Relación 1

Ejercicio 1. *Encontrar la forma cartesiana (rectangular) de los siguientes números complejos:*

(a) $\dfrac{1}{6+2i}$

(b) $\dfrac{(2+i)(3+2i)}{1-i}$

(c) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$

(d) i^3

(e) i^{27}

Solución.

(a) Se tiene que
$$\frac{1}{6+2i}=\frac{6-2i}{(6+2i)(6-2i)}=\frac{6-2i}{40}=\frac{3}{20}-i\frac{1}{20}$$

(b) Se tiene que
$$\frac{(2+i)(3+2i)}{1-i}=\frac{(6+4i+3i-2)(1+i)}{2}=\frac{(4+7i)(1+i)}{2}=\frac{4+4i+7i-7}{2}=-\frac{3}{2}+i\frac{11}{2}$$

(c) Se tiene que
$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^4\overset{(*)}{=}\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

donde en $(*)$ se ha utilizado la fórmula de De Moivre.

(d) Se tiene que
$$i^3=-i$$

(e) Se tiene que
$$i^{27}=(i^4)^6i^3=-i$$

Ejercicio 2. *Encontrar las dos raíces cuadradas de $-8+6i$ y expresarlas en forma cartesiana.*

Solución. Sea $z=-8+6i$. Buscamos $w=x+iy\in\mathbb{C}$ tal que $(x+iy)^2=z$, o sea, $x^2-y^2+i2xy=z$. Igualando partes reales e imaginarias, debe cumplirse

$$\begin{cases}x^2-y^2=-8\\ 2xy=\ \ 6\end{cases}\overset{(*)}{\iff}\begin{cases}\dfrac{9}{y^2}-y^2=-8\\ x=\dfrac{3}{y}\end{cases}\iff\begin{cases}y^4-8y^2-9=0\\ x=\dfrac{3}{y}\end{cases}\iff\begin{cases}y\in\{-3,3\}\\ x=\dfrac{3}{y}\end{cases}$$

Por tanto, las dos raíces cuadradas de z son

$$w_1=-1-3i \qquad \text{y} \qquad w_2=1+3i$$

En $(*)$ se ha supuesto que $y\neq 0$, pues si fuese $y=0$, en la primera ecuación se tendría $x^2=-8$, que es imposible porque $x\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Resolver la ecuación $\overline{z} = z^{n-1}$.*

Solución. Se observa que $z = 0$ es solución de la ecuación. Si $z \neq 0$, al multiplicar por z se obtiene $|z|^2 = z^n$, y tomando módulos, $|z|^2 = |z|^n$, de donde $|z|^{n-2} = 1$, y como $|z| \in \mathbb{R}$, ha de ser $|z| = 1$ (siempre que $n > 2$). Por tanto, la ecuación del enunciado es equivalente (salvo el cero) a

$$z^n = 1,$$

concluyéndose que, si $n > 2$, las soluciones de $\overline{z} = z^{n-1}$ son el cero y las raíces n-ésimas de la unidad, mientras que si $n = 2$, $\overline{z} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. *Probar que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces*

(a) $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$

(b) $|1 - z\overline{w}|^2 - |z - w|^2 = \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |w|^2\right)$

(c) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$

Solución.

(a) Usando que $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|z - w|^2 &= (z - w)\overline{(z - w)} \\
&= (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) \\
&= |z|^2 + |w|^2 - z\overline{w} - w\overline{z} \\
&= |z|^2 + |w|^2 - (z\overline{w} + w\overline{z}) \\
&= |z|^2 + |w|^2 - (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) \\
&= |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w})
\end{aligned}$$

(b) Por el apartado anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
|1 - z\overline{w}|^2 - |z - w|^2 &= 1 + |z\overline{w}|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) - |z|^2 - |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\
&= 1 + |z\overline{w}|^2 - |z|^2 - |w|^2 \\
&= \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |w|^2\right)
\end{aligned}$$

(c) También por el apartado primero, se tiene

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 + |z - w|^2 &= |z|^2 + |-w|^2 - 2\operatorname{Re}\left(z\overline{(-w)}\right) + |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\
&= 2|z|^2 + 2|w|^2 \\
&= 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5. *Probar que* $\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}^4(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Sea $x \in \mathbb{R}$. De las fórmulas del seno de la suma y el coseno de la suma se deduce que

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \\
\operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= \cos^2(2x) - \operatorname{sen}^2(2x) \\
&= (\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x))^2 - (2\operatorname{sen}(x)\cos(x))^2 \\
&= \cos^4(x) + \operatorname{sen}^4(x) - 2\cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x) - 4\cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x) \\
&= \cos^4(x) + \operatorname{sen}^4(x) - 6\cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x)
\end{aligned}$$

Ejercicio 6. *Sea $\omega \neq 1$ una raíz n-ésima de la unidad. Probar que*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

Solución. Tenemos que ω es una raíz del polinomio $X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Pero

$$(X^n - 1) = (X-1)(X^{n-1} + \ldots + X + 1),$$

y como ω no es raíz de $X-1$, entonces es raíz de $X^{n-1} + \ldots + X + 1$. En otras palabras,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

Otra forma. Usando la fórmula para las sumas parciales de una serie geométrica, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0,$$

ya que $\omega^n = 1$.

Otra forma. Las raíces de $X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$ son ω^k para $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, y la suma de las raíces de un polinomio de grado n con n raíces distintas es el opuesto del coeficiente del término de grado $n-1$. En consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0,$$

ya que el coeficiente del término de grado $n-1$ en $X^n - 1$ es nulo.

Ejercicio 7. *Para $\theta \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$, probar que*

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

Encontrar una fórmula similar para $1 + \operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(2\theta) + \ldots + \operatorname{sen}(n\theta)$.

Solución. Para todo $k \leq n$, $\cos(k\theta) = \operatorname{Re}\left(e^{i\theta k}\right)$, luego

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}\right)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}(1-e^{i\theta(n+1)})}{e^{-i\frac{\theta}{2}}(1-e^{i\theta})} \\
&= \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\theta(n+\frac{1}{2})}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - i\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{-2i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - i\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
1+\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\ldots+\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}\right)\\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\theta}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)
\end{aligned}$$

Una fórmula similar para el seno se obtiene observando la parte imaginaria en lugar de la real:

$$1+\operatorname{sen}(\theta)+\operatorname{sen}(2\theta)+\ldots+\operatorname{sen}(n\theta) = \left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

Ejercicio 8. *Probar que si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ se ven como vectores de $\mathbb{R}^2$, su producto escalar real es entonces $\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$. Concluir que son ortogonales si y solo si $z_1\overline{z_2}$ es puramente imaginario.*

Solución. Llamemos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Viéndolos como vectores de $\mathbb{R}^2$, su producto escalar sería

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

Por otro lado,

$$\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = \operatorname{Re}(x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$$

Lo que queda de ejercicio es trivial.

Ejercicio 9. *Para $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, probar que*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) > 0 \iff |z| < 1$$

Solución. Se tiene que

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)\overline{(1-z)}}{|1-z|^2} = \frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} = \frac{1-\overline{z}+z-z\overline{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2+2i\operatorname{Im}(z)}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + i\frac{2\operatorname{Im}(z)}{|1-z|^2}$$

Por tanto,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \iff 1-|z|^2 > 0 \iff |z|^2 < 1 \iff |z| < 1$$

Ejercicio 10. *Para $z, w \in \mathbb{D}$, probar que*

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| < 1$$

Solución. Sean $z, w \in \mathbb{D}$. Entonces $1-|z|^2 > 0$ y $1-|w|^2 > 0$, luego, por el Ejercicio 4,

$$|1-\overline{w}z|^2 - |z-w|^2 = \left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right) > 0,$$

es decir,

$$|z-w|^2 < |1-\overline{w}z|^2,$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{|z-w|^2}{|1-\overline{w}z|^2} = \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|^2 < 1,$$

concluyéndose que

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| < 1$$

Ejercicio 11. *Describir geométricamente los siguientes conjuntos:*

(a) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| = |z+1|\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-2| > |z-3|\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\left(\frac{z}{1+i}\right) = 0\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| + |z+1| = 4\}$

Solución.

(a) Es el conjunto de puntos del plano que equidistan de 1 y -1, es decir, el eje imaginario.

(b) Es el conjunto de puntos del plano que se encuentran más lejos de 2 que de 3, es decir, el semiplano $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) > \frac{5}{2}\}$.

(c) Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$\frac{z}{1+i} = \frac{1}{2}(x+iy)(1-i) = \frac{x+y}{2} + i\frac{y-x}{2}$$

Por tanto, el conjunto a describir es la recta $\{x + iy \in \mathbb{C} \colon y = -x\}$.

(d) Se trata de una elipse de focos 1 y -1 y eje mayor 4.

Ejercicio 12. *Se ha visto que la ecuación general de una circunferencia es de la forma*

$$|z|^2 + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0,$$

con $\beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $|\beta|^2 > \gamma$. Probar que esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\left(z + \overline{\beta}\right)\left(\overline{z} + \beta\right) = |\beta|^2 - \gamma$$

Usar esto para determinar el centro y radio de dicha circunferencia en términos de β y γ.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}
|z|^2 + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0 &\iff z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \beta\overline{\beta} - \beta\overline{\beta} + \gamma = 0 \\
&\iff z(\overline{z} + \beta) + \overline{\beta}(\overline{z} + \beta) - \beta\overline{\beta} + \gamma = 0 \\
&\iff (z + \overline{\beta})(\overline{z} + \beta) = |\beta|^2 - \gamma
\end{aligned}$$

Si z_0 es el centro de la circunferencia y r el radio, como $\beta = -\overline{z_0}$ y $\gamma = |z_0|^2 - r^2$, entonces $z_0 = -\overline{\beta}$ y $r = \sqrt{|\beta|^2 - \gamma}$ son, respectivamente, el centro y el radio de la circunferencia.

Ejercicio 13. *Encontrar una condición para que dos números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ se correspondan con puntos diametralmente opuestos de la esfera.*

Solución. Para que los puntos z y w se correspondan con puntos diametralmente opuestos de la esfera, debe verificarse

$$\rho(z,w) = 2 \iff \frac{2|z-w|}{\sqrt{|z|^2+1}\sqrt{|w|^2+1}} = 2 \iff |z-w| = \sqrt{|z|^2+1}\sqrt{|w|^2+1}$$

Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned}
|z-w|^2 = \left(|z|^2+1\right)\left(|w|^2+1\right) &\iff |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z|^2|w|^2 + |z|^2 + |w|^2 + 1 \\
&\iff z\overline{z}w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z} + 1 = 0 \\
&\iff (1 + z\overline{w})(1 + w\overline{z}) = 0 \\
&\iff z\overline{w} = -1
\end{aligned}$$

Así, si $z, w \in \mathbb{C}$ se corresponden con puntos diametralmente opuestos de la esfera, entonces $z\overline{w} = -1$. El recíproco también es cierto, pues si $z\overline{w} = -1$, entonces

$$w = -\frac{1}{\overline{z}} = -\frac{z}{|z|^2}$$

En consecuencia, si escribimos $z = x + iy$, se tiene

$$\Pi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$$

Por otra parte,

$$\operatorname{Re}(w) = -\frac{x}{|z|^2} \qquad \operatorname{Im}(w) = -\frac{y}{|z|^2} \qquad |w| = \frac{1}{|z|}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\Pi^{-1}(w) &= \left(-\frac{2x}{|z|^2\left(\frac{1}{|z|^2}+1\right)}, -\frac{2y}{|z|^2\left(\frac{1}{|z|^2}+1\right)}, \frac{\frac{1}{|z|^2}-1}{\frac{1}{|z|^2}+1} \right) \\
&= \left(-\frac{2x}{|z|^2+1}, -\frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{\frac{1-|z|^2}{|z|^2}}{\frac{1+|z|^2}{|z|^2}} \right) \\
&= \left(-\frac{2x}{|z|^2+1}, -\frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right) \\
&= -\Pi^{-1}(z),
\end{aligned}$$

luego z y ω se corresponden con puntos diametralmente opuestos de la esfera.

Ejercicio 14. *Probar que la proyección estereográfica envía circunferencias en $\mathbb{S}^2$ en circunferencias o rectas de $\mathbb{C}$, y a la inversa, circunferencias o rectas de $\mathbb{C}$ se corresponden con circunferencias en $\mathbb{S}^2$.*

Solución. Sea C una circunferencia de $\mathbb{S}^2$. Entonces $C = P \cap \mathbb{S}^2$, donde P es un plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación

$$P \equiv Ax + By + Cz = D,$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ son tales que $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Si $p \in C$, entonces existe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tal que

$$p = \Pi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$$

Este punto debe verificar la ecuación del plano, luego

$$\begin{aligned}
A\left(\frac{2x}{|z|^2+1}\right) + B\left(\frac{2y}{|z|^2+1}\right) + C\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = D &\iff 2Ax + 2By + C|z|^2 - C = D|z|^2 + D \\
&\iff (C-D)|z|^2 + 2Ax + 2By - C - D = 0 \\
&\iff (C-D)|z|^2 + A(z+\overline{z}) + iB(\overline{z}-z) - C - D = 0 \\
&\iff (C-D)|z|^2 + (A-iB)z + (A+iB)\overline{z} - C - D = 0
\end{aligned}$$

Así, p verifica una ecuación del tipo

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0, \tag{$*$}$$

donde $\alpha = C - D \in \mathbb{R}$, $\gamma = -C - D \in \mathbb{R}$ y $\beta = A - iB \in \mathbb{C}$ son tales que

$$|\beta|^2 - \alpha\gamma = A^2 + B^2 + (C-D)(C+D) = A^2 + B^2 + C^2 - D^2 > 0,$$

Para la última desigualdad, como P interseca a $\mathbb{S}^2$ entonces la distancia de P al origen debe ser menor que 1:

$$d(P,0) = \frac{|A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+D^2}} < 1$$

De aquí se deduce que

$$D^2 < A^2 + B^2 + C^2,$$

luego, efectivamente,

$$|\beta|^2 - \alpha\gamma = A^2 + B^2 + C^2 - D^2 > 0,$$

así que $(*)$ es la ecuación de una circunferencia. Queda probado entonces que las circunferencias de $\mathbb{S}^2$ se corresponden con circunferencias (si $\alpha \neq 0$) o rectas (si $\alpha = 0$) de $\mathbb{C}$.

Recíprocamente, considérese una circunferencia o recta $C \subset \mathbb{C}$ de ecuación

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0,$$

con $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ y $|\beta|^2 - \alpha\gamma > 0$. Dado $z \in C$, el punto correspondiente en $\mathbb{S}^2$ es

$$p = \Pi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = \left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \frac{i(\overline{z}-z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \equiv (x_1, x_2, x_3)$$

Sean

$$A = \operatorname{Re}(\beta) \qquad B = -\operatorname{Im}(\beta) \qquad C = \frac{\alpha-\gamma}{2} \qquad D = -\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 &= \frac{1}{|z|^2+1}\left(\operatorname{Re}(\beta)z + \operatorname{Re}(\beta)\overline{z} - i\operatorname{Im}(\beta)\overline{z} + i\operatorname{Im}(\beta)z + \frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\left(|z|^2-1\right)\right) \\
&= \frac{1}{|z|^2+1}\left(\left(\operatorname{Re}(\beta) + i\operatorname{Im}(\beta)\right)z + \left(\operatorname{Re}(\beta) - i\operatorname{Im}(\beta)\right)\overline{z} + \frac{1}{2}\left(\alpha|z|^2 - \alpha - \gamma|z|^2 + \gamma\right)\right) \\
&= \frac{1}{|z|^2+1}\left(\beta z + \overline{\beta z} + \frac{1}{2}\left(\alpha|z|^2 - \alpha - \gamma|z|^2 + \gamma\right)\right) \\
&= \frac{1}{|z|^2+1}\left(-\alpha|z|^2 - \gamma + \frac{1}{2}\left(\alpha|z|^2 - \alpha - \gamma|z|^2 + \gamma\right)\right) \\
&= \frac{1}{|z|^2+1}\left(-\frac{\alpha|z|^2}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma|z|^2}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\alpha|z|^2 + \gamma + \alpha + \gamma|z|^2}{|z|^2+1} \\
&= -\frac{\alpha+\gamma}{2}\frac{|z|^2+1}{|z|^2+1} \\
&= -\frac{\alpha+\gamma}{2} \\
&= D
\end{aligned}$$

Además,

$$A^2 + B^2 + C^2 = \operatorname{Re}(\beta)^2 + \operatorname{Im}(\beta)^2 + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma}{2} = |\beta|^2 - \alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 > |\beta|^2 - \alpha\gamma > 0,$$

así que p verifica la ecuación del plano

$$P \equiv Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

Como las circunferencias de $\mathbb{S}^2$ con planos de $\mathbb{R}^3$ intersecados con $\mathbb{S}^2$, se concluye que circunferencias o rectas de $\mathbb{C}$ se corresponden con circunferencias de $\mathbb{S}^2$.

Ejercicio 15. *Sea T la función racional dada por $T(z) = \frac{1}{z}$ (mejor, consideramos la extensión continua a $\mathbb{C}^*$ de dicha función racional). Probar que*

(a) *$\rho(T(z), T(w)) = \rho(z, w)$ para todos $z, w \in \mathbb{C}^*$.*

(b) *T transforma cualquier circunferencia en una recta o circunferencia, y transforma cualquier recta en una recta o circunferencia.*

Solución.

(*a*) Sean $z, w \in \mathbb{C}^*$. Entonces

$$\begin{aligned}
\rho(T(z), T(w)) &= \frac{2|T(z) - T(w)|}{\sqrt{|T(z)|^2+1}\sqrt{|T(w)|^2+1}} \\
&= \frac{2|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}|}{\sqrt{|\frac{1}{z}|^2+1}\sqrt{|\frac{1}{w}|^2+1}} \\
&= \frac{2|\frac{w-z}{zw}|}{\sqrt{\frac{1}{|z|^2}+1}\sqrt{\frac{1}{|w|^2}+1}} \\
&= \frac{2\frac{|w-z|}{|z||w|}}{\sqrt{\frac{|z|^2+1}{|z|^2}}\sqrt{\frac{|w|^2+1}{|w|^2}}} \\
&= \frac{2\frac{|w-z|}{|z||w|}}{\frac{\sqrt{|z|^2+1}}{|z|}\frac{\sqrt{|w|^2+1}}{|w|}} \\
&= \frac{2|w-z|}{\sqrt{|z|^2+1}\sqrt{|w|^2+1}} \\
&= \rho(z,w)
\end{aligned}$$

(*b*) Considérese una recta o circunferencia $C \subset \mathbb{C}^*$ de ecuación

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0,$$

con $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ y $|\beta|^2 - \alpha\gamma > 0$. Si $z \in C$, entonces

$$\begin{aligned}
\gamma|T(z)|^2 + \overline{\beta}T(z) + \beta\overline{T(z)} + \alpha &= \frac{\gamma}{|z|^2} + \frac{\overline{\beta}}{z} + \frac{\beta}{\overline{z}} + \alpha \\
&= \frac{\gamma}{|z|^2} + \frac{\overline{\beta z}}{|z|^2} + \frac{\beta z}{|z|^2} + \alpha \\
&= \frac{1}{|z|^2}\left(\gamma + \beta z + \overline{\beta z} + \alpha|z|^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, $T(z)$ verifica una ecuación de la forma

$$a|z|^2 + bz + \overline{bz} + c = 0,$$

con $a = \gamma \in \mathbb{R}$, $c = \alpha \in \mathbb{R}$ y $b = \overline{\beta} \in \mathbb{C}$. Además,

$$|b|^2 - ac = |\beta|^2 - \alpha\gamma > 0,$$

así que se trata de la ecuación de una circunferencia (si $\gamma \neq 0$) o recta (si $\gamma = 0$) del plano. Se concluye que T transforma circunferencias en rectas o circunferencias (es el caso $\alpha \neq 0$), y también transforma rectas en circunferencias o rectas (es el caso $\alpha = 0$).