科研部 第2课时 (下学期)

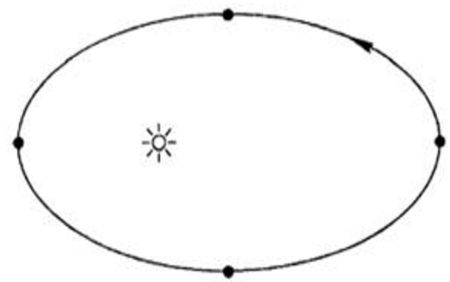
# 力学初步

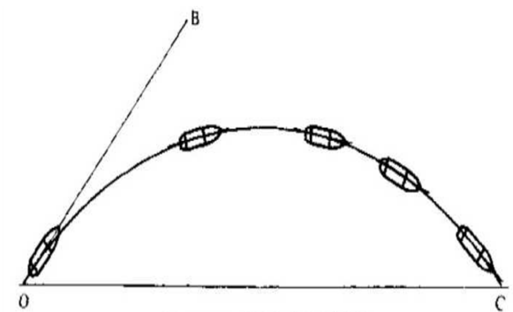
*2022.3.31*　　*Discovery Physics*　　*Alex Wang*

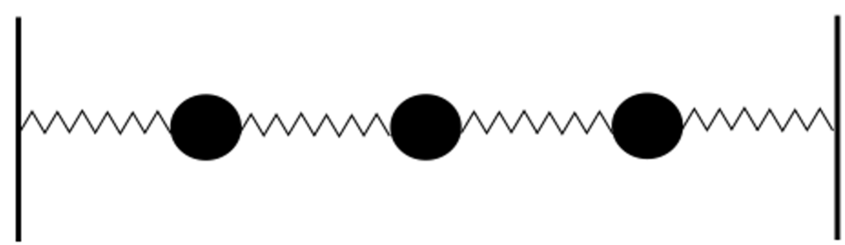
# 这是一个目录 CONTENT

# 质点模型 Particle

- 当研究对象本身的几何形状对力学运动过程的影响可忽略不计时，仅保留对象的质量，将对象的几何形状退化成 “点” 所得到的模型就是 [质点模型].

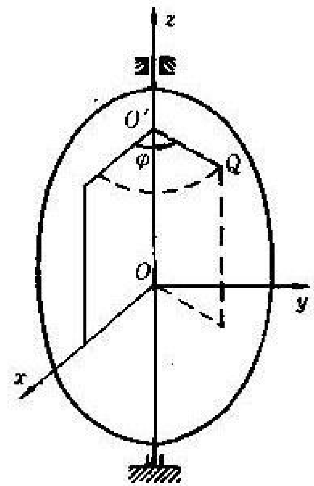


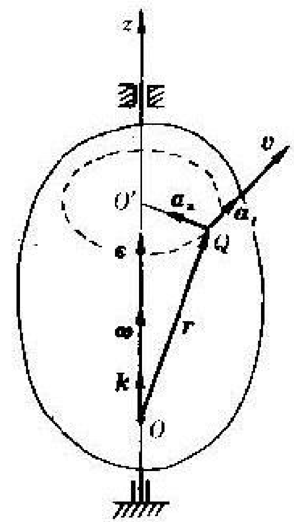


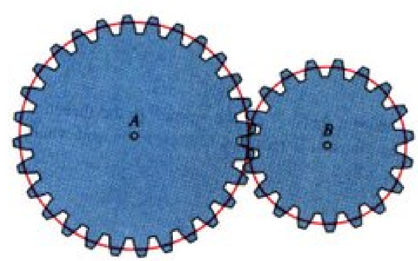



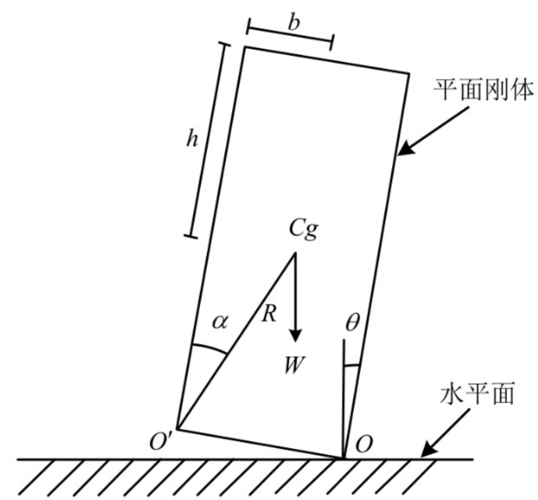
# 刚体模型 Rigid Body

- [刚体] 是一个特殊的质点系, 大小不能忽略. 刚体上任意两质点间距离保持不变. [刚体模型] 可以看成是现实中劲度系数极大的物体的抽象化. 这类物体本身的形变, 对其运动的影响可以忽略.



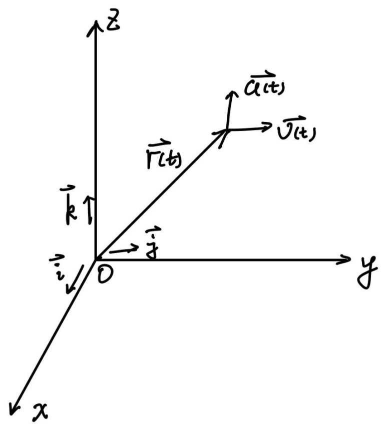



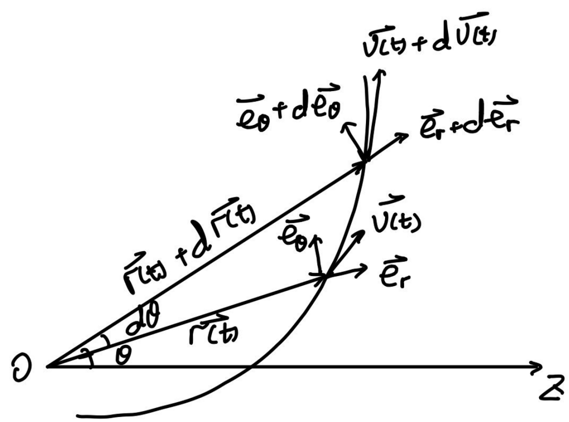



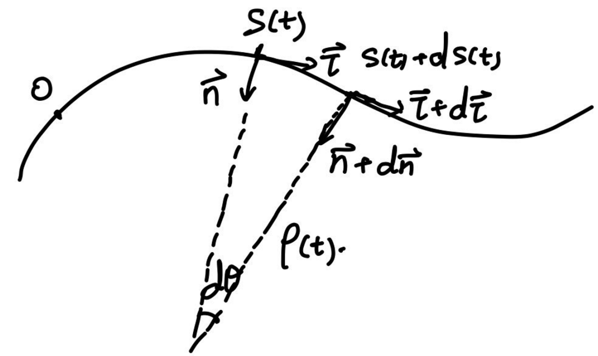



# 参考系 Frame Of Reference

- [参考系] 是用以确定位置/方向/其他物体属性的 “坐标系”, 通常置于参考体 (Reference Body) 上.



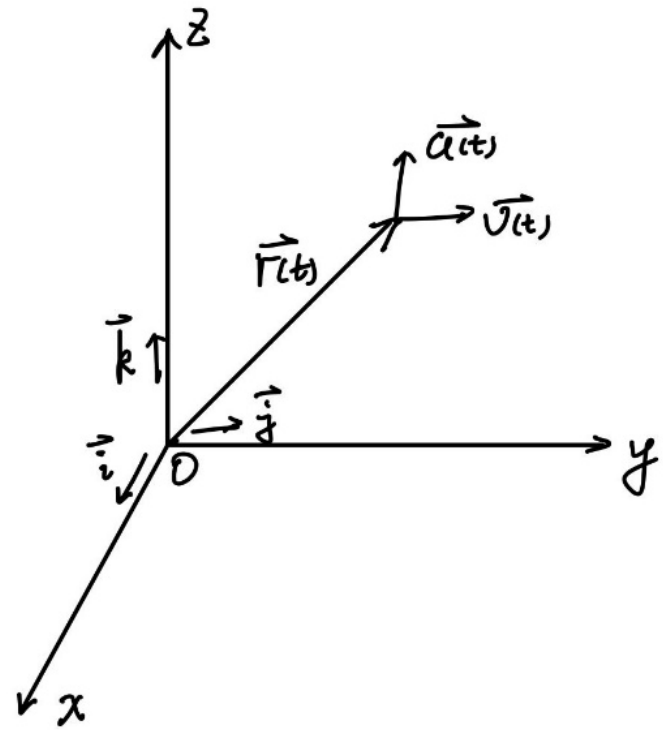
# 参考系 Frame Of Reference

- [参考系] 是用以确定位置/方向/其他物体属性的"坐标系", 通常置于参考体 (Reference Body) 上.
- 大致可以分为"惯性系"(Inertial) 和"非惯性系"(Non-Inertial) 两种. 在提到参考系时, 人们常会在前面加上限定, 指定是哪一种属性的参考系:
  a) 旋转/平动参考系—强调参考系的运动状态
  b) 伽利略/洛伦兹参考系—强调系与系之间的变换方法
  c) 宏观/微观参考系—强调参考系的尺度大小

# 参考系中的运动 Motion Within F.O.R

- 直角坐标系 (Cartesian Frame) 的质点运动:

$$\overrightarrow{r(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{v(t)} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{a(t)} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$



# 参考系中的运动 Motion Within F.O.R

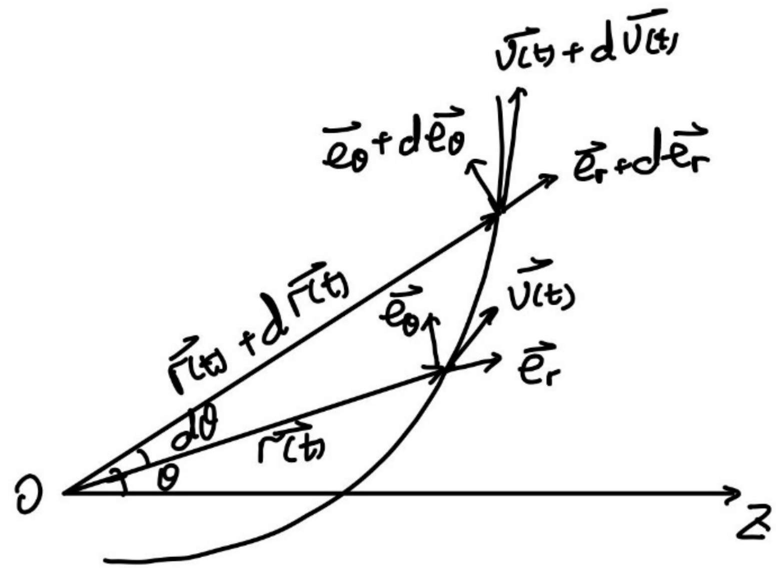
- 极坐标系 (Polar Frame) 的质点运动:

$$\overrightarrow{r(t)} = r(t)\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{\theta}r\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = \left(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{\theta}\dot{r} + \ddot{\theta}r\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \overrightarrow{e_\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\overrightarrow{e_r}\dfrac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$




- 一般用于描述有心运动过程 (如天体的运动)

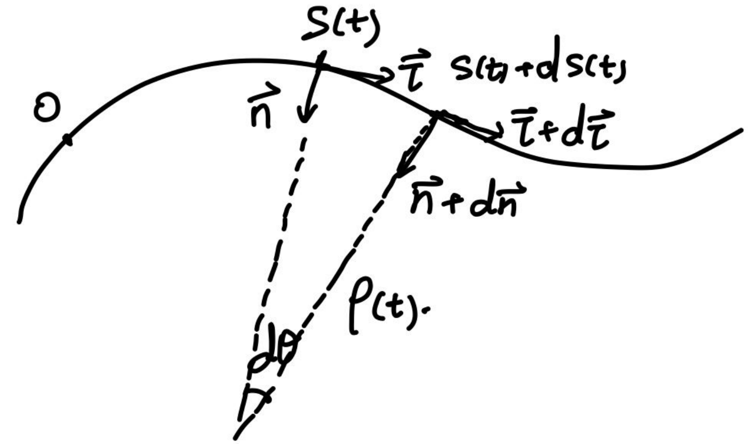
# 参考系中的运动 Motion Within F.O.R

- 自然坐标系 (Natural Frame) 的质点运动:

$$\overrightarrow{v\left(t\right)} = \dot{S}\vec{\tau}$$

$$\overrightarrow{a\left(t\right)} = \ddot{S}\vec{\tau} + \frac{\dot{S}^2}{\rho}\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{n}\frac{d\theta}{dt} = \vec{n}\frac{dS\left(t\right)}{\rho\, dt} = \frac{\dot{S}}{\rho}\vec{n}$$




- 依赖于质点运动轨迹的坐标系，用于单位矢方向总是在变化的情况, 较极坐标有时更为灵活

# 相对运动 Relative Motion

- 平动系:

$$\overrightarrow{x_{AC}} = \overrightarrow{x_{AB}} + \overrightarrow{x_{BC}}$$

$$\left(\overrightarrow{x_{AC}}\right)' = \left(\overrightarrow{x_{AB}} + \overrightarrow{x_{BC}}\right)' \Rightarrow \overrightarrow{v_{AC}} = \overrightarrow{v_{AB}} + \overrightarrow{v_{BC}}$$

$$\left(\overrightarrow{v_{AC}}\right)' = \left(\overrightarrow{v_{AB}} + \overrightarrow{v_{BC}}\right)' \Rightarrow \overrightarrow{a_{AC}} = \overrightarrow{a_{AB}} + \overrightarrow{a_{BC}}$$

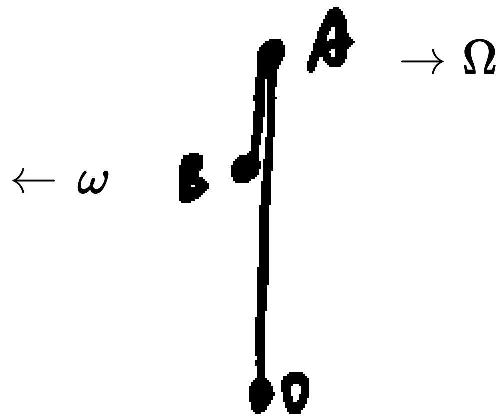
# 相对运动 Relative Motion

- 转动系:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_a &= \vec{v}_r + \vec{v}_e \\
\vec{a}_a &= d\vec{v}_a/dt = d\left(\vec{v}_r + \vec{v}_e\right)/dt \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{D\vec{r}}{Dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) \\
&= \frac{D\vec{v}_a}{Dt} + \vec{\omega}\times\vec{v}_a \\
&= \left(\vec{\omega}\times\frac{D\vec{r}}{Dt} + \vec{\beta}\times\vec{r} + \frac{D^2\vec{r}}{Dt^2}\right) + \left(\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\omega}\times\frac{D\vec{r}}{Dt}\right) \\
&= \underbrace{\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\beta}\times\vec{r}}_{\vec{a}_e} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\frac{D\vec{r}}{Dt}}_{\vec{a}_c} + \underbrace{\frac{D^2\vec{r}}{Dt^2}}_{\vec{a}_r}
\end{aligned}
$$

# 相对运动 Relative Motion

- 例: 已知 $OA = R + r, AB = r$, A点对地角速度 $\omega_A = \Omega$, 求当B点对地速度大小等于0时, B点对地角速度 $\omega_B$ 大小.

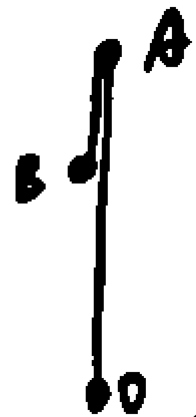


# 相对运动 Relative Motion

- 例: 已知 $OA = R + r, AB = r$, A点对地角速度 $\omega_A = \Omega$, 求当B点对地速度大小等于0时, B点对地角速度 $\omega_B$ 大小.

$\rightarrow \Omega$

$\leftarrow \omega$




$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_A = \omega_B \cdot r - \Omega \cdot \left(R + r\right) = 0$$

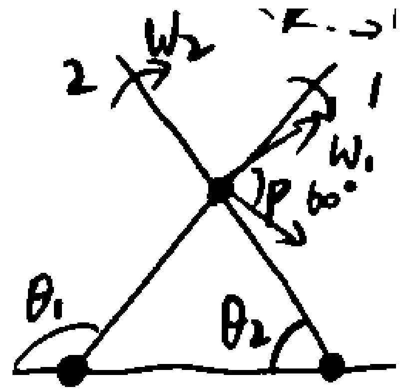
$$\Rightarrow \omega_B = \frac{R + r}{r} \cdot \Omega$$

(或) $$\vec{v}_B = \vec{v}_e + \vec{v}_r = -\Omega \cdot R + \omega_{BA} \cdot r = -\Omega \cdot R + \left(\omega_B - \Omega\right) \cdot r = 0$$

$$\Rightarrow \omega_B = \frac{R + r}{r} \cdot \Omega$$

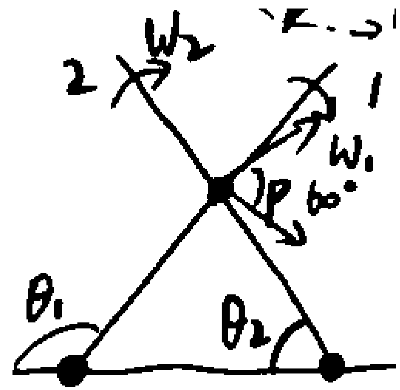
# 相对运动 Relative Motion

- 例: 运动学关联, 求P点对地加速度大小.



# 相对运动 Relative Motion

- 例: 运动学关联, 求P点对地加速度大小.




$$1杆:\ a_{1r}=\ddot{\rho}_1-\omega_1^2\cdot l$$

$$a_{1\tau}=\beta_1\cdot l+2\omega_1\cdot\dot{\rho}_1$$

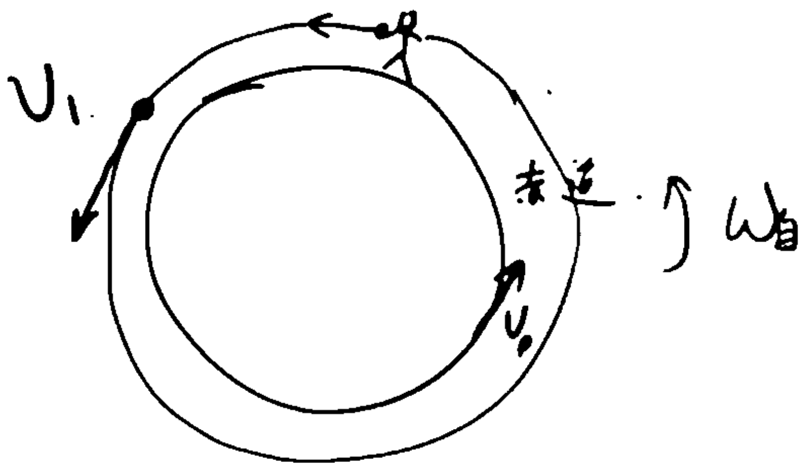
$$2杆:\ a_{2r}=\ddot{\rho}_2-\omega_2^2\cdot l$$

$$a_{2\tau}=\beta_2\cdot l+2\omega_2\cdot\dot{\rho}_2$$

$$a=\frac{\sqrt{a_{1\tau}^2+a_{2\tau}^2-2a_{1\tau}a_{2\tau}\cos 60^\circ}}{\sin 60^\circ}$$

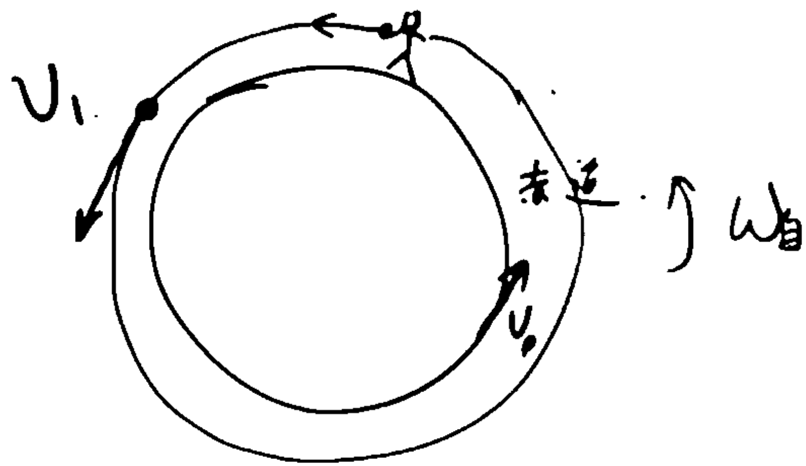
# 相对运动 Relative Motion

- 例: 在地面上 “抛” 出一个卫星, 人所需的能量是?



# 相对运动 Relative Motion

- 例: 在地面上 “抛” 出一个卫星, 人所需的能量是?

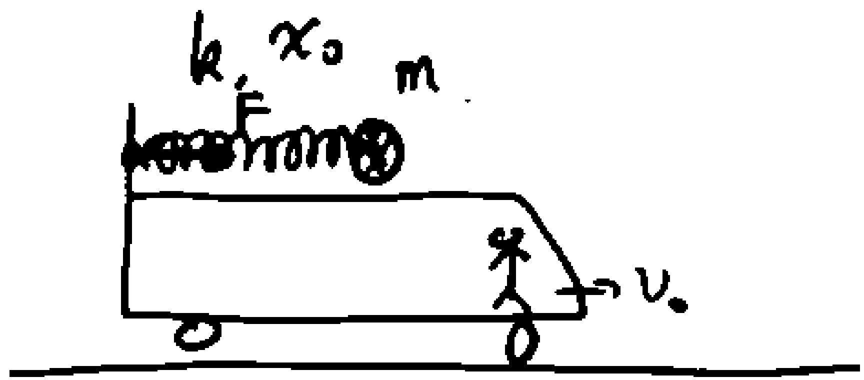



$$E_{person} = \frac{1}{2} m \left(v_1 - v_0\right)^2$$

$$E_{total} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

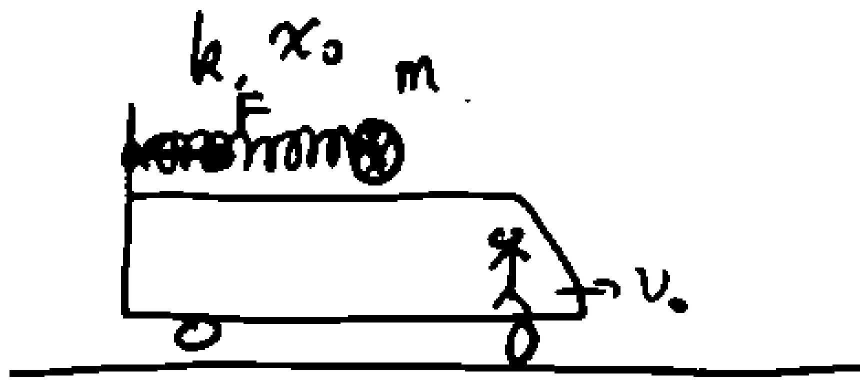
# 相对运动 Relative Motion

- 例: 地面上以匀速$v_0$行驶的车, 上置一弹簧连接质点$m$, 其瞬时速度是$v$' 向右 (相对于车). 问:
  - a) 在车系里看, 质点的能量是多少?
  - b) 在地系里看, 质点的能量是多少?



# 相对运动 Relative Motion

- 例: 地面上以匀速$v_0$行驶的车, 上置一弹簧连接质点$m$, 其瞬时速度是$v$' 向右 (相对于车). 问:
  - a) 在车系里看, 质点的能量是多少?
  - b) 在地系里看, 质点的能量是多少?

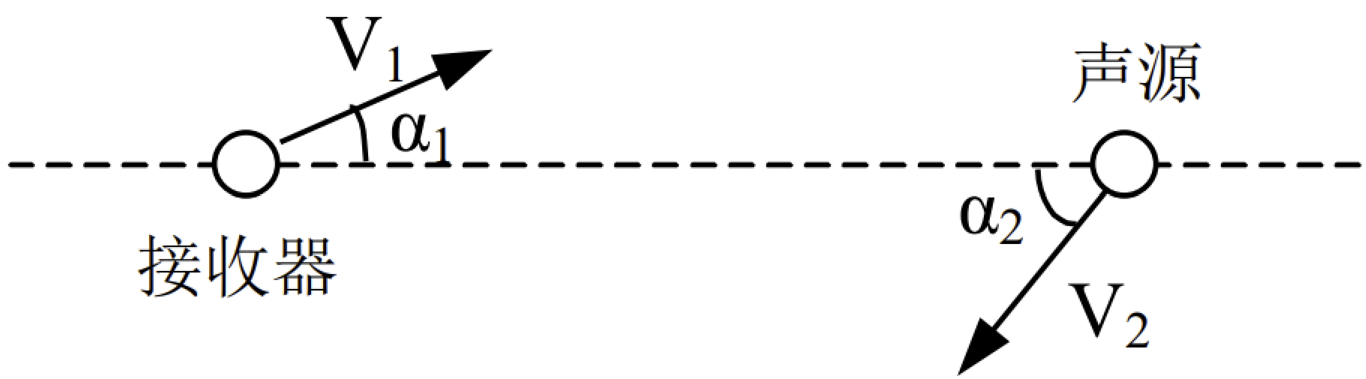



$$E_{car} = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$E_{ground} = \frac{1}{2} m \left( v_0 + v' \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \ > \ E_{car}$$

# 相对运动的应用 Lab Time

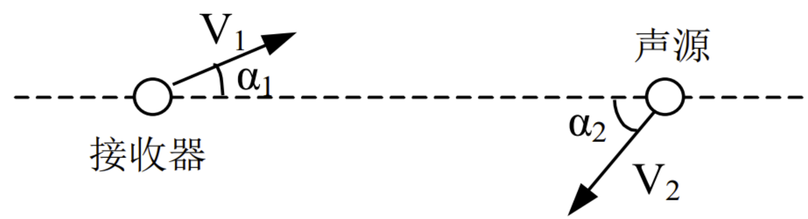
- 当波源和接收器之间有相对运动时, 接收器接收到的波频与波源发出的频率不同. 这种现象称为 [多普勒效应].
- 超声速的多普勒效应示意图:



# 相对运动的应用 Lab Time

- 声速假设为$u$, $f0$已知, 求接收器接收到的频率?

$$f' = \left(\frac{v \pm v_0}{v \mp v_s}\right) f$$

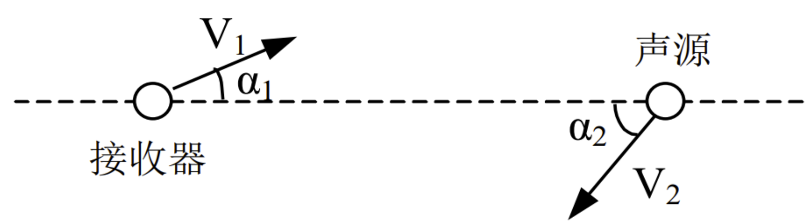



$f'$: 观察到的频率
$f$: 发射源于该介质中的原始发射频率
$v$: 波在该介质中的行进速度
$v_0$: 观察者移动速度

# 相对运动的应用 Lab Time

- 声速假设为$u$, $f0$已知, 求接收器接收到的频率?

$$f' = \left(\frac{v \pm v_0}{v \mp v_s}\right) f$$



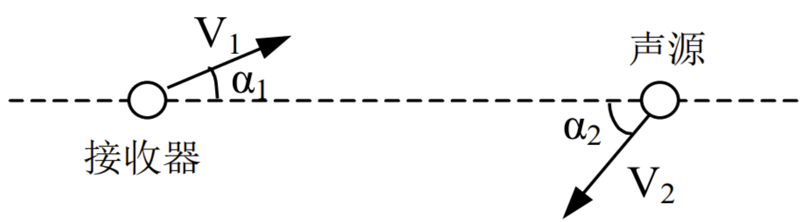

$f'$: 观察到的频率
$f$: 发射源于该介质中的原始发射频率
$v$: 波在该介质中的行进速度
$v_0$: 观察者移动速度

- 解得

$$f = f_0 \cdot \frac{u + V_1 \cos\alpha_1}{u - V_2 \cos\alpha_2}$$

# 相对运动的应用 Lab Time

- 令$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ V_2 = 0,\ V = V_1$沿着两者连线方向, 则




$$f = f_0 \cdot \left(1 + \frac{V}{u}\right) \quad \text{(靠近时}V\text{取正，反之取负)}$$

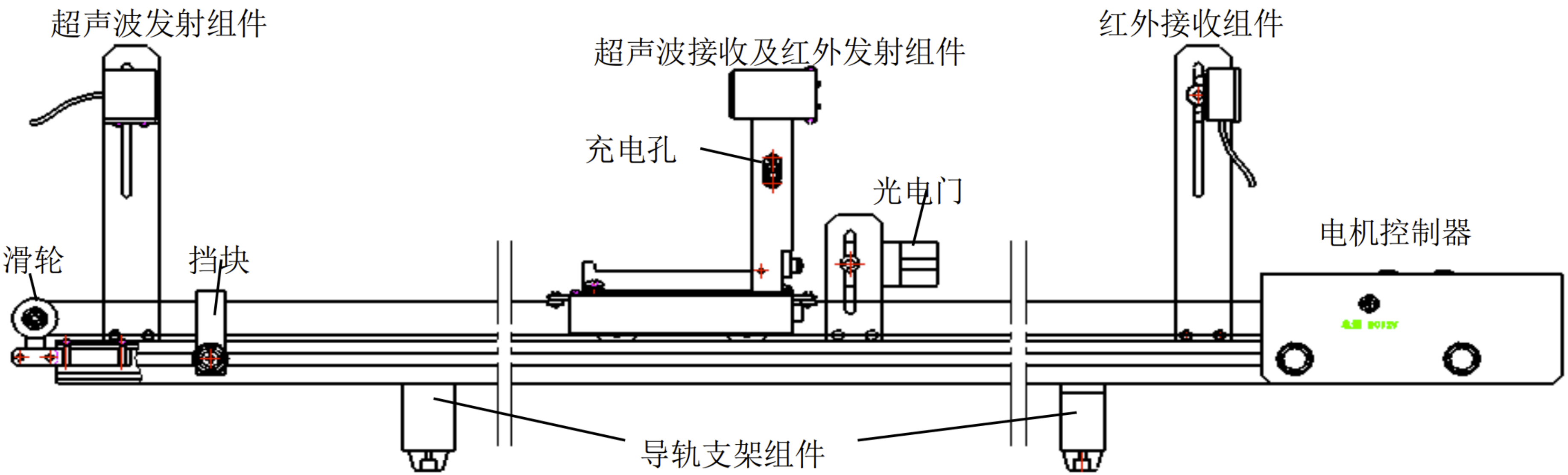
- 用光电门测量物体的运动速度$V$, 同时接收器观测到的频率为$f$, 作 $\Delta f$-$V$ 关系图可直观验证多普勒效应.

$$\Delta f = \frac{f_0}{u} V$$

- 其斜率应为 $k = f0/u$ ，由此可计算出声速 $u = (f0/\Delta f)\, V$

# 相对运动的应用 Lab Time

- 装置如图示:




- 实验数据记录完之后, 把测到的声速和理论值进行比较:

$$u_0 = 331.45\sqrt{1 + \frac{t_c}{273}}$$

# 受力分析 Free Body Diagram Thingy

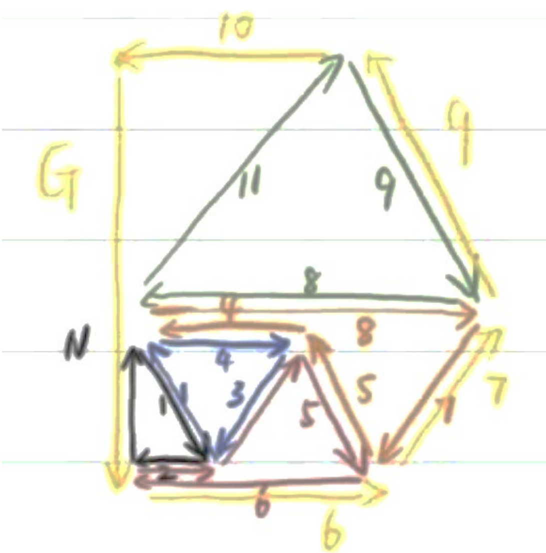
- 三 (多) 力共点 (力沿杆, 约束, 正余弦定理等);
- 拼凑矢量图;
- 摩擦力, 摩擦角列关系式;
- 取特殊点, 避开不想求的量;
- 整体法, 隔离法...
- 没啥太多好讲的, 补充几个有趣的例子吧.

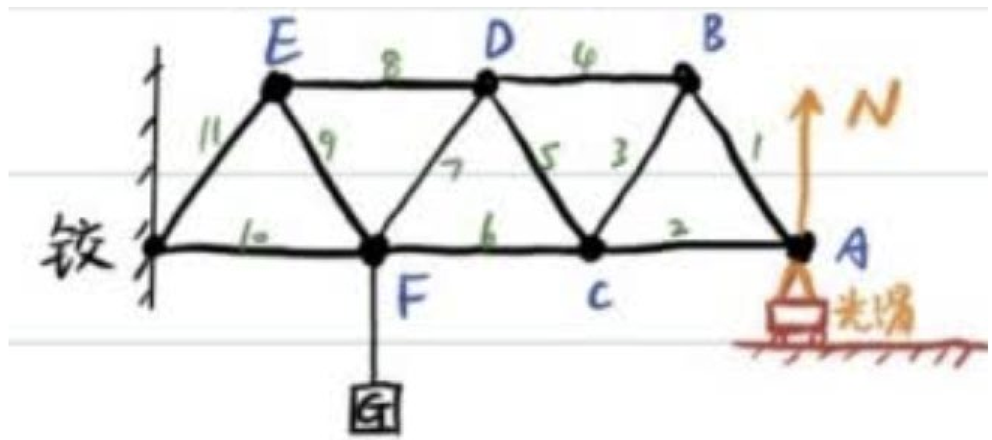
# 受力分析 Free Body Diagram Thingy

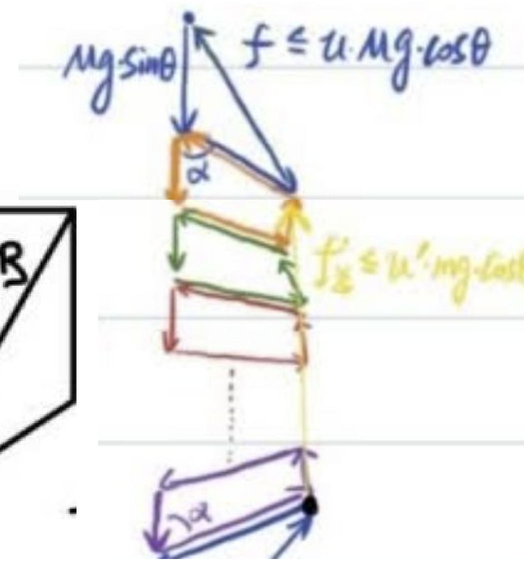
- 三 (多) 力共点 (力沿杆, 约束, 正余弦定理等);
- 拼凑矢量图; 讲一下
- 摩擦力, 摩擦角列关系式; 讲一下
- 取特殊点, 避开不想求的量;
- 整体法, 隔离法...
- 没啥太多好讲的, 补充几个有趣的例子吧.

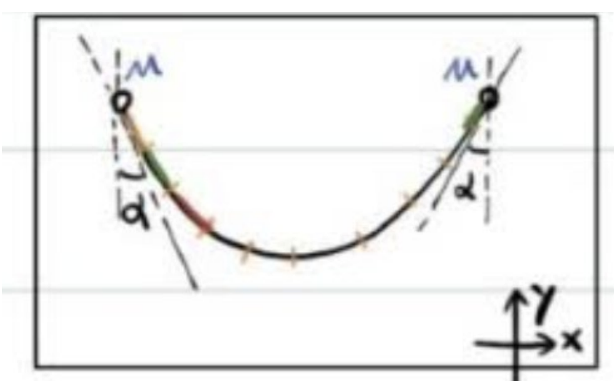
# 受力分析 Free Body Diagram Thingy

- 拼凑矢量图:



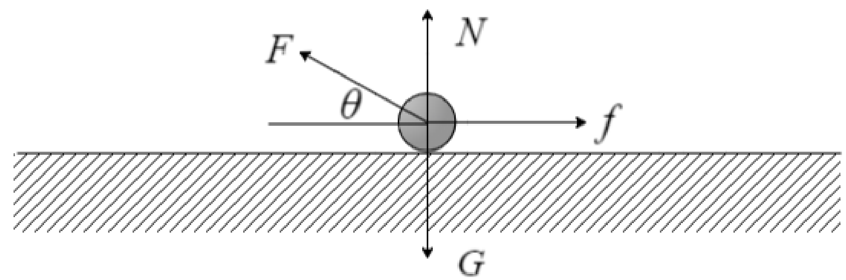




# 受力分析 Free Body Diagram Thingy

- 摩擦角:

分解受力列牛二:




$$y\colon F\sin\theta + N - G = 0$$

$$x\colon F\cos\theta - f = ma$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} ma &= F\cos\theta - \mu N \\ &= F\cos\theta - \mu\left(mg - F\sin\theta\right) \\ &= F\left(\cos\theta + \mu\sin\theta\right) - \mu mg \end{aligned}$$

# 受力分析 Free Body Diagram Thingy

- 摩擦角:

再套用一下辅助角公式:

$$F\left(\cos\theta+\mu\sin\theta\right)=F\sqrt{1+\mu^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos\theta+\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\sin\theta\right)$$

$$\because\quad\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)^2+\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)^2=1$$

$$\therefore\quad \text{不妨设}\ \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}=\sin\phi,\quad \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}=\cos\phi$$

$$\therefore\quad F\left(\cos\theta+\mu\sin\theta\right)=F\sqrt{1+\mu^2}\left(\sin\phi\cos\theta+\cos\phi\sin\theta\right)$$

$$=F\sqrt{1+\mu^2}\sin\left(\phi+\theta\right)\leq F\sqrt{1+\mu^2}$$

当 $\sin\left(\phi+\theta\right)=1$, 即 $\phi+\theta=\frac{\pi}{2}$ 时取得最大值

即 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, $\sin\theta=\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, $\tan\theta=\mu$ 时, $a$取得最大值

# 受力分析 Free Body Diagram Thingy

- 带摩擦的滑轮:

$$\begin{cases} \mathrm{d}T = \mu \,\mathrm{d}N \\ T\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}N \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ T = T_0 e^{\mu\theta}$$

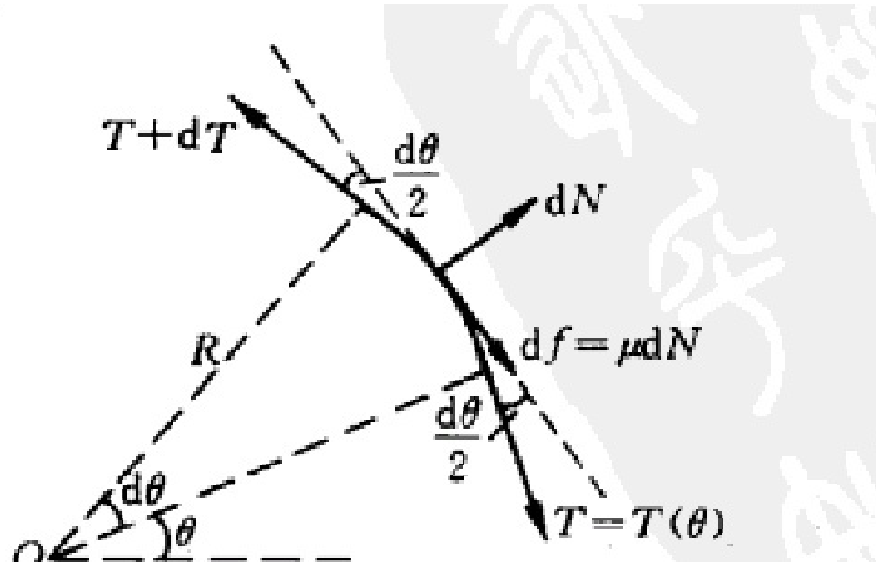



图 2-12

# 受力分析 Free Body Diagram Thingy

- 表观重力:

由于地球的自转,在地球上测得的物体的重力并非是物体的真实重力,而是表观重力. 表观重力 $\boldsymbol{P}_\lambda$ 与物体所在处的纬度有关,它是物体所受引力 $\boldsymbol{P}$ 和离心力 $\boldsymbol{F}_c$ 的矢量和(图 2.7-3). 在纬度 $\lambda$ 处,离心力

$$F_c = m\Omega^2 R\cos\lambda$$

式中 $\Omega$ 是地球的自转角速率,$R$ 是地球半径. 由于 $F_c \ll P$,表观重力 $P_\lambda$ 近似等于

$$P_\lambda \approx P - F_c\cos\lambda = P - m\Omega^2 R\cos^2\lambda \tag{2.7-4}$$

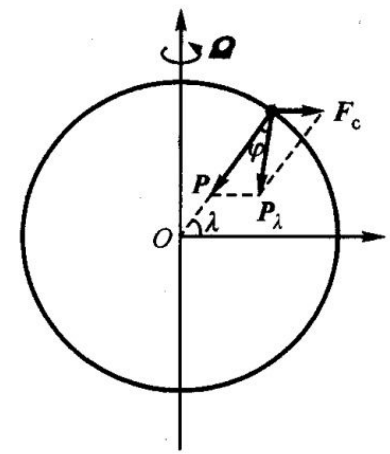



图 2.7-3 重力与纬度的关系

因 $\Omega = 2\pi/86\,400 = 7.3\times10^{-5}$ rad/s, $R = 6.4\times10^6$ m,由此算得 $\frac{\Omega^2 R}{g} \approx 0.3\ \%$,故 $P_\lambda$ 与 $P$ 相差最大(赤道处)不过 0.3 %. 而 $\boldsymbol{P}_\lambda$ 与 $\boldsymbol{P}$ 的夹角 $\varphi$,由图可知:

$$\varphi \approx \frac{F_c\sin\lambda}{P} = \frac{m\Omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}{mg} = \frac{\Omega^2 R\sin 2\lambda}{2g} \tag{2.7-5}$$

可见 $\varphi$ 在 $\lambda = 45°$ 处为最大,$\varphi_{\max} = \frac{\Omega^2 R}{2g} = 0.15\ \% \approx 6'$.

# 运动学微分方程 Kinematic ODEs

- 解决力学问题的核心:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

- 变体:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{m_0\vec{a}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \textbf{(\$)}$$

$$f^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} = ma^{\mu}$$

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + m\omega^2\vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

# 运动学微分方程 Kinematic ODEs

- ($) 式的简单推导:

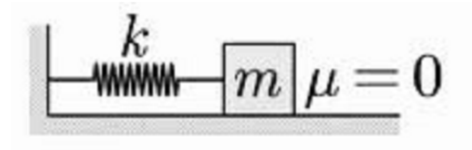
$$\left|\vec{F}\right| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_0 v\gamma\right) = m_0\left(v\dot{\gamma} + \gamma\dot{v}\right) = m_0\left[v\,\frac{va}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} + \gamma a\right]$$

$$= m_0 a\left[\frac{v^2}{c^2}\frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

$$= \frac{m_0 a}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left[\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \frac{va}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}\right]$$

# 运动学微分方程 Kinematic ODEs




- 弹簧的位移和周期 (不猜解):

$$-kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^v mv\,dv = -\int_A^x kx\,dx$$

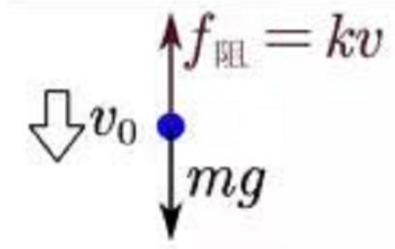
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int_0^t \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt \Rightarrow \left[\arcsin\frac{x}{A}\right]_A^x = \left[\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \arcsin\frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{A} = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Displacement } x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_0\right);\ \text{Period } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

# 运动学微分方程 Kinematic ODEs




- 空气阻力#1:

$$G - kv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{G}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + v_0$$

$$a = g - \frac{k}{m}v$$

$$v_t - v_0 = \int a\,dt = \int\left(g - \frac{k}{m}v\right)dt = gt - \frac{k}{m}x$$

# 运动学微分方程 Kinematic ODEs

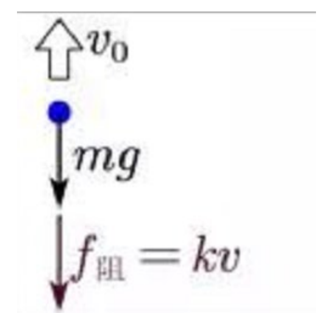
- 空气阻力#2:

$$F = -mg - kv$$

$$a = -g - \frac{kv}{m} \Rightarrow a + \frac{k}{m}v + g = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v + g = 0$$

$$v = \left(\frac{mg}{k} + v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

$$x_t = \frac{mv_0}{k} + \frac{m^2 g}{k^2}\ln\left(\frac{mg}{mg + v_0 k}\right)$$



# 运动学微分方程 Kinematic ODEs

- 相互作用势能函数U(r)在平衡位置$r = a$附近进行泰勒级数展开:

$$U\left(r\right) = U\left(a\right) + \left(\frac{dU}{dr}\right)_a \delta + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_a \delta^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3U}{dr^3}\right)_a \delta^3 + \cdots$$

| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
|---|---|---|---|
| 常数定义为零 | 平衡微商为零 | 简谐项 | 非简谐项 |

- 所以解动力学微分方程的时候，选择用能量求导函数得极值点，要把原式保留到2阶项
- 某些物理效应是由3阶/更高阶小量引起，作简谐近似会出问题

# 运动学微分方程 Kinematic ODEs

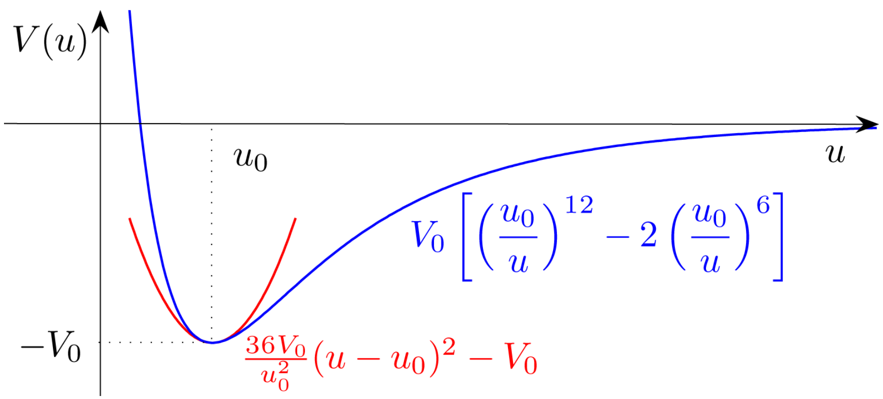
$$U(r)=U(a)+\left(\frac{dU}{dr}\right)_a\delta+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_a\delta^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3U}{dr^3}\right)_a\delta^3+\cdots$$

$\downarrow$ 常数定义为零

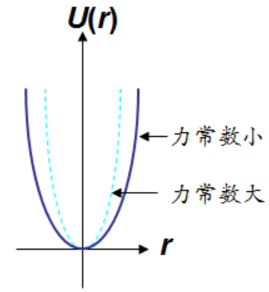
$\downarrow$ 平衡微商为零

$\downarrow$ 简谐项

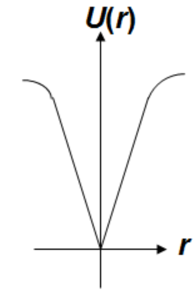
$\downarrow$ 非简谐项



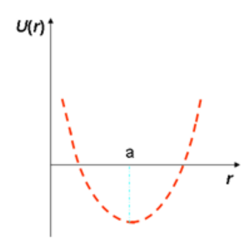

*Potential energy of a diatomic molecule as a function of atomic spacing.*



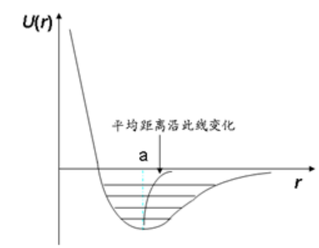

力常数对势能的影响




四次方项对势能的影响




简谐势




非简谐势

# 这是一个引用列表 CITATION


1. http://epc.xjtu.edu.cn/info/1088/1421.htm
2. https://zh.wikipedia.org/zh-cn/%E9%80%A3%E5%BF%83%E5%8A%9B
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Anharmonicity#/media/File:Potential_approximation.png
4. https://www.eduzhixin.com/
5. https://www.youtube.com/watch?v=bI9xI5ULg6M
6. David Morin, *Classical Mechanics* (Vol.2)
7. 赵凯华,《新概念物理 · 力学》(第2版)

# 谢谢朋友们！

THANK U FOLKS!