Analyse numérique

Séance 1: Introduction et résolution d'équations non-linéaires

Mohammed-Khalil Ferradi
khalil.ferradi@um6p.ma

MOHAMMED VI POLYTECHNIC UNIVERSITY

College of Computing

Introduction:

Qu'est-ce que l'analyse numérique ?

L'analyse numérique est une branche des mathématiques appliquées, ayant pour objectif l'étude des algorithmes permettant d'approximer les solutions de problèmes mathématiques.

But:

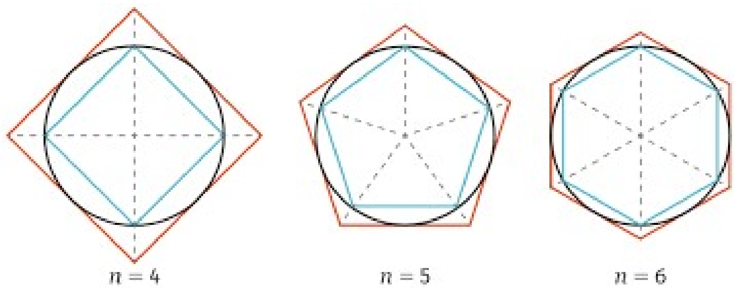
- Simulation de phénomènes physiques réels
- Conception sur un modèle virtuel

Domaines d'applications:

- Calcul des structures: ponts, barrages, tunnels…
- Mécanique des fluides: Modélisation du flux d'air chaud pour le séchage du phosphate
- Optimisation
- …

Exemple 1:

Approximation de Pi par la méthode d'Archimède:

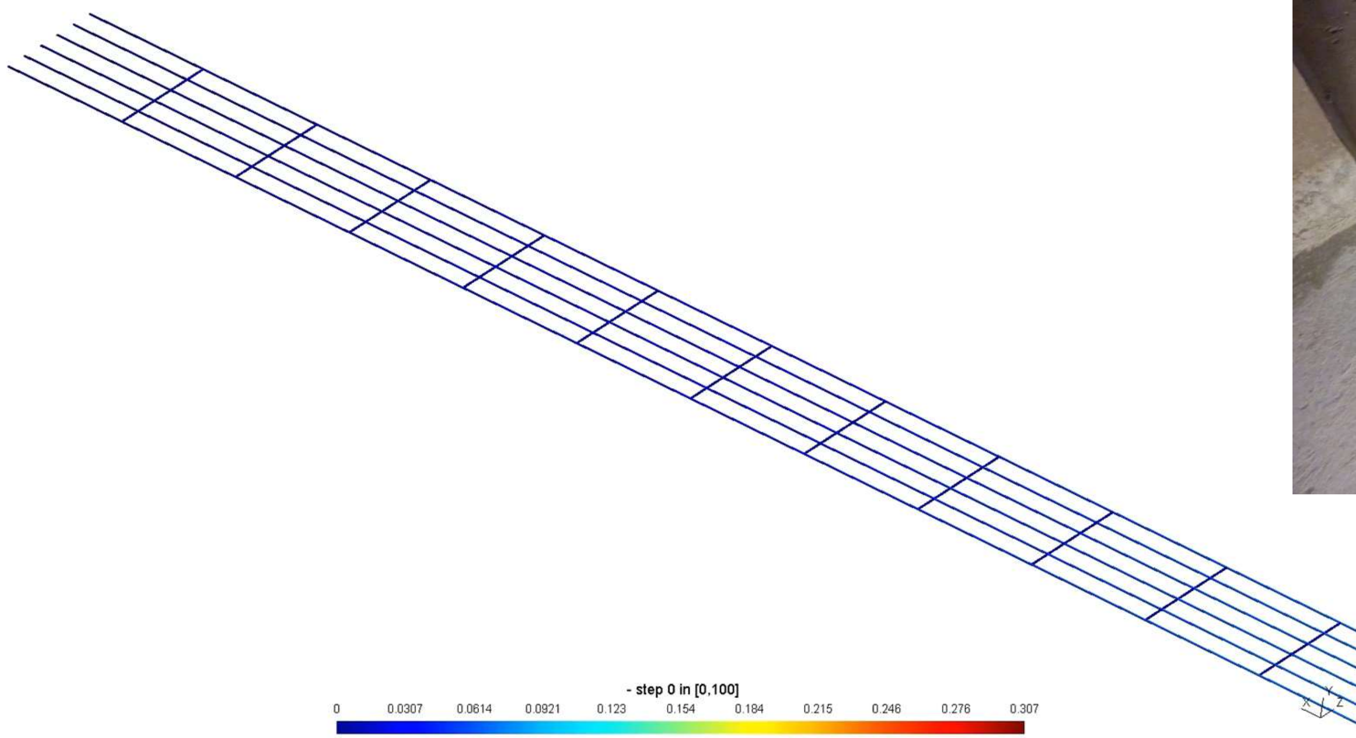


Pour n=96, Archimède a obtenu l'approximation suivante:

$$3 + \frac{10}{71} \leq \pi \leq 3 + \frac{1}{7}$$

Utilisation d'une approche par l'intérieur et par l'extérieur pour obtenir un encadrement du résultat (et donc de l'erreur).

Exemple 2: Simulation de la rupture d’un câble



Simulation de la rupture d’un câble de précontrainte tendu à 350t

- Au milieu de XXième siècle et avant l'avènement de l'ère informatique, les calculs étaient faits par des « human computers ». À la NASA, la résolution des équations pour le calcul de la trajectoire d'un engin spatial était faite par des algorithmes calculés manuellement.

- Le développement de l'analyse numérique est intimement lié à celui des machines de calcul: résolution de problèmes à plusieurs millions de variables avec un simple ordinateur personnel.

- Le but du modélisateur utilisant les méthodes d'analyse numérique est d'approximer la solution des équations mathématiques régissant un problème réel, tout en réduisant l'erreur numérique, le temps de calcul, et l'utilisation de la mémoire machine.

Résolution d'équations non-linéaires:

Pour une fonction notée $\boldsymbol{f(x)}$, on cherche la valeur $\boldsymbol{x^*}$ solution de l'équation suivante:

$$f(x) = 0$$

- La solution $\boldsymbol{x^*}$ est appelée racine ou zéro de la fonction *f*.

- Plusieurs solutions peuvent exister.

On peut deux distinguer deux cas:

- Les fonctions à une dimension $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ayant une solution scalaire.

- Un système couplé à *n* dimensions, avec $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dont la solution au système $\boldsymbol{f(x) = 0}$ est un vecteur.

- Exemple d'équation non-linéaire à une dimension:

$$\tan(x) - x = 0$$

Dont des solutions approximées sont: 7.72, 14.07, …

- Exemple d'un système d'équations non-linéaires :

$$x_1^2 - x_2 + 0{,}25 = 0$$
$$-x_1 + x_2^2 + 0{,}25 = 0$$

Dont la solution est le vecteur $\boldsymbol{x}^T = \{0.5 \quad 0.5\}$

- L'existence est l'unicité d'une solution est plus difficile à déterminer pour les équations non-linéaires que pour les équations linéaires.

- Pour une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si $\mathbf{signe}\big(f(a)\big) \neq \mathbf{signe}\big(f(b)\big)$, alors le TVI implique $\exists x^* \text{ tel que } f(x^*) = 0$.

- Il n'y a pas d'analogue à ce résultat en dimension $n > 1$.

- Les équations non-linéaires peuvent avoir un nombre quelconque de solutions, voire pas de solution.

$$e^x + 1 = 0 \quad \text{n'a pas de solution}$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ a deux solutions}$$

$$\tan(x) - x = 0 \text{ a une infinité de solutions}$$

Méthode de dichotomie (ou de bissection):

La méthode de dichotomie requiert un intervalle initial $[a, b]$ vérifiant $\mathbf{signe}\big(f(a)\big) \neq \mathbf{signe}\big(f(b)\big)$, dont la longueur est divisée par deux à chaque itération, jusqu'à l'obtention de la convergence avec la précision souhaitée.

L'algorithme s'exprime comme suit:

Choisir une précision $\varepsilon > 0$ et un intervalle initial $[a, b]$ vérifiant $\mathbf{signe}\big(f(a)\big) \neq \mathbf{signe}\big(f(b)\big)$

Tant que $(b - a) > \varepsilon$ faire:
- $c = \frac{a+b}{2}$
- si $\mathbf{signe}\big(f(a)\big) = \mathbf{signe}\big(f(c)\big)$ alors
  - $a = c$
- sinon
  - $b = c$

Exemple: $f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$

Intervalle de recherche initial [1,3].

a	$f(a)$	b	$f(b)$
1.000000	−2.365884	3.000000	8.435520
1.000000	−2.365884	2.000000	0.362810
1.500000	−1.739980	2.000000	0.362810
1.750000	−0.873444	2.000000	0.362810
1.875000	−0.300718	2.000000	0.362810
1.875000	−0.300718	1.937500	0.019849
1.906250	−0.143255	1.937500	0.019849
1.921875	−0.062406	1.937500	0.019849
1.929688	−0.021454	1.937500	0.019849
1.933594	−0.000846	1.937500	0.019849
1.933594	−0.000846	1.935547	0.009491
1.933594	−0.000846	1.934570	0.004320
1.933594	−0.000846	1.934082	0.001736

- La méthode de la bissection n'utilise pas les valeurs des fonctions ni leurs dérivées, seulement leurs signes.

- La méthode est certaine de converger, mais très lentement (la convergence est linéaire).

- Pour un intervalle de départ donné [a, b], la longueur de l'intervalle après k itérations est $(b - a)/2^k$, donc pour atteindre une tolérance d'erreur ε, il faut environ

$$\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \textbf{ itérations}$$

quel que soit la fonction *f* impliquée.

Méthode du point fixe:

- On appelle x un point fixe d'une fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'il vérifie:

$$x = g(x)$$

- De nombreuses méthodes itératives pour résoudre des équations non-linéaires utilisent un schéma d'itération à point fixe ayant la forme suivante:

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

où les points fixes de g sont des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple: le point fixe de la fonction $g(x) = \tan x$ est une solution de l'équation $f(x) = \tan(x) - x = 0$.

- Pour une équation donnée $f(x) = 0$, on peut avoir plusieurs représentations équivalentes sous la forme d'un problème de recherche de point fixe $x = g(x)$, avec différents choix pour la fonction g.

- Toute fonction $g(x)$ n'admet pas forcément un point fixe.

- Si la suite (x_k) définie par une valeur initiale x_0 et les itérations $x_{k+1} = g(x_k)$ converge, alors elle converge nécessairement vers un point fixe.

- Un schéma d'itération à point fixe ne converge pas forcément, même si la fonction admet un point fixe.

- Si $x^* = g(x^*)$ et $|g'(x^*)| < 1$, alors il existe un intervalle contenant x^* tel que les itérations $x_{k+1} = g(x_k)$ convergent vers x^*.

Pour la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$, les points fixes des fonctions suivantes:

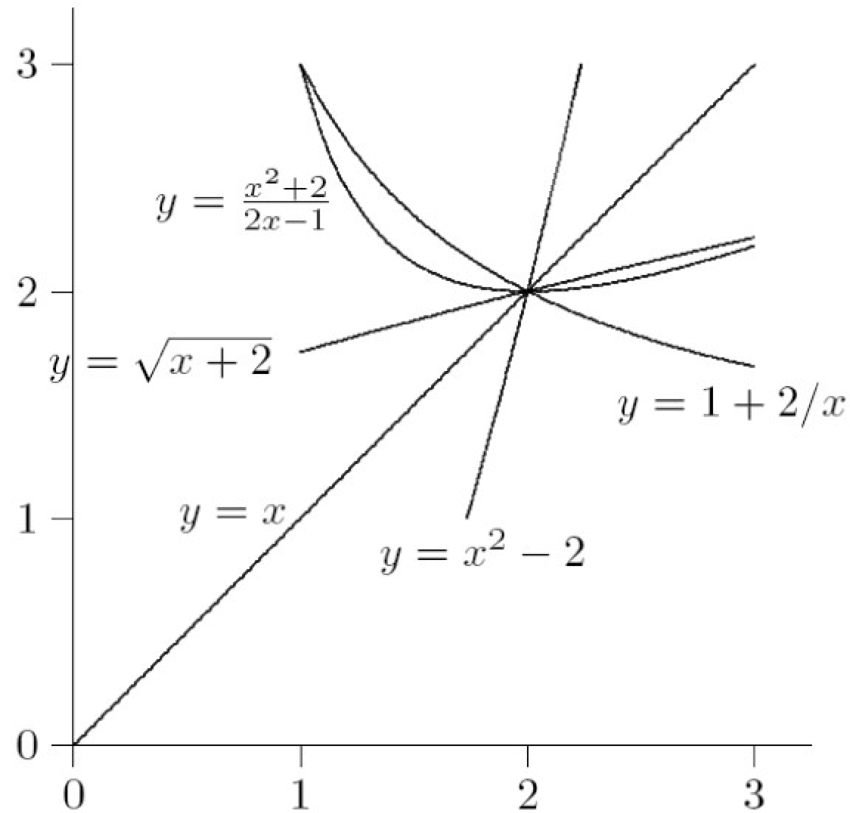
$$g(x) = x^2 - 2$$

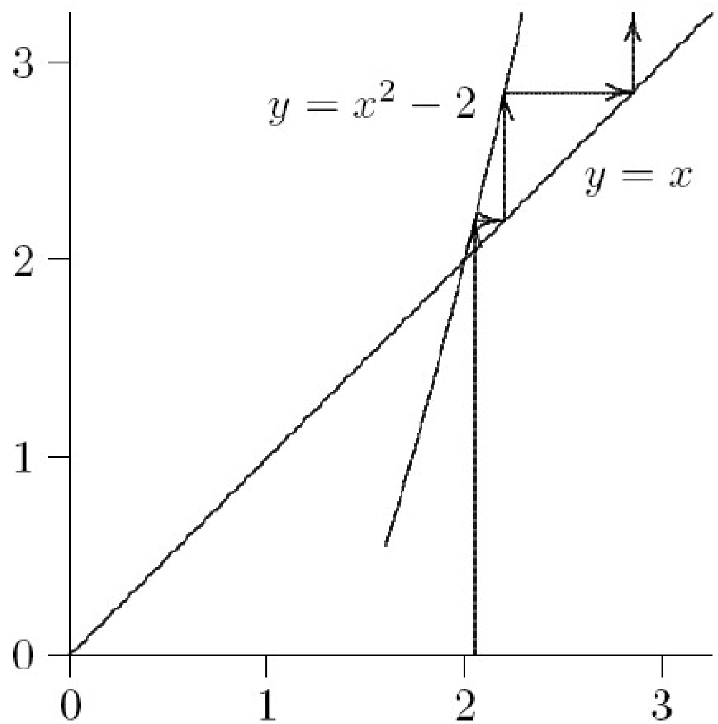
$$g(x) = \sqrt{x+2}$$

$$g(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

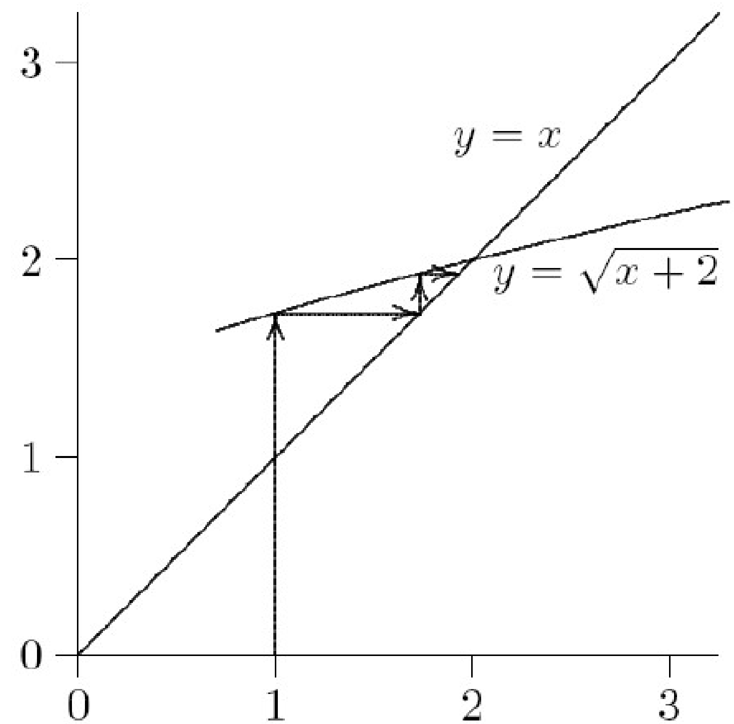
$$g(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$$

représentent des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

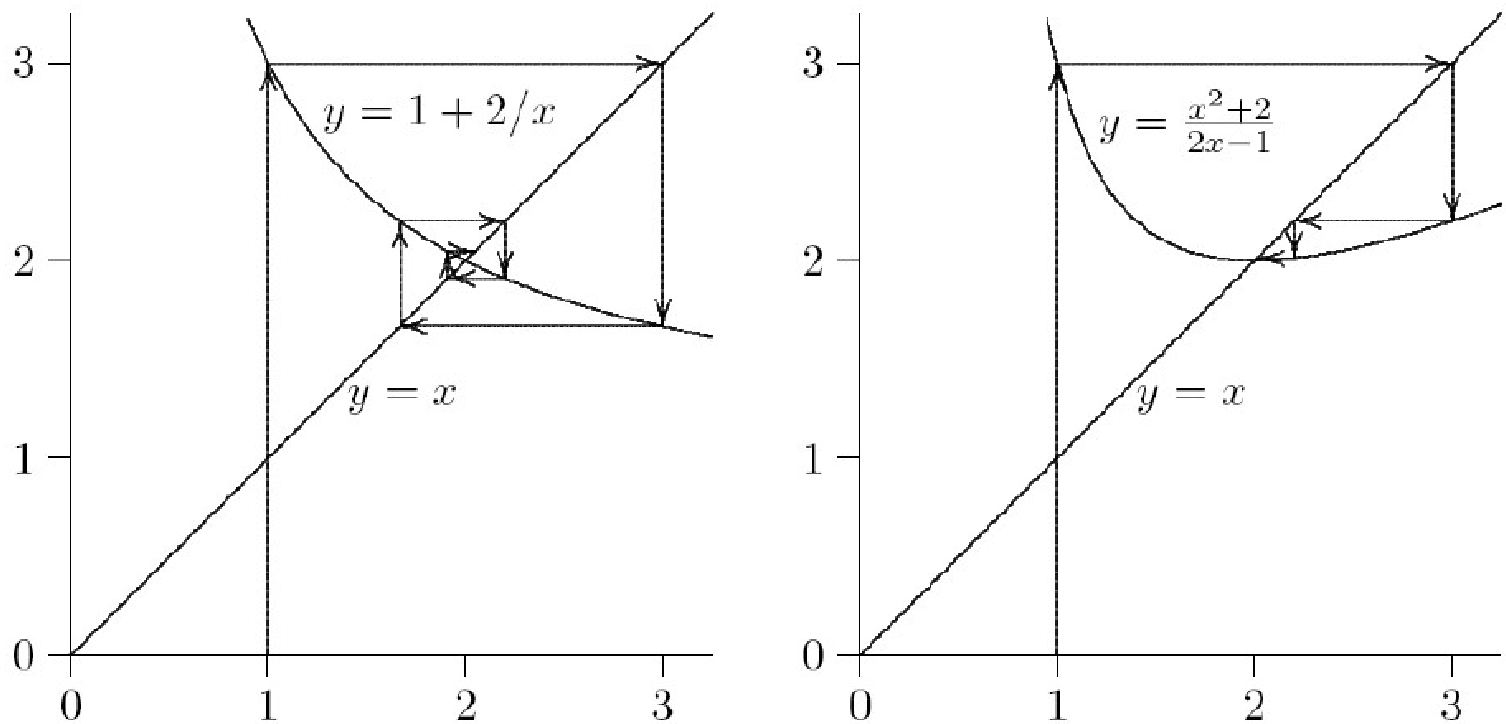

$y = \frac{x^2+2}{2x-1}$
$y = \sqrt{x+2}$
$y = 1 + 2/x$
$y = x$
$y = x^2 - 2$
3
2
1
0
0
1
2
3



3
2
1
0
0
1
2
3
$y = x^2 - 2$
$y = x$



3
2
1
0
0
1
2
3
$y = x$
$y = \sqrt{x+2}$


$y = 1 + 2/x$
$y = x$
$y = \frac{x^2+2}{2x-1}$
$y = x$
0
1
2
3

Méthode de Newton:

On souhaite calculer la solution de l'équation suivante:

$$f(x) = 0$$

À partir d'un point initial x_0, l'équation à résoudre est linéarisée en utilisant l'approximation (linéarisation) suivante:

$$\mathcal{L}(f(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 0$$

Calcul de l'incrément Δx: $$\Delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 + \Delta x$$

Vérification du critère de convergence: $|f(x_1)| < \varepsilon$

avec $\varepsilon > 0$ la précision souhaitée

Le calcul est répété jusqu'à l'atteinte de la convergence avec la précision fixée

L'algorithme de résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton est:

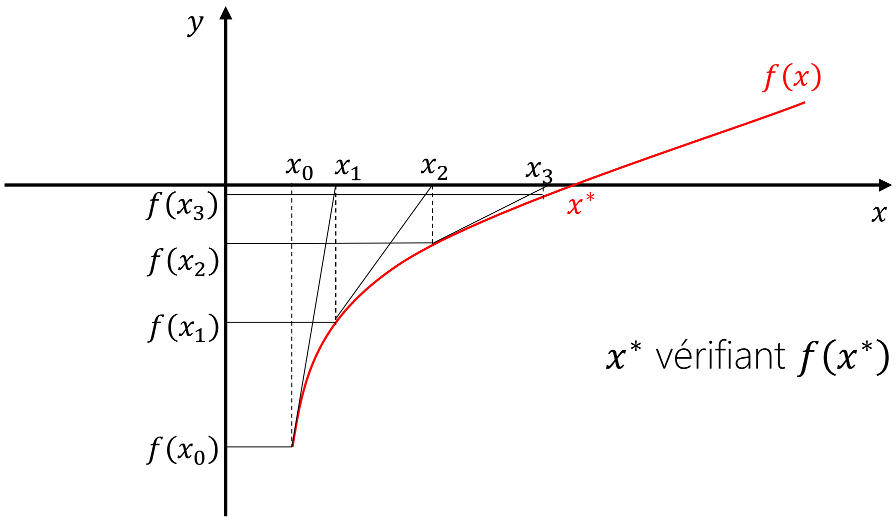
Choisir un x_0 initial et une précision $\varepsilon > 0$

Tant que $|f(x_i)| > \varepsilon$ faire:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$
$$i \leftarrow i + 1$$

Peut-on utiliser un critère de convergence (d'arrêt) autre que $|f(x_i)| < \varepsilon$?

Représentation graphique de la méthode de Newton:



x^* vérifiant $f(x^*) = 0$

Exemple: calcul de la racine carrée de 2

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

$$x_0 = \mathbf{1}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 + \frac{1}{2} = \mathbf{1},5$$

$$x_2 = \mathbf{1,41}6666667$$

$$x_3 = \mathbf{1,414215}686274509803921568627451$$ (6 chiffres exacts)

$$x_4 = \mathbf{1.41421356237}468991062629557889013491011655$$ (12 chiffres exacts)

$$x_5 = \mathbf{1.41421356237309504880168}962350253024361498$$ (24 chiffres exacts)

Définition de l'ordre de convergence:

Soit une suite (x_k) convergeant vers sa limite x^*: $\lim_{k \to +\infty} x_k = x^*$

On dit que la suite converge en un ordre α s'il existe $C > 0$ tel que:

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^\alpha} \leq C \quad , \qquad k \geq 0$$

la suite (x_k) converge:

- linéairement s'il existe $0 < \tau < 1$ tel que : $|x_{k+1} - x^*| \leq \tau |x_k - x^*|$ pour *k* suffisamment grand
- Super-linéairement si : $\lim_{x \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = 0$
- Quadratiquement s'il existe $C > 0$ tel que: $|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^2$ pour *k* suffisamment grand
- Cubiquement s'il existe $C > 0$ tel que: $|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^3$ pour *k* suffisamment grand

Preuve de la convergence quadratique de la méthode de Newton:

On considère l'équation suivante $f(x) = 0$, avec *f* au moins deux fois dérivable, et x^* vérifiant $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$.

On écrit le développement de Taylor de *f* au voisinage de la solution x^*:

$$f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2!}(x^* - x_n)^2$$

Avec ξ_n compris entre x^* et x_n

$$x^* = \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{x_{n+1}} - \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2 \quad \Longrightarrow \quad x^* - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

$$|e_{n+1}| = \frac{|f''(\xi_n)|}{2|f'(x_n)|}e_n^2 \quad \Longrightarrow \quad |e_{n+1}| < Ce_n^2$$

Avec $0 < C = \sup_{x\in I} \frac{|f''(x)|}{2|f'(x)|} < +\infty$

➔ On démontre donc la convergence quadratique de la méthode

- Le choix du point de départ $\boldsymbol{x_0}$ a une influence sur la convergence de la méthode de Newton. En effet, $\boldsymbol{x_0}$ doit être choisi suffisamment proche de la solution pour que l'algorithme puisse converger.

Exemple:

$$f(x) = \tan^{-1}(x) = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \left(1 + x_k^2\right) \tan^{-1}(x_k)$$

$x_0 = 1$	$x_1 = -0{,}5707$	$x_2 = 0{,}1169$	$x_3 = -1{,}061 \times 10^{-3}$	$x_4 = 7{,}963 \times 10^{-10}$
$x_0 = 2$	$x_1 = -3{,}536$	$x_2 = 13{,}95$	$x_3 = -279{,}3$	$x_4 = 1{,}22 \times 10^5$

- Si la solution $\boldsymbol{x^*}$ vérifie $\boldsymbol{f'(x^*) = 0}$, la convergence n'est plus quadratique est devient donc lente.

Exemple:

$$f(x) = x^2 = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{x_k}{2} \qquad \text{(convergence linéaire)}$$

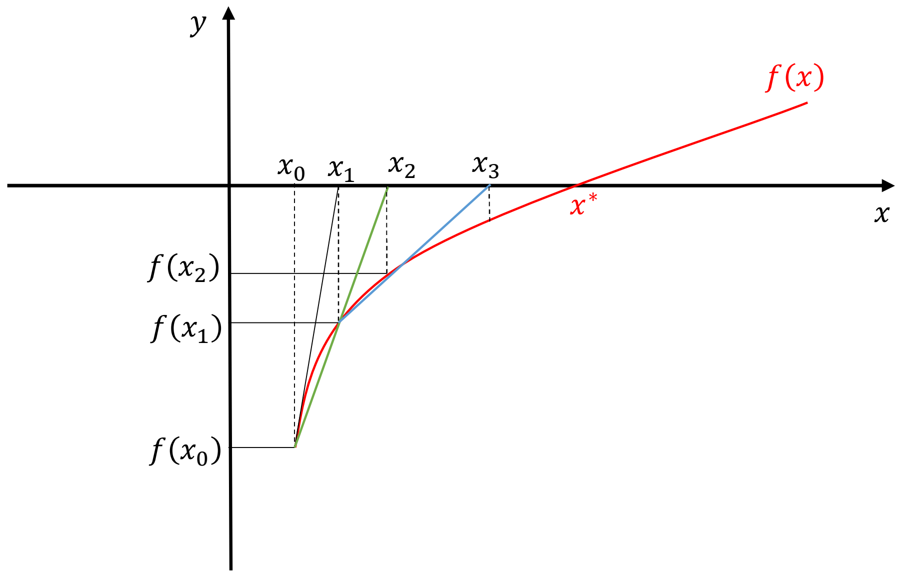
Méthode de la sécante:

- La méthode de Newton nécessite de calculer la dérivée de la fonction *f* à chaque itération, ce qui peut s'avérer coûteux en temps de calcul ou difficile à obtenir pour certaines fonctions.

- La méthode de la sécante propose d'utiliser une approximation de la dérivée au lieu de la dérivée elle-même. Le calcul du nouveau point à une itération donnée s'exprime donc par:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Représentation graphique de la méthode de la sécante:



Le principe de la méthode de la sécante remonte à l'Egypte antique. Dans le papyrus de Berlin, la méthode est utilisée pour trouver les aires de deux carrés différents dont la somme est égale à 100 (coudées au carré), et dont le rapport des côtés de ces deux carrés étant de 1 pour (1/2 + 1/4).

Fin de la séance