Facultad de Ciencias – Universidad de Málaga
ANÁLISIS NUMÉRICO
3º de Grado en Matemáticas – Curso 2020/21

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

– Examen –

1. Se considera un problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [0,T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $f : [0,T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua y de Lispchitz en la variable y.

a) Enuncie la definición de estabilidad para un método unipaso

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k; h), \quad k = 0, 1 \ldots$$

b) Pruebe que, si existen $\Lambda > 0$ y $h^* > 0$ tales que

$$|\Phi(t,y;h) - \Phi(t,z;h)| \leqslant |y - z|, \quad \forall t \in [0,T],\ y,z \in \mathbb{R},\ h \in (0,h^*],$$

entonces el método es estable.

c) Pruebe que el método de Heun es estable.

2. El método de Simpson se define de la siguiente manera:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} Q_2(s)\, ds,$$

siendo Q_2 el polinomio de grado menor o igual que 2 que interpola los puntos

$$(t_{k+1}, f_{k+1}),\ (t_k, f_k),\ (t_{k-1}, f_{k+1}).$$

a) Deduzca la expresión del método de Simpson.

b) Estudie su estabilidad y determine su orden.

3. Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a + \lambda y, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

siendo $\lambda < 0$ y a, y_0 números reales arbitrarios.

a) Resuelva el problema de Cauchy y pruebe que su solución verifica

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = -\frac{a}{\lambda}.$$

b) Aplique el método de Heun al problema de Cauchy y encuentre, razonando por recurrencia, la expresión de y_k en función de y_0.

c) Usando la expresión hallada en el apartado anterior, pruebe que se tiene

$$\lim_{k\to\infty} y_k = -\frac{a}{\lambda}$$

si y sólo si $h\lambda$ está en la región de estabilidad del método.

4. Se considera el problema de contorno:

$$\begin{cases} -u'' = f(x), \quad x \in [0,1], \\ u(0) - u'(0) = \alpha, \\ u(1) + u'(1) = \beta, \end{cases} \tag{3}$$

siendo $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y α, β dos números reales arbitrarios.

a) Pruebe que las fórmulas de derivación numérica

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}, \quad y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

son de orden 2.

b) Con ayuda de las fórmulas de derivación del apartado anterior y de la técnica del nodo fantasma, proponga un esquema de diferencias finitas de segundo orden para el problema de contorno (3) usando una partición equidistante del intervalo $[0,1]$ con $N+1$ puntos $\{x_0, \ldots, x_N\}$.

c) Si es posible, escriba el sistema lineal a resolver en forma matricial $AU = b$ de manera que A sea una matriz simétrica. ¿Es la matriz A definida positiva?

– Resolución –

1.

a) Se dice que un método unipaso es *estable* si existe una constante M positiva e independiente de h verificando lo siguiente: dados $\{y_k\}_{k=0}^n$, $\{z_k\}_{k=0}^n$, $\{\delta_k\}_{k=0}^{n-1}$ tales que

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \qquad z_{k+1} = z_k + h\Phi(t_k, z_k, h) + \delta_k$$

para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$, se tiene que

$$\max_{k=0,1,\ldots,n} |y_k - z_k| \leq M \left(|y_0 - z_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |\delta_k| \right)$$

b) Supongamos que existen $\Lambda > 0$ y $h^* > 0$ con

$$|\Phi(t,y,h) - \Phi(t,z,h)| \leq \Lambda |y - z|, \qquad t \in [0,T],\ y,z \in \mathbb{R},\ h \in (0,h^*]$$

Veamos que el método es estable. Sean $\{y_k\}_{k=0}^n$, $\{z_k\}_{k=0}^n$, $\{\delta_k\}_{k=0}^{n-1}$ tales que

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \qquad z_{k+1} = z_k + \Phi(t_k, z_k, h) + \delta_k$$

para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Si $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
|y_k - z_k| &= |y_{k-1} + h\Phi(t_k, y_{k-1}, h) - z_{k-1} - h\Phi(t_k, z_{k-1}, h) - \delta_k| \\
&\leq |y_{k-1} - z_{k-1}| + h|\Phi(t_k, y_{k-1}, h) - \Phi(t_k, z_{k-1}, h)| + |\delta_k| \\
&\leq |y_{k-1} - z_{k-1}| + h\Lambda |y_{k-1} - z_{k-1}| + |\delta_k| = (1 + h\Lambda)|y_{k-1} - z_{k-1}| + |\delta_k| \\
&\leq (1 + h\Lambda)^2 |y_{k-2} - z_{k-2}| + (1 + h\Lambda)|\delta_{k-1}| + |\delta_k| \\
&\leq (1 + h\Lambda)^3 |y_{k-3} - z_{k-3}| + (1 + h\Lambda)^2|\delta_{k-2}| + (1 + h\Lambda)|\delta_{k-1}| + |\delta_k| \\
&\leq \ldots \\
&\leq (1 + h\Lambda)^k |y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{k} (1 + h\Lambda)^i |\delta_{k-i}| \\
&\leq (1 + h\Lambda)^k |y_0 - z_0| + (1 + h\Lambda)^k \sum_{i=0}^{k} |\delta_{k-i}| = (1 + h\Lambda)^k \left(|y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{k} |\delta_i| \right) \\
&\leq (1 + h\Lambda)^k \left(|y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{n-1} |\delta_i| \right)
\end{aligned}$$

Usando que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, que $k \leq n$ y que $nh = T$, entonces

$$|y_k - z_k| \leq e^{kh\Lambda} \left(|y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{n-1} |\delta_i| \right) \leq e^{T\Lambda} \left(|y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{n-1} |\delta_i| \right)$$

Para $k = 0$ esta desigualdad sigue siendo cierta. Por tanto,

$$\max_{k=0,1,\ldots,n} |y_k - z_k| \leq e^{T\Lambda} \left(|y_0 - z_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |\delta_k| \right),$$

donde $e^{T\Lambda}$ es una constante positiva e independiente de h, concluyéndose que el método es estable.

c) El método de Heun es el método RK con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}$$

En otros términos,
$$\begin{cases} y_k^* = y_k + hf(t_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\big(f(t_k, y_k) + f(t_k + h, y_k^*)\big) \end{cases}$$
Por tanto, la función incremento del método de Heun es
$$\Phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\big(f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y))\big), \qquad t \in [0,T],\, y \in \mathbb{R},\, h \in (0,h^*]$$
Sean $y, z \in \mathbb{R}$. Entonces, usando que f es de Lipschitz en la variable y con constante de Lipschitz $L > 0$,
$$\begin{aligned} |\Phi(t,y,h) - \Phi(t,z,h)| &\le \frac{1}{2}|f(t,y) - f(t,z)| + \frac{1}{2}|f(t+h, y+hf(t,y)) - f(t+h, z+hf(t,z))| \\ &\le \frac{L}{2}|y-z| + \frac{L}{2}|y + hf(t,y) - z - hf(t,z)| \\ &\le \frac{L}{2}|y-z| + \frac{L}{2}|y-z| + \frac{hL}{2}|f(t,y) - f(t,z)| \\ &\le \frac{L}{2}|y-z| + \frac{L}{2}|y-z| + \frac{hL}{2}|y-z| = \left(L + \frac{hL}{2}\right)|y-z| \end{aligned}$$
Por el apartado anterior, el método es estable.

2. Véase la segunda relación de ejercicios.

3.

a) La solución general de la ecuación homogénea $y' = \lambda y$ es $y_h(t) = ce^{\lambda t}$, $c \in \mathbb{R}$. Para hallar una solución particular de la ecuación $y' = a + \lambda y$, recurrimos al método de variación de los parámetros: se busca una solución de la forma $y_p(t) = c(t)e^{\lambda t}$. Se tiene que
$$\begin{aligned} y_p(t) = c(t)e^{\lambda t} \text{ es solución de } y' = a + \lambda y &\iff c'(t)e^{\lambda t} + \lambda c(t)e^{\lambda t} = a + \lambda c(t)e^{\lambda t} \\ &\iff c'(t) = ae^{-\lambda t} \end{aligned}$$
Podemos tomar, por ejemplo, $c(t) = -\frac{a}{\lambda}e^{-\lambda t}$, luego $y_p(t) = -\frac{a}{\lambda}$ y por tanto la solución general de $y' = a + \lambda y$ es $y(t) = ce^{\lambda t} - \frac{a}{\lambda}$, $c \in \mathbb{R}$. Imponiendo $y(0) = y_0$ se obtiene $c = y_0 + \frac{a}{\lambda}$, luego
$$y(t) = \left(y_0 + \frac{a}{\lambda}\right)e^{\lambda t} - \frac{a}{\lambda}$$
es la única solución del problema dado, que por ser $\lambda < 0$ verifica
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = -\frac{a}{\lambda}$$

b) El método de Heun para este problema es
$$\begin{cases} y_k^* = y_k + h(a + \lambda y_k), \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\big(a + \lambda y_k + a + \lambda y_k^*\big), \end{cases}$$
es decir,
$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\big(2a + \lambda y_k + \lambda y_k + \lambda h a + \lambda^2 h y_k\big) = y_k + ah + \lambda y_k h + \frac{a\lambda}{2}h^2 + \frac{\lambda^2 y_k}{2}h^2 \\ &= \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right)y_k + ah + \frac{a\lambda}{2}h^2 \end{aligned}$$

Razonando por recurrencia,

$$\begin{aligned}
y_k &= \left(1+\lambda h+\frac{\lambda^2h^2}{2}\right)y_{k-1}+ah+\frac{a\lambda}{2}h^2\\
&= \left(1+\lambda h+\frac{\lambda^2h^2}{2}\right)^2 y_{k-2}+\left(1+\lambda h+\frac{\lambda^2h^2}{2}\right)\left(ah+\frac{a\lambda}{2}h^2\right)+\left(ah+\frac{a\lambda}{2}h^2\right)\\
&= \dots\\
&= \left(1+\lambda h+\frac{\lambda^2h^2}{2}\right)^k y_0+\left(ah+\frac{a\lambda}{2}h^2\right)\sum_{i=0}^{k}\left(1+\lambda h+\frac{\lambda^2h^2}{2}\right)^i
\end{aligned}$$

c) Se observa que y_k tiene límite cuando $k\to\infty$ si y solo si

$$\left|1+\lambda h+\frac{\lambda^2h^2}{2}\right|<1$$

Se comprueba fácilmente que la función de estabilidad absoluta del método de Heun es

$$R(\hat{h})=1+\hat{h}+\frac{\hat{h}^2}{2}$$

Se concluye que y_k tiene límite cuando $k\to\infty$ si y solo si $\lambda h\in\{\hat{h}\in\mathbb{C}\colon |R(\hat{h})|<1\}=D_A$ y, en ese caso,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} y_k &= \left(ah+\frac{a\lambda}{2}h^2\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(1+\lambda h+\frac{\lambda^2h^2}{2}\right)^i=\left(ah+\frac{a\lambda}{2}h^2\right)\frac{1}{1-1-\lambda h-\frac{\lambda^2h^2}{2}}\\
&= -\left(ah+\frac{a\lambda}{2}h^2\right)\frac{1}{\lambda h+\frac{\lambda^2h^2}{2}}=-\frac{a}{\lambda}\left(h+\frac{\lambda}{2}h^2\right)\frac{1}{h+\frac{\lambda h^2}{2}}=-\frac{a}{\lambda}
\end{aligned}$$

4. Ejercicios muy similares a este se han hecho ya unas cuantas veces.