**1.** Sean $x = 2^n, y = 2^{-n}$ números reales almacenables en el sistema de representación en punto flotante del ordenador. Como $fl(x) = rd_{52}(1) \cdot 2^n, fl(y) = rd_{52}(1) \cdot 2^{-n}$, entonces $fl(x) = x, fl(y) = y$. Por otra parte,

$$x + y = 2^n + 2^{-n} = (\overbrace{10\dots0}^{n+1}{}'\overbrace{0\dots01}^{n})_\beta = (1'\overbrace{0\dots01}^{2n})_\beta \cdot 2^n$$

Distinguimos dos casos:

- Si $2n \geq 54$, es decir, $n \geq 27$, entonces $rd_{52}((1'\overbrace{0\dots01}^{2n})_\beta) = 1$, luego

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y)) = fl(x + y) = (1)_\beta \cdot 2^n = 2^n$$

- Si $2n \leq 52$, es decir, $n \leq 26$, entonces $rd_{52}((1'\overbrace{0\dots01}^{2n})_\beta) = (1'\overbrace{0\dots01}^{2n})_\beta$, luego

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y)) = fl(x + y) = (1'\overbrace{0\dots01}^{2n})_\beta \cdot 2^n = 2^n + 2^{-n}$$

En cuanto al error relativo,

- Si $n \geq 27$,

$$\left| \frac{x + y - (x \oplus y)}{x + y} \right| = \left| \frac{2^n + 2^{-n} - 2^n}{2^n + 2^{-n}} \right| = \frac{2^{-n}}{2^n + 2^{-n}} = \frac{1}{2^{2n} + 1}$$

- Si $n \leq 26$,

$$\left| \frac{x + y - (x \oplus y)}{x + y} \right| = \left| \frac{2^n + 2^{-n} - 2^n - 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}} \right| = 0$$

**2.**

**(a)** Tenemos que

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(l)}$$

Esto significa que

- $|g'(l)| = |1 - 1| = 0 < 1$, así que el método es localmente convergente.
- $g'(l) = 0$, así que el métodoo es de al menos orden 2.

Además,

$$g''(x) = -\frac{f''(x)}{f'(l)}$$

Por tanto, si fuese

$$g''(l) = 0 \iff -\frac{f''(l)}{f'(l)} = 0 \iff f''(l) = 0$$

entonces el método sería de al menos orden 3. En cambio, si $f''(l) \neq 0$, entonces $g''(l) \neq 0$ y el método sería de orden 2.

Si $p \geq 3$ es el orden del método, la constante de error asintótico sería

$$C = \frac{|g^{(p)}(l)|}{p!}$$

Y si fuese $p = 2$, entonces

$$C = \frac{|g''(l)|}{2} = \left|\frac{f''(l)}{2f'(l)}\right|$$

**(b)** La única raíz de $f$ en $J$ es $l = \pi$. Como

- $g''(\pi) = -\dfrac{f''(\pi)}{f'(\pi)} = \dfrac{\sin\pi}{\cos\pi} = 0$
- $g'''(\pi) = -\dfrac{f'''(\pi)}{f'(\pi)} = \dfrac{\cos\pi}{\cos\pi} = 1 \neq 0$

entonces el método es de orden 3. La constante de error asintótico es

$$C = \frac{|g'''(\pi)|}{3!} = \frac{1}{6}$$

**(c)** Como $g$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en cualquier intervalo cerrado y acotado y además

$$|g'(x)| = |1 - \frac{f'(x)}{f'(\pi)}| = |1 + \cos x| < 1 \iff \cos x < 0 \iff x \in \left(\frac{\pi}{2}k, \frac{3\pi}{2}k\right), k \in \mathbb{Z}$$

entonces no podemos asegurar la contractividad de $g$ en $J$ (pues $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$), pero sí en $J' \subset (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

**(d)** La constante de contractividad en $J'$ es $C = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, ya que

$$|g'(x) = |1 + \cos x| \leq |1 + \cos\frac{3\pi}{4}| = |1 + \cos\frac{5\pi}{4}| = |1 - \frac{\sqrt{2}}{2}| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

Usaremos la cota

$$|x_n - l| \leq C^n(b-a) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Por tanto,

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}10^{-10} \iff \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leq \frac{10^{-10}}{\pi} \iff n \geq \frac{\log(\frac{10^{-10}}{\pi})}{\log(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} \approx 19'68$$

En 20 iteraciones, podemos asegurar 10 cifras decimales exactas.

**3.**

**(a)** Las diferencias divididas son

- $f[x_0] = 0; f[x_1] = 1; f[x_2] = 0; f[x_3] = -1; f[x_4] = 0$
- $f[x_0, x_1] = \dfrac{2}{\pi}; f[x_1, x_2] = -\dfrac{2}{\pi}; f[x_2, x_3] = -\dfrac{2}{\pi}; f[x_3, x_4] = \dfrac{2}{\pi}$
- $f[x_0, x_1, x_2] = -\dfrac{4}{\pi^2}; f[x_1, x_2, x_3] = 0; f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{4}{\pi^2}$
- $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{8}{3\pi^3}; f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{8}{3\pi^3}$
- $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0$

Por tanto,

$$P_4(x) = \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{8}{3\pi^3}x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)$$

**(b)** El polinomio que interpola los datos $(0, f(0)), (\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})), (\pi, f(\pi))$ es

$$P_2^1(x) = \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{2})$$

y el que interpola los datos $(\pi, f(\pi)), (\frac{3\pi}{2}, f(\frac{3\pi}{2})), (2\pi, f(2\pi))$ es

$$P_2^2(x) = -\frac{2}{\pi}(x - \pi) + \frac{4}{\pi^2}(x - \pi)(x - \frac{3\pi}{2})$$

Por tanto,

$$P_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{2}) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -\frac{2}{\pi}(x - \pi) + \frac{4}{\pi^2}(x - \pi)(x - \frac{3\pi}{2}) & \text{si } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

**(c)** El error que se comete al aproximar $f$ por $P_4$ es

$$|f(x) - P_4(x)| \leq \frac{M_5}{5!}(b - a)^5$$

donde $b - a = 2\pi, M_5 = \max\limits_{x \in [0, 2\pi]} |f^{(5)}(x)| = 1$. Por tanto,

$$|f(x) - P_4(x)| \leq \frac{32\pi^5}{120} = \frac{4\pi^5}{15}$$

Por otra parte, si $x \in [0, \pi]$, el polinomio $P_2^1$ interpola los extremos del intervalo y su punto medio, así que la cota óptima sería

$$|f(x) - P_2(x)| = |f(x) - P_2^1(x)| \leq \frac{M_3}{72\sqrt{3}}(b - a)^3 = \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}}$$

Si $x \in [\pi, 2\pi]$, la cota obtenida sería exactamente la misma, así que la cota anterior es uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$.

**(d)** En las condiciones del enunciado, consideramos el polinomio $p$ que interpola los datos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

Sea $P\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $P(x) = f(x) - p(x)$, que es de clase $\mathcal{C}^n([a,b])$ y verifica $P(x_i) = 0 \ \forall\ i = 0, \ldots, n$.

Por el teorema de Rolle, en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ (con $i = 0, \ldots, n-1$), existe $\xi_i^0 \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $P'(\xi_i^0) = 0$. Aplicando el teorema de Rolle a $P'$, en cada intervalo $[\xi_i^0, \xi_{i+1}^0]$ ($i = 0, \ldots, n-2$), existe $\xi_i^1 \in (\xi_i^0, \xi_{i+1}^0) \subset (\text{mín}\,(x_0, \ldots, x_n), \text{máx}\,(x_0, \ldots, x_n))$ tal que $P''(\xi_i^1) = 0$. Repitiendo este razonamiento $n$ veces, podemos concluir que existe $\xi \in (\text{mín}\,(x_0, \ldots, x_n), \text{máx}\,(x_0, \ldots, x_n))$ tal que $P^{(n)}(\xi) = 0$.

Por otra parte, como $p$ es un polinomio de grado $n$ y el coeficiente de $x^n$ en $p$ es $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, entonces $p^{(n)}(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]n!$, luego

$$P^{(n)}(\xi) = 0 \iff f^{(n)}(\xi) = p^{(n)}(\xi) \iff f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

**4.**

**(a)** Veamos si es exacta para $f(x) = 1$.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$
- $I_3(f) = \dfrac{5}{9} + \dfrac{8}{9} + \dfrac{5}{9} = 2$

Veamos si es exacta para $f(x) = x$.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\, dx = 0$
- $I_3(f) = \dfrac{5}{9}\left(-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right) + \dfrac{8}{9} \cdot 0 + \dfrac{5}{9}\sqrt{\dfrac{3}{5}} = 0$

Veamos si es exacta para $f(x) = x^2$.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$
- $I_3(f) = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{8}{9} \cdot 0 + \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{3}$

Veamos si es exacta para $f(x) = x^3$.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$
- $I_3(f) = \dfrac{5}{9}\left(-\sqrt{\dfrac{27}{125}}\right) + \dfrac{8}{9} \cdot 0 + \dfrac{5}{9}\sqrt{\dfrac{27}{125}} = 0$

Veamos si es exacta para $f(x) = x^4$.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$
- $I_3(f) = \dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{9}{25} + \dfrac{8}{9}\cdot 0 + \dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{9}{25} = \dfrac{2}{5}$

Veamos si es exacta para $f(x) = x^5$.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5\,dx = 0$
- $I_3(f) = \dfrac{5}{9}\left(-\sqrt{\dfrac{243}{3125}}\right) + \dfrac{8}{9}\cdot 0 + \dfrac{5}{9}\sqrt{\dfrac{243}{3125}} = 0$

Veamos si es exacta para $f(x) = x^6$.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^6\,dx = \frac{2}{7}$
- $I_3(f) = \dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{27}{125} + \dfrac{8}{9}\cdot 0 + \dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{27}{125} = \dfrac{6}{25} \neq \dfrac{2}{7}$

Por tanto, la fórmula es de grado 5. Se trata de la fórmula de Gauss con 3 puntos.

**(b)** Sea $f(x) = x^6$ (que es de clase 6 en $[-1,1]$). Entonces existe $\xi \in (-1,1)$ tal que

$$\int_{-1}^{1} x^6\,dx = I_3(f) + Kf^{(6)}(\xi) \iff \frac{2}{7} = \frac{6}{25} + K\cdot 720 \iff K = \frac{\frac{2}{7}-\frac{6}{25}}{720} = \frac{8}{720\cdot 175} = \frac{1}{15750}$$

**(c)** Sea $f(x) = x^7 + x^6$. Entonces

$$I_3(f) = \frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{2187}{78125}} + \frac{27}{125}\right) + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{2187}{78125}} + \frac{27}{125}\right) = \frac{6}{25}$$

La integral exacta es

$$\int_{-1}^{1}(x^7+x^6)\,dx = \left[\frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

El error cometido es

$$\left|\frac{2}{7} - \frac{6}{25}\right| = \frac{8}{175}$$

y la cota que proporciona el apartado anterior,

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - I_3(f)\right| \leq \frac{M_6}{15750} = \frac{8}{25}$$

donde

$$M_6 = \max_{x\in[-1,1]} |f^{(6)}(x)| = \max_{x\in[-1,1]} |5040x| = 5040$$

Evidentemente, el error exacto satisface esta cota.

**(d)** Los nuevos pesos son

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{b-a}{2}\alpha_0,\ \tilde{\alpha}_1 = \frac{b-a}{2}\alpha_1,\ \tilde{\alpha}_2 = \frac{b-a}{2}\alpha_2$$

y los nuevos nodos,

$$\tilde{x}_0 = a + \frac{b-a}{2}(x_0+1),\ \tilde{x}_1 = a + \frac{b-a}{2}(x_1+1),\ \tilde{x}_2 = a + \frac{b-a}{2}(x_2+1)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I_3(f) = {} & \frac{5(b-a)}{18} f\left(a + \frac{b-a}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right) + \frac{4(b-a)}{9} f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \\ & + \frac{5(b-a)}{18} f\left(a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right) \end{aligned}$$