SÉRIE DE TD D'ANALYSE MATHÉMATIQUE 4

Fonctions définies par des intégrales

Exercice 1. Posons :

$$\mathscr{F}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{1-x}}.$$

(1) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de $\mathscr{F}$.

(2) Étudier la continuité de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{D}$.

(3) Calculer $\mathscr{F}(x+1) + \mathscr{F}(x)$, pour tout $x \in \mathscr{D}$.

(4) Déduire un équivalent de $\mathscr{F}$ en 0^+.

(5) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathscr{F}(x)$.

Exercice 2. Considérons les deux fonctions F et G définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

(1) Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser F' et G'.

(2) Montrer que la fonction $F + G$ est constante.

(3) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Posons :

$$\mathscr{F}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Déterminer le domaine de définition de $\mathscr{F}$.

(2) Montrer que $\mathscr{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

(3) Exprimer $\mathscr{F}'$ en fonction de $\mathscr{F}$.

☞ *Effectuer une intégration par partie.*

(4) En déduire l'expression de $\mathscr{F}$.

Exercice 4 (Fonction gamma d'Euler)**.** Considérons la fonction suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que le domaine de définition de Γ est $]0, +\infty[$.

(2) Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

(3) Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(4) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

(5) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 5 (Concours de l'année 2021-2022)**.** Considérons la fonction $\mathscr{F}$ donnée par :

$$\mathscr{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-t})e^{-tx}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

(1) Justifier que $\mathscr{F}$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

(2) Montrer que $\mathscr{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(3) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathscr{F}(x) = 0$.

(4) Calculer $\mathscr{F}'(x)$ et déduire l'expression de $\mathscr{F}(x)$ sur $]0, +\infty[$.

☞ *On pourra utiliser le fait que la fonction $t \longmapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ est bornée sur $]0, +\infty[$.*

Exercice 6 (Examen de l'année 2021-2022)**.** Soit f la fonction définie par :

$$f(t,x) = \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}, \ \forall (t,x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

Considérons la fonction $\mathscr{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\, \mathrm{d}t$.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est prolongeable par continuité en 0. En déduire le domaine de convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t,x)\, \mathrm{d}t$.

(2) Déterminer le domaine de convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,x)\, \mathrm{d}t$. En déduire que $\mathscr{F}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

(3) Justifier que $\mathscr{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis écrire $\mathscr{F}'(x)$ sous forme intégrale.

(4) Donner une expression explicite de $\mathscr{F}'(x)$ pour tout $x \geq 0$.

☞ *On pourra utiliser l'identité :*

$$\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+t^2x^2}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

(5) Déduire une expression explicite de $\mathscr{F}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☞ *Remarquer que $\mathscr{F}$ est impaire.*

(6) Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.