Ejemplos importantes del Tema 1

1. *Sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función no continua.*

$$\begin{aligned} f_k\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_k(x) = x^k \end{aligned}$$

También sirve como ejemplo de función que converge puntualmente pero no uniformemente.

2. *Sucesión de funciones derivables que converge puntual y uniformemente a una función no derivable.*

$$\begin{aligned} f_k\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} \end{aligned}$$

3. *Sucesión de funciones integrables que converge puntualmemente a una función no integrable.*

$$\begin{aligned} f_k\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{k-1} \text{ ó } \ x = x_k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

donde $\{x_k\}$ es una enumeración de los racionales de $[0,1]$.

4. *Sucesiones uniformemente convergentes cuyo producto no converge uniformemente.*

$$\begin{aligned} f_k\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_k(x) = x + \frac{1}{k} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g_k\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_k(x) = x + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

5. *Serie funcional de una sucesión de funciones uniformemente convergente a la función nula que no converge uniformemente.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ en } [0,1]$$

6. *Serie funcional que converge uniformemente pero no verifica las hipótesis del criterio de Weierstrass.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{\log(n+1)} \text{ en } [0,1]$$

También sirve cualquier serie funcional que no converja absolutamente pero sí uniformemente, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x+n} \text{ en } (0,\infty)$$

7. *Función de clase infinito y no desarrollable en serie de potencias.*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

No es desarrollable en serie de potencias en $a = 0$.

Ejemplos importantes del Tema 2

1. *Conjunto acotado y de medida cero que no tiene volumen cero.*

$$\mathbb{Q} \cap [0,1]$$

2. *Función integrable con secciones no integrables.*

$$\begin{aligned} f\colon [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1-\frac{1}{q} & \text{si } x,y \in \mathbb{Q} \text{ y } x = \frac{p}{q} \text{ es frac. irred.} \end{cases} \end{aligned}$$

Las secciones no integrables son las f_x.

3. *Función cuyas integrales iteradas existen y son distintas.*

$$\begin{aligned} f\colon [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{si } x>0, y>0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

El problema es que f no es integrable, pues no es acotada.

4. *Conjunto acotado que no es J-medible.*

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i - r_i, x_i + r_i)$$

donde $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una enumeración de los racionales de $(0,1)$ y r_i es tal que $(x_i - r_i, x_i + r_i) \subset (0,1)$ y $r_i < \frac{1}{2^{i+2}}$. La frontera es $[0,1]\setminus A$, que se prueba que no tiene medida cero usando que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+2}} < 1$.

Ejemplos importantes del Tema 3

1. *Campo vectorial no conservativo cuyas derivadas cruzadas coinciden.*

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2} \right) \end{aligned}$$

   Se tiene que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ pero el campo no es conservativo porque la integral sobre la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 no es nula.