Rapport de documentations

MARGUERITE Alain
RINCE Romain

Université de Nantes
2 rue de la Houssinière, BP92208, F-44322 Nantes cedex 03,
FRANCE

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce document est de décrire les notions essentielles à retenir en ce début de projet d'initiation à la recherche. Ces notions font parties d'un même sujet d'étude, au cœurs des travaux de l'équipe OPTI. Elles concernent le sujet des contraintes et des intervalles. Aussi des notions d'optimisation seront abordées.

2 Méthodes de calculs

Les méthodes de calcul sont les solutions apportées pour permettre la résolution de problèmes mathématiques en machine ; en particulier lorsque l'on cherche à résoudre des problèmes sur les nombres réels. Elles permettent par exemple la résolution des CSP (Constraint Satisfaction Solver) ou GCSP (Geometric Constraint Satisfaction Solver) peuvent être divisées en deux catégories les méthodes formelles et les méthodes numériques. Les méthodes de calcul sont les solutions apportées pour permettre la résolution de problèmes mathématiques en machine ; en particulier lorsque l'on cherche à résoudre des problèmes sur les nombres réels. Pour plus de détails sur la représentation flottante, on pourra se référer à la thèse de Frédéric Goualard [F.G00].

2.1 Méthodes formelles

Les méthodes formelles permettent de résoudre des système d'équations ou d'inéquations en utilisant au maximum le calcul symbolique. Les approches les plus classiques des méthodes formelles utilisent des théories, telles que les idéaux polynomiaux pour les bases de Gröbner, ou la théorie des déterminant pour la méthode du résultant. Ces méthodes ont l'énorme avantage de retourner des solutions exactes et complètes d'un système d'équation, ou tout du moins de minimiser l'utilisation de l'arithmétique flottante. L'équation (1) serait ainsi considéré comme équivalente à $-2a$.Cependant les résolutions de problèmes par des méthodes formelles sont forcément restreintes par les possibilités du calcul symbolique et ne pourront donc pas toujours offrir de solution et de mettre en œuvre des algorithmes de complexité exponentielles.

2.2 Méthodes numériques

Les méthodes numériques consistent à évaluer de façon calculatoire la ou les solutions d'un problème. En effet elles sont capablent de résoudre n'importe quel système d'équation (ou d'égalités). Ainsi si l'on cherche la valeur de l'équation suivante pour a et b fixés :

$$\frac{(a-b)^2 - a^2 - b^2}{b} \tag{1}$$

la machine va affecter directement les calculs pour évaluer le résultats. Or l'utilisation de la représentation flottante et de son arithmétique pour simuler les opérations réelles va entrainer une diffusion et une augmentation de l'erreur de calcul, à tel point que l'on ne peut parfois plus assurer la validité d'une solution. On pourra d'ailleurs citer à titre d'exemple le problème de l'inversion d'une matrice mal conditionnée. Cependant ces calculs numériques utilisés par des méthodes de résolutions par intervalles permettent de contourner ces problèmes.

3 Résolution par Intervalles

Les méthodes formelles et numériques, bien performantes par certains aspects, sont rapidement limité dans les calculs numériques exacts en préservant toutes solutions. C'est dans ce cadre que la méthode de résolution par intervalles ont toutes leurs places. Construite grâce à l'arithmétique des intervalles, elle utilise aussi des notions apportées par la programmation par contrainte.

3.1 L'Arithmétique des intervalles

Cette arithmétique permet un calcul sur un ensembles $\mathbb{I}$ d'intervalles sur $\mathbb{R}$. Les bornes $b1$ et $b2$ d'intervalle $[b1, b2]$ sont choisie en prenant un arrondi respectueusement inférieur à $b1$ et supérieur à $b2$ de manière à garantir l'exactitude des calculs. L'extension des fonctions aux intervalles, introduite par Moore en 1966, permet une transition à des intervalles grâce à opérateur d'encadrement. Une liste exhaustive des opérations de cet opérateur est listée dans [C.J02].

3.2 Utilisation des intervalles pour la notion de contraintes

En utilisant l'arithmétique des intervalles, la méthode de résolution par intervalles utilisent des notions de programmation par contraintes. On y retrouve celle de consistance. La consistance permet d'évaluer le rapport entre les variables d'un domaine et les solutions effectives d'un problème. Par exemple un CSP est globalement consistant lorsque toutes les valeurs des variables de son domaine appartiennent au moins à une solution. On devine qu'il peut être intéressant pour un CSP de posséder la consistance la plus forte possible. Ainsi les opérations pour la résolution de problèmes seront moins nombreuses.

3.3 Exemples d'application

Les exemples d'applications sont nombreux et encouragés pas des efforts économiques. En effet les performances de précision de la méthode attire le monde industriel qui y voit à juste titre, l'occasion de diminuer ses coûts de production par exemple. Par ailleurs, la seule possibilité de trouver un minimum global intéresse régulièrement les industriels. On retrouve en effet dans [Sch03], le détails d'applications dans le secteur de la chimie industrielle mais aussi dans celui de la biologie avec une étude sur les protéines. La science fondamentale met aussi en application ses outils. C'est le cas en mathématique par exemple de problèmes tel que la conjecture de Kepler ou encore le maximum de clique.

4 Mise en œuvre de la méthode de résolution par intervalles

4.1 Données en entrée

Un problème de satisfaction de contraintes est défini par 3 éléments :

- Un ensemble de variable $\mathbf{V} = \{v_1, ..., v_n\}$.
- Un domaine de valeurs pour chaque variable. Chaque valeur du domaine D_i associé à la variable v_i est une valeur que peut potentiellement prendre v_i : $\mathbf{D} = D_1 \times ... \times D_n$.
- Un ensemble de contraintes (relations) $\mathbf{C}$ restreignant les variables de $\mathbf{V}$ défini ci-dessus : $\mathbf{C} = \{c_1, ..., cm\}$.

4.2 Algorithmes

La méthode de résolution par intervalles met en oeuvre deux opérations détaillées dans [Neu04] :

- Branch

  Diviser pour mieux régner

  Cette méthode consiste à diviser récursivement un problème en deux sous problèmes. Appliquée à la méthode de résolution par intervalles, on découpe en deux l'intervalle concerné (en son milieu ou non). On obtient alors deux problèmes plus «faciles» à étudier.
- Bound

  La découpe d'un problème en sous problèmes peut amener à une situation ou un des sous problèmes créés ne contient aucune solution. On peut alors étudier et trier ces sous problèmes pour en supprimer un espaces de recherche superflu. Cette étape est appelée **pruning**.

4.3 Données en sortie

En sortie l'algorithme va nous retourner un ensemble de boîtes ou d'enveloppes. Cet ensemble garantissant, à contrario des méthodes numériques classiques, que toutes les solutions y sont incluses. Il est d'ailleurs possible de savoir si tout l'espace d'une enveloppe est solution du problème. En contrepartie on ne peut garantir l'existence d'une solution dans une enveloppe, il peut donc exister un certain flou autour des résultats de l'algorithme.

Bibliographie

[C.J02] C.Jermann. *Résolution de contraintes géométriques par rigidification récursive et propagation d'intervalles*. PhD thesis, Université de Nice-SOPHIA ANTIPOLIS UFR SCIENCES, Decembre 2002.

[F.G00] F.Goualard. *Langage et environnements en programmation par contraintes d'intervalles*. PhD thesis, Université de Nantes, Juillet 2000.

[Neu04] Arnold Neumaier. Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction. In A. Iserles, editor, *Acta Numerica*, 2004.

[Sch03] Hermann Schichl. *Mathematical Modeling and Global Optimization*. PhD thesis, University of Vienna, November 2003.