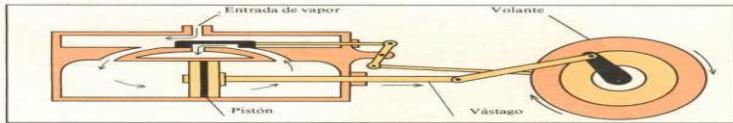


CAPÍTULO 16 DERIVADAS TRIGONOMETRICAS

Máquina de vapor

La máquina de vapor utiliza la energía térmica para realizar trabajo. Se hierve agua, con el fin de convertirla en vapor. Por mediación de un colector, el vapor acciona arriba y abajo una o varias piezas de metal, llamadas pistones o émbolos. Los pistones están unidos a unas varillas articuladas llamadas vástago, que se mueven al mismo ritmo que los pistones. El movimiento que se genera puede emplearse para hacer marchar un tren, o un generador eléctrico.

Ver también: Newcomen, Thomas; Savery, Thomas; Watt, James.



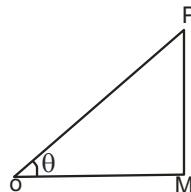
Máquina de vapor de Watt en una mina inglesa del siglo XVIII.

La Trigonometría es la ciencia que estudia las relaciones que ligan los lados y los ángulos de un triángulo y aplica dichas relaciones a obtener los elementos desconocidos de dicho triángulo.

En la antigüedad antes del año 100 a. C. los griegos inventaron la trigonometría para resolver problemas de astronomía, navegación y geografía. La palabra Trigonometría viene del griego y significa "medida de triángulo".

Funciones Trigonométricas

Las diferentes razones entre los lados de un triángulo rectángulo constituyen las funciones trigonométricas y se definen como sigue:



$\frac{MP}{OP}$ = seno del ángulo POM, puede escribirse como seno del ángulo θ igual a cateto opuesto sobre hipotenusa

$$\sin \theta = \frac{op}{hip}$$

$\frac{OM}{OP}$ = coseno del ángulo POM, puede escribirse como seno del ángulo θ igual a cateto adyacente sobre hipotenusa $\cos \theta = \frac{ca}{hip}$

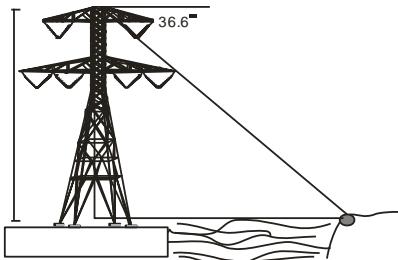
$\frac{MP}{OM}$ = tangente del ángulo POM, puede escribirse como tangente del ángulo θ igual a cateto opuesto sobre cateto adyacente $\tan \theta = \frac{op}{ca}$

$\frac{OM}{MP}$ = cotangente del ángulo POM, puede escribirse como cotangente del ángulo θ igual a cateto adyacente sobre cateto opuesto $\cot \theta = \frac{ca}{op}$

$\frac{OP}{OM}$ = secante del ángulo POM, puede escribirse como secante del ángulo θ igual a hipotenusa sobre cateto adyacente $\sec \theta = \frac{hip}{ca}$

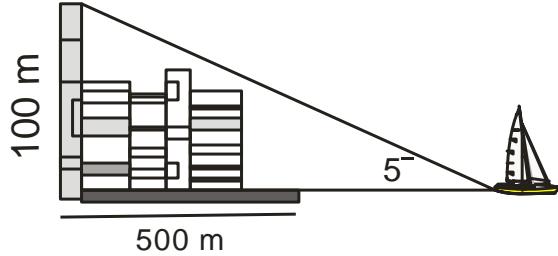
$\frac{OP}{MP}$ = cosecante del ángulo POM, puede escribirse como cosecante del ángulo θ igual a hipotenusa sobre cateto opuesto $\csc \theta = \frac{hip}{op}$

Ahora veamos algunas aplicaciones. Una torre de 135 pies de altura está situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre, el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es de 36.3° . ¿Cuál es la anchura del lago?



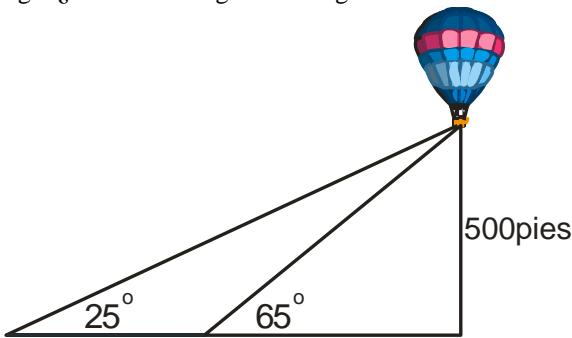
Apliquemos la tangente : $\tan 36.3^\circ = \frac{co}{ca} = \frac{135}{x}$, despejando x, tenemos
 $x = \frac{135}{\tan 36.6^\circ} = 178.7 \text{ pies}$

Ejercicio: ¿A que distancia de la costa se encuentra el bote?

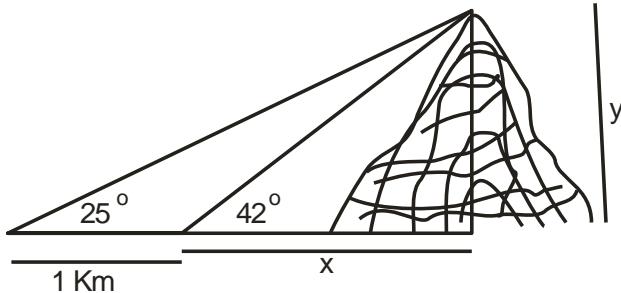


Ejercicio: Desde un globo estacionario de aire caliente, situado a 500 pies sobre el suelo, se tienen dos observaciones de un lago. ¿Cuál es la longitud del lago?

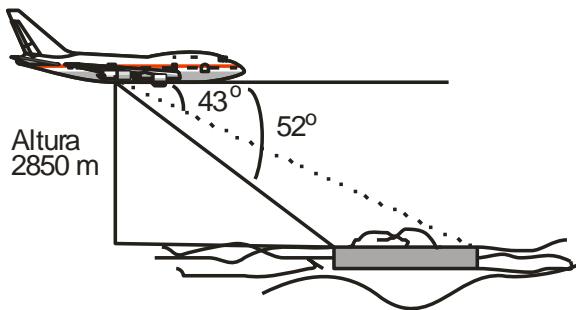
Resp: 39.1 pies



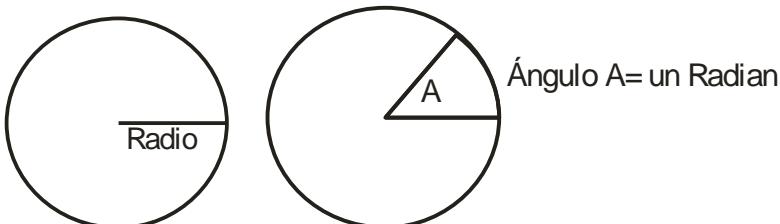
Ejercicio: Utilice la información de la figura para la altura de la montaña.



Ejercicio: Utilice la información de la figura y calcule la extensión x de la isla.



RADIANES. El radian es el ángulo que intercepta un arco igual al radio en longitud.



Tenemos la siguiente fórmula que relaciona los radianes y los grados

$$\frac{\text{Ángulo A en radianes}}{2\pi} = \frac{\text{Ángulo A en grados}}{360}$$

Por ejemplo transformar 30° a radianes

$$\text{Tenemos } 30^\circ = 30^\circ \left(\frac{2\pi \text{ radianes}}{360^\circ} \right) = \frac{2\pi \text{ radianes}}{12} = \frac{\pi \text{ radianes}}{6} = \frac{\pi}{6}$$

Transforma: $12^\circ, 18^\circ, 120^\circ, 90^\circ, 330^\circ, 710^\circ$ a radianes

De ahora en adelante trabajaremos con radianes.

Derivadas de las funciones trigonométricas

La derivada de la función $y=\operatorname{sen}x$

Primer paso: valor final

$$y_f = f(x + \Delta x) = \operatorname{sen}(x + \Delta x)$$

Segundo paso: incremento de la función $\Delta y = y_f - y_i = f(x + \Delta x) - f(x) = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen}(x)$

$$\text{Aplicaremos la identidad trigonométrica } \operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Tenemos } \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen}x = 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\text{Es decir } \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen}x = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}$$

$$\text{Tercer paso: cociente: } \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ tenemos: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\text{Cuarto paso: Aplicar el límite } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\text{Como } y = \cos x \text{ es una función continua tenemos } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) = \cos x$$

Para hallar $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$ hacemos la sustitución $\frac{\Delta x}{2} = z$, entonces $\Delta x = 2z$, y tenemos, $z \rightarrow 0$ si $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Así tenemos la derivada: $\frac{d \sin x}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos x \frac{1}{2} = \cos x$

En general tenemos:

$$\frac{d \sin u}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

La derivada de la función $y=\cos x$

Para esto podemos tomar $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

Así $\frac{d \cos x}{dx} = \frac{d \sin(\frac{\pi}{2} - x)}{dx} = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \frac{d(\frac{\pi}{2} - x)}{dx} = \cos(\frac{\pi}{2} - x)(-1) = -\sin x$

Pues tenemos:

$$\frac{d(\frac{\pi}{2} - x)}{dx} = -1, \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

Así: $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$

En general tenemos:

$$\frac{d \cos u}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$$

Ejercicio: calcula la derivada de $y = \frac{\sin x}{\cos x}$, utiliza la derivada del cociente

DERIVADAS TRIGONOMETRICAS

Continuando con las reglas para derivar funciones trigonométricas directas, en la siguiente tabla se muestran.

1. $\frac{d(\operatorname{sen}u)}{dx} = \cos u * \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d(\cos u)}{dx} = -\operatorname{sen}u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d(\cot u)}{dx} = -\csc^2 u * \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d(\sec u)}{dx} = \sec u * \tan u * \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d(\csc u)}{dx} = -\csc u * \cot u * \frac{du}{dx}$

Ejemplos de derivadas trigonométricas :1) Obtenga la derivada de la función: $y = 7\operatorname{sen}6x$

Solución: $\frac{dy}{dx} = 7 \frac{d\operatorname{sen}6x}{dx} = 7 \cos 6x \frac{d6x}{dx} = 7 \cos 6x(6) = 42 \cos 6x$

Aplicamos las fórmulas :

$$\begin{aligned}\frac{d c f}{dx} &= c \frac{df}{dx} \\ \frac{d \operatorname{sen} u}{dx} &= \cos u \frac{du}{dx}\end{aligned}$$

2) Obtenga la derivada de la función: $y = 8\operatorname{sen}2x + 5\cos 3x$ **Solución:**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 8 \frac{d\operatorname{sen}2x}{dx} + 5 \frac{d\cos 3x}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= 7 \cos 2x \frac{d2x}{dx} + 5(-\operatorname{sen}3x) \frac{d3x}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= 7 \cos 2x(2) + 5(-\operatorname{sen}3x)(3) \\ \frac{dy}{dx} &= 14 \cos 2x - 15 \operatorname{sen}3x\end{aligned}$$

Aplicamos las fórmulas :

$$\begin{aligned}\frac{d(f+g)}{dx} &= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \\ \frac{d c f}{dx} &= c \frac{df}{dx} \\ \frac{d \operatorname{sen} u}{dx} &= \cos u \frac{du}{dx} \\ \frac{d \cos u}{dx} &= -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}\end{aligned}$$

3) Hallar la derivada de la función: $y = \cos 10x^4 + 7$

Solución: $\frac{dy}{dx} = \frac{d \cos 10x^4}{dx} + \frac{d7}{dx}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\operatorname{sen}10x^4 \frac{d10x^4}{dx} + 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{sen}10x^4 \left(10 \frac{dx^4}{dx}\right) = -\operatorname{sen}10x^4(40x^3) \\ \frac{dy}{dx} &= -40x^3 \operatorname{sen}10x^4\end{aligned}$$

Aplicamos las fórmulas:

$$\begin{aligned}\frac{d(f+g)}{dx} &= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \\ \frac{d \cos u}{dx} &= -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx} \\ \frac{dC}{dx} &= 0 \\ \frac{dv^n}{dx} &= nv^{n-1} \frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

4) Hallar la derivada de la función: $y = 3\sin(x^2 - 8x + 5)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d3\sin(x^2 - 8x + 5)}{dx} = 3\cos(x^2 - 8x + 5) \frac{d(x^2 - 8x + 5)}{dx}$$

Solución: $\frac{dy}{dx} = 3\cos(9x^2 - 8x + 5)(2x - 8)$

$$\frac{dy}{dx} = 6(x - 4)\cos(9x^2 - 8x + 5)$$

Ejercicio

Obtenga la derivada de la función:

a) $y = 11\sin 3x$

b) $y = 9\sin(4x - 1)$

c) $y = \sin x^2$

d) $y = 10\sin 6x^3$

e) $y = 23\cos 16x$

f) $y = 9\cos(4x - 1)$

g) $y = \sin 18x + 4\sin 17x + 9\cos 12x$

h) $y = 3\sin(\frac{x}{2})$

i) $y = 8\sin(\frac{7x}{4}) - 5\cos(\frac{2x}{5})$

j) $y = 7\sin(x - 1) + 6\cos(1 - 4x)$

k) $y = 15\cos 3x^4 - \cos(8x + 5) + 2\sin 7x + 9$

l) $y = 3\sec 2x + 5\sec 7x - 11\sec 2x$

m) $y = 9 \sec(8x-1) - \tan(3x+1) - \tan(x-4)$

n) $y = \tan 8x^4$

ñ) $w = 3\tan 4z^6 + 6\tan 3z^2 + 4 \tan 7x^5$

o) $y = \cot 3x - \cot 7x - 9 \cot x$

p) $v = \csc(4x-8)$

q) $v = \csc(1-z) + 7 \csc(1-5z)$

r) $y = x \sin 2x$

s) $y = 3x \cos 11x$

t) $y = 5x^3 \sin 7x$

u) $s = 2x \tan(3-4x)$

v) $y = \frac{\sin x}{x}$

w) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

a) $y = x \operatorname{sen}(3x) - 3x + 5$

b) $y = 4x \cos(8x - 1)$

c) $y = x \tan(3x)$

d) $y = 9x^2 \tan(2x)$

Otros ejemplos de derivadas trigonométricas:

1) Obtenga la derivada de la función: $y = \operatorname{sen}^2 7x$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 2(\operatorname{sen}7x)^{2-1} \frac{d\operatorname{sen}7x}{dx} = 2(\operatorname{sen}7x)^1 \cos 7x \frac{d7x}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(\operatorname{sen}7x)^1 \cos 7x (7) = 14 \operatorname{sen}7x \cos 7x$$

Aplicamos las fórmulas:

$$\frac{d v^n}{dx} = n v^{n-1} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d \operatorname{sen} u}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

2) Obtenga la derivada de la función: $y = \tan^4 8x$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 4(\operatorname{Tan}8x)^{4-1} \frac{dTan8x}{dx} = 4(\operatorname{Tan}8x)^3 \sec^2 8x \frac{d8x}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 32 \operatorname{Tan}^3 8x \sec^2 8x$$

Aplicamos las fórmulas:

$$\frac{d v^n}{dx} = n v^{n-1} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dTan u}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

3) Obtenga la derivada de la función: $y = \sqrt{3 \sec 5x + 12}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (3 \sec 5x + 12)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d(3 \sec 5x + 12)}{dx} = \frac{1}{2} (3 \sec 5x + 12)^{-\frac{1}{2}} (15 \sec 5x \tan 5x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15 \sec 5x \tan 5x}{2 \sqrt{3 \sec 5x + 12}}$$

Ejercicio

Obtenga las siguientes derivadas:

a) $y = (3 \cos x - 5)^2$

b) $T(x) = 12(4 - \sin 7x)^2 + 5$

c) $y = 5 \tan^4 9x$

d) $y = 8 \sec^3(2x - 9)$

e) $y = (1 + \cos 2x)^5$

f) $y = \sqrt{\sin 3x - 2}$

g) $y = \sin^4 17u + \tan^3 12u$

Ejemplo: veamos un ejemplo en donde se utilice la fórmula del cociente.

Derivar: $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x - 2}$

Tenemos en su forma más simple, la fórmula de la derivada de un cociente es: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{uv' - vu'}{v^2}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x + 1}{\cos x - 2}\right)' &= \frac{(\sin x + 1)(\cos x - 2)' - (\cos x - 2)(\sin x + 1)'}{(\cos x - 2)^2} \\ &= \frac{(\sin x + 1)(-\cos x) - (\cos x - 2)(\cos x)}{(\cos x - 2)^2} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \sin x - \cos^2 x - 2 \cos x}{(\cos x - 2)^2} \\ &= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) - \sin x - 2 \cos x}{(\cos x - 2)^2}, \text{ como } \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ tenemos:} \\ y' &= \frac{-1 - \sin x - 2 \cos x}{(\cos x - 2)^2} \end{aligned}$$

Ejercicio

Obtenga las siguientes derivadas:

a) $y = \frac{\cos 5x}{\sin 5x}$

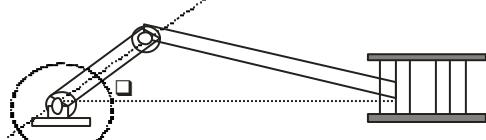
b) $y = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$

c) $y = \frac{2 + \sec 4x}{\tan x}$

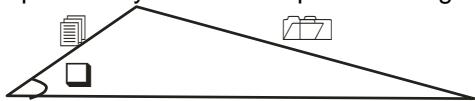
d) $y = \sqrt{2 - \tan^2 x}$

Ejercicio

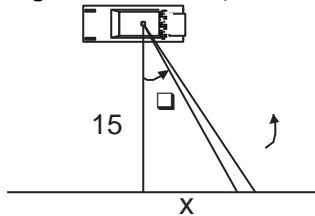
1.- **El pistón.** Un brazo de 10cm que conecta un pistón con una biela de 4cm de radio, la cual gira en sentido contrario a las manecillas del reloj a un ritmo de 200 revoluciones por minuto. Hallar la velocidad del pistón cuando $\theta = 45^\circ, \theta = 60^\circ, \theta = 70^\circ, \theta = 0^\circ$



Aplica la ley de cosenos para el triángulo



2.-La patrulla. Un coche de patrulla esta estacionada a 15m de un muro y su reflector gira a 30 revoluciones por minuto. ¿A qué velocidad en m/s se desplaza la luz sobre el muro cuando el rayo forma los siguientes ángulos? $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 70^\circ$



Máximos y Mínimos

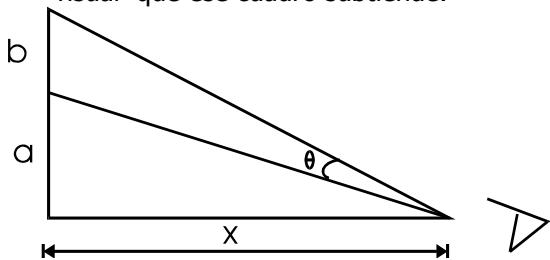
1. La altura de un proyectil lanzado con una velocidad inicial constante v_0 y de un ángulo de elevación θ_0 está dada por $y = (\tan \theta_0) x - (g / 2v_0^2 \cos^2 \theta_0)x^2$, en donde x es su desplazamiento. Demuestre que la altura máxima alcanzada por el proyectil es : $h = (v_0^2/2g)\sin^2\theta_0$.

2. La temperatura media diaria (en grados Fahrenheit) de una ciudad viene dada por

$$T = 45 - 23\cos\left(\frac{2\pi(t-32)}{365}\right)$$

Donde t se mide en días, con $t=1$ siendo el 1 de enero. Hallar la fecha esperada del día a)más caluroso, b)más frío

3. La iluminación E en cualquier punto P sobre el borde de una mesa circular, proporcionada por una lámpara colocada directamente arriba de su centro está dada por
 $E = (I \cos \theta) / r^2$. Dado que el radio de la mesa sea 1m e $I=100$, encuentre la altura a la que debe colocarse la luz para que E sea máxima.
4. La base de un cuadro sobre la pared está a a pies por encima del ojo de un observador. El lado vertical del cuadro mide b pies. A qué distancia de la pared ha de colocarse el observador para maximizar el ángulo visual que ese cuadro subtende.



5. Se desea fabricar un recipiente de forma que su sección transversal sea un trapecio isósceles con las dimensiones indicadas en la figura. Determine el valor de θ de manera que el volumen sea máximo.

