

## Лабораторная работа №1

1. Прочитать стр. 85-90 учебника («Численные методы», Н.Н. Калиткин). Нужные страницы см. после всех вариантов.
2. Вычислить точное значение интеграла от функции из Вашего варианта  $\int_a^b f(x)dx$  (из пункта а вручную).
3. Приблизленно вычислить значение интеграла, разбивая отрезок сначала на 10 частей, затем на 100; найти абсолютную и относительные погрешности (в системе Mathematica или в др. приложениях)
  - а) по формуле **трапеций**
  - б) по формуле **прямоугольников** (средних)
  - в) по формуле **Симпсона**

### Вариант 1

$$a=0; b=1;$$

- а)  $x \cos(5x)$
- б)  $e^{-x^2}$

### Вариант 2

$$a=-1; b=2;$$

- а)  $xe^{-x^2}$
- б)  $\frac{\sin(x)}{x}$

### Вариант 3

$$a=-1; b=5;$$

- а)  $\frac{x}{3x^2+1}$
- б)  $e^{-2x^2+x-1}$

### Вариант 4

$$a=1; b=4;$$

- а)  $\frac{6x+1}{e^{2x}}$
- б)  $\frac{\cos(x)}{x}$

**Вариант 5**

$$a = 2; b = 3;$$

а)  $\sin(2x)\cos^3(x)$

б)  $\frac{\cos(5x)}{x}$

**Вариант 6**

$$a = 0.1; b = 1;$$

а)  $\frac{\operatorname{Arctg}(3x)}{9x^2 + 1}$

б)  $\frac{1}{\ln(x+1)}$

**Вариант 7**

$$a = 5; b = 7;$$

а)  $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

б)  $\frac{\sin(x)}{x^2}$

**Вариант 8**

$$a = -3; b = 0;$$

а)  $\frac{5}{\sqrt{3-8x+19}}$

б)  $\sin(x^2)$

**Вариант 9**

$$a = -4.5; b = -4.3;$$

а)  $\frac{\operatorname{tg}(5x)}{\cos^2(5x)}$

б)  $\cos(5x^2 - 3x + 10)$

**Вариант 10**

$$a = -0.7; b = 0.5;$$

а)  $\frac{x^5 + 3x^2}{4 - 9x^6}$

б)  $\sin(9x^2 - x)$

**Вариант 11**

$$a = 0.1; b = 0.5;$$

$$\text{a) } \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3-9x^2} \operatorname{Arctg}(\sqrt{3}x)}$$

$$\text{б) } \frac{\sin(x)}{x^3}$$

**Вариант 12**

$$a = -0.25; b = 0.25;$$

$$\text{a) } \frac{1}{\cos(5x)}$$

$$\text{б) } -e^{7-12x^2}$$

**Вариант 13**

$$a = 1; b = 3;$$

$$\text{a) } \frac{1}{5\sin^2(3x) + 2\cos^2(3x)}$$

$$\text{б) } \frac{e^x}{x^2}$$

**Вариант 14**

$$a = -4; b = 1;$$

$$\text{a) } \operatorname{Arctg}(x)$$

$$\text{б) } -\sin(4-x^2)$$

**Вариант 15**

$$a = 0; b = 0.5;$$

$$\text{a) } x4^{1-7x}$$

$$\text{б) } \frac{\sin(9-15x)}{9-15x}$$

**Вариант 16**

$$a = 0; b = 1;$$

$$\text{a) } \operatorname{tg}^2(x)$$

$$\text{б) } \frac{\cos(7x+2)}{7x+2}$$

**Вариант 17**

$$a = -0.5; b = -0.3;$$

$$\text{a) } \frac{1}{x^2 \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{б) } \frac{1}{2x + \log(x+2)}$$

**Вариант 18**

$$a = 0; b = 1;$$

$$\text{a) } x \sin(3x - 2)$$

$$\text{б) } e^{-x^2 - x + 2}$$

**Вариант 19**

$$a = -4; b = -3;$$

$$\text{a) } x 0.5^{x^2}$$

$$\text{б) } \frac{\sin(7x+1)}{7x+1}$$

**Вариант 20**

$$a = -1; b = 4;$$

$$\text{a) } \frac{5x}{x^2 - 25}$$

$$\text{б) } e^{-x^2 + 3x - 4}$$

**Вариант 21**

$$a = 0.5; b = 3;$$

$$\text{a) } \frac{2x+5}{2^{2x}}$$

$$\text{б) } \frac{\sin(x)}{x^2}$$

**Вариант 22**

$$a = 1; b = 3;$$

$$\text{a) } \sin(x) \cos(2x)$$

$$\text{б) } \frac{\cos(x)}{x^2}$$

**Вариант 23**

$a = 0; b = 0.1;$

a)  $\frac{\operatorname{Arcsin}^2(7x) + 1}{\sqrt{1 - 49x^2}}$

б)  $\frac{1}{\ln(4x + 1.1)}$

**Вариант 24**

$a = 3; b = 7;$

a)  $\frac{\sqrt[3]{\ln^2(2x)} - 3\ln(2x) + 5}{5x}$

б)  $\frac{\sin(x)}{x^3}$

**Вариант 25**

$a = -3; b = 0;$

a)  $\frac{12}{\sqrt[3]{1 - 2x} + 1}$

б)  $\sin(2x^2 - 1)$

**Вариант 26**

$a = -4.5; b = -2;$

a)  $\frac{\sin(x)}{\sqrt[5]{\cos^2(x)}}$

б)  $\cos(x^2 - 3x + 10)$

**Вариант 27**

$a = -0.5; b = 0.5;$

a)  $\frac{x + 3}{2 - 7x^2}$

б)  $\sin(2x^2 - x + 1)$

**Вариант 28**

$a = 2; b = 9;$

a)  $\frac{\operatorname{Arccos}(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2 - 4x^2}}$

$$\text{б) } \frac{\sin(x)}{x+1}$$

**Вариант 29**

$$a=0; b=2;$$

$$\text{а) } \frac{1}{2\sin(x) + \cos(x)}$$

$$\text{б) } 2e^{-5x^2-x}$$

**Вариант 30**

$$a=1; b=3;$$

$$\text{а) } \frac{1}{\sin^2(5x-2) + 2\cos^2(5x-2)}$$

$$\text{б) } \frac{e^{4x-3}}{x}$$

**Вариант 31**

$$a=-3; b=2;$$

$$\text{а) } x \operatorname{Arctg}(x)$$

$$\text{б) } \cos(x^2 + 2)$$

**Вариант 32**

$$a=-0.5; b=-0.1;$$

$$\text{а) } \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

$$\text{б) } \frac{1}{x + \log(x+1)}$$

## ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В главе IV изложены основные методы численного интегрирования. В § 1 выведены формулы вычисления однократных интегралов, основанные на полиномиальной аппроксимации подынтегральной функции: простейшие формулы трапеций и средних и некоторые формулы более высокой точности, в том числе формулы наивысшей алгебраической точности (Гаусса—Кристоффеля и Маркова). Исследованы погрешности этих формул и характер их сходимости. В § 2 рассмотрены способы интегрирования функций, для которых полиномиальная аппроксимация не обеспечивает приемлемой точности. В § 3 описанные методы перенесены на случай кратных интегралов. В § 4 изложены основы метода Монте-Карло применительно к вычислению интегралов.

## § 1. Полиномиальная аппроксимация

**1. Постановка задачи.** Пусть требуется найти определенный интеграл

$$F = \int_a^b f(x) \rho(x) dx, \quad \rho(x) > 0, \quad (1)$$

где функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а весовая функция  $\rho(x)$  непрерывна на интервале  $(a, b)$ . Выразить интеграл через элементарные функции удается редко, а компактный и удобный для доведения до числа ответ получается еще реже. Поэтому обычно заменяют  $f(x)$  на такую аппроксимирующую функцию  $\varphi(x, a) \approx f(x)$ , чтобы интеграл от нее легко вычислялся в элементарных функциях.

Чаще всего  $f(x)$  заменяют некоторым обобщенным интерполяционным многочленом. Поскольку такая аппроксимация линейна относительно параметров, то функция при этом заменяется некоторым линейным выражением, коэффициентами которого служат значения функции в узлах:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x) + r(x), \quad (2)$$

где  $r(x)$  — остаточный член аппроксимации. Подставляя (2) в (1),

получим формулу численного интегрирования (*квадратурную формулу*)

$$F = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) + R, \quad (3)$$

$$c_i = \int_a^b \varphi_i(x) \rho(x) dx, \quad R = \int_a^b r(x) \rho(x) dx,$$

где величины  $x_i$  называют *узлами*,  $c_i$  — *весами*, а  $R$  — *погрешностью* или *остаточным членом* формулы. Интеграл приближенно заменяется суммой, похожей на интегральную сумму, причем узлы и коэффициенты этой суммы не зависят от функции  $f(x)$ . Интерполяционный многочлен (2) может быть не только лагранжева, но и эрмитова типа; в последнем случае в сумму (3) войдут производные функции в узлах.

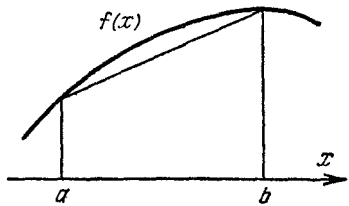


Рис. 16.

Лучше всего изучена замена  $f(x)$  алгебраическим многочленом; она рассматривается в этом параграфе. Обычно будем полагать  $\rho(x) \equiv 1$ . Случаи не единичного веса будут особо оговариваться.

**2. Формула трапеций.** Заменяем функцию на отрезке  $[a, b]$  многочленом Лагранжа первой степени с узлами  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$ . Это соответствует замене кривой на секущую. Искомый интеграл, равный площади криволинейной фигуры, заменяется на площадь трапеции (рис. 16); из геометрических соображений нетрудно написать для него *формулу трапеций*

$$F = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} (b - a) [f(a) + f(b)]. \quad (4)$$

Это одна из простейших квадратурных формул. Найдем ее погрешность. Для этого разложим  $f(x)$  по формуле Тейлора, выбирая середину отрезка за центр разложения и предполагая наличие у функции требуемых по ходу рассуждений непрерывных производных:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x}) f'(\bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^2 f''(\bar{x}) + \dots, \quad (5)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} (a + b).$$

Погрешность есть разность точного и приближенного значений интеграла. Подставляя в (4) разложение (5), получим главный



член погрешности

$$R = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \approx -\frac{1}{12} (b-a)^3 f''(\bar{x}), \quad (6)$$

где члены, отброшенные при замене точного равенства приближенным, содержат старшие производные и более высокие степени длины отрезка интегрирования. Заметим, что содержащиеся  $f(\bar{x})$  и  $f'(\bar{x})$  члены разложения (5) уничтожились и не дали вклада в погрешность; это нетрудно было предвидеть, ибо формула трапеций по самому выводу точна для многочлена первой степени.

Вообще говоря, длина отрезка  $b-a$  не мала, поэтому остаточный член (6) может быть велик. Для повышения точности на отрезке  $[a, b]$  вводят достаточно густую сетку  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ . Интеграл разбивают на сумму интегралов по шагам сетки и к каждому шагу применяют формулу (4). Получают *обобщенную формулу трапеций*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) (f_{i-1} + f_i), \\ R &\approx -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^3 f''(\bar{x}_i). \end{aligned} \quad (7)$$

На равномерной сетке она упрощается:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx h \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2} f_N \right), \\ R &\approx -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^N h^3 f''(\bar{x}_i) \approx -\frac{1}{12} h^2 \int_a^b f''(x) dx, \\ h &= x_i - x_{i-1} = \text{const.} \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку в оценке (6) были отброшены члены, содержащие более высокие степени длины интервала, то выражение остаточного члена (8) является асимптотическим, т. е. выполняющимся при  $h \rightarrow 0$  с точностью до членов более высокого порядка малости. Но для справедливости этой оценки необходимо существование непрерывной  $f''(x)$ ; если  $f''(x)$  кусочно-непрерывна, то удастся сделать лишь мажорантную оценку

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \quad M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|. \quad (9)$$

Таким образом, обобщенная формула трапеций имеет второй порядок точности относительно шага сетки. На равномерной сетке это видно непосредственно, а на квазиравномерной сетке, порожденной преобразованием  $x = \xi(t)$ , остаточный член (7) можно привести к виду

$$R \approx -\frac{1}{12N^2} \int_a^b (\xi')^2 f''(x) dx, \quad (10)$$

если используемые в этой формуле производные непрерывны. Для произвольной неравномерной сетки асимптотическая оценка в виде суммы (7) справедлива, но неудобна для использования; можно пользоваться мажорантной оценкой (9), подразумевая под шагом  $h = \max(x_i - x_{i-1})$ .

**3. Формула Симпсона.** Вычислим интеграл по обобщенной формуле трапеций сначала на равномерной сетке с шагом  $h$ , а затем на сетке с вдвое более крупным шагом; вторая сетка получается из первой выбрасыванием узлов через один. Из вида остаточного члена (8) следует, что результат, полученный по формуле трапеций, можно уточнять методом Рунге. Проводя такое уточнение для отрезка, содержащего узлы  $x_0, x_1, x_2$ , получим формулу Симпсона

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{1}{3} [4F_{\text{трап}}(h) - F_{\text{трап}}(2h)] = \\ &= \frac{1}{3} \left[ 4h \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \frac{1}{2} f_2 \right) - 2h \left( \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} f_2 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{3} h (f_0 + 4f_1 + f_2), \quad h = x_1 - x_{i-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обобщенная формула Симпсона для равномерной сетки и четного числа шагов  $N$  имеет вид

$$F \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N). \quad (12)$$

Для квазиравномерных или произвольных неравномерных сеток формул такого типа не составляют.

Исключение главного члена погрешности формулы трапеций означает, что мы перешли к аппроксимации параболой, и формула Симпсона точна для любого многочлена второй степени. Однако нетрудно проверить, что для  $f(x) = x^3$  эта формула также дает точный результат, т. е. она точна для многочлена третьей степени! Это объясняется тем, что на равномерной сетке остаточный член формулы трапеций разлагается только по четным степеням шага и однократное применение метода Рунге увеличивает порядок точности на два.

Как и для формулы трапеций, погрешность формулы Симпсона вычисляется подстановкой разложения (5), в котором теперь надо удерживать большее число членов и для каждой пары интервалов  $(x_{i-1}, x_i)$  и  $(x_i, x_{i+1})$  за центр разложения взять узел  $x_i$ . Из предыдущего рассуждения видно, что главный вклад в погрешность дает только пятый член разложения  $(1/24)(x - x_i)^4 f^{(IV)}(x_i)$ . Подставляя этот член в выражение суммарной погрешности двух соседних

интервалов, легко найдем

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \approx -\frac{h^5}{90} f^{IV}(x_i).$$

После суммирования по парам соседних интервалов получим

$$R \approx -\frac{h^4}{180} \int_a^b f^{IV}(x) dx = O(h^4), \quad (13)$$

т. е. формула Симпсона имеет четвертый порядок точности, а численный коэффициент в остаточном члене очень мал. Благодаря этим обстоятельствам формула Симпсона обычно дает хорошую точность при сравнительно небольшом числе узлов (если четвертая производная функции не слишком велика).

Асимптотическая оценка (13) выведена в предположении существования непрерывной четвертой производной. Если  $f^{IV}(x)$  кусочно-непрерывна, то справедлива только мажорантная оценка, аналогичная (9).

**Пример.** Вычислим интеграл  $F = \int_0^1 e^x dx \approx 1,7183$ . В таблице 9 приве-

дены результаты вычислений по формулам трапеций и Симпсона при разных шагах. Вторая формула обеспечивает гораздо более высокую точность при том же шаге.

Т а б л и ц а 9

| $h$  | Трапеций | Симпсона |
|------|----------|----------|
| 1    | 1,8591   | —        |
| 0,5  | 1,7539   | 1,7189   |
| 0,25 | 1,7272   | 1,7183   |

Заметим, однако, что формулу Симпсона можно было вообще не вводить. Проведем расчеты по формуле трапеций на последовательности сгущающихся вдвое сеток и применим однократный процесс Рунге не к формуле, а непосредственно к найденному на каждой сетке значению интеграла. Результат будет тот же, что и при расчете по формуле Симпсона; попутно будет оценена фактическая погрешность формулы трапеций.

К самой формуле Симпсона, как следует из вида ее остаточного члена, тоже можно применять метод Рунге. Это эквивалентно применению рекуррентного процесса Рунге к формуле трапеций.

**4. Формула средних.** Если на отрезке  $[a, b]$  взять единственный узел квадратурной формулы  $x_0$ , то функция аппроксимируется многочленом нулевой степени — константой  $f(x_0)$ . Поскольку симметрия формулы численного интегрирования приводит к повышению ее точности, то выберем в качестве единственного узла середину отрезка интегрирования  $\bar{x} = \frac{1}{2}(a + b)$ . Приблизительно заменяя площадь криволинейной трапеции площадью прямоугольника (рис. 17), получим *формулу средних*

$$F = \int_a^b f(x) dx \approx (b - a) f(\bar{x}), \quad \bar{x} = \frac{1}{2}(a + b). \quad (14)$$

Погрешность этой формулы вычислим стандартным приемом — подстановкой разложения (5); в данном случае за центр разложения надо брать середину отрезка, т. е. узел квадратурной формулы. Несложные выкладки показывают, что

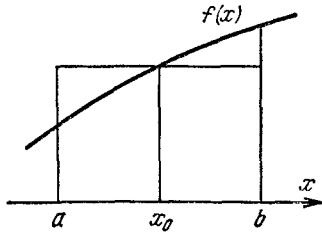


Рис. 17.

$$R = \int_a^b f(x) dx - (b-a) f(\bar{x}) \approx \frac{1}{24} (b-a)^3 f''(\bar{x}). \quad (15)$$

При вычислении уничтожился не только первый, но и второй член разложения Тейлора. Это связано с симметричным построением формулы средних и означает, что формула точна для любой линейной функции.

Так же как и для формулы трапеций, для повышения точности вводится достаточно подробная сетка  $x_i$  и составляется обобщенная формула средних

$$F \approx \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right), \quad R \approx \frac{1}{24} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^3 f''(\bar{x}_i). \quad (16)$$

На равномерной сетке она имеет вид

$$F \approx h \sum_{i=1}^N f_{i-1/2}, \quad R \approx \frac{h^3}{24} \int_a^b f''(x) dx. \quad (17)$$

**Замечание 1.** Остаточный член формулы средних примерно вдвое меньше, чем у формулы трапеций. Поэтому если значения функции одинаково легко определяются в любых точках, то лучше вести расчет по более точной формуле средних. Формулу трапеций употребляют в тех случаях, когда функция задана только в узлах сетки, а в серединах интервалов неизвестна.

**Замечание 2.** Знаки главного члена погрешности у формул трапеций и средних разные. Поэтому, если есть расчеты по обеим формулам, то точное значение интеграла лежит, как правило, в вилке между ними. Деление этой вилки в отношении 2:1 дает уточненный результат, соответствующий формуле Симпсона.

**Замечание 3.** К формуле средних тоже можно применять метод Рунге и либо непосредственно уточнять значение интеграла, либо строить формулы повышенной точности. Те формулы, которые при этом будут получаться, и те, которые были рассмотрены в предыдущих пунктах, — частные случаи так называемых формул Котеса.