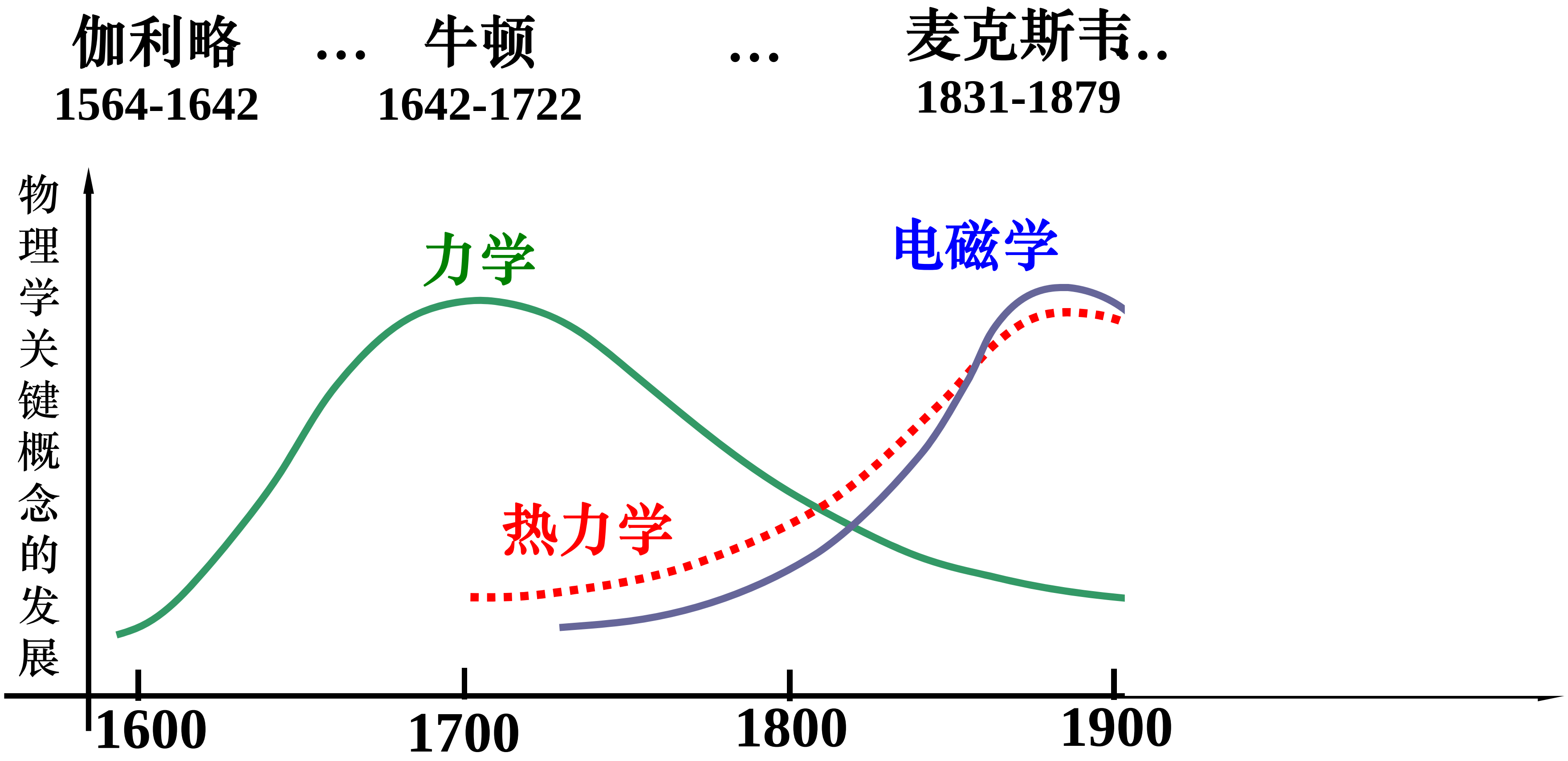

11
12
10
9

广袤的星空，　神秘的宇宙，
多少遐想在科学面前成为现实



以牛顿力学和麦克斯韦电磁场理论为代表的经典物理学，到20世纪初，已经取得了空前的成就。人类对物质世界的认识，已从宏观低速物体的运动规律逐渐扩展到高速传播的电磁波（包括光波）的场物质运动规律。

1900年元旦，英国物理学家开尔文男爵的新年祝词中宣称：

“在已经基本建成的科学大厦中，后辈物理学家只要做一些零碎的修补工作就行了”

“动力学理论断言，热和光都是运动的方式。但现在这一理论的优美性和明晰性却被两朵乌云遮蔽，显得黯然失色了……”

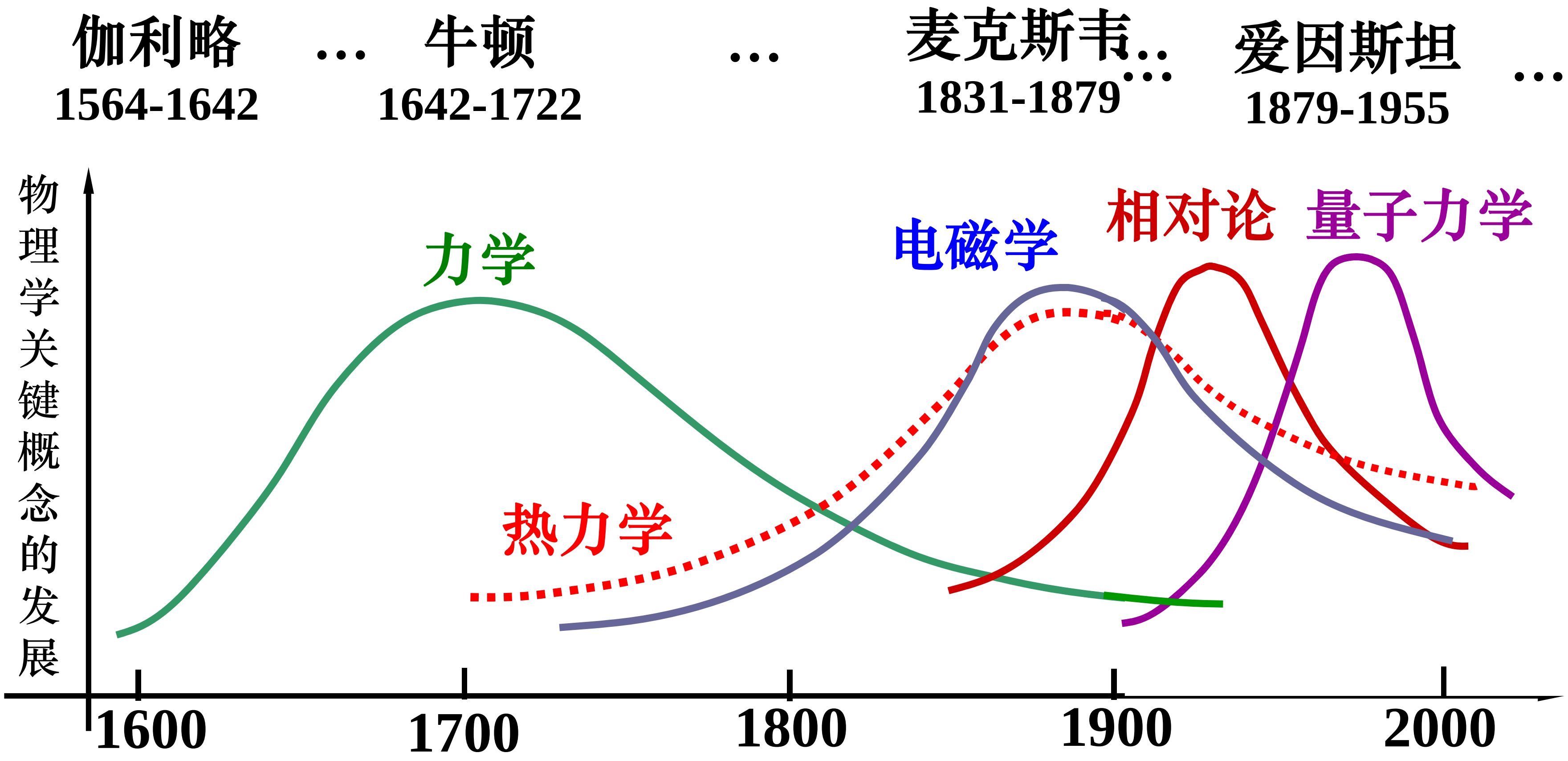
(The beauty and clearness of the dynamical theory, which asserts heat and light to be modes of motion, is at present obscured by two clouds.)

第一朵乌云：迈克耳逊-莫雷实验

----导致了相对论革命的爆发

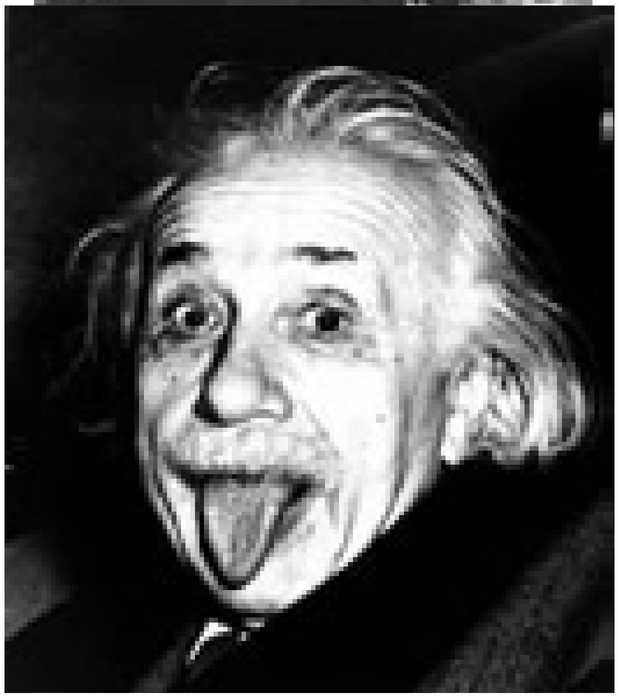
第二朵乌云：黑体热辐射实验

----导致了量子论革命的爆发



相对论与**量子力学**的创立是20世纪最伟大的成就，

这两门学科构成了近代物理学的基础



相对论（Theory of Relativity）

包括两大部分:

狭义相对论（Special Relativity 1905 年）：它研究高速运动物体在惯性系中运动的规律以及物理量和物理规律在不同惯性系间的变换关系。狭义相对论揭示了时间、空间与运动的关系（局限在惯性参照系的理论）

广义相对论（general relativity）（1915 —— 1916年）：它研究在任意参考系中物体运动的规律以及它们在不同参考系之间变换的关系。广义相对论揭示了时间、空间与引力的关系（推广到一般参照系包括引力场在内的理论）。

本课主要讨论狭义相对论，重点放在狭义相对论的时空观上。

狭义相对论基础

第四章　狭义相对论基础

主要内容:

狭义相对论的基本假设

洛仑兹变换

同时的相对性

运动时钟变慢和长度收缩

相对论质量和动量

相对论能量

§4.1 经典力学时空观

牛顿运动定律适用的参考系

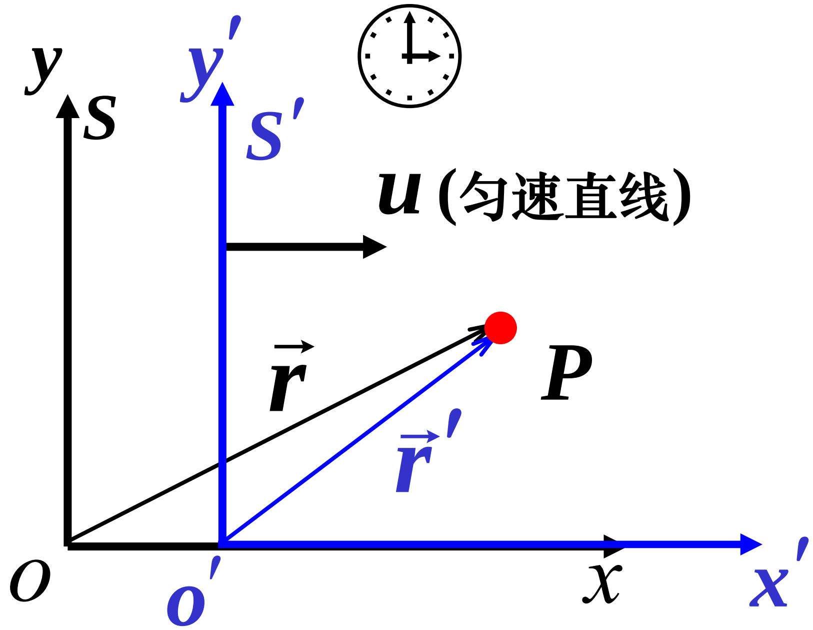
一.伽利略变换 (Galilean transformation)

在两个$\boxed{\text{惯性系}}$中考察同一物理事件

设: 惯性系 S

相对S 运动的惯性系S'

t 时刻，物体到达P点



S	$\vec{r}\,(x\,,\,y\,,z\,,t\,)$	$\vec{v}\,(x\,,y\,,z\,,t\,)$	$\vec{a}$
S'	$\vec{r}\,'(x',y',z',t')$	$\vec{v}\,'(x',y',z',t')$	$\vec{a}\,'$

该物体在两个惯性系中时空坐标间的变换关系为（伽利略坐标变换）

坐标变换

正变换	逆变换
$x' = x - ut$	$x = x' + ut$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = t$	$t = t'$

牛顿时空：时间量度与参考系无关，与空间无关 -----绝对时间

速度变换与加速度变换

正变换

$$v'_x = v_x - u \qquad a'_x = a_x - \frac{du}{dt}$$

$$v'_y = v_y \qquad a'_y = a_y$$

$$v'_z = v_z \qquad a'_z = a_z$$

逆变换

$$v_x = v'_x + u \qquad a_x = a'_x + \frac{du}{dt'}$$

$$v_y = v'_y \qquad a_y = a'_y$$

$$v_z = v'_z \qquad a_z = a'_z$$

u 是恒量

都是惯性系

$$a'_z = a_z$$

$$a_x = a'_x$$

$$a_y = a'_y$$

$$a_z = a'_z$$

在两个惯性系中 $\vec{a}' = \vec{a}$

二.伽利略相对性原理 (Galilean principle of relativity)

S	$\vec{F}$	m	$\vec{a}$	$\vec{F} = m\vec{a}$
S'	$\vec{F}'$	m'	$\vec{a}'$	$\vec{F}' = m'\vec{a}'$

●在牛顿力学中:
- 质量与运动无关 $m = m'$
- 力与参考系无关 $\vec{F} = \vec{F}'$

宏观低速物体的$\boxed{\text{力学规律}}$在任何惯性系中形式相同

如:动量、能量守恒定律，等

或 牛顿力学规律在伽利略变换下形式不变

或 牛顿力学规律是伽利略不变式

或 牛顿力学规律对一切惯性系是等价的

三、经典力学的绝对时空观

时空观:有关时间和空间的物理性质的认识.

- 绝对时间：时间量度与参照系无关

$$\because \quad t' = t$$

$$\therefore \quad \Delta t' = \Delta t$$

¤ 时间和空间彼此独立

✧ 绝对空间：长度量度与参照系无关

$$x' = x - ut$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

S系

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

S’系

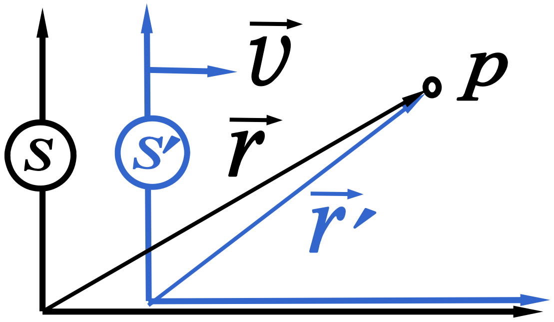
$$\because \quad x_2' - x_1' = (x_2 - ut) - (x_1 - ut) = x_2 - x_1$$

$$\therefore \quad \Delta r' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} = \Delta r$$

时间、长度、质量是绝对的,同时性是绝对的；

------经典力学的绝对时空观

§ 4.2 狭义相对论的基本假设

<table>
<tr><th>伽利略变换</th><th>力学规律</th><th>电磁学规律</th></tr>
<tr>
<td>


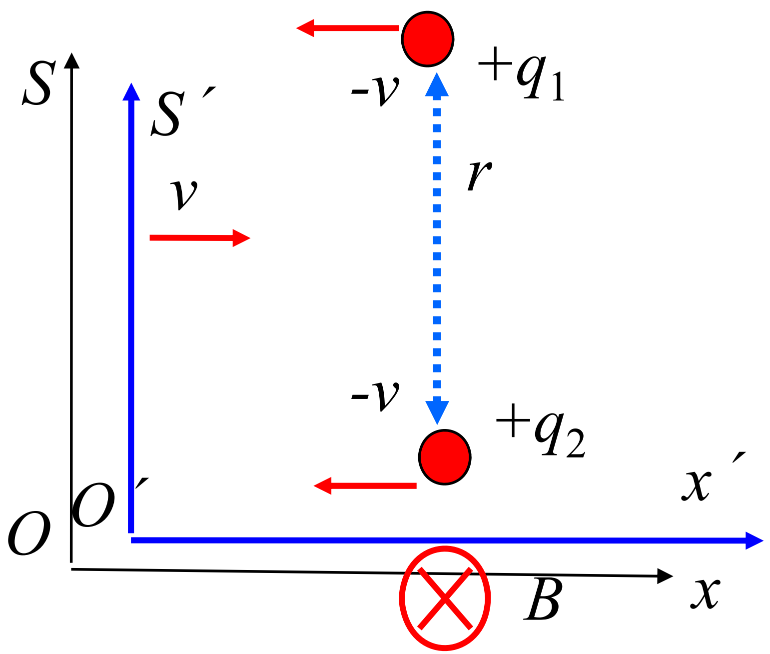
$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases}$$

$$\vec{u}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t} = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\vec{a}\,' = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t^2} = \vec{a}$$
</td>
<td>
如：牛顿定律
在 S 惯性系观察
$$\vec{f} = m\vec{a}$$
在 S' 惯性系观察
$$\vec{f}\,' = m\vec{a}\,' = m\vec{a}$$
在一切惯性系中，力学规律相同。
称为
伽利略相对性原理
</td>
<td>?</td>
</tr>
</table>

一.伽利略变换下电磁规律的困惑

1) 电磁学规律在伽利略变换下不符合相对性原理



2) 光速C 迈克耳逊-莫雷的 0 结果

光的波动说 ------光的传播媒质是“以太(ether)”

“以太” 论的观点：假设整个宇宙都充满着一种绝对静止的特殊媒质---“以太”。光波靠 “以太” 传播，光相对于静止的“以太”，传播速度各向同性，恒为绝对速度为C，“以太”是优于其它参考系的绝对参考系。

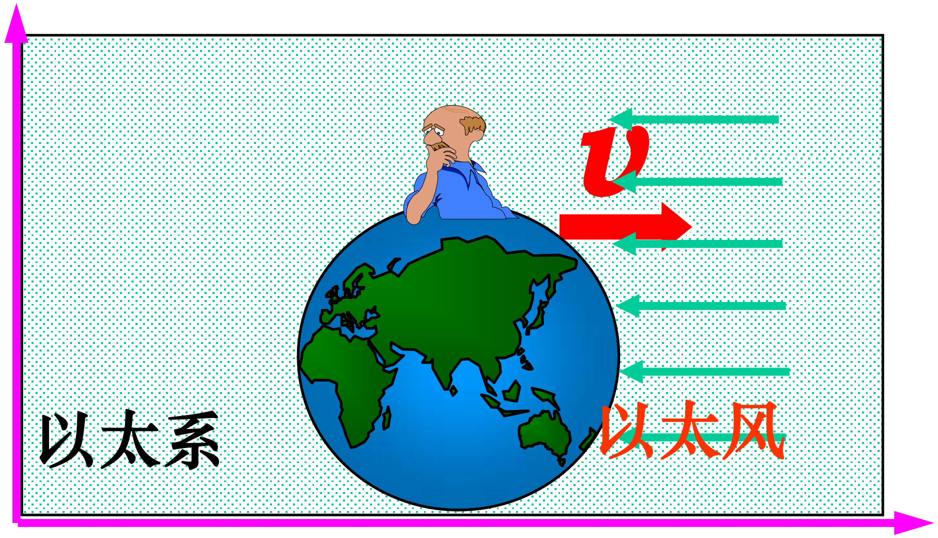
“以太”为何物?

地球相对“以太”的速度是多少?

光相对地球的速度又是多少?

麦克尔逊-莫雷精密的光干涉实验 ----------“零”结果

迈克耳逊—莫雷实验 （寻“以太”失败的著名实验）



若在地球上固定一光源S按伽利略的速度合成法则，地球对以太的绝对运动必满足：

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{v}$$

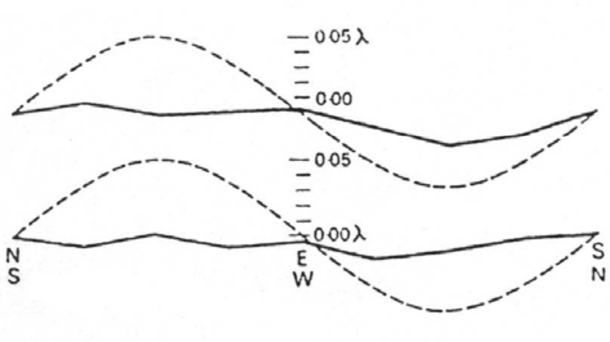
或 $$\vec{u} = \vec{c} - \vec{v}$$

若能用实验证明光波对地球的相对运动 $\vec{u}$ 符合上述规律，则地球对“以太”的绝对运动将被证实，“以太”观点成立。

迈克耳逊—莫雷实验 （寻“以太”失败的著名实验）

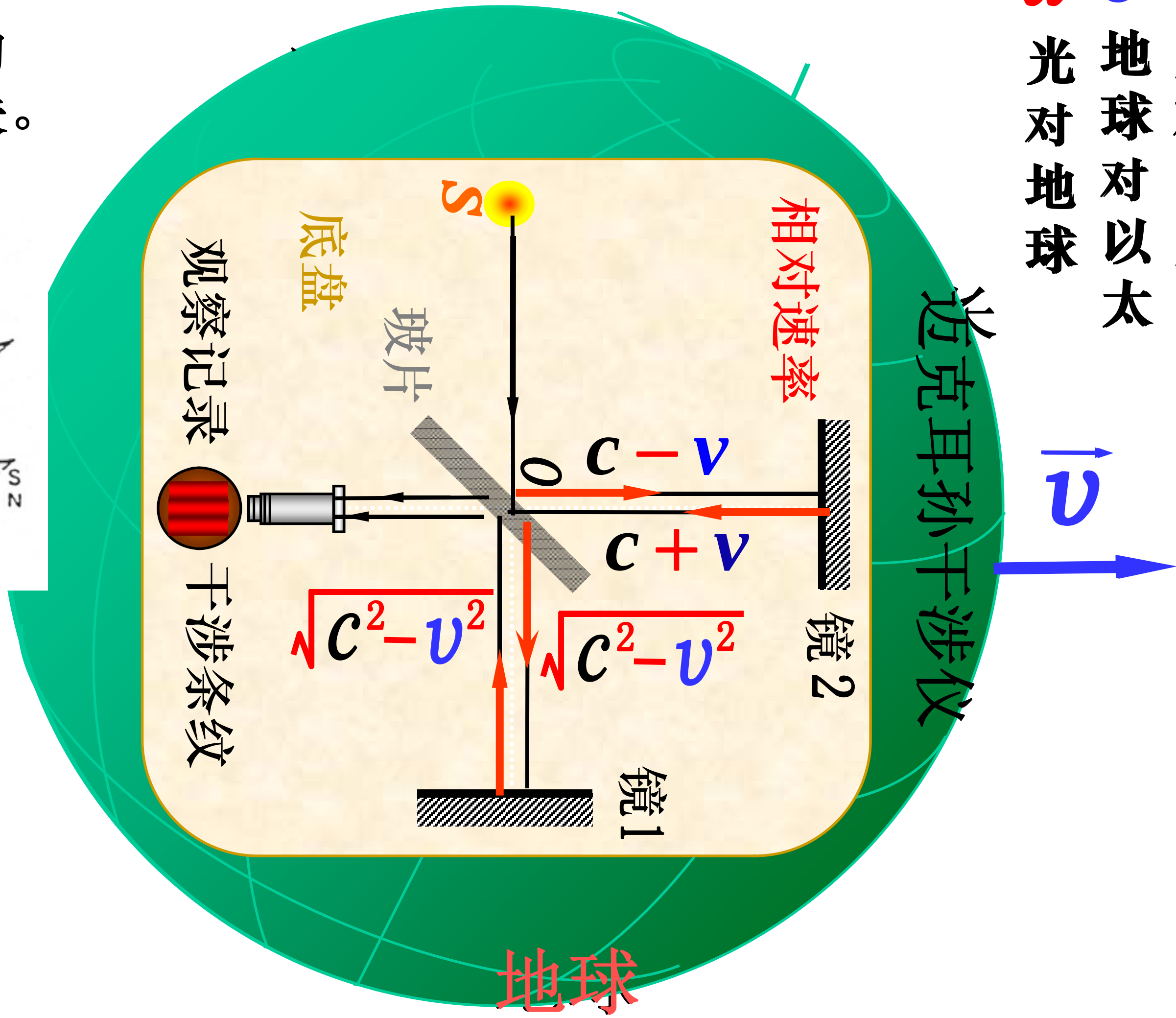
$\vec{u}$ 光对地球　$\vec{v}$ 地球对以太　$\vec{c}$ 光对以太

假如存在“以太”$\vec{u}$ 的大小必定与传播方向有关。



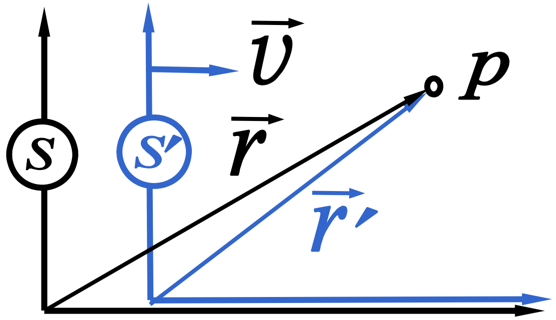
变达极大，条纹移动量达极大

若“以太”观点成立，预期有 0.4 根条纹移动量



实测结果

经过不同季节、不同时间的反复仔细观测记录，没有发现预期的条纹移动。在历史上曾被称为有关寻找“以太”著名的“零结果”。

伽利略变换	力学规律	电磁学规律
 $\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases}$ $\vec{u}\,' = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{u} - \vec{v}$ $\vec{a}\,' = \dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \vec{a}$	如：牛顿定律 在 S 惯性系观察 $\vec{f} = m\vec{a}$ 在 S' 惯性系观察 $\vec{f}\,' = m\vec{a}\,' = m\vec{a}$ 在一切惯性系中，力学规律相同。 称为 伽利略相对性原理	若 P 处有两个电荷 对 S 惯性系，电荷间的相互作用为静电力。 对 S' 惯性系，是两个运动电荷，还有磁力作用。 规律不相同 若 P 处有一光源，迎着 $\vec{v}$ 发射光波 对 S，光速 $u = c$ 对 S'， 光速 $u' = c + v > c$ 无实验根据

？ ？ ？

自洽

谁是谁非难以判断

不自洽

爱因斯坦的认为：

相信自然界有其内在的和谐规律。

（必定存在和谐的力学和电磁学规律。）

相信自然界存在普遍性的相对性原理。

（必定存在更普遍的相对性原理，对和谐的力学和电磁学规律都适用。）

相信复杂多变的自然界，存在某种重要的不变性。

二.爱因斯坦的狭义相对论基本假设

1905年，爱因斯坦在《论动体的电动力学》中提出：

1. 一切物理规律在任何惯性系中形式相同

--- 狭义相对论的相对性原理

2. 光在真空中的速度与发射体的运动状态无关

与观测者的运动状态也无关

— 光速不变原理

★ *Einstein* 的相对性理论 是 *Newton* 理论的发展

一切物理规律

力学规律

➢ 说明

◆相对性原理从力学规律推广到一切物理规律.

◆光速不变原理否定了经典力学的速度变换定理.

◆两条基本假设是整个狭义相对论的基础.

➢ 观念上的变革

	与参考系无关	与参考系有关	对应的原理	对应的变换
牛顿力学	$\Delta t, \Delta x, m$	v	牛顿相对性原理	伽利略变换
狭义相对论力学	c	$\Delta t, \Delta x, m$	爱因斯坦相对性原理	?

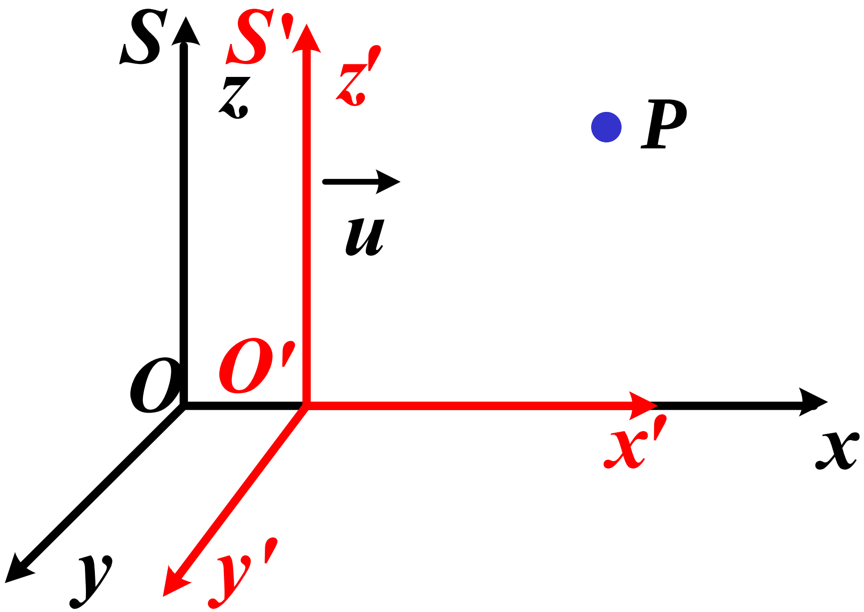
在基本观点明确的前提下，重要的是变换式！！

§ 4.3 洛仑兹变换(Lorentz transformation)

一.洛仑兹变换的导出

$y' \,//\, y, z' \,//\, z$

$t = t' = 0$　　o, o' 重合



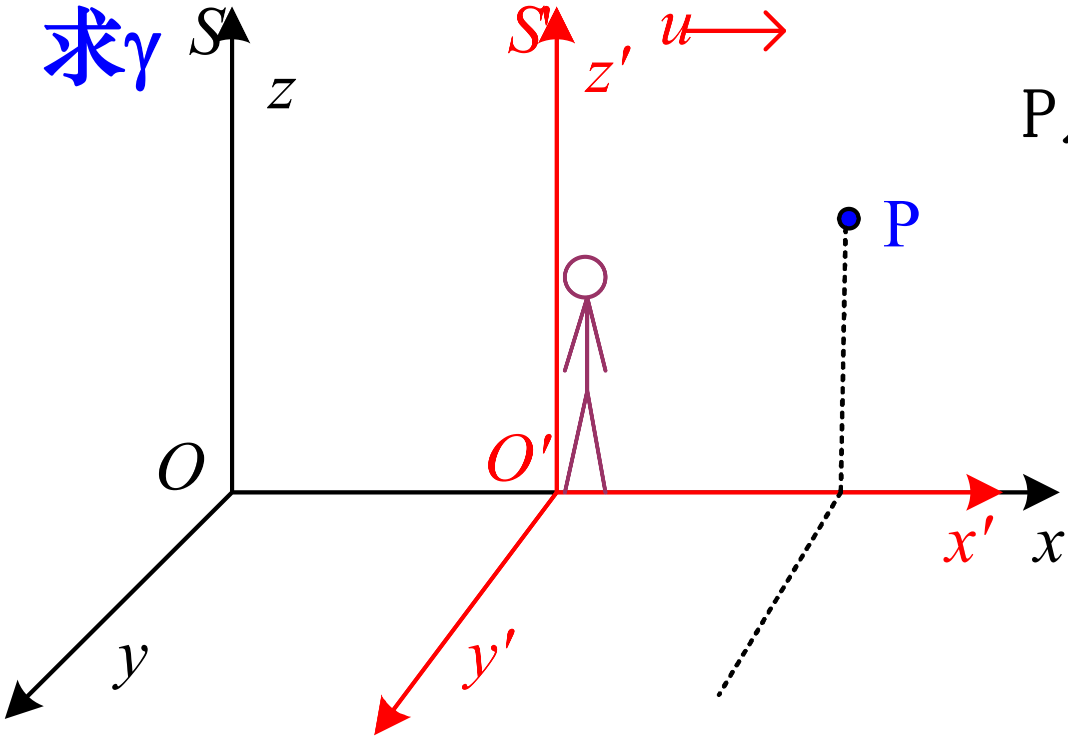
$\boxed{S}$　　$P(x, y, z, t)$

$\boxed{S'}$　　$P(x', y', z', t')$

寻找 →

两个参考系中相应的坐标值之间的关系

求γ



$$y' \,//\, y, z' \,//\, z$$

P点坐标为

$$S: \quad (x, y, z, t)$$

$$S': \quad (x', y', z', t')$$

令

$$x = \gamma x' + bt'$$

在S系中看0点，

$$x_O = \gamma x'_O + bt' = 0$$

$$\frac{b}{\gamma} = -\frac{x'_O}{t'}$$

在S′系中看0点，

$$x'_O = -ut' \quad \Rightarrow \quad -\frac{x'_O}{t'} = u$$

$$\frac{b}{\gamma} = u$$

因此 $x = \gamma\left(x' + ut'\right)$

$$x=\gamma\left(x'+ut'\right)\quad(1)$$

同理可得 $x'=\gamma'\left(x-ut\right)$

按照相对性原理，两惯性系等价，则 $\gamma=\gamma'$

$$x'=\gamma\left(x-ut\right)\quad(2)$$

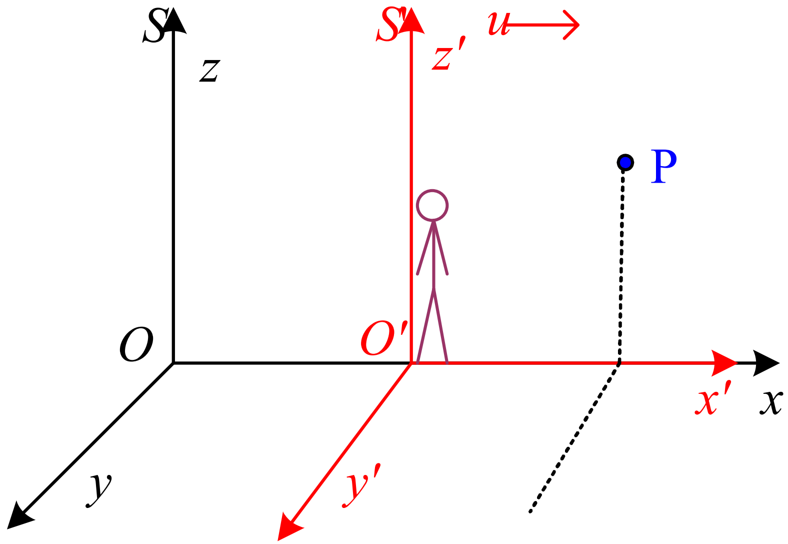
对于y轴，z轴，有 $y=y'$ (3)， $z=z'$ (4)

将(2)带入(1)中，则

$$x=\gamma\left[\gamma\left(x-ut\right)+ut'\right] \Rightarrow t'=\gamma t+\frac{1-\gamma^2}{\gamma u}x\quad(5)$$

假设t=t′=0时，有一光信号沿xx′前进

$$x=ct\qquad x'=ct'$$

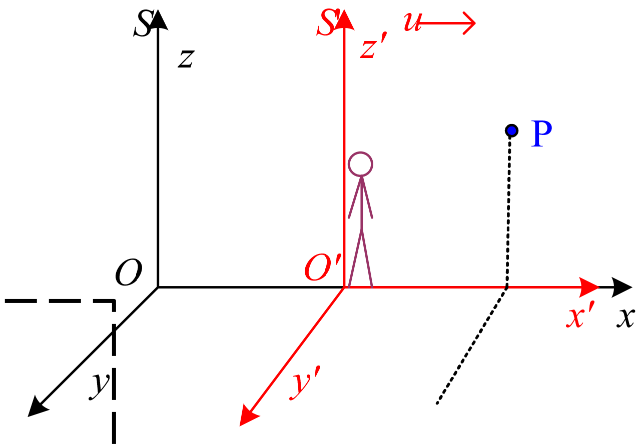


将(2)(5)带入，则

$$\gamma\left(x-ut\right)=c\left(\gamma t+\frac{1-\gamma^2}{\gamma u}x\right)$$

则 $$\gamma=\sqrt{\frac{1}{1-u^2/c^2}}$$

二.结果



坐标变换式

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

—— 正变换

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y = y' \qquad z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

—— 逆变换

正变换 逆变换

令

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

正变换

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\left(x - ut\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

逆变换

$$\begin{aligned} x &= \gamma\left(x' + ut'\right) \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) \end{aligned}$$

➢ 说明

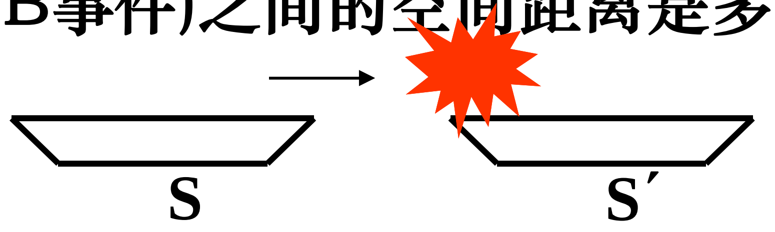
(1) t′是x和t的函数，跟伽利略变换不同.

(2) 当u<<c时，洛仑兹变换转化为伽里略变换，相对论力学规律转化为经典力学规律.

(3) 时间和空间坐标都是实数，要求$u<c$，即宇宙中任何物体的运动速度不可能等于或超过真空中的光速.

例 两艘宇宙飞船在同一方向飞行，相对速度为u=0.98c，在前面那个飞船上有一个光脉冲从船尾传到船头，该飞船上的观测者测得船尾到船头的距离为20m.

求 另一飞船上观测者所测得这两个事件A，B (光信号从船尾发出为A事件，光信号到达船头为B事件)之间的空间距离是多少？



事件A: (x_1, t_1) (x_1', t_1')

事件B: (x_2, t_2) (x_2', t_2')

$$x_1 = \frac{x_1' + ut_1'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad , \qquad x_2 = \frac{x_2' + ut_2'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

解 取前面的飞船为S′系，后面的飞船为S系，S′系相对于S系以 $u=0.98c$沿轴正向运动。设在S′系中的观测者测得A，B两事件的时空坐标分别为(x_1', t_1')，(x_2', t_2')，根据洛仑兹变换可得到S系中的观测者测得A，B两事件的空间坐标分别为

$$x_1=\frac{x_1'+ut_1'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad , \qquad x_2=\frac{x_2'+ut_2'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

则S系，即后面那个飞船上的观测者测得*A*，*B*两事件的空间距离为

$$\Delta x=x_2-x_1=\frac{x_2'-x_1'+u(t_2'-t_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\Delta x'+u\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

由题意已知：$\Delta x'=20\text{m}$， $u=0.98c$ ， $\Delta t'=\dfrac{\Delta x'}{c}$

所以

$$\Delta x=\frac{20+0.98c\times\frac{20}{c}}{\sqrt{1-(\frac{0.98c}{c})^2}}=198\text{m}$$

三、相对论速度变换

定义 $$\mathbf{v}_x = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} \qquad \mathbf{v}'_x = \frac{\mathbf{dx}'}{\mathbf{dt}'}$$

由洛仑兹变换式

$$\begin{cases} x' = \gamma\left(x - ut\right) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{u}{c^2}x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx' = \gamma\left(dx - udt\right) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma\left(dt - \dfrac{u}{c^2}dx\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow v'_x = \frac{\gamma\left(dx - udt\right)}{\gamma\left(dt - \dfrac{u}{c^2}dx\right)} = \boxed{\frac{v_x - u}{1 - \dfrac{u}{c^2}v_x}}$$

洛仑兹速度变换式

正变换

$$V'_x = \frac{V_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}V_x}$$

$$V'_y = \frac{V_y}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}V_x\right)}$$

$$V'_z = \frac{V_z}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}V_x\right)}$$

逆变换

$$V_x = \frac{V'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}V'_x}$$

$$V_y = \frac{V'_y}{\gamma\left(1 + \frac{u}{c^2}V'_x\right)}$$

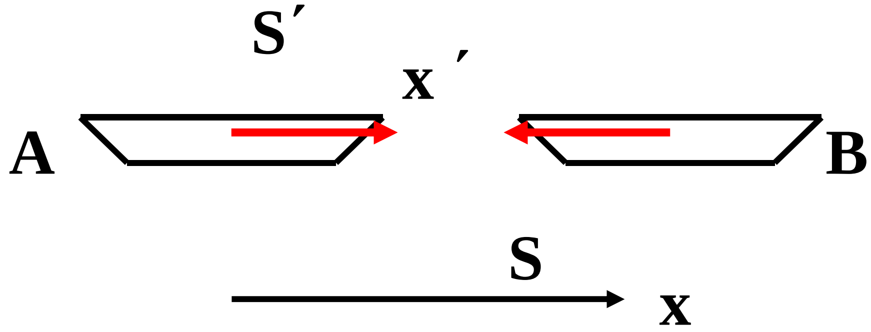
$$V_z = \frac{V'_z}{\gamma\left(1 + \frac{u}{c^2}V'_x\right)}$$

- **说明**

当u<<c时，洛仑兹变换转化为伽里略速度变换.

例.　两宇宙飞船A、B相向运动，在地面上测得其速度分别为0.7c和0.9c，若以x轴方向为正方向。求它们的相对运动速度。

$$V_x' = \frac{V_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} V_x}$$



解法一：

将A所在的坐标系看作S′系，

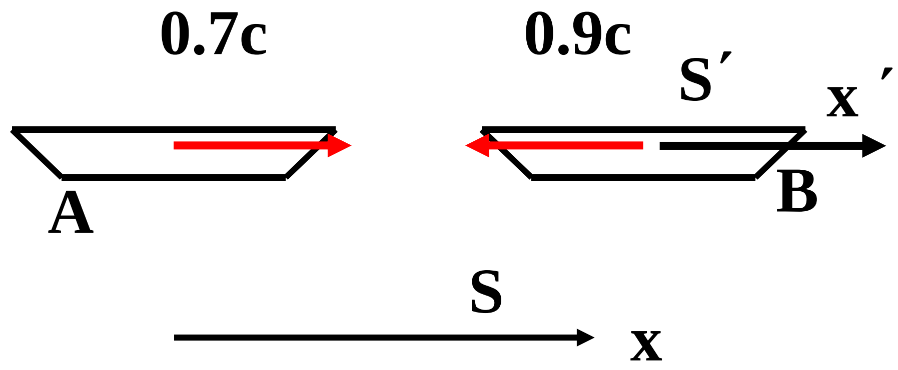
地面看作静止的S系，则S′系相对于S系的速度为 $u = 0.7c$

在S系中看B的运动速度为 $V_x = -0.9c$

在S′系中看B的运动速度为 V_x'

$$V_x' = \frac{V_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} V_x} = \frac{-0.9c - 0.7c}{1 - \frac{0.7c}{c^2}(-0.9c)} \approx -0.98c$$

$$V_x' = \frac{V_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} V_x}$$



解法二：
将B所在的坐标系看作S′系，
地面看作静止的S系，则S ′系相对于S系的速度为$u = -0.9c$

在S系中看A的运动速度为 $V_x = 0.7c$

在S′系中看A的运动速度为 V_x'

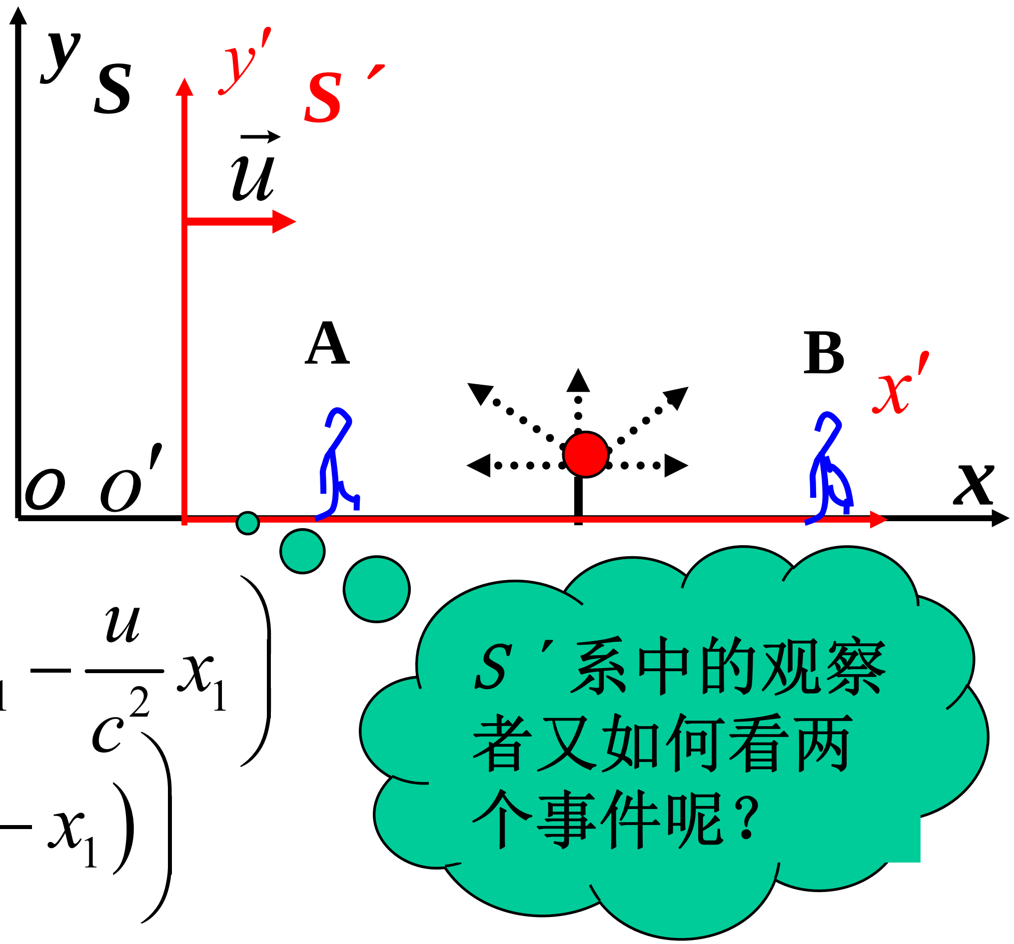
$$V_x' = \frac{V_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} V_x} = \frac{0.7c + 0.9c}{1 - \frac{-0.9c}{c^2}(0.7c)} \approx 0.98c$$

§ 4.4狭义相对论的时空观

一、同时的相对性

A收到光信号为事件1

B收到光信号为事件2



事件1 (x_1, t_1) (x_1', t_1')

事件2 (x_2, t_2) (x_2', t_2')

则

$$t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1\right)$$

$$= \gamma\left((t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)\right)$$

$$= -\gamma\frac{u}{c^2}(x_2 - x_1) < 0$$

结论：S系中，事件1、事件2同时发生；

S´系中，两事件不同时发生，B先收到光信号，A后收到光信号

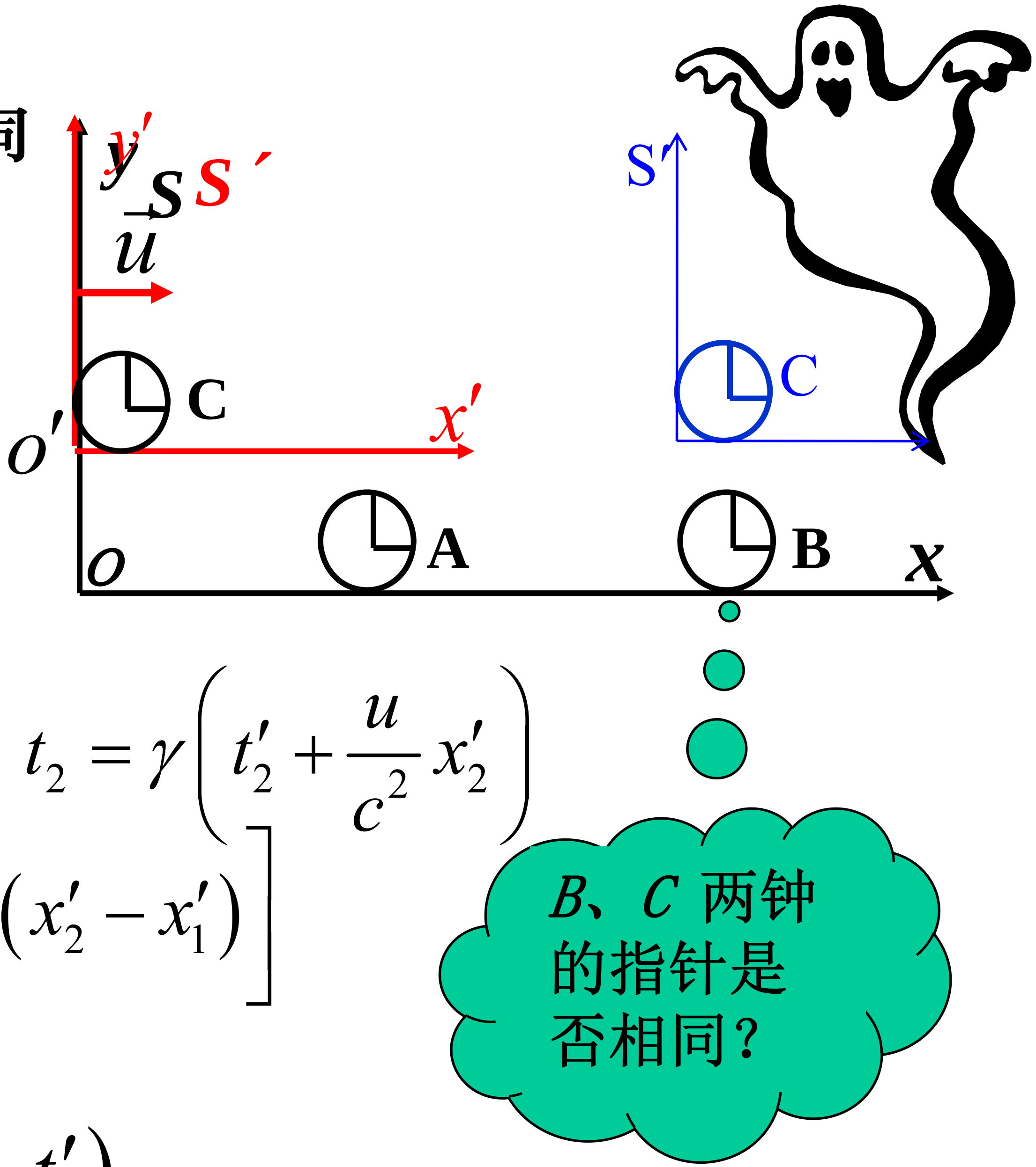
二、时间延长

事件1:A、C相遇，指针相同

$$\left(x_1, t_1\right)$$
$$\left(x_1', t_1'\right)$$

事件2:B、C相遇，指针相同吗?

$$\left(x_2, t_2\right)$$
$$\left(x_2', t_2'\right)$$



S系中，

$$t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{u}{c^2}x_1'\right) \quad t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{u}{c^2}x_2'\right)$$

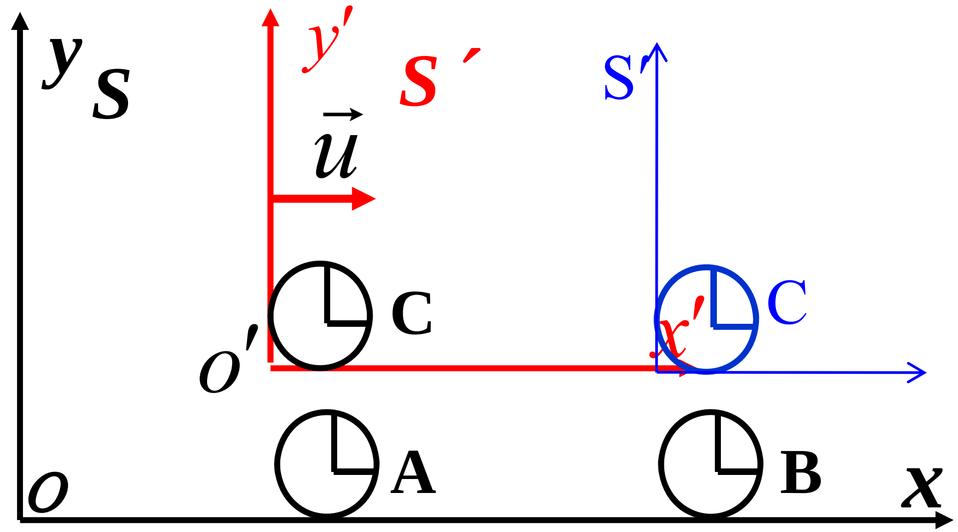
$$t_2 - t_1 = \gamma\left[\left(t_2' - t_1'\right) + \frac{u}{c^2}\left(x_2' - x_1'\right)\right]$$
$$= \gamma\left(t_2' - t_1'\right)$$

固有时间 $\tau_0 = \left(t_2' - t_1'\right)$

(在一个坐标系中同一位置处不同事件间的时间间隔)

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' - t_1'\right) = \gamma\tau_0$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$



从S系来看，时间间隔变长了

——时间延长，动钟变慢

固有时间
最短

说明：

(1)在两个坐标系看的时间间隔不同，说明时间具有相对性；

(2)τ_0是同一地点发生的两个事件的时间间隔，它是最短的，从其他参考系观察时，看到的时间间隔都比τ_0要长。

(3)时间延长是相对的。

例题：带正电的π介子是一种不稳定的粒子，当它作低速运动时，测得它的寿命为2.6x10^{-8}s。

(1)π介子相对实验室以u=0.8c运动时，在实验室测得π介子的平均寿命；

(2)π介子以多大速度运动时，在实验室中测得它的寿命为2.6x10^{-6}s

解：将π介子看作S′系，实验室看作S系， 2.6x10^{-8}s是在S′系同一地点测得，故为固有时间

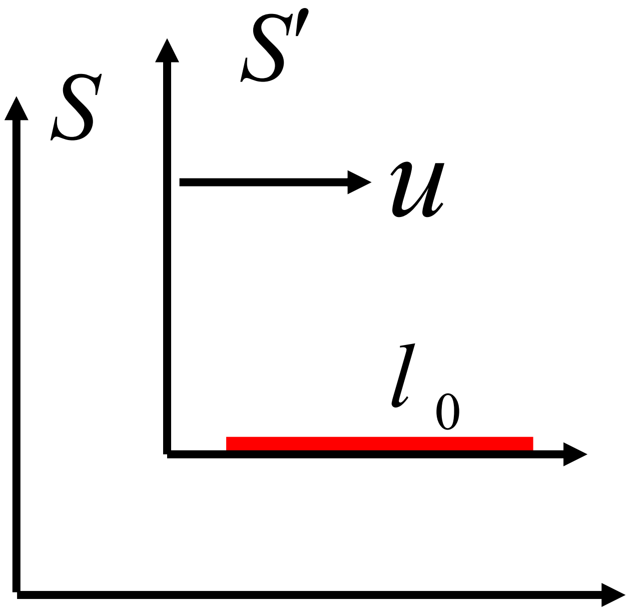
(1) $$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 4.3\times10^{-8}s$$

(2) $$\tau = 2.6\times10^{-6}s, \tau_0 = 2.6\times10^{-8}s$$

可得 $$u = 0.9995c$$

三、尺度缩短

对运动长度的测量问题



怎么测?

事件1：尺子的左端点

$$\left(x_1, t_1\right)$$
$$\left(x_1', t_1'\right)$$

事件2：尺子的右端点

$$\left(x_2, t_2\right)$$
$$\left(x_2', t_2'\right)$$

S´系中 $\boldsymbol{l_0 = x_2' - x_1'}$

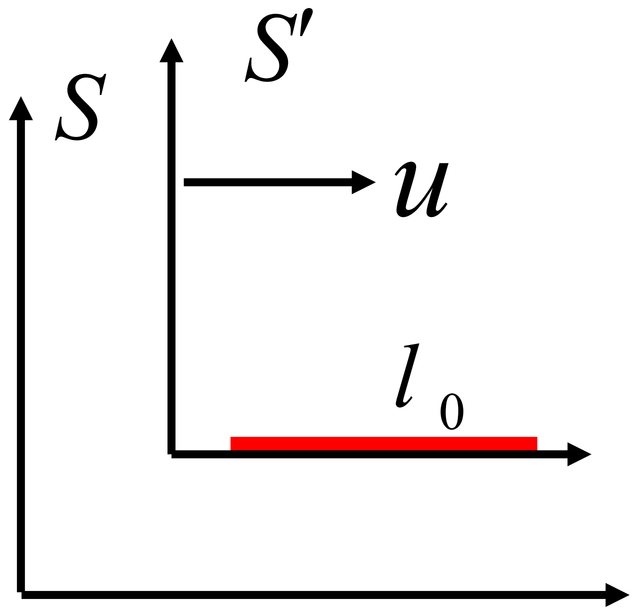
S系中 $\boldsymbol{l = x_2 - x_1}$

同时测
$t_1 = t_2$

由洛仑兹变换

$$x_2' - x_1' = \gamma\left(x_2 - ut_2\right) - \gamma\left(x_1 - ut_1\right)$$
$$= \gamma\left(x_2 - x_1\right) - \gamma u\left(t_2 - t_1\right) = \gamma\left(x_2 - x_1\right)$$

$$l_0 = \gamma l = \frac{l}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$



$$\boxed{l = \sqrt{1-u^2/c^2}\, l_0}$$

固有长度

(相对于S´系静止)

从S系来看，杆的长度缩短了——尺度缩短，动尺变短

说明：

(1)在两个坐标系测得长度不同，说明空间具有相对性；

(2)与杆静止的观察者测得的杆长度最长，即固有长度，相对于杆运动的观察者测得的要短；

(3)长度收缩是相对的；

(4)长度收缩只发生在运动的方向上。

例题：飞船对地的速度为u=0.98c，
(1)飞船上的观察者认为飞船长度20m，问地球上的观察者看到的长度;
(2)若地球上观察者认为地球上长为20m的一个物体，则飞船上的人认为多长？

解:
(1)固有长度为20m，则

$$l=\sqrt{1-u^2/c^2}\,l_0$$ =4m

(2)固有长度为20m，则

$$l=\sqrt{1-u^2/c^2}\,l_0$$ =4m

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma\left(x - ut\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma\left(x' + ut'\right) \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) \end{aligned}}$$

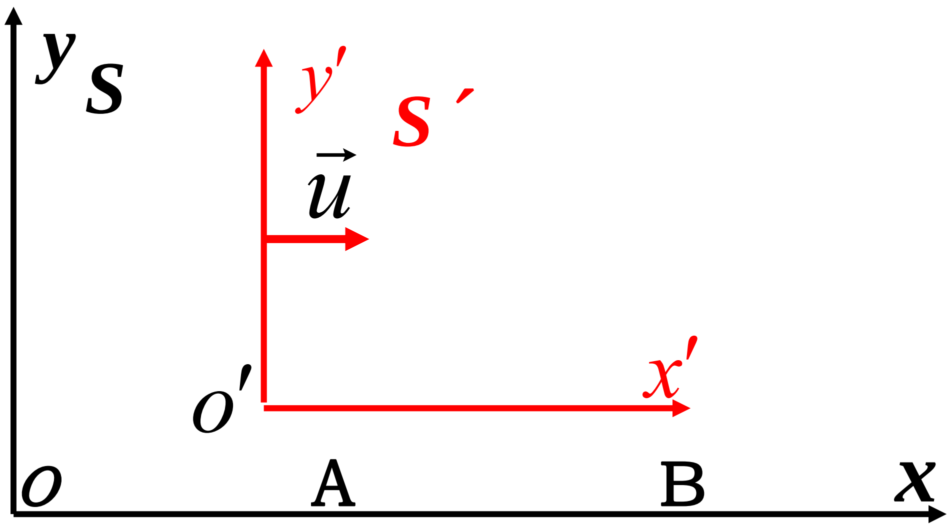
$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\boxed{l = \sqrt{1-u^2/c^2}\,l_0}$$

四、狭义相对论中的因果律

S系：A、B两事件是因果关系

S´系：?



事件A: $\left(x_1, t_1\right)$ $\left(x_1', t_1'\right)$

事件B: $\left(x_2, t_2\right)$ $\left(x_2', t_2'\right)$

在S系中， $x_2 - x_1 = v\left(t_2 - t_1\right)$

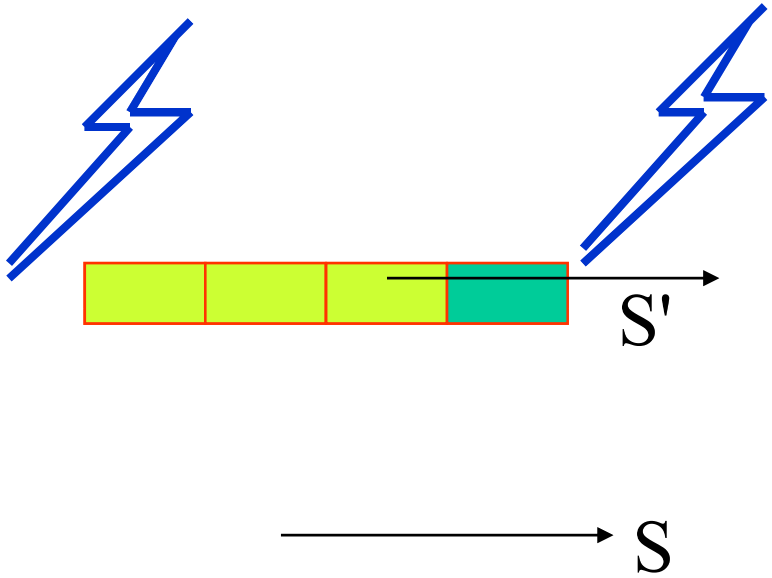
$$t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1\right)$$

$$= \gamma\left(\left(t_2 - t_1\right) - \frac{u}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)\right) = \gamma\left[\left(t_2 - t_1\right)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)\right] > 0$$

$$\therefore t_2' > t_1'$$

A、B两事件的因果关系不会颠倒！

例题：一列火车长0.3km(火车上观测者测得)，以100km/s的速度行使，地面上的观察者发现有两个闪电同时击中火车的前后两端。问火车上的观察者测得两闪电击中火车前后两端的时间间隔为多少？



解法一设地面为s系，火车为s'系，闪电击中火车前后两端为两个事件1，2

火车前端被击中1: $\left(x_1, t_1\right)\left(x_1', t_1'\right)$

火车后端被击中2: $\left(x_2, t_2\right) \quad \left(x_2', t_2'\right)$

由洛伦兹变换: $t_2 - t_1 = \gamma\left[\left(t_2' - t_1'\right) + \frac{u}{c^2}\left(x_2' - x_1'\right)\right]$

而在s系中两个事件之间是同时发生的，即时间间隔为0，则有

$$t_2' - t_1' = -\frac{u}{c^2}\left(x_2' - x_1'\right) = -9.26\times10^{-14}\,s$$

解法二：由洛伦兹变换: $t_2' - t_1' = \gamma\left[\left(t_2 - t_1\right) - \frac{u}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)\right]$

在S系中测得火车的长度 $x_2 - x_1 = \left(x_2' - x_1'\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

两式联立即可求出

📖 解题思路

学习狭义相对论，正确理解和掌握相对论的时空观是最重要的，要理解同时性的相对性，时空量度的相对性，处理实际问题时要注意：

(1)明确两个参考系S系和S′系. 一般情况下选地面为S系,运动物体为S′系.

(2)明确固有长度，固有时间的概念. 相对物体静止的惯性系测量的长度为固有长度，一个惯性系中同一地点测量的两个事件的时间间隔为固有时间.

(3)洛仑兹变换式是求解有关相对论时空观问题的依据.处理实际问题时要根据题设条件与待求量设定不同事件在不同惯性系中的时空坐标，选用洛仑兹变换中正变换或逆变换的公式，还要注意同时性的相对性.

(4)注意时空量度相对性的两个公式的适用范围.

- 如果待测长度相对于一惯性系静止，计算相对其运动惯性系中的长度

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

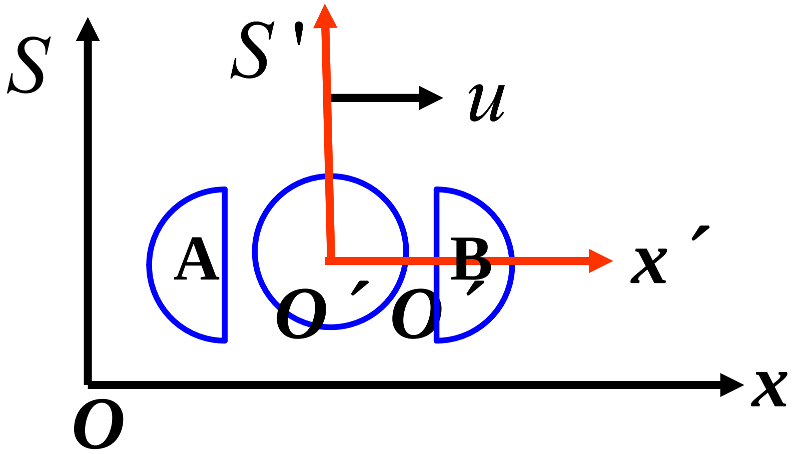
- 如果已知一个惯性系中同一地点发生的两个事件的时间间隔，计算这两个事件在另一惯性系中的时间间隔

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

- 如果不是这两种情况，要用洛仑兹变换求解.

§ 4.5 相对论动力学

一、狭义相对论中的质量



粒子分裂前

S´系中：粒子静止

S系中：粒子质量为M，速率为u

粒子分裂后

S´系中：

A: m'_A $-\vec{u}$

B: m'_B $\vec{u}$

$$m'_A = m'_B$$

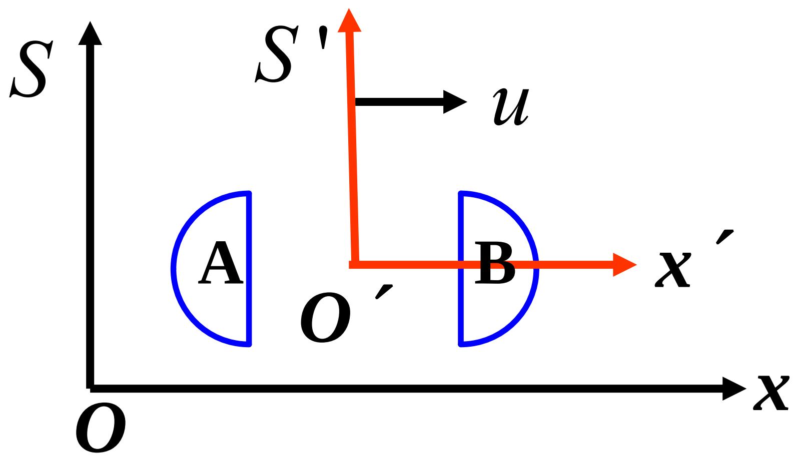
S系中：

A m_A 静止 B m_B 运动

$$V_A = \frac{V'_A + u}{1 + \frac{u}{c^2} V'_A} = \frac{-u + u}{1 + \frac{u}{c^2}(-u)} = 0$$

$$V_B = \frac{V'_B + u}{1 + \frac{u}{c^2} V'_B} = \frac{u + u}{1 + \frac{u}{c^2} u} = \frac{2u}{1 + \frac{u}{c^2} u} \quad (1)$$

S系中由动量守恒：



$$Mu = m_B V_B + 0 = m_B \frac{2u}{1+\frac{u}{c^2}u}$$

$$\left(m_A + m_B\right)u = m_B \frac{2u}{1+\frac{u}{c^2}u} \quad (2)$$

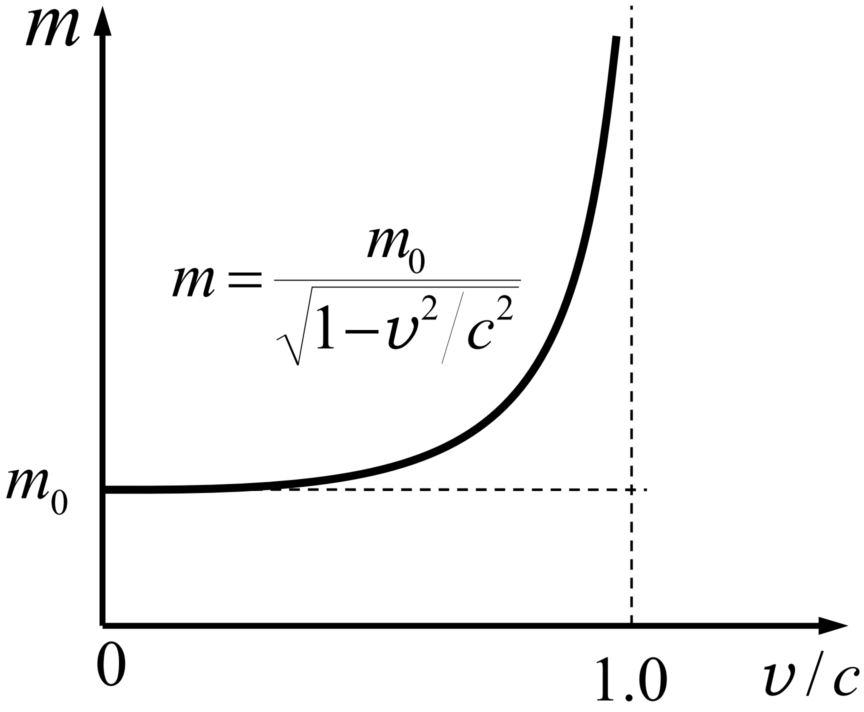
$$m_B = m_A \frac{1+\frac{u^2}{c^2}}{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad (3)$$

由(1)式

$$V_B = \frac{2u}{1+\frac{u}{c^2}u} \Rightarrow u = c^2/V_B\left(1-\sqrt{1-c^2/V_B^2}\right)$$

带入(3)式，可得 $m_B = \dfrac{m_A}{\sqrt{1-\left(\dfrac{V_B}{c}\right)^2}} \Rightarrow m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$



讨论

(1) $V \ll c$ $\quad \boldsymbol{m = m_0}$

(2) $V > c$ m为虚数，没有意义

(3) $V \to c$ $\quad m \to \infty$

二. 相对论动量

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$= \frac{m_0}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

三、相对论质量与能量的关系

设质点从静止开始，通过外力F作用沿ox轴作一维运动

经典力学中 $E_K = \int_L F dx = \frac{1}{2} m v^2$

相对论中

$$E_K = \int F dx = \int \frac{d(mv)}{dt} dx = \int v d(mv)$$

$$vd(mv) = mvdv + v^2 dm$$

$$\mathbf{mvdv + v^2 dm = c^2 dm}$$

$$vd(mv) = c^2 dm$$

由 $\boldsymbol{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$

$$\mathbf{m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2}$$

$$\therefore \quad E_K = \int_{m_0}^{m} c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2$$

相对论动能 $\boxed{E_K = mc^2 - m_0c^2} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}c^2 - m_0c^2$

➢ 讨论：

当$\upsilon << c$时，可将 $\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ 作泰勒展开，得

$$(1-\frac{\upsilon^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \cdots$$

取前两项，代入

$$E_k = m_0c^2(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} - 1) = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2$$

表明经典力学的动能表达式是相对论动能表达式的低速近似.

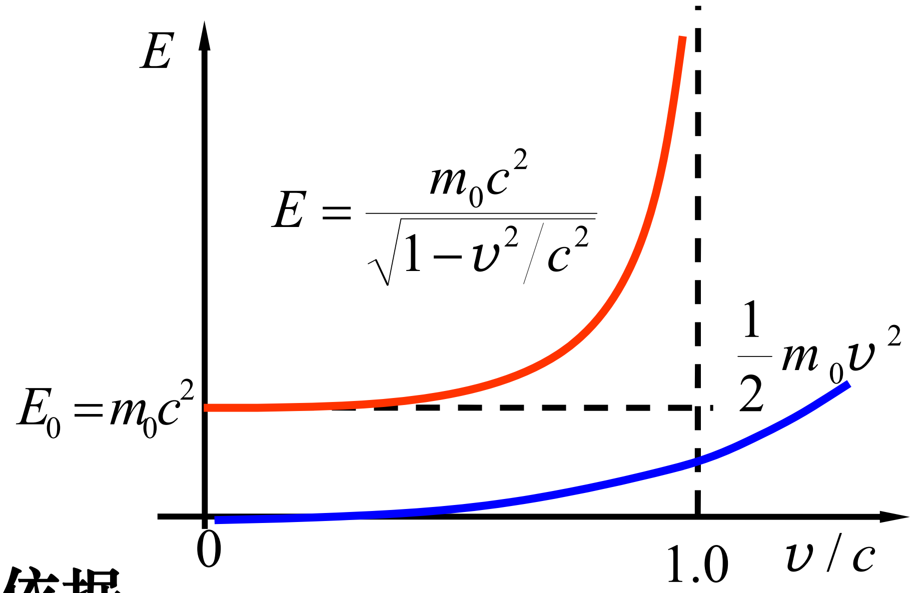
相对论动能 $\boxed{E_K = mc^2 - m_0c^2}$

$\left\{\begin{array}{ll} mc^2 & \text{运动时的能量} \\ m_0c^2 & \text{静止时的能量} \end{array}\right.$

相对论能量 $\boxed{E = E_K + m_0c^2} = mc^2$

质能公式

$$= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$$



$$\Delta E = \Delta mc^2$$

——原子能(核能)利用的理论依据.

例 试比较原子核裂变和聚变过程中所释放出的能量.

解 用中子轰击铀一类重原子核可分裂成两个中等质量的原子核的现象称为原子核的裂变，在裂变反应中放出巨大能量. 例如反应

$$\mathrm{n}+{}^{235}_{92}\mathrm{U}\rightarrow{}^{141}_{56}\mathrm{Ba}+{}^{92}_{36}\mathrm{Kr}+3\mathrm{n}$$

反应物和生成物静质量之差(质量亏损)，为

$$\Delta m = m_0 - m_0'$$

$$m_0 = m_\mathrm{n} + m({}^{235}_{92}\mathrm{U})$$ （反应物静止质量之和）

m_0' 生成物的静止质量之和

$$m_0' = m({}^{141}_{56}\mathrm{Ba}) + m({}^{92}_{36}\mathrm{Kr}) + 3m_\mathrm{n}$$

其中中子的静止质量 $m_{\mathrm{n}} = 10087\mathrm{u}$

${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ 的静止质量 $m({}^{235}_{92}\mathrm{U}) = 235.043\,9\mathrm{u}$

${}^{141}_{56}\mathrm{Ba}$ 的静止质量 $m({}^{141}_{56}\mathrm{Ba}) = 140.913\,9\mathrm{u}$

${}^{92}_{36}\mathrm{Kr}$ 的静止质量 $m({}^{92}_{36}\mathrm{Kr}) = 91.897\,3\mathrm{u}$

则反应物的静止质量之和为

$$m_0 = 1.008\,7\mathrm{u} + 235.043\,9\mathrm{u} = 236.052\,6\mathrm{u}$$

生成物的静止质量之和为

$$m_0' = 140.913\,9\mathrm{u} + 91.897\,3\mathrm{u} + 3\times 1.008\,7\mathrm{u}$$

$$= 235.8373\mathrm{u}$$

反应前后质量亏损为 $\Delta m = m_0 - m_0'$

$$= 236.0526u - 235.8373u$$

$$= 0.2153\text{u} = 0.3574\times 10^{-27}\,\text{kg}$$

其中原子质量单位 $1\text{u} = 1.66\times 10^{-27}\,\text{kg}$

释放的能量 $\Delta E = \Delta mc^2 = 0.3574\times 10^{-27}\times(3\times 10^8)^2\,\text{J}$

$$= 3.2166\times 10^{-11}\,\text{J}$$

$$= 2.01\times 10^8\,\text{eV} = 201\text{MeV}$$

一千克铀-235全部裂变，所放出的可利用的核能相当于约2500t标准煤燃料所放出的热能.

聚变反应: 轻原子核聚合成较重原子核的核反应。

例如反应 $\quad {}_1^2\mathrm{H}+{}_1^3\mathrm{H}\rightarrow{}_2^4\mathrm{He}+\mathrm{n}$

反应之前静止质量之和为

$$\begin{aligned} m_0 &= m(\mathrm{D})+m(\mathrm{T}) \\ &= 2.0141\,\mathrm{u}+3.0160\,\mathrm{u} \\ &= 5.0301\,\mathrm{u} \end{aligned}$$

反应之后静止质量之和为

$$\begin{aligned} m_0' &= m({}^4\mathrm{He})+m_{\mathrm{n}} \\ &= 4.0026\,\mathrm{u}+1.0087\,\mathrm{u} \\ &= 5.0113\,\mathrm{u} \end{aligned}$$

反应前后静止质量差为

$$\Delta m = m_0 - m_0' = 0.0188\text{u} = 0.3127 \times 10^{-28}\,\text{kg}$$

释放出能量

$$\Delta E = \Delta mc^2 = 0.3127 \times 10^{-28} \times (3 \times 10^8)^2\,\text{J}$$

$$= 2.8143 \times 10^{-12}\,\text{J} = 17.6\text{MeV}$$

上述聚变反应可以表示为

$$\text{D} + \text{T} \to {}_2^4\text{He} + \text{n} + 17.6\text{MeV}$$

聚变反应平均每个核子放出的能量(约 17.6MeV)要比裂变反应平均每核子所放出的能量(约 1MeV)大得多.

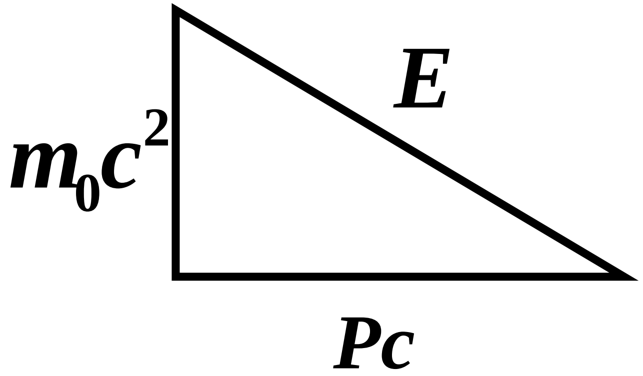
四、相对论动量与能量的关系

经典力学中 $E_K = \frac{1}{2}mv^2$

$P = mv$ $\Longrightarrow$ $E_K = \frac{P^2}{2m}$

相对论中

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \qquad p = \frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$



平方后消去v可得

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

——(相对论能量动量关系)

对于静止质量为零的粒子，如光子，能量和动量关系为

$$E = pc \qquad p = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc$$

➢ 讨论：

对于动能是E_k的粒子，总能量为

$$\begin{cases} E = E_k + m_0 c^2 \\ E^2 = E_0^{\ 2} + p^2 c^2 \end{cases}$$

$$E_k^{\ 2} + 2E_k m_0 c^2 = p^2 c^2$$

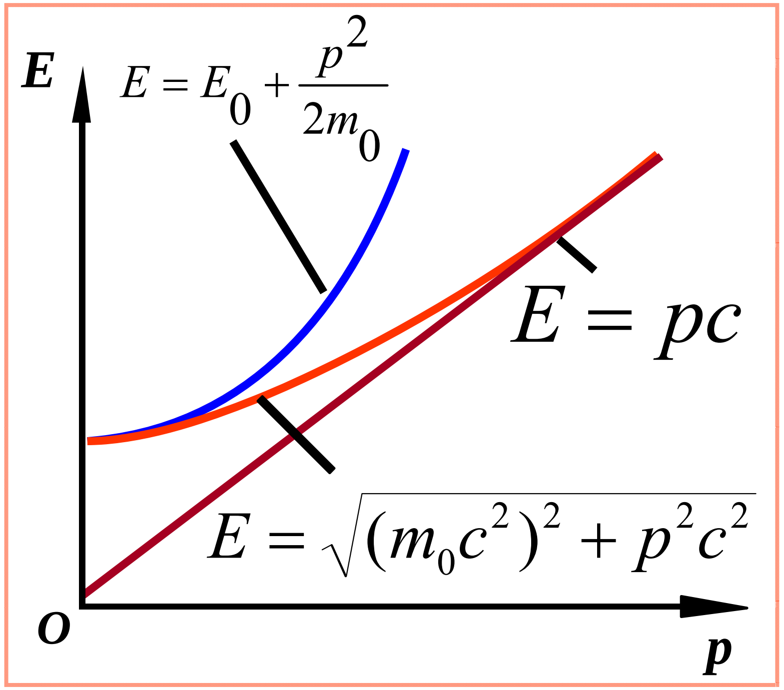
当$v << c$时，$E_k^2 << 2m_0 c^2$

上式的第一项可以忽略,即

$$2E_k m_0 c^2 = p^2 c^2$$

于是有

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} \qquad E = E_0 + \frac{p^2}{2m_0}$$



（物体低速运动时能量动量关系）

例　两粒子A、B静止，质量均为m_0，若A静止，B以$6m_0c^2$的动能向A运动，碰撞后合成为一个粒子，碰撞过程中无能量放出，求合成粒子的静止质量。

解：A、B 构成系统，能量守恒，动量守恒。

碰撞前：　A:　$E_A = m_0 c^2$

B:　$E_B = m_0c^2 + 6m_0c^2 = 7m_0c^2$

碰撞后：设合粒子质量为M，则 $E = Mc^2 = \dfrac{M_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2$

由能量守恒：

$$m_0c^2 + 7m_0c^2 = \frac{M_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2$$

$$\therefore M_0 = 8m_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, M = 8m_0$$

动量

$$M_0 = 8m_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, M = 8m_0$$

碰撞前: A: $P_A = 0$

B: P_B

碰撞后: $P = Mv$

由动量守恒: $P_B = Mv \Rightarrow v = P_B / M$

由相对论动量能量关系(B粒子)

$$E_B^{\ 2} = m_0^{\ 2}c^4 + p_B^{\ 2}c^2$$

$$\therefore p_B^{\ 2} = \frac{1}{c^2}\left(E_B^2 - m_0^{\ 2}c^4\right) = \frac{1}{c^2}\left(\left(7m_0c^2\right)^2 - m_0^{\ 2}c^4\right) = 48m_0^{\ 2}c^2$$

$$\therefore v^2 = P^2{}_B / M^2 = 48m_0^{\ 2}c^2 / 64m_0^2 = 3/4\,c^2$$

$$\therefore M_0 = 8m_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4m_0$$

相对论运动学小结

- 洛仑兹变换

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

- 同时的相对性
- 时间延长 $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$
- 尺度缩短 $l = \sqrt{1 - u^2/c^2}\, l_0$

相对论动力学小结

实际问题中当物体作趋近于光速的高速运动时，一定要用相对论动力学的公式，求解相对论动力学问题的关键在于理解和掌握下列几个最重要的结论：

- 相对论质量 $$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- 相对论动量 $$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- 相对论动能 $$E_{\mathrm{k}}=mc^2-m_0c^2\neq\frac{1}{2}\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- 相对论能量 $$E=mc^2$$

- 相对论能量和动量的关系 $$E^2=p^2c^2+E_0^2$$

碰撞问题：
碰撞过程中动量和总能量守恒，

例题：一宇宙飞船以速度u远离地球沿x轴方向飞行，发现飞船前方有一棒形不明飞行物，平行于x轴。飞船上测得此物长为L′，速度大小为v′，方向沿x轴正向。试问地面参考系上观测者测得此物长度为多少？