SÉRIE DE TD D'ANALYSE MATHÉMATIQUE 4

Transformée de Laplace

Exercice 1.

(1) Exprimer $\mathscr{L}(t^{n+1})$ en fonction de $\mathscr{L}(t^n)$ pour tout entier naturel n.

(2) En déduire l'expression de $\mathscr{L}(t^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Calculer les transformées de Laplace suivantes :

- $\mathscr{L}(t^3 + 2t + 5)$
- $\mathscr{L}(e^{at})$
- $\mathscr{L}(e^{-2t}(t^3 + 2t + 5))$
- $\mathscr{L}(\cosh(at))$
- $\mathscr{L}(\sinh(at))$
- $\mathscr{L}(\cos(at))$
- $\mathscr{L}(\sin(at))$
- $\mathscr{L}(e^t(1 - \cos(t)))$
- $\mathscr{L}(t^2 \sin(t))$
- $\mathscr{L}\left(e^{-t}\dfrac{\sin t}{t}\right)$
- $\mathscr{L}\left(e^{-2t}\dfrac{1 - \cos t}{t}\right)$
- $\mathscr{L}(te^t \cos t)$.

Exercice 3. Calculer les originaux suivants :

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2x+1}{(x-2)(x^2+1)}\right) ; \ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) ; \ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right) ; \ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{x-1}{x^2+2x+5}\right).$$

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y''(t) - \frac{5}{2}y'(t) + y(t) = -\frac{5}{2}\sin t \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 2 \end{cases}.$$

Exercice 5. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) - x'(t) = -\frac{3}{4}x(t) \\ y''(t) - y'(t) + x'(t) = -\frac{3}{4}y(t) \\ x(0) = y(0) = 0, \ x'(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}.$$

Transformée de Fourier

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

(1) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) \begin{cases} y'(x) + 2\lambda x y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

(2) Calculer $\widehat{y}$ en utilisant la transformée de Fourier de l'équation (E).

Exercice 8. Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(1) Tracer le graphe de f.

(2) Pour tous $a, t \in \mathbb{R}$, calculer :

$$\int_0^a x e^{-ixt} \, dx.$$

(3) Calculer la transformée de Fourier de f.

(4) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 dx.$$