Análisis Numérico

Tercero de Grado en Matemáticas, Curso 2019/2020.

EXAMEN TEÓRICO

17 de Septiembre de 2020.

1. Se considera el siguiente método numérico:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_k + \frac{1}{3}h, y_k + h\left(\frac{5}{12}k_1 - \frac{1}{12}k_2\right)\right),\\
k_2 &= f\left(t_k + h, y_k + h\left(\frac{3}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right)\right),\\
y_{k+1} &= y_k + h\left(\frac{3}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right).
\end{aligned}
$$

   a) Escriba su tablero de Butcher y estudie el orden.

   b) Se aplica el método con paso $h = 1$ al problema de Cauchy:

$$
\begin{cases} y' = t^2 - y, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}
$$

   Calcule la solución aproximada que se obtiene de $y(1)$.

2. Encuentre todos los métodos encajados RK1(2) explícitos y de dos etapas. Una vez hallados, elija uno concreto. Calcule la solución aproximada que se obtiene de $y(0.1)$ usando el método de primer orden del par con paso $h = 0.1$, siendo $y(t)$ la solución exacta del problema (1), y estime el error que se comete usando los dos métodos del par.

3. Considere el polinomio $\rho(\zeta) = \zeta^2 - 1$. Construya todos los métodos multipaso explícitos de orden al menos 2 que tienen a $\rho(\zeta)$ como primer polinomio característico. ¿Hay alguno de orden mayor que 2? Determine la región de estabilidad de los métodos encontrados.

– Resolución –

1.

a) Sean

$$y_k^{(1)} = y_k + h\big(\tfrac{5}{12}k_1 - \tfrac{1}{12}k_2\big), \qquad y_k^{(2)} = y_k + h\big(\tfrac{3}{4}k_1 + \tfrac{1}{4}k_2\big)$$

Entonces se tiene

$$k_1 = f\big(t_k + \tfrac{1}{3}h, y_k^{(1)}\big), \qquad k_2 = f\big(t_k + h, y_k^{(2)}\big)$$

Por tanto, el método del enunciado puede escribirse como

$$(RK)\begin{cases} y_k^{(1)} &= y_k + h\big(\tfrac{5}{12}f\big(t_k+\tfrac{1}{3}h, y_k^{(1)}\big) - \tfrac{1}{12}f\big(t_k+h, y_k^{(2)}\big)\big) \\ y_k^{(2)} &= y_k + h\big(\tfrac{3}{4}f\big(t_k+\tfrac{1}{3}h, y_k^{(1)}\big) + \tfrac{1}{4}f\big(t_k+h, y_k^{(2)}\big)\big) \\ y_{k+1} &= y_k + h\big(\tfrac{3}{4}f\big(t_k+\tfrac{1}{3}h, y_k^{(1)}\big) + \tfrac{1}{4}f\big(t_k+h, y_k^{(2)}\big)\big) \end{cases}$$

El tablero de Butcher del método sería

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

Sean

$$B = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5/12 & -1/12 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar,

$$B^tE = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

así que el método es de orden 1. Como además

$$B^tAE = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/12 & -1/12 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\frac{1}{2}$$

Por tanto el método es de orden 2. Y como

$$B^tC^2E = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}, = \frac{1}{6},$$

$$B^tACE = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/12 & -1/12 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces el método es de orden 3. Pero

$$B^tC^3E = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{5}{18} \neq \frac{1}{4}$$

Concluimos que el orden del método es exactamente 3.

b) Como $t_0 = 0$, entonces $t_1 = h = 1$. Poniendo $h = 1$, $k = 0$ e $y_0 = 0$ en el sistema (RK),

$$\begin{cases} y_0^{(1)} = \tfrac{5}{12}f\big(\tfrac{1}{3}, y_0^{(1)}\big) - \tfrac{1}{12}f\big(1, y_0^{(2)}\big) \\ y_0^{(2)} = \tfrac{3}{4}f\big(\tfrac{1}{3}, y_0^{(1)}\big) + \tfrac{1}{4}f\big(1, y_0^{(2)}\big) \\ y_1 \;\; = \tfrac{3}{4}f\big(\tfrac{1}{3}, y_0^{(1)}\big) + \tfrac{1}{4}f\big(1, y_0^{(2)}\big) \end{cases}$$

Como en el problema (1) es $f(t,y) = t^2 - y$,

$$\begin{cases} y_0^{(1)} = \tfrac{5}{12}\big(\tfrac{1}{9} - y_0^{(1)}\big) - \tfrac{1}{12}\big(1 - y_0^{(2)}\big) = -\tfrac{1}{27} - \tfrac{5}{12}y_0^{(1)} + \tfrac{1}{12}y_0^{(2)} \\ y_0^{(2)} = \tfrac{3}{4}\big(\tfrac{1}{9} - y_0^{(1)}\big) + \tfrac{1}{4}\big(1 - y_0^{(2)}\big) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}y_0^{(1)} - \tfrac{1}{4}y_0^{(2)} \\ y_1 \;\; = y_0^{(2)} \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene

$$y_0^{(1)} = \frac{-\frac{1}{27} + \frac{1}{12}y_0^{(2)}}{1+\frac{5}{12}} = \frac{12}{17}\left(-\frac{1}{27} + \frac{1}{12}y_0^{(2)}\right) = -\frac{4}{153} + \frac{1}{17}y_0^{(2)}$$

Sustituyendo en la segunda,

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{153} + \frac{1}{17}y_0^{(2)}\right) - \frac{1}{4}y_0^{(2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{51} - \frac{3}{68}y_0^{(2)} - \frac{1}{4}y_0^{(2)} = \frac{6}{17} - \frac{5}{17}y_0^{(2)}$$

De esto se deduce que

$$y(1) \approx y_1 = \frac{\frac{6}{17}}{1+\frac{5}{17}} = \frac{17}{22}\cdot\frac{6}{17} = \frac{3}{11}$$

2. De encajados nada.

3. Los métodos multipaso con polinomio caractersítico $\rho(\zeta) = \zeta^2 - 1$ son de la forma

$$y_{k+2} - y_k = h\big(\beta_2 f_{k+2} + \beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k\big)$$

Los que son explícitos deben tener $\beta_2 = 0$, así que

$$y_{k+2} - y_k = h\big(\beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k\big) \tag{$*$}$$

Estudiemos el orden de un método de esta forma. Se tiene que

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 0, \qquad \sum_{j=0}^{2} \alpha_j j = 2, \qquad \sum_{j=0}^{2} \beta_j = \beta_0 + \beta_1,$$

así que el método es de orden 1 si y solo si $\beta_0 + \beta_1 = 2$. Además,

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^2 = 4, \qquad 2\sum_{j=0}^{2} \beta_j j = 2\beta_1,$$

así que el método es de orden 2 si y solo si $\beta_0 + \beta_1 = 2$ y $2\beta_1 = 4$, es decir, si y solo si $\beta_1 = 2$ y $\beta_0 = 0$. Así, el único método multipaso de la forma $(*)$ de orden al menos 2 es

$$y_{k+2} - y_k = 4hf_{k+1}$$

Y como

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^3 = 8, \qquad 3\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^2 = 3\cdot 4 = 12 \neq 8,$$

entonces el método no es de orden 3. Hallemos la frontera de la región de estabilidad, que es

$$\partial D_A = \{\hat{h} \in \mathbb{C} \colon \pi_{\hat{h}} \text{ tiene alguna raíz de módulo 1}\},$$

donde $\pi_{\hat{h}}(z) = \rho(z) - \hat{h}\sigma(z) = z^2 - 1 - 4\hat{h}z$. Se tiene que

$$\pi_{\hat{h}}(z) = 0 \iff \hat{h} = \frac{z^2-1}{4z}$$

Nótese que $z \neq 0$ porque 0 no es raíz de $\pi_{\hat{h}}$. Además, si $\hat{h} \in \partial D_A$, entonces $\pi_{\hat{h}}$ tiene alguna raíz de módulo 1, que es de la forma $e^{i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\hat{h} = \frac{e^{2i\theta}-1}{4e^{i\theta}} = \frac{1}{4}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{-i\theta} = \frac{1}{4}2i\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}i\operatorname{sen}\theta$$

Como $|\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta| \leq \frac{1}{2}$, Esto nos dice que

$$\partial D_A \subset \left\{iy \in \mathbb{C} \colon -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$$

En otras palabras, ∂D_A es un segmento del eje imaginario, así que hay dos opciones: $D_A = \mathbb{C} \setminus \partial D_A$ o $D_A = \emptyset$. Lo primero no puede darse porque D_A no contiene al eje real positivo en algún entorno del origen, luego debe ser $D_A = \emptyset$.