1. Sea $x \in [0,1]$ y sea $\beta \in \mathbb{N}, \beta > 1$. Dividimos el intervalo $[0,1]$ en intervalos de longitud $\frac{1}{\beta}$:

$$[0,1] = [0, \frac{1}{\beta}] \cup [\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}] \cup \ldots \cup [\frac{\beta-1}{\beta}, 1]$$

Tomamos $b_1 \in \mathbb{N}, 1 \leq b_1 < \beta$ tal que

$$\frac{b_1}{\beta} \leq x < \frac{b_1}{\beta} + \frac{1}{\beta}$$

Ahora dividimos el intervalo $[\frac{b_1}{\beta}, \frac{b_1}{\beta} + 1]$ en intervalos de longitud $\frac{1}{\beta^2}$, y tomamos $b_2 \in \mathbb{N}$ con $1 \leq b_2 < \beta$ y tal que

$$\frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} \leq x < \frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}$$

Repitiendo este proceso para cada $n \in \mathbb{N}$, encontramos $b_n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq \beta_n < \beta$ tal que

$$\frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \ldots + \frac{b_n}{\beta^n} \leq x < \frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \ldots + \frac{b_n}{\beta^n} + \frac{1}{\beta^n}$$

La sucesión $\{S_n\} = \{\frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \ldots + \frac{b_n}{\beta^n}$ verifica

$$0 \leq x - S_n < \frac{1}{\beta^n} \ \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Y por la regla del sándwich, tenemos que $\lim \{S_n\} = x$. Por tanto, podemos escribir

$$x = \beta^{-1} b_1 + \beta^{-2} b_2 + \ldots + \beta^{-n} b_n + \ldots = (0' b_1 b_2 \ldots b_n \ldots)_\beta$$

que es la expresión de x en base β.

Por otra parte, el truncamiento de $x \in [0,1]$ a n dígitos fraccionarios en base β es precisamente $tr_n(x) = S_n = \frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \ldots + \frac{b_n}{\beta^n}$, así que, como consecuencia de (1), podemos dar la cota de error

$$|x - tr_n(x)| \leq \beta^{-n}$$

2. En primer lugar, vemos que la sucesión $\{x_{n+1}\} = \{g(x_n)\}$ está bien definida para cualquier elección de semilla, ya que, por hipótesis, $g(x) \in J\ \forall\ x \in J$. Sea l el único punto fijo de g en $J = [a,b]$ y sea $C \in [0,1)$ la constante de contractividad de g. Veamos, por inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|x_n - l| \leq C^n (b-a)$$

- Para $n = 1$, usando la contractividad de g, se tiene que

$$|x_1 - l| = |g(x_0) - g(l)| \leq C|x_0 - l| \leq C(b-a)$$

- Supongamos que para cierto $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|x_n - l| \leq C^n(b-a)$ y veamos que $|x_{n+1} - l| \leq C^{n+1}(b-a)$. Como g es contractiva,

$$|x_{n+1} - l| = |g(x_n) - g(l)| \leq C|x_n - l| \overset{\text{HI}}{\leq} C \cdot C^n(b-a) = C^{n+1}(b-a)$$

  Por tanto, como $0 \leq C < 1$, se tiene que $\lim \{C^n\} = 0$, y por la regla del sándwich, $\lim \{|x_{n+1} - l|\} = 0$, o lo que es lo mismo, $\lim \{g(x_n)\} = l$.

3. Tenemos que

- $1 = 0 \cdot 7 + 1 \implies c_0 = 0, r_0 = 1$
- $2 \cdot 1 = 0 \cdot 7 + 2 \implies c_1 = 0, r_1 = 2$
- $2 \cdot 2 = 0 \cdot 7 + 4 \implies c_2 = 0, r_2 = 4$
- $2 \cdot 4 = 1 \cdot 7 + 1 \implies c_3 = 1, r_3 = 1$
- $2 \cdot 1 = 0 \cdot 7 + 2 \implies c_4 = 0, r_4 = 2$

A partir de aquí, vamos a empezar a obtener dígitos repetidos. Por tanto,

$$\frac{1}{7} = (0'\overline{001})_2$$

así que el truncamiento a 6 dígitos sería $tr_6(\frac{1}{7}) = (0'001001)_2$. La expresión en base 10 sería

$$(0'001001)_2 = 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = 0'125 + 0.125^2 = 0.125 + 0.015625 = 0'140625$$

mientras que el error cometido es

$$|\frac{1}{7} - \frac{9}{64}| = |\frac{64-63}{448}| = \frac{1}{448} \leq \frac{1}{64} = 2^{-6}$$

Por tanto, la aproximación satisface la cota del Ejercicio 1.

4.

(a) Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x + \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 1$, luego

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por el teorema de Rolle, la ecuación tiene, a lo sumo, 3 soluciones: una en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, otra en $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ y otra en $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$. Además,

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$
- $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Por el teorema de Bolzano, la ecuación tiene una solución l_1 en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, otra solución l_2 en $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ y otra solución l_3 en $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$. Por tanto, la ecuación tiene exactamente 3 soluciones.

(b) La función de iteración del método es $g(x) = x^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$, que verifica

$$|g'(x)| = |3x^2| = 3x^2$$

Por tanto,

- $|g'(x)| = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
- $|g'(x)| > 1 \iff x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$
- $|g'(x)| < 1 \iff x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

Como hemos visto anteriormente que $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ no son soluciones de la ecuación, entonces podemos asegurar que $|g'(l_1)| > 1, |g'(l_2)| < 1$ y $|g'(l_3)| > 1$. Esto significa que el método no converge localmente (y por tanto no converge) a l_1 ni a l_3, mientras que converge localmente a l_2.

(c) Tomamos el intervalo $J = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \subset (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, que verifica

- $l_2 \in J$, pues $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} > 0$ y $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} < 0$.
- Las ecuaciones $f(x) = 0$ y $g(x) = x$ son equivalentes en J, pues

$$f(x) = 0 \iff x^3 - x + \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0 \iff x^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} = x \iff g(x) = x$$

- $g(J) \subset J$, pues g es creciente en J (ya que $g'(x) = 3x^2 \geq 0 \ \forall \ x \in J$) y por tanto se tiene que

$$g([-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]) = [g(-\frac{1}{3}), g(\frac{1}{3})] = [-\frac{1}{9} + \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{9} + \frac{1}{3\sqrt{3}}]$$

  que está contenido en J porque

  - $-\dfrac{1}{3} < 0 < -\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} < \dfrac{1}{3\sqrt{3}} < \dfrac{1}{3}$
  - $-\dfrac{1}{3} < -\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} < \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}) < \dfrac{1}{3}$

- g es contractiva en J, pues $g''(x) = 6x = 0 \iff x = 0$, y como

  - $g'(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$
  - $g'(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$
  - $g'(0) = 0$

  entonces $\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{3}$ son máximos absoutos de g' (y por tanto de $|g'|$). Esto significa que

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{3} = C < 1 \ \forall \ x \in J$$

Por tanto, el método converge hacia la única raíz de f en J.

(d) La menor raíz positiva es l_2, ya que

- $f(\frac{1}{6}) = \frac{1}{216} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3\sqrt{3}} > 0'003 - 0'17 + 0'19 > 0$
- $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} < 0'12 - 0.3 + 0.2 < 0$

Por tanto, $l_2 \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$. Tomando la semilla $x_0 = \frac{1}{6}$, se tiene que

- $f(\frac{1}{6})f(\frac{1}{3}) < 0$
- $f'(x) = 3x^2 - 1 \neq 0 \; \forall \; x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$ ya que

$$\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{3} \implies \frac{\sqrt{3}}{6} \leq \sqrt{3}x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \frac{1}{12} \leq 3x^2 \leq \frac{1}{3} < 1 \implies f'(x) = 3x^2 - 1 < 0$$

- $f''(x) = 6x \neq 0 \; \forall \; x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$
- $f''(x_0)f(x_0) = 1 \cdot f(\frac{1}{6}) \geq 0$

Con esta semilla, tenemos asegurada la convergencia del método de Newton hacia la raíz l_2.

5.

(a) Las diferencias divididas son

- $f[x_0] = 1; f[x_1] = -1; f[x_2] = 1; f[x_3] = -1; f[x_4] = 1$
- $f[x_0, x_1] = -2; f[x_1, x_2] = 2; f[x_2, x_3] = -2; f[x_3, x_4] = 2$
- $f[x_0, x_1, x_2] = 2; f[x_1, x_2, x_3] = -2; f[x_2, x_3, x_4] = 2$
- $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -\frac{4}{3}; f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{4}{3}$
- $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{2}{3}$

Por tanto, $p(x) = 1 - 2(x+2) + 2(x+1)(x+2) - \frac{4}{3}x(x+1)(x+2) + \frac{2}{3}x(x-1)(x+1)(x+2)$.
Se verifica la cota uniforme

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_5}{5!}|x(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)| \leq \frac{M_5}{5!}(2-(-2))^5 = \frac{\pi^5 \cdot 4^5}{120}$$

ya que $M_5 = \max\limits_{x \in [-2,2]} |f^{(5)}(x)| = \max\limits_{x \in [-2,2]} |-\pi^5 \sin(x)| = \pi^5$

(b) Vamos a calcular el polinomio p_1 de grado menor o igual que 2 que interpola los puntos $(-2, f(-2)), (-1, f(-1)), (0, f(0))$ y el polinomio p_2 de grado menor o igual que 2 que interpola los puntos $(0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$.

- Para calcular p_1, hallamos las diferencias divididas:
  - $f[x_0] = 1; f[x_1] = -1; f[x_2] = 1$
  - $f[x_0, x_1] = -2; f[x_1, x_2] = 2$
  - $f[x_0, x_1, x_2] = 2$

  Por tanto, $p_1(x) = 1 - 2(x+2) + 2(x+1)(x+2)$
- Para calcular p_2, hallamos las diferencias divididas:
  - $f[x_0] = 1; f[x_1] = -1; f[x_2] = 1$

- $f[x_0, x_1] = -2; f[x_1, x_2] = 2$
- $f[x_0, x_1, x_2] = 2$

Por tanto, $p_2(x) = 1 - 2x + 2x(x-1)$

El polinomio $\tilde{p}$ es

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} 1 - 2(x+2) + 2(x+1)(x+2) & \text{si } x \in [-2, 0] \\ 1 - 2x + 2x(x-1) & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases}$$

Para hallar una cota uniforme del error, usamos la cota óptima al interpolar los extremos de un intervalo y su punto medio en los polinomios p_1 y p_2. Si $x \in [-2, 0]$,

$$|f(x) - \tilde{p}(x)| = |f(x) - p_1(x)| \leq \frac{M_3}{72\sqrt{3}} 2^3 = \frac{\pi^3 \cdot 8}{72\sqrt{3}} = \frac{\pi^3}{9\sqrt{3}}$$

donde $M_3 = \max\limits_{x \in [-2,0]} |f'''(x)| = \pi^3$. Si $x \in [0, 2]$, se obtiene la misma cota de error. Por tanto, dicha cota es uniforme en el intervalo $[-2, 2]$.

(c) El valor exacto de la integral es

$$I(f) = \int_{-2}^{2} \cos(\pi x) dx = \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right]_{-2}^{2} = 0$$

Tenemos que

$$I(\tilde{p}) = \int_{-2}^{2} \tilde{p}(x) dx = \int_{-2}^{0} p_1(x) dx + \int_{0}^{2} p_2(x) dx = \int_{-2}^{0} (2x^2 + 4x + 1) dx + \int_{0}^{2} (2x^2 - 4x + 1) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^3 + 2x^2 + x \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{2}{3} x^3 - 2x^2 + x \right]_{0}^{2} = \frac{16}{3} - 8 + 2 + \frac{16}{3} - 8 + 2 = -\frac{4}{3}$$

Por tanto, el error es

$$|I(f) - I(\tilde{p})| = \frac{4}{3}$$

Por otra parte,

$$I^S(f) = \frac{4}{6}(f(-2) + 4f(0) + f(2)) = \frac{2}{3}(1 + 4 + 2) = \frac{14}{3}$$

En este caso, el error que se comete es

$$|I(f) - I^S(f)| = \frac{14}{3}$$

Vemos que la primera aproximación es mejor que la segunda.

(d) Si $N \in \mathbb{N}$ es par, entonces...

- $f[-N] = 1$
- $f[-N, -N+1] = -2$
- $f[-N, -N+1, -N+2] = \frac{4}{2} = 2$
- $f[-N, -N+1, -N+2, -N+3] = -\frac{4}{3}$
- $f[-N, -N+1, -N+2, -N+3, -N+4] = \frac{\frac{8}{3}}{4} = \frac{8}{12}$
- $f[-N, -N+1, -N+2, -N+3, -N+4, -N+5] = \frac{-\frac{16}{12}}{5} = -\frac{16}{60}$
- $f[-N, -N+1, -N+2, -N+3, -N+4, -N+5, -N+6] = \frac{\frac{32}{60}}{6} = \frac{32}{360}$

En general, $f[-N, -N+1, \ldots, -N+i] = (-1)^i \frac{2^{i-1}}{\frac{i!}{2}} = (-1)^i \frac{2^i}{i!}$ $\forall\ i = 0, \ldots, 2N$, luego

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \frac{2^i}{i!} (x+N)(x+N-1)\ldots(x+N-i+1)$$

Si N es impar, basta cambiar $(-1)^i$ por $(-1)^{i+1}$.