



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Taller 02

Programa de:

Ingeniería Mecánica

**Mario Esteban Morales Chica
Nicolas Enrique Ocampo Torres
Alejandro Vargas Rojas**

Profesor:

Carlos Alberto Duque Daza

Universidad Nacional de Colombia.
Facultad de Ingeniería.
Bogotá D.C.
2024.

Contenido

1	Introducción	3
1.1	Ecuación de Burgers	3
1.2	Ecuación de difusión-convección	3
1.3	Método de Diferencias finitas	3
1.3.1	Método de Crank-Nicolson	4
2	Caso 1: Ecuación de Burgers unidimensional	5
2.1	Modelo matemático	5
2.2	Clasificación de variables	5
2.3	Análisis dimensional y adimensionalización	5
2.3.1	Congruencia dimensional	6
2.3.2	Adimensionalización	6
2.4	Solución Numérica	6
2.5	Análisis de Resultados	7
2.5.1	Condiciones Iniciales dadas por Delta de Dirac para $\nu = 0.02$	7
2.5.2	Resultados para $\nu = 0.02$	9
2.5.3	Resultados para $\nu = 0.04$	11
2.5.4	Resultados para $\nu = 0.1$	13
2.5.5	Refinamiento de malla	15
2.6	Conclusiones	18
3	Caso 2: Ecuación de difusión-convección transitoria 1D.	20
3.1	Modelo matemático	20
3.2	Clasificación de variables	20
3.3	Análisis dimensional y adimensionalización	20
3.3.1	Congruencia dimensional	21
3.3.2	Adimensionalización	21
3.4	Solución Numérica	21
3.5	Análisis de resultados	23
3.5.1	Discretización de la ecuación sin adimensionalizar	23
3.5.2	Discretización de la ecuación adimensionalizada	25
3.6	Conclusiones	26
4	References	27

1 Introducción

Dentro del campo de la mecánica de fluidos, hay ciertos fenómenos que, debido a la complejidad que representan, deben ser resuelto (o definidos) mediante distintos métodos y ecuaciones, los cuales derivan de ecuaciones u otros métodos. De tal manera, estos son una representación específica para fluidos viscosos, no viscosos, fluidos incompresibles, difusiones de calor en el fluido, entre otros fenómenos.

1.1 Ecuación de Burgers

La ecuación viscosa de Burgers (1), cuando se considera una viscosidad diferente de cero, representa una aproximación al sistema de ecuaciones de Navier-Stokes. Esta ecuación se emplea para describir un flujo viscoso e incompresible, sin embargo, se omite el término del gradiente de presión. Es considerada la ecuación en derivadas parciales (PDE) más básica que incorpora tanto la propagación no lineal como los efectos de difusión[2][3].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

1.2 Ecuación de difusión-convección

La ecuación de difusión-advección (2), deriva de la ecuación de conservación de la masa (12) y la ecuación de Navier-Stokes [4]:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (2)$$

1.3 Método de Diferencias finitas

Los métodos de diferencias finitas, al igual que otros métodos numéricos, permite la resolución de ecuaciones diferenciales. No obstante esta solución es de carácter aproximado, además éstas mismas deben tener un dominio definido [6].

Para conseguir una solución numérica se debe definir el dominio (típicamente unidimensional) anteriormente mencionado y posteriormente discretizarlo (limitarlo) para generar un número de nodos y a su vez una malla (o red):

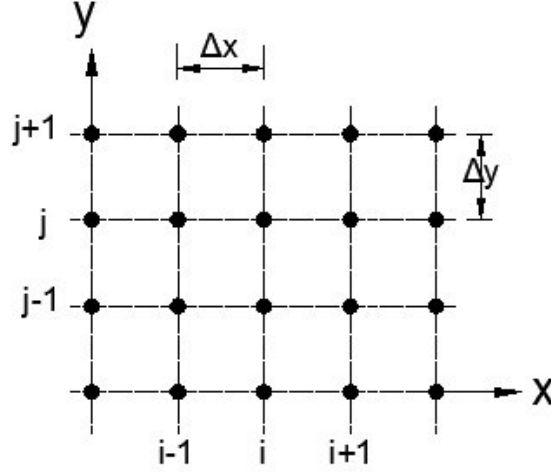


Figura 1: Esquema general para representación de diferencias finitas[7].

1.3.1 Método de Crank-Nicolson

Este método de diferencias finitas utilizado para la resolución numérica de EDP's, se basa (en esencia) en la unión de los planteamientos explícitos e implícitos del método Euler:

$$\frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\delta \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \alpha \theta_i^{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\delta \frac{\theta_{i+1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \alpha \theta_i^n \right) \quad (3)$$

En el anterior planteamiento se pueden ver de forma clara, la parte implícita (parte izquierda) y la explícita (derecha) en el método de Crank-Nicolson (también conocido como planteamiento semi-implícito). En caso particular de difusión lineal, se genera un sistema de ecuaciones el cual está asociado a una matriz tridiagonal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{N-2,N-3} & a_{N-2,N-2} & a_{N-2,N-1} \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

Figura 2: Representación genérica de una matriz tridiagonal para el método Crank-Nicolson.

2 Caso 1: Ecuación de Burgers unidimensional

2.1 Modelo matemático

El modelo matemático ya está dado, mediante la ecuación de Navier-Stokes (4).

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u\right) = -\nabla P + \mu\nabla^2 u + f \quad (4)$$

Sin embargo, se hacen 3 simplificaciones. Primero, no se tiene en cuenta o no se estudia la presión, por lo que se desprecia el gradiente de presión; la segunda, donde se trabaja en una sola dirección, es decir, al expandir el gradiente la única componente que va a ser distinta de 0 es la de x, y por último, se desprecian efectos producidos por campos (gravitacional, eléctricos, magnéticos, entre otros). Una vez hechas las simplificaciones y reorganizando la ecuación, se obtiene la ecuación (1).

2.2 Clasificación de variables

Tipo de variable	Variables
Dependiente	Velocidad (u)
Independiente	Tiempo (t)
	Posición (x)
Parámetro	Viscosidad cinemática (ν)
Despreciable	Presión (P)

Tabla 1: Clasificación de variables Caso 1

2.3 Análisis dimensional y adimensionalización

En función de la ecuación (1), se procede a mostrar las dimensiones de los coeficientes mostrados:

Variable	Dimensiones
u	LT^{-1}
t	T
x	L
v	LT^{-1}

Tabla 2: Descripción dimensional para las variables del caso 1.

2.3.1 Congruencia dimensional

Trayendo la ecuación (1):

$$\begin{aligned} \left[\frac{LT^{-1}}{T}\right] + [LT^{-1}]\left[\frac{LT^{-1}}{L}\right] &= [L^2T^{-1}]\left[\frac{LT^{-1}}{L^2}\right] \\ \left[\frac{L}{T^2}\right] + \left[\frac{L}{T^2}\right] &= \left[\frac{L}{T^2}\right] \end{aligned}$$

Los términos corresponden a las dimensiones de aceleración, puesto que la parte izquierda de la ecuación es el término expandido de una derivada material ($\frac{Du}{Dt}$), el cual combina el enfoque euleriano ($\frac{\partial u}{\partial t}$) o de aceleración local y el enfoque lagrangiano ($u \cdot \nabla u$) o de transporte convectivo.

2.3.2 Adimensionalización

Con la anterior información, se reemplazan las variables originales con sus equivalentes adimensionales: $u^* = \frac{u}{u_c}$; $u_c = \frac{L_c}{t_c}$. Entonces:

$$\frac{\partial(u^*u_c)}{\partial(t^*t_c)} + u \frac{\partial(u^*u_c)}{\partial(x^*L_c)} = v \frac{\partial^2(u^*u_c)}{\partial(x^*L_c)^2} \quad (5)$$

Para continuar con la simplificación en la ecuación adimensional, se debe tener en cuenta que valores como u_c , t_c , L_c son valores constantes, por lo tanto pueden salir de las derivadas parciales. Aplicando lo anterior y simplificando se tiene:

$$\frac{L_c}{t_c^2} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{u}{t_c} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = \frac{v}{t_c L_c} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \quad (6)$$

Se multiplican ambos lados de la ecuación por $\frac{t_c^2}{L_c}$, además de aplicar una última simplificación para obtener así la siguiente ecuación adimensional:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = \frac{vt_c}{L_c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \quad (7)$$

2.4 Solución Numérica

Para la solución del caso se hizo uso de Crank-Nicolson, con ponderación de 50% para cada parte (implícita y explícita). Con una discretización de diferencias finitas centradas tanto para el término de primera derivada como para el de segunda derivada, ambos de segundo orden de error.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} * \frac{\nu t_c}{\Delta x^2 L_c^2} ((u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})^{n+1} + (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})^n) \\ &\quad - \frac{1}{2} * \frac{1}{2\Delta x} (u_i(u_{i+1} - u_{i-1})^{n+1} + (u_{i+1} - u_{i-1})^n) \end{aligned}$$

Reorganizando la ecuación se llega a :

$$\begin{aligned} -(\beta + \alpha u_i^n) u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\beta) u_i^{n+1} - (\beta - \alpha u_i^n) u_{i+1}^{n+1} = \\ (\beta + \alpha u_i^n) u_{i-1}^n + (1 + 2\beta) u_i^n + (\beta - \alpha u_i^n) u_{i+1}^n \end{aligned}$$

Con $\beta = \frac{\nu \Delta t t_c}{2\Delta x^2 L_c^2}$ y $\alpha = \frac{\Delta t}{4\Delta x}$, además, de una condición de estabilidad dada por el número de Fourier.

$$F = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (8)$$

2.5 Análisis de Resultados

2.5.1 Condiciones Iniciales dadas por Delta de Dirac para $\nu = 0.02$

Inicialmente, se procedió a la resolución de la ecuación con unas condiciones iniciales dadas por una expresión que recrea el delta Dirac (ecuación (9))

$$u(x, 0) = M\delta_D = M \frac{\exp(-\frac{x^2}{4\beta})}{\sqrt{4\pi\beta}} \quad (9)$$

Donde $M = 1.0$ y se decidió un $\beta = 0.005$. Resultando en la siguiente solución numérica:

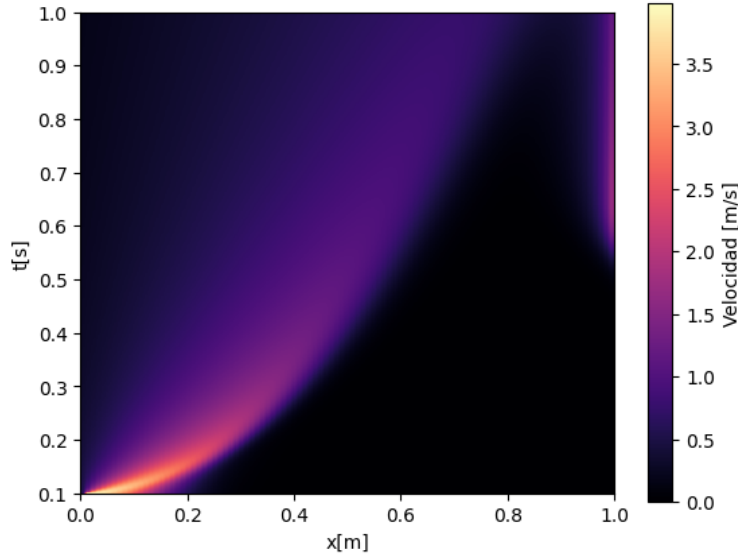


Figura 3: Solución numérica con condición inicial del Delta de Dirac

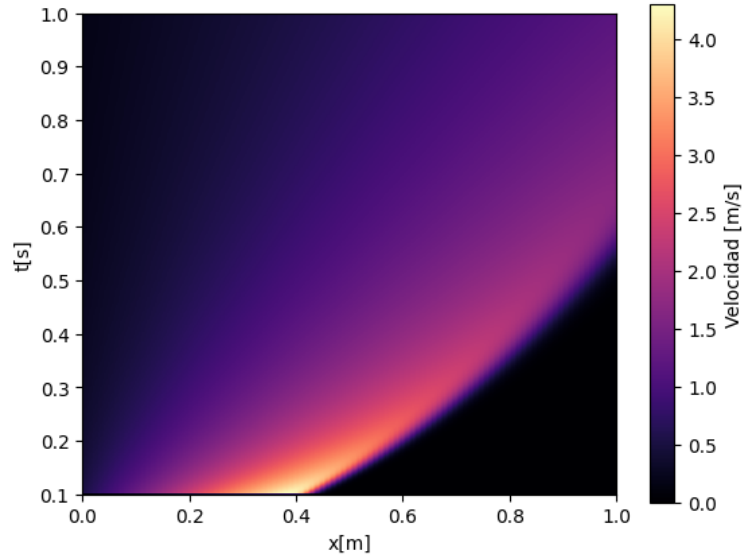


Figura 4: Solución analítica para $\nu = 0.02$

Primero se observa una diferencia en magnitud entre las soluciones, teniendo en la solución numérica un valor máximo de 3.98 y en la analítica 4.29. Por otra parte, se observa un atraso y una caída llegando al extremo del dominio espacial. Esto último se observa de mejor manera en la siguiente gráfica.

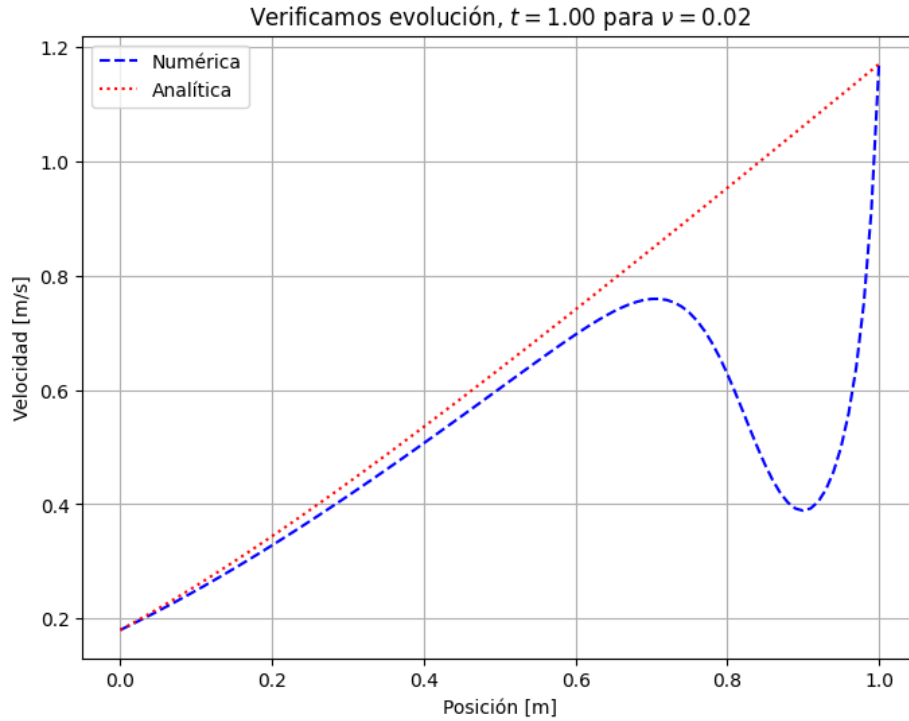


Figura 5: Evolución de las curvas

Dado este fenómeno se optaron por dos posibles soluciones, usar como condiciones iniciales

los valores de la ecuación analítica o usar un esquema de aguas arriba ("upwind") de segundo orden (de error) para discretizar la primera derivada espacial. Se tomó la primera alternativa, la segunda se discute más adelante.

La condición inicial usada ($t = 0.1$) viene dada por la siguiente función:

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{4\nu}{\pi t}} \frac{\exp(-\frac{x^2}{4\nu t})}{\frac{2}{\exp(M/2\nu)-1} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}[1 - \operatorname{erf}(\frac{x}{\sqrt{4\nu t}})]} \quad (10)$$

Donde la *error function* (*erf*) esta definida como:

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx$$

2.5.2 Resultados para $\nu = 0.02$

Tal como se discute al final de la sección anterior, con la implementación de la ecuación (10) como condición inicial, se logró la siguiente solución numérica.

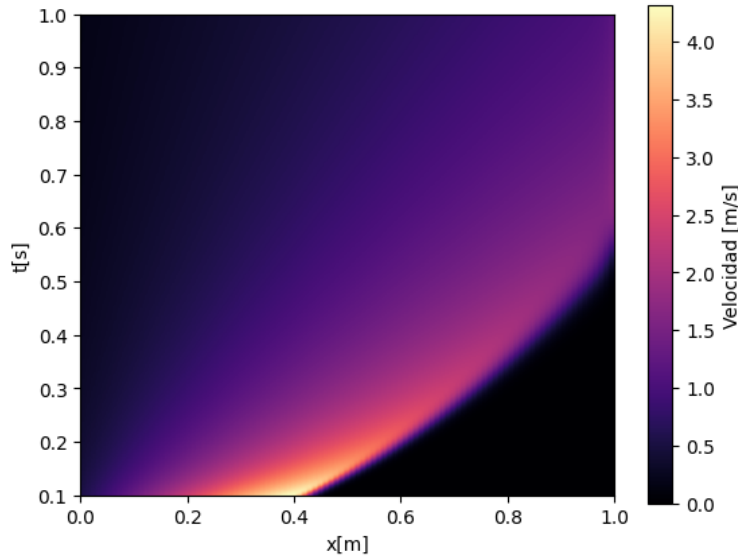


Figura 6: Solución numérica para $\nu = 0.02$ y condición inicial dada por ec. (10)

Se trabajó con una malla de $\Delta x = 0.01$ y $\Delta t = 0.002$, para un número de Fourier de $F = 0.4$.

Iniciando con el análisis, a simple vista no parece presentar el atraso que se observaba usando el delta de Dirac como condición inicial, además, de no presentar la caída cerca del final del dominio espacial. Esto se ve respaldado con la siguiente gráfica.

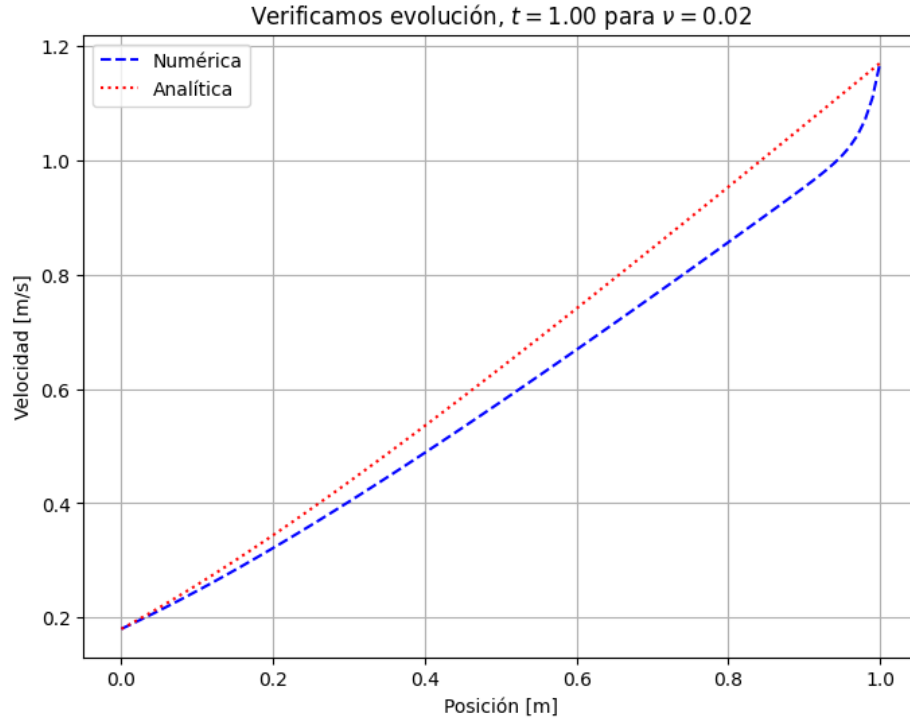


Figura 7: Evolución de las curvas

Si bien se resuelve lo comentado anteriormente, se presenta que hay una diferencia en magnitudes, un error inducido por la precisión usada por el lenguaje de programación, donde Python3 usa 64 bits, y un error de truncamiento debido al método numérico usado, en este caso diferencias finitas centradas.

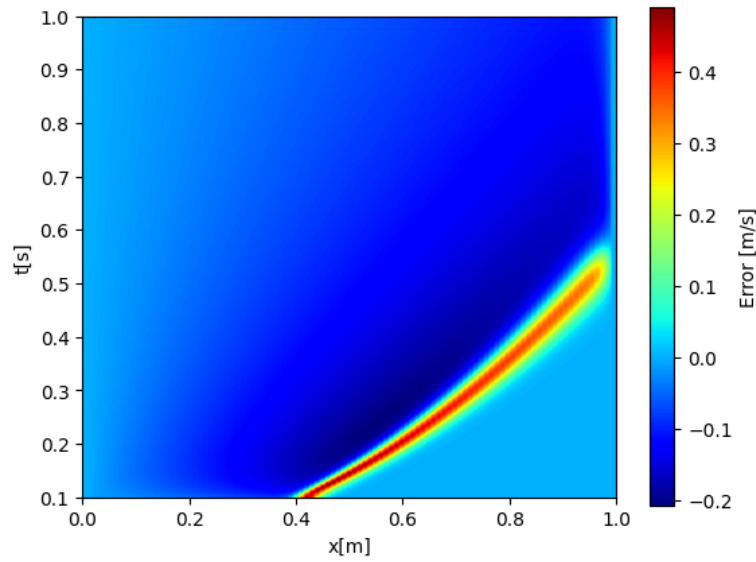


Figura 8: Evolución del error local a lo largo del dominio espacial y temporal para $\nu = 0.02$

Se observa que el error se presenta en mayor medida en el frente de onda, siguiendo la

tendencia de difusión de la ecuación. No obstante, con la figura 7 y 8 se observa que detrás del frente de onda se encuentra un error negativo, se presume que es producto de efectos viscosos. Por otra parte, el error global promedio es de 0.09687 m/s , este cálculo se realizó sacando el error promedio, respecto al dominio espacial, para cada paso de tiempo y luego realizando el promedio de lo anterior respecto al dominio temporal.

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{N_n} \sqrt{\frac{(u_{Num} - u_{Ana})^2}{N_i}} \quad (11)$$

Donde u_{Num} refiere a la solución numérica, u_{Ana} la solución analítica (10), N_i corresponde a los nodos espaciales y N_n los nodos temporales.

2.5.3 Resultados para $\nu = 0.04$

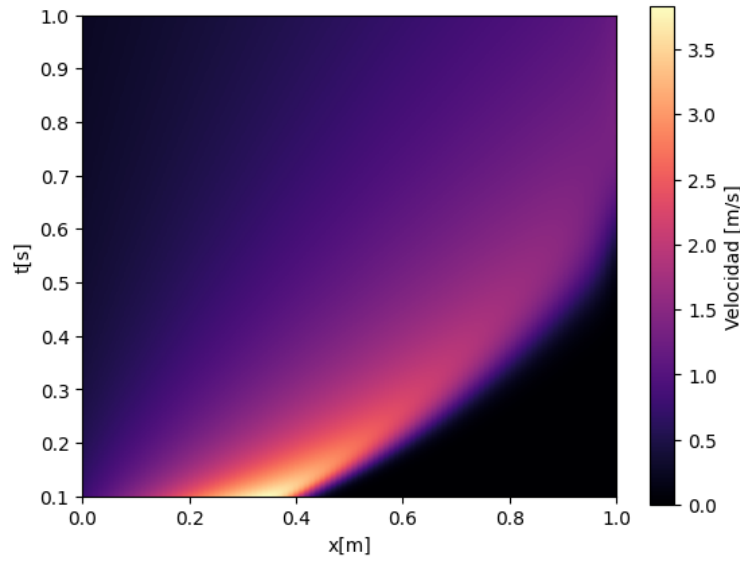


Figura 9: Solución numérica para $\nu = 0.04$ y condición inicial dada por ec. (10)

Se trabajó con una malla de $\Delta x = 0.01$ y $\Delta t = 0.001$, para un número de Fourier de $F = 0.4$

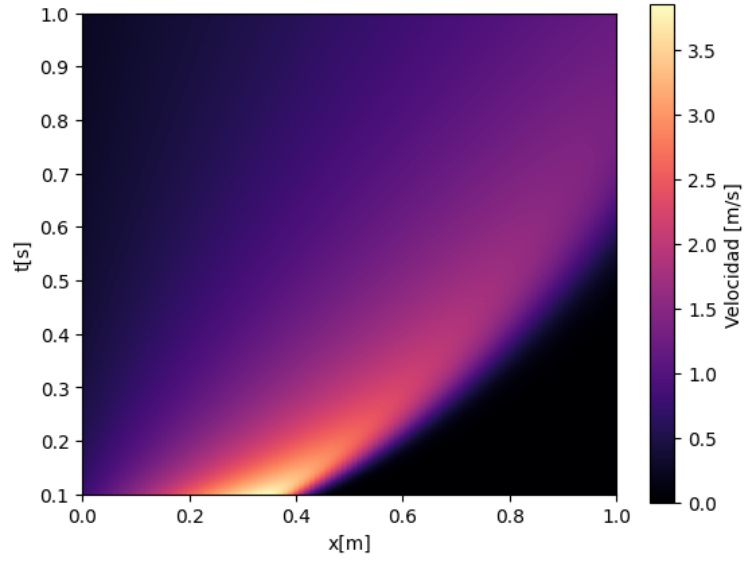


Figura 10: Solución analítica para $\nu = 0.04$

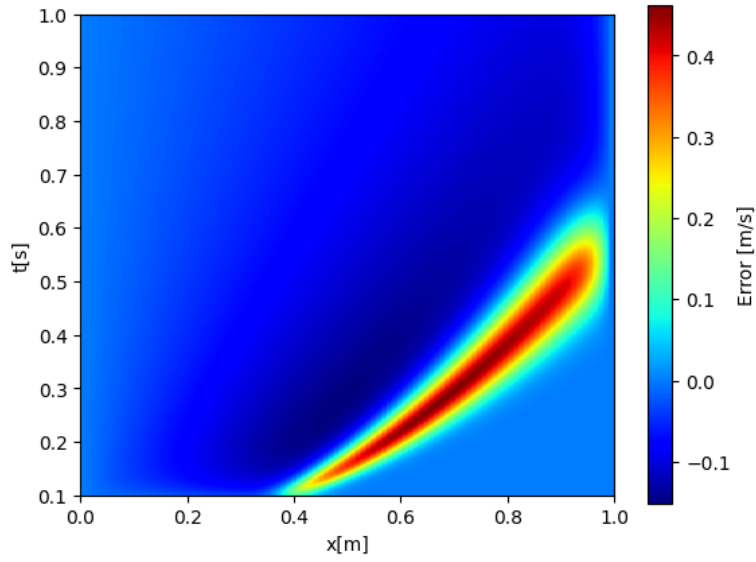


Figura 11: Evolución del error local a lo largo del dominio espacial y temporal para $\nu = 0.04$

Se obtuvo un error global promedio de 0.09751 m/s .

2.5.4 Resultados para $\nu = 0.1$

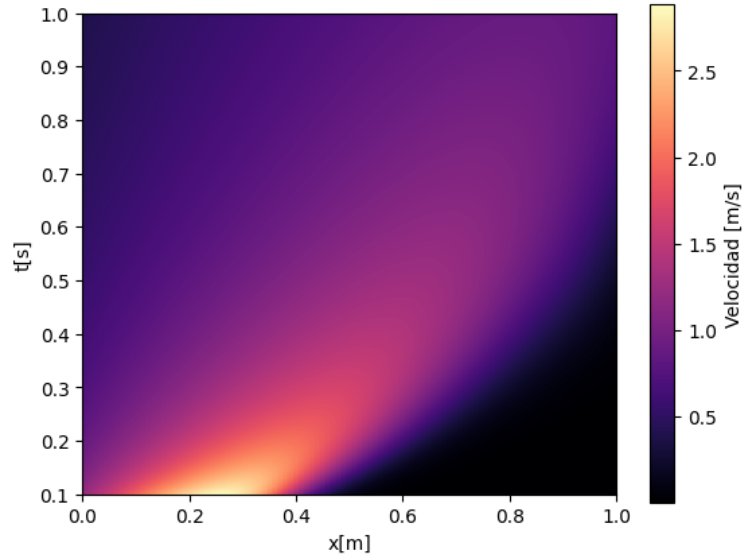


Figura 12: Solución numérica para $\nu = 0.1$ y condición inicial dada por ec. (10)

Se trabajó con una malla de $\Delta x = 0.01$ y $\Delta t = 0.0005$, para un número de Fourier de $F = 0.5$

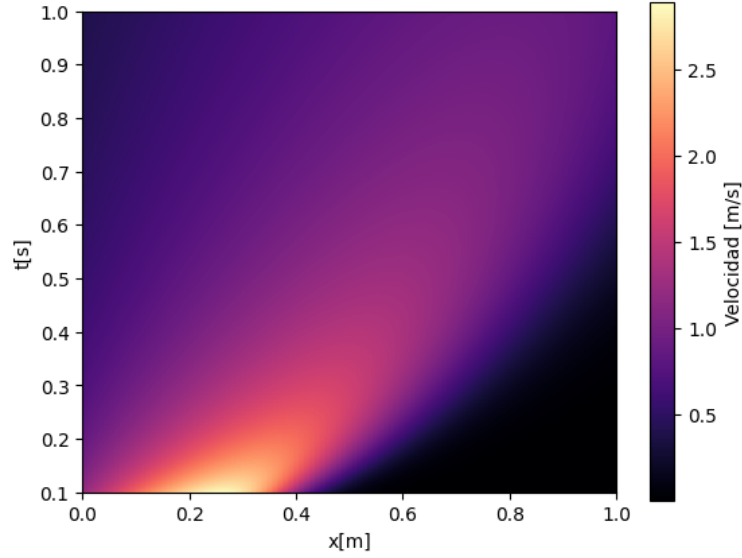


Figura 13: Solución analítica para $\nu = 0.1$

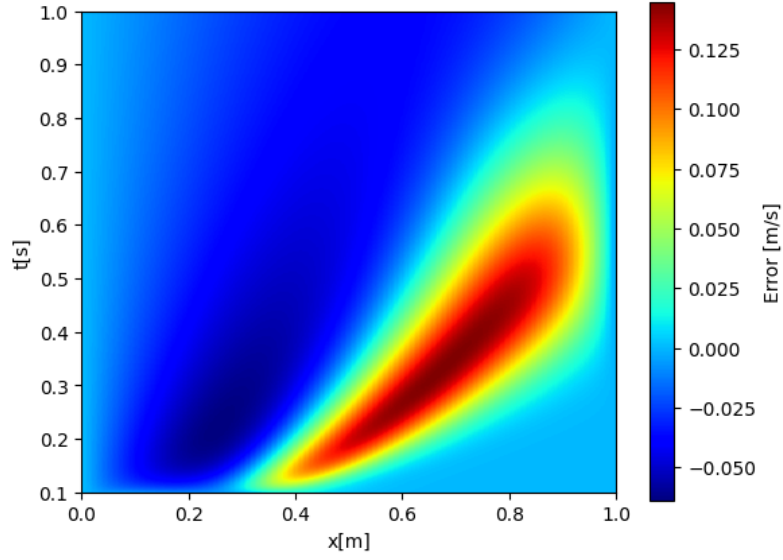
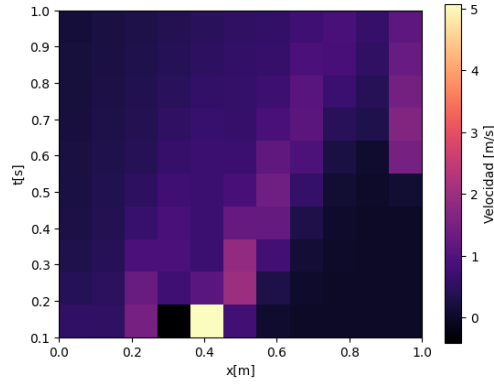


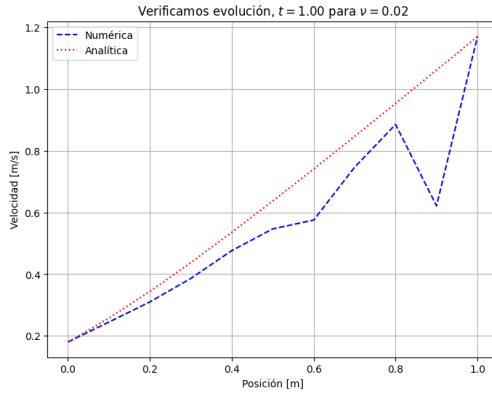
Figura 14: Evolución del error local a lo largo del dominio espacial y temporal para $\nu = 0.1$

Se obtuvo un error global promedio de 0.04512 m/s . A diferencia de los casos anteriores los errores locales son menores en magnitud, sin embargo, están difundidos en una mayor área.

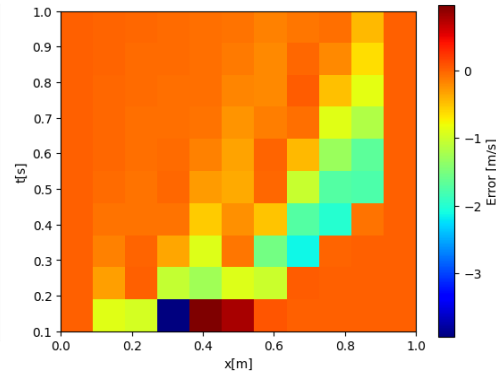
2.5.5 Refinamiento de malla



(a) Superficie Solución



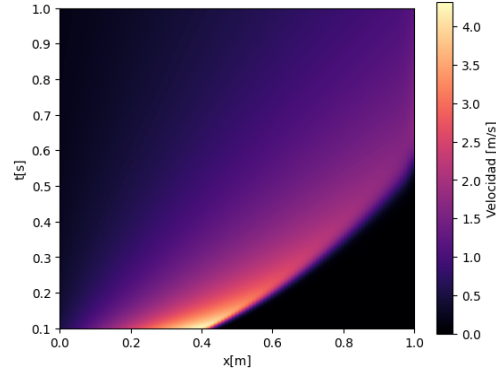
(b) Evolución para $t=1$



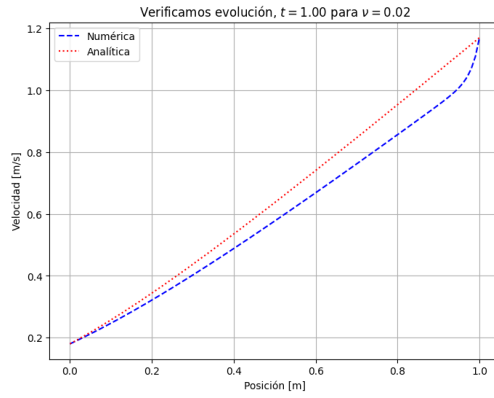
(c) Superficie de error local

Figura 15: Simulación para $dx=0.1$ y $dt=0.1$

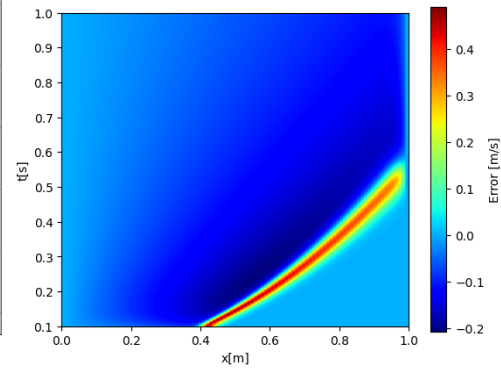
A pesar de que esta opción no viola la condición de estabilidad dada por el número de Fourier, se observa cierta inestabilidad cerca del final del dominio espacial. Además, se observan regiones muy grandes con errores grandes, esto debido a los diferenciales seleccionados.



(a) Superficie Solución



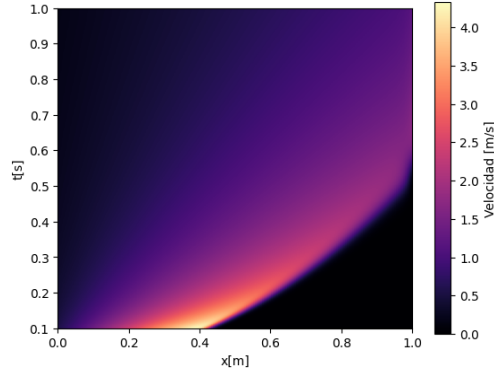
(b) Evolución para $t=1$



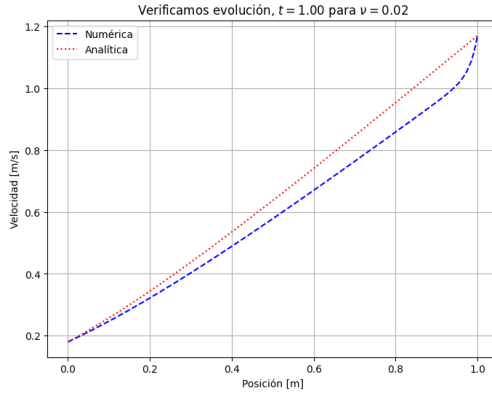
(c) Superficie de error local

Figura 16: Simulación para $dx=0.01$ y $dt=0.002$

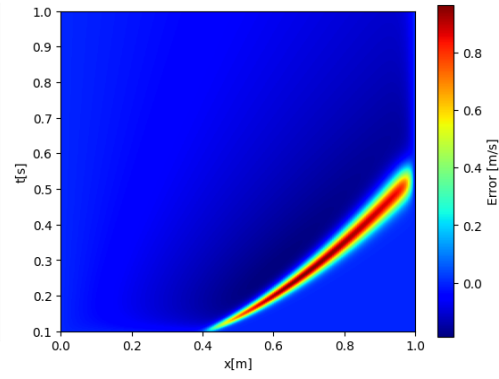
Esta fue la opción seleccionada tanto por resultados como por eficiencia en términos de recursos computacionales.



(a) Superficie Solución



(b) Evolución para $t=1$



(c) Superficie de error local

Figura 17: Simulación para $dx=0.005$ y $dt=0.0006$

Con esta opción se logra un resultado relativamente bueno, ya que concentra de mejor forma el error a comparación a la opción anterior, no obstante, el costo computacional es demasiado alto para no conseguir mejores resultados. De esto último se habla a continuación (ver figura 18).

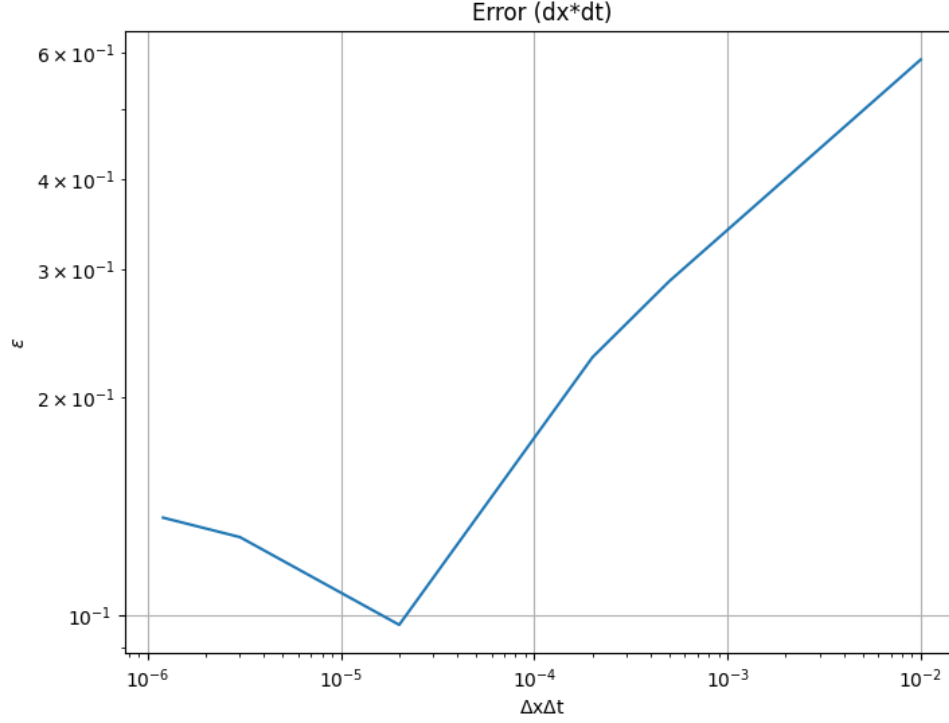


Figura 18: Error debido a las 2 variables independientes, en escala logarítmica

Se observa que al tener una combinación de Δx y Δt , donde su multiplicación se cada vez más pequeña, el error tiende a disminuir. Sin embargo, llega un punto donde se deja de seguir esta tendencia y vuelve a incrementarse, se presume que se entra en la zona de error por redondeo. Únicamente se expuso para $\nu = 0.02$, no obstante, para los otros valores de ν se identificó el mismo comportamiento del error, claro esta que para valores distintos de Δx y Δt , debido a la condición del número de Fourier (ver ec.(8)).

Δx	Δt	Error Global Promedio
0.1	0.1	0.58577
0.05	0.01	0.28928
0.02	0.01	0.22699
0.01	0.002	0.09687
0.005	0.006	0.12806
0.004	0.0003	0.13625

Tabla 3: Valores diferenciales ensayados

2.6 Conclusiones

El uso del delta de Dirac como condición inicial del problema no genera una buena solución numérica, puesto que se induce un retraso, como se observa a continuación.

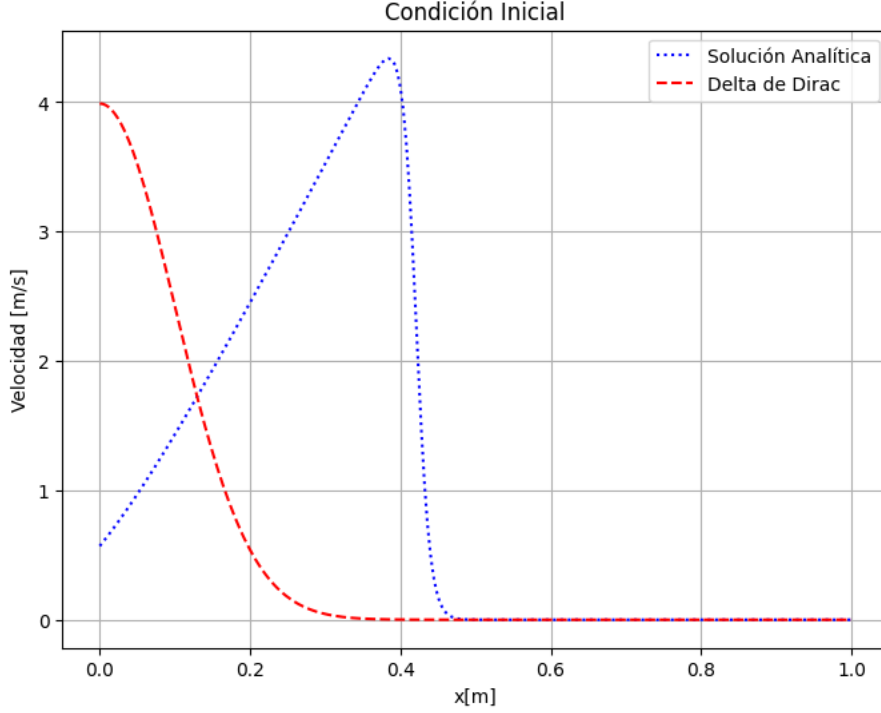


Figura 19: Comparación condiciones iniciales

Se intentó adelantar el delta de Dirac, desplazándolo 0.4 m hacia la derecha, de tal forma que el pico de las ondas coincidieran, aunque, se generaban errores por el frente de onda avanzando del delta de Dirac. Fue por ello, que como se dijo, se decidió usar como condiciones iniciales los valores de la solución analítica.

Allí también se habló de usar un esquema de aguas arriba de segundo orden, para la discretización de la derivada de primer orden de la ecuación, para intentar reducir en gran medida el retraso de la solución numérica. Aun así, no se llevó a cabo la implementación, debido a problemas en la programación del método y porque no se conoció si tendría problemas de estabilidad con los deltas seleccionados mediante el número de Fourier. Por otra parte, se pudo esperar un buen resultado usando este método numérico, gracias al método de Crank-Nicolson, el cual es bastante rígido en temas de estabilidad.

La simulación se llevó a cabo de forma satisfactoria, logrando resultados que coinciden con el comportamiento de la ecuación de Burgers. El tema de mayor discusión es el de errores, donde para las tres simulaciones se obtienen errores globales del orden de 10^{-2} , por otra parte, se obtienen errores locales de un orden mayor (10^{-1}), lo que no es muy conveniente.

Por último, como se habló en la sección de refinamiento de malla (2.5.5), los errores se redujeron a medida que se reducían los diferenciales, hasta cierto punto (como se menciona allí también), que es donde empieza aquella zona donde predomina el error por redondeo.

3 Caso 2: Ecuación de difusión-convección transitoria 1D.

3.1 Modelo matemático

El modelo matemático ya está dado y este es a partir de la ecuación de conservación de masa(12) y la ecuación de Navier-Stokes (4).

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

No obstante, para la combinación de las dos ecuaciones antes mencionadas, se deben tener en cuenta las siguientes suposiciones en el problema: fluido incompresible, flujo unidimensional, viscosidad constante y mantener el sistema en términos de difusión.

3.2 Clasificación de variables

Tipo de variable	Variables
Dependiente	Velocidad (u) Escalar (ϕ)
Independiente	Tiempo (t) Posición (x)
Parámetro	Constante de difusión (Γ)
Despreciable	Presión (P)

Tabla 4: Clasificación de variables Caso 2

3.3 Análisis dimensional y adimensionalización

Al partir de la ecuación (2), se hace un análisis dimensional de los coeficientes presentados:

Variable	Dimensiones
u	MT^{-1}
t	T
ρ	ML^{-3}
Γ	$ML^{-1}T^{-1}$
x	L

Tabla 5: Descripción dimensional para las variables del caso 2.

3.3.1 Congruencia dimensional

Trayendo la ecuación (2):

$$\begin{aligned} [ML^{-3}][\frac{1}{T}] + [ML^{-3}][\frac{LT^{-1}}{L}] &= [X][\frac{1}{L^2}] \\ [\frac{M}{L^3T}] + [\frac{M}{L^3T}] &= [X][\frac{1}{L^2}] \end{aligned}$$

De forma tal, para que exista una congruencia dimensional, Γ debe tener las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} [X][\frac{1}{L^2}] &= [\frac{M}{L^3T}] \\ [X] &= [\frac{M}{LT}] \end{aligned}$$

3.3.2 Adimensionalización

Para la ecuación (2), se toman: $\phi^* = \frac{\phi}{\phi_c}$; $u^* = \frac{u}{u_c}$; $t^* = \frac{t}{t_c}$; $x^* = \frac{x}{L}$, los cuales representan las variables adimensionales de los coeficientes presentados en dicha ecuación. Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$\rho \frac{\partial \phi_c}{t_c} \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial x} u \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \phi_c}{\partial L} \right) \quad (13)$$

Reemplazando con las variables adimensionales dentro del segundo paréntesis:

$$\rho \frac{\partial \phi_c}{t_c} \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \rho \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{u_c}{L} \phi^* \phi_c + \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \frac{\phi_c}{L} u^* u_c \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \phi_c}{\partial L} \right) \quad (14)$$

Es conocido que coeficientes como ϕ_c , u_c y L son cantidades constantes, por lo tanto salen de las derivadas parciales. Entendiendo lo anterior, se multiplican todo los términos por $\frac{1}{\phi_c}$ y se simplifica:

$$\frac{\rho}{t_c} \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \rho \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{u_c \phi^*}{L} + \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \frac{u^* u_c}{L} \right) = \frac{\Gamma}{L^2 \rho} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^{*2}} \quad (15)$$

Despejando $\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*}$ y simplificando la ecuación adimensional:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} = \frac{t_c \Gamma}{L^2 \rho} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{u_c \phi^* t_c}{L} - \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \frac{u^* u_c t_c}{L} \quad (16)$$

3.4 Solución Numérica

Para la solución numérica del caso, se desea aplicar dos formas de discretización. La primera, usando diferencias finitas centralizadas (DF-CDS); por otro lado tenemos un esquema de solución numérica por diferencias finitas "Upwind" (DF-UDS).

Para el esquema centralizado se deben realizar las aproximaciones de las derivadas parciales con respecto al tiempo (t), a "x" y de las segunda derivada con respecto a "x".

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n)}{2\Delta x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (19)$$

Teniendo las derivadas parciales, se procede a sustituirlas y reordenarlas dentro de la ecuación origen:

$$\frac{\rho}{\Delta t} (\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = \frac{\Gamma}{\Delta x^2} (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) - \frac{\rho u_i}{2\Delta x} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) \quad (20)$$

Utilizaremos el sistema de discretizacion espacial centrado para derivadas de segundo orden

$$\text{CFD: } \frac{d^2 u}{dx^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \quad (21)$$

Para la derivada de primer orden usaremos:

$$\text{CFD: } \frac{du}{dx} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (22)$$

y para la derivada temporal usaremos sistema explicito o Euler hacia adelante:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \phi_i^n(t, x, u) \quad (23)$$

Utilizaremos el sistema de discretizacion en nuestra EDP:

$$\alpha_0 \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \alpha_1 \frac{u_{i+1} \cdot \phi_{i+1}^n - u_{i-1} \cdot \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha_2 \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (24)$$

Y despejamos lo que conocemos de lo que no conocemos

$$\phi_i^{n+1} = \frac{\alpha_2 \Delta t}{\alpha_0 \Delta x^2} (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) - \frac{\alpha_1 \Delta t}{2\alpha_0 \Delta x} (u_{i+1} \cdot \phi_{i+1}^n - u_{i-1} \cdot \phi_{i-1}^n) + \phi_i^n \quad (25)$$

Los términos discretizados:

$$\phi_i^{n+1} = \beta_0 (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) - \beta_1 (u_{i+1} \cdot \phi_{i+1}^n - u_{i-1} \cdot \phi_{i-1}^n) + \phi_i^n \quad (26)$$

Coeficientes:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$$

Coeficientes de la ecuacion discretizada:

$$\frac{\alpha_2 \Delta t}{\alpha_0 \Delta x^2} = \beta_0, \quad \frac{\alpha_1 \Delta t}{2\alpha_0 \Delta x} = \beta_1 \quad (27)$$

Utilizaremos el sistema de discretización en nuestra EDP:

$$\alpha_0 \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \alpha_1 \frac{u_i \cdot \phi_i^n - u_{i-1} \cdot \phi_{i-1}^n}{\Delta x} = \alpha_2 \frac{\phi_i^n - 2\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n}{\Delta x^2} \quad (28)$$

Despejamos lo desconocido de lo conocido:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\alpha_1 \Delta t}{\alpha_0} (u_i \cdot \phi_i^n - u_{i-1} \cdot \phi_{i-1}^n) + \frac{\alpha_2 \Delta t}{\alpha_0} (\phi_i^n - 2\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n) \quad (29)$$

Los términos discretizados

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \beta_0 (u_i \cdot \phi_i^n - u_{i-1} \cdot \phi_{i-1}^n) + \beta_1 (\phi_i^n - 2\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n) \quad (30)$$

Coefficientes:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$$

Coefficientes de la ecuación discretizada:

$$\frac{\alpha_1 \Delta t}{\alpha_0} = \beta_0, \quad \frac{\alpha_2 \Delta t}{\alpha_0} = \beta_1 \quad (31)$$

3.5 Análisis de resultados

En pro de generar resultados congruentes y exactos, se recurrió a la solución de la ecuación de difusión tanto en su forma normal, como en la forma adimensional. Esto debido a que, computacional y matemáticamente hablando, la discretización de la ecuación dimensional es menos compleja, lo cual da paso a tener resultados de referencia para la discretización adimensional.

3.5.1 Discretización de la ecuación sin adimensionalizar

Para este análisis específico, se discretizó la ecuación (2) sin adimensionalizarla. Se realizó la solución para DF-CDS y DF-UDS:

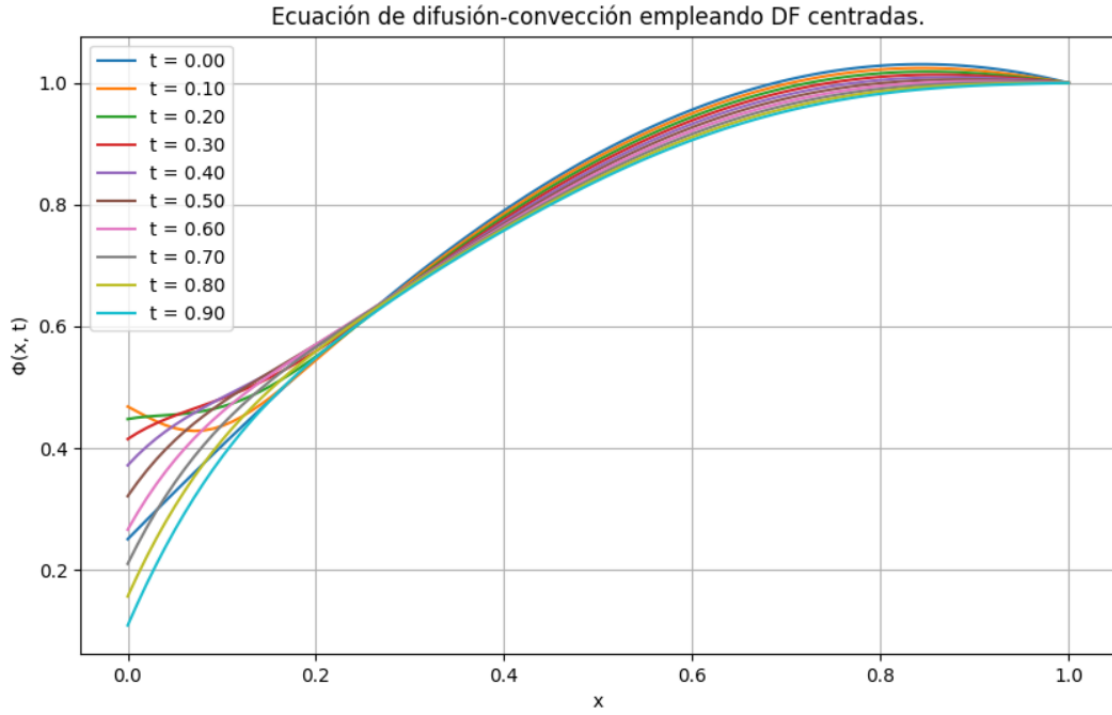


Figura 20: Resultados del análisis de la ecuación sin adimensionalizar por CDS.

Para esta solución, se trabajaron con los valores de $\phi = 0.25$, $\omega = 2.5$ y 10 pasos temporales.

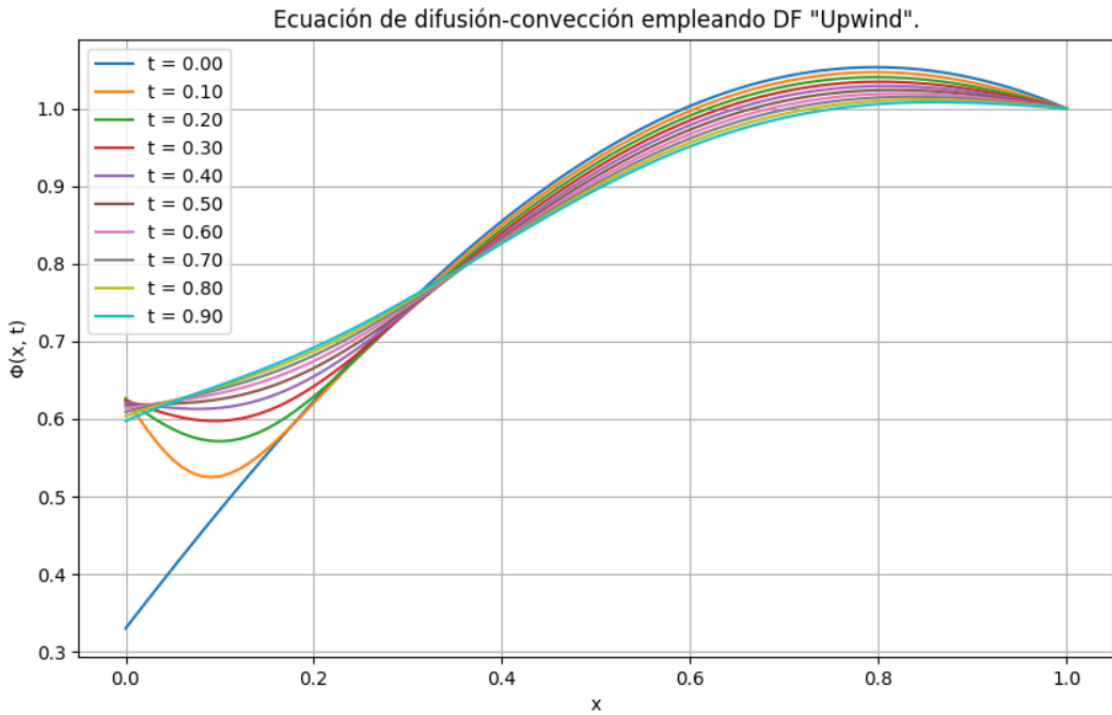


Figura 21: Resultados de la ecuación sin adimensionalizar por UDS.

En esta solución presentada se trabajan con $\phi = 0.33$, $\omega = 2.5$ y 10 pasos temporales.

3.5.2 Discretización de la ecuación adimensionalizada

Utilizando las soluciones con DF-CDS y DF-UDS, a partir de la ecuación adimensional, tenemos:

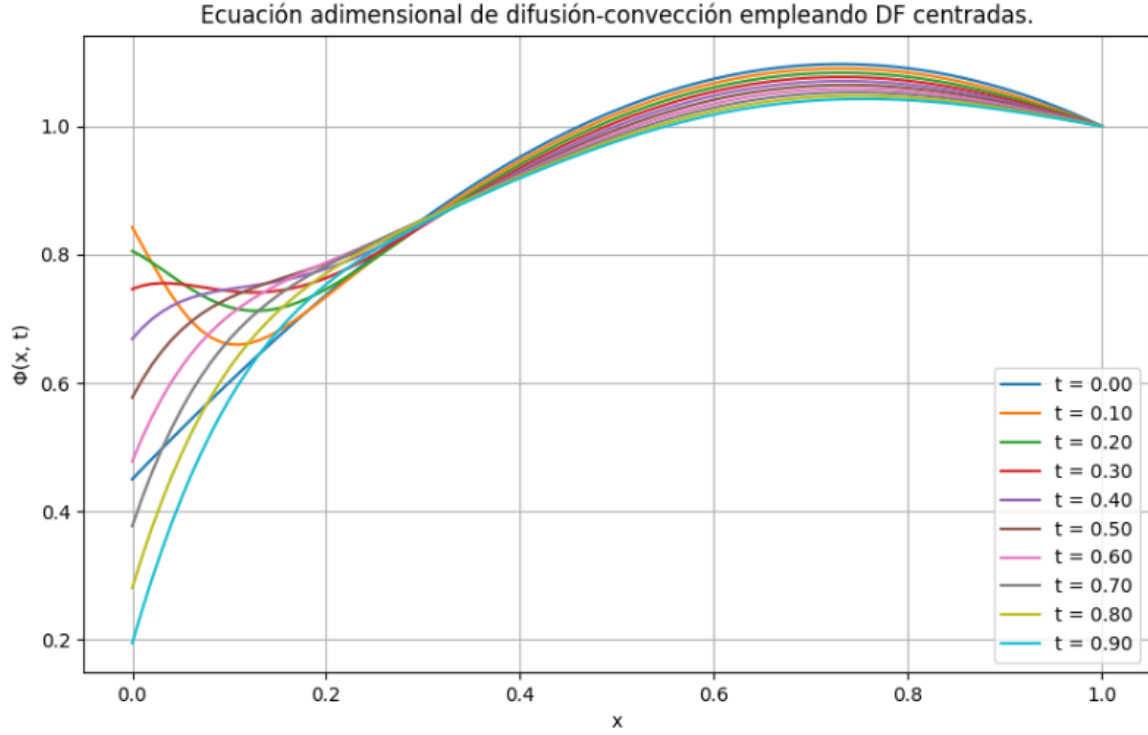


Figura 22: Resultados del análisis de la ecuación adimensionalizada por CDS.

La solución emplea los parámetros $\phi = 0.45$, $\omega = 2.5$ y 10 pasos temporales.

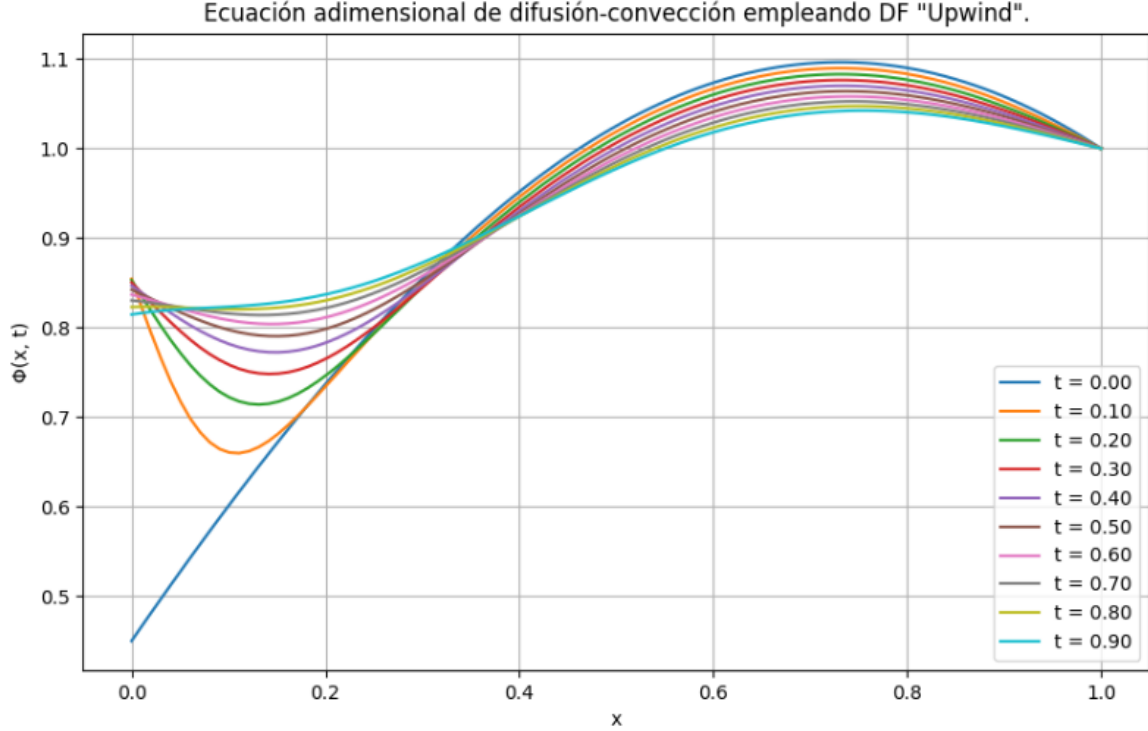


Figura 23: Resultados del análisis de la ecuación adimensionalizada por UDS.

Los valores usados para esta solución fueron: $\phi = 0.45$, $\omega = 0.5$ y 10 pasos temporales.

3.6 Conclusiones

Inicializando el modelo computacional para hallar las soluciones del sistema (las soluciones requeridas), quedaron en evidencias varias características primordiales que debía tener el código; tales como un enmallado bien definido y organizado, condiciones iniciales definidas y discretizaciones bien realizadas e implementadas (siendo esto, probablemente lo más importante).

La acción de aplicar el modelo computacional a la ecuación tanto sin adimensionalizar, como adimensionalizada, crea un punto de partida importante para llegar a la solución. Puesto que, además que estas mismas deben ser congruentes, encontrar los esquemas de diferencias finitas (tanto CDS como UDS) en una ecuación dimensional, es considerablemente menos complejo que en una adimensional (como se mencionó más arriba en el análisis de resultados). Creando acercamiento necesario para llegar a la solución del caso contrario (adimensionalización). Por otra parte, al ser un método completamente explícito se esperarían problemas de estabilidad, sin embargo, con los diferenciales usados no se presentaron tales problemas.

Otro punto que quedó en evidencia fue que, si se hubiese implementado un esquema "Upwind" de segundo orden de error, el sistema tendría que haber sido más exacto que uno de primer orden de error; se llega a la conclusión puesto que al ser de segundo orden, el error propagado sería más pequeño.

4 References

- [1] J.H. Ferziger, M. (2001). Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer Berlin Heidelberg. Salsa, S. (2016). Partial differential equations in action: from modelling to theory (Vol. 99). Springer.
- [2] Exact Solutions, Nonlinear Partial Differential Equations, Second-Order Parabolic Partial Differential Equations, Burgers Equation. (s.f.). EqWorld. <https://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/npde/npde1301.pdf>.
- [3] Granero, R. G. B., & Moreno, J. M. M. V. (2011, 31 mayo). La ecuación de Burgers como un paso previo al estudio de los fluidos incompresibles. arxiv.org. <https://arxiv.org/pdf/1105.5990.pdf>.
- [4] Esteban, S., Aramayo, A. M., & Cardón, L. (2001). Implementación de un módulo para el cálculo de convección-difusión de múltiples escalares. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/79878>.
- [5] De Grado, S. C. M. S. (2011). Análisis matemático y numérico de algunos modelos de dinámica de población con difusión no lineal. <http://repositorio.udec.cl/jspui/handle/11594/1037>.
- [6] Lara Romero, L. L. R., Chávez Aliaga, Z. C. A., & Castañeda Vergara, J. C. V. (2019). *EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS* (1.a ed.). UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO.
- [7] Ossa, Alexandra & Zapata, Verónica & Botero-Jaramillo, Eduardo. (2015). METODOLOGÍA PARA RESOLVER POR DIFERENCIAS FINITAS NUEVOS MODELOS CONSTITUTIVOS EN EL PROGRAMA FLAC3D.
- [8] Crank, J.; Nicolson, P. (1947). A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type. Proc. Camb. Phil. Soc. 43 (1): 50-67.
- [9] Quinga, Santiago (2021). Ecuación de Burgers viscosa, solución numérica mediante diferencias finitas y un método iterativo para sistemas no lineales de orden 4 basado en el Número Áureo. Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, S/N y Ambato, Av. Gral. Rumiñahui