Discovery阶段测试1答案

一、求下列函数的导函数

$$1.\frac{46x-12x^3}{(5-4x^2)^{3/2}}$$
$$2.\frac{x+2}{x+1}cos(ln(1+x)+x)$$
$$3.\frac{x^2lnx-lnx(1+x^2)}{x(lnx)^2\sqrt{1+x^2}}$$
$$4.x^2f(x)+\int_3^x xf(x)dx$$
$$5.x^{xlnx}((lnx)^2+2lnx)$$

二、求下列不定积分

$$1.-xcosx+sinx$$
$$2.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$3.tanx+\frac{1}{3}tan^3x$$
$$4.\frac{\pi}{2}$$
$$5.a^2[\frac{1}{2}arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{4}sin2arcsin\frac{a}{x}]$$

三、求解下列微分方程

$$1.\tau\ddot{q}+\dot{q}+\frac{1}{\tau}q=0$$
$$\Delta=-3<0\text{出现阻尼振荡}$$
$$\text{通解形式为}q=Ae^{-\frac{t}{2\tau}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t+\phi)$$
$$\text{代入初值条件得到}q=\frac{2\tau i_0}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2\tau}}sin(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t)$$

2.法1：按照常规二阶线性方程进行求解.

特征方程为$r^2+\omega_0^2=0$

特征根$r=\pm i\omega_0$

通解$q=C_1e^{i\omega_0}+C_2e^{-i\omega_0}$

$$=(C_1+C_2)cos\omega_0 t+i(C_1-C_2)sin\omega_0 t$$

$$=Acos\omega_0 t+Bsin\omega_0 t$$

代入初值条件，$x=\dfrac{v_0}{\omega_0}sin\omega_0 t$

法2：非可分离变量方程化为可分离变量方程技巧.

利用$\ddot{x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d(\dot{x}^2)}{dx},\dfrac{1}{2}\dfrac{d(\dot{x}^2)}{dx}=-\omega_0^2x$

$$\Rightarrow \dot{x}^2-v_0^2=\omega_0^2x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{v_0^2-\omega_0^2x^2}}=dt$$

$$x=\frac{v_0}{\omega_0}sin\omega_0 t$$

法3：瞎换元试试法.

令$\xi=\dot{x}+i\omega_0x$

$$\Rightarrow \dot{\xi}-i\omega_0\xi=0$$

$$\Rightarrow \frac{d\xi}{\xi}=i\omega_0dt$$

$$\Rightarrow \xi=v_0e^{i\omega_0t}$$

$$\Rightarrow x=\frac{Im(\xi)}{i\omega_0}=\frac{v_0}{\omega_0}sin\omega_0 t.$$

（注：$Im()$表示对函数取虚部）