ÉCOLE SUPÉRIEURE EN SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATIQUE ET DU NUMÉRIQUE — 2022/2023 — 2CP

# SÉRIE DE TD D'ANALYSE MATHÉMATIQUE 4

## Transformée de Laplace

**Exercice 1.**

(1) Exprimer $\mathscr{L}(t^{n+1})$ en fonction de $\mathscr{L}(t^n)$ pour tout entier naturel $n$.

(2) En déduire l'expression de $\mathscr{L}(t^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 2.** Calculer les transformées de Laplace suivantes :

- $\mathscr{L}(t^3 + 2t + 5)$
- $\mathscr{L}(e^{at})$
- $\mathscr{L}(e^{-2t}(t^3 + 2t + 5))$
- $\mathscr{L}(\cosh(at))$
- $\mathscr{L}(\sinh(at))$
- $\mathscr{L}(\cos(at))$
- $\mathscr{L}(\sin(at))$
- $\mathscr{L}(e^t(1 - \cos(t)))$
- $\mathscr{L}(t^2 \sin(t))$
- $\mathscr{L}\left(e^{-t}\dfrac{\sin t}{t}\right)$
- $\mathscr{L}\left(e^{-2t}\dfrac{1-\cos t}{t}\right)$
- $\mathscr{L}(te^t \cos t)$.

**Exercice 3.** Calculer les originaux suivants :

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2x+1}{(x-2)(x^2+1)}\right);\ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right);\ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right);\ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{x-1}{x^2+2x+5}\right).$$

**Exercice 4.** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y''(t) - \frac{5}{2}y'(t) + y(t) = -\frac{5}{2}\sin t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

**Exercice 5.** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) - x'(t) = -\frac{3}{4}x(t) \\ y''(t) - y'(t) + x'(t) = -\frac{3}{4}y(t) \\ x(0) = y(0) = 0,\ x'(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$$

Série TD n° 04 : (1

Exercice 01 :

• Rappel :

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$F(x) = \mathcal{L}(f(t))(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx} dt$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(x))(t) = \int_0^{+\infty} F(x) e^{xt} dx$

1) On a :

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-tx} dt$$

On pose $\begin{cases} u = t^{n+1} \\ u' = (n+1)t^n \end{cases}$ et $\begin{cases} v' = e^{-tx} \\ v = -\frac{e^{-tx}}{x} \end{cases}$

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \Big[\underbrace{-\frac{t^{n+1}}{x} e^{-tx}}_{\to 0}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(n+1)t^n}{x} e^{-tx} dt$$

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \frac{n+1}{x} \int_0^{+\infty} t^n e^{-tx} dt$$

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \frac{n+1}{x} \mathcal{L}(t^n)$$

2) Pour $x = 0$,

$$\mathcal{L}(t^{n+1})(0) = \int_0^{+\infty} t^{n+1} dt = \Big[\frac{t^{n+2}}{n+2}\Big]_0^{+\infty} = +\infty$$

L'intégrale Diverge en 0 d'où $\mathcal{L}(t^n)$ n'est pas définie en 0

<u>méthode 02 :</u>

• On utilisant le théorème de la Transformée de la dérivée.

On pose $g(t) = t^{n+1}$ $\quad g'(t) = (n+1)t^n$ $\quad$ - Conditions :

$\mathcal{L}(g'(t))(x) = x\,\mathcal{L}(g(t)) + g(0)$ $\quad$ * g dérivable % t

$\mathcal{L}((n+1)t^n) = x\,\mathcal{L}(g(t)) + 0$ $\quad$ * g' continue par morceaux

$\Rightarrow \mathcal{L}(t^{n+1}) = \frac{(n+1)}{x} \mathcal{L}(t^n)$ $\quad$ $\mathcal{L}(g')(x) = x\,G(x) - G(0)$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n}{x} \mathcal{L}(t^{n-1})$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{x^n} \mathcal{L}(1) \quad \text{avec } \mathcal{L}(1)(x) = \frac{1}{x}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Exercice 02. (2

1) $\mathcal{L}(f(t))(x) = \mathcal{L}(t^3+2t+5) = \mathcal{L}(t^3) + 2\mathcal{L}(t) + 5\mathcal{L}(1)$

$= \frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x}$

Rappel :

$\mathcal{L}^{(n)}(f)(x) = (-1)^n \cdot \mathcal{L}(t^n \cdot f(t))(x)$

méthode 02.

- $\mathcal{L}(1)(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x>0$
- $\mathcal{L}(t^1 \cdot 1) = (-1)^{-1} \mathcal{L}^{(1)}(1)(x)$

$= \frac{1}{x^2} \quad \forall x>0$

$\mathcal{L}(t^2 \cdot 1)_{(x)} = (-1)^{-2} \mathcal{L}^{(2)}(1)(x)$

$= -\frac{2}{x^3} \quad \forall x>0$

- $\mathcal{L}(t^3 \cdot 1)_{(x)} = (-1)^{-3} \mathcal{L}^{(3)}(1)(x)$

$= \frac{6}{x^4} \quad \forall x>0$

2) $\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-x)t} dt$

$= \left[\frac{1}{\alpha-x} e^{(\alpha-x)t}\right]_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{x-\alpha}$

méthode 02.

$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(x) = \mathcal{L}(f(t))(x-\alpha)$

- $\mathcal{L}(e^{\alpha t} \cdot 1) = \mathcal{L}(1)(x-\alpha) = \frac{1}{x-\alpha}$

3) $\mathcal{L}(e^{-2t}(t^3+2t+5)) = \mathcal{L}(e^{-2t} t^3) + \mathcal{L}(e^{-2t} 2t) + \mathcal{L}(e^{-2t} \cdot 5)$

$= \mathcal{L}(t^3)(x+2) + \mathcal{L}(2t)(x+2) + \mathcal{L}(5)(x+2)$

$= \frac{6}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{5}{x+2}$

4) $\mathcal{L}(\cosh(\alpha t))(x) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\right)(x)$ 13

$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-x)t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(-\alpha-x)t}\,dt$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x+\alpha}\right)$

5) $\mathcal{L}(\sinh(\alpha t))(x) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\right)(x)$

$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-x)t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} -e^{-(\alpha+x)t}\,dt$

$F(t)\Big|_0^{+\infty} =$

$= \frac{-1}{2(\alpha-x)} - \frac{1}{2(\alpha+x)}$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha-x}+\frac{1}{\alpha+x}\right) = \frac{-\alpha}{\alpha^2-x^2} = \frac{\alpha}{x^2-\alpha^2}$

6) $\mathcal{L}(\cos(\alpha t))_{(x)} = \int_0^{+\infty}\left(\left(\frac{e^{i\alpha t}+e^{i\alpha t}}{2}\right)e^{-tx}\right)dt$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(i\alpha-x)t}}{i\alpha-x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(-i\alpha-x)t}}{-i\alpha-x}\right]_0^{+\infty}$

$= \frac{-1}{2(i\alpha-x)} + \frac{1}{2(-i\alpha-x)}$

$= \frac{x}{x^2+\alpha^2}$

7) $\mathcal{L}(\sin(\alpha t)) = \mathcal{L}\left(\frac{\sinh(\alpha i t)}{i}\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{-\alpha i}{\cancel{-}x^2-\alpha^2}\right) = \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$

$= \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} \quad \forall x \geq 0$

8) $\mathcal{L}(e^t(1-\cos(t))) = \mathcal{L}(e^t) - \mathcal{L}(e^t\cdot\cos(t))$

$= \mathcal{L}(e^t)_{(x)} - \mathcal{L}(\cos(t))(x-1)$

$= \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{(x-1)^2+1}$

$= \frac{1}{(x-1)(x^2-2x+2)} \quad \forall x > 0$

9) $\mathcal{L}(t^2 \sin(t))$ $\quad \forall t \geq 0 \quad f(t) = \sin(t)$ (4

- $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^{n} F^{(n)}(f(t))$

$\mathcal{L}(t^2 \sin(t)) = F^{(2)}(f(t))$

$= \left(\frac{1}{x^2+1}\right)''$

$= \left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)'$

$= \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x(2 \cdot 2x(x^2+1))}{(x^2+1)^4}$

$= \frac{-2x^4 - 2 - 4x^2 + 8x^4 + 8x^2}{(x^2+1)^4}$

$= \frac{6x^4 + 4x^2 - 2}{(x^2+1)^4} \quad \forall x > 0$

10) $\mathcal{L}\left(e^{-t}\frac{\sin(t)}{t}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)(x+1)$

On a $\lim_{x \to 0^+} \frac{g(t)}{t}$ existe et finie donc :

$\mathcal{L}\left(\frac{g(t)}{t}\right) = \int_x^{+\infty} G(x)\,dx \quad : G(g(t)) = G(x)$

$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)(x+1) = \int_{x+1}^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du = [\operatorname{arctang}(u)]_{x+1}^{+\infty}$

$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x+1) \quad \forall x > 0$

$\mathcal{L}(f^{(k)}(t))(x) = x^k \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{i=1}^{k} x^{i-1} f^{(k-i)}(0)$

11) $f(t) = e^{-2t}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right) \quad t>0$

$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\left(\frac{1-\cos(t)}{t}\right)(x+2)$

• Rappel :

si $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t}\ \exists$ alors $\int_x^{+\infty} \mathcal{L}(g(t))(u)\,du = \mathcal{L}\left(\frac{g(t)}{t}\right)(x)$

• On a $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0\ \exists$ Hopital DL

alors $\mathcal{L}\left(\frac{g(t)}{t}\right)(x) = \mathcal{L}\left(\frac{1-\cos(t)}{t}\right)(x) = \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(g(t))\, u\, du$

$= \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(1-\cos(t))(u)\,du$

$= \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(1)_{(u)}\,du - \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(\cos(t))(u)\,du$

$= \int_x^{+\infty} \frac{1}{u}\,du \ \frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty} \frac{2u}{u^2+1}\,du$

$= [\log(u)]_x^{+\infty} - \frac{1}{2}\,[\log(1+u^2)]_x^{+\infty}$

Proposition : (valeurs initiales)

si $\mathcal{L}(n)\ \exists$ alors $\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(h)(x) = \lim_{t\to 0} f(t) = 0$

Donc : $\mathcal{L}\left(\frac{1-\cos(t)}{t}\right)(x) = -\log(x) + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

$= \log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) \quad \forall x>1$

Ainsi : $\mathcal{L}(f(t)) = \log\left(\frac{\sqrt{(x+2)^2+1}}{x+2}\right)$

12) $\mathcal{L}(te^{t}\cos(t)) = \mathcal{L}(t\cos(t))(x-1)$

$= (-1).\,\mathcal{L}'(\cos(t))(x-1)$

$= -\left(\frac{t}{t^2+1}\right)'(x-1)$

$= \left(\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\right)(x-1)$

$= \frac{(x-1)^2-1}{((x-1)^2+1)^2}$

Exercice 05 :

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) - x'(t) = -\frac{3}{4}x(t) \\ y''(t) - y'(t) + x'(t) = -\frac{3}{4}y(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \quad - x'(0) = y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x'')(z) + \mathcal{L}(y')(z) - \mathcal{L}(x')(z) = -\frac{3}{4}\mathcal{L}(x)(z) \\ \mathcal{L}(y'')(z) - \mathcal{L}(y')(z) + \mathcal{L}(x')(z) = -\frac{3}{4}\mathcal{L}(y)(z) \end{cases}$$

- On note : $\begin{bmatrix} \mathcal{L}(x)(z) = L_1 \\ \mathcal{L}(y)(z) = L_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} (z^2 L_1 - z\underset{0}{\cancel{x(0)}} - \underset{1}{\cancel{x'(0)}}) + (zL_2 - \underset{0}{\cancel{y(0)}}) + (zL_1 + \underset{0}{\cancel{x(0)}}) = -\frac{3}{4}L_1 \\ (z^2 L_2 - z\underset{0}{\cancel{y(0)}} - \underset{-1}{\cancel{y'(0)}}) + (-zL_2 + \underset{0}{\cancel{y(0)}}) + (zL_1 - \underset{0}{\cancel{x(0)}}) = -\frac{3}{4}L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 L_1 + zL_2 - zL_1 - 1 = -\frac{3}{4}L_1 \quad \cdots (1) \\ z^2 L_2 - zL_2 + zL_1 + 1 = -\frac{3}{4}L_2 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

De (1) et (2) :

- $z^2(L_1 + L_2) = -\frac{3}{4}(L_1 + L_2)$

$\Rightarrow \underbrace{\left(z^2 + \frac{3}{4}\right)}_{\neq 0}(L_1 + L_2) = 0$

$\Rightarrow L_1 + L_2 = 0 \qquad z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow L_1(z) = -L_2(z) \qquad z \in \mathbb{R} \quad \ldots (3)$

- On remplace (3) dans (1)

$z^2 L_1 - 1 - zL_1 = \frac{-3}{4}L_1$

$\Rightarrow \left(z^2 - 2z + \frac{3}{4}\right)L_1 = 1$

$\Rightarrow L_1 = \dfrac{1}{z^2 - 2z + \frac{3}{4}}$

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{z^2 - 2z + \frac{3}{4}}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{3}{2})}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{-1}{z-\frac{1}{2}}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{z-\frac{3}{2}}\right)$

$= -e^{\frac{1}{2}t} + e^{\frac{3}{2}t} \qquad \forall t \geq 0$

Exercice 03 :

1) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2x+1}{(x-2)(x^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x-i}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x+i}\right)$

$= e^{2t} - \frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{2}e^{-it}$

$= e^{2t} - \cos(t)$

m2 : $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $m = d^\circ P \leq d^\circ Q = n$

• Rappel : et $Q$ admet $n$ racines simples $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Formule de Heaviside alors $\mathcal{L}^{-1}(F(x))(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}$

On a $m = 1 < n = 3$

$Q(x) = (x-2)(x+i)(x-i)$ ie $\begin{pmatrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -i \\ \alpha_3 = i \end{pmatrix}$

$Q'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$\mathcal{L}^{-1}(F(x))(t) = \frac{2\alpha_1+1}{3\alpha_1^2 - 4\alpha_1+1} e^{\alpha_1 t} + \frac{2\alpha_2+1}{3\alpha_2^2 - 4\alpha_2+1} e^{\alpha_2 t} + \frac{2\alpha_3+1}{3\alpha_3^2 - 4\alpha_3+1} e^{\alpha_3 t}$

$= \frac{5}{5}e^{2t} + \frac{1-2i}{-2+4i} e^{-it} + \frac{2i+1}{-4i-2} e^{it}$

$= e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-it} - \frac{1}{2}e^{it}$

$= e^{2t} - \cos(t)$

m3 : $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2x+1}{(x-2)(x^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x-2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

$= e^{2t} - \cos(t)$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) e^{-\frac{1}{2}t} \quad \forall t \geq 0$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-2t} = t\, e^{-2t}$

4) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x-1}{x^2+2x+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x-1}{(x+1)^2+2^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x+1}{(x+1)^2+2^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(x+1)^2+2^2}\right)$

$= \cos(2t)e^{-t} - \sin(2t)e^{-t}$

CamScanner

## Transformée de Fourier

**Exercice 6.** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Exercice 7.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

(1) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) \begin{cases} y'(x) + 2\lambda x y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

(2) Calculer $\widehat{y}$ en utilisant la transformée de Fourier de l'équation $(E)$.

**Exercice 8.** Considérons la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(1) Tracer le graphe de $f$.

(2) Pour tout $a, t \in \mathbb{R}$, calculer :

$$\int_0^a x e^{-ixt}\, dx.$$

(3) Calculer la transformée de Fourier de $f$.

(4) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^4 dx.$$

## Partie 02 : Transformée de Fourier :

**• Rappel :**

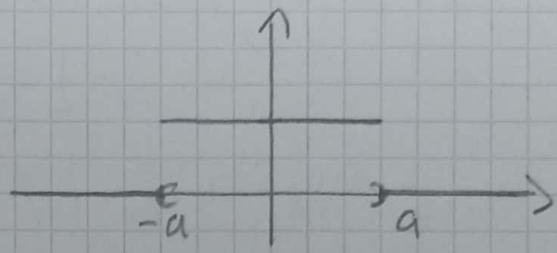
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-itx}\, dt$$

$$\hat{f}^{-1}(t) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\, e^{itx}\, dx$$

**Exercice 01 :**

• Soit $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$




• On a $f$ est continue par morceaux et $f$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ alors TF de $f$ existe.

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-itx} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-itx} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-itx}}{-ix} \right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{e^{-iax}}{-ix} + \frac{e^{iax}}{ix} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\, x} \left( \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\, x} \sin(ax) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

**Rappel :**

$$\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\ \sinh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Pour $x = 0$

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} 1\, dt$$

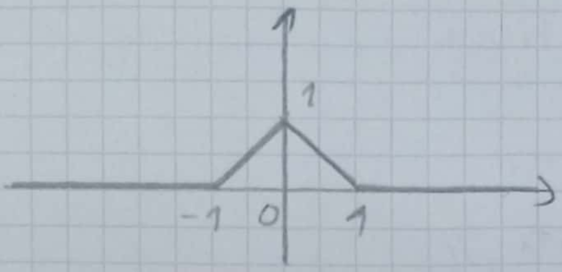
$$= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a$$

Donc : $\hat{f}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a \cdot \dfrac{\sin(ax)}{ax} & \text{si } x \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

LAHOUANE HAYOU

Exercice 03:

1)



2) $I=\int_0^a t e^{-itx}\,dt$ On pose $u=t$, $u'=1$, $v'=e^{-itx}$, $v=\frac{e^{-itx}}{-ix}$

$$I=\left[-\frac{te^{-itx}}{ix}\right]_0^a-\int_0^a\frac{e^{-itx}}{-ix}\,dt$$

$$= -\frac{ae^{-iax}}{ix}+\frac{1}{ix}\left[\frac{e^{-itx}}{-ix}\right]_0^a$$

$$= -\frac{ae^{-iax}}{ix}+\frac{1}{ix}\left(\frac{e^{-iax}}{-ix}-\frac{1}{-ix}\right)$$

$$= -\frac{ae^{-iax}}{ix}+\frac{e^{-iax}-1}{x^2} \quad \forall x\neq 0$$

Pour $x=0$:

$$I=\int_0^a t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^a=\frac{a^2}{2}$$

3) $$\hat f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-1}^0(1+t)e^{-itx}\,dt+\int_0^1(1-t)e^{-itx}\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\int_0^{-1}e^{-itx}\,dt-\int_0^{-1}te^{-itx}\,dt+\int_0^1e^{-itx}\,dt-\int_0^1te^{-itx}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left[\frac{e^{-itx}}{-ix}\right]_0^{-1}+\left[\frac{e^{-itx}}{-ix}\right]_0^1-\left(\frac{+1e^{ix}}{ix}+\frac{e^{ix}-1}{x^2}\right)-\left(-\frac{e^{-ix}}{ix}+\frac{e^{-ix}-1}{x^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(\frac{e^{-ix}}{-ix}-\frac{e^{ix}}{-ix}\right)-\frac{e^{ix}}{ix}-\frac{e^{ix}-1}{x^2}+\frac{e^{-ix}}{ix}-\frac{e^{-ix}-1}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\cancel{\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{ix}\right)}-\cancel{\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{ix}\right)}-\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}-2}{x^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}-2}{x^2}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x^2}\left(e^{ix}+e^{-ix}-2\right)$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,x^2}\left(\cos(x)-1\right) \quad \forall x\neq 0$$

Pour $x=0$

$$\hat f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

• On remarque que $\hat f$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $\lim_{x\to 0}\hat f(x)=\hat f(0)$

4) En déduire $J = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx$

$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\, x^2}(\cos(x)-1) & x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$

• On a $2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos(x)$

$\hat{f}(x) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 \quad \forall x \neq 0$

• On applique la formule de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{f}(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^4 dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^4 dx$$

car $y \longmapsto \left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^4$ est paire.

On pose : $y = \frac{x}{2} \quad 2dy = dx \quad x \to 0, y \to 0$
$\quad x \to +\infty, y \to +\infty$

Donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^4 dy$$

d'où
$$J = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^4 dy = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt$$

$$= \pi \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$$

$$= \pi \int_0^1 (1-t)^2 dt$$

$$= \pi \left[-\frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

Exercice 02 :

$(E) \begin{cases} y'(t) + 2\lambda t\, y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

1) Résoudre $(E)$.

$y' + 2\lambda t y = 0$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -2\lambda t$

$\Rightarrow \int \frac{y'}{y} dt = \int -2\lambda t \, dt \Rightarrow \ln(y) = -\lambda t^2 + c \Rightarrow y(t) = K e^{-\lambda t^2}$ $t \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$

On a $y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow y(t) = e^{-\lambda t^2}, \ t \in \mathbb{R}$

$2)\ \mathcal{F}\left(y'(t) + 2\lambda t y(t)\right)(x) = \mathcal{F}(0)(x) = \hat{0}$

$\Leftrightarrow \mathcal{F}(y'(t))_{(x)} + 2\lambda \mathcal{F}(ty(t))_{(x)} = 0$

$\Leftrightarrow +ix\, \hat{y}(x) + 2\lambda i\, (\hat{y}(x))' = 0$

$\Leftrightarrow +ix + 2\lambda i \dfrac{(\hat{y}(x))'}{\hat{y}(x)} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(\hat{y}(x))'}{\hat{y}(x)} = -\dfrac{x}{2\lambda}$ $\quad\quad \lambda > 0$

$\Leftrightarrow \ln(\hat{y}(x)) = -\int \dfrac{x}{2\lambda}\, dx$

$\Leftrightarrow \ln(\hat{y}(x)) = -\dfrac{x^2}{4\lambda} + C$ $\quad\quad C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \hat{y}(x) = K e^{-\frac{x^2}{4\lambda}} \ldots (*)$ $\quad\quad \lambda > 0,\ x, K \in \mathbb{R}$

$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{F}(f^{(k)}(x)) = (ix)^k \hat{f}(x) \\ F^{(k)}(x) = (-i)^k \mathcal{F}(t^k f(t)) \end{array}\right.$

D'autre part, on a $\mathcal{F}(y(0)) = \mathcal{F}(1)$

$\mathcal{F}(y(0)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-it \cdot 0}\, dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda} t)^2}\, dt$

intégrale de Gauss

On pose $u = \sqrt{\lambda}\, t \Rightarrow dt = \dfrac{du}{\sqrt{\lambda}}$

$\mathcal{F}(y(0)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \dfrac{du}{\sqrt{\lambda}}$ $\quad = \sqrt{\pi}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}} \ldots (**)$

Par identification $K = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}} \in \mathbb{R}_+^*$

D'où : $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda}}$ $\quad x \in \mathbb{R}$