第三章 静磁场

本章的学习方法：比较静电场和静磁场的异同

静电场和静磁场的差别：没有自由磁荷存在，基本单元为磁偶极子;

尽管导体内部存在纵向电场，由导体表面带电导致横向电场，但由于**恒定情况**下，电磁场不发生直接联系，可以分开求解。

内 容 提 要

第一节 静磁场的矢势

§ 1.1 静磁场矢势的引入

- 描述恒定电流磁场的基本方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$$

- 由静电场的无旋性引入静电标势⇒静磁场的无源性引入矢势

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\Rightarrow\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$\boldsymbol{A}$称为磁场的矢势。

§ 1.2 矢势$\boldsymbol{A}$的物理意义

【意义】 沿任一闭合回路$\boldsymbol{A}$的环量代表通过以该回路为界的任一曲面的磁通量。

只有环量才有物理意义

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S \nabla\times\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{S}=\iint_S \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{S}$$

正是由于$\boldsymbol{B}$的无源性，决定了$\boldsymbol{A}$环量的唯一性。

附图：不同曲面上$\boldsymbol{B}$的面积分相同。与静电场$\boldsymbol{E}$的线积分相似。

§ 1.3 矢势$\boldsymbol{A}$的不确定性

只有横向，没有纵向方程，当然不确定

【举例】 沿z轴方向的均匀磁场可以用多个$\boldsymbol{A}$来描述：

$$B_x=B_y=0 \quad , \quad B_z=B_0$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=B_0 \quad , \quad \frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=0$$

$$A_y=A_z=0 \quad , \quad A_x=-B_0 y$$

也可以是：

$$A_x=A_z=0 \quad , \quad A_y=B_0 x$$

- 事实上$\boldsymbol{A}+\nabla\psi$与$\boldsymbol{A}$对应着同一个$\boldsymbol{B}$：$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\nabla\psi)=\nabla\times\boldsymbol{A}$
- 这种任意性决定了只有$\boldsymbol{A}$的环量才有意义，$\boldsymbol{A}$本身无直接意义
- 库仑规范条件：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$

可不可以加这个条件？

§ 1.4 库仑规范条件存在性

【求证】 总可以找到一个$\boldsymbol{A}$，既满足$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，又满足库仑规范条件。
【证明】 设某一解$\boldsymbol{A}$符合$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，但不满足$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=u\neq 0$$

设$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\psi$，故：

让方程右端为零

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla^2\psi=u+\nabla^2\psi$$

取ψ为如下泊松方程的解

$$\nabla^2\psi=-u$$

并带回到$\boldsymbol{A}'$的表达式，所得到$\boldsymbol{A}'$的满足库仑规范条件$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'=0$。

确定了 $\boldsymbol{A}$，就可以用矢势方程描述静磁场

§ 1.5 矢势的微分方程

- 在均匀线性介质中有$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，联立$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$以及$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$可得：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mu\boldsymbol{J}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$$

$$\nabla^2 A_i=-\mu J_i \qquad , \qquad (i=1,2,3)$$

- 对比静电势的方程$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$，可得

$$\boldsymbol{A}(x)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}dV'$$

- 由于在第一章中已经证明过$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，故此上式确为矢势方程的解。
- 由给出的$\boldsymbol{A}$的表达式，可以求出$\boldsymbol{B}$为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}&=\nabla\times\left[\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}dV'\right]\\&=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')dV'\\&=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{r}}{r^3}dV'\end{aligned}$$

- 也就是毕奥—萨伐尔定律。

上述给出的是无界空间的解

§ 1.6 矢势的边值关系

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$$
$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f$$

- 对于非铁磁介质$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$，矢势的边值关系为：

$$\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}_2-\nabla\times\boldsymbol{A}_1)=0 \tag{1}$$
$$\boldsymbol{n}\times(\frac{1}{\mu_2}\nabla\times\boldsymbol{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\boldsymbol{A}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f$$

- 当$\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}\to 0$时，式(1)可以简化为：

这是一个重要条件。反例：螺线管

$$A_{2t}=A_{1t}$$

即$\boldsymbol{A}$的切向分量连续。

书上关于$\boldsymbol{A}_n$的讨论不合适

§ 1.7 静磁场的能量

- 各向同性线性介质中电磁场能量密度：$\omega=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$
- 磁场的总能量：

$$W=\frac{1}{2}\iiint\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\,dV$$

- 用矢势和电流来表示总能量：

与静电能比较

自能？互能？

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\iiint\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\,dV=\frac{1}{2}\iiint(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{H}\,dV\\&=\frac{1}{2}\iiint[\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})]\,dV\\&=\frac{1}{2}\oint(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}+\frac{1}{2}\iiint\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\,dV\\&=\frac{1}{2}\iiint\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\,dV\end{aligned} \tag{2}$$

§ 1.8 静磁场能量的讨论

- 公式(2)仅是在静磁场下才成立；
- 电磁场的能量是分布在场中的，$\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}$决不是能量密度；
- 用能量密度可以计算某区域内的电磁场能量，$\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}$仅在求总能量时有意义。
- 在式(2)中，矢势$\boldsymbol{A}$是由电流分布$\boldsymbol{J}$本身激发的。

§ 1.9 电流在外磁场中的能量

【已知】 某电流分布$\boldsymbol{J}$在给定外磁场中，外磁场的矢势为$\boldsymbol{A}_e$，产生该外磁场的电流分布为$\boldsymbol{J}_e$；
【求解】 电流在外磁场中的相互作用能。
【解】 总电流分布为$\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_e$，总磁场矢势为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_e$，故磁场的总能量为：

$$W=\frac{1}{2}\iiint(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_e)\cdot(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_e)\,dV$$

- 电流分布$\boldsymbol{J}_e$及$\boldsymbol{J}$产生磁场的自能分别为：

$$W_1=\frac{1}{2}\iiint\boldsymbol{A}_e\cdot\boldsymbol{J}_e\,dV\qquad,\qquad W_2=\frac{1}{2}\iiint\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\,dV$$

- 故相互作用能为

$$W_i=W-W_1-W_2=\frac{1}{2}\iiint(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}_e+\boldsymbol{A}_e\cdot\boldsymbol{J})\,dV$$

由于： 书上$P104$公式?

$$\boldsymbol{A}_e=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')}{r}dV'\qquad,\qquad\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}dV'$$

故此：

$$\frac{1}{2}\iiint(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}_e)\,dV=\frac{1}{2}\iiint(\boldsymbol{A}_e\cdot\boldsymbol{J})\,dV$$

所以可得电流$\boldsymbol{J}$在外磁场中的相互作用能： 注意与静电能比较

$$W_i=\iiint\boldsymbol{A}_e\cdot\boldsymbol{J}\,dV$$

例一

【问题】 无穷长直导线载电流I，求磁场的矢势和磁感应强度。
【解】 书上用$\boldsymbol{A}(x)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}dV'$积分求解，略去不讲；
【讨论】

- 用量纲分析的方法看此题：
  - 静电场：I $\boldsymbol{E}\propto\frac{1}{r^2}\leftrightarrow\varphi\propto\frac{1}{r}$II $\boldsymbol{E}\propto\frac{1}{r}\leftrightarrow\varphi\propto\ln r$
  - 静磁场：$\boldsymbol{B}\propto\frac{1}{r}\leftrightarrow\boldsymbol{A}\propto\ln r$
- 注意公式$\boldsymbol{A}=-\left(\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{r}{R_0}\right)\boldsymbol{e}_z$中，当$r\to\infty$时$\boldsymbol{A}\to\infty$ 不存在无限长的导线
- 由$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$与$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$方程的相似性：安培环路定理 (螺线管、长导线)、(均匀磁场、均匀电流)
- 两个常用公式：$\nabla\times(\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r})=0\quad(r\neq0),\qquad\nabla\times(r\boldsymbol{e}_\theta)=2\boldsymbol{e}_z$

例二

【问题】 半径为a的导线圆环载电流I，求矢势和磁感应强度。
【解】 书上用$\boldsymbol{A}(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{1}{r}Id\boldsymbol{l}$积分求解，略去不讲；
【讨论】

- 当$2ra\sin\theta\ll r^2+a^2$时，矢势$\boldsymbol{A}$为：

$$\boldsymbol{A}(r,\theta)=\frac{\mu_0 Ia}{4}\left[\frac{ra\sin\theta}{(r^2+a^2)^{3/2}}+\frac{15}{8}\frac{r^3a^3\sin^3\theta}{(r^2+a^2)^{7/2}}\right]\boldsymbol{e}_\phi$$

在远场条件下($r\gg a$)取第一项：

$$\boldsymbol{A}(r,\theta)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\pi a^2\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{3}$$

- 上式(3)相当于磁偶极子产生的矢势；
- 本题与P82静电场例题有许多相似之处。

§ 1.10 小结

- 由静磁场的无源性可引入矢势$\boldsymbol{A}$来描述磁场：$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$；
- $\boldsymbol{A}$本身没有物理意义，但$\boldsymbol{A}$的环量代表通过以该回路为界的任一曲面的磁通量；
- 可以引入库仑规范条件：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$来确定矢势$\boldsymbol{A}$；
- 利用矢势的微分方程以及相应边界条件可以唯一求解静磁场问题；
- 静磁场的总能量为：$W=\frac{1}{2}\iiint\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\,dV$；
- 电流在外磁场中的相互作用能：$W_i=\iiint\boldsymbol{A}_e\cdot\boldsymbol{J}\,dV$。

【习题】 Page 131：1,2,3,4,7

第二节 静磁标势

§ 2.1 磁标势的引入

- 磁场的矢势$\boldsymbol{A}$是一矢量，求解过程一般比较复杂；
- 当空间中不存在自由电流时，静磁场方程转化为：$\nabla\times\boldsymbol{H}=0$ ， $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，与无源的静电场方程相似；
- 在实际问题中会经常遇到具有上述特征的磁场：如铁磁介质产生的磁场、电磁铁间隙处的磁场。
- 回顾静电势的引入：保守力场，积分的路径无关性；

$$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0 \qquad or \qquad \int_{C_1}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{C_2}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

- 但一般而言：

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S} \neq 0$$

- 考虑如何选取适当的条件，解决该矛盾。

§ 2.2 关于环量积分的讨论

- 对于任一点$\boldsymbol{x}\in L$有$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=0$，则$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=0$
- 对于任一点$\boldsymbol{x}\in L$有$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=0$，未必$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=0$
- 事实上应该为：对于任一点$\mathbf{x}\in\mathbf{S}$有$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=0$，则$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S \nabla\times\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S}=0$
- 举例：无限长直导线：$\boldsymbol{H}$的旋度仅在$r=0$点不为零，但任一绕原点的闭合曲线环量不为零；
- 这也就是说：$\nabla\times\boldsymbol{H}$是局域的，仅和当地$\boldsymbol{J}$有关；但$\boldsymbol{H}$并不是局域的；
- 同理：$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$是局域的，仅和当地$\rho$有关；但$\boldsymbol{E}$并不是局域的：$\nabla\cdot\boldsymbol{E}\,? \Rightarrow \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=0$
- 同理：$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=0 \quad (r\neq 0)$，但：$\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}?=0$

洛仑兹力只和局域的$\boldsymbol{B}$有关
A–B效应

§ 2.3 引入磁标势的条件

为了满足下述条件：

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=0$$

利用挖去空间的办法，使得剩下的空间V中任何L都不链环电流。也即：

画图！
挖走的是空间、不是电流。否则方程就不对了！

1. 所考察的空间区域里没有传导电流：$\nabla\times\boldsymbol{H}=0$
2. 空间应为单联通区域

【定义】 对于空间区域V内任何一条闭路，都存在一张以此闭路为全部边界且完全含在V内的有界的简单曲面S，则称V为曲面单联通区域，否则称为曲面多联通区域。

通常的挖走方法是去除一个以线圈为边界（含线圈）的磁壳。

磁壳的选择有任意性

§ 2.4 铁磁介质的磁标势方程

磁标势法的重要应用之一就是求解磁铁的磁场。其不再满足$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{H}$不再是单值函数。

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})=f(\boldsymbol{H}) \tag{5}$$

将(5)式带入(4)式可得：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}$$

将分子电流看作由一对假想磁荷组成的磁偶极子，与$\nabla\cdot P=-\rho_p$对应，假想磁荷分布为：

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{M}$$

铁磁介质的磁标势方程（续）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\frac{\rho_m}{\mu_0}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}=0$$

其与静电场微分方程差别仅在于没有自由磁荷：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

由此，静电场的求解方法均可以用到静磁场上，引入磁标势φ_m

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m$$

在方程的形式上$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{H}$相对应。

物理地位上$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}$对应，但形式上$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{H}$更对应

§ 2.5 磁标势公式与静电场公式的对比

静电场			静磁场		
$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$	$=$	$\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}$	$\nabla\cdot\boldsymbol{H}$	$=$	$\frac{\rho_m}{\mu_0}$
$\nabla\times\boldsymbol{E}$	$=$	0	$\nabla\times\boldsymbol{H}$	$=$	0
ρ_p	$=$	$-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$	ρ_m	$=$	$-\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{M}$
$\boldsymbol{D}$	$=$	$\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{B}$	$=$	$\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$
$\boldsymbol{E}$	$=$	$-\nabla\varphi$	$\boldsymbol{H}$	$=$	$-\nabla\varphi_m$
$\nabla^2\varphi$	$=$	$-\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}$	$\nabla^2\varphi_m$	$=$	$-\frac{\rho_m}{\mu_0}$

§ 2.6 例一

【证明】 $\mu\to\infty$的磁性物质表面为等磁势面。

与$\boldsymbol{H}$处处垂直的面

【证】 以角标1代表磁性物质，2代表真空，由磁场边界条件

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0\qquad,\qquad\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0$$

由于$\boldsymbol{B}_1=\mu_1\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{B}_2=\mu_2\boldsymbol{H}_2$，故可得：

$$\mu_2H_{2n}=\mu_1H_{1n}\qquad,\qquad H_{2t}=H_{1t}$$

设$\boldsymbol{H}$与界面法线$\boldsymbol{n}$的夹角为θ，故

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\frac{H_{1t}}{H_{1n}}}{\frac{H_{2t}}{H_{2n}}}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

因为$\mu_1\to\infty$，故此可得$\theta_2\to0$：也即$\boldsymbol{H}_2$与表面垂直：表面为等磁势面。

§ 2.7 几种特殊的电磁介质

- 导体：$\varepsilon \to \infty$，$\varepsilon = \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{E} \to 0$
- 软铁磁材料：$\mu \to \infty$，$\mu = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{H}}$，$\boldsymbol{H} \to 0$
- 超导体：$\mu \to 0$，$\boldsymbol{B} \to 0$
- 导体：$\sigma \to \infty$，$\sigma = \frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{E} \to 0$
- 绝缘体：$\sigma \to 0$，$\sigma = \frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{J} \to 0$
- 什么材料：$\varepsilon \to 0$?

§ 2.8 小结

- 当空间中不存在自由电流时，静磁场方程与静电场方程相似，适合引入磁标势；
- 利用挖去空间的办法，引入磁标势；
- 挖去空间满足条件：
  - 所考察的空间区域里**没有**传导电流：$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$；
  - 空间应为**单联通区域**：通常的挖走方法是去除一个以线圈为边界（含线圈）的**磁壳**；
- 磁标势方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} \quad , \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = 0$$
$$\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi_m \quad , \quad \rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{M}$$

【习题】 Page 133: 8,9,11

第三节　磁多极矩

§ 3.1 磁矢势的多极展开

无界空间中，电流分布为$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$，空间中的磁场矢势$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} dV' \tag{6}$$

当场点距离电流分布区域很远时($r \gg x'$)，可对(6)式做多极矩展开：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \left[\frac{1}{r_0} - \boldsymbol{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r_0} + \cdots \right] dV' \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\, dV' = 0$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r_0}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{8\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' : \nabla\nabla\frac{1}{r_0}dV'$$

§ 3.2 磁零极矩形成矢势为零

稳恒电流构成闭合回路，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$是无源有旋的，且流出边界的电流为零：

$$\nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}') = (\nabla'\cdot\boldsymbol{J})\,\boldsymbol{x}' + (\boldsymbol{J}\cdot\nabla')\,\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{J}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r_0}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r_0}\iiint \nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}')\,dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r_0}\oint d\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}' \\
&= 0
\end{aligned}$$

磁单极不存在，因此对应点电荷的项为零；

§ 3.3 磁偶极矩矢势的计算

第二项可由$\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}$改写为$\boldsymbol{m}\times\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}$形式：

$$\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}_0) = (\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{f})\times\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r}_0)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r_0}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}'\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3})dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r_0^3}\sum_i r_{0i}\iiint \boldsymbol{J}x_i'\,dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r_0^3}\sum_i r_{0i}\iiint \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{J}x_i' + J_i\boldsymbol{x}') + \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}x_i' - J_i\boldsymbol{x}')\right]dV'
\end{aligned}$$

$$\nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}'x_i') = x_i'\,\nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}') + \nabla'x_i'\cdot\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}' = x_i'\,\boldsymbol{J} + (\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{J}x_i' + J_i\boldsymbol{x}'$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r_0^3}\sum_i r_{0i}\iiint \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{J}x_i' - J_i\boldsymbol{x}')\right]dV' \\
&= \frac{\mu_0}{8\pi r_0^3}\iiint [\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r}_0) - \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{r}_0)]\,dV'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu_0}{8\pi r_0^3}\iiint (\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J})\times\boldsymbol{r}_0\,dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J})\,dV'\times\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{x}'\times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')dV'$$

$\boldsymbol{m}$称之为电流体系的磁矩。(8)式即为磁偶极矩产生的矢势。 量纲与r_0^2成反比
对于闭合线圈内的电流分布，磁矩中体积分转化为线积分：

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\oint \boldsymbol{x}'\times I d\boldsymbol{l}=I\boldsymbol{S}$$

其中用到：$\oint \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\times d\boldsymbol{l}=\oint \delta\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}$

§ 3.4 电流线圈的磁偶极矩

【证明】 对于某个电流线圈，可以选择不同曲面但拥有相同边界，证明其磁偶极矩为不变量。
【证】 一个任意电流线圈可以看作由它所围的一个曲面S上许多小电流线圈组合而成，因此它的总磁偶极矩为

$$\boldsymbol{m}=I\iint_S d\boldsymbol{S}$$

尽管以电流线圈为边界的曲面S并不唯一，但由高斯定理：

$$\iiint \nabla\psi dV=\oint d\boldsymbol{S}\,\psi$$

取$\psi=1$可得：

$$\iint_{S_1} d\boldsymbol{S}-\iint_{S_2} d\boldsymbol{S}=\oint d\boldsymbol{S}=0$$

也即不同曲面给出相同的磁矩$\boldsymbol{m}$。

§ 3.5 磁偶极矩产生的磁场以及磁标势

由磁矩的矢势计算其产生的磁场：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{(1)}=\boldsymbol{\nabla}\times A^{(1)}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}\right)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\boldsymbol{m}\times\nabla\frac{1}{r_0}\right)\\&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\boldsymbol{m}\nabla^2\frac{1}{r_0}-(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r_0}\right]=-\frac{\mu_0}{4\pi}(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\left(\boldsymbol{m}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}\right)&=\boldsymbol{m}\times\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}\right)+(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}\\&=-\boldsymbol{m}\times\left(\nabla\times\nabla\frac{1}{r_0}\right)+(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}=(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{B}^{(1)}=-\mu_0\nabla\varphi_m^{(1)}$$

磁偶极矩的标势与电偶极矩静电势形式相仿 注意量纲φ_m-H、$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

$$\varphi_m^{(1)}=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}_0}{4\pi r_0^3}$$

§ 3.6 电流分布在外磁场中的能量

具有电流分布$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$的体系在外磁场$\boldsymbol{A}_e(\boldsymbol{x})$中的相互作用能为：

$$W = \iiint \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}_e\, dV \tag{9}$$

考虑载流为I的线圈在外磁场中的能量

Φ_e为外磁场对线圈L的磁通量

$$W = I\oint_L \boldsymbol{A}_e\cdot d\boldsymbol{l} = I\iint_S \boldsymbol{B}_e\cdot d\boldsymbol{S} = I\Phi_e$$

当电流区域线度远小于磁场变化线度时，取坐标原点在位于线圈所在小区域并对外磁场$\boldsymbol{B}_e$展开，可得：

$$\begin{aligned} W &= I\iint_S d\boldsymbol{S}\cdot[\boldsymbol{B}_e(0)+\boldsymbol{x}\cdot\nabla\boldsymbol{B}_e(0)+\cdots] \\ &\approx \boldsymbol{B}_e(0)\cdot I\iint_S d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e(0) \end{aligned}$$

§ 3.7 磁偶极子在外磁场中的有效势能

$$U = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e \tag{10}$$

- 有效势能不是相互作用能，二者之间相差一个负号！
- 其原因在于计算相互作用能时假设了I与I_e均保持不变。
- (10)式和电偶极子在外电场中的能量$-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$形式相似！

磁偶极子在外磁场中所受的力：

当$\boldsymbol{B}$均匀时受力为零；此处的∇是对场点作用，故$\boldsymbol{m}$为常数

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U = \nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e) = \boldsymbol{m}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}_e)+(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_e = (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_e$$

磁偶极子在外磁场中的力矩：

与静电场电偶极子力、力矩公式相仿

$$L_\theta = -\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(mB_e\cos\theta) = -mB_e\sin\theta$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_e$$

§ 3.8 有效势能与相互作用能

由于磁单极子不存在，故此假设I与I_e保持不变时，隐含了外电源对线圈作功。

电荷可以定住，故此可以不做功！想象模型：电偶极子间距是活动的。由于没有磁单极子，故此定不住！

线圈I与I_e相互作用能：

$$W = \frac{1}{2}\left(I\oint \boldsymbol{A}_e\cdot d\boldsymbol{l} + I_e\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}\right) = \frac{1}{2}(I\Phi_e + I_e\Phi)$$

当线圈运动时，若保持电流I与I_e不变，则磁能改变量：

$$\delta W = \frac{1}{2}(I\delta\Phi_e + I_e\delta\Phi)$$

为了保持电流不变，必须由电源提供能量，以抵抗感应电动势所作功。
线圈L与L_e上的感应电动势分别为：

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_e}{dt} \qquad , \qquad \mathscr{E}_e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

δt时间内感应电动势所作功：

$$\mathscr{E} I \delta t + \mathscr{E}_e I_e \delta t = -I\delta\Phi_e - I_e \delta\Phi$$

电源为抵抗此感应电动势必须提供相当能量才能保持电流不变

$$\delta W_s = I\delta\Phi_e + I_e\delta\Phi = 2\delta W$$

场对线圈所作功：

$$\delta A = \delta W_s - \delta W = \delta W$$

即对线圈所作的功等于磁能的增量而不是其减小量！
定义有效势能使得作功等于势函数的减小，故此有：

$$U = -W = -\iiint \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A}_e \, dV \approx -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_e$$

§ 3.9　小结

- 空间中的电流体系，可以按其电流密度做出多极矩展开；
- 由于不存在磁单极子，电流系统的零阶矩为零；
- 电流体系磁偶极矩为$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')dV'$；
- 磁偶极矩矢势为$\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}$，标势为$\varphi_m^{(1)} = \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}_0}{4\pi r_0^3}$，磁场为$\boldsymbol{B}^{(1)} - \frac{\mu_0}{4\pi}(\boldsymbol{m} \cdot \nabla)\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}$；
- 电流线圈在外磁场中的能量$W = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_e(0)$，磁偶极子在外磁场中的有效势能$U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_e$；
- 磁场对线圈所作的功等于磁能的增量而不是其减小量；
- 磁偶极子在外磁场中所受的力$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_e$，力矩$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_e$；
- 磁偶极子与电偶极子有很多相似之处。

【习题】 Page 134: 13,14,15

第三节　阿哈罗诺夫–玻姆效应

（略）

第五节　超导体的电磁性质

§ 5.1　超导体的基本电磁现象

1. 超导电性

【定义】 当温度将至一定阈值T_c以下时，电阻突降为零；

开始出现超导电性的温度称为临界温度T_c；

物体的超导性质与所加磁场有关；

$$H_c(T) = H_c(0)\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$$

2. 迈斯纳(Meissner)效应

【定义】 超导体内部的磁感应强度$\boldsymbol{B} = 0$；

迈斯纳(Meissner)效应的历史无关性；

迈斯纳效应与零电阻特性相互独立；

§ 5.2　超导体的电磁性质方程——伦敦第一方程

超导体内的传导电子分为超导电子以及正常电子两类，分别用下标s及n表示；

$$n = n_s + n_n \qquad , \qquad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_s + \boldsymbol{J}_n$$

$$\boldsymbol{J}_n = \sigma \boldsymbol{E}$$

$$m\dot{v} = -e\boldsymbol{E} \qquad , \qquad \boldsymbol{J}_s = -n_s e \boldsymbol{v}$$

伦敦第一方程：超导电流方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = \alpha \boldsymbol{E} \qquad , \qquad \left(\alpha = \frac{n_e e^2}{m}\right)$$

在稳恒情况下：

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{J}_n = 0$$

即：只有超导电子传导电流——电阻为零。

§ 5.3　超导体的电磁性质方程——伦敦第二方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = \alpha \boldsymbol{E} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \boldsymbol{J}_s = \alpha \nabla \times \boldsymbol{E} = -\alpha \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{J}_s = -\alpha \boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

假设$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$可得伦敦第二方程：

$$\nabla \times \boldsymbol{J}_s = -\alpha \boldsymbol{B}$$

由迈斯纳效应可知：超导体内部$\boldsymbol{B} = 0$；
由$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J}$且超导体内部$\boldsymbol{B} = 0$，故超导体内部$\boldsymbol{J} = 0$
在超导体内，电流与磁场互相制约，使它们都只能存在于表面薄层内，而不能深入。

超导体的电磁性质方程—伦敦第二方程（续）

在稳恒情况下

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J} = \mu \boldsymbol{J}_s \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu \nabla \times \boldsymbol{J}_s$$

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B} = -\alpha\mu \boldsymbol{B}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \boldsymbol{B} \qquad , \qquad \lambda_L = \frac{1}{\sqrt{\mu\alpha}}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{J}_s = -\alpha \boldsymbol{B} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{J}_s) = -\alpha \nabla \times \boldsymbol{B}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{J}_s) - \nabla^2 \boldsymbol{J}_s = -\alpha\mu \boldsymbol{J}_s$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{J}_s = \frac{1}{\lambda_L^2} \boldsymbol{J}_s \qquad , \qquad \lambda_L = \frac{1}{\sqrt{\mu\alpha}}$$

λ_L称为穿透深度，表征磁场进入超导体内部的线度。

§ 5.4 超导体作为完全抗磁铁

把超导电流看作是磁化电流：

$$\nabla \times \boldsymbol{M} = J_s$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$$

由于$\boldsymbol{B} = 0$，故此$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{H}$

$$\varkappa_M = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}} = -1$$

磁导率

$$\mu = \mu_0 (1 + \varkappa_M) = 0$$

超导体是完全抗磁的。