

Traitement d'images [3EIB2]

Alain Lebret (alain.lebret@ensicaen.fr)

Crédits : le canevas de ce cours est inspiré par celui de E. Agu (Worcester Polytechnic Institute, Massachusetts, USA)
Toutes les figures sont sous licence Creative Commons

À propos du cours

Prérequis

- Bases en Python (nous utilisons [JupyterLab](#) en TP)
- Bases en algèbre linéaire ; transformée Fourier

3

À propos du cours

Deux parties

1. Techniques de traitement d'images

- Cours : 4 h / TP : 18 h
- Intervenant : Alain Lebret (alain.lebret@ensicaen.fr)

2. Introduction à l'apprentissage profond pour le traitement d'images

- Cours : 2h / TP : 4h
- Intervenant : Loïc Simon (loic.simon@ensicaen.fr)

2

À propos du cours

Plan de la partie 1

1. Introduction
2. Couleurs et espaces de couleurs
3. Histogrammes & opérations point à point
4. Filtres spatiaux
5. Filtres fréquentiels
6. Morphologie mathématique
7. Régions

4

1. Introduction

Qu'est-ce qu'une image ?

Nous introduirons aussi les images 3D (mais pas 4D)

Matrice 2D de valeurs d'intensités (niveaux de gris ou couleurs)

Ensemble de valeurs d'intensités

Coordonnées

$$I(u, v) \in \mathbb{P} \text{ et } u, v \in \mathbb{N}$$



$F(x, y)$

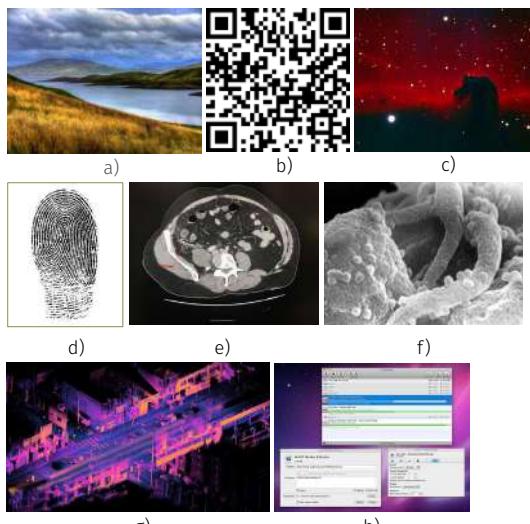
$I(u, v)$

104	104	104	103	103	103	103	102	103	103
105	105	102	104	104	103	103	104	104	103
106	106	106	106	106	106	105	105	105	105
106	107	107	106	106	107	108	107	107	107
108	108	109	109	109	109	110	111	110	111
110	109	107	107	108	109	109	109	108	109
107	107	107	106	109	109	109	107	106	107
106	105	103	103	103	104	103	103	103	104



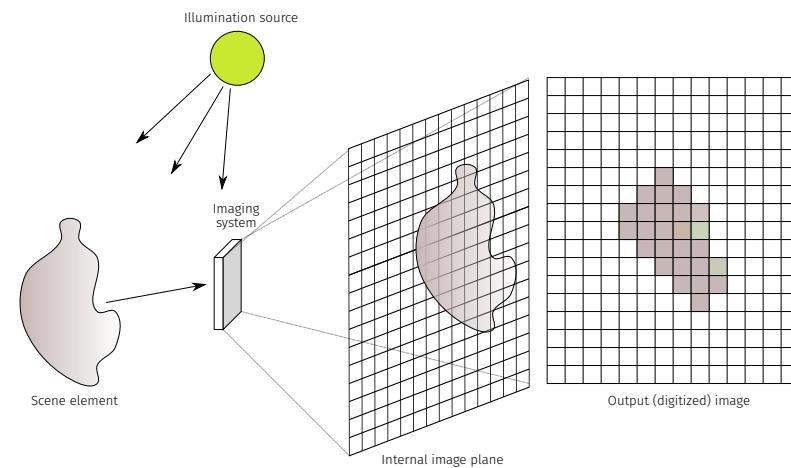
Exemples d'images numériques

- a) Panorama
- b) QR-code
- c) Objet astronomique
- d) Empreinte
- e) Image scanner
- f) Image de microscope
- g) Image Lidar
- h) Capture d'écran



7

Système d'imagerie



8

Image numérique ?

L'image issue d'une numérisation est une approximation d'une scène réelle



9

Que propose le traitement d'images ?

Algorithmes qui modifient une image et en créent une nouvelle



Les objectifs peuvent être de :

- Éditer une image
- Afficher et imprimer une image
- Améliorer une image
- Compresser une image

11

Formats d'images numériques

Formats courants

1 valeur par point/pixel (N&B ou niveaux de gris)

3 valeurs par point/pixel (rouge, vert et bleu)

4 valeurs par point/pixel (rouge, vert, bleu, + "alpha" ou opacité)



Niveaux de gris

RGB

RGBA

10

Exemples : débruitage

Image bruitée

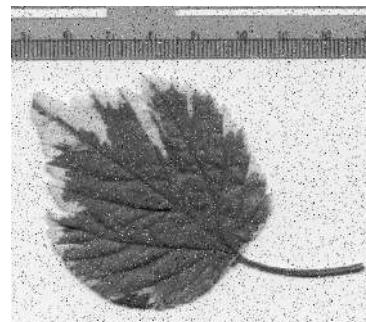


Image débruitée



12

Exemples : ajustement de contraste

Image faiblement contrastée



Image d'origine



Image fortement contrastée



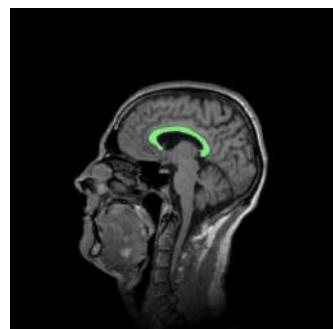
Exemples : détection de contours



13

14

Exemples : extraction de régions et segmentation



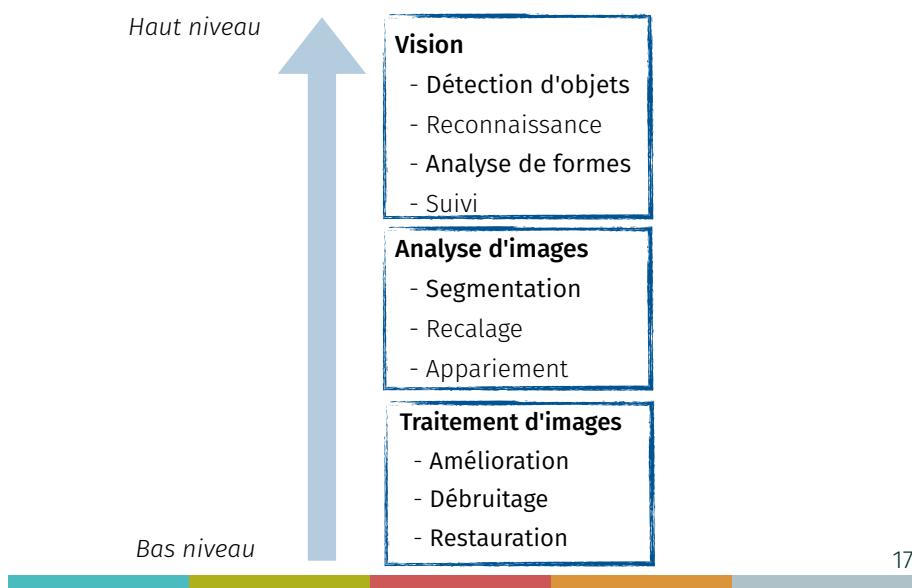
15

Exemples : restauration (in-painting)

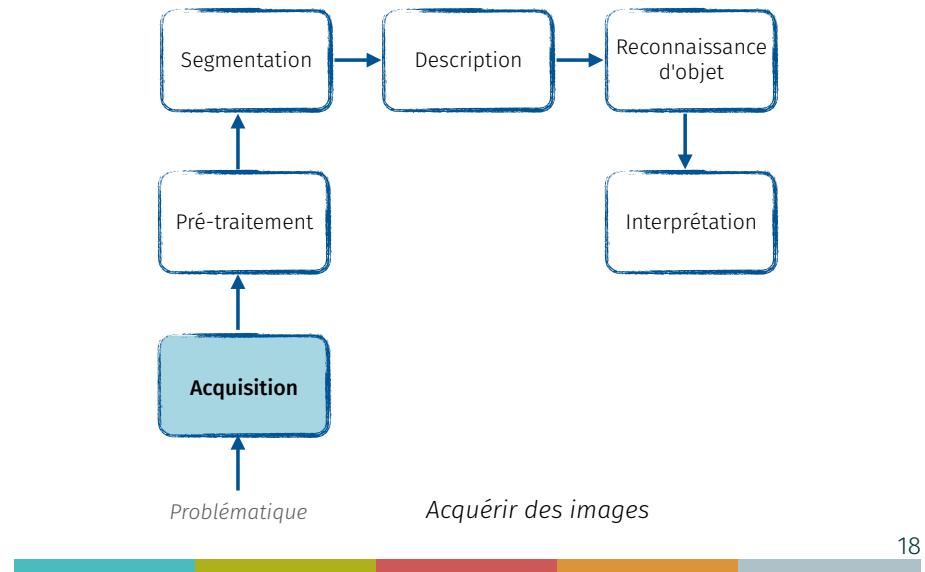


16

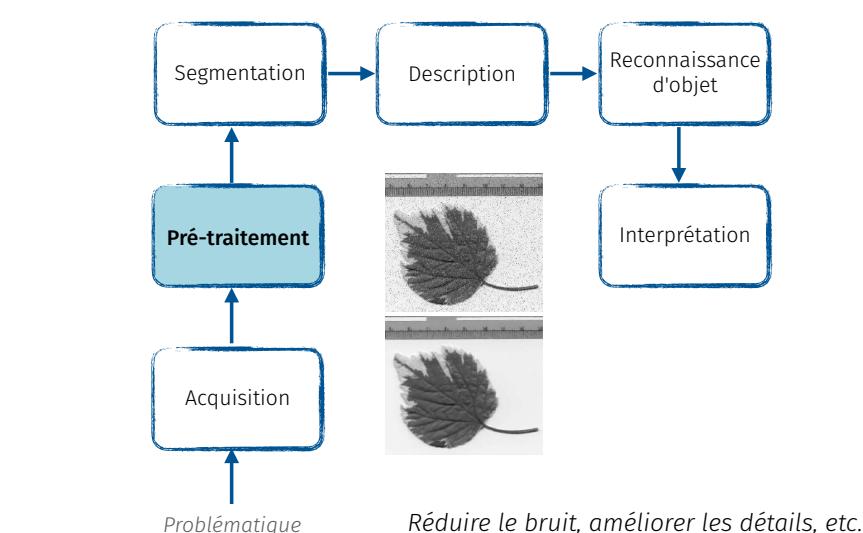
Relations entre les domaines



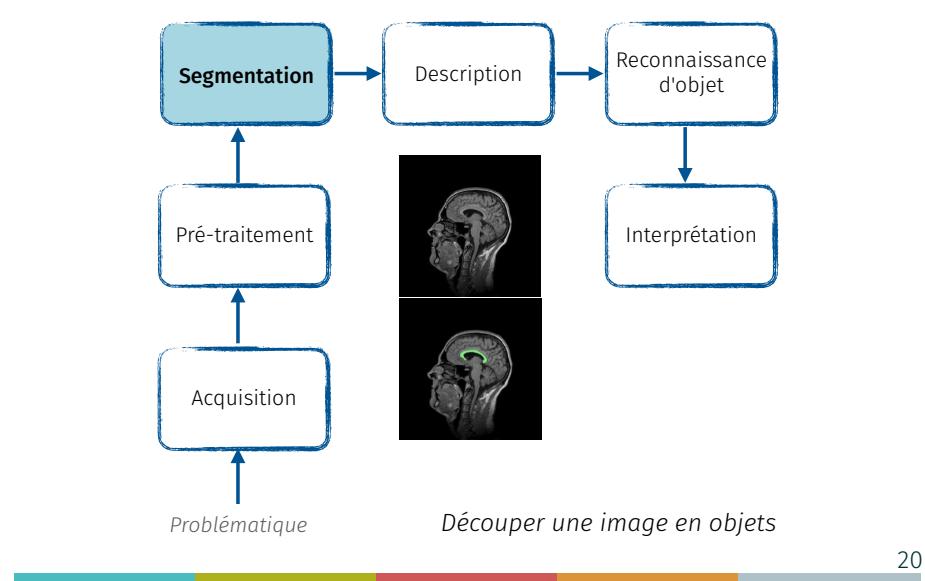
Étapes clés d'un système de vision



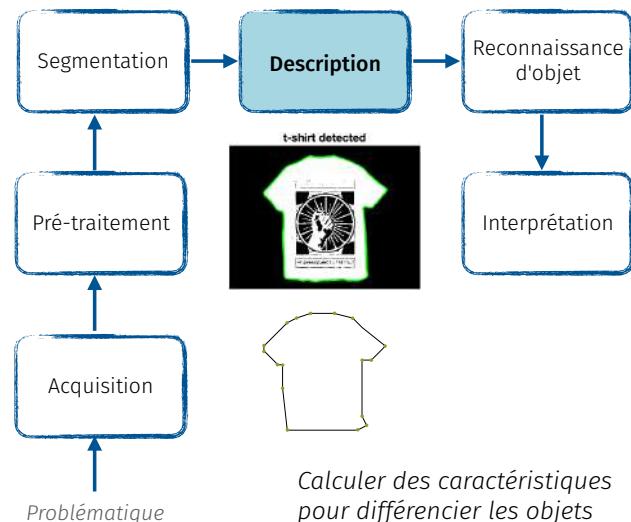
Étapes clés d'un système de vision



Étapes clés d'un système de vision

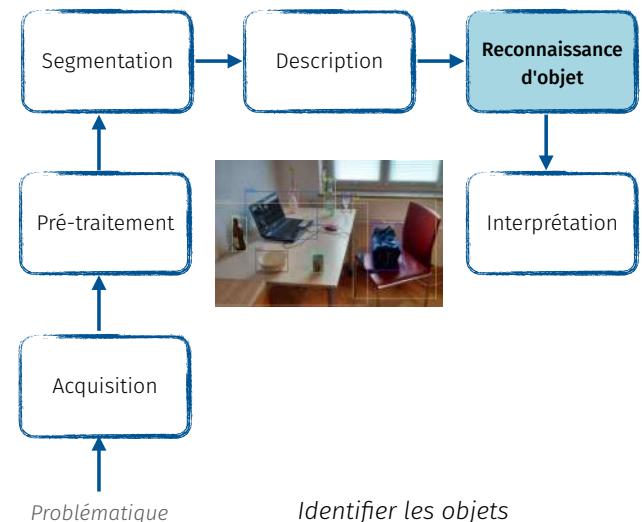


Étapes clés d'un système de vision



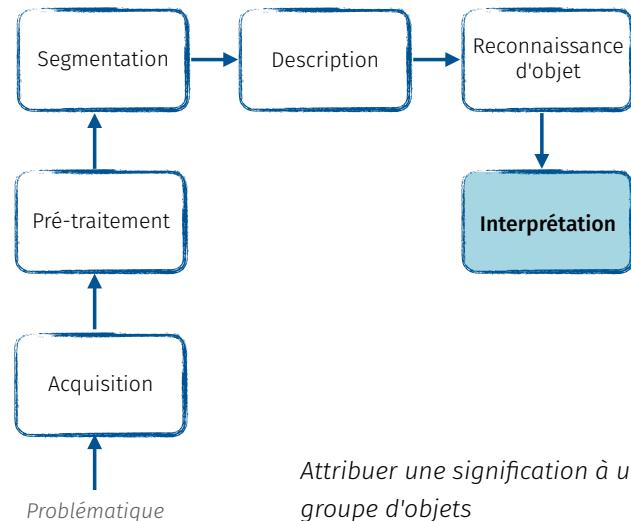
21

Étapes clés d'un système de vision



22

Étapes clés d'un système de vision



23

Formats des fichiers images

Exemples de formats

- Portable Network Graphics (PNG)
- Graphics Interchange Format (GIF)
- Tagged Image File Format (TIFF)
- Portable Bitmap Format (PBM), JPEG, BMP

La valeur d'un pixel peut être

- **Binaire** : 0 ou 1 (affichée avec 0 ou 255)
- **Niveau de gris** : intervalle 0-255
- **Couleur** : couleurs RGB dans l'intervalle 0-255 pour chaque canal
- **Liée à l'application** (ex. valeurs flottantes en imagerie médicale, astronomie)

24

Nombre de bits par pixel ?

Images en niveaux de gris

Composantes	Bits/pixel	Intervalle	Utilisation
1	1	0..1	Binaire : document, fax
1	8	0...255	Universel : photo, numérisation, impression
1	12	0...4095	Haute qualité : photo, numérisation, impression
1	14	0..16383	Professionnel : photo, numérisation, impression
1	16	0..65535	Plus haute qualité : imagerie médicale, astronomie

Images couleur

Composantes	Bits/pixel	Intervalle	Utilisation
3	24	[0...255] ³	RGB universel : photo, numérisation, impression
3	36	[0...4095] ³	RGB haute qualité : photo, numérisation, impression
3	42	[0...16383] ³	RGB professionnel : photo, numérisation, impression
3	32	[0...255] ⁴	CMYK, livres couleurs

25

Références



26

Bibliothèques Python pour le traitement d'images

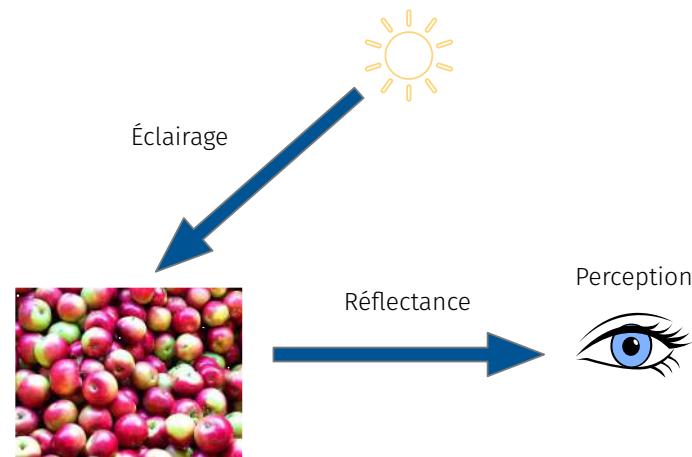
Bibliothèques utilisées sous Jupyter-lab (ou Google Colab)

- [NumPy](#) : algèbre linéaire, transformée de Fourier
- [Pandas](#) : manipulation de données
- [CV2](#) : vision par ordinateur
- [Scikit-image](#) : traitement d'images
- [PIL](#) : traitement d'images
- [Matplotlib](#) : génération de figures et interactions avec l'utilisateur

27

2. Couleurs et espaces de couleurs

Introduction



29

Qu'est-ce que la couleur ?

La couleur est définie de différentes manières

Pour un physicien

Spectre électromagnétique de l'infrarouge à l'ultraviolet, etc.

Pour un médecin

Impulsion électrique au travers du nerf optique, excitation de certaines molécules photosensibles de l'œil, interprétation par le cerveau, etc.

30

Qu'est-ce que la couleur ?

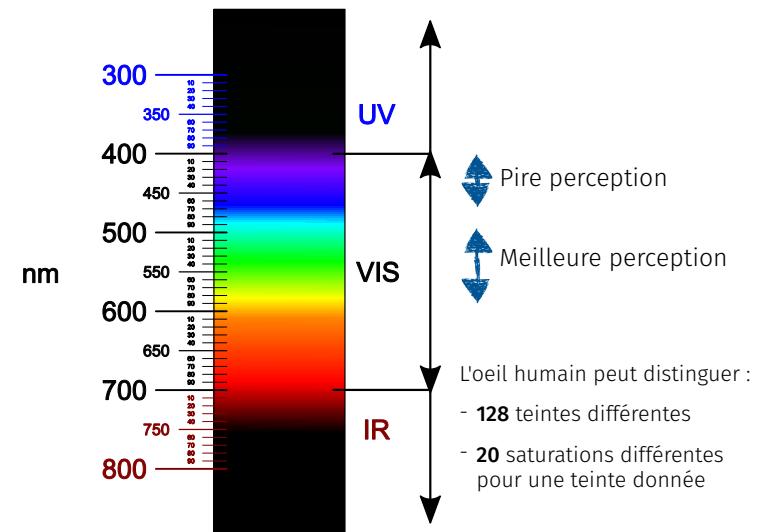
L'informaticien caractérise une couleur par :

- **Teinte (hue)** : longueur d'onde dominante (couleur que nous voyons)
- **Saturation** :
 - Pureté du mélange de longueurs d'onde
 - Distance de la couleur au gris
- **Luminosité (brightness)** : intensité de la lumière
- Teinte, luminance (en cd/m^2) et saturation sont utiles pour décrire les couleurs

Le rose est moins saturé que le rouge, et le bleu ciel est moins saturé que le bleu royal

31

Qu'est-ce que la couleur ?

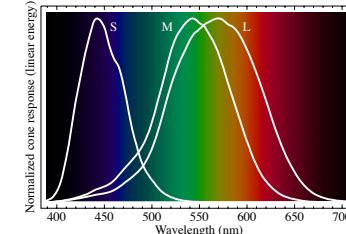


32

Espaces de couleurs

Espaces de couleurs

3 types de cônes dans l'oeil humain suggèrent que la couleur est une quantité 3D



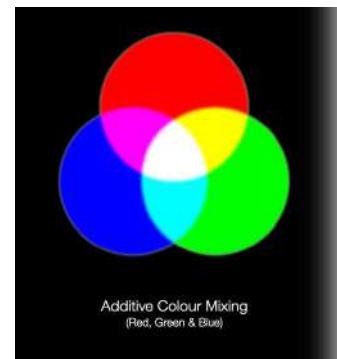
Il existe différents espaces de couleurs :

RGB, CMY, HSL, HSV, etc.

Espaces de couleurs additifs ou soustractifs



Les espaces de couleurs sont **additifs** ou **soustractifs**



Obtenus en soustrayant les composantes du blanc

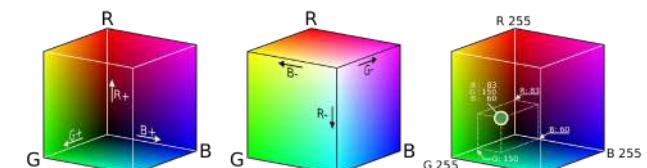
33

34

Espace de couleurs RGB

Définit les couleurs avec les quantités (r, g, b) de rouge, vert, bleu

- Le plus populaire des espaces additifs
- Valeur maximale = **255** / **1.0** si normalisée
- Noir = $(0, 0, 0)$ / Blanc = $(255, 255, 255)$
- Quantités égales de (r, g, b) = gris (diagonale blanc-noir)



La plupart des opérations adaptées aux images à niveaux de gris le seront sur les images couleur en les appliquant à chaque composante

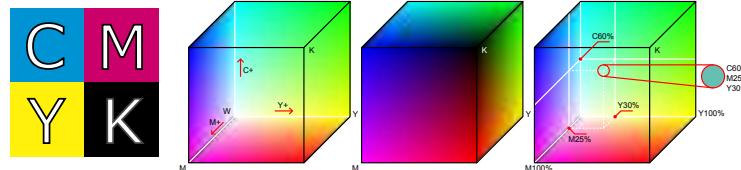
35

36

Espace de couleurs CMYK (quadrichromie)

Définit les couleurs avec les quantités (c, m, y) de cyan, magenta, et jaune

- C'est un espace soustractif utilisé dans l'imprimerie
- Parfois, le noir (K) est utilisé pour l'obtention d'un noir plus profond
- (c, m, y) signifie soustraire le complément à C (rouge), M (vert), et Y (bleu)



37

RGB ou CMYK



RGB

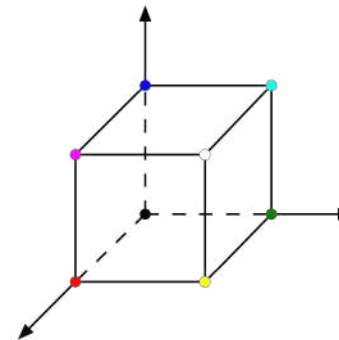
CMYK

39

Relation entre RGB et CMYK

On peut placer RGB et CMY dans le même volume cubique

- R, G, B, C, M et Y sont aux sommets



38

Espace de couleurs HSL (TSL)

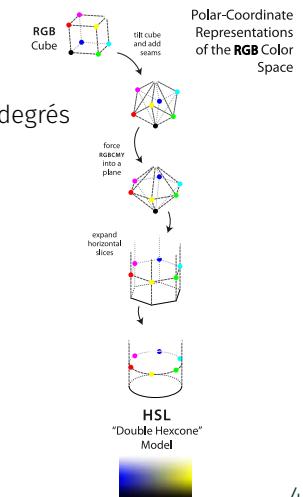
HSL signifie hue (teinte), saturation et lightness (luminosité)

- Basé sur la déformation du cube RVB
 - Les teintes sont placées sur un hexagone
 - La teinte est exprimée comme un angle en degrés
 - 0 degré : rouge



RGB

HSL



40

Espace de couleurs HSV (TSV)

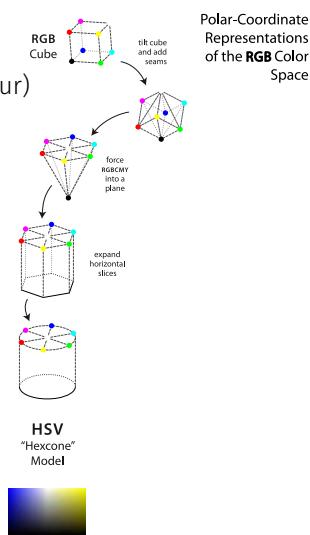
HSV signifie hue (teinte), saturation et value (valeur)

- Espace similaire à HLS au niveau conceptuel



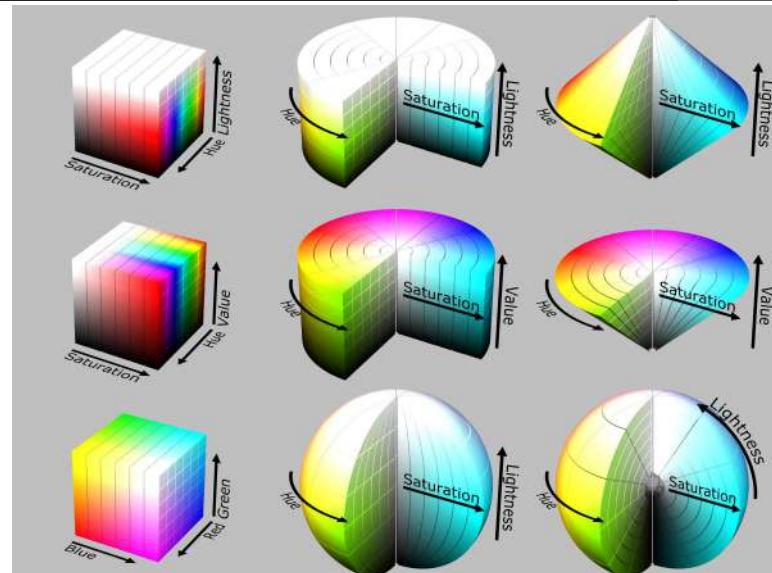
RGB

HSV



41

Représentations RGB, HSV et HSL



42

Espaces de couleurs télévisuels : YUV, YIQ, YCbCr

- YUV et YIQ : télévision analogique NTSC ou PAL

- YCbCr : télévision numérique

Principe

- Séparation de la composante Y (luminance) et des 2 composantes de chrominance (H, S)
- Les différences de couleur entre composantes sont encodées



RGB

YUV

YIQ

YCbCr

43

Espace de couleurs CIE

La CIE (Commission Internationale d'Éclairage) a proposé en 1931 l'utilisation des valeurs X, Y, et Z associées aux spectres suivants :

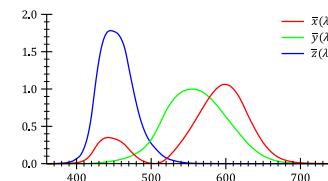
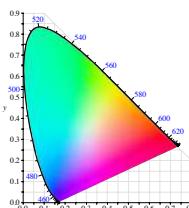


Table des valeurs XYZ associées à toutes les couleurs visibles



Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/CIE_XYZ

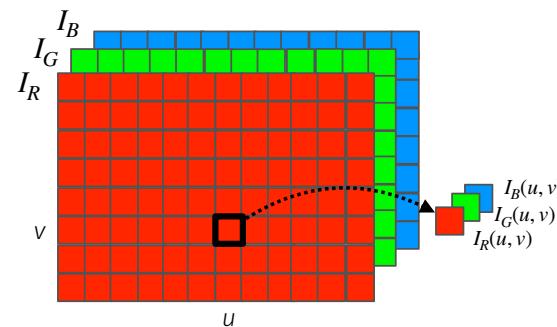
44

Quelques mots de plus sur les images RGB

45

Images en vraies couleurs

- Composantes contenues dans 3 tableaux distincts
- Récupère la même position (u, v) pour chaque tableau R, G et B



47

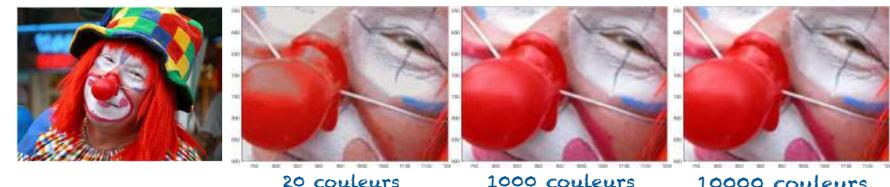
Organisation des images couleurs

Vraies couleurs

- Utilise tout le spectre de couleurs de l'espace
- Utilisées dans les applications nécessitant la mise en évidence de différences subtiles (photographie numérique, rendu réaliste, etc.)

Couleurs indexées

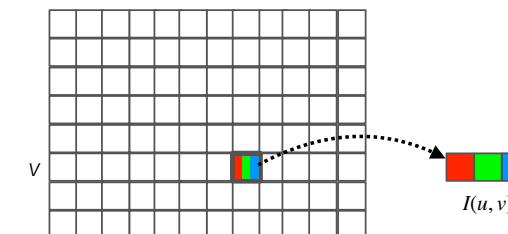
- Utilise un sous-ensemble de couleurs dépendant de l'application



46

Images en vraies couleurs

Les composantes RGB représentant la couleur d'un pixel sont stockées dans un même élément : un entier

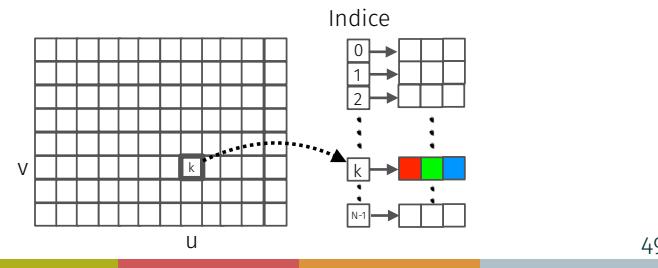


Un entier de 4 octets est utilisé pour le stockage d'une couleur

48

Image en couleurs indexées

- Nombre limité de couleurs distinctes ($N = 2$ à 256)
- Utilisée pour les images contenant de larges régions de couleurs identiques
- L'image contient les indices d'une table des couleurs ou d'une palette
- La palette est enregistrée comme une partie de l'image
- La conversion de vraies couleurs à couleurs indexées nécessite une quantification



Stratégies de traitement des images couleurs

Stratégie 1

Traiter séparément chaque composante RGB

Stratégie 2

Calculer la luminance, puis traiter la matrice des intensités

$$Y = w_R R + w_G G + w_B B$$

50

Conversion entre espaces de couleurs

51

Convertir entre espaces de couleurs

La conversion entre des espaces de couleurs peut être vue comme une transformation matricielle :

$$[X' \ Y' \ Z'] = [X \ Y \ Z] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

52

Conversion en niveaux de gris

Conversion couleur à niveaux de gris la plus simple

$$\text{Luminance } Y = \frac{R + G + B}{3}$$

L'image résultante peut être trop sombre dans ses composantes rouge et verte

Une meilleure approche consiste à pondérer les composantes :

$$Y = w_R R + w_G G + w_B B$$

Poids utilisés :

$$w_R = 0.2125, \quad w_G = 0.7154, \quad w_B = 0.072$$

3 composantes



1 composante



53

Désaturation des images couleurs

La désaturation est une réduction uniforme de la quantité de R, G, B

- La couleur désaturée est obtenue par interpolation linéaire de la couleur RGB et du point en niveau de gris correspondant (Y, Y, Y) dans l'espace RGB

$$\begin{pmatrix} R_d \\ G_d \\ B_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Y \\ Y \end{pmatrix} + s_{\text{couleur}} \cdot \begin{pmatrix} R - Y \\ G - Y \\ B - Y \end{pmatrix}$$

valeur dans l'intervalle [0, 1]



$s_{\text{couleur}} = 0,2$

$s_{\text{couleur}} = 0,6$

55

Une image couleur qui apparaît en gris

Une image RGB image est **sans teinte** ou grise lorsque toutes ses composantes sont égales :

$$R = G = B$$

Pour supprimer la couleur :

1. Calculer la luminance Y à partir de la somme pondérée précédente
2. Remplacer R, G et B par la valeur de Y

3 composantes

$$\begin{pmatrix} R' \\ G' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Y \\ Y \end{pmatrix}$$

3 composantes



54

Conversion RGB vers HSL

Calculer la teinte de la même manière que pour le modèle HSV :

$$H_{HSL} = H_{HSV}$$

Puis calculer :

$$L_{HSL} = \frac{(C_{\text{high}} + C_{\text{low}})/255}{2}$$

$$S_{HSL} = \begin{cases} 0 & \text{pour } L_{HSL} = 0 \\ 0.5 \cdot \frac{C_{\text{intervalle}}/255}{L_{HSL}} & \text{pour } 0 < L_{HSL} \leq 0.5 \\ 0.5 \cdot \frac{C_{\text{intervalle}}/255}{1 - L_{HSL}} & \text{pour } 0.5 < L_{HSL} < 1 \\ 0 & \text{pour } L_{HSL} = 1 \end{cases}$$

56

Conversion RGB vers HSL



Image RGB

HSL



H

S

L

57

Conversion HSL vers RGB

En supposant H, L et S dans l'intervalle [0, 1]

$$(R', G', B') = \begin{cases} (0,0,0) & \text{pour } L_{HSL} = 0 \\ (1,1,1) & \text{pour } L_{HSL} = 1 \end{cases}$$

Puis calculer :

$$H' = (6H_{HSL}) \bmod 6$$

Enfin, calculer :

$$c_1 = H' \quad c_2 = H' - c_1$$

$$x = L_{HSL} - d \quad w = L_{HSL} + d$$

$$y = w - (w - x) \cdot c_2$$

$$z = w + (w - x) \cdot c_2$$

$$d = \begin{cases} S_{HSL} \cdot L_{HSL} & \text{pour } L_{HSL} \leq 0.5 \\ S_{HSL} \cdot (1 - L_{HSL}) & \text{pour } L_{HSL} > 0.5 \end{cases}$$

58

Conversion HSL vers RGB

Alors, les composantes RGB sont données par :

$$(R', G', B') = \begin{cases} (w, z, x) & \text{si } c_1 = 0 \\ (y, w, x) & \text{si } c_1 = 1 \\ (x, w, z) & \text{si } c_1 = 2 \\ (x, y, w) & \text{si } c_1 = 3 \\ (z, x, w) & \text{si } c_1 = 4 \\ (w, x, y) & \text{si } c_1 = 5. \end{cases}$$

59

Conversion RGB vers HSV

Soit les valeurs suivantes :

$$C_{\text{high}} = \max(R, G, B)$$

$$C_{\text{low}} = \min(R, G, B)$$

$$C_{\text{range}} = C_{\text{high}} - C_{\text{low}}$$

Trouver la saturation pour les composantes RGB ($C_{\text{max}} = 255$):

$$S_{HSV} = \begin{cases} \frac{C_{\text{range}}}{C_{\text{high}}} & \text{pour } C_{\text{high}} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors la luminance est :

$$V_{HSV} = \frac{C_{\text{high}}}{C_{\text{max}}}$$

60

Conversion RGB vers HSV

Normaliser chaque composante :

$$R' = \frac{C_{\text{high}} - R}{C_{\text{range}}} \quad G' = \frac{C_{\text{high}} - G}{C_{\text{range}}} \quad B' = \frac{C_{\text{high}} - B}{C_{\text{range}}}$$

Calculer la teinte préliminaire H' :

$$H' = \begin{cases} B' - G' & \text{si } R = C_{\text{high}} \\ R' - B' + 2 & \text{si } G = C_{\text{high}} \\ G' - R' + 4 & \text{si } B = C_{\text{high}} \end{cases}$$

Finalement, la teinte est obtenue en normalisant sur l'intervalle [0, 1] :

$$H_{HSV} = \frac{1}{6} \cdot \begin{cases} H' + 6 & \text{pour } H' < 0 \\ H' & \text{sinon} \end{cases}$$

61

Conversion HSV vers RGB

Tout d'abord, calculons :

$$H' = (6H_{HSV}) \bmod 6$$

Puis calculons les valeurs intermédiaires suivantes :

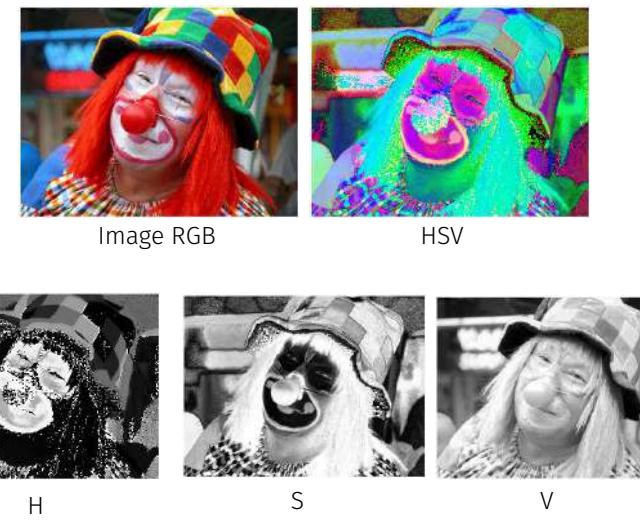
$$\begin{aligned} c_1 &= H' & x &= (1 - S_{HSV}) \cdot V_{HSV} \\ c_2 &= H' - c_1 & y &= (1 - (S_{HSV} \cdot c_2)) \cdot V_{HSV} \\ & & z &= (1 - (S_{HSV} \cdot (1 - c_2))) \cdot V_{HSV} \end{aligned}$$

Normalisons les valeurs RGB dans l'intervalle [0, 1] :

$$(R', G', B') = \begin{cases} (V_{HSV}, z, x) & \text{si } c_1 = 0 \\ (y, V_{HSV}, x) & \text{si } c_1 = 1 \\ (x, V_{HSV}, z) & \text{si } c_1 = 2 \\ (x, y, V_{HSV}) & \text{si } c_1 = 3 \\ (z, x, V_{HSV}) & \text{si } c_1 = 4 \\ (V_{HSV}, x, y) & \text{si } c_1 = 5. \end{cases}$$

63

Conversion RGB vers HSV



62

Conversion HSV vers RGB

Finalement, les composantes RGB sont obtenues ainsi :

$$\begin{aligned} R &= \min(\text{round}(255R'), 255) \\ G &= \min(\text{round}(255.G'), 255) \\ B &= \min(\text{round}(255.B'), 255) \end{aligned}$$

64

Espace de couleurs YUV

- Encodage des couleurs en TV analogique en Amérique du nord (NTSC) et en Europe (PAL)

- La composante Y est calculée à partir des composantes RGB :

$$Y = 0.299.R + 0.587.G + 0.114.B$$

- Les composantes U et V sont données par :

$$U = 0.492.(B - Y) \quad V = 0.877.(R - Y)$$



65

Espace de couleurs YUV



Image RGB



YUV



Y



U



V

66

Espace de couleurs YUV

Transformation de RGB à YUV

$$\begin{pmatrix} Y \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.147 & -0.289 & 0.436 \\ 0.615 & -0.515 & -0.100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

Transformation de YUV à RGB

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.140 \\ 1 & -0.395 & -0.581 \\ 1 & 2.032 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ U \\ V \end{pmatrix}$$



67

Espace de couleurs YIQ

NTSC utilise une variante de YUV : YIQ

- La composante Y est la même que pour YUV
- Les composantes U et V subissent la transformation suivante :

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

$$\beta = 0.576 \text{ (33 degrés)}$$

68

Espace de couleurs YIQ



Image RGB



YIQ



Y



I



Q

69



Image RGB



YCbCr



Y



Cb



Cr

71

Espace de couleurs YCbCr

- Variante normalisée de l'espace YUV

- Utilisation : TV numérique, compression d'image (e.g. JPEG)

Les composantes Y , C_b , C_r sont calculées de la manière suivante :

$$Y = w_R \cdot R + (1 - w_B - w_R) \cdot G + w_B \cdot B$$

$$C_b = \frac{0.5}{1 - w_B} \cdot (B - Y)$$

$$C_r = \frac{0.5}{1 - w_R} \cdot (R - Y)$$

ITU préconise :

$$w_R = 0.299, \quad w_B = 0.114, \quad w_G = 1 - w_B - w_R = 0.587$$

70

Espace de couleurs YCbCr

Transformation YCbCr vers RGB

$$R = Y + \frac{1 - w_R}{0.5}$$

$$G = Y - \frac{w_B \cdot (1 - w_B) \cdot C_b - w_R \cdot (1 - w_R) \cdot C_r}{0.5 \cdot (1 - w_B - w_R)}$$

$$B = Y + \frac{1 - w_B}{0.5} \cdot C_b$$

72

Espace de couleurs YCbCr

Transformation RGB vers YCbCr

$$\begin{pmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.169 & -0.331 & 0.5 \\ 0.5 & -0.419 & -0.081 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

Transformation YCbCr vers RGB

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.403 \\ 1 & -0.344 & -0.714 \\ 1 & 1.773 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{pmatrix}$$

73

Comparaison entre RGB, HSV, HSL, YUV, YIQ et YCbCr



74

Couleurs, espaces couleurs et Python

75

Scikit-image

La bibliothèque Python [scikit-image](#) supporte 2 types d'images couleur

- Images RGB en vraies couleurs (24 bits)

- Formats TIFF, BMP, JPEG, PNG et RAW

- Images indexées (8 bits)

- Jusqu'à 256 couleurs max.

- Formats GIF, PNG, BMP et TIFF (non compressé)

Les modules `io` et `color` de [scikit-image](#) fournissent des opérateurs de conversion entre différents formats couleurs et niveaux de gris

Remarque : la bibliothèque `cv2` (OpenCV) propose aussi des opérateurs de conversion

76

3. Histogrammes et opérateurs point à point

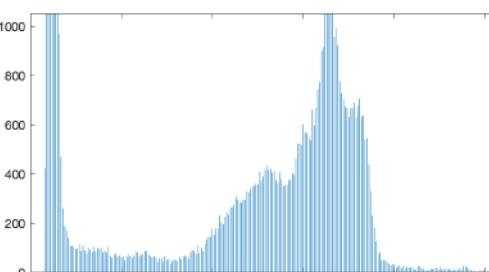


Histogrammes

78

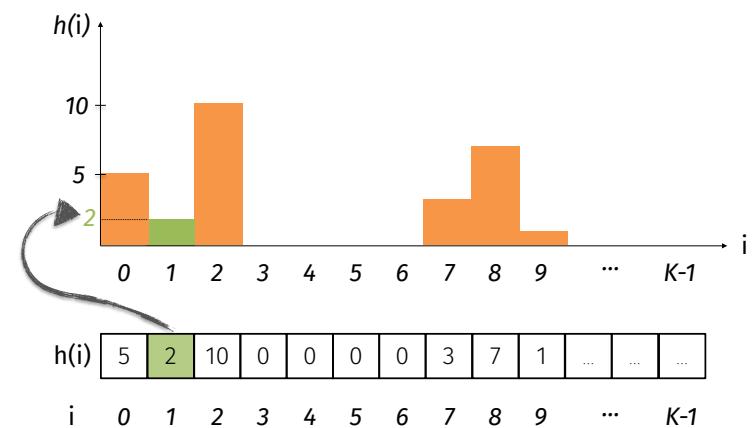
Histogramme

Un histogramme affiche la fréquence des valeurs d'intensité



79

Histogramme



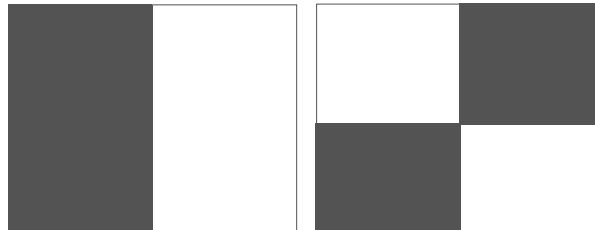
80



Histogramme



Des images différentes peuvent avoir le même histogramme



81

Histogramme

Certains défauts d'une image peuvent être mis en évidence par l'histogramme :

- Sur- et sous-exposition
- Contraste
- Dynamique

82

Luminosité

La luminosité d'une image en niveaux de gris est la moyenne de l'intensité de tous ses pixels

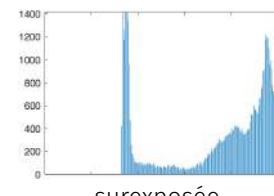
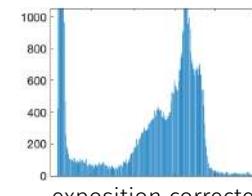
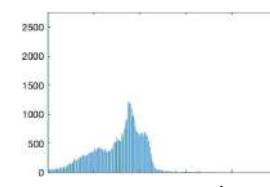
$$B(I) = \frac{1}{LH} \sum_{v=1}^H \sum_{u=1}^L I(u, v)$$

Nombre de pixels

Somme des intensités

83

Histogramme et détection d'une mauvaise exposition



84

Contraste

Le contraste d'une image en niveaux de gris renseigne sur la facilité avec laquelle les objets dans l'image peuvent être distingués

Contraste élevé : de nombreuses intensités distinctes

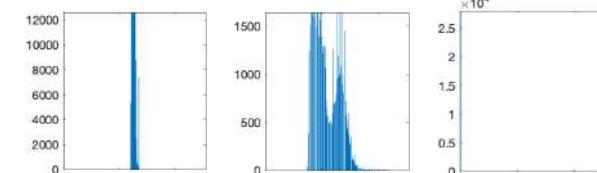
Contraste faible : peu d'intensités distinctes

Un bon contraste correspond à une large gamme d'intensités et une grande différence entre les intensités min et max



85

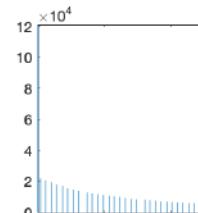
Histogramme et contraste d'une image



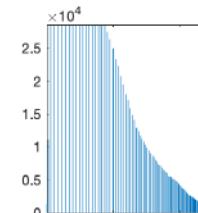
Très faible contraste Contraste normal Contraste trop élevé

86

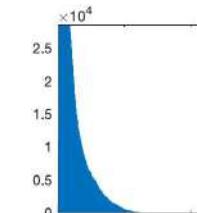
Histogramme et dynamique d'une image



Très faible dynamique



Faible dynamique



Grande dynamique



87

Histogramme et dynamique d'une image

Une grande dynamique signifie des parties très claires et très sombres dans l'image (nombreuses intensités distinctes)

La dynamique peut dépasser le nombre de bits disponibles permettant de représenter les pixels d'une image

Solution

- 1) Capturer plusieurs images à différentes expositions
- 2) Combiner celles-ci en utilisant des techniques de traitement d'images

88

Histogrammes d'images hautes résolution

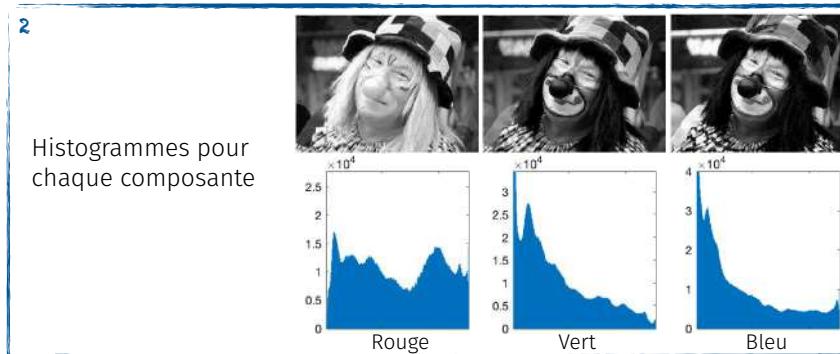
- Une image haute résolution peut aboutir à un histogramme trop grand et donc difficile à afficher
- Exemple : image 32-bits = $2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296$ colonnes

Solution

Regrouper des plages d'intensités dans chaque colonne de l'histogramme (on parlera de *bins*)



Histogramme d'une image couleur



Comment calculer le nombre de regroupements

$$\text{taille bin} = \frac{\text{nombre de valeurs distinctes dans l'image}}{\text{nombre de bins}}$$

Exemple: créer 256 bins depuis une image 14-bits

$$\text{taille bin} = \frac{2^{14}}{256} = 2^{(14-8)} = 2^6 = 64$$

$$\begin{aligned} h(0) &\leftarrow 0 \leq I(u, v) < 64 \\ h(1) &\leftarrow 64 \leq I(u, v) < 128 \end{aligned}$$

⋮

⋮

⋮

$$h(255) \leftarrow 16320 \leq I(u, v) < 16384$$



Opérateurs point à point

Opérateurs point à point

Un opérateur point à point applique une fonction identique sur chaque pixel

$$I'(u, v) = f(I(u, v))$$

Exemples

- Addition (change la luminosité)
- Multiplication (étire ou contracte l'intervalle de contraste)
- Fonctions $\exp(x)$, $\log(x)$, x^k , $(1/x)$, etc.
- Correction gamma
- Seuillage global



Nécessité de circonscrire les valeurs
dans l'intervalle d'origine

93

Opérateurs courants

Transformations d'images en niveaux de gris

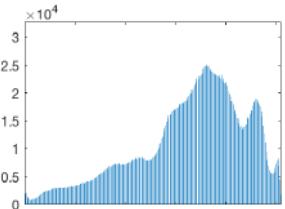
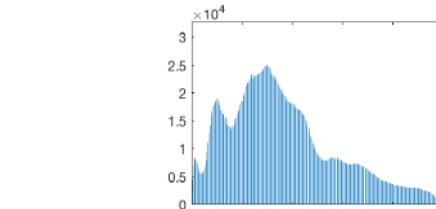
- Linéaire (identité/négatif)
- Logarithmique (Log / Log inverse)
- Puissance (puissance n^{ieme} / racine n^{ieme})

95



Négatif d'une image

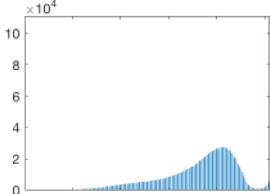
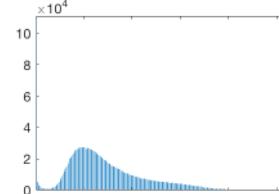
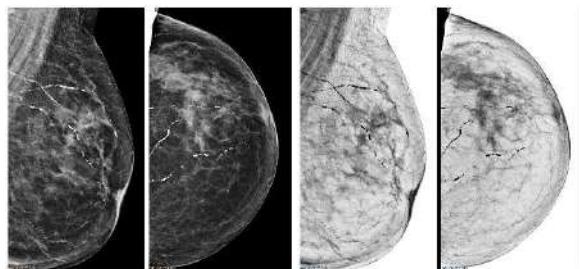
$$f_{invert}(I) = -I + Cste$$



96

Négatif d'une image

Améliorer les détails clairs dans les zones sombres d'une image



97

Transformation logarithmique

Étirer les plages de valeurs étroites

$$I'(u, v) = C \times \log(1 + I(u, v))$$



98

Transformation à l'aide d'une fonction puissance

Étirer ou contracter les plages de valeurs sombres

$$I'(u, v) = Cste \times I^p(u, v)$$



0.5

0.7

0.9

1

2

3

99

Ajustement de contraste automatique

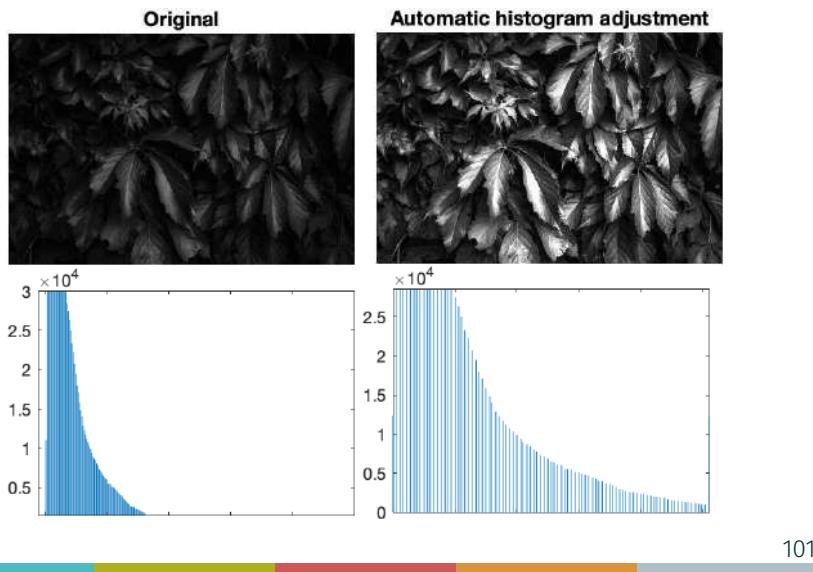
Modifier les intensités de manière à "couvrir" l'intégralité des valeurs possibles

$$f_{aca}(I) = I_{\min} + (I - I_{\text{low}}) \times \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\text{high}} - I_{\text{low}}}$$



100

Ajustement de contraste automatique



Seuillage global

Seuillage

$$f_{seuil}(I) = \begin{cases} I_0 & \text{pour } I < I_{seuil} \\ I_1 & \text{pour } I \geq I_{seuil} \end{cases}$$

Exemple

Convertir en image binaire une image en niveaux de gris si :

- $I_0 = 0$
- $I_1 = 1$

Exemple de seuillage

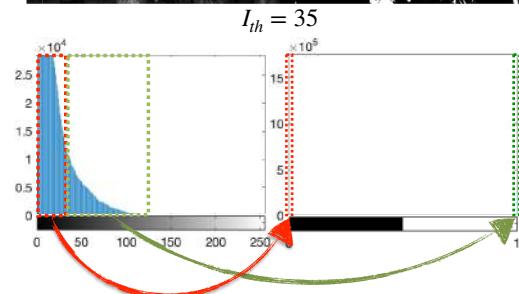


$I_{th} = 35$

103

104

Histogrammes et seuillage

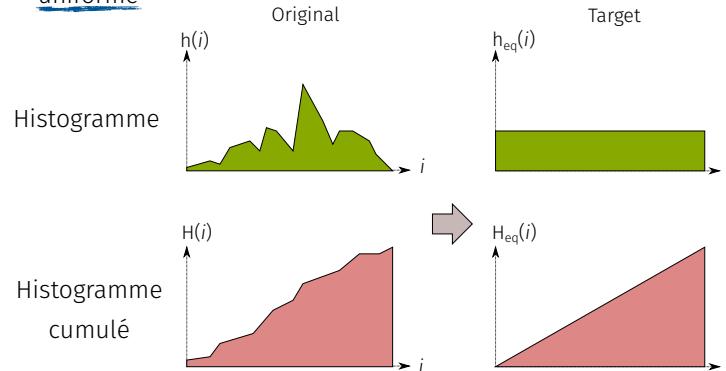


105

Égalisation d'histogramme

Égalisation d'histogramme

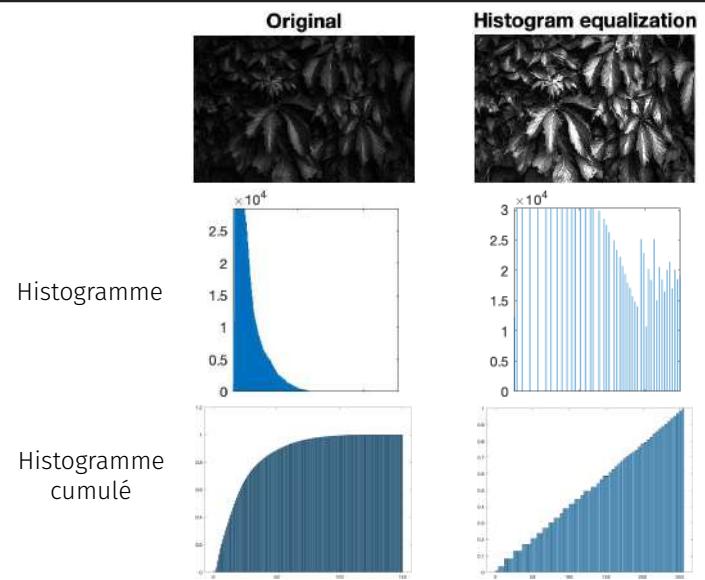
- Ajuster 2 images differentes afin de rendre leurs histogrammes semblables
- Changer l'histogramme de l'image modifiée en une distribution uniforme



107



Égalisation d'histogramme



108

Égalisation d'histogramme

Fonction histogramme

```
def get_histogram(image, bins):
    # array with size of bins, set to zeros
    histogram = np.zeros(bins)

    # loop through pixels and sum up counts
    # of pixels
    for pixel in image:
        histogram[pixel] += 1

    # return our final result
    return histogram
```

Fonction somme cumulée

```
def cumsum(a):
    a = iter(a)
    b = [next(a)]
    for i in a:
        b.append(b[-1] + i)
    return np.array(b)
```

```
# execute histogram function
hist = get_histogram(img, 256)

# execute the cumulative sum fn
cs = cumsum(hist)

# display the result
plt.plot(cs)



### Normalisation


# numerator & denominator
nj = (cs - cs.min()) * 255
N = cs.max() - cs.min()

# re-normalize the cumsum
cs = nj / N

# cast it back to uint8 since we can't use
# floating point values in images
cs = cs.astype('uint8')

plt.plot(cs)
```



109

Égalisation d'histogramme

```
# get the value from cumulative sum for
# every index, and set that as img_new
img_new = cs[img]

# put array back into original shape since
# we flattened it
img_new = np.reshape(img_new, img.shape)

# set up side-by-side image display
fig = plt.figure()
fig.set_figheight(15)
fig.set_figwidth(15)
fig.add_subplot(1,2,1)
plt.imshow(img, cmap='gray')

# display the new image
fig.add_subplot(1,2,2)
plt.imshow(img_new, cmap='gray')
plt.show(block=True)
```



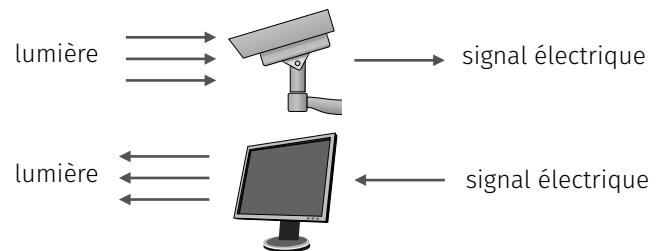
110

Correction gamma



111

Correction gamma



Différents capteurs de caméra

- Ont différentes réponses face à une intensité lumineuse
- Produisent différents signaux électriques pour une même entrée

Comment s'assurer de la cohérence

- Des images enregistrées par différentes caméras pour une entrée lumineuse donnée ?
- De la lumière émise par différents écrans pour la même image ?

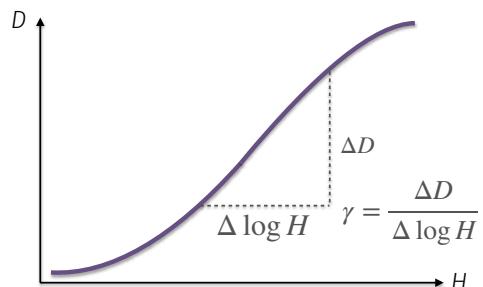


112

Correction gamma

Fonction d'exposition : relation entre le logarithme de l'intensité lumineuse reçue (H) et de la densité du film (D)

Gamma : pente de la partie linéaire de la courbe



113

Correction gamma

- La fonction gamma est une bonne approximation de la courbe d'exposition

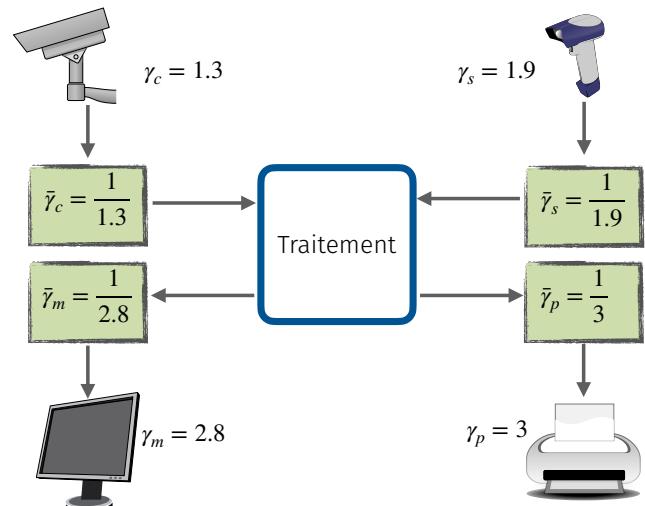
- L'inverse d'une fonction gamma est une fonction gamma telle que :

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$$

- Pour les écrans à tubes cathodiques et à leds, les gammes sont dans l'intervalle 1.8 - 2.8 (typiquement 2.4)

114

Correction gamma



115

Correction gamma en Python

```
def load_image(filename, width, gamma):  
    img = imageio.imread(filename)  
  
    if img.shape[-1] == 4:  
        # Blend the alpha channel  
        img = color.rgb2rgb(img)  
  
    # Convert to grayscale  
    img = color.rgb2gray(img)  
  
    # Resample and adjust the aspect ratio  
    width_px = (3 * width) * 16  
  
    img_width = 1.0 * width_px  
    img_height = int(img.shape[0] * 3 * (img_width / (4 * img.shape[1])))  
    img = transform.resize(img, (img_height, img_width), anti_aliasing=True,  
    mode='constant')  
  
    # Adjust the exposure  
    img = exposure.adjust_gamma(img, gamma)  
  
    return img
```

116

Histogrammes et opérateurs point à point en Python

Histogrammes et opérateurs point à point en Python

Le module `exposure` de la bibliothèque [scikit-image](#) propose des fonctions de correction gamma et de manipulation des histogrammes

117

118

4. Filtres spatiaux

Qu'est-ce qu'un filtre ?

Les opérations basées pixels sont limitées

Les filtres combinent une opération sur la valeur d'un pixel et la valeur de ses voisins

120

Filtre spatial

Définition

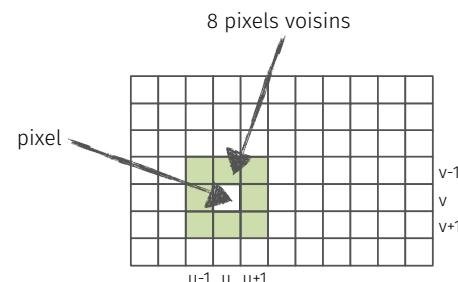
Opération qui combine l'intensité $I(u, v)$ de chaque pixel avec celles de ses voisins

Ex. : le **lissage** calcule la moyenne ou la moyenne pondérée d'un groupe de pixels



121

Exemple : lissage par moyenne d'un voisinage 3x3



Le **lissage** remplace l'intensité de chaque pixel par la moyenne de son intensité et de celle de ses voisins

122

Lissage par moyenne

On peut utiliser différents paramètres pour les filtres (taille, poids, fonction, etc.) :

- Taille du voisinage : 3x3, 5x5, 7x7, ..., 21x21, ...
- Forme : carré, rectangle, disque, etc.
- Poids : permet de pondérer l'importance des différents pixels
- Fonction : peut être linéaire (somme pondérée) ou non linéaire (médian)

Exemple avec différentes tailles de masques, de forme carrée et utilisant une sommation équipondérée



Image d'Origine

3x3

41x41

83x83

123

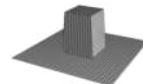
Filtres linéaires

124

Filtres linéaires

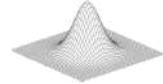
2 classes principales de filtres linéaires :

- Filtres de lissage : poids positifs (ex. : boite, gaussien)
- Filtres différentiels : poids positifs et négatifs (ex. : Laplacien)



0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

Boite



0	1	2	1	0
1	3	5	3	1
2	5	9	5	2
1	3	5	3	1
0	1	2	1	0

Gaussien

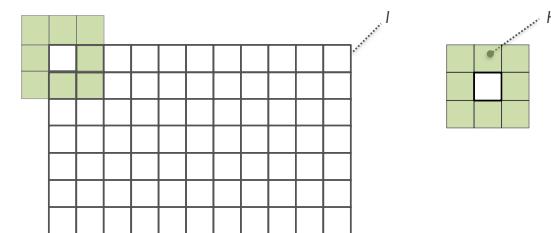


0	0	-1	0	0
0	-1	2	-1	0
-1	2	16	-2	-1
0	-1	-2	-1	0
0	0	-1	0	0

Laplacien



Appliquer un filtre linéaire par convolution



$$I'(u, v) = \sum_{i=-1}^{i=1} \sum_{j=-1}^{j=1} I(u + i, v + j) \cdot H(i, j)$$

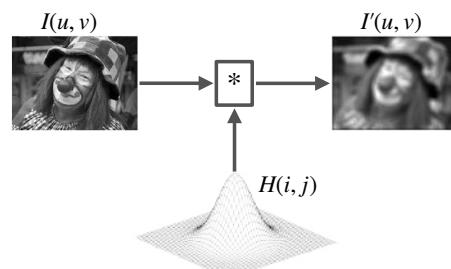
126

Propriétés de la convolution

- L'application d'un filtre est appelée convolution linéaire
- Pour un signal 2D, la convolution est définie par :

$$I'(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} I(u + i, v + j) \cdot H(i, j)$$

$$I' = I * H$$



127

Propriétés de la convolution

- Commutativité

$$I * H = H * I$$

Résultat identique si nous convoluons l'image avec le filtre ou vice-versa

- Associativité

$$A * (B * C) = (A * B) * C$$

Résultat identique quel que soit l'ordre d'application des filtres

- Linéarité

$$(s \cdot I) * H = I * (s \cdot H) = s \cdot (I * H)$$

Résultat identique pour la multiplication par un scalaire d'une image ou de sa convoluée

$$(I_1 + I_2) * H = (I_1 * H) + (I_2 * H)$$

Résultat identique pour la somme de 2 images convoluée avec un noyau H et 2 images convoluées par H, puis additionnées

- Séparabilité

$$H = H_1 * H_2 * \dots * H_n$$

$$I * H = I * (H_1 * H_2 * \dots * H_n) = (((I * H_1) * H_2) * \dots * H_n)$$

Les petits noyaux sont moins gourmands en calcul

128

Séparabilité en x et y

Le noyau d'un filtre peut quelquefois être séparé en ses composantes "verticale" et "horizontale"

Soit $H_x = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, et $H_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Alors $H = H_x * H_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Complexité : $15 \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$

Complexité : $(3 + 5) \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$



Noyau gaussien

Un noyau gaussien 2D est le **produit** de noyaux gaussiens 1D

$$\begin{aligned} G_\sigma(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= g_\sigma(x) \cdot g_\sigma(y) \end{aligned}$$

→ La convolution avec un noyau gaussien est séparable



Noyau avec fonction impulsionnelle (Dirac)

La fonction impulsionnelle a un pixel blanc en $(0, 0)$ sur fond noir

$$I * \delta = I$$

Cas inverse

$$H * \delta = \delta * H = H$$



Bruit



Types de bruit

Bruit poivre et sel : pixels blancs et noirs dispersés de manière aléatoire

- Appelé aussi bruit impulsionnel, bruit de grenaille ou bruit binaire
- Causé par une perturbation brusque et soudaine



Image d'origine



Bruit poivre et sel

133

Types de bruit

Bruit gaussien : bruit blanc ajouté à l'image et normalement distribué

$$I = I + \text{bruit}$$



Image d'origine



Bruit gaussien

134

Types de bruit

Speckle : la valeur des pixels est multipliée par un bruit aléatoire

$$I = I \cdot (1 + \text{bruit})$$



Image d'origine



Speckle

135

Types de bruit

Bruit périodique : causé par des perturbations de nature périodique



136

Types de bruit

Reconnaitre le type d'un bruit permet de choisir le meilleur filtre pour le supprimer !

Les bruits de type poivre et sel, gaussien et speckel peuvent être supprimés à l'aide de **filtres spatiaux**

Les bruits périodiques peuvent être supprimés à l'aide de **filtres fréquentiels**

137

Filtres non linéaires

Filtres non linéaires

Les filtres linéaires floutent les structures telles que les contours

→ Ils réduisent la qualité de l'image

→ Leur utilisation doit être limitée pour supprimer le bruit



Image avec poivre et sel



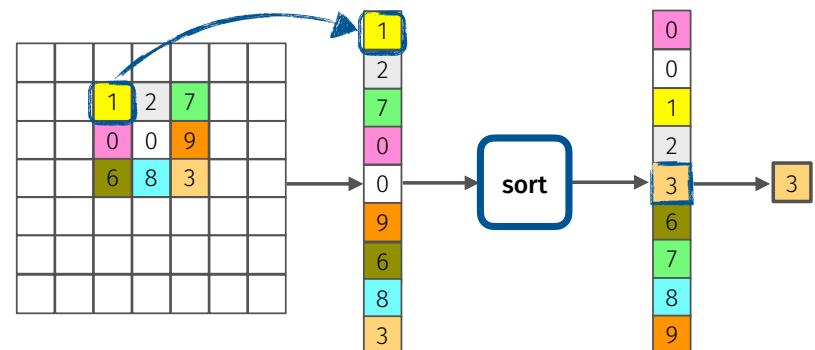
Filtre linéaire (noyau 15x15)

139

Filtre médian

Un filtre médian supprime le bruit tout en conservant les structures

$$I(u, v) = \text{median}\{ I(u + i, v + j) \mid (i, j) \in \mathbb{R} \}$$



140

Effet du filtre médian



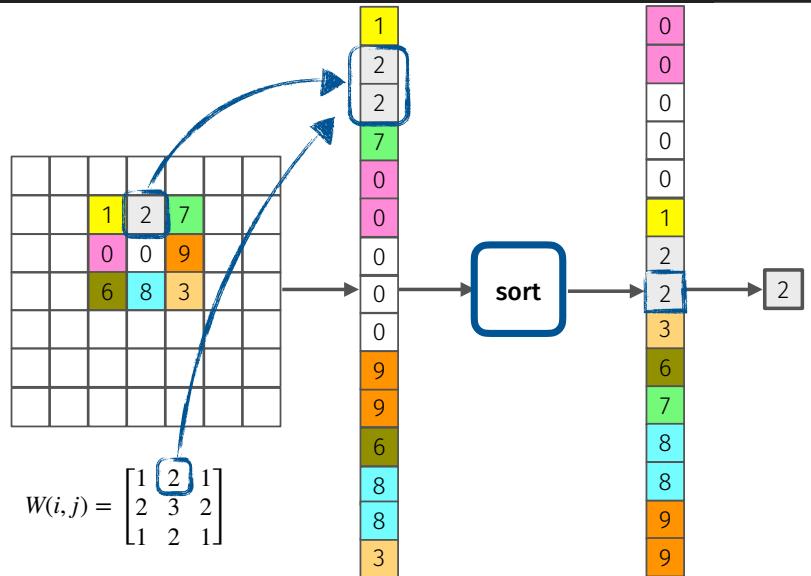
Filtre linéaire (noyau 15x15)



Filtre médian

141

Filtre médian pondéré



Autres filtres non linéaires

- Filtres min et max
- Filtres de détection de coins
- Filtres morphologiques

143

Détection de contours

144

Qu'est-ce qu'un contour ?

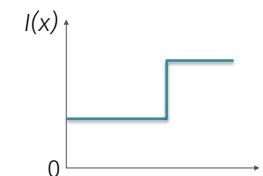
Un contour correspond à un changement brutal d'intensité

Exemples

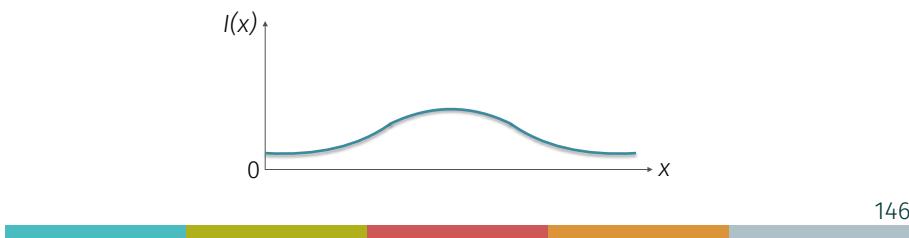
- Séparations entre des objets
- Changements d'orientation d'une surface
- Changements d'éclairage



145

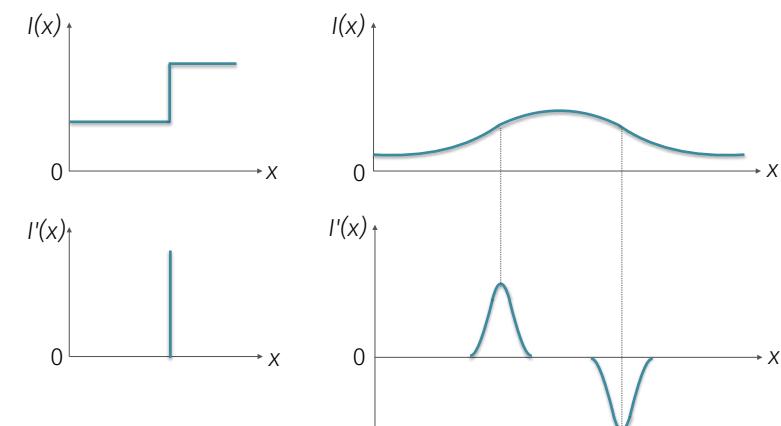


- Un contour idéal correspond à une fonction échelon de Heaviside



Caractéristiques d'un contour

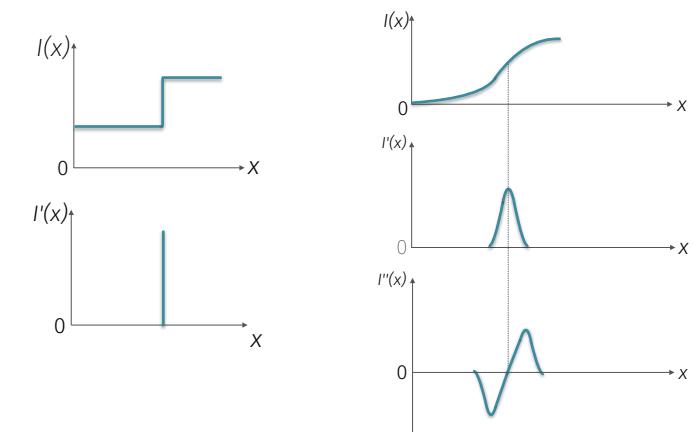
- Un contour peut être caractérisé par un **pic** pour la dérivée première



147

Caractéristiques d'un contour

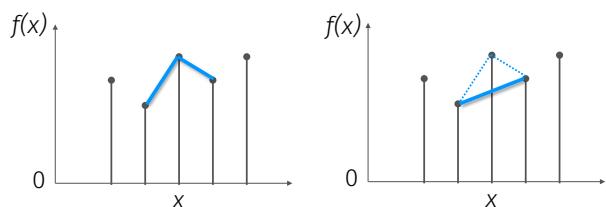
- La dérivée première de $I(x)$ correspond à un **pic** au niveau du contour
- La dérivée seconde de $I(x)$ passe par 0 au niveau du contour



148

Pente d'une fonction discrète

- Les pentes gauche et droite peuvent être différentes
- Solution ? Prendre la moyenne des pentes gauche et droite



149

Différences finies

Différence avant (pente droite)

$$\Delta_+ f(x) = f(x + 1) - f(x)$$

Différence arrière (pente gauche)

$$\Delta_- f(x) = f(x) - f(x - 1)$$

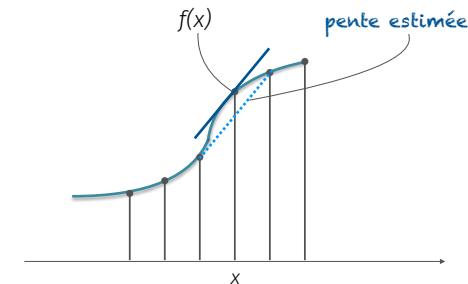
Différence centrée (pente moyenne)

$$\Delta f(x) = \frac{1}{2}(f(x + 1) - f(x - 1))$$

151

Calculer la dérivée d'une fonction discrète

$$\frac{df}{dx}(x) \sim \frac{f(x + 1) - f(x - 1)}{2} = 0.5.(f(x + 1) - f(x - 1))$$



150

Gradient

Soit $f(x, y)$ une fonction 2D

- **Gradient** : vecteur dont la direction est celle du taux de variation maximal de f et dont l'amplitude est égale au taux de variation maximal de f
- Le gradient est perpendiculaire au contour

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right]^T$$

$$\text{Amplitude : } \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{Direction : } \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \right)$$

152

Gradient d'une image

- Les dérivées d'une image s'obtiennent pour les directions horizontale et verticale

$$\frac{\partial I}{\partial u}(u, v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial v}(u, v)$$

- Le gradient de l'image en (u, v) est :

$$\nabla I(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial I}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial I}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}^T$$

- L'amplitude du gradient est :

$$|\nabla I|(u, v) = \left[\left(\frac{\partial I}{\partial u}(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial v}(u, v) \right)^2 \right]^{1/2}$$

L'amplitude est invariante par rotation !

153

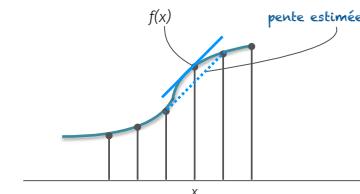
Filtres dérivatifs

- On rappelle que la dérivée d'une fonction discrète s'obtient par :

$$\frac{df}{dx}(x) \sim \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2} = 0.5.(f(x+1) - f(x-1))$$

- Peut-on définir un filtre linéaire pour calculer la différence centrée à l'aide d'un noyau ?

$$H_x^D = [-0.5 \quad 0 \quad 0.5] = 0.5.[-1 \quad 0 \quad 1]$$



154

Réaliser une différence finie avec une convolution

- Différence avant

$$\Delta_+ f(x) = f(x+1) - f(x)$$

- Noyau de convolution : $H = [0 \quad -1 \quad 1]$

$$\Delta_+ f = f * H$$

155

Réaliser une différence finie avec une convolution

- Différence centrée

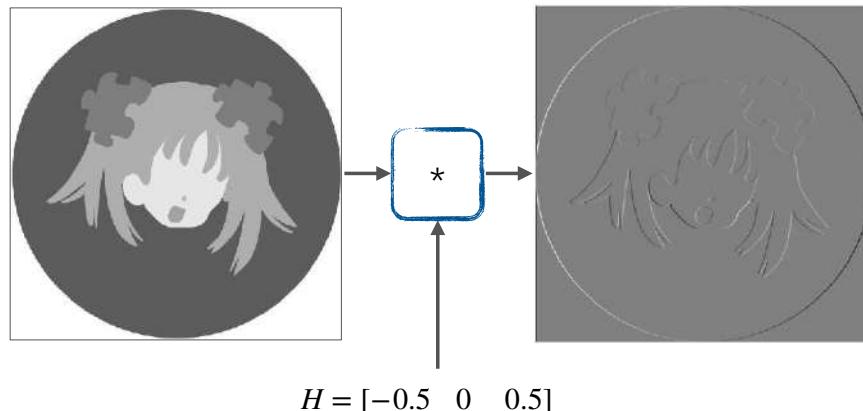
$$\Delta f(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$$

- Noyau de convolution : $H = [-0.5 \quad 0 \quad 0.5]$

$$\Delta f = f * H$$

156

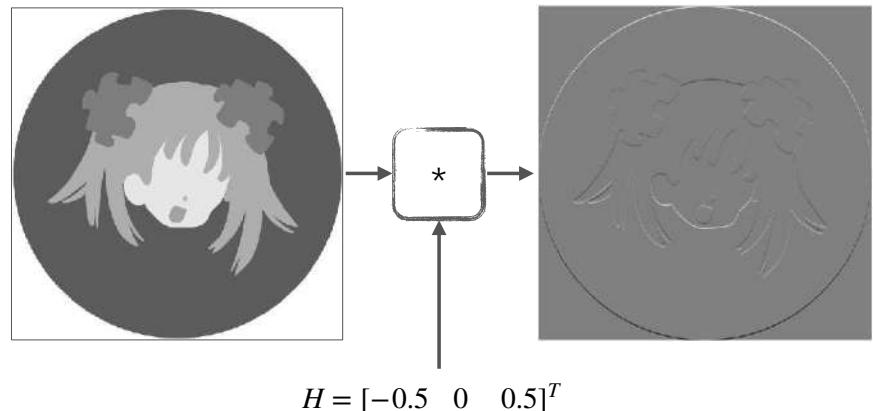
dérivée en x d'une image à l'aide d'une différence centrée



$$H = [-0.5 \ 0 \ 0.5]$$

157

dérivée en y d'une image à l'aide d'une différence centrée



$$H = [-0.5 \ 0 \ 0.5]^T$$

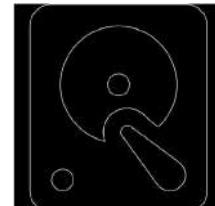
158

Filtres dérivatifs

$$H_x^D = [-0.5 \ 0 \ 0.5]$$



$$H_y^D = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$



Amplitude du gradient

159

Dérivées partielles pour une image

- Dérivées partielles remplacées par des différences finies

$$\Delta_x f = f(x, y) - f(x - 1, y)$$

$$\Delta_y f = f(x, y) - f(x, y - 1)$$

Prewitt

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Alternatives

$$\Delta_{2x} f = f(x + 1, y) - f(x - 1, y)$$

$$\Delta_{2y} f = f(x, y + 1) - f(x, y - 1)$$

Sobel

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Gradient de Robert

$$\Delta_+ f = f(x + 1, y + 1) - f(x, y)$$

$$\Delta_- f = f(x, y + 1) - f(x + 1, y)$$

160

Combiner moyenne et dérivées : opérateur de Prewitt

- Un opérateur à différence finie est sensible au bruit
- La dérivation est plus robuste si le calcul se fait en moyennant sur un voisinage
- Opérateur de Prewitt : dérivée en x, puis moyenne en y

$$H_x^{\text{Prewitt}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * [0.5 \quad 0 \quad -0.5] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Moyenne dans la direction y

Dérivée dans la direction x

H_y^{Prewitt} est définie de la même façon



161

- Similaire à Prewitt, mais le noyau de moyennage est plus élevé au centre

$$H_x^{\text{Sobel}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * [0.5 \quad 0 \quad -0.5] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_y^{\text{Sobel}} = \frac{1}{4} [1 \quad 2 \quad 1] * \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Moyenne dans la direction x

Dérivée dans la direction y



162

Opérateurs de Prewitt et Sobel

Opérateur de Prewitt

$$H_x^{\text{Prewitt}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H_y^{\text{Prewitt}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérateur de Sobel

$$H_x^{\text{Sobel}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H_y^{\text{Sobel}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



163

Opérateur de Sobel amélioré

- Jähne a proposé une version améliorée de l'opérateur de Sobel

$$H_x^{\text{meilleurSobel}} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -10 & 0 & 10 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$H_y^{\text{meilleurSobel}} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} -3 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

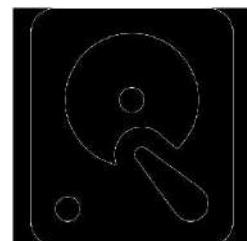


164

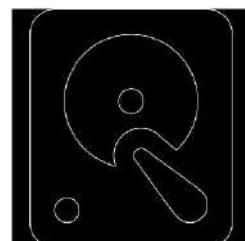
Opérateurs de Roberts, Prewitt et Sobel



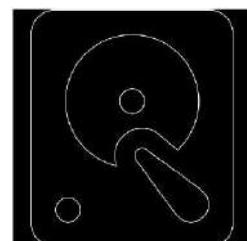
Image



Roberts



Prewitt



Sobel

165

Opérateurs de Roberts, Prewitt et Sobelors



Image



Roberts



Prewitt



Sobel

166

Opérateurs de Roberts, Prewitt et Sobel



Image



Roberts



Prewitt



Sobel

167

Autres opérateurs de détection de contour

Pour les opérateurs basés sur la dérivée première, le contour est proportionnel à la variation d'intensité sous-jacente et peut être difficile à localiser avec précision

Solution

Utiliser la dérivée seconde avec un préfiltrage pour lisser l'image afin de modérer l'amplification du bruit

168

Filtre de Canny

L'opérateur de Canny minimise le nombre de pixels n'appartenant pas au contour et en permet une meilleure localisation

Étapes

1. Lisser l'image à l'aide d'un filtre gaussien
2. Trouver les gradients d'intensité
3. Appliquer un seuillage en fonction de l'amplitude du gradient
4. Appliquer un double seuil pour déterminer les contours potentiels
5. Supprimer les contours faibles qui ne sont pas connectés aux contours forts



169

Netteté des images

Netteté d'une image

Un flou peut apparaître lors de la numérisation ou de la mise à l'échelle d'une image

- Rehausser la netteté va réduire les effets de flou
- Comment ? En amplifiant les composantes haute fréquence
- Les contours sont justement des zones hautes fréquences

Deux approches pour rehausser les contours :

- Opérateur laplacien
- Masquage flou

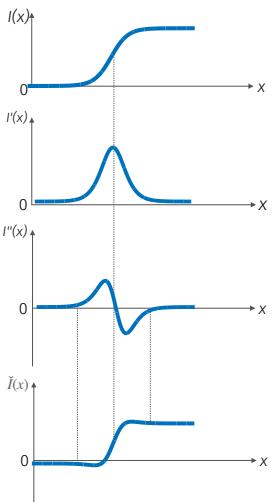
171

Rehausser un contour à l'aide d'un opérateur laplacien

$$\tilde{I} = I(x) - w \cdot I''(x)$$

Diagramme montrant les étapes de calcul de l'opérateur laplacien :

- Intensité de l'image : $I(x)$
- Poids : w
- Dérivée seconde de l'intensité : $I''(x)$



172

Opérateur laplacien

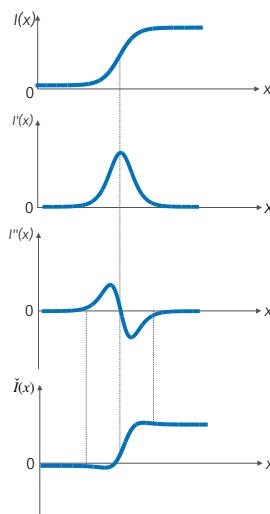
- L'opérateur laplacien 2D combine des dérivées secondes dans les directions verticale et horizontale

- L'opérateur laplacien est défini par :

$$(\nabla^2 I)(x, y) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(x, y)$$

Dérivée 2nde dans
la direction x

Dérivée 2nde dans
la direction y



173

Opérateur laplacien

- Approximation du laplacien :

$$\nabla^2 I(x, y) = [I(x+1, y) - I(x, y)] - [I(x, y) - I(x-1, y)] +$$

$$[I(x, y+1) - I(x, y)] - [I(x, y) - I(x, y-1)]$$

$$= [I(x+1, y) + I(x-1, y) + I(x, y+1) - I(x, y-1)] - 4I(x, y)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

174

Opérateur laplacien

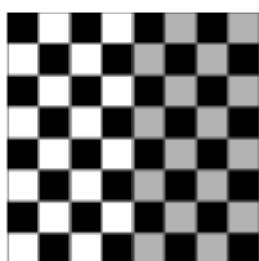
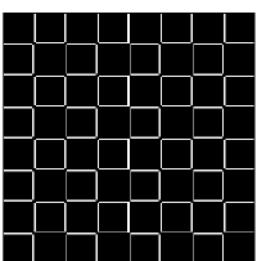


Image floue



Laplacien

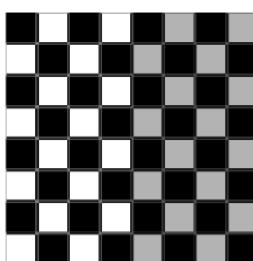


Image plus nette

L'image rehaussée est obtenue en soustrayant
le laplacien de l'image originale

175

Masquage flou

- 1) Soustraire l'image lissée (lissage gaussien σ) de l'image d'origine afin d'obtenir un masque de contours

$$M = I - (I * \tilde{H})$$

- 2) Ajouter à l'image d'origine une version pondérée du masque

$$\check{I} = I + pM$$

Avantages par rapport à l'opérateur laplacien

- Sensibilité au bruit réduite grâce au lissage
- Opération améliorée grâce aux paramètres σ et p

176

Masquage flou

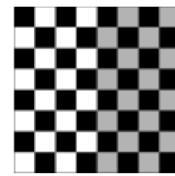
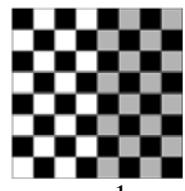
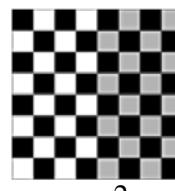


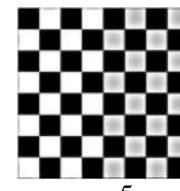
Image d'origine floue



$\sigma = 1$



$\sigma = 2$



$\sigma = 5$

Rehaussements

177

Filtres spatiaux et Python

Filtres spatiaux en Python

Le module `filters` de la bibliothèque [scikit-image](#) propose la plupart des filtres spatiaux vus ici

179

5. Filtres fréquentiels

178

Fréquences dans une image



181

Transformation de Fourier discrète (TFD)

183

Filtres dans le domaine fréquentiel

L'une des raisons de l'utilisation de la transformée de Fourier dans le traitement d'images est due à la convolution spatiale, très gourmande en ressources.

La convolution spatiale est remplacée par une **multiplication élément par élément** de la transformée de Fourier par la matrice d'un filtre

182

Transformation de Fourier discrète 1D (TFD 1D)

Soit $f = [f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}]$

Alors $F = [F_0, F_1, F_2, \dots, F_{N-1}]$

où $F_u = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f_x \exp \left[-2\pi i \frac{xu}{N} \right]$

obtenu par fenêtrage
+ échantillonnage

Transformation inverse : $x_u = \sum_{x=0}^{N-1} F_u \exp \left[2\pi i \frac{xu}{N} \right]$

184

Transformation de Fourier discrète 2D (TFD 2D)

Soit F la matrice de la **transformée de Fourier** de f :

$$F = \mathcal{F}(f)$$

Alors la matrice d'origine f est la transformée de Fourier inverse de F :

$$f = \mathcal{F}^{-1}(F)$$

185

Transformation de Fourier discrète 2D (TFD 2D)

Pour une matrice $M \times N$, la transformée de Fourier s'écrit :

$$\text{TFD complexe} \quad \text{image}$$
$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right],$$

fréquences u, v pour les directions x, y

et son inverse s'écrit :

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left[2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right].$$

186

Transformation de Fourier rapide (FFT)

- Plusieurs algorithmes pour calculer la TFD rapidement
- La **transformée de Fourier rapide (FFT)** en est un
 - L'algorithme divise le vecteur d'origine en 2
 - Calcule récursivement la FFT de chaque moitié
 - Puis fusionne les résultats
- Le calcul direct prend 2^{2n} multiplications en temps
- Avec la FFT, le calcul prend $n2^n$ multiplications en temps
- Temps gagné : $2^n/n$

187

Propriétés de la TFD 2D : séparabilité

- Remarquons que :

$$\exp \left[\pm 2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right] = \exp \left[\pm 2\pi i \frac{xu}{M} \right] \exp \left[\pm 2\pi i \frac{yv}{N} \right]$$

\longleftrightarrow TFD 2D \longleftrightarrow TFD 1D (ligne) \longleftrightarrow TFD 1D (colonne)

- La propriété de séparabilité nous permet d'utiliser les TFD 1D pour calculer les lignes, puis les colonnes de la transformée de Fourier 2D

188

Propriétés de la TFD 2D : linéarité

- La TFD d'une somme est la somme des TFD individuelles

$$\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$$

- De même :

$$\mathcal{F}(kf) = k\mathcal{F}(f) \quad \text{où } k \text{ est un scalaire}$$

- Ces propriétés sont intéressantes pour traiter des dégradations représentées par des sommes (ex. : bruit)

$$f' = f + n$$

$$\mathcal{F}(f') = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(n)$$

⇒ Le bruit peut être supprimé ou réduit en modifiant la transformée de n



Convolution et TFD

La TFD propose une méthode alternative pour réaliser une convolution entre une image I et un filtre spatial S

$$I * S = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(I) \cdot \mathcal{F}(S'))$$

où S' est tel que S a subi un "rembourrage" afin d'avoir la même taille que I



Convolution et TFD

Exemple : $I = 512 \times 512$, $S = 32 \times 32$

Calcul de convolution classique

- $32^2 = 1024$ multiplications pour chaque pixel
- Total des multiplications = $512 \times 512 \times 1024 = \mathbf{268 \ 435 \ 456}$

Calcul en utilisant des TFD

- Chaque ligne requiert 4608 multiplications
- Multiplications pour les lignes = $4608 \times 512 = 2 \ 359 \ 296$
- Itération sur les colonnes, TFD : $4 \ 718 \ 592$ multiplications
- Même chose pour la TFD du filtre et pour la TFD inverse
- En plus : 512×512 multiplications pour le produit des 2 TFD
- Total des multiplications = $4 \ 718 \ 592 \times 3 + 262144 = \mathbf{14 \ 417 \ 920}$



Composante continue de la TFD

La valeur $F(0, 0)$ de la TFD est appelée **composante continue**

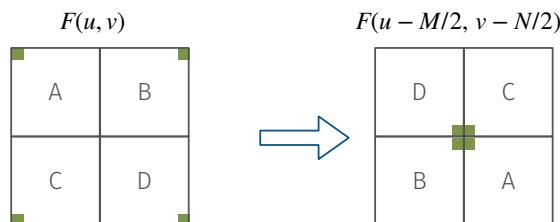
$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \exp(0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

Elle correspond à la somme de tous les termes dans la matrice d'origine



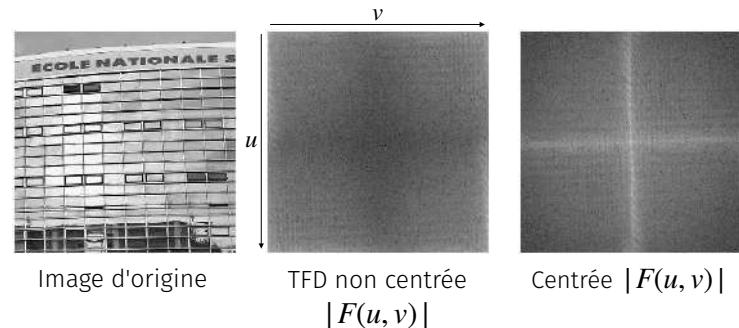
Centrer le spectre de la TFD

- $F(0, 0)$ est au coin en haut à gauche
- Pour afficher la TFD, il est plus pratique de placer la composante continue au centre
- Pour ce faire, nous échangeons les cadrons



193

Centrer le spectre de la TFD

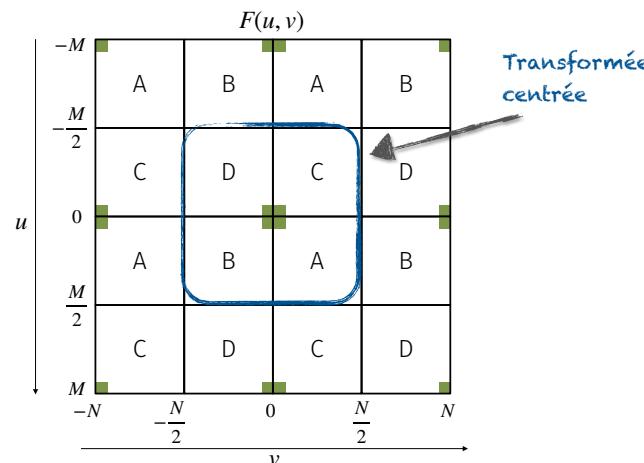


La composante continue est beaucoup plus grande que les autres valeurs, nous étirons donc les valeurs de la transformation en affichant : $\log(1 + |F(u, v)|)$

194

Symétrie et conjugué

- L'information dans une TFD est redondante sur une moitié



195

Exemple de calcul d'une TFD 2D en Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import cmath

def DFT2D(image):
    data = np.asarray(image)
    M, N = image.size # (img x, img y)
    dft2d = np.zeros((M, N), dtype=complex)
    for u in range(M):
        for v in range(N):
            sum_matrix = 0.0
            for m in range(M):
                for n in range(N):
                    e = cmath.exp(- 2j * np.pi * ((u * m) / M + (v * n) / N))
                    sum_matrix += data[m, n, 1] * e
            dft2d[u, v] = sum_matrix
    return dft2d

img = ...
img2 = img.resize((50,50))
plt.imshow(img2)
dft = DFT2D(img2)
plt.imshow(dft.real)
```

196

Quelques exemples de TFD



197

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TFD d'une image uniforme avec un contour



Image d'origine



$\log(1+|F|)$



199

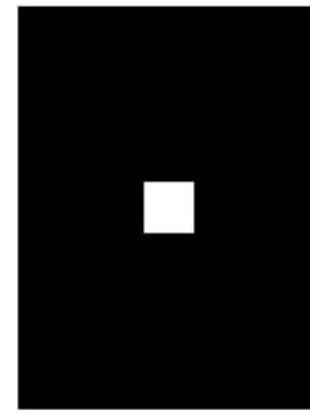
TFD d'une image uniforme

- Supposons une image uniforme 13x8 formée de pixels à 1 : $I(x, y) = 1$
- La TFD à une composante continue et le reste est à 0
- La composante continue est la somme de tous les éléments = 104

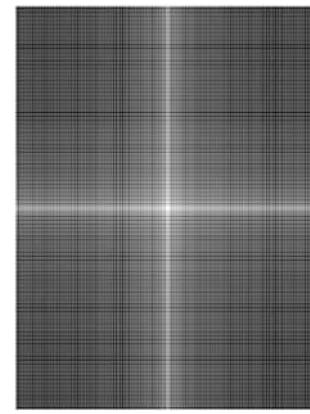


198

TFD d'un carré synthétique



Image

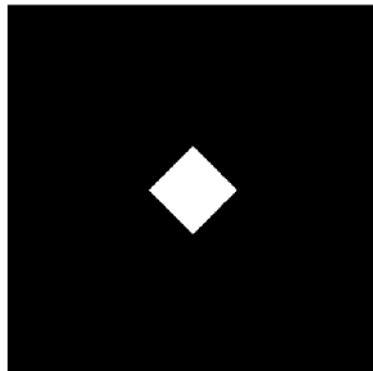


$\log(1+|F|)$

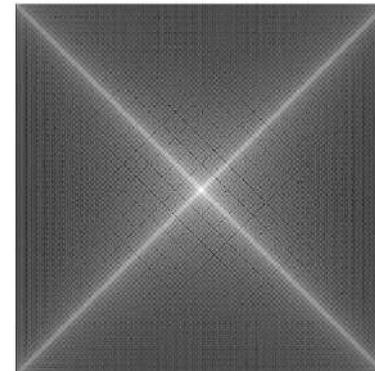


200

TFD d'un carré synthétique ayant subi une rotation



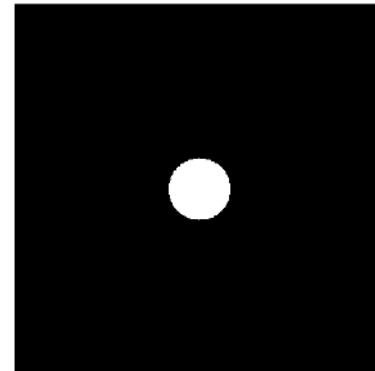
Image



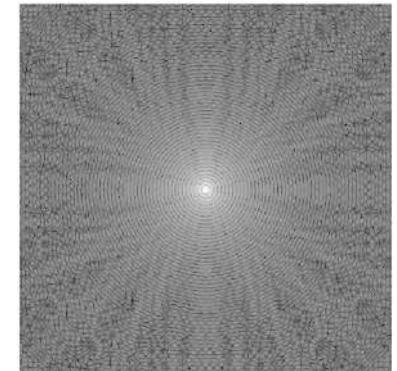
$\log(1+|F|)$

201

TFD d'un disque synthétique



Image



$\log(1+|F|)$

202

Filtrage dans le domaine fréquentiel

203

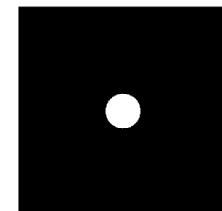
Filtre passe-bas idéal

Un filtre passe-bas conserve les fréquences situées en dessous d'une fréquence de coupure

- Après une TFD, la composante continue et les composantes basse fréquence sont situées autour du centre

- Un filtre spécifie sa fréquence de coupure à l'aide d'un disque

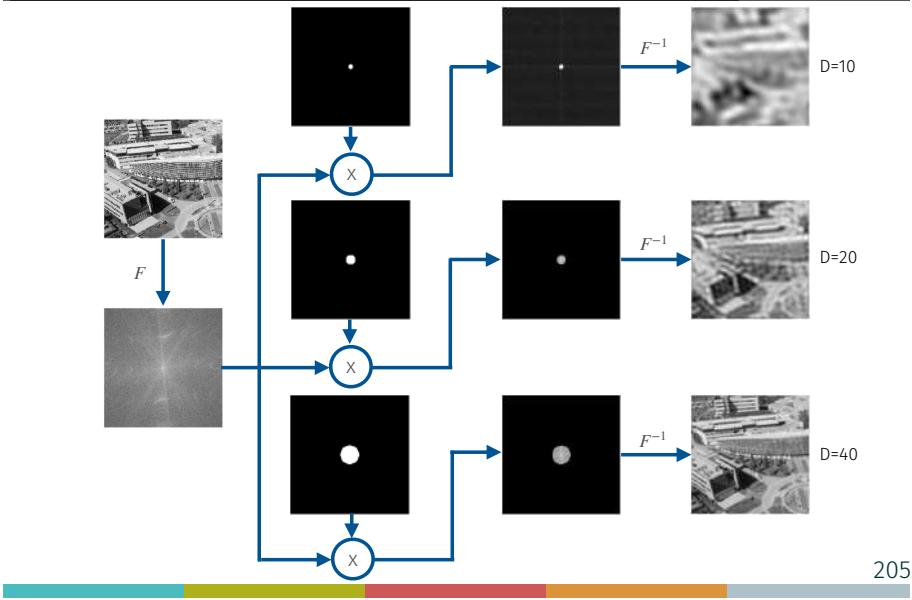
$$m(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \text{ est plus proche du centre qu'une valeur donnée } R \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ est plus éloigné du centre que } R \end{cases}$$



Un filtrage passe-bas amène un flou

204

Filtre passe-bas idéal

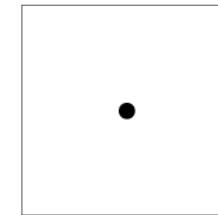


205

Filtre passe-haut idéal

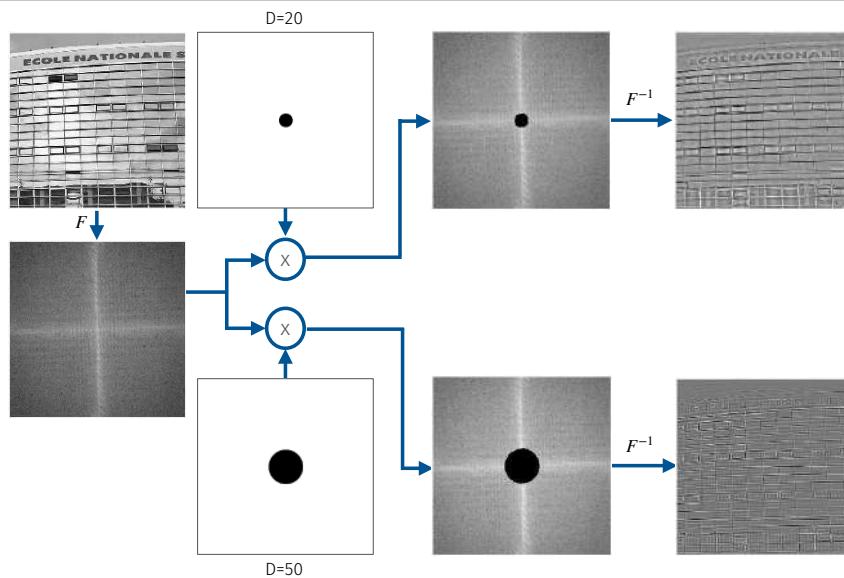
C'est l'opposé du filtre passe-bas : il faut éliminer les fréquences au centre et conserver les autres

- Un filtrage passe-haut **accentue les contours**
- Nous utilisons à présent un disque binaire noir sur fond blanc



206

Filtre passe-haut idéal



207

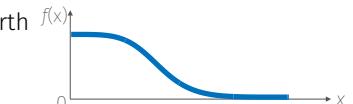
Filtre de Butterworth

- Une fréquence de coupure nette entraîne des artefacts oscillatoires sur la TFD

- Les filtres de Butterworth ont une bordure plus douce (disque avec une bordure adoucie)

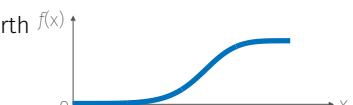
Filtre passe-bas de Butterworth

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/D)^{2n}}$$



Filtre passe-haut de Butterworth

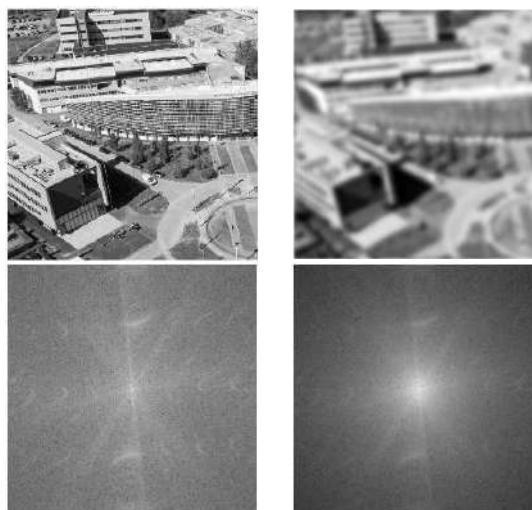
$$f(x) = \frac{1}{1 + (D/x)^{2n}}$$



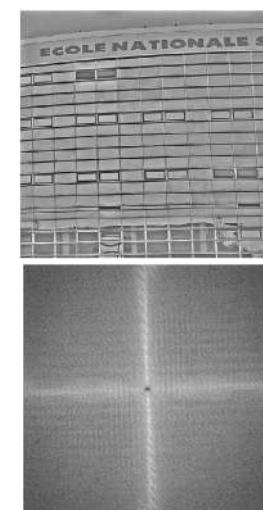
n est l'ordre du filtre et permet de contrôler l'adoucissement

208

Filtre passe-bas de Butterworth



D=20, n = 2



D=10, n = 2

Filtrage gaussien

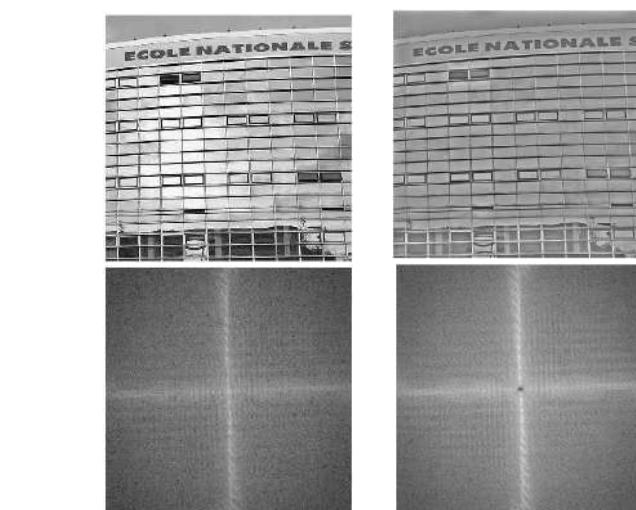
Les filtres gaussiens peuvent être appliqués dans le domaine fréquentiel

- Créer un filtre gaussien
- Multiplier la TFD de l'image par le filtre gaussien
- Inverser le résultat

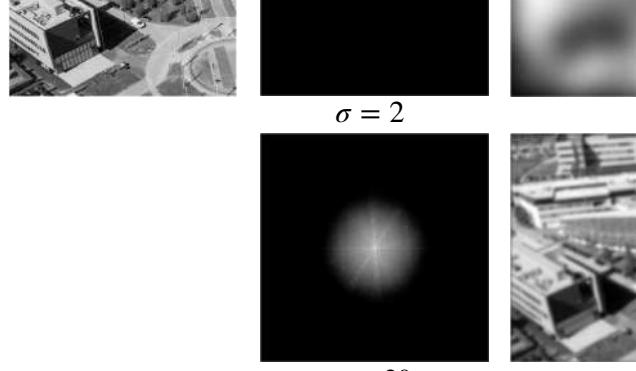
La transformée de Fourier d'une gaussienne étant aussi une gaussienne, il suffit de multiplier directement la TFD de l'image par la gaussienne (pas besoin de trouver sa transformée de Fourier)

211

Filtre passe-bas gaussien



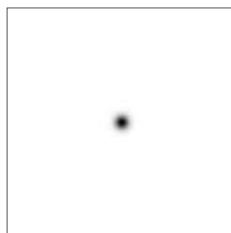
$\sigma = 2$



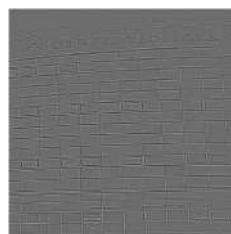
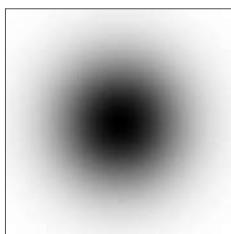
$\sigma = 20$

212

Filtre passe-haut gaussien

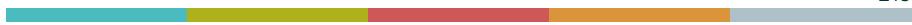


$\sigma = 2$



$\sigma = 20$

213

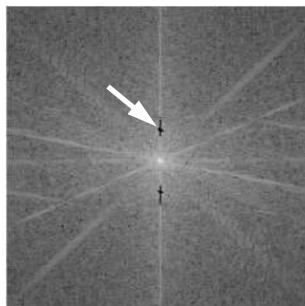


Suppression de bruit périodique

2 façons de supprimer le bruit périodique dans le domaine fréquentiel :

- Filtre coupe-bande
- Filtre réjecteur de bande

Filtre coupe-bande

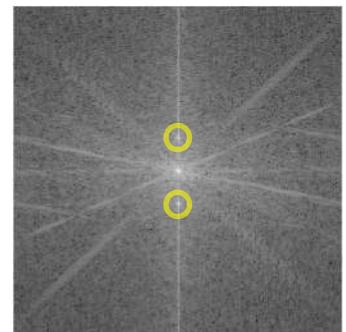


215



Suppression de bruit périodique

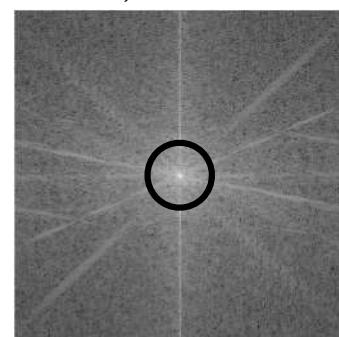
- Un bruit périodique ne peut être supprimé dans le domaine spatial
- Par contre, il peut l'être dans le domaine fréquentiel
- Un bruit périodique apparaît sous la forme de "pics" éloignés du centre



214

Suppression de bruit périodique

Filtre réjecteur de bande



216

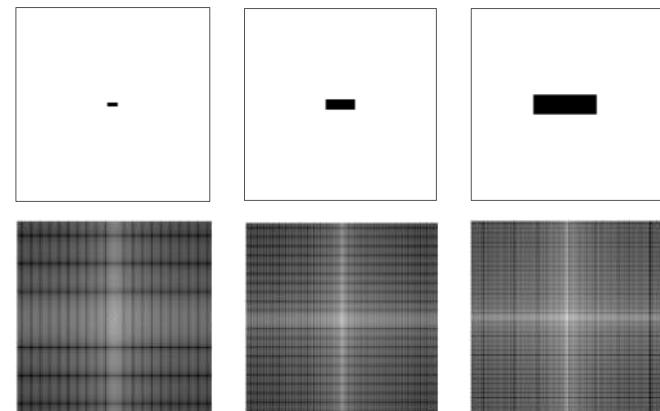


Autres exemples de TFD

217

Exemples de TFD 2D : mise à l'échelle

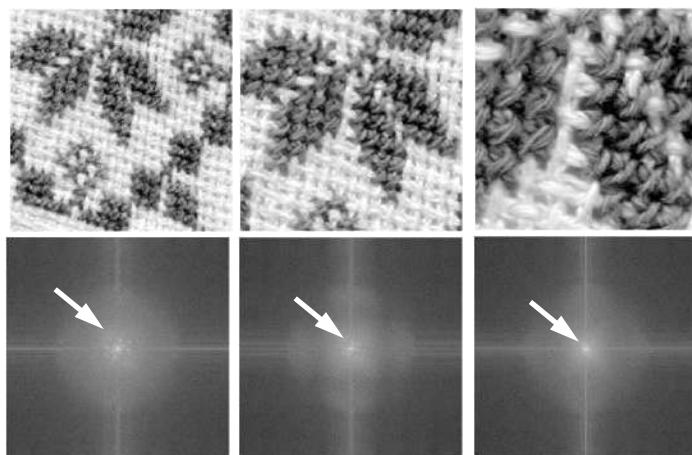
Une élongation de l'image correspond à une contraction du spectre et vice versa



218

Exemples de TFD 2D : motifs périodiques

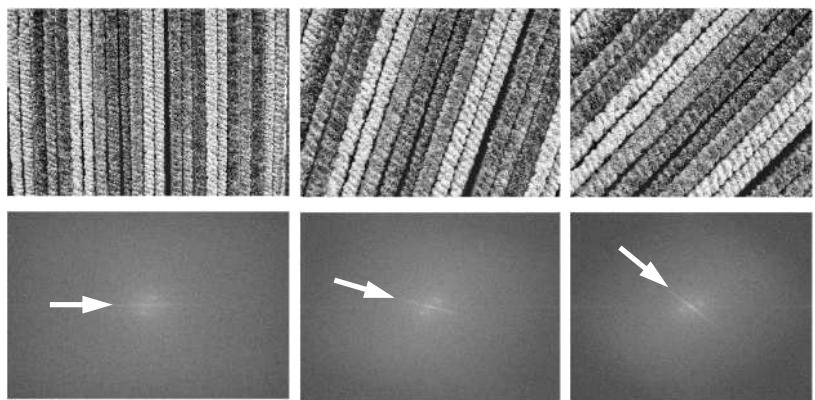
Les motifs périodiques répétitifs apparaissent sous forme de pics distincts à des positions correspondantes dans le spectre



219

Exemples de TFD 2D : rotation

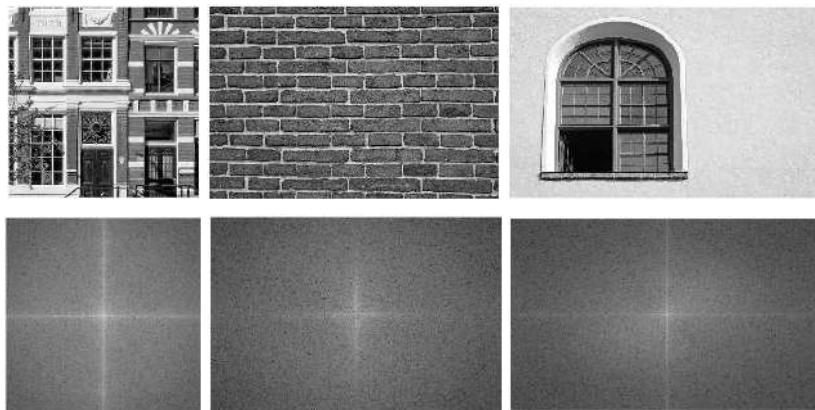
Une rotation correspond à une rotation du spectre par le même angle/quantité



220

Exemples de TFD 2D : structures allongées et orientées

Les motifs réguliers, allongés et artificiels sont dominants dans le spectre



221

Exemples de TFD 2D : scènes naturelles

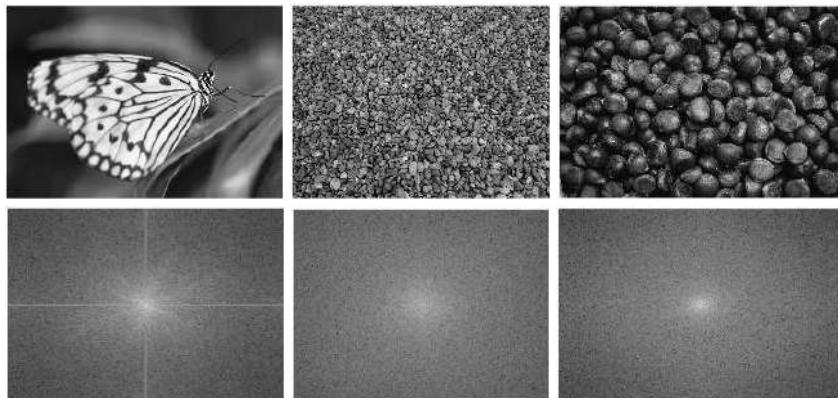
Les répétitions dans les scènes naturelles sont moins dominantes que celles créées par l'homme



222

Exemples de TFD 2D : scènes naturelles

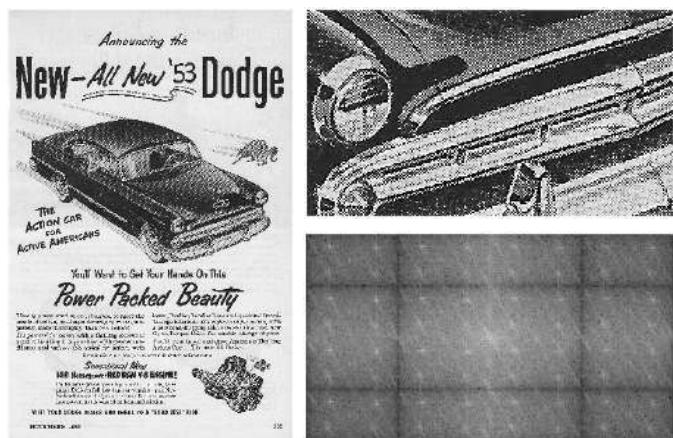
Les motifs répétitifs des images naturelles n'ont pas d'orientation dominante



223

Exemples de TFD 2D : motifs imprimés

Les motifs diagonaux et réguliers causés par une impression sont clairement visibles dans le spectre



224

Filtres fréquentiels et Python

Filtres fréquentiels et Python

Les bibliothèques [NumPy](#) et [SciPy](#) proposent toutes les deux un calcul de la FFT. Nous utiliserons la version de NumPy.

225

226

6. Morphologie mathématique

Introduction

- Introduite en 1964 par Georges Matheron et Jean Serra
- Initialement utilisée sur des images binaires dans le cadre d'applications liées à la prospection minière

Quels types d'images binaires ?

- Fax, images imprimées
- Images en niveaux de gris seuillées

Attention : les filtres morphologiques peuvent altérer les structures locales d'une image

228

Dilatation et érosion

Dilatation et érosion

2 opérations de base

- Dilatation
- Érosion

Des opérations combinant les précédentes

- Ouverture
- Fermeture
- etc.



229

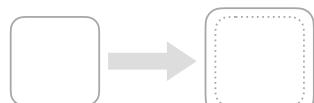


230

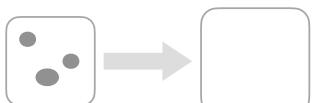
Dilatation

Utilisé pour :

Agrandir



Boucher les trous

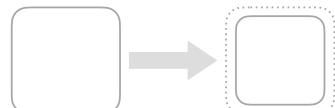


231

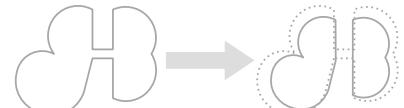
Érosion

Utilisée pour :

Réduire



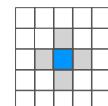
Supprimer les branches et les ponts



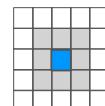
232

Voisinage

4-voisins (\mathcal{N}_4)
8-voisins (\mathcal{N}_8)



\mathcal{N}_4



\mathcal{N}_8



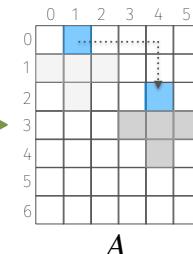
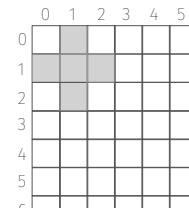
Translation

Soit A un ensemble de pixels dans une image binaire

- Si $w = (x, y)$ est un point de coordonnée spécifique
- A_w est le translaté de A dans la direction (x, y) . c.-à-d.

$$A_w = \{(a, b) + (x, y); (a, b) \in A\}$$

Exemple : si A est l'ensemble formant une croix, et $w = (3, 2)$



Une image vue comme un ensemble de points

Les opérations morphologiques considèrent les images comme des ensembles de points en 2D

Par exemple, soit I une image telle que $I(u, v) \in \{0, 1\}$, alors :

$$\mathcal{Q}_I = \{ p \mid I(p) = 1 \}, \text{ et}$$

L'opération **OU** est l'**union** des ensembles :

$$\mathcal{Q}_{I_1 \vee I_2} = \mathcal{Q}_{I_1} \cup \mathcal{Q}_{I_2}$$

L'opération **ET** est l'**intersection** des ensembles :

$$\mathcal{Q}_{I_1 \wedge I_2} = \mathcal{Q}_{I_1} \cap \mathcal{Q}_{I_2}$$



Dilatation

Supposons A et B des ensembles de pixels, la dilatation de A par B est :

$$A \oplus B = \bigcup_{x \in B} A_x$$

- Cette opération est appelée **addition de Minkowski**

- Pour chaque pixel x de B :

- 1) On translate A de x
- 2) On prend l'union de toutes ces translations

$$A \oplus B = \{ (x, y) + (u, v) \mid (x, y) \in A, (u, v) \in B \}$$



Propriétés de la dilatation

La dilatation est commutative

$$I \oplus H = H \oplus I$$

La dilatation est associative

$$(I_1 \oplus I_2) \oplus I_3 = I_1 \oplus (I_2 \oplus I_3)$$

237

Exemple de dilatation

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

$A_{(-1,-1)}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

$A_{(1,-1)}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

$A_{(1,1)}$

-1	0	1
-1	1	0
0	0	1

B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

$A \oplus B$

238

Élément structurant

- Nous considérons que B est un ensemble de pixels plus petit de A
- B est appelé **élément structurant**
- Un élément structurant correspond à un "masque" utilisé dans les opérations morphologiques
- Il est formé uniquement de 0 et de 1
- Il peut avoir toute forme et toute taille, et il possède une origine qui peut être en dehors de l'élément

239

Exemple de dilation sur une image binaire

Dilatation avec un disque de rayon 3 comme élément structurant

Or do you think of yourself as a very friendly person already? Maybe you're one of the lucky ones who have learned the secrets. But are you friendly with everybody—with boys as well as with girls? With adults as well as with your friends? With all the boys and girls in your class, even those who may not be very well liked? You know it's one



You will want to be friendly with people of all kinds.

Or do you think of yourself as a very friendly person already? Maybe you're one of the lucky ones who have learned the secrets. But are you friendly with everybody—with boys as well as with girls? With adults as well as with your friends? With all the boys and girls in your class, even those who may not be very well liked? You know it's one



You will want to be friendly with people of all kinds. thing to be friendly with the people you like—with those in your own crowd, or with those you'd like to get in with. It's another thing to be friendly with people whom you don't know very well, or whom you think you don't like very well.

240

Érosion

Soit les ensembles A et B , alors l'**érosion** de A par B est :

$$A \ominus B = \cap_{b \in B} A_b$$

- Cette opération est appelée **soustraction de Minkowski**
- Elle cherche toutes les occurrences de B dans A

$$A \ominus B = \{ (x, y) \mid B(x, y) \subseteq A \}$$



241

Exemple d'une érosion

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												

A

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												

...

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												

$A \ominus B$

-1	0	1
-1		
0		

B

243



Propriétés de l'érosion

L'érosion n'est pas commutative

$$I \ominus H \neq H \ominus I$$

La dilatation d'un objet au premier plan correspond à l'érosion du fond

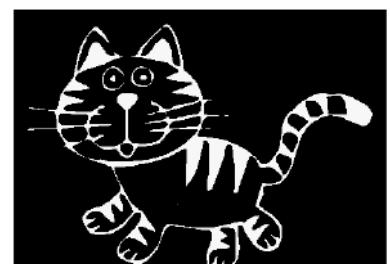
$$I \oplus H = \overline{I \ominus H^*}$$



242

Exemple d'érosion sur une image binaire

Érosion par un disque de rayon 5 comme élément structurant



244

Détection de contours

Application à la détection de contours

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

$A \oplus B$

-1	0	1
0		
1		

B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

$(A \oplus B) - A$

Contour externe

246



Application à la détection de contours

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

$A \ominus B$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

$A \oplus B$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

$(A \oplus B) - (A \ominus B)$

Gradient morphologique

247



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

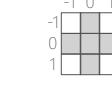
A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

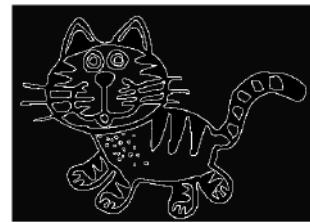
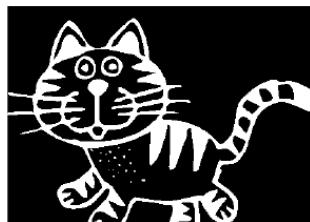
$A \ominus B$

Contour interne

248



Application à la détection de contours



Contour externe



Gradient morphologique

Contour interne

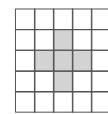
249

Création de filtres morphologiques

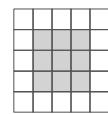
Création de filtres morphologiques

Un filtre morphologique est caractérisé par :

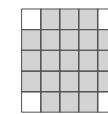
- Le type d'opération (ex. : dilatation, érosion)
- Le type de l'élément structurant



4-voisins



8-voisins



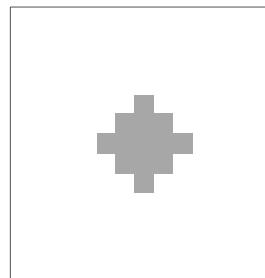
disque

- Les éléments structurants circulaires sont souvent utilisés dans la pratique
- La dilatation par un disque de rayon R ajoute une épaisseur R
- L'érosion par un disque de rayon R supprime une épaisseur R

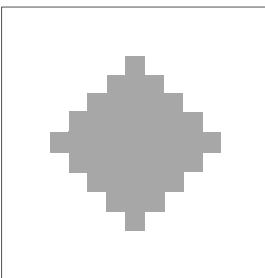
251

Création de filtres morphologiques

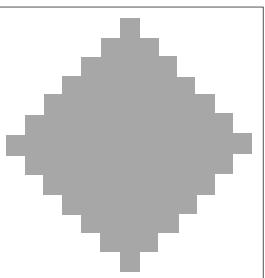
On crée de grands filtres en appliquant plusieurs fois de suite des filtres plus petits (pas forcément les mêmes à chaque itération d'ailleurs)



H_A



$H_A \oplus H_A$



$H_A \oplus H_A \oplus H_A$

252

Ouverture et fermeture

253

Ouverture

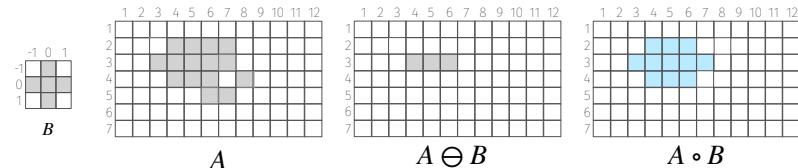
- L'**ouverture** est construite à partir de la dilatation et de l'érosion
- L'ouverture de A par l'élément structurant B est :

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

- On peut aussi écrire :

$$A \circ B = \{ B(x, y) \mid B(x, y) \subseteq A \}$$

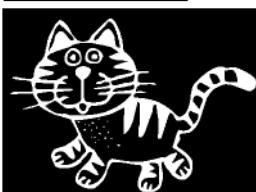
(l'ouverture est l'union de toutes les translations de B qui sont contenues dans A)



254

Ouverture

- Les structures de premier plan plus petites que l'élément structurant sont éliminées en premier lieu (érosion)
- Les structures restantes sont lissées à l'étape suivante (dilatation) puis ramenées à leur taille d'origine



disque (R=1)



disque (R=5)



disque (R=11)

255

Propriétés de l'ouverture

L'ouverture crée un sous-ensemble de A :

$$A \circ B \subseteq A$$

Idempotence (une ouverture ne peut être appliquée qu'une seule fois)

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$

Sous-ensembles :

$$\text{Si } A \subseteq C, \text{ alors } (A \circ B) \subseteq (C \circ B)$$

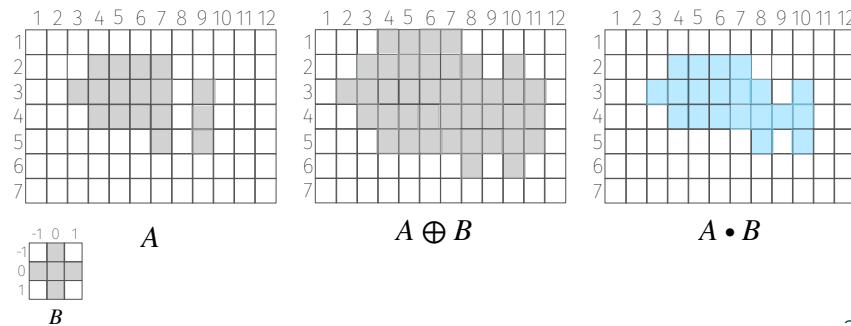
256

Fermeture

- La **fermeture** est construite à partir de la dilatation et de l'érosion
- La fermeture de A par l'élément structurant B est :

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

- La fermeture est une dilatation suivie d'une érosion

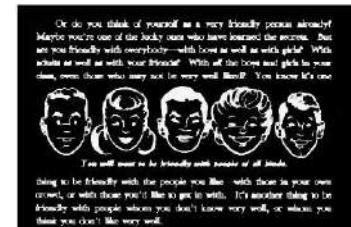


257

Exemple d'une fermeture



disque (R=3)



disque (R=5)

259

Propriétés de la fermeture

A est un sous-ensemble de la fermeture :

$$A \subseteq (A \bullet B)$$

Idempotence (la fermeture ne peut être appliquée qu'une seule fois)

$$(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$$

Sous-ensembles :

$$\text{Si } A \subseteq C, \text{ alors } (A \bullet B) \subseteq (C \bullet B)$$

258

Relations entre ouverture et fermeture

- Ouverture et fermeture sont des opérations **duales** (l'ouverture du premier-plan correspond à la fermeture du fond et vice versa)

- Le complémentaire d'une fermeture = l'ouverture du complémentaire

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} \bullet \hat{B}$$

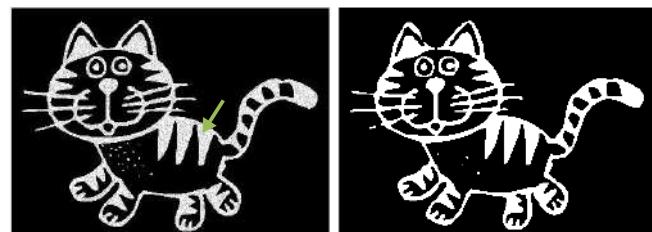
- Le complémentaire d'une ouverture = la fermeture du complémentaire

$$\overline{A \ominus B} = \overline{A} \bullet \hat{B}$$

260

Filtrage morphologique

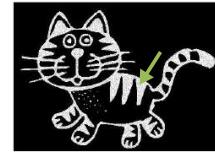
261



263

Débruitage

Supposons A , une image bruitée par du speckle



- $A \ominus B$ supprime les pixels noirs, mais élargit les trous
- Nous pouvons reboucher les trous en dilatant 2 fois

$$((A \ominus B) \oplus B) \oplus B$$



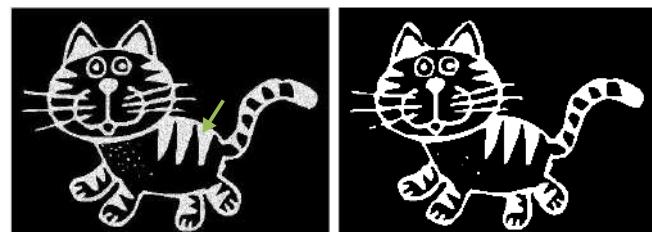
262

Débruitage

- La 1ère dilatation ramène les trous à leur taille d'origine
- La 2nde dilatation supprime les trous, mais élargit les objets dans l'image
- Pour les ramener à leur taille d'origine, nous appliquons une érosion finale

$$((A \ominus B) \oplus B) \oplus B \ominus B$$

- Ce débruitage correspond à une ouverture suivie d'une fermeture
 $(A \circ B) \bullet B$



Morphologie sur les images en niveaux de gris

264

Morphologie et images en niveaux de gris

Les opérations de morphologie peuvent également être appliquées aux images en niveaux de gris

- Il suffit de remplacer **OU** et **ET** par **max** et **min**
- Les opérateurs pour le niveaux de gris peuvent également s'appliquer sur des images binaires
- Pour les images en couleur, effectuez des opérations de morphologie en niveaux de gris sur chaque canal de couleur (RVB)
- Pour les images en niveaux de gris, l'élément structurant peut contenir des valeurs réelles (les valeurs peuvent également être négatives)



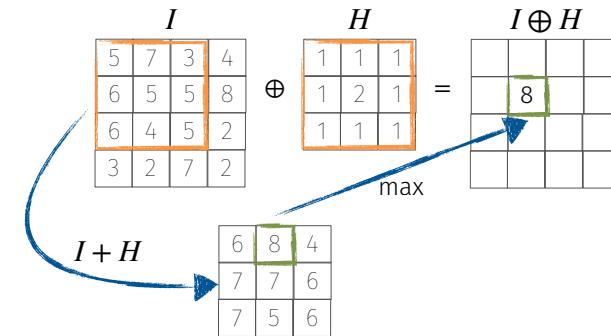
265

Dilatation en niveaux de gris

Soit l'image en niveaux de gris I et l'élément structurant H

La dilatation de I par H est définie par :

$$(I \oplus H)(u, v) = \max_{(i,j) \in H} \{I(u + i, v + j) + H(i, j)\}$$



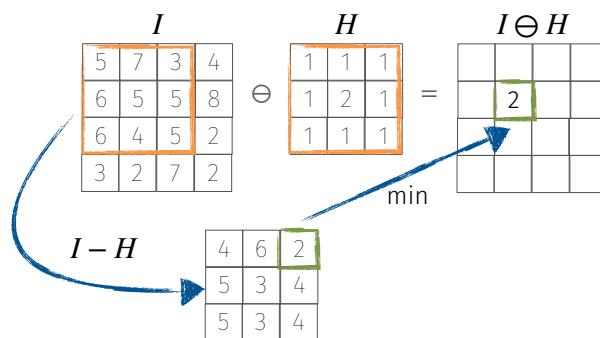
266

Érosion en niveaux de gris

Soit l'image en niveaux de gris I et l'élément structurant H

L'érosion de I par H est définie par :

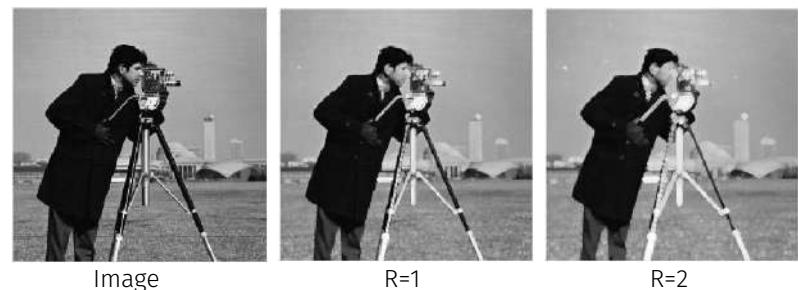
$$(I \ominus H)(u, v) = \min_{(i,j) \in H} \{I(u + i, v + j) - H(i, j)\}$$



267

Exemple d'une dilatation en niveaux de gris

Dilatation par un disque de rayon $R = 1$ et 2



268

Exemple d'une érosion en niveaux de gris

Érosion par un disque de rayon $R = 1$ et 2



Image



R=1



R=2



269

270

Exemple d'une ouverture en niveaux de gris

Ouverture par un disque de rayon $R = 1$ et 2



Image



R=1



R=2



271

272

Ouverture et fermeture en niveaux de gris

Mêmes définitions que pour les images binaires



269

Exemple de fermeture en niveaux de gris

Fermeture par un disque de rayon $R = 1$ et 2



Image



R=1



R=2

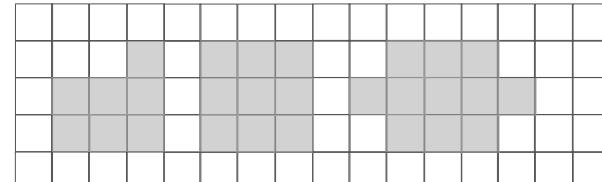
Autres opérateurs utiles

273

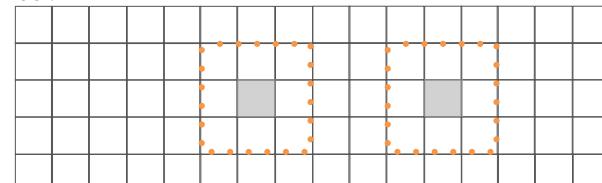
Opérateur Hit-or-Miss

Permet de localiser des formes spécifiques dans les images

- Supposons que nous voulions localiser les formes carrées de taille 3x3 dans l'image ci-dessous



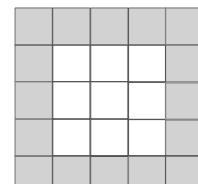
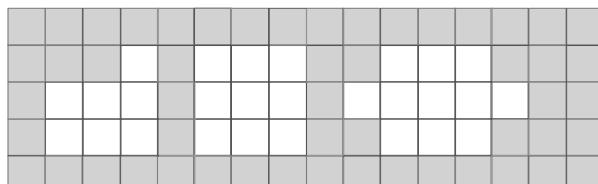
En réalisant une érosion $A \ominus B$ avec B qui est la forme carrée recherchée :



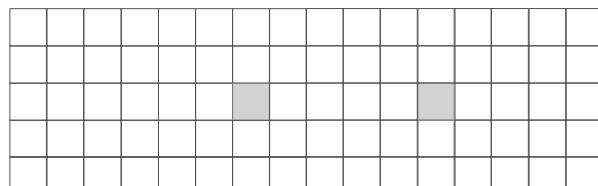
274

Opérateur Hit-or-Miss

Si nous érodons le complémentaire de A avec un élément structurant C qui entoure la forme carrée recherchée



Le résultat de $\bar{A} \ominus C$ est :



L'intersection de 2 érosions aboutie à 1 pixel au centre de la forme recherchée

275

Opérateur Hit-or-Miss généralisé

Si nous recherchons une forme spécifique dans une image, nous créons 2 élément structurants :

- B_1 qui a la même forme que l'élément recherché
- B_2 dont la forme entoure celle que nous recherchons
- Notons $B = (B_1, B_2)$

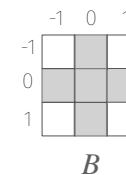
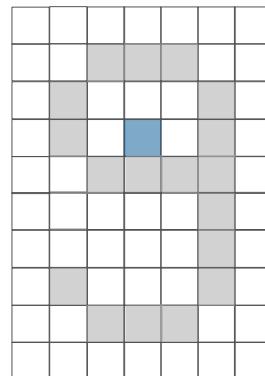
L'opérateur hit-or-miss s'écrit alors :

$$A \otimes B = (A \ominus B_1) \cap (\bar{A} \ominus B_2)$$

276

Algorithme de remplissage de région

Supposons une image dont le contour est en 8-connectivité



B

Prenons un pixel *p* dans la région que nous souhaitons remplir

- Partons de *p* et dilatons autant que nécessaire à l'aide de l'élément structurant *B*

277

Composante connexe

Un algorithme similaire est utilisé pour trouver les composantes connexes dans les images

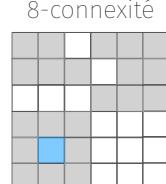
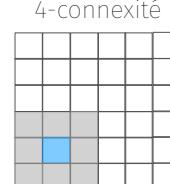
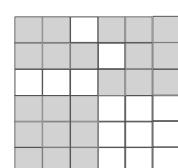
- Élément structurant en forme de croix (composantes 4-connectivité)
- Élément structurant de forme carrée (composantes 8-connectivité)
- Une séquence d'ensembles

$$X_0 = \{p\}, X_1, X_2, \dots$$

tel que

$$X_n = (X_{n-1} \oplus B) \cap A$$

jusqu'à $X_k = X_{k-1}$



279

Algorithme de remplissage de région

2. Après chaque dilatation, réalisons l'intersection avec \bar{A}

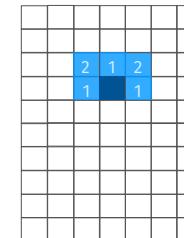
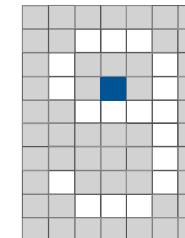
3. Puis créons la séquence :

$$\{p\} = X_0, X_1, \dots, X_k = X_{k+1}$$

avec :

$$X_n = (X_{n-1} \oplus B) \cap \bar{A}$$

On a alors $X_k \cup A$ qui est la région une fois remplie



278

Squelettisation

Table des opérations utilisées pour construire un squelette

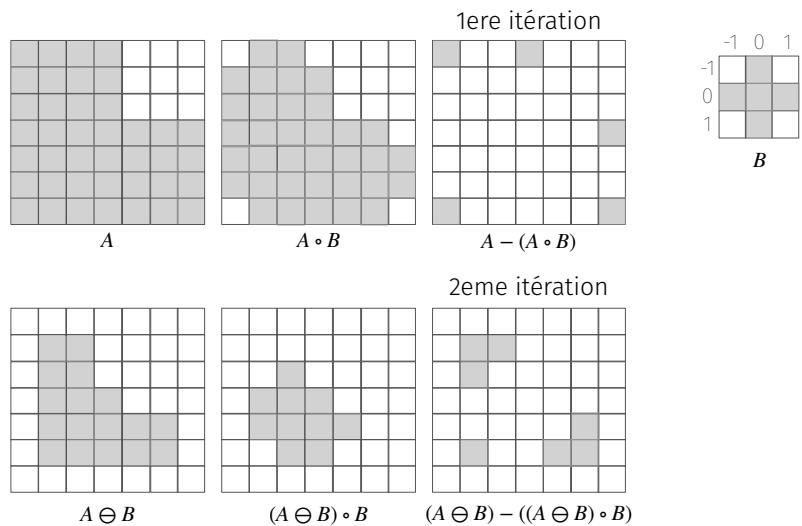
Erosions	Ouvertures	Différences
A	$A \circ B$	$A - (A \circ B)$
$A \ominus B$	$(A \ominus B) \circ B$	$(A \ominus B) - ((A \ominus B) \circ B)$
$A \ominus 2B$	$(A \ominus 2B) \circ B$	$(A \ominus 2B) - ((A \ominus 2B) \circ B)$
$A \ominus kB$	$(A \ominus kB) \circ B$	$(A \ominus kB) - ((A \ominus kB) \circ B)$

Séquence de k érosions avec le même élément structurant : $A \ominus kB$

- On continue la table jusqu'à ce que $(A \ominus kB) \circ B$ soit vide
- Le squelette est l'union de toutes les différences entre ensembles

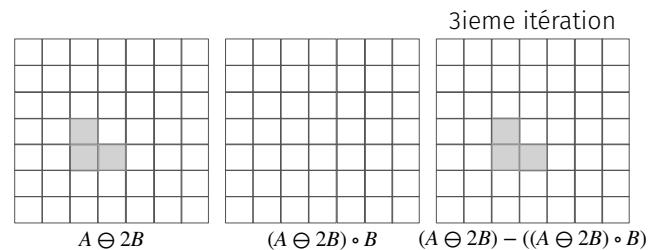
280

Exemple de squelettisation

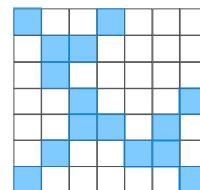


281

Exemple de squelettisation



Le squelette est l'union des 3 squelettisations



282

Exemples de squelettisation



Image d'origine

10 itérations

max itérations

The term **watershed** refers to a ridge that ...
... divides areas drained by different river systems.

The term **watershed** refers to a ridge that ...
... divides areas drained by different river systems.

The term **watershed** refers to a ridge that ...
... divides areas drained by different river systems.

Image d'origine

1 itération

max itérations

283

Morphologie mathématique et Python

Le module **morphology** de la bibliothèque [scikit-image](#) fournit des opérateurs de morphologie mathématique pour les images binaires et niveaux de gris

284

7. Régions



Trouver les régions

Introduction

- De nombreuses tâches nécessitent de reconnaître des objets sur des images en noir et blanc :
 - Du texte sur une page
 - Des objets sur une figure
 - Des structures dans des images issues d'un microscope
- Les images peuvent être en niveaux de gris, auquel cas elles nécessiteront une conversion en noir et blanc
- Les objets sont détectés en rassemblant les pixels en **groupes connexes**
- Chaque objet constitue alors une région binaire appelée **composante connexe**
 - Le type des objets peut ensuite être déterminé en le comparant à des modèles

Trouver les régions d'une image binaire

Trouver

1. Quels pixels appartiennent à quelles régions ?
2. Combien de régions dans l'image ?
3. Où sont situées les régions ?

Ces tâches sont généralement effectuées lors de l'**étiquetage** des régions (attribution d'une étiquette pour les identifier)

3 méthodes

- Remplissage par inondation
- Étiquetage séquentiel des régions
- Combinaison d'étiquetage de région + recherche de contour



Exemple

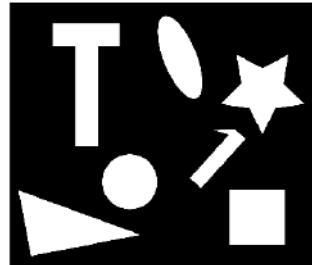


Image d'origine

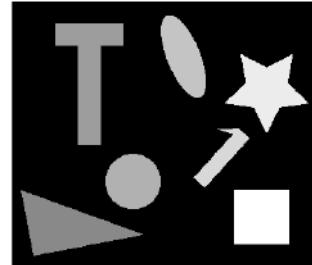


Image étiquetée

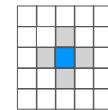
289

Trouver les régions : remplissage par inondation

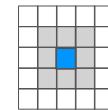
291

Trouver les régions d'une image binaire

1. Fixons un voisinage 4-voisins (\mathcal{N}_4) ou 8-voisins (\mathcal{N}_8)



\mathcal{N}_4



\mathcal{N}_8

2. Adoptons la convention suivante :

$$I(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{pixel du fond} \\ 1 & \text{pixel du premier plan} \\ 2, 3, \dots & \text{étiquettes des régions} \end{cases}$$

290

Étiquetage de région par la technique de l'inondation

- Chercher les pixels non étiquetés du premier plan et les étiqueter
- 3 versions :
 - Récursive (adaptée aux petites images)
 - Par profondeur
 - Par largeur
- La méthode est appelée par l'algorithme d'étiquetage des régions

```
EtiqueterRegion(I: image binaire)
étiquette = 2
Itérer sur toutes les coordonnées (u, v) de l'image
Si I(u, v) = 1 Alors
    RemplirParInondation(I, u, v, étiquette)
    étiquette = étiquette + 1
Retourner I
```

292

Remplissage par inondation en profondeur

- Les pixels non visités sont stockés sur une pile
- Le parcours de l'arbre des pixels se fait en profondeur

```
RemplirParInondation(I, u, v, etiquette)
Créer un pile vide S
déposer(S, (u,v))
TantQue S n'est pas vide Faire
    (x, y) = relever(S)
    Si (x, y) est sur le bord de l'image et I(x, y) = 1 Alors
        I(x, y) = etiquette
        déposer(S, (x+1, y))
        déposer(S, (x, y+1))
        déposer(S, (x, y-1))
        déposer(S, (x-1, y))
    Retourner
```

293

Remplissage par inondation en largeur

- Similaire à la version en profondeur
- Les pixels non encore visités sont stockés dans une file d'attente

```
RemplirParInondation(I, u, v, etiquette)
Créer une file vide Q
enfiler(Q, (u,v))
TantQue Q n'est pas vide Faire
    (x, y) = defiler(Q)
    Si (x, y) est sur le contour de l'image et I(x, y) = 1 Alors
        I(x, y) = etiquette
        enfiler(Q, (x+1, y))
        enfiler(Q, (x, y+1))
        enfiler(Q, (x, y-1))
        enfiler(Q, (x-1, y))
    Retourner
```

294

Trouver les régions : étiquetage séquentiel

295

Étiquetage séquentiel de région

2 étapes

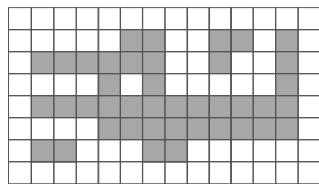
1. Étiquetage préliminaire des régions de l'image
2. Résoudre les cas où un pixel a plus d'une étiquette

- Le test des pixels dépend du voisinage considéré (4-voisinage ou 8-voisinage)



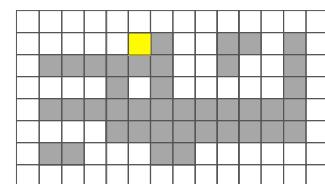
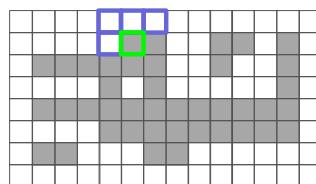
296

Étiquetage séquentiel de région : propagation des étiquettes



	0
■	1
■	2
■	3
■	4
■	5
■	6
■	7

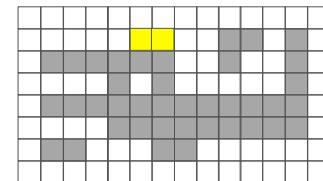
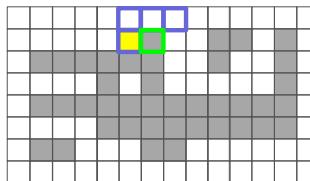
- Le 1er pixel de premier plan est trouvé ($\mathcal{N}_8(u, v)$)
- Tous ses voisins ($\mathcal{N}_8(u, v)$) sont considérés comme appartenant au fond
- Alors on assigne au pixel la première étiquette (2)



297

Étiquetage séquentiel de région : propagation des étiquettes

- Dans l'étape suivante, nous propageons la valeur 2 au voisinage $\mathcal{N}_8(u, v)$

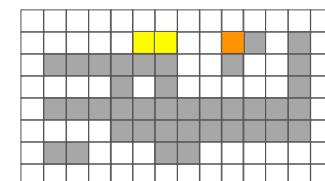
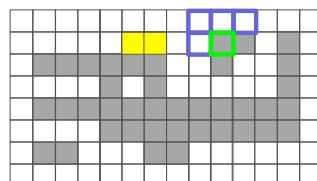


Pour une seule étiquette différente dans le voisinage, on conserve la même étiquette

298

Étiquetage séquentiel de région : propagation des étiquettes

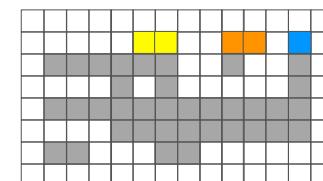
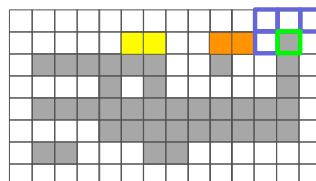
- On continue à tester les pixels comme précédemment
- À l'étape ci-dessous, il n'y a aucune étiquette préalablement définie dans le voisinage du pixel, dont nous incrémentons la valeur de l'étiquette (valeur 3 ici)



299

Étiquetage séquentiel de région : propagation des étiquettes

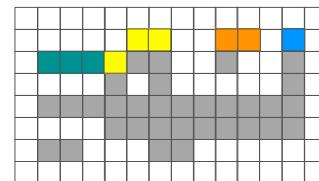
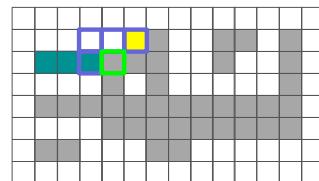
- On continue à tester les pixels comme précédemment
- À l'étape ci-dessous, il n'y a aucune étiquette préalablement définie dans le voisinage du pixel, dont nous incrémentons la valeur de l'étiquette (valeur 4 ici)



300

Étiquetage séquentiel de région : propagation des étiquettes

- On continue à tester les pixels comme précédemment
- À l'étape ci-dessous, il existe 2 pixels voisins avec des étiquettes différentes (2 et 5)
- Une des deux valeurs est propagée, et un indicateur de collision est enregistré

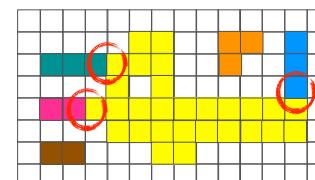


301

Étiquetage séquentiel de région : gestion des collisions

À la fin de l'étape d'étiquetage :

- Tous les pixels d'avant-plan sont étiquetés
- Toutes les collisions entre étiquettes ont été enregistrées
- Les étiquettes et les collisions correspondent au noeuds d'un graphe non orienté

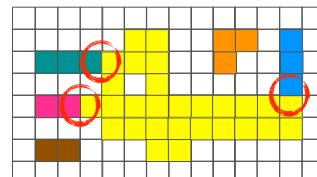


Graphe non-orienté des collisions

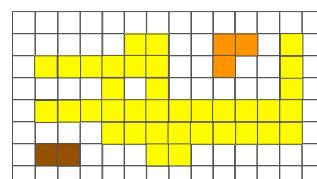
302

Étiquetage séquentiel de région : résoudre les collisions

- C'est l'étiquette de plus petite valeur (ici 2) qui va être choisie lorsque plusieurs étiquettes sont en confrontation



Graphe non-orienté des collisions



303

Propriétés des régions binaires

304

Propriétés des régions binaires

Un homme décrira des régions en fonction de leurs propriétés. Par exemple : "Un T-shirt khaki de taille XL qui a une décoration jaune et est posé sur une table en chêne"



- Pour un ordinateur, une telle description n'est pas encore possible
- Toutefois, il pourra calculer un certain nombre de propriétés pour les différentes régions dans une image, ce afin de permettre une classification

305

Types de caractéristiques

- Caractéristiques sur la forme
- Caractéristiques géométriques

306

Caractéristiques d'une forme

- **Caractéristique** : valeur numérique ou qualitative obtenue à partir des valeurs et des coordonnées des pixels (ex. : la taille est le nombre total de pixels de la région)

- Vecteur de caractéristiques :

- Combinaison de différentes caractéristiques
- Utilisé comme une "signature" de la région dans le but de classer ou comparer
- Les caractéristiques doivent être :
 - simples à calculer
 - non affectées par une translation, une rotation ou une mise à l'échelle

307

Caractéristiques géométriques

Soit une région R dans une image binaire

La région correspond à la distribution de points de l'avant-plan dans un plan discret

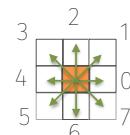
308

Caractéristiques géométriques : périmètre

- **Périmètre** : longueur du contour externe de la région (R doit être connectée !)
- Pour un 4-voisinage, la mesure de la longueur est supérieure à la longueur réelle
- Approximation pour un 8-voisinage : $C'_R = [C'_0, C'_1, \dots, C'_{M-1}]$

$$\text{Périmètre}(R) = \sum_{i=0}^{M-1} \text{longueur}(C'_i)$$

avec $\text{longueur}(C) = \begin{cases} 1 & \text{pour } c = 0, 2, 4, 6 \\ \sqrt{2} & \text{pour } c = 1, 3, 5, 7 \end{cases}$



La formule précédente conduit à un surestimation (multiplier le résultat par 0,95)



310

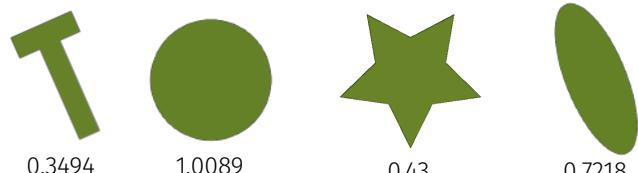
Caractéristiques géométriques : compacité et circularité

- **Compacité** : rapport entre la surface d'une région et son périmètre

$$\text{Compacité}(R) = \frac{\text{Surface}(R)}{\text{Périmètre}^2(R)}$$

- Elle est invariante en translation, en rotation et en mise à l'échelle
- La compacité est de $1/4\pi$ pour un disque

$$\text{Circularité}(R) = 4\pi \cdot \frac{\text{Surface}(R)}{\text{Périmètre}^2(R)}$$



311

Caractéristiques géométriques : surface

- **Surface** : nombre des pixels de l'image qui sont dans la région

$$\text{Surface}(R) = |R| = N$$

- **Surface d'une région connexe** (sans trous) : définie par les M coordonnées des points est estimée à l'aide de la formule :

$$\text{Surface}(R) \simeq \frac{1}{2} \left| \sum_{i=0}^{M-1} (u_i \cdot v_{(i+1)\text{mod}M} - u_{(i+1)\text{mod}M} \cdot v_i) \right|$$



310

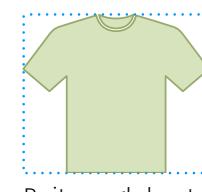
Caractéristiques géométriques : boîte englobante et enveloppe convexe

- **Boîte englobante** : rectangle minimal qui contient tout les points de la région R

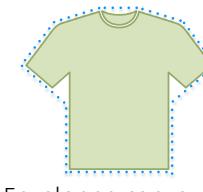
- **Enveloppe convexe** : plus petit polygone qui entoure tous les points de la région R

- Convexité : relation entre la longueur de l'enveloppe convexe et le périmètre de R

- Densité : rapport entre la surface de la région et celle de l'enveloppe convexe



Boîte englobante



Enveloppe convexe

312

Propriétés statistiques de la forme

- Les points d'une région peuvent aussi être vus comme statistiquement distribués sur un plan
- Ces propriétés ne nécessitent pas que les régions soient connectées
- Exemple : le **centre de masse** d'une région binaire est la moyenne arithmétique de toutes les coordonnées (x, y) des points de la région

$$\bar{x} = \frac{1}{|R|} \sum_{(u,v) \in R} u \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{|R|} \sum_{(u,v) \in R} v$$

313

Propriétés statistiques de la forme

- De la même façon, le centre de masse peut être exprimé par :

$$\bar{x} = \frac{1}{|R|} \cdot \sum_{(u,v) \in R} u^1 v^0 = \frac{m_{10}(R)}{m_{00}(R)}$$
$$\bar{y} = \frac{1}{|R|} \cdot \sum_{(u,v) \in R} u^0 v^1 = \frac{m_{01}(R)}{m_{00}(R)}$$

315

Propriétés statistiques de la forme

- Le centre de masse est un cas particulier du concept général de **moment**
- Le **moment ordinaire** d'ordre p, q pour une fonction discrète $I(u, v)$ est défini par :

$$m_{pq} = \sum_{(u,v) \in R} I(u, v) \cdot u^p v^q$$

- La surface d'une région binaire correspond au **moment d'ordre 0**

$$\text{Surface}(R) = m_{00}(R) = \sum_{(u,v) \in R} 1 = \sum_{(u,v) \in R} u^0 v^0 = |R|$$

314

Propriétés statistiques de la forme

Moments centrés

- Le centre de masse est utilisé comme référence (nouvelle origine) pour calculer des caractéristiques invariantes en translation
- Les moments centrés d'ordre p, q sont calculés par :

$$\mu_{pq} = \sum_{(u,v) \in R} I(u, v) \cdot (u - \bar{x})^p (v - \bar{y})^q$$

- Pour une image binaire ($I(u, v) = 1$) :

$$\mu_{pq} = \sum_{(u,v) \in R} (u - \bar{x})^p (v - \bar{y})^q$$

316

Propriétés statistiques de la forme

- La valeur des moments centrés dépend :
 - Des distances de tous les points de la région par rapport au centre de masse
 - De la taille absolue de la région
 - L'invariance par rapport à la taille sera obtenu en normalisant les moments centrés à l'aide d'un facteur k

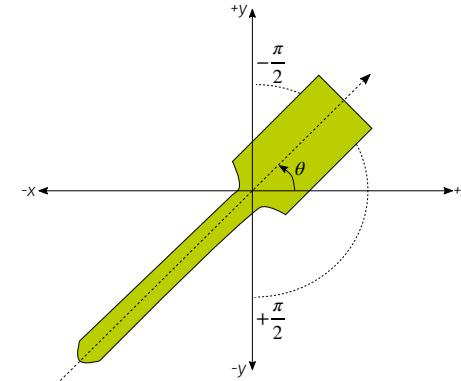
- Les **moments centrés normalisés** sont donnés par :

$$\bar{\mu}_{pq}(R) = \mu_{pq} \cdot \left(\frac{1}{\mu_{00}(R)}\right)^{(p+q+2)/2} \quad \text{pour } (p + q) \geq 2$$

317

Propriétés géométriques basées sur les moments

- De nombreuses caractéristiques sont associées aux moments
- **Orientation** : décrit la direction de l'axe principal (passe par le centre de masse et le long de la partie la plus large de la région)



318

Propriétés géométriques basées sur les moments

- L'**orientation** est aussi appelée l'**axe majeur de rotation**, car c'est suivant cet axe que la rotation pourra se faire avec le minimum d'effort



- La direction de l'axe majeur est calculée ainsi :

$$\theta_R = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\mu_{11}(R)}{\mu_{20}(R) - \mu_{02}(R)} \right) \quad \text{intervalle } [-90, 90]$$

319

Propriétés géométriques basées sur les moments

- L'affichage de l'orientation peut se faire en utilisant l'équation paramétrique d'une droite

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \lambda \cdot \mathbf{x_d} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_R) \\ \sin(\theta_R) \end{pmatrix}$$

point de départ vecteur direction

- $\mathbf{x_d}$ peut être calculé :

$$\mathbf{x_d} = \cos(\theta_R) = \begin{cases} 0 & \text{pour } a = b = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})^{\frac{1}{2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{y_d} = \sin(\theta_R) = \begin{cases} 0 & \text{pour } a = b = 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})^{\frac{1}{2}} & \text{pour } a \geq 0 \\ -[\frac{1}{2}(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } a < 0 \end{cases}$$

où $a = 2\mu_{11}(R)$ et $b = \mu_{20}(R) - \mu_{02}(R)$

320

Propriétés géométriques basées sur les moments

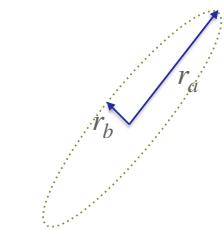
- **Excentricité** : rapport des longueurs de l'axe majeur et de l'axe mineur
- Exprime l'élongation d'une région

$$\text{Excentricité}(R) = \frac{\mu_{20} + \mu_{02} + \sqrt{(\mu_{20} + \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2}}{\mu_{20} + \mu_{02} - \sqrt{(\mu_{20} - \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2}} = \frac{a_1}{a_2}$$

- Longueurs des axes majeur et mineur :

$$r_a = 2 \cdot \left(\frac{2a_1}{|R|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_b = 2 \cdot \left(\frac{2a_2}{|R|} \right)^{\frac{1}{2}}$$



321

Propriétés géométriques basées sur les moments

- Les moments centrés normalisés sont invariants par translation et mise à l'échelle, mais ne le sont pas par rotation
- Les **moments de Hu** (7 combinaisons) sont **invariants** par translation, mise à l'échelle et rotation

$$H_1 = \bar{\mu}_{20} + \bar{\mu}_{02}$$

$$H_2 = (\bar{\mu}_{20} - \bar{\mu}_{02})^2 + 4\bar{\mu}_{11}^2$$

$$H_3 = (\bar{\mu}_{30} - 3\bar{\mu}_{12})^2 + (3\bar{\mu}_{21} - \bar{\mu}_{03})^2$$

$$H_4 = (\bar{\mu}_{30} + \bar{\mu}_{12})^2 + (\bar{\mu}_{21} + \bar{\mu}_{03})^2$$

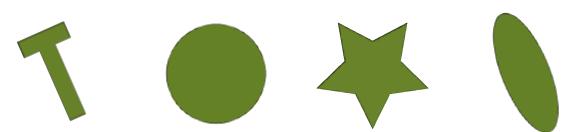
$$H_5 = (\bar{\mu}_{30} - 3\bar{\mu}_{12}) \cdot (\bar{\mu}_{30} + \bar{\mu}_{12}) \cdot [(\bar{\mu}_{30} + \bar{\mu}_{12})^2 - 3(\bar{\mu}_{21} + \bar{\mu}_{03})^2] \\ + (3\bar{\mu}_{21} - \bar{\mu}_{03}) \cdot (\bar{\mu}_{21} + \bar{\mu}_{03}) \cdot [3(\bar{\mu}_{30} + \bar{\mu}_{12})^2 - (\bar{\mu}_{21} + \bar{\mu}_{03})^2]$$

$$H_6 = (\bar{\mu}_{20} - \bar{\mu}_{02}) \cdot [(\bar{\mu}_{30} + \bar{\mu}_{12})^2 - (\bar{\mu}_{21} + \bar{\mu}_{03})^2] + 4\bar{\mu}_{11} \cdot (\bar{\mu}_{30} + \bar{\mu}_{12}) \cdot (\bar{\mu}_{21} + \bar{\mu}_{03})$$

$$H_7 = (3\bar{\mu}_{21} - \bar{\mu}_{03}) \cdot (\bar{\mu}_{30} + \bar{\mu}_{12}) \cdot [(\bar{\mu}_{30} + \bar{\mu}_{12})^2 - 3(\bar{\mu}_{21} + \bar{\mu}_{03})^2] \\ + (3\bar{\mu}_{12} - \bar{\mu}_{30}) \cdot (\bar{\mu}_{21} + \bar{\mu}_{03}) \cdot [3(\bar{\mu}_{30} + \bar{\mu}_{12})^2 - (\bar{\mu}_{21} + \bar{\mu}_{03})^2]$$

323

Exemples



Surface	54903	34822	41743	33433
Orientation	90°	14.84°	-60.92°	-68°
Circularité	0.3494	1.0089	0.43	0.7218
Longueur axe mineur	201	210	250	126
Longueur axe majeur	571	210	250	336
Excentricité	0.9356	0.0265	0.0354	0.9269

322

Projections

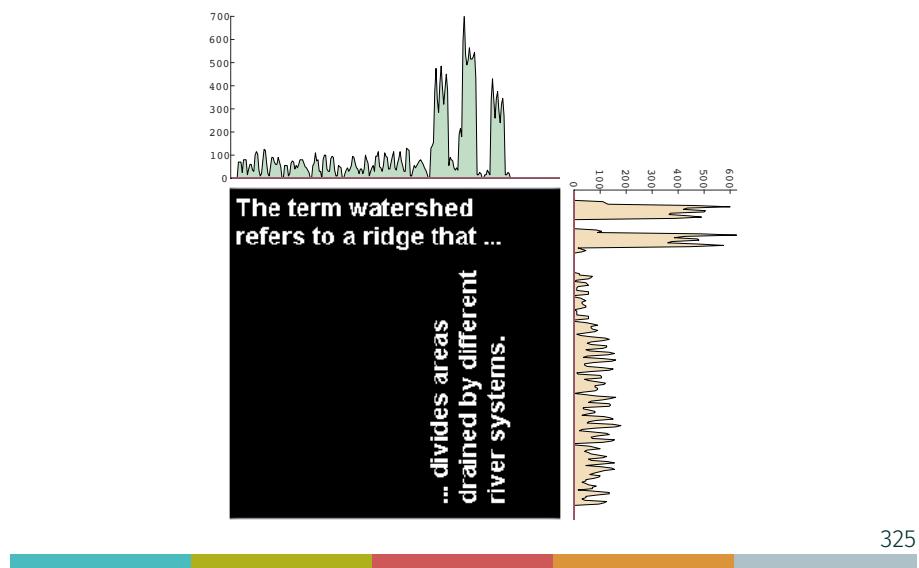
- Les projections sont des représentations 1D du contenu des images
- Les projections verticale et horizontale de $I(u, v)$ sont définies comme :

$$P_{\text{horizontal}}(v_0) = \sum_{u=0}^{M-1} I(u, v_0) \quad \text{pour } 0 < v_0 < N$$

$$P_{\text{vertical}}(u_0) = \sum_{v=0}^{N-1} I(u_0, v) \quad \text{pour } 0 < u_0 < M$$

324

Exemple de projections



Propriétés topologiques

- Définissent la structure d'une région
- Invariantes par rapport aux transformations fortes sur l'image
- Le **nombre de trous** est une caractéristique simple et robuste
- Le **nombre d'Euler** : nombre de composantes connexes – nombre de trous

$$N_E(R) = N_{CC}(R) - N_H(R)$$

- Les caractéristiques topologiques sont souvent combinées avec des caractéristiques géométriques

326

Les régions et Python

- Le module **measure** de la bibliothèque [scikit-image](#) supporte la plupart des méthodes utilisées ici
- Les modules **filters**, **segmentation** et **morphology** proposent aussi quelques fonctions intéressantes

327