附录　矢量与张量

内 容 提 要

第一节　矢量分析

§ 1.1　向量运算法则

向量的加法和乘法，及其运算时的分配律、结合律、交换律。

加法的运算太简单，略去；主要考虑乘法的运算。

- 两个量的运算：一个矢量一个标量、两个矢量（略去）
- 三个量的运算：
  - 两个标量一个矢量

$$\boldsymbol{a}(\varphi\psi) = \varphi(\boldsymbol{a}\psi)$$

  - 两个矢量一个标量

$$\boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

- 三个矢量的运算

第四例应该是第三例

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \quad , \quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \quad , \quad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \quad , \quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

- 多个矢量的运算：可按三个矢量的运算法则展开

§ 1.2 三矢量的混合积

平行六面体的体积;

行列式性质：交换一次变符号

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$
$$= -\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

【推论】

- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$共面 $\quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = 0$
- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$一定共面 $\quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = 0$

§ 1.3 三矢量的矢积

矢积的方向：设$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{f}$，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{d}$，由于所有垂直于$\boldsymbol{d}$的矢量都在一个平面上，故$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$平面上，且与$\boldsymbol{c}$在该平面的投影垂直

既然$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$平面上，则可以分解为两个方向

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

【推论】

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_y)\cdot\boldsymbol{e}_x - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_y = a_y\cdot\boldsymbol{e}_x - a_x\cdot\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{e}_x\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}_y) = (\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y)\cdot\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_y = -a_x\cdot\boldsymbol{e}_y$$

证明矢积的公式

【求证】

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$$

【证明】 设

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$$

故

$$\boldsymbol{d} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_x - (a_1b_3 - a_3b_1)\boldsymbol{e}_y + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_z$$

$$\begin{aligned} f_1 &= c_2d_3 - c_3d_2 = c_2(a_1b_2 - a_2b_1) + c_3(a_1b_3 - a_3b_1) \\ &= a_1(b_2c_2 + b_3c_3) - b_1(a_2c_2 + a_3c_3) + (a_1b_1c_1 - b_1a_1c_1) \\ &= a_1(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) - b_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) \end{aligned}$$

同理：

$$f_2 = a_2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) - b_2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$$
$$f_3 = a_3(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) - b_3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$$

故此

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$$

§ 1.4 矢量分解

将矢量分解为两个矢量的和，其一沿着$\boldsymbol{b}$方向，其二在$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$平面上且垂直$\boldsymbol{c}$方向

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$$

【推论】

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_x + (\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{e}_x = a_x\cdot\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_x\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}_x)$$

§ 1.5 微分算子∇

同一般的矢量比较，∇算子具有微分、矢量两重特性。

- ∇算子的大小：$\frac{1}{r}$（量纲）
- ∇算子的方向：纵向

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{f} = (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z})\cdot\boldsymbol{e}_x + (\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial fz}{\partial x})\cdot\boldsymbol{e}_y + (\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y})\cdot\boldsymbol{e}_z$$
$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\boldsymbol{e}_z$$

§ 1.6 ∇算子矢量、微分特性的推论

$$\boldsymbol{a}\left(\varphi\psi\right) = \varphi\left(\boldsymbol{a}\psi\right) \Rightarrow \nabla\left(\varphi\psi\right) = \varphi\left(\nabla\psi\right) + \psi\left(\nabla\varphi\right)$$
$$\boldsymbol{a}\times\left(k\boldsymbol{b}\right) = k\left(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right) \Rightarrow \nabla\times\left(k\boldsymbol{b}\right) = k\left(\nabla\times\boldsymbol{b}\right) + \nabla k\times\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\left(k\boldsymbol{b}\right) = k\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\right) \Rightarrow \nabla\cdot\left(k\boldsymbol{b}\right) = k\left(\nabla\cdot\boldsymbol{b}\right) + \nabla k\cdot\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\right) = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{c}\right) = 0$$
$$\boldsymbol{a}\times\left(k\boldsymbol{a}\right) = 0 \Rightarrow \nabla\times\left(\nabla k\right) = 0$$

例一

【求解】

$$\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) \quad , \quad \nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) \quad , \quad \nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})$$

【解】

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) &= \nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}_c)+\nabla(\boldsymbol{f}_c\cdot\boldsymbol{g})\\ &\to(\boldsymbol{g}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{f}+(\boldsymbol{f}\times\nabla)\times\boldsymbol{g}_c+(\nabla\cdot\boldsymbol{f}_c)\boldsymbol{g}+(\boldsymbol{g}\times\nabla)\times\boldsymbol{f}_c\\ &=(\boldsymbol{g}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{f})+(\boldsymbol{f}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{g})\\ &=(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}+\boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})+\boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) &= \nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}_c)+\nabla\times(\boldsymbol{f}_c\times\boldsymbol{g})\\ &\to(\nabla\cdot\boldsymbol{g}_c)\boldsymbol{f}-(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}_c+(\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f}_c-(\nabla\cdot\boldsymbol{f}_c)\boldsymbol{g}\\ &=(\boldsymbol{g}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}_c(\nabla\cdot\boldsymbol{f})+\boldsymbol{f}_c(\nabla\cdot\boldsymbol{g})-(\boldsymbol{f}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{g}\\ &=(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}-(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f}(\nabla\cdot\boldsymbol{g})-\boldsymbol{g}(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) &= \nabla\cdot(\boldsymbol{f}_c\times\boldsymbol{g})+\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}_c)\\ &\to-\boldsymbol{f}_c\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})-\boldsymbol{g}_c\cdot(\boldsymbol{f}\times\nabla)\\ &=-\boldsymbol{f}_c\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})+\boldsymbol{g}_c\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})\\ &=-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})+\boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})\end{aligned}$$

例二

【形式变换】

$$(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} \qquad , \qquad (\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\varphi$$

【解】 我们应该熟悉$(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$这种形式：它很简单，也很常用。对其变换只能复杂化。

$$(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{f}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{g}=\nabla(\boldsymbol{f}_c\cdot\boldsymbol{g})-\boldsymbol{f}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{g})\neq\boldsymbol{f}(\nabla\cdot\boldsymbol{g})$$

$$(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\varphi=\boldsymbol{f}\cdot\nabla\varphi$$

举例如下：（设$\boldsymbol{k}$为常矢量）

$$(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}$$

$$(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{k}\times(\nabla\times\boldsymbol{r})=\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}$$

无限大平行板电场、平面电磁波波前

$$(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)(\varphi\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}[(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\varphi]+\varphi[(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}]$$

事实上由并矢可知：

$$(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}=\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})-(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}$$

例三

【形式变换】

$$(\boldsymbol{f}\times\nabla)\times\boldsymbol{g} \qquad , \qquad (\boldsymbol{f}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{g} \qquad , \qquad (\boldsymbol{f}\times\nabla)\varphi$$

【解】 这种形式不好计算，我们不用

$$(\boldsymbol{f}\times\nabla)\times\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{f}_c\times\nabla)\times\boldsymbol{g}=\nabla(\boldsymbol{f}_c\cdot\boldsymbol{g})-\boldsymbol{f}_c(\nabla\cdot\boldsymbol{g})$$

$$(\boldsymbol{f}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})$$

$$(\boldsymbol{f}\times\nabla)\varphi=\boldsymbol{f}\times\nabla\varphi$$

§ 1.7 复合函数的微分算子

$$\nabla f(u) = \nabla u \frac{df(u)}{du}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\boldsymbol{A}(u)}{du}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\boldsymbol{A}(u)}{du}$$
$$(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}(u) = (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)u \frac{d\boldsymbol{A}(u)}{du}$$

【结论】

$$\nabla = \nabla u \frac{d}{du}$$

§ 1.8 一些常用微分

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) &= \nabla r \cdot \frac{d}{dr}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) \\ &= \nabla r \cdot \frac{d}{dr}(\frac{r\boldsymbol{e}_r}{r^3}) = (\nabla r \cdot \boldsymbol{e}_r)\frac{d}{dr}(\frac{1}{r^2}) \\ &= -\frac{2}{r^3}\end{aligned}$$

上述推导的错误在于：

$$\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{A}(r)$$

【常用微分】

$$\nabla r = \boldsymbol{e}_r \quad , \quad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2} \quad , \quad \nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3 \quad , \quad \nabla \cdot \boldsymbol{e}_r = \frac{2}{r} \quad , \quad \nabla \cdot (\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$
$$\nabla \times \boldsymbol{r} = 0 \quad , \quad \nabla \times \boldsymbol{e}_r = 0 \quad , \quad \nabla \times (\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) = 0$$

例四

试用上式证明

$$\nabla \cdot (\frac{\boldsymbol{r}}{r^n}) = \frac{3-n}{r^n} + \frac{4\pi}{r^{n-3}}\delta(\boldsymbol{r})$$

【证明】

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\frac{\boldsymbol{r}}{r^n}) &= \nabla \cdot (\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \frac{1}{r^{n-3}}) \\ &= \nabla \cdot (\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) \cdot \frac{1}{r^{n-3}} + (\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) \cdot \nabla \frac{1}{r^{n-3}} \\ &= \frac{4\pi}{r^{n-3}}\delta(\boldsymbol{r}) + (\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) \cdot [\nabla r \cdot \frac{3-n}{r^{n-2}}] \\ &= \frac{4\pi}{r^{n-3}}\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{3-n}{r^n}\end{aligned}$$

§ 1.9 柱坐标系下的微分算子

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rf_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{f} = (\frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial\theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial z})\,\boldsymbol{e}_r + (\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r})\,\boldsymbol{e}_\theta + [\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rf_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial f_r}{\partial\theta}]\,\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

§ 1.10 柱坐标下常用微分

$$\nabla r = \boldsymbol{e}_r \quad , \quad \nabla z = \boldsymbol{e}_z \quad , \quad \nabla\theta = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{r} \quad , \quad \nabla\times\boldsymbol{e}_r = 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_\theta = 0 \quad , \quad \nabla\times\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_z = 0 \quad , \quad \nabla\times\boldsymbol{e}_z = 0$$

§ 1.11 球坐标系下的微分算子

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, f_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{f} = \frac{1}{r\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, f_\phi) - \frac{\partial f_\theta}{\partial\phi}]\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\, f_\phi)]\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rf_\theta) - \frac{\partial f_r}{\partial\theta}]\,\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

§ 1.12 球坐标下常用微分

$$\nabla r = \boldsymbol{e}_r \quad , \quad \nabla\theta = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta \quad , \quad \nabla\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{2}{r} \quad , \quad \nabla\times\boldsymbol{e}_r = 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r\tan\theta} \quad , \quad \nabla\times\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_\phi = 0 \quad , \quad \nabla\times\boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{r\tan\theta}\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta$$

例五

电流I均匀分布于半径为a的无穷长直导线内，求空间各点的磁场强度，并由此计算磁场的旋度。
【解】 在与导线垂直的平面上作一半径为r的圆，圆心在导线轴上。由对称性及安培环路定律得：

- 当$r > a$时

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r B = \mu_0 I \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta$$

故：

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{B} &= \nabla\times(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}[\nabla\times(\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta)] \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}[(\nabla\frac{1}{r})\times\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}(\nabla\times\boldsymbol{e}_\theta)] \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}[\nabla r\frac{d}{dr}(\frac{1}{r})\times\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\boldsymbol{e}_z}{r}] \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}[-\frac{1}{r^2}(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta) + \frac{1}{r}\frac{\boldsymbol{e}_z}{r}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

- 当$r < a$时

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r B = \mu_0 \iint_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\theta$$

故：

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{B} &= \nabla\times(\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}[\nabla\times(r\boldsymbol{e}_\theta)] \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}[(\nabla r)\times\boldsymbol{e}_\theta + r(\nabla\times\boldsymbol{e}_\theta)] \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}[(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta) + r\frac{\boldsymbol{e}_z}{r}] \\
&= \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\boldsymbol{e}_z \\
&= \mu_0\boldsymbol{J}
\end{aligned}$$

第二节　张量初步

§ 2.1　坐标变换与爱因斯坦(Einstein)求和约定

- 张量与空间及坐标变换密切相关。
- 设Σ系中一点(x_1, x_2, x_3)，通过坐标系的转动，在Σ'系中坐标为(x_1', x_2', x_3')，则：

三维欧氏空间内，笛卡尔直角坐标变换下的张量

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}x_j \qquad , \qquad i = 1,2,3$$

- 其中$\alpha_{ij} = \boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j$为坐标转动角的方向余弦，由其构成的矩阵称为坐标变换系数矩阵。

【爱因斯坦求和约定】 在张量运算中，在算式的某项中出现重复下标，就意味着对这个指标求和，求和号$\sum$并不写出，该指标称之为哑指标。 由此，上式即可简写成

这种约定是否会带来麻烦？请做练习体会。

$$x_i' = \alpha_{ij} x_j \qquad , \qquad i = 1, 2, 3$$

- 满足式(1)（距离保持不变）的线性变换称之为正交变换：

$$x_i' x_i' = x_i x_i = const \tag{1}$$

- 空间转动属于正交变换。其系数矩阵α_{ij}为一正交矩阵：

$$\tilde{\alpha}\alpha = \mathrm{I}$$

  其中I为单位矩阵。

§ 2.2 张量的定义

【定义】 如果某一物理量T，在三维笛卡儿坐标系下，由3^n个有序分量$T_{l \cdots m}$描述，并且经过由坐标系Σ到Σ'的变换α_{ij}后，满足如下关系：

字母不是重点，关键在于字母的次序

$$T'_{i \cdots j} = \underbrace{\alpha_{il} \cdots \cdots \alpha_{jm}}_{n} T_{l \cdots m}$$

则称该量T为n阶张量。

- 零阶张量：标量，坐标变换下不变，如质量、电荷、达朗贝尔算符等；

$$T' = T$$

- 一阶张量：矢量，如速度、力、电场强度、∇算符等；

$$T_i' = \alpha_{ij} T_j$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \frac{\partial}{\partial x_j} = \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

- 高阶张量：应用最多的是二阶张量

§ 2.3 二阶张量

- 二阶张量：如张力张量、电四极矩、转动惯量、介电张量等；

逐一解释物理意义。

铁丝网模型：张量即不太简单（非一维）也不太简单（矩阵即可描述）

$$T'_{ij} = \alpha_{il} \alpha_{jm} T_{lm}$$

- 二阶张量可以用一个矩阵来表示；

$T' = ATA'$

- 张量的含义：T_{ij}分量：在j方向分量作用下的i方向的反应效果；

点乘一个矢量后还是矢量（标量）的物理量为张量（矢量）

- 张量的自由度：任何一个张量都可以分解为三个部分：
  - 迹（标量）T_{ii} 自由度为1
  - 无迹对称张量$T_{ij} = T_{ji}$ 且$T_{ii} = 0$ 自由度为5
  - 反对称张量$T_{ij} = -T_{ji}$ 自由度为3

电四极矩

- 张量的对称性不随坐标变换改变；
- 两个矢量的并矢为二阶张量：$\boldsymbol{ab} = \overleftrightarrow{\mathscr{T}} \neq \boldsymbol{ba} \qquad , \qquad T_{ij} = a_i b_j$

矩阵表达与指标表达

§ 2.4 克罗内克(Kronecker)符号δ_{ij}（替换符号）

- 克罗内克符号δ_{ij}

$$\delta_{ij} = 1 \qquad (i = j)$$
$$\delta_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

- 对称性：$\delta_{ij} = \delta_{ji}$
- 转置不变性：$\delta'_{ij} = \delta_{ij}$
- 替换性：$\delta_{ij} v_j = v_i$
- 单位张量：$\boldsymbol{v} \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}} = \overleftrightarrow{\mathscr{I}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

§ 2.5 勒维–契维塔(levi–civita)符号ε_{ijk}（排列符号）

- 勒维–契维塔符号ε_{ijk}（三阶反对称张量）

$$\varepsilon_{ijk} = +1 \qquad (ijk = 123, 231, 312)$$
$$\varepsilon_{ijk} = -1 \qquad (ijk = 213, 321, 132)$$
$$\varepsilon_{ijk} = 0 \qquad (ijk = 112, 233, \cdots)$$

- 反对称性：$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$
- 转置不变性：$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}$
- 排列性：$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \qquad , \qquad (\nabla \times \boldsymbol{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$

§ 2.6 张量的运算法则：加法与乘法

- 张量相等：$A_{ij} = B_{ij}$ 注意矩阵表示
- 张量加法：$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$ 证明C_{ij}也是个张量
- 标量与张量相乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = k\overleftrightarrow{\mathscr{A}} \Leftrightarrow C_{ij} = kA_{ij}$
- 张量的并乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \Leftrightarrow C_{ijlm} = A_{ij}B_{lm}$

  一般而言：$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \neq \overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$！$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}$的阶数是$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$、$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$阶数相加 运算不满足交换律
- 结合律与分配律： 特别适合验证爱因斯坦求和约定

$$(\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}})\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}(\overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{C}})$$
$$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}(\overleftrightarrow{\mathscr{B}} + \overleftrightarrow{\mathscr{C}}) = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} + \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{C}}$$
$$(\overleftrightarrow{\mathscr{B}} + \overleftrightarrow{\mathscr{C}})\overleftrightarrow{\mathscr{A}} = \overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{A}} + \overleftrightarrow{\mathscr{C}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$$

§ 2.7 张量的运算法则：缩并与内积

- 缩并：阶数从n到$n-2$的运算，只有$n>2$缩并才有意义； 二阶张量的缩并就是迹
  - n阶张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$对下标$(j\cdots k)$的缩并定义为：

$$B_{i\cdots l}=\sum_j\sum_k A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}=A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}$$

- 两个张量的内积（缩并）
  - 两个张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$与$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$先并乘后各取一下标做缩并的运算称为内积，得到$m+n-2$阶张量。
  - 若选取的下标是相邻的，可以记做：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}=\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$ 注意矩阵表示

$$C_{im}=A_{ij}B_{lm}\delta_{jl}=A_{il}B_{lm}$$

  - 若$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$是二阶张量，$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$是一阶张量，同样可以用矩阵乘法。
- 双重内积：两个张量先进行并乘，然后再两次缩并；$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}=\overleftrightarrow{\mathscr{A}}:\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$ 对于二阶张量其双重缩并为标量

$$C=A_{ij}B_{lm}\delta_{jl}\delta_{im}$$

§ 2.8 张量的运算法则：并矢

- 并矢按单位并矢的分解：单位矢量$\boldsymbol{e}_i$的并矢$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$是二阶张量，称为单位并矢。
  - $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$的矩阵表示除了$E_{12}$项等于1之外均为零；$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$就是二阶张量的九个基。

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

- 并矢的内积运算

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{bc})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{bc}$$
$$(\boldsymbol{ab})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{ab}:\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{cd})=(\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d}$$

§ 2.9 并矢的微分运算

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{fg})=(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$$
$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}=\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}})+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}})$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{EE})=(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{E}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2)&=\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2)+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2)\\&=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial E^2}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial E^2}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial E^2}{\partial z}=\nabla E^2\end{aligned}$$

$$\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2)=(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}})\,E^2+(\nabla E^2)\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}=\nabla E^2$$
$$\oint dS\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}=\iiint dV\,\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$$
$$\oint d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{fg})=\iiint dV\,\nabla\cdot(\boldsymbol{fg})$$