第一届

深圳中学物理竞赛邀请赛

命题人：深圳中学 王宇轩

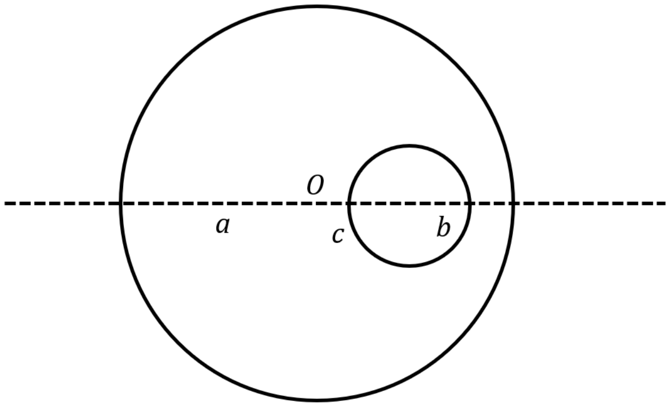
注意事项：

1.考试时间：3 小时. 请遵守考试纪律，按时停止作答

2.考试内容：本卷共 7 题，每题分数在题号后标记，满分 320 分

1. 非同轴双圆筒导线的传输线模型

考虑一根由两条平行无穷长非同轴导体柱面组成的传输线如图，柱间可认为是真空，外柱半径a，内柱半径b，二者轴线相距c

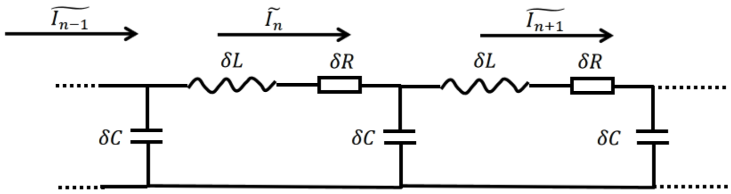


由于其分布阻抗影响，通电时电流在其中以波动形式传播的速度u未知，现在欲计算电流传播的波速u

(1)首先计算两柱面之间的单位长度电容$c_0=?$，可以使用参数$\alpha=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$化简你的答案，此模型满足$\alpha>a$的条件.

(2)现在已知非同轴情况下与同轴情况下单位长度电容与单位长度电感之乘积l_0c_0是一个不变的常数，试求单位长度电感$l_0=?$

(3)现在已知单位长度的导线总电阻为r_0，且等效分布阻抗电路如下图所示为一个无穷长阻抗网络，在其一端通角频率为ω的交变电压，每格长为趋于零的δx



2. 开普勒方程及其应用

要确定任意时刻行星在三维空间中的位置，须解一组包含三个二阶常微分方程的方程组，六个运动积分分别有六个相应的积分常数。这在天文学上称为轨道根数，只有通过观测求得这六个轨道根数，行星轨道及任意时刻在轨道上的位置才能够被完全确定，它们分别为：半长轴 a 表征轨道大小、偏心率 e 表征轨道形状、轨道在空间中的三个方位、近日点方向在轨道中的位置。而在天文学中常用的一个积分常数便是行星过近日点的时间 t。

Kepler 在对行星运行数十年的观测当中，不仅总结出了在高中物理课本中的常客--Kepler 三定律，为后世 Newton 建立引力理论奠定了基础，还总结出了有关天体运行的方程--Kepler 方程。

我们首先来了解一下方程中各参量的定义：

如下图，我们考虑一个椭圆及其外辅圆，取椭圆上一点P，建立x轴于长轴方向，y轴于短轴方向，O为原点，F为右焦点。现在考虑P对x轴作垂线，向上延长交外辅圆于Q点，如图定义θ为真近点角，定义偏近点角为OQ同x轴的夹角E。

(1)已知椭圆轨道半长轴a，偏心率e，P与F的距离r，试将E用这三个参量表述出来。

现在定义平近点角M为$M=\frac{2\pi}{\tau}(t-t_0)$，其中$t_0$定义为过近日点的时刻，$\tau$定义为轨道运动周期。

(2)已知椭圆轨道偏心率e，试导出(M,E,e)三者的关系式，此即 Kepler 方程。

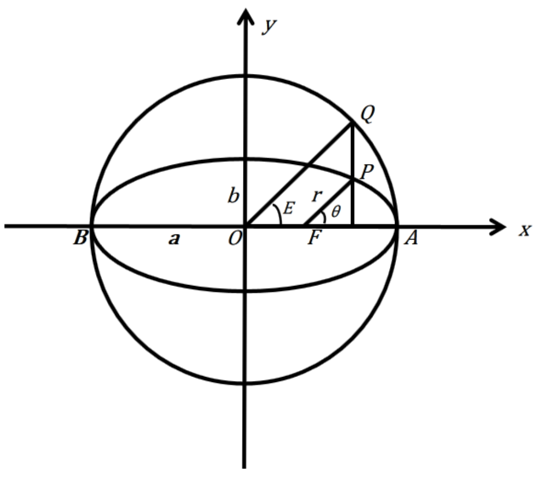
现在我们来处理一道将近十年前的复赛天体题，当时此题只要求考生进行定性分析，我们现在可以使用 Kepler 方程来求得精确解，题干描述如下：

在地球赤道平面内垂直地表建立了一个长于同步卫星轨道高度R的太空电梯，现在在向上运送货物的过程中不慎在$0.8R$处使货物相对该处太空电梯静止脱离，在电梯方向的速度可以忽略。

(3)(3.1)求货物再次与太空电梯相遇处距地心距离r的数值解。

(3.2)求由脱离算起，货物再次与太空电梯相遇的时间间隔Δt的数值解。

以上所有数值解均保留三位有效数字。



已知参数：

赤道半径 $R_e=6378km$

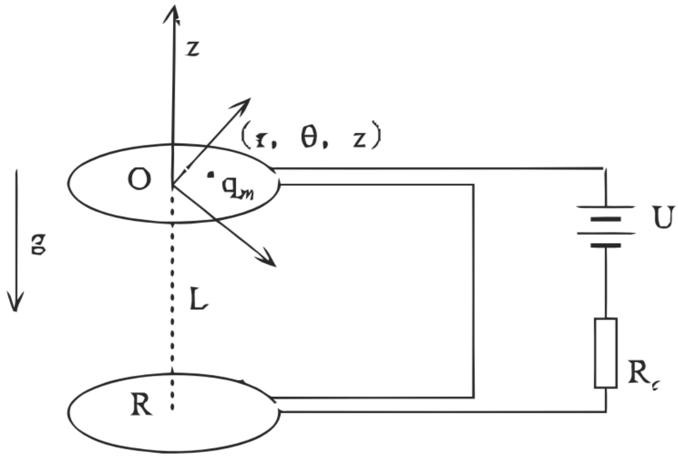
地球质量 $M=5.965\times10^{24}kg$

地球自转角速度 $\omega=7.292\times10^{-5}rad/s$

引力常量 $G=6.67\times10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

3. 磁荷振动

一个亥姆霍兹线圈固定放置，线圈轴线与竖直方向平行，线圈半径为R，两个线圈相距为L，线圈电阻可以忽略.在两个线圈上各开一个小口，然后作为接线端接入一个外电路。



电路的总电阻为R_c，电源内阻忽略不计，电动势为U，忽略线圈和电路的自感、互感以及电磁辐射。

如图所示，以上部线圈中心为原点O建立柱坐标系(r,θ,z)，规定z轴方向为竖直向上.

在线圈空间中施加一个外场(不会对电路-线圈系统造成任何影响)，使得单位质量质点受到作用力$\vec{f}=-\omega_0^2 r\,\hat{r}$，$\omega_0$是一个已知常数。重力加速度为$g$。初态整个电路达到稳定状态，且在原点处有一个磁荷量为q_m的磁荷处于静止状态。磁荷受到的作用力$\vec{F}$与外磁场$\vec{B}$有关，为$\vec{F}=q_m\vec{B}$，同时磁荷能产生磁场$\vec{B}=\frac{\mu_0 q_m \vec{r}}{4\pi r^3}$

，μ_0是真空磁导率，磁荷产生的磁场可以显著地影响线圈。在某一时刻对磁荷施加一个水平冲量，使其具有一个很小的径向速度v_0，忽略磁荷在竖直方向上的运动?(此时可能有一个支持面给予磁荷竖直方向的作用力以确保磁荷无竖直方向上的运动，但该支持面不会影响空间的磁场分布).

(1)已知当通过线圈的电流大小为I时（规定电源负极-正极方向为正），原点O附近的磁场分布为：

$$\vec{B}=Ar\,\hat{r}+(C+Bz)\,\hat{z}$$

其中A、B、C是与I、R、L等参数有关的待定常数。求出A、B、C，并由此确定磁荷质量m的大小.

(2)当ω_0等于某个确定值时，磁荷不会做往复运动。求出ω_0和粒子相对原点的最大移动距离s.

4. 带电粒子在磁场中若干问题

(1)考虑电子加速器，定义Φ_B为磁通量时有$B_a=\frac{\Phi_B}{\pi R^2}$，其中 R 为电子运动轨道半径，电子轨道处磁场为$B_0$，已知带电粒子$q,m$。现使得$B_a$增加为$B_a+\Delta B_a$已知，$B_0$变为$B_0+\Delta B_0$，求为要求电子运动轨道半径不变对应的$\Delta B_0$同$\Delta B_a$之关系。

(2)考虑初态时无外场，在原点处固定一个电荷$-q$，而(q,m)在R处作圆周运动，在一个长的时间内使得垂直轨道平面的磁场由0达B_0。认为此间隔远大于粒子的运动周期，结束后粒子仍作圆周运动，求全过程后半径变化量ΔR值为多少？

(3)外场沿 z 轴方向，且认为磁场的 z 分量在$z=0,r=R$附近随 r 变化关系为：$B_{(r)}=B_{0(R)}(a(\frac{R}{r})^{\alpha}-b(\frac{R}{r})^{\beta})$，在$O-xy$平面内即轨道平面内无磁场径向分量。粒子在初态于 R 处作圆周运动·，若认为z,r向的小振动独立无耦合，试求：

(3.1)z 向稳定的条件及对应小振动的角频率，用$(B_{0(R)},q,m,\alpha,\beta,a,b)$表示

(3.2)r 向稳定的条件及对应小振动的角频率，用$(B_{0(R)},q,m,\alpha,\beta,a,b)$表示

5. 异种混合$M-B$分布气体的平均相对速率与平均自由程的计算

在物理竞赛与普通物理常见的书籍中，平均自由程的计算举例一般均为对同种气体而言，而对于更为常见的混合气体中分子的平均自由程则不作讨论，其原因可能在于混合气体的平均相对速率计算繁杂.例如在一些物理教学期刊或《难集》中对此计算的相关讨论，他们均使用了将相对速率利用 Jacobi 行列式在质心系处理的方法.但是对于所涉知识甚浅的初学者而言这并不是一个“好方法”.

此题将引导同学们使用最基本的$M-B$分布知识来求得异(2)种混合$M-B$分布气体的平均相对速率与平均自由程:

考虑由两种气体混合组成的温度为T的气体，其中分子质量分别为m_1, m_2，各自速度为$\vec{v}_1, \vec{v}_2$时对应的概率密度由$Maxwell$分布给出为$F_1(\vec{v}_1), F_2(\vec{v}_2)$.

其中有$F_i(\vec{v}_i)=\left(\frac{m_i}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\exp(-\frac{m_i v_i^2}{2kT})$.

(1)试将任意两个分子的相对速率u的表达式.

(2)求整体(1,2 分子之间，不包括同种)的平均相对速率$\bar{u}$，用含有上方给出的量的积分式表示(不用标上下限).

(3)为了将上一问得到的积分式化简为可积形式，取某一个m_1分子的运动方向为z轴建立球坐标系(r, θ, φ)，从而避免对$\vec{v}_1$进行积分.试利用此方法给出化简后的表达$\bar{u}$的多重积分式，要求含有$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \theta, \varphi)$.

(4)求出最终结果.(必须有计算过程，不可以直接背答案)

(5)认为同，异种分子之间的碰撞频率可叠加时，已知两分子的有效直径分别为d_1, d_2，数密度分别为n_1, n_2，试求两种分子各自的平均自由程$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$的表达式.

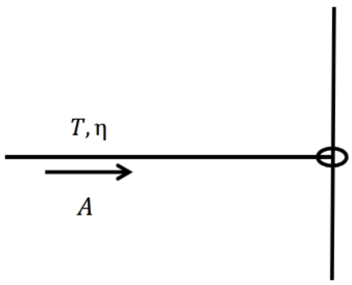
6. 波动三问

一长列振幅为 A 的波包，频率可认为是ω，在无穷长且质量线密度为η的弦上沿 x 轴由无穷远向右传播，弦内张力恒为 T

(1)在$x=0$处的弦上固定一个质量为m的小球，求波入射小球处后反射波的振幅大小 B 及反射波同入射波的相位差ϕ

(2)将$x=0$处右侧改为一根垂直于弦的固定杆，在弦与杆交点处串一个可在杆上自由无摩擦运动的质量m环，求波入射小球处后反射波的振幅大小 B 及反射波同入射波的相位差ϕ

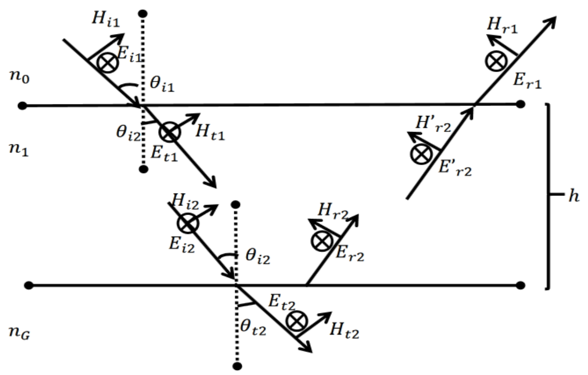
(3)续上问，将环变为一个轻质小环，环在运动时受到与速度成正比的摩擦力，比例系数为γ，求波入射小球处后反射波的振幅大小 B，并讨论$\gamma\to 0$及$\gamma\to\infty$的情况时 B 的取值及其物理意义。



7. 薄膜光学的矩阵处理方法

在光学工程应用中，为了满足光束在系统中光强低损耗的需要，经常会用到增强物体表面透射或反射光强的增透/反膜.当单层膜不满足需求时，所用到的增透/反膜将有多层，这时如何定量计算多层增透/反膜对光强的改变是一个亟待解决的问题。我们现在来逐步处理并最终解决此问题.

首先我们来考虑在空气与基片(即物体表面)之间的一层厚为h_1的薄膜，空气A折射率n_0，基片G折射率为n_G，薄膜折射率n_1.



现有一束s偏振光入射于薄膜的表面，令其入射光场为E_{i1},H_{i1}，而历经多次反射后薄膜内外的光场如图所示：

已知介质内传播的电磁波中E,H关系为：

$E=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H$,

入射角θ_{i1}，折射角θ_{i2}，所有介质均可视为$\mu=\mu_0$.各个E,H均为复振幅.

(1)定义(E_1,H_1)，(E_2,H_2)分别为两侧电磁场的切向总分量，试利用电磁场的边界条件及波的相位变化列出图中各参量的关系，再试求出这两组参量如下形式的关系，将你得到的(A,B,C,D)各量写出.

$$\begin{cases}E_1=AE_2+BH_2\\H_1=CE_2+DH_2\end{cases}\qquad\begin{cases}\eta_1=n_1\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos\theta_{i2}\\\delta=\dfrac{2\pi}{\lambda}n_1h_1\cos\theta_{i2}\end{cases}\qquad\text{(a)}$$

为简化(A,B,C,D)的形式，可以使用参数如上：

此时我们可以将(1)式的系数矩阵拿出来，称其为薄膜(n_1,h_1)的特征矩阵，用M_1来表示.

$$M_1=\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}\qquad\text{(b)}$$

这个特征矩阵表征这个薄膜两侧光场的线性关系，计算多层薄膜的过程便可以简化为形如M_1的多个矩阵相乘的计算.二阶矩阵相乘的系数变化如下给出：

$$\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & F\\G & H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AE+BG & AF+BH\\CE+DG & CF+DH\end{bmatrix}\qquad\text{(c)}$$

现在来使用第一问的结论来处理一些常见的问题：

当有N层膜时令：

$$M_1M_2M_3\ldots.M_N=M=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\ ,\ \begin{cases}\eta_0=n_0\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos\theta_{i1}\\ \eta_G=n_G\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos\theta_{i(N+1)}\end{cases}\qquad\text{(d)}$$

(2)试求复反射系数$r=\frac{E_{r1}}{E_{i1}}$，用(a,b,c,d)以及上述(η_0,η_1,η_2)表示.

(3)先看单层膜情况，试利用以上两问的结果求出第一问中薄膜的复反射系数r表示式，并给出总光强反射率R的表达式，再给出正入射时的R表达式.

(4)考虑多层高反膜，存在两种不同的膜n_H,n_L共$2p+1$层交替叠加在基片表面形如$(GHLHL\ldots LHA)$，光学厚度均为$\lambda/4$.波长为λ的s光正入射时，试求总光强反射率R.