot|y^4|^{1/4}}{x^4+y^4}|x|^{\alpha-3} \\ &\leq \frac{(x^4+y^4)^{3/4}\cdot(x^4+y^4)^{1/4}}{x^4+y^4}|x|^{\alpha-3} = |x|^{\alpha-3} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 \end{aligned}$$

ya que $\alpha - 3 > 0$. Por la regla del sándwich,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

luego f es continua en 0.

Si $\alpha < 3$, entonces tomamos la sucesión $\{(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})\}$ (que es adecuada) y tenemos que

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\arctan(\frac{1}{k^{\alpha+1}})}{\frac{2}{k^4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\arctan(\frac{1}{k^{\alpha+1}})}{\frac{1}{k^{\alpha+1}}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{k^{3-\alpha}}} \longrightarrow \infty$$

ya que

- $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\arctan(t)}{t} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t^2}}{1} = 1$ y por tanto, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{\arctan(\frac{1}{k^{\alpha+1}})}{\frac{1}{k^{\alpha+1}}} = 1$.
- $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^{3-\alpha} = \infty$ por ser $3 - \alpha > 0$.

Si fuese $\alpha = 3$, entonces el límite de la sucesión $\{f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})\}$ es $\frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$, así que f tampoco es continua en $(0,0)$.

Estudiemos la existencia de las derivadas parciales en $(0,0)$:

- $D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$
- $D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$

Por tanto, la única candidata a ser la diferencial de f en $(0,0)$ es la aplicación lineal nula. Tenemos que f es diferenciable en $(0,0)$ si y solo si el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(|x|^\alpha y)}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+y^4)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$$

existe y vale 0. Veamos que f **es diferenciable en** $(0,0)$ **si y solo si** $\alpha > 4$.

Si $\alpha > 4$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{\arctan(|x|^\alpha y)}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+y^4)}\right| &\le \frac{|x|^\alpha|y|}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+y^4)} = \frac{x^4|y|}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+y^4)}|x|^{\alpha-4} \\ &\le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^4+y^4}{x^4+y^4} \cdot |x|^{\alpha-4} = |x|^{\alpha-4} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0\end{aligned}$$

ya que $\alpha - 4 > 0$. Por la regla del sándwich,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$$

luego f es diferenciable en $(0,0)$.

Si $\alpha < 4$, entonces tomamos la sucesión $\{(\frac{1}{k},\frac{1}{k})\}$ (que es adecuada) y tenemos que

$$h\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) = \frac{\arctan(\frac{1}{k^{\alpha+1}})}{\frac{\sqrt{2}}{k}\cdot\frac{2}{k^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\arctan(\frac{1}{k^{\alpha+1}})}{\frac{1}{k^{\alpha+1}}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k^{4-\alpha}}} \longrightarrow \infty$$

ya que

- $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\arctan(\frac{1}{k^{\alpha+1}})}{\frac{1}{k^{\alpha+1}}} = 1$ por el mismo motivo de antes.
- $\lim_{k\to\infty} k^{4-\alpha} = \infty$ por ser $4-\alpha > 0$.

Si fuese $\alpha = 4$, entonces el límite de la sucesión $\{h(\frac{1}{k},\frac{1}{k})\}$ es $\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$, así que f tampoco es diferenciable en $(0,0)$.

2.

(a) Llamamos $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$. Veamos que el límite no existe. Tomando las sucesiones $\{(\frac{1}{k},\frac{1}{k})\}, \{(0,\frac{1}{k})\}$ (que son adecuadas), tenemos que

- $f\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{k^2})}{\frac{2}{k^2}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{k^2})}{\frac{1}{k^2}} \longrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

- $f\left(0, \dfrac{1}{k}\right) = 0 \longrightarrow 0$

Como $0 \neq \frac{1}{2}$, el límite no existe.

(b) Llamamos $f(x,y) = \frac{x^3}{x-y}$. Veamos que el límite no existe. Tomando las sucesiones $\{(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} - \frac{1}{k^3})\}, \{(0, \frac{1}{k})\}$ (que son adecuadas), tenemos que

- $f\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^3}\right) = \dfrac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^3}} = 1 \longrightarrow 1$
- $f\left(0, \dfrac{1}{k}\right) = 0 \longrightarrow 0$

Como $0 \neq 1$, el límite no existe.

3.

(a) Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{||(f(x)-f(a))Df(a)(x-a)||}{||x-a||} &= \frac{||(f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)+Df(a)(x-a))Df(a)(x-a)||}{||x-a||} \\ &\leq ||Df(a)(x-a)|| \cdot \frac{||f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)||}{||x-a||} + \frac{||Df(a)(x-a)^2||}{||x-a||}\end{aligned}$$

El primer sumando tiene límite 0 cuando $x \to a$ por ser f diferenciable en a. En cuanto al segundo sumando, usando que $Df(a)$ es lineal y lipschitziana, podemos escribir

$$\frac{||Df(a)(x-a)^2||}{||x-a||} = ||Df(a)(x-a)|| \cdot \frac{||Df(a)(x)-Df(a)(a)||}{||x-a||} \leq ||Df(a)(x-a)|| \cdot \frac{C||x-a||}{||x-a||} = C||Df(a)(x-a)||$$

y como $Df(a)$ es continua, entonces el límite del término anterior cuando $x \to a$ es también 0. Esto demuestra que

$$\lim_{x \to a} \frac{||f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)||}{||x-a||} = 0$$

y por tanto f es diferenciable en a.

(b) Por ser f continua en a, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A \cap B(a,\delta)$ se tiene que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Distinguimos tres casos:

- Si $f(a) = 0$, entonces podemos tomar cualquier $M > 0$ y, por lo anterior, existe $r > 0$ tal que para todo $x \in A \cap B(a,r)$ se tiene que $|f(x)| < M$.
- Si $f(a) > 0$, tomamos $\varepsilon = f(a)$ y existe $r > 0$ tal que para todo $x \in A \cap B(a,r)$ se tiene que

  $$|f(x) - f(a)| < f(a) \iff -f(a) < f(x) - f(a) < f(a) \iff 0 < f(x) < 2f(a)$$

  Por tanto, tomando $M = 2f(a) > 0$, para todo $x \in A \cap B(a,r)$ se cumple que

  $$f(x) = |f(x)| < M$$

- Si $f(a) > 0$, tomamos $\varepsilon = -f(a)$ y existe $r > 0$ tal que para todo $x \in A \cap B(a,r)$ se tiene que

  $$|f(x) - f(a)| < -f(a) \iff f(a) < f(x) - f(a) < -f(a) \iff -2f(a) > -f(x) > 0$$

  Por tanto, tomando $M = -2f(a) > 0$, para todo $x \in A \cap B(a,r)$ se cumple que

  $$-f(x) = |f(x)| < M$$

Por tanto, f es acotada en un entorno de a.

(c) Tenemos que $f = F \circ g$, donde $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(s) = \int_0^s e^{-t^2} dt$ es de C^2 y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = xy$ también es de C^2. Por tanto, f es de C^2 por ser composición de funciones de C^2. Como f es diferenciable en el abierto $\mathbb{R}^2$, los candidatos a extremos locales de f son los puntos críticos, que son las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} D_1 f(0,0) = 0 \\ D_2 f(0,0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ye^{-(xy)^2} = 0 \\ xe^{-(xy)^2} = 0 \end{cases}$$

Como $(0,0)$ es solución del sistema, podría ser extremo local. Intentamos aplicar el criterio de la matriz hessiana:

- $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2y^3xe^{-x^2y^2} & e^{-x^2y^2} - 2x^2y^2e^{-x^2y^2} \\ e^{-x^2y^2} - 2x^2y^2e^{-x^2y^2} & -2x^3ye^{-x^2y^2} \end{pmatrix}$

- $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $Hf(0,0)$ es no semidefinida, entonces $(0,0)$ es punto de silla, luego no es extremo local de f.

(d) Como $g = f \circ h$, donde f es de C^2 y $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x,y) = (xy^2, \arctan(x))$ también (pues sus componentes son de C^2), entonces g es de C^2 por ser composición de funciones de C^2. Por la regla de la cadena,

$$D_2 f(x,y) = 2xyD_1 f(xy^2, \arctan(x))$$

$$D_{12} f(x,y) = 2yD_1 f(xy^2, \arctan(x)) + 2yx\big[y^2 D_{11} f(xy^2, \arctan(x)) + \frac{1}{1+x^2} D_{21} f(xy^2, \arctan(x))\big]$$

4. Como f es diferenciable en el abierto $\mathbb{R}^2$, entonces los candidatos a extremos locales son los puntos críticos. Los puntos críticos son las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} D_1 f(0,0) = 0 \\ D_2 f(0,0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y^2x^3 - 2y^4x = 0 \\ 2x^4y - 4x^2y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy^2(4x^2 - 2y^2) = 0 \\ x^2y(2x^2 - 4y^2) = 0 \end{cases}$$

Cualquier punto de la forma $(0,b)$ ó $(a,0)$ es solución del sistema. Si $x, y \neq 0$, entonces tenemos que resolver

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $y^2 = 2x^2$, y sustituyendo en la segunda,

$$x^2 - 2(2x^2) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

Por tanto, $y = 0$ (ya habíamos obtenido esta solución antes). Ahora tratamos de clasificar los puntos críticos mediante el criterio de la matriz hessiana:

- $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12y^2x^2 - 2y^4 & 8yx^3 - 8y^3x \\ 8yx^3 - 8y^3x & 2x^4 - 12x^2y^2 \end{pmatrix}$
- $Hf(a,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a^4 \end{pmatrix}$
- $Hf(0,b) = \begin{pmatrix} -2b^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\det(Hf(a,0)) = \det(Hf(0,b)) = 0$, no podemos utilizar el criterio de la matrix hessiana. Hay que estudiar el signo de $f(x,y) - f(a,0) = f(x,y)$ y de $f(x,y) - f(0,b) = f(x,y)$ en los alrededores de cada punto crítico. Tenemos que

- $f(x,y) > 0 \iff x^2y^2(x^2 - y^2) > 0 \iff x^2 - y^2 > 0 \iff |x| > |y|$
- $f(x,y) < 0 \iff x^2y^2(x^2 - y^2) < 0 \iff x^2 - y^2 < 0 \iff |x| < |y|$

En cualquier punto de la forma $(a,0)$ con $a \neq 0$ existe una bola abierta centrada en $(a,0)$ donde f no toma valores negativos, luego $(a,0)$ es mínimo local de f $\forall\ a \neq 0$ (ya que $f(a,0) = 0$). En cualquier punto de la forma $(0,b)$ con $b \neq 0$ existe una bola abierta centrada en $(b,0)$ donde f no toma valores positivos, luego $(0,b)$ es máximo local de f $\forall\ b \neq 0$ (ya que $f(0,b) = 0$). Ahora bien, en cualquier bola centrada en $(0,0)$ existen puntos donde f toma valores positivos y negativos, luego $(0,0)$ no es extremo local (representar gráficamente).