第一章　电磁现象的普遍规律

内 容 提 要

本章由静止和变化的电磁场实验定律出发，总结出描述电磁场变化规律的麦克斯韦方程组及洛仑兹力的公式。这些方程是宏观电磁场论的理论基础。在以后各章中将应用它们来解决各种与电磁场有关的问题。

1、物理问题（方程）：麦克斯韦方程、拉普拉斯方程、泊松方程、亥姆霍兹方程、达朗贝尔方程等;

2、源项：有源、无源、静止、动态?

3、介质：复杂！线性、均匀、各向同性？铁磁、导体、超导、等体、灯管...

4、边界条件：开放的、电边界、磁边界?

5、位型：平板、柱、球、一般?

6、频率：工频、射频、微波、可见光、伽马射线?

7、参考系：静止、运动?

电磁场的观念

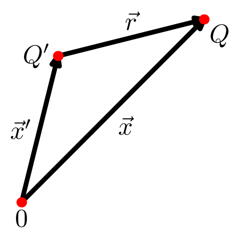
- 电磁场是物质存在的一种形态；
- 表征：与其它带电物质以一定形式发生相互作用；
- 特点：分布于广域空间；
- 描述方法：两个矢量函数； 完备？唯一？
  - 电场强度： $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$
  - 磁感应强度： $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$
- 运动规律：麦克斯韦方程组、洛仑兹力、本构关系式；
- 研究方法：求解 $\boldsymbol{E}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 所满足之偏微分方程。

第一节　库仑定律和静电场

§ 1.1 库仑(Coulomb)定律

1785，库仑定律是基本实验定律，并没有解决物理本质问题

常用符号约定：源点，场点、坐标



- 真空中静止点电荷 Q' 对另一个静止点电荷 Q 的作用力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向

$$\boldsymbol{F} = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{Q'Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})Q(\boldsymbol{x})$$

  其中 ε_0 为介电常数，又称电容率。

- 对库仑定律的两种物理解释：
  - 两电荷之间的作用力是超距作用：电荷—电荷； 在静止情况下是无法分辨的
  - 近距作用：电荷—电场—电荷； 电场是物理实在的

§ 1.2 电荷产生的静电场

- 电荷产生的电场：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}) = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

电场的特征是对电荷有作用力，故可利用之描述电场：定义单位点电荷所受的力为电场强度

【讨论】 $\boldsymbol{F} \propto \frac{1}{r^{(2+\delta)}}$ ， δ 的极限值 2.7×10^{-15}

平方反比定律：是高斯定律的基础，且蕴含着光子质量为零。哈密顿量，汤川势...

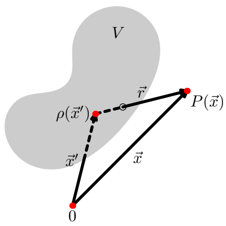
其系数定义了电荷的单位，这里的形式是国际单位制

- 分离电荷分布产生的静电场
  力的叠加性导致静电场的叠加性

叠加性原理：实验原理，线性理论

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i'}{r_i^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r_i}}{r_i}$$

先点电荷、再分离的电荷、再连续分布：数学上从单粒子到多粒子求和、再到体积分



请注意积分区域

空间一点的电场与其邻近的电场及电荷的相互关系：静电场微分形式

- 对连续的电荷分布产生的静电场：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint\limits_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV'$$

【讨论】 该公式成立条件是电荷静止，此时场也不随时间改变。

哪个参考系？

§ 1.3 高斯(Gauss)定理

电通量总是正比于电量。

积分区域 V 及 $\boldsymbol{S}$ 是任意的

- 高斯定理积分形式：

$$\oint\limits_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_V \rho dV$$

其中 V 由 $\boldsymbol{S}$ 所包围。
由散度的定义：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

- 可得高斯定理微分形式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

【讨论】

- 局域性：电场的散度仅仅与当地的电荷相关；

而远处的场则是通过场本身传递过去的

- 有源场：电荷为电场之源

没有电荷，散度为零

- 普适性：库仑定律为静电场下的结论，但高斯定理却始终成立。

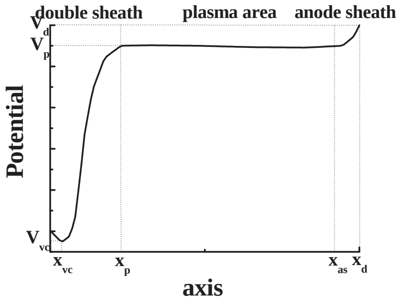
§ 1.4 电荷对电场作用的局域性

气体放电一维平板模型

$$\frac{dV}{dx}=-E \quad , \quad \frac{dE}{dx}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

电压曲线的曲率表征该处是富电子还是富离子性。



§ 1.5 高斯定理的证明

【已知】

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint\limits_{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV'$$

【求证】

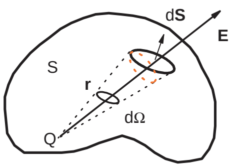
$$\oint\limits_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_V \rho dV$$

【证明】

$$\begin{aligned}\oint\limits_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\limits_S[\iiint\limits_{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV']\cdot d\boldsymbol{S}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\infty}\rho(\boldsymbol{x}')(\oint\limits_S\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{S})dV'\end{aligned}$$

如图所示

$$\frac{\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{S}}{r^2}=\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=d\Omega$$



故当$\boldsymbol{x}'$在S范围之外时($x'\notin S$)，有

$$\oint\limits_S\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

而$\boldsymbol{x}'$在S范围之内($x'\in S$)，有

$$\oint\limits_S\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{S}=4\pi$$

将

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\oint\limits_S\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{S}=\begin{cases}0 & \boldsymbol{x}'\notin S\\ 1 & \boldsymbol{x}'\in S\end{cases}$$

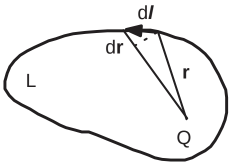
带入即可得：

$$\oint\limits_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_V \rho dV$$

§ 1.6 静电场的旋度

旋度是矢量场性质的一个方面，要确定一个矢量场，还需要给出共旋度。旋度所反映的是场的环流性质

$$\begin{aligned}
\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L \Big[\iiint_\infty \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV'\Big]\cdot d\boldsymbol{l} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\infty \rho(\boldsymbol{x}')\Big(\oint_L \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{l}\Big)\,dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\infty \rho(\boldsymbol{x}')\Big(\oint_L \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{r}\Big)\,dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\infty \rho(\boldsymbol{x}')\Big[\oint_L d\Big(-\frac{1}{r}\Big)\Big]\,dV' = 0
\end{aligned}$$



其中推导过程中利用了 $d\boldsymbol{l} = d\boldsymbol{r}$ ，以及 $\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = r\mathrm{d}r$

L 选取的任意性

由斯托克斯(Stokes)定理 $\oint_L \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{S}$ 可得：

- ▶ 静电场是无旋场： $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$

只是静电场才是无旋的

§ 1.7 静电场高斯定理的直接证明

【已知】

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint_\infty \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV'$$

【求证】

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

【证明】

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint_\infty \rho(\boldsymbol{x}')\,\Big[\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\Big]dV'$$

我们知道：当$r\neq 0$时有

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \nabla\Big(\frac{1}{r^3}\Big)\cdot\boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3}(\nabla\cdot\boldsymbol{r}) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

故此上面体积分只需对$r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \leq \varepsilon$的小球进行，这时可取$\rho(\boldsymbol{x}') = \rho(\boldsymbol{x})$，并抽出积分号外可得：

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{r\leq\varepsilon}\Big[\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\Big]dV' = \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{r\leq\varepsilon}\Big(-\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\Big)dV' \\
&= \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{r\leq\varepsilon}\Big(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\Big)dS'
\end{aligned}$$

又因为$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$与面元$d\boldsymbol{S}'$反向，且：

$$\oint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint d\Omega = 4\pi$$

故此

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

§ 1.8 静电场无旋性的直接证明

【已知】

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint\limits_{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV'$$

【求证】

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

【证明】

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\infty}\rho(\boldsymbol{x}')(\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})dV'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\infty}\rho(\boldsymbol{x}')[\nabla(\frac{1}{r^3})\times\boldsymbol{r}+\frac{1}{r^3}(\nabla\times\boldsymbol{r})]dV'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\infty}\rho(\boldsymbol{x}')[-\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5}\times\boldsymbol{r}+\frac{1}{r^3}\times 0]dV'\\&=0\end{aligned}$$

中间也可利用

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla\times(\nabla\frac{1}{r})=0$$

§ 1.9 小结

- 连续电荷分布产生的静电场为：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint\limits_{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV'$$

- 电场强度满足叠加性原理；
- 电场是有源场：$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$；
- 静电场是无旋的：$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$；

【习题】 Page 45：1,2,3

第二节 毕奥–萨伐尔定律与静磁场

§ 2.1 电流密度

磁、电不可分。稳恒磁场与稳恒电流相关。如何描述电流分布？

- 电流密度的定义

举例：直流电流均匀分布；交流则有趋肤效应，I太粗糙

$$\boldsymbol{J} = \frac{dQ}{dt\,dS\,\cos\theta} \cdot \boldsymbol{e}_I = \frac{dI}{dS\,\cos\theta} \cdot \boldsymbol{e}_I$$

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

电流的分布（空间、时间）

- 电流密度的微观解释

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v} = nq\boldsymbol{v}$$

- 多种成分的电流密度

$$\boldsymbol{J} = \sum_i \rho_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i n_i q_i \boldsymbol{v}_i$$

§ 2.2 电荷守恒定律

- 系统**总电荷**保持不变；
  - 电荷是物质的**基本属性**之一；

什么是基本属性？有基本作用才成为基本属性，适当时才能体现。质量、电荷、自旋

- 电荷守恒定律是一条**精确**、**基本**的**实验**定律；
- 无论在化学反应还是原子核反应过程中，电荷守恒定律**普遍**成立；
- 电荷守恒定律的描述方法：
  - 电流的连续性方程积分形式

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV$$

任一闭合曲面，可以流进流出，但由于没有**源项**（不能产生或消灭电荷），故此流入流出的量应该等于变化率

连续性方程适用很广：电流、粒子流、能流

  - 电流的连续性方程微分形式

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{J}\,dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

【讨论】

- 全空间总电荷守恒

$$\frac{d}{dt}\iiint_\infty \rho\,dV = 0$$

从偏微分到全微分的区别

- 稳恒电流下的情况

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

动平衡，随时间的偏微分为零

稳恒电流是**无源**的、也即是**闭合**的

§ 2.3 毕奥——萨伐尔(Biot——Savart)定律

- 电流之间的作用力——电流激发磁场——磁场的特征性质——磁感应强度

实验定律

$$dF = I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

- 恒定的体电流激发的磁感应强度

大小和r^2成反比

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV'$$

其中μ_0为真空磁导率

- 线电流激发的磁感应强度

这是磁场分布的积分形式；要求细致的情况，贴近场的特点，需要了解电流元与邻近磁场关系、邻近磁场与磁场间关系：微分形式

$$\boldsymbol{J} dV' = \boldsymbol{J}\,(d\boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{l}) = (\boldsymbol{J}\, dS_n)\, dl = I\, d\boldsymbol{l}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

§ 2.4 磁场的环量和旋度

- **安培(Ampère)环路定律**
  - 载流导线产生的磁场，沿任意闭合曲线的环量与通过该闭合曲线所围曲面的电流成正比

怎样的曲面？

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\, I$$

  - 不通过闭合曲线所围曲面的电流对环量没有贡献。

安培定律可以用来导出电流与其邻近磁场的环量关系，排除其他地方流过的电流产生影响。

- 连续电流分布的环量定律

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \iint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

- 磁场的旋度

从回路的任意选取，以及*Stokes*定理，可得出

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

§ 2.5 磁场的散度

- 磁力线是闭合曲线，磁感应强度是无源场
- 磁场无源性的积分形式：

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

上式对任意闭合曲面都成立。

- 磁场无源性的微分形式：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

【讨论】

- 磁场的无源性是普适的

原因就是磁单极子

- 寻找磁单极子：

麦克斯韦方程的对偶性、无源时成立，有源时对偶性破坏

§ 2.6 磁场散度的证明

【已知】

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV'$$

【求证】

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

【证明】

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \nabla(\frac{1}{r}) dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla(\frac{1}{r}) \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\, dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla \times [\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\frac{1}{r}] dV' \\
&= \nabla \times [\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} dV'] \\
&= \nabla \times \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} dV'$$

所以：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

§ 2.7 磁场旋度的证明

【已知】

用$\boldsymbol{A}$的好处是：比起*biot*定律，积分号中的叉乘移动到了积分号外。

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \quad , \quad \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} dV'$$

【求证】

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

【证明】 由于

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$$

- 先求解$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla \cdot [\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}] dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \cdot \nabla\frac{1}{r}\, dV'
\end{aligned}$$

由于

$$r = |x - x'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

因此对r的函数而言，对$\boldsymbol{x}$的微分与对$\boldsymbol{x}'$的微分仅差一个负号，故而

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\cdot\nabla'\frac{1}{r}\,dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \{\nabla'\cdot[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\frac{1}{r}] - \frac{1}{r}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\}\,dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\frac{1}{r}\,d\boldsymbol{S}' + \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}\,dV'
\end{aligned}
$$

- 由于积分区域V包含了整个电流区域，故以V为边界的闭合曲面S上，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$点点为零，故此上式中的第一项为零；
- 又因电流稳恒，故由电荷连续性方程可知：

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') = -\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}')}{\partial t} = 0$$

  故此上式中的第二项为零；

综上所述

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$$

- 再来看$\nabla^2\boldsymbol{A}$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\boldsymbol{A} &= \nabla^2[\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}\,dV'] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla^2\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}\,dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,\nabla^2\frac{1}{r}\,dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,dV'
\end{aligned}
$$

我们知道：当$r\neq 0$时有

其实$\nabla^2\frac{1}{r}$是 $-4\pi\delta$ 函数

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \nabla(\frac{1}{r^3})\cdot\boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3}(\nabla\cdot\boldsymbol{r}) = -\frac{3}{r^4}(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}) + \frac{3}{r^3} = 0$$

故上述体积分只需对$r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \leq \varepsilon \ll 1$的小球进行，此时

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \approx \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$$

由此可得：

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\boldsymbol{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\iiint_{r\leq\varepsilon} \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\iiint_{r\leq\varepsilon} \nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\oint_{r=\varepsilon} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot dS'
\end{aligned}
$$

又因为$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$与面元$d\boldsymbol{S}'$反向，且：

$$\oint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint d\Omega=4\pi$$

故

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}$$

- 由此可得磁场旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J}$$

【讨论】

- 局域性：某点邻城上的磁感强度的旋度只和该点上的电流密度有关。
- 空间中存在的磁感应强度（电场强度），尽管场强是服从叠加原理的，尽管可能都有不为零的磁场环量（电通量），但是磁场（电场）的旋度（散度）只存在于有电流分布（电荷存在）的地方，而在周围空间中的磁场是无旋（源）的。

该性质对我们了解问题带来很大的帮助。

- 上式仅在静磁场下才成立。

§ 2.8 小结

- 电荷守恒定律精确成立；
- 稳恒电流激发恒定磁场，磁感应强度的大小和方向由毕奥—萨伐尔定律给出；
- 恒定磁场旋度和该点处电流密度成正比；
- 磁场是无源的。

【习题】 Page 46：4,5

第三节 麦克斯韦(Maxwell)方程组

§ 3.1 静电场和静磁场的方程组

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$$

【推广】 变化的电、磁场可以互相激发：

- 变化磁场激发电场(法拉第电磁感应定律)；
- 变化电场激发磁场(麦克斯韦位移电流假设)。

§ 3.2 法拉第电磁感应定律

闭合线圈中的感应电动势与通过该线圈内部的磁通量变化率成正比，其方向选取：阻碍磁通量变化。

1831年，一般情况下的电场旋度

是实验定律

$$\mathscr{E} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \mathscr{E} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla$

详细可见《经典电动力学》P233

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

【讨论】

- 变化的磁场产生有旋的电场，这是和闭合回路的选取没有关系；
- 运算过程中$\frac{d}{dt}$变到$\frac{\partial}{\partial t}$需要回路$L$固定不变。

$\frac{d}{dt}$在积分号外，不含x, y, z；$\frac{\partial}{\partial t}$在积分号内，含$x, y, z$；

$\frac{d}{dt}$包括两部分：被积函数的变化以及积分区域的变化；

§ 3.3 位移电流

一般情况下的磁场旋度

是先写出来的，然后再从实验检验

- 已知静磁场下

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$$

$$0 = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t} =?$$

方程右端仅在稳恒状态下才等于零。

位移电流：介质中：手持鲜花的集体操，时变情况下即使不松手也会“流动”

位移电流：真空中：一样有$\rho_P = \nabla\cdot\boldsymbol{P} = 0$，故以太假说；

- 从两方面入手进行推广
  - 当$\frac{\partial}{\partial t}\to 0$时，方程右端应该回到稳态情况。故可以猜测形式如下：

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J} + \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial t}$$

  - 用电荷守恒定律确定f的形式

$$\begin{aligned}0 = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) &= \nabla\cdot(\mu_0\boldsymbol{J} + \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial t})\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\,\rho - \nabla\cdot\boldsymbol{f})\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\varepsilon_0\,\nabla\cdot\boldsymbol{E} - \nabla\cdot\boldsymbol{f})\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{f} = \mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E} \qquad , \qquad \boldsymbol{J}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

并非严格推出

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_D)$$

§ 3.4 真空中Maxwell方程组

1864年，20个标量方程；

1900年Gibbs发表矢量文章，才是这个形式

一般情况下电荷电流激发电磁场以及电磁场内部运动规律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

【讨论】

- 一般情况下，不再有单独的电场，也不再有单独的磁场，总称为电磁场；
- ρ、$\boldsymbol{J}$为源项，可以激发电磁场；
- 即使源项ρ、$\boldsymbol{J}$为零，电磁场通过互相激发仍能存在；
  - 首先在理论上预言了电磁波；
  - 电磁场可以独立于电荷之外。

§ 3.5 麦克斯韦方程组的自由度

- 六个未知数，八个方程？
- 从空间角度来看，两种不同的看法：
  - 麦克斯韦方程组中包含了电荷守恒定律
  - 方程$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$也可被导出
- ∇具有矢量特性，点乘描述一个方向，叉乘描述两个方向
- 从时间角度而言，其中两个方程为边条件

§ 3.6 洛仑兹(Lorentz)力

电荷、电流产生场，场对电荷体系有作用

欧姆定律或磁化、极化规律可结合前者与物质结构的微观模型推导出来。

平均电场的概念：事实上物质由原子核和电子构成，宏观模型求的是平均效应

不考虑微观结构的原因：其一是不可能（数量巨大，且不可能完全精确）其二是不必要（宏观观测场与场的详细性质无关）

- 由库仑定律和安培定律可知：静止电荷分布与恒定电流元所受力为：

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$$

- 洛仑兹力：普遍情况下带电粒子的受力情况

$$\boldsymbol{f} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

【讨论】

- 洛伦兹力是在电子发现之前就写出来的；
- 实践证实了洛伦兹公式对任意运动速度的带电粒子都是适用的；
- 麦克斯韦方程组与洛仑兹力构成了电动力学的基本理论基础。

§ 3.7　小结

- 静电场和静磁场的方程组；
- 法拉第电磁感应定律；
- 麦克斯韦位移电流假设；
- 真空中Maxwell方程组；
- 洛仑兹力公式；

【习题】 Page 46：6,10

第四节　介质的电磁性质

§ 4.1　介质的极化

在外场作用下，或者分子正负电中心被拉开，或者分子电偶极矩平均有一定取向性，形成宏观电偶极矩分布

- 微观上：分子的电偶极矩

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$$

- 宏观上：电极化强度矢量

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum \boldsymbol{p}_i}{\Delta V} = n\,\boldsymbol{p}$$

- 束缚电荷密度

$$\iiint\limits_V \rho_P \, dV = -\oint\limits_S \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

- 束缚电荷面密度
  不均匀性通常的情况表现在两种介质的交界面上

$$\sigma_P dS = \Delta Q = -(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\sigma_P = -n \cdot (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)$$

【讨论】

- 面电荷密度指在n方向上的体密度有跃变（与不均匀性密切相关）
- 面电荷密度仅是一种理想的简化模式

§ 4.2 极化电场

真空中的麦克斯韦方程组是普适的：只要有电荷，就会产生电场

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_f = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E}' = \frac{\rho_P}{\varepsilon_0} \quad , \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_f + \boldsymbol{E}'$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_P) \quad , \quad \rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_P) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \boldsymbol{P}) \quad , \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_f$$

- 引入电位移矢量

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$$

- 对于各向同性、线性介质极化强度$\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{E}$之间是简单的线性关系：

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

其中χ_e称为介质的极化率。

- 故此$\boldsymbol{D}$可线性地表示为：

量纲是多少？

导体的ε是多少？

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad , \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

其中ε称为介质的电容率，ε_r为相对电容率。

§ 4.3 介质的磁化

在外磁场作用下，分子电流出现有规则取向，形成宏观磁化电流密度

- 微观上：分子的磁偶极矩（分子电流）

$$\boldsymbol{m} = i\boldsymbol{a}$$

- 宏观上：磁化强度

$$\boldsymbol{M} = \frac{\Sigma\, \boldsymbol{m}_i}{\Delta V} = n\, \boldsymbol{m}$$

- 磁化电流密度

$$\iint\limits_S \boldsymbol{J}_M \cdot d\boldsymbol{S} = I_M = \oint\limits_L ni\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint\limits_L n\boldsymbol{m} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint\limits_L \boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\boldsymbol{J}_M = \nabla \times \boldsymbol{M}$$

- 当电场变化时，有极化电流：

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Sigma e_i \boldsymbol{x}_i}{\Delta V} \quad , \quad \boldsymbol{J}_P = \frac{\Sigma e_i \boldsymbol{v}_i}{\Delta V} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$$

§ 4.4 介质中的磁场

$$\nabla \times \boldsymbol{B}_f = \mu_0 \boldsymbol{J}_f + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \, , \; \nabla \times \boldsymbol{B}' = \mu_0 \boldsymbol{J}_M + \mu_0 \boldsymbol{J}_P \, , \; \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_f + \boldsymbol{B}'$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}_f + \mu_0 \boldsymbol{J}_M + \mu_0 \boldsymbol{J}_P + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \, , \; \boldsymbol{J}_M = \nabla \times \boldsymbol{M} \, , \; \boldsymbol{J}_P = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{B} - \mu_0 \boldsymbol{M}) = \mu_0 \boldsymbol{J}_f + \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

- 引入磁场强度

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

由于历史原因，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 名字相对应：虽然物理内容上这是不当的，但方程形式上两者地位相等；

- 对于各向同性、非铁磁物质磁化强度$\boldsymbol{M}$与$\boldsymbol{H}$之间是简单的线性关系：

$$\boldsymbol{M} = \chi_M \boldsymbol{H}$$

其中χ_M称为介质的磁化率。

- 故此$\boldsymbol{B}$可线性地表示为：

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad , \quad \mu_r = 1 + \chi_M$$

其中μ称为介质的磁导率，μ_r为相对磁导率。

§ 4.5 介质中的麦克斯韦方程组

用$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$之后方程形式得以简化；要注意用量纲来帮助记忆；

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

- 反应介质宏观电磁性质的本构关系式（Constitutive Equation）

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

- 本构关系式的适用范围：各向同性、线性、非铁磁的（单值、与历史无关）、随时间变化？随空间变化？不同频率、强度电磁波？

§ 4.6 小结

- 介质的极化；
- 介质的磁化；
- 介质中的麦克斯韦方程组；

【习题】 Page 46：7,9

第五节 电磁场边值关系

- 要解决电磁场问题，还需要边界条件；
- 在外场作用下，介质界面会出现面束缚电荷和电流分布；
- 束缚电荷、电流的存在使得界面两侧场量发生跃变；
- 研究边值关系的基础是积分形式的麦克斯韦方程组；
- 麦克斯韦方程组微分与积分形式的区别；
    - 从数学方面而言：微分形式中存在δ函数；
    - 从物理方面而言：积分形式多为实验验证；

§ 5.1 积分形式的麦克斯韦方程组

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = I_f + \frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = Q_f$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

§ 5.2 法向分量的跃变

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = Q_f = \iiint_V \rho_f\, dV$$

$$\boldsymbol{D}_2\cdot d\boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{D}_1\cdot d\boldsymbol{S}_1 + (\boldsymbol{D}_1\cdot\delta\boldsymbol{S}_1) + (\boldsymbol{D}_2\cdot\delta\boldsymbol{S}_2) = \rho_f\,\delta h\,\Delta S$$

▶ 由于$\boldsymbol{D}$有限，且$\delta \boldsymbol{S}_1 \propto \delta h \to 0$故此：

问题：δh趋于零时，面密度σ_f的定义对不对？这里存在两个无穷小量。

$$(\boldsymbol{D}_1 \cdot \delta \boldsymbol{S}_1) + (\boldsymbol{D}_2 \cdot \delta \boldsymbol{S}_2) \to 0$$

$$(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) \cdot \boldsymbol{n}\, \Delta S = \rho_f\, \delta h\, \Delta S = \sigma_f\, \Delta S$$

▶ 由$\boldsymbol{S}$选取的任意性可知：

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma_f$$

▶ 同理：

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0$$

§ 5.3 切向分量的跃变

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_f + \frac{d}{dt} \iint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{H}_2 \cdot d\boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{H}_1 \cdot d\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{J}_f \cdot (\delta \boldsymbol{h} \times d\boldsymbol{l}_2) + [\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot (\delta \boldsymbol{h} \times d\boldsymbol{l}_2)]$$

▶ 由于$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$有限，且$\delta h \to 0$故此：

同样存在两个无穷小量：*1.* 回路上下边大到足够包括多分子层内部，使面电流完全通过回路内部；*2.* 从宏观来说回路短边的长度仍可看作趋于零。

$$[\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot (\delta \boldsymbol{h} \times d\boldsymbol{l}_2)] \to 0$$

$$(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{J}_f \cdot (\delta \boldsymbol{h} \times d\boldsymbol{l}) = (\boldsymbol{J}_f\, \delta h) \cdot (\boldsymbol{n} \times d\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{\alpha}_f \cdot (\boldsymbol{n} \times d\boldsymbol{l})$$

▶ 设

$$\boldsymbol{f} \equiv (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) - \boldsymbol{\alpha}_f \times \boldsymbol{n}$$

故

$$[(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) - \boldsymbol{\alpha}_f \times \boldsymbol{n}] \cdot d\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

▶ 由于$d\boldsymbol{l}$为平行于边界面的任一二维向量，故此$\boldsymbol{f} \| \boldsymbol{n}$，即：

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) - \boldsymbol{\alpha}_f \times \boldsymbol{n}] = 0$$

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{\alpha}_f \times \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\alpha}_f - (\boldsymbol{\alpha}_f \cdot \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\alpha}_f$$

▶ 故此

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}_f$$

▶ 同理：

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

§ 5.4 小结

- 和麦克斯韦方程组一一对应的边值关系

三个例子：曲率、波长、扁回路

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_f \quad , \quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f \quad , \quad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$$

  - 面电荷分布使界面两侧电场法向分量发生跃变；
  - 面电流分布使界面两侧磁场切向分量发生跃变；

- 微分形式及其对应的边值关系

一个例子：$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=0? \rightarrow \sigma_P=0$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{J}_2-\boldsymbol{J}_1)+\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0$$

$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_P=-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)$$

$$\boldsymbol{J}_M=\nabla\times\boldsymbol{M} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1)=\boldsymbol{\alpha}_M$$

【习题】 Page 47：8,11,12

第六节　电磁场的守恒定律

§ 6.1 电磁场和带电粒子间的能量守恒

电磁场是一种物质，同样有能量、动量、角动量。

电磁场和带电粒子可以相互交换能量（动量）。

- 电磁场的能量、动量是分布于整个空间的；
- 电磁场的能量、动量是可以随时间变化的；（传播）
  - 电磁场的能量密度$\omega=\omega(\boldsymbol{x},t)$：单位体积的能量
  - 电磁场的能流密度$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t)$：单位时间垂直穿过单位横界面的能量，方向为能量传输的方向
- 能量守恒定律的积分形式

$$-\oint \boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\int \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dV+\frac{d}{dt}\int\omega\,dV$$

  - 其中场对带电粒子所作功率：$\int \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dV$
  - 场的能量增加率：$\frac{d}{dt}\int\omega\,dV$
  - 通过界面S流入的能量：$-\oint \boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$（负号是由于$d\boldsymbol{\sigma}$是向外的导致）
- 能量守恒定律的微分形式

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$$

- 当积分区域包括整个空间（或$\boldsymbol{S}$流入流出为零）时，总能量守恒：

$$\int_{\infty}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dV=-\frac{d}{dt}\int_{\infty}\omega\,dV$$

§ 6.2 电磁场的能量密度与能流密度

【已知】 洛仑兹力公式$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 【求解】 形如

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$$

方程中ω与$\boldsymbol{S}$的场量表达式。

【解】

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}=(\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}=\rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$$

- 利用麦克斯韦方程组将$\boldsymbol{J}$写为

$$\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

可得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}&=(\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t})\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\&=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\&=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

经比较可得

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

- 能流密度$\boldsymbol{S}$又称之为坡印亭矢量(Poynting矢量)
- 能量密度必须分不同情况讨论:
  - 真空中

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\qquad,\qquad\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$$
$$\omega=\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)$$

  - 把极化能和磁化能包括在介质的总电磁能量中，可给出一般介质中场能量的改变量:

$$\delta\omega=\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B}$$

  - 对于各向同性的线性介质

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\qquad,\qquad\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$
$$\omega=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$$

§ 6.3 电磁场的动量密度与动量流密度

动（能）量的转化有两种途径：场与带电粒子相互作用；场在空间中的流动

【已知】 洛仑兹力公式$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$ **【求解】** 形如

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}+\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}=-\boldsymbol{f}$$

方程中$\boldsymbol{g}$与$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$的场量表达式。

【解】 利用麦克斯韦方程组，将ρ、$\boldsymbol{J}$的表达式代入洛仑兹力公式：

$$\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}\quad,\quad \boldsymbol{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\quad,\quad \boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}&=(\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})\times\boldsymbol{B}\\
&=(\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})+\varepsilon_0(\boldsymbol{E}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})\\
&=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})+\varepsilon_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+\varepsilon_0(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}\\
&+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

由于：

$$(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\nabla E^2$$

故：

$$\begin{aligned}
(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}&=(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\nabla E^2\\
&=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E})-\frac{1}{2}\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2)\\
&=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2)
\end{aligned}$$

其中用到张量计算公式：

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}(\nabla\cdot\boldsymbol{f})+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$$

$$\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2)=\overleftrightarrow{\mathscr{I}}\cdot\nabla E^2=\nabla E^2$$

其中$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}$为单位张量具有性质

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}=\boldsymbol{v}$$

同理：

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}B^2)$$

▶ 故此可得：

$$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})+\nabla\cdot[-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)]=-\boldsymbol{f}$$

- 其中：电磁场**动量密度**$\boldsymbol{g}$为

$$\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- 电磁场动量密度与能流密度间的关系：

$$\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c^2} \boldsymbol{S}$$

- 电磁场**动量流密度**$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$为

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = -\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}\boldsymbol{B} + \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\mathscr{I}} (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

  - 电磁场动量流密度张量又称为**麦克斯韦应力张量**或**张力张量**
  - 张量$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$的分量$T_{ij}$的意义是通过垂直于$i$轴的单位面积流过的动量$j$分量。

- 电磁场动量守恒的积分形式

$$\frac{d}{dt} \iiint \boldsymbol{g} dV = -\iiint \boldsymbol{f} dV - \oint d\boldsymbol{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}}$$

例一

同轴传输线内导体半径为a，外导线半径为b，两导线间为均匀绝缘介质。导线载有电流I，两导线间的电压为U。

（1） 忽略导线的电阻，计算介质中的能流S和传输功率；

（2） 计及内导线的有限电导率，计算通过内导线表面进入导线内的能流，证明它等于导线的损耗功率。

【解】 （1）由安培环路定律可知，$a < r < b$处的磁场强度：

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi r} \boldsymbol{e}_\theta$$

设导线上线电荷密度为τ，由高斯定理可知，$a < r < b$处的电场强度：

$$\boldsymbol{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r} \boldsymbol{e}_r$$

由导线间电压：

$$U = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2\pi\varepsilon U}{\ln \frac{b}{a}}$$

故坡印亭矢量为：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{UI}{2\pi \ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{r^2} \boldsymbol{e}_z$$

总传输功率为

$$P = \int_a^b S\, 2\pi r dr = \int_a^b \frac{UI}{2\pi \ln \frac{b}{a} r^2} 2\pi r dr = \frac{UI}{\ln \frac{b}{a}} \int_a^b \frac{1}{r} dr = UI$$

（2）导体内部电场强度：

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}=\frac{I}{\pi a^2\sigma}\boldsymbol{e}_z$$

由电场强度切向分量连续可知，$a<r<b$处的电场强度既有r分量又有z分量，其z分量为

$$\boldsymbol{E}_z|_{r=a}=\frac{I}{\pi a^2\sigma}\boldsymbol{e}_z$$

故此能流S除了如前所述z方向分量外，还增加有$\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_\theta=-\boldsymbol{e}_r$方向分量：

$$S_r=E_zH_\theta|_{r=a}=\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}$$

流进单位长度δl导线内部的功率为

$$S_r\cdot 2\pi a\delta l=\frac{I^2\cdot 2\pi a\delta l}{2\pi^2a^3\sigma}=I^2\frac{\delta l}{\pi a^2\sigma}=I^2R$$

- 流进导体内部的能流转化为欧姆加热；
- 能量传输不是从导体中通过，而是在导线周围的介质中传输。

例二

一平行板电容器由两个相距为d、半径为a的圆形板组成，该电容器由无电阻的长直导线供电，已知两板间电压为$V=V_0\cos\omega t$，并假定$d\ll a\ll\frac{c}{\omega}$，即电场的边缘效应和推迟效应均可以忽略，试求解：

(1) 两板间的电磁场；

(2) 两板间的能量密度、能流密度；

(3) 长直导线中的电流以及板上的电流密度；

【解】(1) 板间的电场为：

$$\boldsymbol{E}=\frac{V}{d}\boldsymbol{e}_z=\frac{V_0}{d}\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_z$$

由Maxwell方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_z$$

利用位型的对称性进行积分：

$$\oint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint-\mu_0\varepsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_z\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$B\,2\pi r=-\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\sin\omega t\right)\cdot\pi r^2\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{B}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{V_0}{2d}\omega r\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_\phi$$

(2) 两板间电磁能量密度：

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V_0}{d}\right)^2 \cos^2\omega t + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{V_0}{2d}\omega r\sin\omega t\right)^2 \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V_0}{d}\right)^2\left[\cos^2\omega t + \left(\frac{\omega r}{2c}\sin\omega t\right)^2\right] \\
&\simeq \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V_0}{d}\right)^2 \cos^2\omega t
\end{aligned}
$$

能流密度：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \\
&= \frac{V_0}{d}\cos\omega t\ \cdot\varepsilon_0\frac{V_0}{2d}\omega r\sin\omega t\ (\boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{e}_z) \\
&= -\frac{\omega r}{4}\varepsilon_0\left(\frac{V_0}{d}\right)^2\sin 2\omega t\,\boldsymbol{e}_r
\end{aligned}
$$

(3) 下平行板上的面电荷密度：

$$
\sigma = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1) = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0\frac{V_0}{d}\cos\omega t
$$

单个板上的总电荷：

$$
Q = \iint \sigma\, dS = \varepsilon_0\frac{V_0}{d}\pi a^2\cos\omega t
$$

长直导线中的电流：

$$
I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon_0\frac{V_0}{d}\pi a^2\omega\ \sin\omega t
$$

由电荷守恒定律可知：

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0
$$

用柱坐标表述的板上的电流密度：

$$
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rJ_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial J_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0
$$

$$
\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rJ_r) + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}h = 0
$$

由于σ为电荷面密度，K_r为电流面密度，即：

$$
\sigma = \rho\cdot\mathrm{d}h \qquad , \qquad K_r = J_r\cdot\mathrm{d}h
$$

$$
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rK_r) + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0
$$

$$
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rK_r) = \varepsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\sin\omega t
$$

可得：

$$K_r = \varepsilon_0 \frac{V_0}{2d} \omega \sin \omega t \left(r + \frac{b}{r} \right)$$

由于边界条件：当$r = a$时$K_r = 0$，即可待定出常数b，由此可得板上的面电流密度为：

$$K_r = \varepsilon_0 \frac{V_0}{2d} \omega \sin \omega t \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$$

§ 6.4 小结

- 电磁场和带电物质间满足能量守恒、动量守恒定律；
- 能流密度（坡印亭矢量）$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$；
- 各向同性线性介质中电磁场能量密度$\omega = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B})$；
- 电磁场动量密度$\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$；
- 电磁场动量流密度张量

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = -\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}\boldsymbol{B} + \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\mathscr{I}} (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

【习题】 Page 48：13,14