第二章 静电场

在给定的自由电荷分布以及空间介质和导体分布的情况下怎样求解静电场。

内 容 提 要

第一节 静电场的标势

§ 1.1 静电标势的引入

引入φ的好处：简单，矢量到标量

- 静电场的麦克斯韦方程组：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad , \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

- 静电场是无旋的⇒可以用一个标势来描述静电场；
  - 电场沿**任一**闭合回路的环量积分等于零：

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

  - 电荷由P_1移至P_2时电场所作的功**与路径无关**，而只和两端点有关。

$$\int_{C_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} - \int_{C_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{C_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{C_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

  - 把单位正电荷由P_1移至P_2，电场所作的功定义为P_1至P_2的电势差：

负号的指代电场对电荷作正功则电势下降

这是电势定义的积分形式

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

§ 1.2 电场强度$\boldsymbol{E}$与电势φ

- 相距为$d\boldsymbol{l}$的两点间电势差为：

$$d\varphi = -\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

  由于

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \nabla \varphi \cdot d\boldsymbol{l}$$

  比较可知

$$E = -\nabla \varphi$$

- 只有势的差值才有物理意义。
- 一般参考点的选取无穷远或地（$\varphi \propto \frac{1}{r}$）

电场强度$\boldsymbol{E}$与电势φ可以互相求得

$$\varphi(P) = \oint_{P}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

§ 1.3 关于电势的讨论

- 电势参考点的选择无穷远和地是统一的；
  - 大地是半径无穷大的导体，故此大地也是无穷点；
  - 用半径为无穷大导体模型可说明无穷远点和地电势相同；
- 电势φ能否替代电场强度$\boldsymbol{E}$？

仅在静电情况下可以。

- 在电荷密度为零的空间中不存在电势的极值；

§ 1.4 连续分布电荷的电势

- 点电荷的电场强度

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

- 点电荷的电势

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

- 电势同样满足叠加性原理，多个电荷的电势

什么是线性？那个量是线性的？

$$\varphi(P) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

- 连续分布电荷的电势

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')\, dV'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- 对于实际情况，上式是不够的：
  - 导体（或介质）中的感应电荷（束缚电荷）并不是明确可知的；
  - 电势的微分形式有助于研究其性质；

§ 1.5 静电势的微分方程和边值关系

- 在均匀各向同性线性介质中：

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

称之为泊松（Poisson）方程

- 电场的边值关系

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$$
$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_f$$

- 静电标势的边值关系
  - 由边界层电场强度有限，可知

$$\varphi_1=\varphi_2$$

  - 由$\boldsymbol{D}_2=\varepsilon_2\boldsymbol{E}=-\varepsilon_2\nabla\varphi$可知

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_2=-\varepsilon_2(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi)$$
$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\sigma_f$$

需要指出：$\varphi_1=\varphi_2$即是对应着电场边值关系的切向分量：

$$\varphi_1=\varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0 \tag{1}$$
$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0 \quad ?\Rightarrow \quad \varphi_1=\varphi_2 \tag{2}$$

对于(1)式证明如下：

【证明】 在介质边界两侧选两组点：P_1与P_2，P_1'与P_2'满足

$$\varphi_{P_1}=\varphi_{P_2} \quad , \quad \varphi'_{P_1}=\varphi'_{P_2}$$

设P_1与P_1'，P_2与P_2'相距$\Delta\boldsymbol{l}$

$$\varphi'_{P_1}-\varphi_{P_1}=\varphi'_{P_2}-\varphi_{P_2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_1\cdot\Delta\boldsymbol{l}=\boldsymbol{E}_2\cdot\Delta\boldsymbol{l}$$

由于$\Delta\boldsymbol{l}$的任意性可知：

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2$$

如此限制介质有无必要？

除了方程，还需要有边界条件

需要几个边条件？

两不同电势导体近似接触特例

电场边值关系的法向分量

§ 1.6 导体的静电条件

- 导体的性质源自于其内部有自由电子；
- 在静电条件下分析电子的受力平衡可知如下性质：
  - 导体内部电场为零；
  - 导体内部不带电，电荷只能分布于导体表面上；
  - 导体表面上电场必沿法线方向；
  - 导体表面为等势面整个导体的电势相等。
- 导体表面的边界条件

$$\varphi=const$$
$$\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\sigma_f$$

- 已知泊松方程、边值关系和边界条件，我们就可唯一地确定电场。

两个不是静电场下的导体例子：其一趋肤深度（有电导率），其二γ光子

§ 1.7　静电场的能量

- 各向同性线性介质中能量密度：

$$\omega = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$$

- 静电场的能量：

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\,dV$$

将$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$带入可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} &= -\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{D} = -\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D}\\ &= -\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})+\rho\varphi\end{aligned}$$

故此

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2}\int_{\infty}(-\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})+\rho\varphi)\,dV\\ &= \frac{1}{2}\int_{\infty}\rho\varphi\,dV-\frac{1}{2}\int_{\infty}\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})\,dV\\ &= \frac{1}{2}\int_{\infty}\rho\varphi\,dV-\frac{1}{2}\oint\varphi\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

因为$\varphi\propto\frac{1}{r}$，$\boldsymbol{D}\propto\frac{1}{r^2}$而面积$\propto r^2$，故此当$r\to\infty$时有$\oint\varphi\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}\to 0$，也即：

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty}\rho\varphi\,dV \tag{3}$$

自能？互能？

- 连续电荷分布激发的静电场总能量：

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\,dV'}{4\pi\varepsilon r}$$

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon}\int_{\infty}dV\int dV'\frac{\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')}{r} \tag{4}$$

【讨论】

- 公式3及4仅是在静电场下才成立；
- 电磁场的能量是分布在场中的，$\frac{1}{2}\rho\varphi$决不是能量密度；
- 用能量密度可以计算某区域内的电磁场能量，$\frac{1}{2}\rho\varphi$必须进行全空间的积分；
- 事实上$\frac{1}{2}\rho\varphi$只不过是对静止的带电体产生的能量进行积分的结果。

§ 1.8 小结

- 由于静电场的无旋特性，可以引入一个标势来描述静电场；
- 在静电场下，电势φ可以替代电场强度$\boldsymbol{E}$描述电场；
- 电势φ服从泊松方程，且满足相应的边值关系；
- 静电场的能量：$W=\frac{1}{2}\int\limits_{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\,dV$；

【习题】 Page 93:1,17

第二节　静电场的唯一性定理

- 哪些因素可以完全确定静电场，这样在解决实际问题时就有所依据；
- 对于提出尝试解，如果满足唯一性定理所要求的条件，确定其为该问题的唯一正确的解；
- 静电场求解方法的基础。

静电屏蔽：导体壳内的电荷对外无影响，导体壳外的电荷对内无影响！

§ 2.1 唯一性定理的表述

【唯一性定理】 设区域V内给定自由电荷分布$\rho(\boldsymbol{x})$，在V的边界S上给定

(i) 电势$\varphi|_S$

狄利克莱(*Dirichlet*)边界条件

或

(ii) 电势的法向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$ 则V内的电场唯一地确定。

诺埃曼(*Neumann*)边界条件

§ 2.2 关于唯一性定理的讨论

唯一性定理的适用条件：

- 是否仅对单一的均匀介质成立？
  区域V中可以包含多个分区，每个分区中可充满着均匀的介质。
- 何谓均匀介质？是否所有的均匀介质均能满足唯一性定理？
  宏观介电性质不随空间变化的介质可称之为均匀介质；不一定非得是线性的介质，但铁电介质是不满足的。
- 给定什么样的边界条件能唯一确定电场？是否还有类似的边界条件？
  上述条件均要求为闭合边界；混合边界条件也满足要求。
- Neumann边界条件采用的是电势法向导数。试问用切向分量行不行？
  不行。直观想象：导体围成的空间，电势切向分量均为零；电势分布需要给定面电荷；
- 静电场的边值关系包括切向、法向分量两条，唯一性定理的边界条件有几条？
  一条。两个边界条件是或的关系：若要求两个边界条件同时满足，会导致无解！

§ 2.3 唯一性定理的证明

【已知】 设给定区域V中可以分为若干个区域V_i，每一均匀区域的电容率为ε_i，且V内有给定的电荷分布$\rho(\boldsymbol{x})$。电势φ在均匀区域V_i内满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$$

在两区域V_i和V_j的分界面上满足边值关系

$$\varphi_i = \varphi_j$$

且

$$\varepsilon_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_i = \varepsilon_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j$$

在区域V的闭合边界S上给定$\varphi|_S$或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$。

【求证】 满足上述条件的电势分布φ是唯一的。

【证明】 设有两组不同的解φ'和φ''满足唯一性定理的条件，令

$$\varphi = \varphi' - \varphi''$$

则由$\nabla^2\varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$、$\nabla^2\varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$，得每个均匀区$V_i$内：

$$\nabla^2\varphi = 0$$

- 在两均匀区界面上有：

$$\varphi_i = \varphi_j$$

$$\varepsilon_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_i = \varepsilon_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j$$

- 在整个区域的边界上有：

$$\varphi|_S = \varphi'|_S - \varphi''|_S = 0$$

或

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S = \frac{\partial\varphi'}{\partial n}|_S - \frac{\partial\varphi''}{\partial n}|_S = 0$$

考虑第i个均匀区V_i的界面S_i上的积分

积分的量纲：能量；物理意义：一个电磁场的能量为零，也就是无电磁场；

$$\begin{aligned}\oint_{S_i} \varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint_{V_i} \nabla\cdot(\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi)\,dV \\ &= \iiint_{V_i} \varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\,dV + \iiint_{V_i} \varepsilon_i\varphi\nabla^2\varphi\,dV \\ &= \iiint_{V_i} \varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\,dV\end{aligned}$$

对所有分区V_i求和可得：

$$\sum_i \iiint_{V_i} \varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\,dV = \sum_i \oint_{S_i} \varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{S}$$

在两均匀区V_i和V_j的界面上，φ和$\varepsilon\nabla\varphi$的法向分量分别相等，但$d\boldsymbol{S}_i = -d\boldsymbol{S}_j$，故上式右边内部分界面的积分互相抵消，只剩下整个$V$的边界面$S$上的积分：

$$\sum_i \oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S \varepsilon_i \varphi \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{S}$$

又因为在S上，$\varphi|_S = 0$或者$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S = 0$，两种情况下面积分都等于零，故此有

$$\sum_i \iiint_{V_i} \varepsilon_i (\nabla\varphi)^2 \, dV = 0$$

由于被积函数$\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2 \geq 0$，上式成立的条件是在$V$内各点上都有：

$$\nabla\varphi = 0$$

即在V内

$$\varphi = \text{const}$$

电势中的常数对电场没有影响，故此得证。

§ 2.4　有导体存在时的唯一性定理

设区域V内存在导体，

- 或者给定每个导体上的电势φ_i（第一类型问题）；
- 或者给定每个导体上的总电荷Q_i（第二类型问题）；

并给定导体外部、V内的自由电荷分布$\rho(\boldsymbol{x})$，以及V边界S上的如下条件

(i) 电势$\varphi|_S$

或者

(ii) 电势的法向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$

则V内的电场唯一地确定。

为简单起见，以下只讨论区域内含一种均匀介质的情形。

§ 2.5　第一类型问题的证明

对于第一类型问题，可以转化为无导体时的唯一性定理：

- 由于导体内部电场为零，故此可以将导体内部区域从考虑范围内除去；
- 除去导体部分的区域由V变到了V'；
- 相应的，边界由S变成了S'：S'不仅包含S，而且包括每一个导体表面S_i；
- 每个导体表面S_i上都给定了确定的φ_i，且S上或给出了$\varphi|_S$或给出了$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$；
- V'的边界S'上闭合地给出了或$\varphi|_{S'}$或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{S'}$的边界条件；　这是一种新的边界条件
- 由前面证明可知：混合边界条件同样可以满足唯一性定理；
  除了这三种边界条件外，其它边界条件能否给出唯一性定理？比如柯西边界条件？不行。
- 第一类型问题得以解决；

§ 2.6 第二类型问题的证明

【已知】 设给定区域V中有一些导体，给定导体之外的电荷分布$\rho(\boldsymbol{x})$，电势φ在导体区域之外V'满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_i}$$

给定各导体上的总电荷Q_i，即第i个导体上满足电荷条件：

$$-\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\boldsymbol{S}=\frac{Q_i}{\varepsilon}$$

且等势面条件

$$\varphi|_{S_i}=\varphi_i=const$$

在区域V的闭合边界S上具有给定$\varphi|_S$或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$。

【求证】 满足上述条件的电势分布φ是唯一的。

【证明】 设有两组不同的解φ'和φ''满足唯一性定理的条件，令

$$\varphi=\varphi'-\varphi''$$

则V'内φ满足：

$$\nabla^2\varphi=0$$

- 导体表面上有：

$$\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\boldsymbol{S}=0$$

$$\varphi|_{S_i}=\varphi_i=\mathrm{const}$$

- 在整个区域的边界上有：

$$\varphi|_S=\varphi'|_S-\varphi''|_S=0$$

或

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S=\frac{\partial\varphi'}{\partial n}|_S-\frac{\partial\varphi''}{\partial n}|_S=0$$

对于区域V'有公式

$$\begin{aligned}\oint\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{S}&=\iiint_{V'}\nabla\cdot(\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi)\,dV\\&=\iiint_{V'}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\,dV+\iiint_{V'}\varepsilon_i\varphi\nabla^2\varphi\,dV\\&=\iiint_{V'}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\,dV\end{aligned}$$

上式左侧面积分包括V的边界S以及每个导体的表面S_i。作为V'的边界，S_i的法线指向导体内部，若用$\boldsymbol{n}$表示导体向外的法线分量，则在S_i上的积分为

$$\oint_{S_i}\varphi\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{S}=-\varphi_i\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

这里用到了φ_i是个常数

由前所述，S上的积分也为零，故此：

$$\iiint (\nabla\varphi)^2 \, dV = 0$$

由于被积函数$(\nabla\varphi)^2 \geq 0$，上式成立的条件是在V内各点上都有：

$$\nabla\varphi = 0$$

故此电场唯一确定。又当导体外的电势确定后，由边值关系

$$-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \sigma$$

即可确定导体表面的面密度。

【讨论】

- 由最初的唯一性定理可知，对于Neumann边界条件而言，需要知道边界每一点处的电势法向导数；
- 而导体的第二类型问题中，给出总电量Q_i仅相当于给出了S_i表面的电势法向导数的积分。
- 条件变弱的原因在于：导体的附加性质——导体面为等势面。

§ 2.7 小结

- 在区域V内给定自由电荷分布$\rho(\boldsymbol{x})$以及相应的闭合边界条件，即可唯一确定场的分布；
- 有导体的情况下，给定导体之外的自由电荷分布$\rho(\boldsymbol{x})$，给定每个导体上的电势φ_i，以及区域V的边界S上的闭合边界条件，即可唯一确定场的分布；
- 保持上述条件不变，用每个导体的所带电量Q_i替换其电势φ_i，同样可以确定静电场分布。

【习题】 Page 96：14,15

第三节 分离变量法

§ 3.1 拉普拉斯(Laplace)方程

空间区域V内部自由电荷密度$\rho = 0$，边界条件可变的物理情况，可用拉普拉斯(Laplace)方程求解：

许多实际问题中，常常用到电荷只出现在导体的表面上，而空间中没有其他自由电荷分布的情况;

$$\nabla^2\varphi = 0$$

此类问题的解法是求拉普拉斯方程的满足边界条件的解。

- 拉普拉斯方程的通解可以用分离变量法求出：
- 先根据界面形状选择适当的坐标系；
- 然后在该坐标系中用分离变量法解拉普拉斯方程（最常用的坐标系有球坐标系和柱坐标系）。

§ 3.2 球坐标下的分离变量法

拉普拉斯方程的球坐标形式：

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0 \tag{5}$$

设

$$\varphi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

代入(5)式并乘以$\frac{r^2}{R\Theta\Phi}$，得

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}) = \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}) + \frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -n(n+1)$$

关于$R(r)$的方程及其解：

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - n(n+1)R = 0$$

$$R(r) = A_n r^n + B_n\frac{1}{r^{n+1}}$$

关于$\Theta(\theta)\Phi(\phi)$的方程：

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}) + \frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -n(n+1) \tag{6}$$

式(6)两端乘以$\sin^2\theta$可得：

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}) + n(n+1)\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = m^2$$

关于$\Phi(\phi)$的方程及其解：

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -m^2$$

$$\Phi(\phi) = C_m\sin(m\varphi) + D_m\cos(m\varphi)$$

关于$\Theta(\theta)$的方程称为**缔合勒让德(Legendre)方程**，其解称为**缔合勒让德函数**：

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0$$

$$\Theta(\theta) = k\,P_n^m(\cos\theta)$$

§ 3.3 拉普拉斯方程的通解

- 拉氏方程在球坐标中的通解为

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta,\phi) = &\sum_{n,m}(a_{nm}r^n + b_{nm}\frac{1}{r^{n+1}})P_n^m(\cos\theta)\cos(m\phi)\\ &+\sum_{n,m}(c_{nm}r^n + d_{nm}\frac{1}{r^{n+1}})P_n^m(\cos\theta)\sin(m\phi)\end{aligned}$$

- 其中$P_n^m(\cos\theta)$为缔合勒让德(Legendre)函数；
- 式中a_{nm}、b_{nm}、c_{nm}、d_{nm}为任意常数，由边界条件定出；

▶ 若该问题中具有对称轴，取此轴为极轴，则电势φ不依赖于方位角ϕ，这情形下通解为

$$\varphi(r,\theta) = \sum_n (a_n r^n + b_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta)$$

这是什么情况下的通解？考虑圆锥、或者柱坐标下的尖劈时，$0 \le \theta < \alpha < \pi$，此时要求$\nu$为等于零或者大于零的实数，并不要求是整数，可以（而且往往）是非整数。

- 其中$P_n(\cos\theta)$为勒让德函数；
- 式中a_n、b_n为任意常数，由边界条件定出。

▶ 所有的拉普拉斯方程都是一样的，我们需要作的就是根据具体的边界条件确定出这些通解中所含的任意常数，从而得到满足边界条件的特解。

§ 3.4 勒让德函数

勒让德方程 (取$\zeta = \cos\theta$)

$$\frac{d}{d\zeta}\left[\left(1-\zeta^2\right)\frac{d\Theta}{d\zeta}\right] + n(n+1)\Theta = 0$$

$$\begin{aligned}
P_0(\cos\theta) &= 1 \\
P_1(\cos\theta) &= \cos\theta \\
P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\
P_3(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

罗德利格(Rodrigues)公式

其正交完备性不提

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d(\cos\theta)^n}\left[\left(\cos^2\theta - 1\right)^n\right]$$

§ 3.5 例一

【问题】 电容率为ε的介质球置于均匀外电场E_0中，求电势。
【解】 设介质球半径为R_0，以球心为圆点，E_0方向为极轴建立球坐标。易知该问题具有轴对称性，电势φ不依赖于方位角ϕ。

设球外及球内区域的电势分别为φ_1及φ_2，由于两区域内部都没有自由电荷，因此电势均满足拉普拉斯方程。故其通解可写为：

$$\varphi_1(r,\theta) = \sum_n (a_n r^n + b_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) \tag{7}$$

$$\varphi_2(r,\theta) = \sum_n (c_n r^n + d_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) \tag{8}$$

其中a_n、b_n、c_n、d_n分别为待定常数；
边界条件有：

(1) 无穷远$r\to\infty$处有$E\to E_0$，故：

为什么？哪里的无穷远点？
如何选取电势零点？

$$\varphi_1|_{r\to\infty}\to-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}=-E_0r\cos\theta=-E_0rP_1(\cos\theta)$$

比较系数可知：

$$a_1=-E_0\qquad,\qquad a_n=0\quad(n\neq1)$$

b_n的系数待定；

(2) 在$r=0$处有：φ_2有限，故此 $d_n=0$

由等势面的对称性可知其为零

(3) 在$r=r_0$处有边值关系：

$$\varphi_1=\varphi_2 \tag{9}$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \tag{10}$$

将电势φ_1及φ_2的表达式7及8带入边值关系9可得：

$$a_1r_0P_1(\cos\theta)+\sum_n\frac{b_n}{r_0^{n+1}}P_n(\cos\theta)=\sum_n c_nr_0^nP_n(\cos\theta)$$

- 比较P_0项的参数

$$\frac{b_0}{r_0}=c_0 \tag{11}$$

- 比较P_1项的参数

$$a_1r_0+\frac{b_1}{r_0^2}=c_1r_0 \tag{12}$$

- 比较P_n项$(n>1)$的参数

$$\frac{b_n}{r_0^{n+1}}=c_nr_0^n\quad\Rightarrow\quad b_n=r_0^{2n+1}\cdot c_n \tag{13}$$

将电势φ_1及φ_2的表达式7及8带入边值关系10可得：

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\sum_n\left[na_nr^{n-1}-({}_1n+1)b_n\frac{1}{r^{n+2}}\right]P_n(\cos\theta)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=\sum_n\left[nc_nr^{n-1}-(n+1)d_n\frac{1}{r^{n+2}}\right]P_n(\cos\theta)$$

$$a_1P_1(\cos\theta)-\sum_n\frac{(n+1)b_n}{r_0^{n+2}}P_n(\cos\theta)=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sum_n nc_nr_0^{n-1}P_n(\cos\theta)$$

- 比较P_0项的参数

$$-\frac{b_0}{r_0^2}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\cdot0\quad\Rightarrow\quad b_0=0 \tag{14}$$

- 比较P_1项的参数

$$a_1-\frac{2b_1}{r_0^3}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}c_1 \tag{15}$$

- 比较P_n项$(n>1)$的参数

$$\frac{(n+1)b_n}{r_0^{n+2}}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}nc_nr_0^{n-1}\quad\Rightarrow\quad b_n=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{n}{n+1}r_0^{2n+1}\cdot c_n \tag{16}$$

- 由方程12及15

$$a_1r_0+\frac{b_1}{r_0^2}=c_1r_0$$
$$a_1-\frac{2b_1}{r_0^3}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}c_1$$

可解得：

注意量纲

$$b_1=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0r_0^3\qquad,\qquad c_1=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0$$

- 由方程11、13、14及16可得：

$$b_n=c_n=0\qquad,\qquad n\neq1$$

- 由此所有常数均以定出，故可求得球外、球内的电势为：

$$\varphi_1=-E_0r\cos\theta+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\frac{E_0r_0^3\cos\theta}{r^2} \tag{17}$$
$$\varphi_2=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0r\cos\theta$$

【讨论】

- 球内电场强度为：

$$\boldsymbol{E}=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0$$

- 由$\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}<1$可以看出：球内电场比原外场$E_0$为弱；这是由于介质球极化后束缚电荷激发的场与原外场反向，使总电场减弱。
- 在球内总电场作用下，介质的极化强度为：

$$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}=\frac{3(\varepsilon-\varepsilon_0)\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0$$

- 介质球的总电偶极矩$\boldsymbol{p}$为：

为什么电四极矩为零？以及高阶矩均为零？因为是个介质**球**！位型是**球对称**的！

$$\boldsymbol{p}=V\cdot\boldsymbol{P}=\frac{4\pi}{3}r_0^3\boldsymbol{P}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)4\pi\varepsilon_0r_0^3}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0$$

- 式17中的中的第二项正是这个电偶极矩所产生的电势：

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\frac{E_0r_0^3\cos\theta}{r^2}$$

§ 3.6 例二

【问题】 导体尖劈带电势V，分析它的尖角附近的电场。

后面的讨论略去：这道题并不适合讲解。

【解】 选择Z轴沿尖边的柱坐标系。设尖劈张开的角度为α，由于电势φ不依赖于z，柱坐标下的拉氏方程为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0$$

用分离变量法求解此方程。设φ的特解为$\varphi=R(\boldsymbol{r})\Theta(\theta)$则分解为两个方程：

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}=\nu^2R$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\nu^2\Theta=0$$

其中ν为某些正实数或0。由此可得φ的通解：

$$\begin{aligned}\varphi&=(A_0+B_0\ln r)(C_0+D_0\theta)\\&\quad+\sum_{\nu}(A_\nu r^\nu+B_\nu r^{-\nu})(C_\nu\cos\nu\theta+D_\nu\sin\nu\theta)\end{aligned}$$

各待定常量和ν的可能值都由边界条件确定。

- 在尖劈$\theta=0$面上，$\varphi=V$，与r无关，由此：

$$A_0C_0=V\quad,\quad B_0=0$$

$$C_\nu=0\quad(\nu\neq 0)$$

因为$r\to 0$时φ有限，得：

$$B_0=B_\nu=0$$

- 在尖劈$\theta=2\pi-\alpha$面上，有$\varphi=V$，与r无关，必须：

$$D_0=0$$

$$\sin\nu(2\pi-\alpha)=0$$

因此ν的可能值为

$$\nu_n=\frac{n}{2-\frac{\alpha}{\pi}}\quad,\qquad(n=1,2\cdots)$$

考虑这些条件，φ可以重写成：

$$\varphi=V+\sum_n A_n r^{\nu_n}\sin\nu_n\theta\tag{18}$$

为了确定待定常量A，还必须用某一大曲面包围着电场存在的区域，并给定这曲面上的边界条件。因此，本题所给的条件是不完全的，还不足以确定全空间的电场。但是，我们可以对尖角附近的电场作出一定的分析：

在尖角附近，$r\to 0$，φ的公式(18)中主要贡献来自r最低幂次项，即$n=1$项。因此，

$$\varphi=V+A_1r^{\nu_1}\sin\nu_1\theta$$

电场为

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \approx -\nu_1 A_1 r^{\nu_1 - 1} \sin \nu_1 \theta$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \approx -\nu_1 A_1 r^{\nu_1 - 1} \cos \nu_1 \theta$$

尖劈两面上的电荷面密度为

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_\theta \qquad (\theta = 0)$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n = -\varepsilon_0 E_\theta \qquad (\theta = 2\pi - \alpha)$$

即

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n \approx -\varepsilon_0 \nu_1 A_1 r^{\nu_1 - 1}$$

若α很小，有$\nu_1 \approx \frac{1}{2}$，尖角附近的场强和电荷面密度都近似地正比与$r^{-\frac{1}{2}}$。由此可见，尖角附近可能存在很强的电场和电荷面密度。相应的三维针尖问题就是尖端放电现象。

§ 3.7 小结

- 拉普拉斯方程解决的是区域V内空间电荷为零的情况；
- 拉普拉斯方程在柱坐标及球坐标下的通解均以得到；
- 由具体的边界条件可确定出通解处的任意常数；
- 由此得出满足边界条件的特解。

【习题】 Page 93：2,3,6,7,8

第四节 镜象法

§ 4.1 镜象法求解静电边值问题

- 求解对象：空间区域V内部有一个（或几个）点电荷，也可以是柱位型下无限长带电直导线；
- 边界条件：要求有对称性很好的边界位型，如：无限大平板、球面、柱面等；且一般而言该边界为等势面；
- 求解方法：将边界对场的影响用边界外部虚设的象电荷等效地替代；
- 求解根据：唯一性定理—只要满足相同泊松方程以及边界条件，静电场就唯一确定；
  - 解题步骤一：根据等势面的形状粗估象电荷的个数及位置； 或者个人经验
  - 解题步骤二：调整象电荷的位置和大小，使其产生的场和原电荷分布所产生的场叠加后满足问题给出的边界条件；
  - 解题步骤三：验证这种电场是否满足所有给出的边界条件！
- 注意事项：象电荷放在边界的外部，它的存在并不改变原问题的电荷分布；

§ 4.2 例一

【问题】 接地无限大平面导体板附近有一点电荷Q，求空间中的电场。

书本上71页最后一行公式$\varphi = \mathrm{const}$令人不解;

【解】 问题求解思路如下：

- 本题中无限大导体平面接地：这是一个等势面；
- 点电荷周围的等势面；
- 从一簇等势面的形状分析镜像电荷；
- 猜测空间电场的形式；

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]$$

- 核实上述电场是否满足所有给出的边界条件。
- 用$\boldsymbol{F}_s = -\boldsymbol{n}\cdot T = -\boldsymbol{n}\cdot\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}E^2 I - \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\boldsymbol{n} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\boldsymbol{n}$积分可求出导体面所受力。

超热电子跑出靶面相当于一个电偶极子;

考虑多个点电荷

考虑贴近导体平面的一小块儿面电荷

§ 4.3 例二

【问题】 真空中有一半径为R_0的接地导体球，距球心为$a(a > R_0)$处有一点电荷Q，求空间各点的电势。

【解】 由等势面判断，镜象为一个点电荷，其位置在对称轴线上、导体球内部；

设其电量为Q'，位置如图所示，距原点为b；由导体表面电势为零，得出相应的边界条件如下：

$$\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} = 0$$

上式也即为：对球面上的任意一点P，存在：

$$\frac{r'}{r} = -\frac{Q'}{Q} = const$$

这是一个球面方程

$$[x - x_0(b,Q')]^2 + y^2 + z^2 = R^2(b,Q')$$

方程中的两个未知数b，Q'由以下两个条件

$$x_0(b,Q') = 0$$

$$R(b,Q') = R_0$$

确定出镜象电荷的大小和位置：

$$b = \frac{R_0}{a}R_0$$

$$Q' = -\frac{R_0}{a}Q$$

球外任一点的电势为：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} - \frac{R_0 Q}{ar'}\right]$$

易知：其满足在导体面上的$\varphi = 0$的边界条件：故此它是空间电场的唯一正确的解。

【讨论】

- 用$\oint\limits_S \sigma dS = -\oint\limits_S \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS$可以定出导体球所带总的感应电荷；
- 不需积分即可得到$-\oint\limits_S \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = -\frac{R_0}{a} Q = Q'$；

对于镜象电荷与导体球而言，高斯面上电场强度相同：其包围的电荷也相同。

- 导体球上的电荷是由接地点传至的；
- 由于从Q发出的电场线只有一部分收敛于球面上，剩下的部分伸展至无穷远，故此可知$|Q'| < Q$；
- 两种近似：
  - 源电荷靠近导体球壳；
  - 源电荷远离导体球壳；
- 假设源电荷在导体球壳内部，可利用球外的镜象点电荷，求解球内空间电势。

§ 4.4 例三

【问题】 真空中有一半径为R_0的**不接地**导体球，且带电荷为Q_0，距球心为$a(a > R_0)$处有一点电荷Q，求电荷Q所受的力。
【解】 本题与例二相仿，不同之处在于边界条件为：

- 球面为等势面（电势待定）；
- 从球面发出的总电通量为Q_0。

为了满足上述条件，设想在原来镜象电荷放置的基础上，再在$R = 0$处放置一镜象点电荷：这种方法的好处在于不改变等势面的形状！
易知该镜象电荷的电量为：

$$Q'' = Q_0 - Q' = Q_0 + \frac{R_0}{a} Q$$

故此球外电势为：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} - \frac{R_0 Q}{ar'} + \frac{Q_0 + \frac{R_0}{a}Q}{R}\right]$$

利用上式验证边界条件，易知满足所有边界条件。
电荷Q所受的力相当于两个镜象电荷对其作用力：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{QQ''}{a^2} + \frac{QQ'}{(a-b)^2}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{QQ_0}{a^2} - \frac{Q^2 R_0^3(2a^2 - R_0^2)}{a^3(a^2 - R_0^2)^2}\right]\end{aligned}$$

【讨论】

- 上式中第一项为两个点电荷的相互作用，可正可负；
- 第二项为吸引力，当$a \to R_0$时吸引力越大，可以大于第一项；

导体球可看作无限大平板

- 金属导体中电子脱离导体要做功，相当部分是为了克服该镜象力；

§ 4.5 例四

【问题】 真空中有一半径为R_0的不接地导体球，且不带电荷，距球心为$a(a > R_0)$处有一点电荷Q，求空间各点的电势。

【解】 本题与例二、例三相仿，不同之处在于边界条件为：

- 球面为等势面（电势待定）；
- 从球面发出的总电通量为0。

由例三可知，可用两个镜象点电荷模拟，其中在$R = 0$处镜象点电荷有：

$$Q'' = -Q' = \frac{R_0}{a}Q$$

故此球外电势为：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} - \frac{R_0 Q}{ar'} + \frac{R_0 Q}{aR}\right]$$

易知，在$R = R_0$处，也即球壳表面电势为

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

当导体半径为无穷大时，$a > R_0$也是无穷大，也即球壳电势为零；
这就证明了无穷远点与大地的电势相同。

§ 4.6 边界条件小结

- 从空间部分划分：
  - $r = 0$处
  - $r = \infty$处
  - 有限界面$r = r_0$处
- 从介质种类方面划分：
  - 绝缘介质界面（不含自由电荷）：

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = \varepsilon_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2$$

- 对于导体：
  - 或者给出导体表面电势：（电势给定）

$$\varphi = \varphi_0$$

  - 或者给出导体所带电荷：（电势待定）

$$\varphi = const$$

$$-\oint \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS = Q$$

  - 用另一边界条件求出导体表面自由电荷面密度

$$\sigma = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

§ 4.7 小结

- 求解对象：空间区域V内部有一个（或几个）点电荷，也可以是柱位型下无限长带电直导线；
- 边界条件：要求有对称性很好的边界位型，如：无限大平板、球面、柱面等；且一般而言该边界为等势面；
- 求解方法：将边界对场的影响用边界外部虚设的象电荷等效地替代；
- 求解根据：唯一性定理——只要满足相同泊松方程以及边界条件，静电场就唯一确定；
  - 解题步骤一：根据等势面的形状粗估象电荷的个数及位置； 或者个人经验
  - 解题步骤二：调整象电荷的位置和大小，使其产生的场和原电荷分布所产生的场叠加后满足问题给出的边界条件；
  - 解题步骤三：验证这种电场是否满足所有给出的边界条件！
- 注意事项：象电荷放在边界的外部，它的存在并不改变原问题的电荷分布；

【习题】 Page 95：9,10,11,12,13

第五节 格林(Green)函数

从镜象法扩展到格林函数

§ 5.1 δ函数的性质

- 点电荷的电荷密度分布可以用δ函数来描述：处于$\boldsymbol{x}'$点上的单位点电荷密度

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = 0 \qquad , \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$$

$$\iiint_V \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,dv = 1 \qquad , \qquad \boldsymbol{x}' \in V$$

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \delta(-\boldsymbol{x}) \qquad , \qquad \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(\cos\theta-\cos\theta')$$

§ 5.2 格林函数的定义

【定义】 一个处于$\boldsymbol{x}'$点上的单位点电荷所激发的电势$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$满足泊松方程：

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{19}$$

- 设在包含$\boldsymbol{x}'$点的某空间区域V，在V的边界S上有边界条件

选择$G|_S = 0$的用意在于叠加

$$G|_S = 0 \tag{20}$$

则19式的满足边界条件20式的解称为泊松方程在区域V的第一类边值问题的格林函数。

$G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = G(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)$格林函数的对称性：电势的倒易性

- 若在S上有另一边界条件：

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{\varepsilon_0 S} \tag{21}$$

（n为S的法线），则19式的满足边界条件21式的解称为泊松方程在区域V的**第二类边值问题**的**格林函数**。

其中$\boldsymbol{x}'$代表源点，即点电荷所在点，$\boldsymbol{x}$代表场点，∇^2是对场点$\boldsymbol{x}$求微分。

§ 5.3 特定区域的格林函数例子

- 无界空间的格林函数

格林函数是很难找的，对一维二维问题也可采用本征函数展开、保角变换等方法求得;

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

$$\begin{aligned} G(x,x') &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \end{aligned}$$

- 上半空间的格林函数

$$G(x,x') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right]$$

- 球外空间的格林函数

$\boldsymbol{x}'$点为点电荷的位置，镜象点电荷的位置在$\frac{R_0^2}{R'}\frac{\boldsymbol{x}'}{R'}$，带电量为$-\frac{R_0}{R'}$

$$r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| = \sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}$$

$$r' = \left|\boldsymbol{x}-\frac{R_0^2}{R'^2}\boldsymbol{x}'\right| = \frac{1}{R'}\sqrt{R^2R'^2+R_0^4-2R_0^2RR'\cos\alpha}$$

$$G(x,x') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{R_0}{R'r'}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{(\frac{RR'}{R_0})^2+R_0^2-2RR'\cos\alpha}}\right]$$

§ 5.4 格林公式

区域V内的两个函数$\varphi(\boldsymbol{x})$和$\psi(\boldsymbol{x})$满足如下格林公式：

$$\iiint\limits_V \left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right) dV = \oint\limits_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS$$

【证明】

$$\nabla\cdot(\psi\nabla\varphi) = \nabla\psi\nabla\varphi + \psi\nabla^2\varphi \tag{22}$$

$$\nabla\cdot(\varphi\nabla\psi) = \nabla\varphi\nabla\psi + \varphi\nabla^2\psi \tag{23}$$

由22式减去23式可得：

$$\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi = \nabla\cdot(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)$$

对上式两端进行体积分可得：

$$\iiint\limits_V \left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right) dV = \oint\limits_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS$$

§ 5.5 由格林公式求解第一类边值问题

对格林公式中的φ，取其满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}$$

取ψ为格林函数$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$，它满足$\nabla^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$。
为方便起见，将格林公式中的积分变量$\boldsymbol{x}$改为$\boldsymbol{x}'$，格林函数中的$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{x}'$互换，可得：

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_V \left[G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\nabla'^2\varphi(\boldsymbol{x}') - \varphi(\boldsymbol{x}')\nabla'^2 G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\right] dV' \\
&= \iiint\limits_V \left[-G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{\varepsilon_0} + \varphi(\boldsymbol{x}')\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\right] dV' \\
&= \oint\limits_S \left[G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x}')}{\partial n'} - \varphi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\right] dS'
\end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')dV' + \varepsilon_0 \oint\limits_S \Bigg[G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x}')}{\partial n'} \\
- \varphi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\Bigg] dS'
\end{aligned}$$

在第一类边值问题中，格林函数满足边界条件：

$$G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}'\in S} = 0$$

【结论】 只要知道格林函数$G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})$，以及给定边界上的$\varphi|_S$，即可求出该第一类边值问题的电势$\varphi(\boldsymbol{x})$：

第二类边值问题没有什么实际意义，也找不到格林函数，略去不讲

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')dV' - \varepsilon_0 \oint\limits_S \varphi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})dS' \tag{24}$$

§ 5.6 对格林函数法的讨论

- 格林函数法的实质就是通过格林公式，把静电边值问题转化为求解相应的格林函数的问题；
- 从表面上来看：格林函数所满足的方程和边界条件较原静电问题简单，但其实求解格林函数本身并不容易；
- 格林函数法也可以用来解拉普拉斯方程的边值问题($\rho(\boldsymbol{x}')=0$)；
- 格林函数法的物理意义：
  - 第一项：满足特定边界条件的各空间点电荷的电势叠加；
  - 第二项：各边界上仅有的电势不为零的面元，在空间产生的电场的叠加；

§ 5.7 例

【问题】 在无穷大导体平面上有半径为a的圆，圆内和圆外用极狭窄的绝缘环绝缘。设圆内电势为V_0，导体板其余部分电势为0，求上半空间的电势。
【解】 上半空间的格林函数用柱坐标来表示：

场点$\boldsymbol{x}$坐标为$(R\cos\phi, R\sin\phi, z)$；源点$\boldsymbol{x}'$坐标为$(R'\cos\phi', R'\sin\phi', z')$；镜象点$\boldsymbol{x}''$坐标为$(R'\cos\phi', R'\sin\phi', -z')$。

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right]$$

$$r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|=\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')+(z-z')^2}$$
$$r'=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|=\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')+(z+z')^2}$$

$$\begin{aligned}G(x,x')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}&\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')+(z-z')^2}}\right.\\&\left.-\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')+(z+z')^2}}\right]\end{aligned}$$

由格林公式可知上半空间电势为：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=-\varepsilon_0\oint_S\varphi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})dS'$$

由于法线沿$-z'$方向，格林函数的法向导数为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial n'}&=-\left.\frac{\partial G}{\partial z'}\right|_{z'=0}\\&=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z}{[R^2+R'^2+z^2-2RR'\cos(\phi-\phi')]^{3/2}}\end{aligned}$$

由于S上只有圆内部分电势不为零，故此

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon_0\int\varphi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial G}{\partial n'}dS'\\
&=\frac{V_0 z}{2\pi}\int_0^a R'dR'\int_0^{2\pi}d\phi'\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[1+\frac{R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')}{R^2+z^2}\right]^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

当$R^2+z^2\gg a^2$时，可以把被积函数展开，得：

$$
\varphi(x)=\frac{V_0a^2}{2}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[1-\frac{3a^2}{4(R^2+z^2)}+\frac{15R^2a^2}{8(R^2+z^2)^2}+\cdots\right]
$$

当取$\frac{a^2}{R^2+z^2}$的一级小量时，可得：

$$
\varphi(x)\approx\frac{V_0a^2}{2}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}=\frac{V_0a^2}{2}\frac{z}{r^3}\Longleftrightarrow\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0r^3}
$$

也即相当于一个电偶极子产生的电场。

§ 5.8 小结

- 格林函数为一类满足特殊泊松方程($\delta(\boldsymbol{x})$)以及边界条件的函数；
- 用镜象法可知三种特定区域的格林函数例子；
- 通过格林公式，用格林函数法可以求解静电场的第一类边值问题；
- 格林函数法也可以用来解拉普拉斯方程的边值问题。

【习题】 Page 96：18,19

第六节 电多极矩

§ 6.1 电的多极展开

- 无界空间中，边界条件为$\varphi|_{r\to\infty}=0$，电荷分布为$\rho(\boldsymbol{x}')$，求空间中的电势。

$$
\varphi(\boldsymbol{x})=\iiint\limits_V\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r}dV' \tag{25}
$$

  其中体积分遍及整个电荷分布区域，r为源点$\boldsymbol{x}'$到场点$\boldsymbol{x}$的距离。

- 我们考虑的场点距离源电荷很远时的情况，也即：当$r\gg\boldsymbol{x}'$时，可以对(25)式进行泰勒展开：

这也是最常遇到的实际情况

- 从【高等数学导论】摘抄的二元函数泰勒公式：

$$
f(x_0+h,y_0+k)\approx f(x_0,y_0)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x,y)\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \tag{26}
$$

设$r_0=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\frac{1}{r}$为：

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

故此用(26)式对$\frac{1}{r}$在$\boldsymbol{x}$点处展开：

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}&=\frac{1}{r_0}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left(-x'\frac{\partial}{\partial x}-y'\frac{\partial}{\partial y}-z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^m\frac{1}{r}\Big|_{r=r_0}\\&=\frac{1}{r_0}-\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r_0}+\frac{1}{2!}\left(\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\right)^2\frac{1}{r_0}+\cdots\\&=\frac{1}{r_0}-\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r_0}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r_0}+\cdots\end{aligned}\tag{27}$$

将表达式(27)带入式(25)，即可得到远处的电势为：

就是为了凑出多极矩展开的形式：后面求电荷分布在外电场中的能量时，不对$\rho(\boldsymbol{x})$做展开，是同样的道理。

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\iiint\limits_V\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_0}-\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r_0}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r_0}+\cdots\right]dV'\tag{28}$$

【讨论】 为什么仅对分母$\frac{1}{r}$展开？其实最一般的展开应该是对整个$\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r(\boldsymbol{x}')}$展开，为什么不对$\rho(\boldsymbol{x}')$展开？

把带$\boldsymbol{x}$的量提到积分号外边，并令

$$Q=\iiint\limits_V\rho(\boldsymbol{x}')dV'$$

$$\boldsymbol{p}=\iiint\limits_V\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')dV'$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}}=\iiint\limits_V 3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')dV'\qquad,\qquad D_{ij}=\iiint\limits_V 3x_i'x_j'\rho(\boldsymbol{x}')dV'$$

则式(28)可写为：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r_0}-\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{r_0}+\frac{1}{6}\sum_{i,j}D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r_0}+\cdots\right]\tag{29}$$

其中$\boldsymbol{p}$为体系的电偶极矩，张量$\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$为体系的电四极矩。

§ 6.2 电多极矩

- 展开式(29)中的各项，其物理意义即为：空间中的电荷体系，在远处激发的电势，就等于该电荷体系的各项电多极矩，在远处产生的电势之和。
- 电荷密度分布的零阶矩

$$Q=\iiint\limits_V\rho(\boldsymbol{x}')dV'$$

- 第一项为：把整个电荷体系看作集中在原点上的点电荷，由它激发的电势；其电势与r_0成反比。

$$\varphi^{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}$$

- 第二项$\varphi^{(1)}$、第三项$\varphi^{(2)}$分别为电偶极矩、电四极矩产生的电势：

$$\varphi^{(1)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{r_0}$$

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{r_0}$$

§ 6.3 电偶极矩

- 电荷密度分布的一阶矩：电偶极矩

$$\boldsymbol{p}=\iiint\limits_V \boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')dV'$$

- 电偶极矩激发的电势与r_0^2成反比：

$$\varphi^{(1)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{r_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}$$

- 如果一个体系的电荷分布对原点对称，它的电偶极矩为零。

源点怎么选？物理上为简单起见，做出这种积分决定！

- 总电荷为零、电偶极矩不为零的例子：电偶极子

带电体系电偶极矩产生的电势，与电偶极子产生的电势相类似;

$$\boldsymbol{p}=\iiint\limits_V \boldsymbol{x}'\left[Q\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'_+)-Q\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'_-)\right]dV'=Q(\boldsymbol{x}'_+-\boldsymbol{x}'_-)=Q\boldsymbol{l}$$

$$\begin{aligned}\varphi&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{x}_+|}-\frac{1}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{x}_-|}\right)\\&\approx\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_0-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{x}_+}-\frac{1}{r_0-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{x}_-}\right)\approx\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{l}}{r_0^2}\end{aligned}$$

$$\varphi\approx\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r_0^2}=\frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r_0^3}=-\frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_0}$$

注意到此时由点电荷产生的电势$\frac{1}{r}$的项相互抵消了，剩下的是$\frac{1}{r^2}$项

故有

$$\varphi\approx-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(p_z\frac{\partial}{\partial z})\frac{1}{r_0}$$

也即：电偶极子在远处产生的电势即为其电偶极矩产生的电势。

近处的电势未必相等

§ 6.4 电四极矩

- 电荷密度分布的二阶矩：电四极矩

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}} = \iiint\limits_V 3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')dV' \quad , \quad D_{ij} = \iiint\limits_V 3x_i'x_j'\rho(\boldsymbol{x}')dV'$$

- 电四极矩激发的电势与r_0^3成反比：

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}} : \nabla\nabla\frac{1}{r_0}$$

- 与电偶极矩的讨论相类似，为了凸现出电四极矩，最好使得点电荷产生的电势$\frac{1}{r}$的项、电偶极矩产生的电势$\frac{1}{r^2}$的项相互抵消：

- 如图所示的例子中，零阶矩、电偶极矩均为零，电四极矩不为零：

$$\begin{aligned} D_{33} &= \iiint\limits_V 3z'z'\rho(\boldsymbol{x}')dV' \\ &= \iiint\limits_V 3z'z'\left[Q\delta(z-b) + Q\delta(z+b) - Q\delta(z-a) - Q\delta(z+a)\right]dV' \end{aligned}$$

$$D_{33} = 6Q(b^2-a^2) = 6Q(b-a)(b+a) = 6pl$$

这种电四极矩产生的电势，就是一对反向电偶极子的电势：

$$\begin{aligned} \varphi &\approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_+} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_-} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\left(-l\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_0}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}pl\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\frac{1}{r_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}D_{33}\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\frac{1}{r_0} \end{aligned}$$

也即：符合电四极矩产生的电势。

- 上述电四极矩为：方向沿z轴的等量异号电偶极子，在z轴的不均匀性引起的电四极矩。

- 同理，具有D_{11}分量的最简单的电荷体系由x袖上两对正负电荷组成，具有D_{22}分量的体系由y轴上两对正负电荷组成；具有D_{12}分量的电荷体系由xy平面上两对正负电荷组成，其余类推。

§ 6.5 将电四极矩化为无迹对称张量

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}} = \iiint\limits_V 3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')dV' \quad , \quad D_{ij} = \iiint\limits_V 3x_i'x_j'\rho(\boldsymbol{x}')dV'$$

由对称性易知电四极矩是对称张量；

- 下面我们将电四极矩转化为无迹对称张量：

$$\nabla^2 \frac{1}{r_0} = 0 \qquad , \qquad r_0 \neq 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}\right) \frac{1}{r_0} = \sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r_0} = 0$$

上式两端各乘以$\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\iiint r'^2 \rho(\boldsymbol{x}')dV'$，并加入电四极矩产生的电势：

$$\begin{aligned}
\varphi^{(2)} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left[\iiint 3x_i' x_j' \rho(\boldsymbol{x}')dV'\right] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{r_0} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left[\iiint (3x_i' x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{x}')dV'\right] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{r_0}
\end{aligned}$$

- 重新定义电四极矩张量如下：

$$D_{ij} = \iiint (3x_i' x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{x}')dV'$$

由前讨论易知：用新的电四极矩定义，并不改变其产生的势：

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{i,j} D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{r_0}$$

同时，这种新的电四极矩张量满足迹为零：

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = 3x'^2 + 3y'^2 + 3z'^2 - 3r'^2 = 0$$

- 也即此时的电四极矩为无迹对称张量，其并矢形式为：

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}} = \iiint (3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' - r'^2\overleftrightarrow{\mathscr{I}})\rho(\boldsymbol{x}')dV'$$

- 电荷分布偏离球对称性，一般就会出现电四极矩：电四极矩的出现标志着对球对称性的偏离！
- 八极矩以及更高极矩较少用到，不加讨论。

§ 6.6 电荷体系在外电场中的能量

- 具有电荷分布$\rho(\boldsymbol{x})$的体系在外电场$\varphi_e(\boldsymbol{x})$中的能量为：

$$W = \iiint \rho\varphi_e dV \tag{30}$$

- 设电荷分布于小区域，取区域内适当点为坐标原点，对$\varphi_e(\boldsymbol{x})$进行展开：

不对$\rho(\boldsymbol{x})$展开就是为了凑出多极矩的形式

$$\varphi_e(\boldsymbol{x}) = \varphi_e(0) + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial \varphi_e(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \cdots \tag{31}$$

将式(31)带入式(30)可得：

$$W = Q\varphi_e(0) + \boldsymbol{p}\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}} : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \cdots$$

其中Q、$\boldsymbol{p}$、$\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$分别为总电量、电偶极矩与电四极矩。

- 第一项是设想体系的电荷集中于原点上时在外场中的能量：

$$W^{(0)} = Q\varphi_e(0)$$

- 第二项是体系的电偶极矩在外电场中的能量：

负号是因为偶极子方向的定义与电场方向相反：有扭偶极子的趋势

$$W^{(1)} = \boldsymbol{p}\cdot\nabla\varphi_e(0) = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_e(0)$$

- 电偶极子在外场中受的力：

当$\boldsymbol{E}$均匀时受力为零；此处的$\boldsymbol{\nabla}$是对场点作用，故$\boldsymbol{p}$为常数

$$\boldsymbol{F} = -\nabla W^{(1)} = \nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_e) = \boldsymbol{p}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}_e) + (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_e = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_e$$

- 电偶极子在外场中的力矩：

$$L_\theta = -\frac{\partial W^{(1)}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(pE_e\cos\theta) = -pE_e\sin\theta$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}_e$$

- 第三项是体系的电四极矩在外电场中的能量：

$$W^{(2)} = \frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}} : \nabla\nabla\varphi_e(0) = -\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}} : \nabla\boldsymbol{E}_e(0)$$

- 只有在非均匀场中电四极子的能量才不为零！

§ 6.7　关于电多极矩的讨论

- 这一节是本门课的重点；
- 电多极矩展开是求解静电场的一种方法；

什么样的静电场？

- 解决各种物理问题的过程中，多次用到多极矩的概念：磁多极矩、平均速度、温度、伏拉索夫方程到流体描述$\cdots$；
- 多极矩展开的方法首先是体会到了描述事物由简到繁这一最本质的思想，并由此总结、推广，成为了一种在各个领域都较为通用的认识事物的手段；

同样是智慧，与镜象法的精巧不同，多极矩展开有大智若愚的感觉

- 尽管引入电多极矩时利用了级数展开，但电多极矩展开是并不依赖于泰勒展开的另一种展开方式；
- 最本质的根源在于叠加原理；
- 实验上检测$\frac{1}{R^n}$项就可知道n阶矩；

§ 6.8 小结

- 空间中的带电体系，可以按其电荷密度做出多极矩展开；
- 空间中的电荷体系，在远处激发的电势，就等于该电荷体系的各项电多极矩，在远处产生的电势之和；
- 电荷密度分布的零阶矩，是把整个电荷体系看作集中在原点上的点电荷：由它激发的电势与r_0成反比；
- 一个体系的电偶极矩的出现，表示电荷分布对原点对称性的偏离：激发的电势与r_0^2成反比；
- 电四极矩的出现标志着对球对称性的偏离，：激发的电势与r_0^3成反比；
- 电荷体系在外场中的能量同样可以用多极矩展开的方法讨论；
- 总电荷、电偶极矩、电四极矩在外电场中的能量分别如下：$Q\varphi_e(0)$、$-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_e(0)$、$-\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}}:\nabla\boldsymbol{E}_e(0)$。

【习题】 Page 96：4,5,16