# 第六章　狭义相对论

不同参考系下，物理规律及物理量的变化如何？

相对论本身及其对物理学的影响

相对论的两个基本原理

间隔不变性到洛伦兹变换

高速运动引发相对论时空观；

间隔、因果律、相对同时性、钟慢尺缩、速度变换

相对性原理与重要性：物理规律必须在洛伦兹变换下协变

四维时空的张量、协变性

电流密度矢量、势矢量、电磁场张量、电磁场不变量

能量—动量矢量、质能关系、相对论力学方程、洛伦兹力

## 内　容　提　要

# 第一节 狭义相对论的基本原理

## § 1.1 伽利略相对性原理

- 亚里士多德：地球是宇宙的中心；它是绝对静止的；
- 哥白尼：太阳是宇宙的中心，地球围着太阳转；绝对空间、绝对静止；

地球绕太阳转，绝对速度很大，为什么感觉不到？

- **伽利略相对性原理**：匀速运动的参考系（船）与静止的参考系（船）物理规律完全相同；不存在绝对空间
- 牛顿：力学三定律不会对一切参考系都成立，如何选择适合的参考系？
  - ‘绝对空间，就其本性来说，与任何外在的情况无关，始终保持着相似和不变。’
  - ‘绝对的、纯粹的、数学的时间，就其本性来说，均匀地流逝，而与任何外在的情况无关。’
  - 绝对空间与绝对时间是最基本的惯性系，相对绝对空间做匀速平动的参考系通称为惯性系；

**【定义】** 参考系$\Sigma$中，所有不受外力作用的物体，都呈匀速直线运动或静止状态，则称$\Sigma$为**惯性系**。

## § 1.2 伽利略变换

- 时间是绝对的：一个事件相对$\Sigma'$的时间$t'$与它相对于$\Sigma$的时间$t$是相同的；
- 长度是绝对的：如果相对于$\Sigma$静止的间隔具有长度$|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$，那么在相对于$\Sigma$运动的$\Sigma'$系中，它具有相同的长度$|\boldsymbol{r}_2'-\boldsymbol{r}_1'|$；

空间间隔不变

设惯性系$\Sigma'$相对于$\Sigma$以速度$v$运动，并选$x$和$x'$轴沿运动方向

$$\begin{cases} x' = & x-vt \\ y' = & y \\ z' = & z \\ t' = & t \end{cases}$$

**【推论】** 伽利略变换下速度相加，加速度不变。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}' = & \quad \dot{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{v} \\ \ddot{\boldsymbol{r}}' = & \quad \ddot{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

## § 1.3 牛顿定律在伽利略变换下的协变性

- 牛顿定律
  - 惯性定律：一切物体在不受外力作用时总保持运动状态不变；
  - 物体的加速度跟作用力成正比，跟物体的惯性质量成反比；

惯性定律断定了惯性系一定存在；

$$\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{r}}$$

  - 两个物体之间的作用力和反作用力，总是大小相等，方向相反，作用在一条直线上；

$$\boldsymbol{F}_{A\to B}=-\boldsymbol{F}_{B\to A}$$

- 伽利略相对性原理、伽利略变换以及牛顿定律，三个原理是协调的。
  从参考系$\Sigma$的方程可以导出参考系$\Sigma'$中的方程：

$$\begin{aligned} \Sigma: & \qquad \boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{r}} \\ \Sigma': & \qquad \boldsymbol{F}'=m\ddot{\boldsymbol{r}}' \end{aligned}$$

- 牛顿定律在伽利略变换下是协变的。

## § 1.4 Maxwell方程伽利略变换下不协变

- 电磁相互作用规律（麦克斯韦方程）、相对性原理、伽利略变换，三者不协调

不同参考系：电还是磁？

光速不变

  - 电磁作用规律、相对性原理⇒动系和静系中的光速均为$c=(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$
  - 麦克斯韦方程、伽利略变换⇒不同参考系的光速不同$c+v\neq c$
- 三种原理不能同时满足。
  - 相对性原理错了？找到了绝对空间？
  - 另：波动现象—弹性介质（机械论）—以太学说

- 由大量实验否定了特殊参考系以及以太介质：
  - 迈克尔孙——莫来(Michelson–Morley)实验、微波激射、穆斯堡尔效应
- 光速不依赖于观察者所在参考系，也与光源的运动速度无关

《宋史》至和元年五月己丑出天关东南可数寸岁余稍没（公元1054）

  - 双星运动实验、超新星爆发、高速运动粒子$\pi^0$作为光源的实验
- 伽利略变换有问题——事实上它是洛伦兹变换的低速近似。

## § 1.5 狭义相对论的基本原理

**【定义】** 如果$\Sigma$是**惯性系**，那么任何一个相对于$\Sigma$做均匀无转动运动的参考系$\Sigma'$也是惯性系；**自然定律**对所有的惯性系都是一致的。我们将这个陈述称为**狭义相对性原理**。—爱因斯坦《相对论的意义》

不存在绝对空间

包括电磁作用

盲人摸球：时空均匀性，‘各向同性’

时空联系不可分割

**【定义】** 光速既不依赖于观察者所在的参考系，也与光源的运动速度无关，真空中任意惯性参考系的电磁波传播速度均为$c$：**光速不变原理**。

**【推广】** 由上述两条原理导出的时空关系称为**洛伦兹变换**。

## § 1.6 相对论的实验检验

- 横向多普勒(Doppler)效应实验，证实相对论的运动时钟延缓效应；
- 高速运动粒子寿命的测定，证实时钟延缓效应；
- 携带原子钟的环球飞行实验，证实狭义相对论和广义相对论的时钟延缓总效应；
- 相对论质能关系和运动学的实验检验。原子核能的利用完全证实相对论质能关系。

## § 1.7 小结

- 牛顿定律在伽利略变换下是协变的；
- Maxwell方程在伽利略变换下不协变；
- 由大量实验否定了特殊参考系以及以太介质；
- 狭义相对论的两条基本原理：
  - **狭义相对性原理**：**自然定律**对所有的**惯性系**都是一致的；
  - **光速不变原理**：真空中任意惯性参考系的电磁波传播速度均为$c$。

**【习题】** Page 290: 1,2,3

# 第二节　洛伦兹变换

## § 2.1　方向的相对性原理与空间间隔不变性

- 任意旋转、平移刚体，标记在刚体上的两点所构成间隔不变；　相对论前的空间间隔不变性
- 选择不同的参考空间，标记在刚体上的两点所构成间隔不变：间隔与坐标选取无关；　间隔的投影不是不变量；投影存在最大长度
- 在参考空间中以任一点为中心取相等的间隔，所有的等间隔端点构成的轨迹为一球面，该球面同样与坐标选取无关；

$$(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2 = \text{const}$$

$$(x'_1 - x'_{10})^2 + (x'_2 - x'_{20})^2 + (x'_3 - x'_{30})^2 = \text{const} \tag{1}$$

## § 2.2　参考空间的线性变换

当间隔很小$\Delta x_\nu$也很小时，对$\Delta x'_\nu = (x'_\nu - x'_{\nu 0})$做泰勒展开：

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Delta x_\alpha \Delta x_\beta + \cdots \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式：

$$\sum_\nu \left(\sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Delta x_\alpha \Delta x_\beta + \cdots\right)^2 = \lambda \sum_\nu \Delta x_\nu^2 \tag{3}$$

由于(3)式对任意$(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$都满足，故此高阶项为零，也即$x'_\nu$必须是$x_\nu$的线性函数：

$$x'_\nu = a_\nu + \sum_\alpha b_{\nu\alpha} x_a$$

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha b_{\nu\alpha}\Delta x_a \tag{4}$$

## § 2.3　空间间隔不变性的讨论

- 由于空间间隔不变性，可以设某一间隔为单位长度，才使得量杆有意义；
- 当$x_\nu$参考系与$x_\nu$参考系选取相同的量杆时，变换(4)为线性正交变换；
- 与间隔相类似的，所有这些变换无关量，也只有这些量，在欧几里得几何学中才具有客观意义；
- 标量、矢量、张量在空间变换中保持不变；
- 方向的相对性原理(relativity of direction)蕴含了空间是均匀(homogeneity)的且各向同性(isotropy)的；
- 变换(4)描述了空间的各向同性与均匀性。

## § 2.4 间隔不变性

某时刻从O点发出的光在另一时刻在点P被接收到，由光速不变原理可知：
两个惯性系$\Sigma$与$\Sigma'$中，不失一般性设事件一在$\Sigma$与$\Sigma'$中均用$(0,0,0,0)$表示；
在$\Sigma$与$\Sigma'$中测出的光速都为$c$，即：

时空不可分

坐标平移即可办到

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

取

$$s'^2=c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=0$$

$$s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2=0$$

$s^2$在选取不同参考系下保持不变；

## 间隔不变性（续）

**【推广】** 如果

$$s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2\neq 0$$

在时空变换下是不变量(这是一个更宽的条件)，那么$s^2=0$这个条件就总是可以满足。

事实上经由洛伦兹变换可知的确如此。

**【定义】** 两事件$(x_1,y_1,z_1,t_1)$与$(x_2,y_2,z_2,t_2)$的间隔为

$$s^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

**【间隔不变性】** 不同参考系下两事件的时空间隔保持不变：

注意负号的意思

因子只与速度的绝对值有关，与方向无关，故正反变换相同，$A^2=1$

$$s^2=s'^2 \tag{5}$$

间隔是把时间与空间距离统一起来的一个概念。

原来的不变量变成了投影

## § 2.5 不同惯性系下时空坐标的线性变换

- 如前空间间隔不变性所述，经类比可知：惯性系间的时空变换是线性的；
- 惯性系的概念本身要求从一惯性系到另一惯性系的时空坐标变换必须是线性的：
  - $\Sigma$系中匀速运动的物体在$\Sigma'$系也是匀速运动：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$以及$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}'(t')$的线性关系要求从$(\boldsymbol{x},t)$到$(\boldsymbol{x}',t')$的变换式必须是线性的。
- 狭义相对性原理假定了空间是均匀且各向同性的，时间是均匀的：
  - 由此可知惯性系间的时空变换只能是线性变换。

两坐标架原点重合（平移）

$$\begin{cases} x'= & a_{00}x+a_{01}y+a_{02}z+a_{03}t\\ y'= & a_{10}x+a_{11}y+a_{12}z+a_{13}t\\ z'= & a_{20}x+a_{21}y+a_{22}z+a_{23}t\\ t'= & a_{30}x+a_{31}y+a_{32}z+a_{33}t \end{cases}$$

## 不同惯性系下时空坐标的线性变换（续）

为简单计，选两坐标系的$x$轴和$x'$轴都沿相对运动方向，两个$y$轴与$z$轴互相平行：

$$\begin{cases} x' = & \gamma x + \sigma t \\ y' = & y \\ z' = & z \\ t' = & \beta x + \alpha t \end{cases}$$

其中$\alpha, \beta, \gamma, \sigma$为常数与坐标系间相对运动速度$v$有关。

## § 2.6　由运动的相对性确定变换关系

设$\Sigma'$系对$\Sigma$系的速度为$v$，在$\Sigma'$系中静止的点，即：

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}y' = \mathrm{d}z' = 0$$

它们对$\Sigma$系的速度都为$v$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma}{\gamma} = v$$

考虑到运动的相对性，在$\Sigma$系中静止的点$\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$在$\Sigma'$系的速度都为$-v$

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\sigma}{\alpha} = -v$$

$$\alpha = \gamma$$

## 由运动的相对性确定变换关系（续）

设：$\beta = -\eta\gamma$，故变换式可写为：

$$\begin{cases} x' = & \gamma(x - vt) \\ y' = & y \\ z' = & z \\ t' = & \gamma(-\eta x + t) \end{cases} \tag{6}$$

**【讨论】**

- 如果先验地认为时间是与参考系无关的，即它是绝对的，这意味着取$\gamma = 1$及$\eta = 0$，相应导出的就是伽里略变换；
- 要否定伽里略时空变换，就是要抛弃绝对时间的概念。

## § 2.7　由光速不变原理确定变换关系

将变换式(6)带入间隔不变性(5)式，可得：

$$c^2\gamma^2(t - \eta x)^2 - \gamma^2(x - vt)^2 = c^2t^2 - x^2$$

比较系数可得：

$$\begin{cases} c^2\gamma^2 - v^2\gamma^2 = c^2 \\ c^2\gamma^2\eta^2 - \gamma^2 = -1 \\ 2\eta c^2\gamma^2 - 2v\gamma^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \eta = \dfrac{v}{c^2} \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

加入光速不变性的要求后，新的时空变换式完全确定了。

## § 2.8 洛伦兹变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{7}$$

由相对性原理，$v \to -v$可得到反变换

名字的由来

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{8}$$

## § 2.9 小结

- 在相对论前物理学中，有方向的相对性原理与空间间隔不变性；
  - 方向的相对性原理蕴含了空间是均匀的且各向同性的；
  - 空间间隔不变性使得不同参考空间的变换为线性变换关系；
- 不同参考系下两事件的时空间隔保持不变：间隔不变性；
  - 间隔是把时间与空间距离统一起来的一个概念；
- 不同惯性系下时空坐标变换是线性变换；
  - 狭义相对性原理假定了空间是均匀且各向同性的，时间是均匀的；
  - 光速不变性原理说明时空不可分割；
- 给出了不同惯性系间的洛伦兹变换关系；

【习题】 Page 290: 4,5,6,7

## 摘录

**【自然科学的目的】** 一切科学，不论是自然科学抑或心理学，其目的都在于使我们的经验互相协调并将它们纳入——个逻辑体系。

——爱因斯坦《相对论的意义》

**【关于时间】** 个体的经验是以事件序列的形式呈现在我们面前的。在这个序列里我们记忆中的各个事件看来是依照"早"和"迟"的标准排列的，而对于这个标准则不能再做进一步的分析了。因此，对于个体来说，就存在着一个"我"的时间(*I–time*)，或曰"主观时间"(*subjective time*)，这个时间本身是不可测度的······将一个时钟所指出的事件顺序和既定事件序列的顺序相比较，我就能用这个时钟来定义这种联系。我们将时钟理解成提供了一连串可以计数的事件的东西······

——爱因斯坦《相对论的意义》

**【关于空间】** 将物体$B$，$C$，$\cdots$附加到物体$A$上去可以形成新的物体，我们说我们延伸了物体$A$。我们可以这样延伸物体$A$，使其与任意其他物体$X$相接触。物体$A$的所有延伸的集合，我们可以定义为"物体$A$的空间"。······在日常生活中，当我们要判定物体的相对位置时，地壳扮演了一个如此重要的角色，它导致了一个抽象的空间概念······

空间的概念是从刚体中抽象出来的

——爱因斯坦《相对论的意义》

**【刚体与几何学】** 在相对论前物理学(*pre–relativity physics*)里，假设理想刚体位形的定律是符合于欧几里得几何学(*Euclidean geometry*)的。它的意义可以表述如下：标记在刚体上的两点构成一个间隔。

——爱因斯坦《相对论的意义》

**【几何学与物理】** ······几何学是与实物（刚体）相联系的，它的定理就是对这些实物的行为所作的陈述······通常人们习惯于离开那些概念与经验之间的任何联系来研究几何学。把那些纯逻辑的并且与在原则上不完备的经验论无关的东西分离出来，是有益的。这样能使纯数学家满意。如果能从公理中正确地（即无逻辑错误地）推导出定理来，他就心满意足了。至于欧几里得几何学究竟是否真确之类的问题，他并不关心。但是，对于我们的目的来说，必须将几何学的基本概念与自然对象联系起来；没有这样的联系，几何学对于物理学家毫无用处可言。物理学家所关心的是几何学定理究竟是否真确之类的问题。

——爱因斯坦《相对论的意义》

**【时间与光速不变】** 由于未加论证就把时间概念建立在光传播定律基础之上，从而使光传播在理论中处于中心地位，狭义相对论遭到了许多批评。然而，情况实际上大致是这样的：为了赋予时间概念以物理意义，我们需要某种能够在不同地点之间建立起联系的过程。至于为这样一种时间定义具体选择什么样的过程则并不重要。然而，选择那些我们已有所了解的过程显然对理论会更有益一些：由于麦克斯韦和洛伦兹的工作，我们对光在真空中传播过程的了解，比其他任何可以想到的过程都要清楚。

——爱因斯坦《相对论的意义》

# 第三节　相对论的时空理论

从今以后，空间本身和时间本身都已成为阴影，只有两者的结合才能独立存在。

——闵可夫斯基

## § 3.1　相对论时空结构

设第一事件为空时原点$O(0,0,0,0)$，第二事件空时坐标为$P(x,y,z,t)$，这两事件的间隔为

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t^2 - r^2$$

与三维空间不同之处在于负号！

依$s^2$的大小分类

- 【类时间隔】 $s^2 > 0$也即$ct > r$，两事件可用低于光速的作用来联系；

一般生活经验中都是类时间隔

- 【类空间隔】 $s^2 < 0$也即$r > ct$，两事件的空间距离超过光波在时间$t$所能传播的距离；

类空间隔需要很大的$r$或者很小的$t$，最为典型$t = 0$

- 【类光间隔】 $s^2 = 0$也即$r = ct$，两事件可以用光波联系；

由间隔不变性可知，上述三种间隔的划分是绝对的，不因参考系变换而改变。

## § 3.2　时空锥

暂取二维空间和一维时间一起构成三维时空：
事件用这三维时空的一个点$P$表示。
$P$点在$xy$面上的投影表示事件发生的地点，$P$点的垂直坐标表示事件$ct$。
所有与$O$点以光波联系的点构成以$O$为顶点的锥面：光锥；

考虑几何特性，直观图象表示

- 【类光间隔】 $s^2 = 0$ $P$点在光锥之上；
- 【类时间隔】 $s^2 > 0$ $P$点在光锥之内；
- 【类空间隔】 $s^2 < 0$ $P$点在光锥之外；

由间隔不变性可知，$P$点和光锥的几何位置也是绝对的。

## § 3.3　时空关系的绝对分类

- 【类光间隔】 $s^2 = 0$ $P$点在光锥之上；
- 【类时间隔】 $s^2 > 0$ $P$点在光锥之内；
  - 可以通过洛伦兹变换使得$O$、$P$两点同地不同时；
  - 【定义】 和物体一起运动的钟所给出的时间为原时或固有时，记为$\mathrm{d}\tau$。
  - 类时区域包括两部分，由洛伦兹变换保持时间正向不变，因此这两部分不能互相变换；
    - ⋆ 绝对未来，即$P$在$O$的上半光锥内；
    - ⋆ 绝对过去，即$P$在$O$的下半光锥内；
- 【类空间隔】 $s^2 < 0$ $P$点在光锥之外；
  - 可以通过洛伦兹变换使得$O$、$P$两点同时不同地，$P$与$O$绝对异地；

## § 3.4 因果律

可以是光，也可以其它信号

【定义】 若两个事件可以用迅号联系，则称为关联事件；

【定义】 只有在$O$点发出一个信号，$P$点才能收到信号：关联事件的先后关系是绝对的，不依赖于参考系而转移，称之为因果律。

这和日常生活中的因为所以不一回事

时间概念就是从事物发展中抽象出来的，相对论时空观也必须反映事物发展的绝对因果性。

【已知】 在参考系$\Sigma$上的关联事件，以$(x_1, t_1)$代表作为原因的第一事件，$(x_2, t_2)$代表作为结果的第二事件，有$t_2 > t_1$；用洛伦兹变换到另一参考系$\Sigma'$上，这两事件用$(x_1', t_1')$和$(x_2', t_2')$表示；

【求证】 $t_2' > t_1'$

【证明】 由洛伦兹变换

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

## 因果律（续）

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right) \\ &= \frac{(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{c^2 - vu}{c^2} \end{aligned}$$

由于实验证明：

物质运动的最大速度不能超过光速$c$；

一切相互作用传播的极限速度为真空中的光速$c$：$u < c$；

在$\Sigma'$系中静止的物体，相当于在$\Sigma$系以速度$v$匀速运动，故$v < c$；

$$u < c \quad , \quad v < c \quad \Rightarrow \quad c^2 > uv$$

$$t_2' - t_1' > 0$$

## § 3.5 相互作用的最大传播速度

- 关联事件的四维间隔一定是类时间隔，也只有类时间隔的两事件才存在因果律；
- 物质运动、相互作用的最大极限速度为光速$c \Rightarrow$因果关系的绝对不变性；
- 因果律的存在$\Rightarrow$物质运动、相互作用的最大极限速度为光速$c$；
- 相对论与因果律不矛盾；

## § 3.6 类空间隔不存在因果关系

**【已知】** 在参考系$\Sigma$上的两事件$(x_1, t_1)$和$(x_2, t_2)$有类空间隔$|x_2 - x_1| > c\,|t_2 - t_1|$;
**【求证】** 该两事件不存在绝对的先后次序;
**【证明】** 类时间隔存在因果关系，但类空间隔$r > ct$，故两事件不存在任何联系方式;
不失一般性，假设在$\Sigma$系中，

$$t_2 > t_1$$

由洛伦兹变换可得在$\Sigma'$系中：

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= -\frac{(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{u}{c^2} \left( v - \frac{c^2}{u} \right) \end{aligned}$$

## 类空间隔不存在因果关系（续）

当$v - \frac{c^2}{u} > 0$时，

$$t_2' < t_1'$$

当$v - \frac{c^2}{u} = 0$时，

$$t_2'' = t_1''$$

**【结论】** 类空间隔的两事件，没有因果关系，不存在绝对的先后次序，也不存在绝对的同时。

## § 3.7 同时相对性

**【定义】** 类空间隔中的两事件，若在参考系$\Sigma$中同时($t_2 = t_1$)，但在$\Sigma'$参考系中不同时($t_2 \neq t_1$)，这称之为同时相对性。

- 类时间隔中不存在同时的情况; 因果律
- 一个普遍的类空间隔事例：不同地点的时钟;
- 由同时相对性可知：如何对准两不同地点的时钟是个问题。
  - 经典的解决方法：缓慢移动法 为什么要缓慢
  - 用光速不变调节同时：中点接收法
  - 用光速不变校准时钟：在$\Sigma$系放置与其相对静止的时钟，某个时钟$U_m$在其指向时刻$t_m$时发出的一束光，在真空中传播$r_{mn}$距离而到达了时钟$U_n$，这时$U_n$时间可以表示成为$t_n = t_m + \frac{r_{mn}}{c}$;
- 因时钟与参考系$\Sigma$相对静止，故照此方法定义的时钟只与该惯性系相关;
- 在同一参考系上，相对论的同时概念是和我们通常所指的同时概念一致的;
- 相对论效应在于，在一参考系中不同地点上对准了的时钟，在另一参考系上观察起来会变为不对准的。这就是同时相对性的意义。

## § 3.8 运动时钟的延缓

【已知】 在参考系$\Sigma'$上有一静止的时钟，其计时周期为$\Delta\tau$；
【求解】 从参考系$\Sigma$上观察，该时钟的计时周期有何变化？
【解】 此题是有现实意义的：具有固定时间间距的物理过程，都可称为时钟：

粒子的衰变寿命、原子辐射周期

参考系$\Sigma'$中静止时钟时隔$\Delta\tau$的两事件，其间隔为：

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta\tau^2$$

参考系$\Sigma$相对$\Sigma'$系以速度$v$运动，从$\Sigma$系观察两事件间隔为：

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2$$

由间隔不变性：

$$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > \Delta\tau$$

## 运动时钟的延缓（续）

【回顾】 和物体一起运动的钟所给出的时间为原时或固有时，记为$\mathrm{d}\tau$。
【定义】 运动物体上发生的自然过程比起静止物体的同样过程延缓了——时间延缓效应。

- 时间延缓效应是时空的基本属性引起的，与钟的具体结构无关。
- 时间延缓效应的本质在于时间只是不变间隔的投影而已。
- 物体运动速度愈大，延缓效应越显著。
- 时间延缓效应只依赖于速度，而不依赖于加速度；

## § 3.9 时钟延缓的相对性

【已知】 在$\Sigma$系上相距为$l$的两点上有对准了的时钟$C_1$和$C_2$，在$\Sigma$系上观察以速度$v$运动的时钟$C'$。设当$C'$经过$C_1$时，$C'$、$C_1$、$C_2$都指着时刻0；当$C'$经过$C_2$时，$\Sigma$系上的钟都指着时刻$\frac{l}{v}$；
【求解】 (1) 当$C'$经过$C_2$时$C'$指向什么时刻？
(2) 从$\Sigma'$系观察，$C_2$所示的经过时间为多少？
【解】 当$C'$经过$C_2$时，$C'$上的时钟与$\Sigma'$系相对静止，应该指向固有时$\tau$：

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{v} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\tau = \frac{l}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \frac{l}{v}$$

由此说明$\Sigma$系上看到运动时钟$C'$变慢。

## 时钟延缓的相对性（续一）

【另解】 设$C'$经过$C_1$为事件一$P$，$C'$经过$C_2$为事件二$Q$；

在$\Sigma$系中，两事件的坐标为：$P(0,0)$，$Q(l,\frac{l}{v})$

在$\Sigma'$系中，两事件的坐标为：$P(0,0)$，$Q(0,\tau)$

由洛伦兹变换可知：

$$\tau=\frac{\frac{l}{v}-\frac{v}{c^2}l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{l}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}<\frac{l}{v}$$

两事件的间隔为：

$$\Delta s^2=c^2\tau^2=c^2\frac{l^2}{v^2}-l^2=c^2\frac{l^2}{v^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

## 时钟延缓的相对性（续二）

【解】 $\Sigma'$上看到$C_2$所指的读数$\frac{l}{v}$大于自己参考系上$C'$的读数$\tau$。这是否意味着从$\Sigma'$系角度上看，$\Sigma$系上的时钟变快了呢？

开始时$C'$与$C_1$同时指着时刻0，但由于同时的相对性，原来在$\Sigma$系上对准了的时钟$C_1$和$C_2$在$\Sigma'$系上看来不是对准的。

在$\Sigma'$系中当$C'$经过$C_1$时，$C_2$所处状态为事件三$R$；

要说某一时刻，必须指出那个参考系！★★★

在$\Sigma$系中，事件三的坐标为：$R(l,\delta)$

在$\Sigma'$系中，事件三的坐标为：$R(l',0)$

由洛伦兹变换可知：

$$0=\frac{\delta-\frac{v}{c^2}l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad\Rightarrow\quad\delta=\frac{v}{c^2}l$$

## 时钟延缓的相对性（续三）

$$l'=\frac{l-v\delta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{l-\frac{v^2}{c^2}l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

故在$\Sigma'$上看到$C_2$所示的经过时间为$R(l,\delta)$到$Q(l,\frac{l}{v})$：

$$\frac{l}{v}-\delta=\frac{l}{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}<\tau$$

由此说明$\Sigma'$系上看到运动时钟$C_2$同样变慢。

事件R、Q的间隔为：

$$\begin{aligned}\Delta s^2=c^2\tau^2-l'^2&=\frac{c^2l^2}{v^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-l^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\\&=\frac{c^2l^2}{v^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\end{aligned}$$

【结论】 参考系$\Sigma$上看到固定于$\Sigma'$上的时钟变慢；同样，参考系$\Sigma'$上也看到固定于系$\Sigma$上的时钟变慢。

## § 3.10 时钟延缓的绝对性

在有加速运动情形，时间延缓导致绝对的物理效应。

【双生子佯谬】 当一个时钟绕闭合路径作加速运动最后返回原地时，它所经历的总时间小于在原地点静止时钟所经历的时间。

设时钟$C$固定于惯性参考系$\Sigma$上，$C'$相对于$\Sigma$作有加速度的运动。设在某时刻$t'$，$C'$相对于$\Sigma$的运动速度为$v(t')$，若$C'$经历时间$\mathrm{d}t'$，则在$\Sigma$上测得的时间为：

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}}$$

当$C'$绕闭合路径一周回到原地时，$\Sigma$上测得的总时间为

$$\Delta t=\oint\mathrm{d}t=\oint\frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}}>\oint\mathrm{d}t'=\Delta t'$$

其中$\Delta t$为$C$所示的时间，$\Delta t'$为$C'$所示的时间。

【结论】 当时钟$C'$回到原地直接与$C$比较时，$C'$绝对地变慢了。

## § 3.11 运动尺度的缩短

【已知】 物体沿$x$轴方向运动，以固定于物体上的参考系为$\Sigma'$。若物体后端经过$P_1$点（第一事件）与前端经过$P_2$点（第二事件）相对于$\Sigma$同时，则$P_1P_2$定义为$\Sigma$上测得的物体长度；

【求解】 运动物体长度与该物体静止长度的关系。 投影

【解】 在$\Sigma$系中，事件一、二的坐标为：$(x_1,t_1)$、$(x_2,t_2)$

在$\Sigma'$系中，事件一、二的坐标为：$(x_1',t_1')$、$(x_2',t_2')$

$$x_1'=\frac{x_1-vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad,\quad x_2'=\frac{x_2-vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_1'=\frac{t_1-\frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad,\quad t_2'=\frac{t_2-\frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

由于$t_1=t_2$

$$x_2'-x_1'=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

### 运动尺度的缩短（续）

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

【结论】 运动物体的长度比起静止物体的长度缩短了。

- 运动尺度的缩短是时空的基本属性引起的，与物质的内部结构无关；
- 运动尺度缩短的本质在于空间只是不变间隔的投影而已；

- 物体运动速度愈大，运动尺度缩短效应越显著；
- 运动尺度缩短效应是相对的：$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_2)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $t'_2 = t'_1$
- 时间延缓与长度缩短是相关的：在不同参考系中可以有不同的描述方法，但最后的物理结论应该是一致的。

## § 3.12 速度变换公式

【已知】 物体相对于$\Sigma$系的速度为：

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad , \quad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad , \quad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

设$\Sigma'$系相对于$\Sigma$系沿$x$轴方向以速度$v$运动，试用洛伦兹变换式，

【求解】 物体相对于$\Sigma'$系的速度$\boldsymbol{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t'}$。

【解】 洛伦兹变换式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

取两式微分：

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \quad , \quad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z$$

## 速度变换公式（续）

$$\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{v}{c^2}u_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\mathrm{d}t$$

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}u_y \quad , \quad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}u_z$$

若物体相对于$\Sigma'$系的速度为$\boldsymbol{u}'$，则其在$\Sigma$系的速度为：

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_x}{c} = \frac{\frac{u'_x}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}u'_y \quad , \quad u_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}u'_z$$

非相对论极限下$(v \ll c \quad , \quad |\boldsymbol{u}| \ll c)$即可过渡到经典速度变换：

$$u_x \approx u'_x + v \quad , \quad u_y \approx u'_y \quad , \quad u_z \approx u'_z$$

## § 3.13 例一

【证明】 若物体相对于一个参考系的运动速度$|\boldsymbol{u}| < c$，则对任一参考系亦有$|\boldsymbol{u}'| < c$。
【证】 设物体在时间$\mathrm{d}t$内的位移为$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，由间隔不变性有：

$$c^2\mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) = c^2\mathrm{d}t'^2 - (\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t'} = \boldsymbol{u}' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (c^2 - u^2)\mathrm{d}t^2 = (c^2 - u'^2)\mathrm{d}t'^2$$

$$u < c \quad \Rightarrow \quad c^2 - u^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad c^2 - u'^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad u' < c$$

## § 3.14 例二

【已知】 固定在介质上的参考系为$\Sigma'$。在$\Sigma'$上观察，介质中的光速沿各方向都等于$\frac{c}{n}$，其中$n$为折射率。设$\Sigma'$系相对于$\Sigma$系沿$x$轴方向以速度$v$运动，
【求解】 匀速运动介质中的光速。
【解】 由前所得相对论速度变换公式为：

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

得沿介质运动方向的光速为：

$$u_x = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}$$

当$v \ll c$时

$$u_x \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v$$

逆介质运动方向传播的光速为：

$$u_x = \frac{-\frac{c}{n} + v}{1 - \frac{v}{nc}} \approx -\frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v$$

## § 3.15 小结

- 空间本身和时间本身都已成为阴影，只有两者的结合才能独立存在；
- 由间隔不变性可知，时空间隔可分为绝对的三种：类时、类空、类光间隔； 不因参考系变换而改变
- 关联事件的先后关系是绝对的，满足因果律；
  - 关联事件的四维间隔是类时间隔，也只有类时间隔的两事件才有因果律；
  - 物质运动、相互作用的最大极限速度为光速$c \Leftrightarrow$因果关系的绝对不变性；
- 类空间隔的两事件，没有因果关系，存在同时相对性；
- 运动物体上发生的自然过程比起静止物体的同样过程延缓了——时间延缓效应；

- 和物体一起运动的钟所给出的时间为原时或固有时，记为$\mathrm{d}\tau$；
- 钟慢效应具有相对性；

▶ 运动物体的长度比起静止物体的长度缩短了；

▶ 给出相对论情况下不同参考系间的速度变换关系；

【习题】 Page 290: 8,9

# 第四节　相对论理论的四维形式

## § 4.1　洛伦兹变换的四维形式

引入复四维空间（闵可夫斯基空间、赝欧几里得空间）：

$$x = x_1 \quad , \quad y = x_2 \quad , \quad z = x_3 \quad , \quad \mathrm{i}ct = x_4$$

洛伦兹变换形式上即为该空间的转动：

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma x_1 + \mathrm{i}\beta\gamma x_4 \quad , \quad x_4' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\mathrm{i}\beta\gamma x_1 + \gamma x_4$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$a = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{9}$$

## 洛伦兹变换的四维形式（续）

$$\sin\theta = \mathrm{i}\beta\gamma \quad , \quad \cos\theta = \gamma \quad , \quad \tan\theta = \mathrm{i}\beta$$

在$\Sigma'$系中处于静止状态的物体，在$\Sigma$系中以速度$v$匀速运动；
在$\Sigma'$系中其世界线为垂直于轴的直线$x_1' = \mathrm{const}$，在$\Sigma$系中其世界线斜角为$(\frac{\pi}{2}+\theta)$；

$$\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}x_1} = \tan(\frac{\pi}{2}+\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_4} = \frac{1}{\mathrm{i}c}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\mathrm{i}c} = -\tan\theta$$

洛伦兹逆变换矩阵

$$a^{-1} = \tilde{a} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

洛伦兹变换满足正交条件

$$\tilde{a}a = I$$

## § 4.2 四维协变量

时间与空间统一在复四维空间内，惯性参考系的变换—洛伦兹变换相当于四维空间的转动；

零阶张量：在洛伦兹变换下不变，洛伦兹标量、不变量，如间隔、固有时$\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}s}{c}$等；

$$T'=T$$

一阶张量：四维矢量，如位移$\mathrm{d}x_\mu$、四维速度矢量$U_\mu=\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$、四维波矢量等；

速度不是矢量

$$V'_\mu=a_{\mu\nu}V_\nu$$

$$U_\mu=\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\gamma\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t}=\gamma(u_1,u_2,u_3,\mathrm{i}c)$$

当$v\ll c$时前三个分量为速度，其四维长度为$-c^2$

二阶张量：四维张量，如电磁场张量

$$T'_{\mu\nu}=a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}T_{\lambda\tau}$$

**【定义】** 在洛伦兹变换下具有确定的变换性质的物理量（标量、矢量和各阶张量），称为协变量。

## § 4.3 相对论的多普勒效应和光行差公式

相位只是计数问题，不随参考系而变⇒相位是标量

$$\phi=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\omega't'=\phi'=\mathrm{const}$$

$$k'_\mu x'_\mu=k_\mu x_\mu=\mathrm{const}\qquad\Rightarrow\qquad k_\mu=\left(\boldsymbol{k},\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\right)$$

$$\begin{cases}k'_1= & \gamma\left(k_1-\frac{v}{c^2}\omega\right)\\ k'_2= & k_2\\ k'_3= & k_3\\ \omega'= & \gamma\left(\omega-vk_1\right)\end{cases}$$

设波矢量$\boldsymbol{k}$与$x$轴方向的夹角为$\theta$，$\boldsymbol{k}'$与$x$轴夹角为$\theta'$，有

$$k_1=\frac{\omega}{c}\cos\theta\quad,\quad k'_1=\frac{\omega'}{c}\cos\theta'$$

$$k'_1=\gamma\left(\frac{\omega}{c}\cos\theta-\frac{v}{c^2}\omega\right)=\gamma\frac{\omega}{c}\left(\cos\theta-\frac{v}{c}\right)$$

## 相对论的多普勒效应和光行差公式（续一）

### 相对论的多普勒效应

$$\omega'=\omega\gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

### 光行差公式

$$
\begin{aligned}
\tan\theta' &= \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta'}}{\cos\theta'} = \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2k_1'^2}-1} = \frac{\sqrt{\omega'^2-c^2k_1'^2}}{ck_1'} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{\omega'^2}{\omega^2}-\frac{c^2k_1'^2}{\omega^2}}}{\gamma\left(\cos\theta-\frac{v}{c}\right)} = \frac{\sqrt{\gamma^2\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2-\gamma^2\left(\cos\theta-\frac{v}{c}\right)^2}}{\gamma\left(\cos\theta-\frac{v}{c}\right)} \\
&= \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta-\frac{v}{c}\right)}
\end{aligned}
$$

若$\Sigma'$为光源的静止参考系，$\omega'=\omega_0$为静止光源辐射角频率，运动光源辐射角频率：

$$
\omega = \frac{\omega_0}{\gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)} \tag{10}
$$

### 相对论的多普勒效应和光行差公式（续二）

当$v\ll c$时$\gamma\approx 1$，式变为运动光源的经典多普勒效应公式：

$$
\omega \approx \frac{\omega_0}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)}
$$

在垂直于光源运动方向观察辐射时，相对论多普勒效应公式—横向多普勒效应：

$$
\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}
$$

经典多普勒效应公式：

$$
\omega = \omega_0
$$

## § 4.4 物理规律的协变性

- 【要点】 相对论的要点是断言：一切惯性系在物理上等价。
- 【推论】 在不同惯性系中，物理规律应该可以表为相同形式。
- 【问题】 基本物理规律应有什么形式，它才符合相对论的要求？
- 【回答】 当把物理量用四维张量表示，且相应的物理规律有四维张量方程的形式，则它在惯性系转换中必将保持形式不变。
- 【定义】 在参考系变换下方程形式不变的性质称为协变性。
- 【例子】 设某方程具有形式

$$
F_\mu = G_\mu
$$

其中$F_\mu$和$G_\mu$都是四维矢量。在参考系变换下，方程形式不变：

$$
a_{\mu\nu}F_\nu = a_{\mu\nu}G_\nu \quad\Rightarrow\quad F'_\mu = G'_\mu
$$

## § 4.5 小结

- 时间与空间统一在复四维空间内，惯性参考系的变换——洛伦兹变换相当于四维空间的转动；
- 在洛伦兹变换下具有确定的变换性质的物理量（标量、矢量和各阶张量），称为**协变量**；
  - 间隔、固有时、相位等物理量为**洛伦兹标量**；
  - 位移、四维速度矢量、四维波矢量等为**四维矢量**；
  - 电磁场张量为**四维张量**；
- 运动的光源满足相对论的多普勒效应和光行差公式；
- 物理规律的方程采用**协变的四维形式**，就可以满足相对性原理的要求。

【习题】 Page 291: 10,11

# 第五节　电动力学的相对论不变性

- 相对性原理成立⇒物理学的基本规律应能表成四维张量方程的形式；
- 宏观物理的基本规律有两方面：
  - 一切有质量物体所遵循的力学规律；
  - 一切电磁现象所遵循的电动力学规律；
- 总结了宏观电磁规律的麦克斯韦方程组适用于任意惯性参考系；
  - 电磁规律到底是否符合相对性原理，这不是一个理论问题，而是实践问题；
  - 实验证明：麦克斯韦方程组的推论（真空中光速$c$不变），对任意惯性参考系成立；
  - 当采用洛伦兹变换，电磁规律与相对性原理是相洽的； 伽利略变换不行
  - 麦克斯韦方程组内$\rho$、$\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$的变换性质；

## § 5.1 四维电流密度矢量

**实验表明**：电荷$Q$是一个**洛伦兹标量**； 与速度无关

$$Q = \int \rho \, \mathrm{d}V = \mathrm{const}$$

设粒子静止时电荷密度为$\rho_0$，体元为$\mathrm{d}V_0$。当粒子以速度$\boldsymbol{u}$运动，经洛伦兹收缩后的体元为

$$\mathrm{d}V = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \mathrm{d}V_0$$

由总电荷保持不变$\rho_0 \, \mathrm{d}V_0 = \rho \, \mathrm{d}V$，可知运动粒子的电荷密度：

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma_u \rho_0 \tag{11}$$

以速度$\boldsymbol{u}$运动的粒子，其电流密度为：

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{u} = \gamma_u \rho_0 \boldsymbol{u} \tag{12}$$

已知四维速度$U_\mu = \gamma(u_1, u_2, u_3, \mathrm{i}c)$，综合(11)式与(12)式可合成**四维矢量**：

$$J_\mu = \rho_0 U_\mu = \rho_0 \gamma_u(\boldsymbol{u}, \mathrm{i}c) = (\gamma_u \rho_0 \boldsymbol{u}, \mathrm{i}c\gamma_u \rho_0) = (\boldsymbol{J}, \mathrm{i}c\rho)$$

## § 5.2 电荷守恒定律的四维形式

电流密度四维矢量

$$J_\mu = (\boldsymbol{J}, \mathrm{i}c\rho)$$

电荷守恒定律：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

电荷守恒定律四维形式为：

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} + \frac{\partial J_3}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial(\mathrm{i}ct)}(\mathrm{i}c\rho) = 0 \tag{13}$$

式(13)左侧为两个四维矢量的点积——洛伦兹标量，故其显然具有协变性。
由于相对论中时空的统一，使得非相对论中的不同物理量显示出其统一性。 如四维波矢量、势矢量
如电流密度四维矢量：当粒子静止时，只有电荷密度$\rho$；
当粒子运动时，表现出有电流$\boldsymbol{J}$，同时电荷密度亦相应地改变；
$\rho$和$\boldsymbol{J}$是一个统一物理量的不同方面；
当参考系变换时$\rho$和$\boldsymbol{J}$拥有确定的变换关系；

## § 5.3 四维势矢量

用势表示的电动力学基本方程组为达朗贝尔方程： 洛伦兹规范

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \quad , \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

**【定义】** 形如式(14)的微分算符是洛伦兹标量算符，称为**达朗贝尔算符**：

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{14}$$

$$\Box \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \quad , \quad \Box \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\mu_0 c^2 \rho = \mathrm{i}c\mu_0(\mathrm{i}c\rho)$$

考虑$\boldsymbol{A}$和$\varphi$合为一个**四维势矢量**： 注意量纲

$$A_\mu = \left(\boldsymbol{A}, \frac{\mathrm{i}}{c}\varphi\right)$$

## 四维势矢量（续）

协变的四维势方程为：

$$\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu$$

洛伦兹条件的四维形式为：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\partial(\frac{\mathrm{i}}{c}\varphi)}{\partial(\mathrm{i}ct)}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0$$

该方程同样具有协变性。
四维势矢量不同参考系下的变换公式为：$A'_\mu = a_{\mu\nu}A_\nu$

$$\begin{cases} A'_x = & \gamma(A_x - \frac{v}{c^2}\varphi) \\ A'_y = & A_y \\ A'_z = & A_z \\ \varphi' = & \gamma(\varphi - vA_x) \end{cases}$$

## § 5.4 电磁场张量

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \quad , \quad \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$B_1=\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3} \quad , \quad B_2=\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1} \quad , \quad B_3=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2} \tag{15}$$

$$E_1=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial t}=\mathrm{i}c\frac{\partial\left(\frac{\mathrm{i}}{c}\varphi\right)}{\partial x_1}-\mathrm{i}c\frac{\partial A_1}{\partial\left(\mathrm{i}ct\right)}=\mathrm{i}c\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right) \tag{16}$$

$$E_2=\mathrm{i}c\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right) \quad , \quad E_3=\mathrm{i}c\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right) \tag{17}$$

引入一个反对称四维张量

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

## 电磁场张量（续）

由式(15)与(16)、(17)式可知，电磁场构成一个四维张量

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

## § 5.5 麦克斯韦方程的协变形式

利用电磁场张量把三维的麦克斯韦方程组写为明显的协变形式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad,\quad\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu_0\boldsymbol{J}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 J_\mu \tag{18}$$

$\mu=4$或$\mu=1,2,3$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\quad,\quad\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0 \tag{19}$$

$\tau=1,2,3,4$

## § 5.6 电磁场的变换关系

由张量变换关系

$$F'_{\mu\nu}=a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}$$

导出电磁场的变换关系：

$$\begin{array}{rl} E'_1=E_1 & \qquad B'_1=B_1 \\ E'_2=\gamma(E_2-vB_3) & \qquad B'_2=\gamma(B_2+\frac{v}{c^2}E_3) \\ E'_3=\gamma(E_3+vB_2) & \qquad B'_3=\gamma(B_3-\frac{v}{c^2}E_2) \end{array} \tag{20}$$

其紧致形式为：

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{E}'_\parallel=\boldsymbol{E}_\parallel & \qquad \boldsymbol{B}'_\parallel=\boldsymbol{B}_\parallel \\ \boldsymbol{E}'_\perp=\gamma\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)_\perp & \qquad \boldsymbol{B}'_\perp=\gamma\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)_\perp \end{array} \tag{21}$$

式中$\parallel$和$\perp$分别表示与相对速度$\boldsymbol{v}$平行和垂直的分量。
当$v\ll c$时，(21)式过渡到非相对论电磁场变换式：

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\quad,\quad\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{B}$$

## § 5.7 四维电磁力密度矢量

- 由电荷和电流产生电磁场的规律是满足相对性原理；
- 电磁场对电荷和电流的作用规律也应当满足相对性原理；

由电磁场张量$F_{\mu\nu}$和四维电流密度矢量$J_\nu$构成新的四维矢量$f_\mu$：电磁力密度矢量：

$$f_\mu=F_{\mu\nu}J_\nu=(\boldsymbol{f},f_4)$$

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\quad,\quad f_4=\frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{i}}{c}w$$

其空间分量$\boldsymbol{f}$即为洛伦兹力密度；其第四分量$f_4$中的$w$即为电磁场对电荷系统作功的功率密度；

洛伦兹力密度和功率密度都满足相对论协变性要求；

电磁场的能量密度$\omega$、能流密度$\boldsymbol{S}$、动量密度$\boldsymbol{g}$以及动量流密度$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$共同构成电磁场的四维动量能量张量；

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \overleftrightarrow{\mathscr{T}} & \frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{S} \\ \mathrm{i}c\boldsymbol{g} & -\omega \end{bmatrix}$$

## § 5.8 电磁场的不变量

由电磁场张量$F_{\mu\nu}$的双重内积，可得洛伦兹标量：

$$-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{F}} : \overleftrightarrow{\mathscr{F}} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = B^2 - \frac{1}{c^2}E^2$$

已知四阶勒维–契维塔（排列）符号$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$的性质：

$$\det a = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}a_{4\delta} = 1$$

故可证明$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$构成四阶四维全反对称张量：

$$\varepsilon'_{\mu\nu\lambda\tau} = a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}a_{\lambda\gamma}a_{\tau\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\det a)\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$$

由此可得：另一个由电磁场张量构成的洛伦兹不变量：

$$\frac{\mathrm{i}}{8}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}F_{\mu\nu}F_{\lambda\tau} = \frac{1}{c}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$$

## § 5.9 例一：真空中平面波的洛伦兹不变量

真空中的平面波有

$$|\boldsymbol{B}| = \left|\frac{\boldsymbol{E}}{c}\right| \quad \Rightarrow \quad B^2 - \frac{1}{c^2}E^2 = 0$$

电场能量和磁场能量相等；

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E} = 0$$

$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$的偏振方向互相垂直；

这两条性质都保持洛伦兹不变。

【结论】 在任意惯性系上，平面电磁波都有$|\boldsymbol{B}| = \left|\frac{\boldsymbol{E}}{c}\right|$及$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$正交。

## § 5.10 例二：匀速运动带电粒子的电磁场

【已知】 匀速运动的带电粒子的速度为$\boldsymbol{v}$，电量为$\boldsymbol{e}$；

【求解】 求此带电粒子形成的电磁场。

【解】 选择参考系$\Sigma'$固定在粒子上：此时只有静电场

$$\boldsymbol{E}' = \frac{e\boldsymbol{x}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \quad , \quad \boldsymbol{B}' = 0$$

设在参考系$\Sigma$上观察，粒子以速度$v$沿$x$轴方向运动；经由(20)式的反变换可得：

$$E_x = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \qquad B_x = 0$$
$$E_y = \gamma\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \qquad B_y = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$$
$$E_z = \gamma\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \qquad B_z = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$$

## 例二：匀速运动带电粒子的电磁场（续一）

设粒子经过$\Sigma$系原点的时刻$t=0$。在$\Sigma$系的同一时刻观察各点上的场值，

$$x' = \gamma x \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z$$

由于

$$x'\boldsymbol{e}_1 + \gamma y'\boldsymbol{e}_2 + \gamma z'\boldsymbol{e}_3 = \gamma\boldsymbol{x}$$

$$r'^2 = \gamma^2x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2$$
$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left(r^2 - \beta^2y^2 - \beta^2z^2\right) = \frac{1}{1-\beta^2}\left[(1-\beta^2)r^2 + \beta^2x^2\right]$$

可得：

$$\boldsymbol{E} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{e\boldsymbol{x}}{4\pi\varepsilon_0\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)r^2 + \left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}}{c}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}$$

## 例二：匀速运动带电粒子的电磁场（续二）

当$v \ll c$时略去$\left(\frac{v}{c}\right)^2$项，可得：

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \boldsymbol{E}_0$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}_0 = \frac{\mu_0 e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{x}}{r^3}$$

**【结论】** 低速运动的带电粒子产生的电磁场可由库仑定律与毕奥—萨伐尔定律描述；
当$v \sim c$时在与$\boldsymbol{v}$垂直的方向上（$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} = 0$）：

$$\boldsymbol{E} = \gamma\frac{e\boldsymbol{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \gg \boldsymbol{E}_0$$

当$v \sim c$时在与$\boldsymbol{v}$平行的方向上（$y = z = 0$）：

与$\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel}$有不同在于尺缩效应

$$\boldsymbol{E} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{e\boldsymbol{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \ll \boldsymbol{E}_0$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E} \sim \frac{1}{c}\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{E}$$

## 例二：匀速运动带电粒子的电磁场（续三）

【结论】 高速运动($v \to c$)的带电粒子产生的电磁场的性质：

- 平行于运动方向的电场远小于静电场；
- 电场趋向于集中在与$\boldsymbol{v}$垂直的平面上；
- 磁场$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{E}$正交，类似于平面电磁波中$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{E}$的关系；
- 高速运动带电粒子的电磁场类似于在一个横向平面上的电磁脉冲波；

## § 5.11 例三

【已知】 $\Sigma$系中只有一均匀电场$\boldsymbol{E}$，而没有磁场；
【求解】 $\Sigma'$系在同一情况下看到什么？
【解】 当$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{v}$平行，即$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} = 0$，故

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}'_{\parallel} &= \boldsymbol{E}_{\parallel} & \boldsymbol{B}'_{\parallel} &= \boldsymbol{B}_{\parallel} = 0 \\ \boldsymbol{E}'_{\perp} &= \gamma\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)_{\perp} = 0 & \boldsymbol{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\boldsymbol{B} - \tfrac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E}\right)_{\perp} = 0 \end{aligned}$$

即：$\Sigma'$系中看到的结果与$\Sigma'$系完全一样；
当$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{v}$垂直，故：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}'_{\parallel} &= \boldsymbol{E}_{\parallel} = 0 & \boldsymbol{B}'_{\parallel} &= \boldsymbol{B}_{\parallel} = 0 \\ \boldsymbol{E}'_{\perp} &= \gamma\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)_{\perp} = \gamma\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\boldsymbol{B} - \tfrac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E}\right)_{\perp} = -\gamma\tfrac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E} \end{aligned}$$

## 例三（续）

$$\boldsymbol{E}' = \gamma\boldsymbol{E} \quad , \quad \boldsymbol{B}' = -\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E}$$

【结论】 在$\Sigma'$系中看到：

- 既有均匀电场$\boldsymbol{E}'$，又有均匀磁场$\boldsymbol{B}'$；
  - 电磁场是一个整体，而电场或磁场都同一物质的两个方面；
  - 电场、磁场量纲不同是历史的原因造成的；
- 电场$\boldsymbol{E}'$、磁场$\boldsymbol{B}'$以及速度$\boldsymbol{v}$两两相互正交；
- 电磁场不变量：$B^2 - \frac{1}{c^2}E^2 = -\frac{1}{c^2}E^2 < 0$；
- 电磁场不变量：$\frac{1}{c}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E} = 0$；

## § 5.12 小结

- 电动力学基本规律对任意惯性参考系成立；
- 四维电流密度矢量、势矢量、电磁力密度矢量、电磁场张量以及电磁场动量能量张量，反映出电磁场的统一性和相对性：电场和磁场是一种物质的两个方面；
- 当参考系变换时，各四维张量按确定的关系变换；
- 电荷守恒定律、达朗贝尔方程、麦克斯韦方程组、洛伦兹力公式均满足相对论协变性要求，对任意惯性参考系成立；
- 由电磁场张量给出了不同惯性系下的电磁场变换关系；
- 给出了两个电磁场不变量：$B^2-\frac{1}{c^2}E^2$与$\frac{1}{c}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$。

【习题】 Page 292: 12,13,14,15

# 第六节　相对论力学

相对论力学的两个必要条件

- 相对论力学规律必须满足洛伦兹变换的协变性；
- 当速度$v\ll c$时相对论力学应该合理地过渡到经典力学；

## § 6.1 能量—动量四维矢量

$$p_\mu=m_0U_\mu$$

$$\boldsymbol{p}=\gamma m_0\boldsymbol{v}=\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad,\quad p_4=\mathrm{i}c\gamma m_0=\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\mathrm{i}}{c}W$$

$$W=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma m_0c^2$$

$$p_\mu=(\boldsymbol{p},\frac{\mathrm{i}}{c}W)\quad\Rightarrow\quad p_\mu p_\mu=-m_0^2c^2=\mathrm{const}$$

$$W^2=p^2c^2+m_0^2c^4$$

## § 6.2 质能公式

- 质点的$m_0c^2$项是否确实是能量：
  - 静止能量$m_0c^2$项的出现是相对论协变性要求的结果；
  - 质点的静止质量能否发生变化；
  - 如其发生变化，它的增减是否会导致其他能量的增减，即是否服从能量守恒定律；

- 质能关系是相对论最重要的推论之一；
  - 一定质量的粒子具有一定的内部运动能量；
  - 带有一定内部运动能量的粒子就表现出有一定的惯性质量；
- 运动质量$m$才是惯性质量，静止质量$m_0$是粒子的基本属性之一；

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \quad , \quad W = mc^2$$

## § 6.3 相对论力学方程

引入四维力矢量$K_\mu$

$$K_\mu = \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = (\boldsymbol{K}, K_4) = \left(\boldsymbol{K}, \frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v}\right)$$

$$-\mathrm{i}cK_4 = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c^2}{W}\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau} = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{K} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau} \quad , \quad \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\boldsymbol{F} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\boldsymbol{K} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{K} = \gamma\boldsymbol{F}$$

相对论力学方程：

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

## 相对论力学方程（续）

- 力$\boldsymbol{F}$等于动量变化率，力$\boldsymbol{F}$所作的功率等于能量变化率；
- $\boldsymbol{p}$和$W$是相对论的动量和能量；
- 只有在低速运动情形下力$\boldsymbol{F}$才等于经典力；
- $\boldsymbol{F}$不是一个四维矢量的分量；

【习题】 Page 293: 16,17,18,19

# 第七节　带电粒子的拉格朗日量和哈密顿量

（略）