Analyse numérique

Séance 4: Résolution de systèmes d'équations linéaires. Partie 2

Mohammed-Khalil Ferradi
khalil.ferradi@um6p.ma

MOHAMMED VI POLYTECHNIC UNIVERSITY

College of Computing

Méthodes de résolution directes:

- Méthode d'élimination de Gauss: le principe de la méthode est de transformer le système initial à résoudre $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ en un système équivalent $\boldsymbol{MAx} = \boldsymbol{Mb}$, tel que la matrice $\boldsymbol{MA}$ est triangulaire supérieure et sans calculer explicitement la matrice $\boldsymbol{M}$.

Cette méthode est associée à la factorisation *LU* de la matrice: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$, avec *L* et *U* des matrices triangulaires inférieure et supérieure respectivement. Une fois la factorisation *LU* obtenue, on résout le système $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$, puis le système $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$. Pour obtenir $\boldsymbol{x}$.

- Méthode de Cholesky: cette méthode est valable pour une matrice $\boldsymbol{A}$ symétrique définie positive. Elle se base sur une factorisation de la matrice sous la forme suivante: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}$. On résout alors le système $\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, puis pour obtenir $\boldsymbol{x}$ le système $\boldsymbol{Lx} = \boldsymbol{y}$.

Méthode de Gauss:

- Le principe de la méthode de Gauss est de transformer le système à résoudre en une forme triangulaire.

- La méthode est basée sur des combinaisons linéaires des lignes de la matrice. Par exemple pour un vecteur de dimension 2 : $\boldsymbol{a}^T = \{a_1 \quad a_2\}$, si $a_1 \neq 0$, alors:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{a_2}{a_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De manière plus générale:

$$\boldsymbol{M}_k \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -m_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -m_n & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Avec $m_i = \frac{a_i}{a_k}$, $i = k+1, \dots, n$ et $a_k \neq 0$ est appelé *pivot*.

- La matrice $\boldsymbol{M_k}$ est appelée matrice d'élimination élémentaire. Elle rajoute des multiples de la ligne *k* aux lignes qui suivent, de manière à avoir des termes nuls au-dessous du terme en *k*.

- La matrice $\boldsymbol{M_k}$ est triangulaire inférieure et inversible. Elle peut être représentée sous la forme suivante:

$$\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{m}_k \boldsymbol{e}_k^T, \qquad \text{avec } \boldsymbol{m}_k = \{0 \quad \dots \quad 0 \quad m_{k+1} \quad \dots \quad m_n\}^T$$

Et $\boldsymbol{e_k}$ le k$^{\text{ième}}$ vecteur colonne de la matrice identité.

- L'inverse de la matrice $\boldsymbol{M_k}$ noté $\boldsymbol{L_k} = \boldsymbol{M_k^{-1}}$ est égale à:

$$\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{m}_k \boldsymbol{e}_k^T$$

- Pour deux matrices d'éliminations élémentaires $\boldsymbol{M_k}$ et $\boldsymbol{M_j}$, avec *j* > *k*, leur produit est égal à:

$$\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{M}_j = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{m}_k\boldsymbol{e}_k^T)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{m}_j\boldsymbol{e}_j^T) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{m}_k\boldsymbol{e}_k^T - \boldsymbol{m}_j\boldsymbol{e}_j^T + \boldsymbol{m}_k\boldsymbol{e}_k^T\boldsymbol{m}_j\boldsymbol{e}_j^T$$

$$\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{m}_k\boldsymbol{e}_k^T - \boldsymbol{m}_j\boldsymbol{e}_j^T$$

Pareil pour $\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{L}_j$: $\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{L}_j = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{m}_k\boldsymbol{e}_k^T + \boldsymbol{m}_j\boldsymbol{e}_j^T$

Exemple:

Pour $\boldsymbol{a} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{Bmatrix}$: $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pour la réduction d'un système d'équations linéaires $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sous forme triangulaire supérieure, on choisit d'abord $\boldsymbol{a_{11}} \neq \boldsymbol{0}$ comme pivot avec la matrice d'élimination $\boldsymbol{M_1}$ correspondante, pour mettre à zéro les termes sous la diagonale de la 1ère colonne :

$$\boldsymbol{M_1 A x} = \boldsymbol{M_1 b}$$

- Ensuite, avec le nouveau pivot $\boldsymbol{a_{22}} \neq \boldsymbol{0}$ de la matrice $\boldsymbol{M_1 A}$, la matrice d'élimination $\boldsymbol{M_2}$ correspondante est utilisée pour mettre à zéro les termes sous la diagonale de la 2ième colonne :

$$\boldsymbol{M_2 M_1 A x} = \boldsymbol{M_2 M_1 b}$$

- le processus est répété jusqu'à ce que le système soit complètement écrit sous forme triangulaire supérieure:

$$\boldsymbol{M_{n-1} \dots M_2 M_1 A x} = \boldsymbol{M_{n-1} \dots M_2 M_1 b}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{MAx} = \boldsymbol{Mb}$$

Le système ainsi obtenu peut être résolu par substitution rétrograde (back-substitution). Ce processus est appelé *méthode de Gauss*.

Système initial à résoudre:

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 & \cdots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 & \cdots & a_{2n}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33}^0 & \cdots & a_{3n}^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & a_{n3}^0 & \cdots & a_{nn}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \\ b_3^0 \\ \vdots \\ b_n^0 \end{Bmatrix}$$

1ière élimination:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 & \cdots & a_{1n}^0 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ 0 & a_{32}^1 & a_{33}^1 & \cdots & a_{3n}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & a_{n3}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ b_3^1 \\ \vdots \\ b_n^1 \end{Bmatrix}$$

2ième élimination:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 & \cdots & a_{1n}^0 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 & \cdots & a_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^2 & \cdots & a_{nn}^2 \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ \vdots \\ b_n^2 \end{Bmatrix}$$

(n-1)ième élimination:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 & \cdots & a_{1n}^0 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 & \cdots & a_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{n-1} \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} b_1^{n-1} \\ b_2^{n-1} \\ b_3^{n-1} \\ \vdots \\ b_n^{n-1} \end{Bmatrix}$$

Que faire si lors de la ième élimination le pivot est nul ?

- L'inverse de la matrice $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{M}_1^{-1} \dots \boldsymbol{M}_{n-1}^{-1} = \boldsymbol{L}_1 \dots \boldsymbol{L}_{n-\mathbf{1}}$$

Est une matrice triangulaire inférieure.

- Le résultat $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{MA}$ est par construction une matrice triangulaire supérieure. On a donc: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$

- Si au cours de la méthode de Gauss un des termes diagonaux est nul, la matrice $\boldsymbol{U}$ sera singulière. Néanmoins la factorisation *LU* est toujours possible.

- La méthode de Gauss produit une factorisation *LU* d'une matrice donnée. La méthode de Gauss et la factorisation *LU* sont donc un même processus pour résoudre un système d'équations linéaires.

- Une fois la factorisation *LU* de la matrice est obtenue, il devient facile d'obtenir le vecteur solution:

$$\text{on résout } \boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}, \qquad \text{puis } \boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$$

Exemple:

$$(S):\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$(S^1):\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M_1}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$(S^2):\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1{,}25 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M_2}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -17 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2{,}5 \\ -2{,}125 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{Ux=Mb}}$$

Résolution du système (S^2) par substitution : $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{8}$

Pour obtenir explicitement la factorisation *LU*, on calcule la matrice *L*:

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1)^{-1} = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1{,}25 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1{,}25 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient donc la factorisation *LU* de la matrice *A*:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1{,}25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -17 \end{bmatrix} = \boldsymbol{LU}$$

Technique du pivot partiel (partial pivoting):

- Toute valeur non nulle peut être utilisée comme pivot. Néanmoins en pratique le pivot peut être choisi de telle manière à minimiser les erreurs de calculs.

- Pour ne pas amplifier les erreurs d'arrondis lors de la multiplication du reste de la matrice à triangulariser avec la matrice d'élimination élémentaire, la valeur absolue des termes de la matrice élémentaire ne doit pas dépasser 1.

- Ceci est obtenu en choisissant comme pivot d'une étape de la méthode de Gauss, la plus grande valeur possible entre la valeur du terme de la diagonale et les valeurs en dessous dans la même colonne.

- Cette procédure, appelée *pivot partiel*, est essentiel pour une implémentation numérique stable de la méthode de Gauss.

- Avec le pivot partiel, à chaque étape *k* de la méthode de Gauss, on effectue une permutation $\boldsymbol{P_k}$ avant de multiplier par la matrice $\boldsymbol{M_k}$, de manière à toujours avoir le plus grand pivot possible dans la diagonale. On obtient toujours $\boldsymbol{MA = U}$ avec $\boldsymbol{U}$ une matrice triangulaire supérieure, mais avec $\boldsymbol{M}$ égale à:

$$\boldsymbol{M = M_{n-1}P_{n-1} \dots M_2P_2M_1P_1}$$

- La matrice $\boldsymbol{L = M^{-1}}$ n'est pas nécessairement triangulaire inférieure (triangulaire à *n* permutations près).

- On peut effectuer les permutations en amont de la méthode de Gauss pour obtenir:

$$\boldsymbol{PA = LU}$$

Avec $\boldsymbol{P = P_{n-1} \dots P_2P_1}$ représente les permutations effectuées sur les lignes de la matrice $\boldsymbol{A}$, et $\boldsymbol{L}$ étant maintenant triangulaire inférieure.

- La technique du pivot partiel peut être généralisé à celle du pivot total, en considérant cette fois ci comme pivot le plus grand terme du reste de la matrice à triangulariser.

- Le pivot total requiert une permutation des colonnes en plus de celle des lignes de la matrice. La factorisation s'exprime donc sous la forme suivante:

$$\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{LU}$$

Avec $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ les matrices permutations, et $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{U}$ étant les matrices triangulaires inférieure et supérieure de la factorisation.

- La stabilité numérique du pivot total et plus grande que celle du pivot partiel, mais la recherche du pivot devient plus coûteuse en temps de calcul.

Exemple:

On considère la matrice à factoriser suivante : $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ avec $0 < \varepsilon < \varepsilon_{mach}$

Si les lignes ne sont pas permutées, le pivot est égal à $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{MA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\varepsilon} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - 1/\varepsilon \end{bmatrix} = \boldsymbol{U} \quad , \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

Avec une arithmétique en virgule flottante, la matrice $\boldsymbol{U}$ devient: $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{bmatrix}$ et donc:

$$\boldsymbol{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{A}$$

- L'utilisation d'un pivot ayant une faible valeur a eu pour conséquence une perte en précision du procédé de factorisation

On utilise maintenant la méthode du pivot partiel. Le pivot est donc égal à 1 et on obtient:

$$\boldsymbol{MPA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{bmatrix} = \boldsymbol{U} \quad , \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

Avec une arithmétique en virgule flottante, la matrice $\boldsymbol{U}$ devient: $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et donc:

$$\boldsymbol{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1+\varepsilon \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{PA}$$

Pour certains types de matrices couramment utilisées, il n'est pas nécessaire d'effectuer un changement de pivot:

- *Matrice à diagonale strictement dominante:*

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad , \qquad j = 1, \dots, n$$

- *Matrice symétrique définie positive:* (les valeurs propres de la matrice sont toutes strictement positives)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \quad , \qquad \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0 \ \text{ pour tout } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

Une matrice définie positive est nécessairement à diagonale dominante, l'inverse n'étant pas forcément vérifié.

Exemple:

En utilisant une précision à trois chiffres, on résout le système suivant:

$$\begin{bmatrix} 0{,}641 & 0{,}242 \\ 0{,}321 & 0{,}121 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}883 \\ 0{,}442 \end{Bmatrix}$$

La méthode de Gauss avec pivot partiel mène au système triangulaire suivant:

$$\begin{bmatrix} 0{,}641 & 0{,}242 \\ 0 & 0{,}000242 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}883 \\ -0{,}000383 \end{Bmatrix}$$

Qu'on résout par substitution rétrograde: $\Rightarrow \quad \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{Bmatrix} 0{,}782 \\ 1{,}58 \end{Bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{Bmatrix} -0{,}000622 \\ -0{,}000202 \end{Bmatrix}$

Malgré un résidu faible correspondant à la précision à 3 chiffres utilisée, la solution approchée $\widehat{\boldsymbol{x}}$ est loin de la solution exacte $\boldsymbol{x}^T = \{1 \quad 1\}$. Ceci est dû au conditionnement de la matrice ($\kappa(\boldsymbol{A}) > 8000$)

Remarques générales sur la factorisation LU:

- Si deux factorisations de la même matrice sont disponibles: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U} = \hat{\boldsymbol{L}}\hat{\boldsymbol{U}}$, alors $\hat{\boldsymbol{L}}^{-1}\boldsymbol{L} = \hat{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{D}$, avec $\boldsymbol{D}$ une matrice diagonale.

- Si $\boldsymbol{L}$ et $\hat{\boldsymbol{L}}$ sont des matrices triangulaires inférieures *unitaires (termes diagonaux égaux à 1)*, alors $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}$, et donc $\boldsymbol{L} = \hat{\boldsymbol{L}}$ et $\boldsymbol{U} = \hat{\boldsymbol{U}}$.

- Pour une factorisation $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ avec $\boldsymbol{L}$ une matrice triangulaire inférieure unitaire, alors cette factorisation est unique.

- La procédure de factorisation requiert environ $n^3/3$ opérations de multiplication et un nombre similaire d'additions. Auxquelles il faut rajouter environ $2n^2$ opérations pour la résolution du système par substitution.

- Le calcul direct de l'inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ requiert environ n^3 opérations. Pour le calcul de l'inverse, on résout n systèmes linéaires en plus de la factorisation, ce qui est donc plus coûteux que la résolution d'un seul système après la factorisation.

Méthode (factorisation) de Cholesky:

- Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice symétrique définie positive, alors la factorisation *LU* peut être remplacée par la factorisation de Cholesky $(\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}^T)$:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$$

Avec $\boldsymbol{L}$ une matrice triangulaire inférieure avec des termes diagonaux positifs.

Exemple:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}} \ , \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} \ , \qquad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

Algorithme de factorisation de Cholesky pour une matrice $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$:

Pour k = 1 , n

$l_{kk} = \sqrt{a_{kk}}$

pour j = k+1 , n

$l_{jk} = a_{jk}/l_{kk}$

pour i = k+1 , j

$a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}l_{jk}$

retourner $\boldsymbol{L} = \left(l_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

- La factorisation de Cholesky requiert $\boldsymbol{n^3/6}$ opérations de multiplication, ce qui est deux fois moins que la factorisation LU.

- Elle ne requiert aucun changement de pivot au cours de la procédure.

Raffinement itératif des résultats:

On suppose qu'on a une première approximation $\boldsymbol{x_0}$ de la solution du système $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Le résidu est égal à:

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0$$

Pour améliorer la solution, on résout $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{r}_0$ et on incrémente la solution:

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}_0$$

$\boldsymbol{x}_1$ est une meilleure solution, puisque:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}_0) + \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{b}$$

Le processus peut être répété jusqu'à l'obtention d'un résultat à la machine précision près.

- Le raffinement itératif nécessite de stocker la matrice et sa factorisation en même temps.

- Puisque la factorisation LU de la matrice $\boldsymbol{A}$ est déjà connue, le processus de raffinement du résultat nécessite seulement la résolution d'un système triangulaire par substitution.

- Pour pallier les erreurs d'annulation, le résidu doit généralement être calculé avec une précision élevée pour produire des résultats pertinents.

MOHAMMED VI POLYTECHNIC UNIVERSITY

Fin de la séance