МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Расчетно-графическая работа по линейной алгебре и аналитической геометрии:

“Аналитическая геометрия”

Команда №3

Работу выполнили:

Андреев Владислав Р3119

Кокорев Михаил Р3119

Петрова Анастасия Р3119

Чежин Павел Андреевич Р3119

Преподаватель:

Правдин Константин

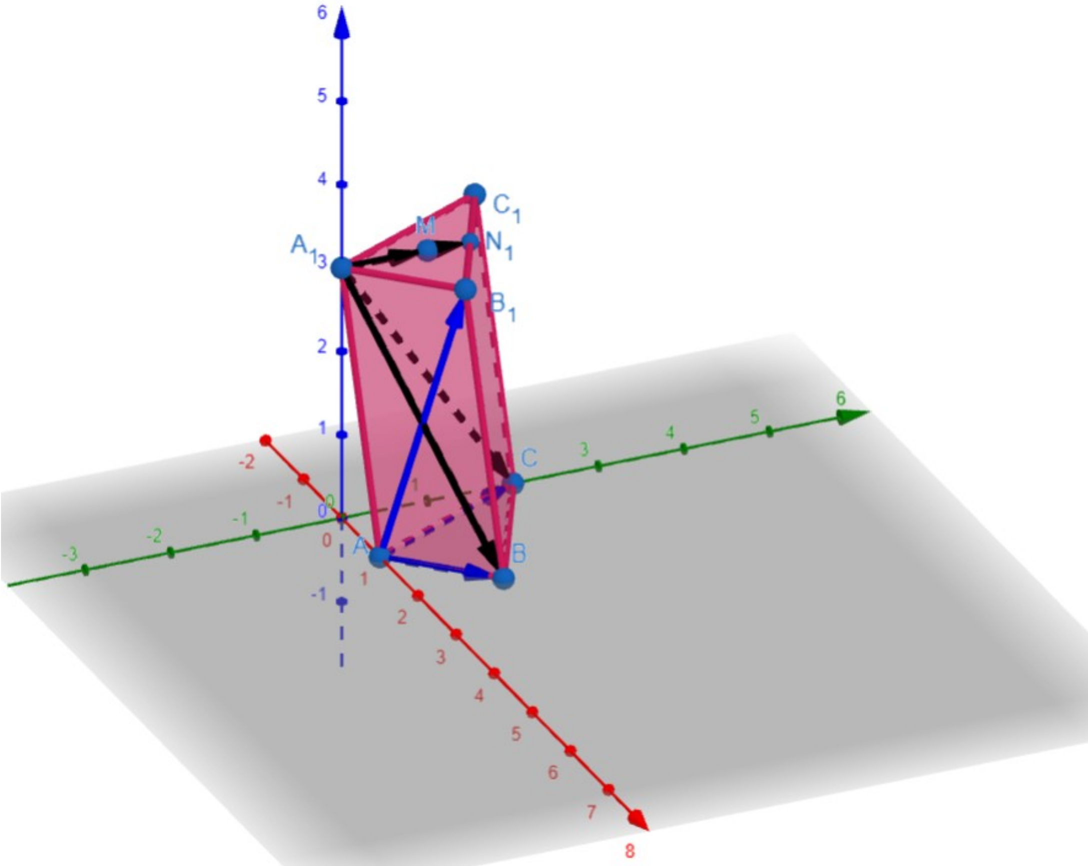
Ментор:

Анастасия Кузьмина

Санкт-Петербург, 2022

Задание №1.

1,2) Обозначим середину стороны B_1C_1 – N_1.



3) Так как был совершен перенос системы координат на вектор $\vec{A_1A}$, координаты точки в новой системе координат: $x'\vec{A_1B}+y'\vec{A_1C}+z'\vec{A_1M}-\vec{A_1A}$

Чтобы найти координаты в новом базисе, выразим вектора через новый базис.

$$\vec{A_1B}=\vec{A_1A}+\vec{AB}$$

$$\vec{A_1A}=\vec{AB}-\vec{AB_1}$$

$$\vec{A_1B}=2\vec{AB}-\vec{AB_1}$$

$$\vec{A_1C}=\vec{A_1A}+\vec{AC}=\vec{AB}-\vec{AB_1}+\vec{AC}$$

$$\vec{A_1N}=\frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{2}$$

$$\vec{A_1M}=\frac{2}{3}\vec{A_1N}=\frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{3}$$

$$x'\vec{A_1B}+y'\vec{A_1C}+z'\vec{A_1M}-\vec{A_1A}=x'(2\vec{AB}-\vec{AB_1})+y'(\vec{AB}-\vec{AB_1}+\vec{AC})+z'\frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{3}-(\vec{AB}-\vec{AB_1})=$$

$$=\vec{AB}\left(2x'+y'+\frac{z'}{3}-1\right)+\vec{AC}\left(y'+\frac{z'}{3}\right)+\vec{AB_1}(-x'-y'+1)$$

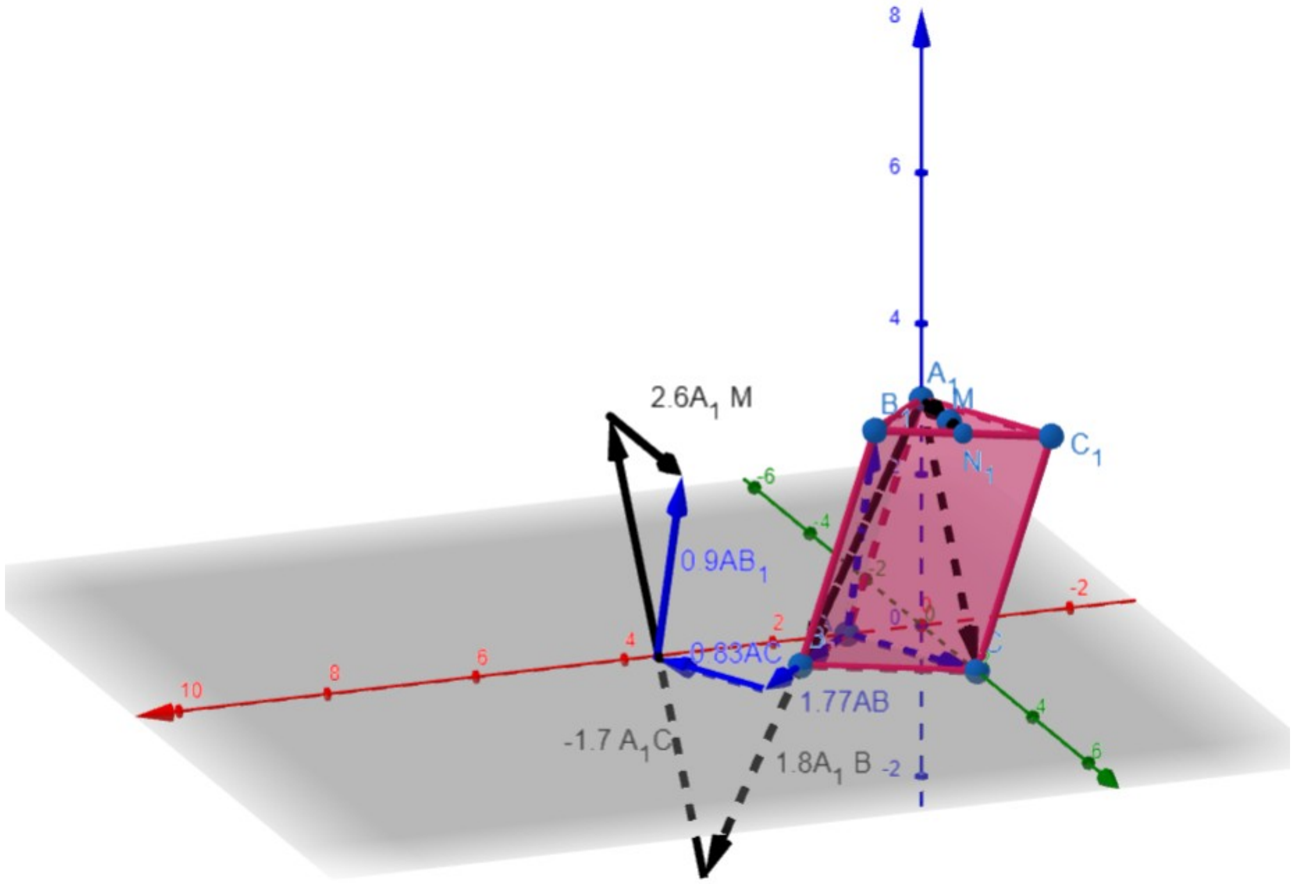
Значит в новом базисе точка имеет координаты:

$$\begin{pmatrix} 2x'+y'+\frac{z'}{3}-1 \\ y'+\frac{z'}{3} \\ -x'-y'+1 \end{pmatrix}$$

4) Проверим решение построением:

Пусть точка имела координаты $(1.8;-1.7;2.6)^T$

Тогда координаты в новом базисе: $(\frac{5.3}{3};\frac{-2.5}{3};0.9)^T \approx (1.77;-0.83;0.9)^T$



Точка в старых и новых координатах совпадает.

Задание №2.

Множество 1:

1) $4x^2-4xy+y^2+12x-6y+9=0$

Решим уравнение как квадратное относительно y:

$$y^2+y(-4x-6)+(2x-3)^2=0$$

$$D=(-4x-6)^2-4(2x-3)^2=(2(2x-3))^2-4(2x-3)^2=4(2x-3)^2-4(2x-3)^2=0$$

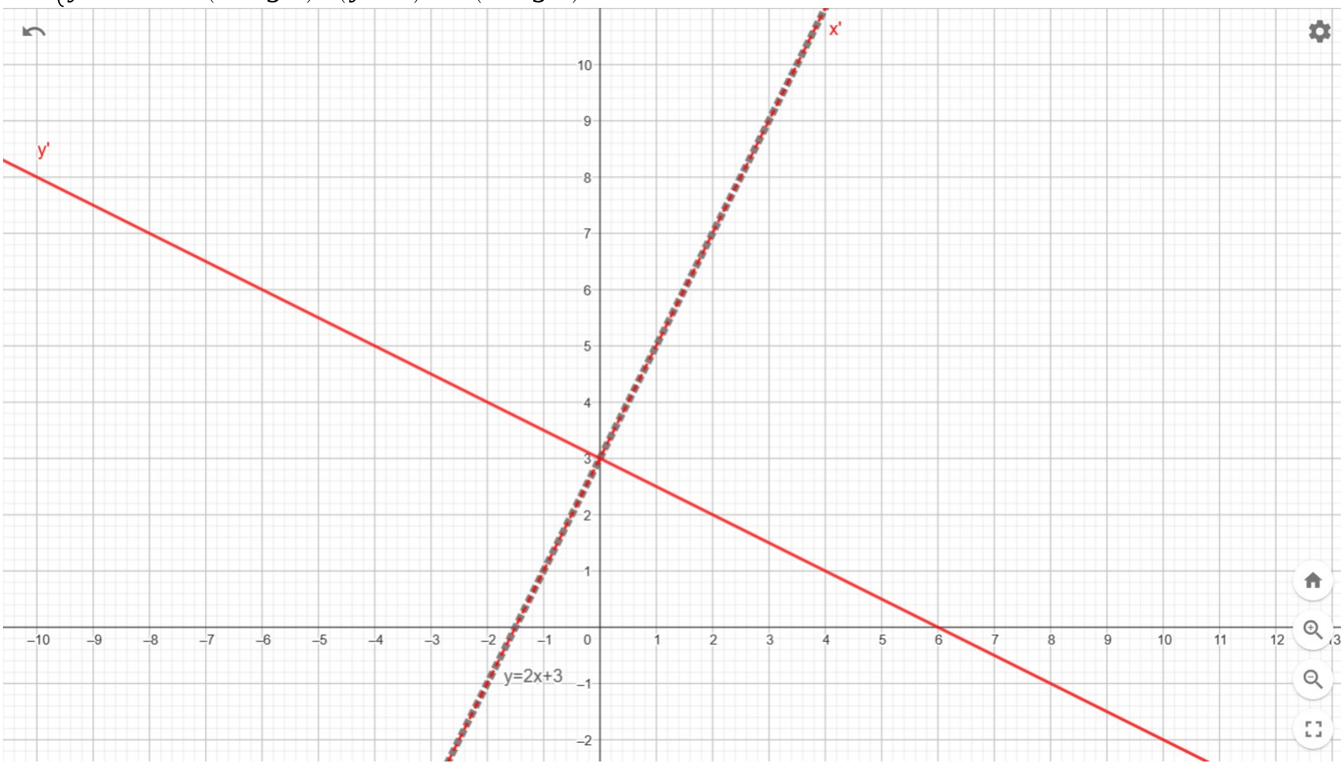
$$y=\frac{4x+6}{2}=2x+3$$

Таким образом, множество задает прямую на плоскости.

2) Чтобы новые оси координат служили осями симметрии прямой одна из осей должна совпадать с прямой. Для этого сделаем параллельный перенос осей, так чтобы новое начало координат было в точке (0, 3) и повернем оси на угол $\phi=arctg\,2$

Тогда новые координаты задаются уравнениями:

$$\begin{cases} x'=x\cos(arctg\,2)+(y-3)\sin(arctg\,2) \\ y'=-x\sin(arctg\,2)+(y-3)\cos(arctg\,2) \end{cases}$$



Множество №2:

1) $7x^2-24xy-38x+24y+175=0$

Сделаем перенос системы координат так, чтобы коэффициенты a_{13} и a_{23} в общем виде уравнения стали равны 0, для этого должно выполняться условие:

$$\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0=-a_{13} \\ a_{12}x_0+a_{22}y_0=-a_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_0-12y_0=19 \\ -12x_0=-12 \end{cases}$$

$$x_0=1,\ y_0=-1$$

Тогда новые коэффициенты уравнения:

$$a'_{11}=a_{11}=7$$
$$a'_{12}=a_{12}=-12$$
$$a'_{22}=a_{22}=0$$
$$a'_{13}=0$$
$$a'_{23}=0$$
$$a'_{33}=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}=7+24-38-24+175=144$$

Новое уравнение:

$$7x'^2-24x'y'+144=0$$

Новые координаты:

$$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+1 \end{cases}$$

Сделаем поворот системы координат так, чтобы коэффициент a'_{12} стал равен 0.

$$a''_{12}=-\frac{a'_{11}-a'_{22}}{2}\sin 2\varphi+a_{12}\cos 2\varphi$$
$$-\frac{7}{2}\sin 2\varphi-12\cos 2\varphi=0$$
$$7\,tg\,2\varphi+24=0$$
$$2\varphi=arctg\left(\frac{-24}{7}\right)$$

Тогда новые коэффициенты уравнения:

$$a''_{11}=a'_{12}\sin 2\varphi+\frac{a'_{11}-a'_{22}}{2}\cos 2\varphi+\frac{a'_{11}+a'_{22}}{2}=-12\sin\left(arctg\frac{-24}{7}\right)+\frac{7}{2}\cos\left(arctg\frac{-24}{7}\right)+\frac{7}{2}=16$$
$$a''_{12}=0$$
$$a''_{22}=-a'_{12}\sin 2\varphi-\frac{a'_{11}-a'_{22}}{2}\cos 2\varphi-\frac{a'_{11}+a'_{22}}{2}=12\sin\left(arctg\frac{-24}{7}\right)-\frac{7}{2}\cos\left(arctg\frac{-24}{7}\right)-\frac{7}{2}=-16$$
$$a''_{13}=0$$
$$a''_{23}=0$$
$$a''_{33}=a'_{33}=144$$

Новое уравнение:

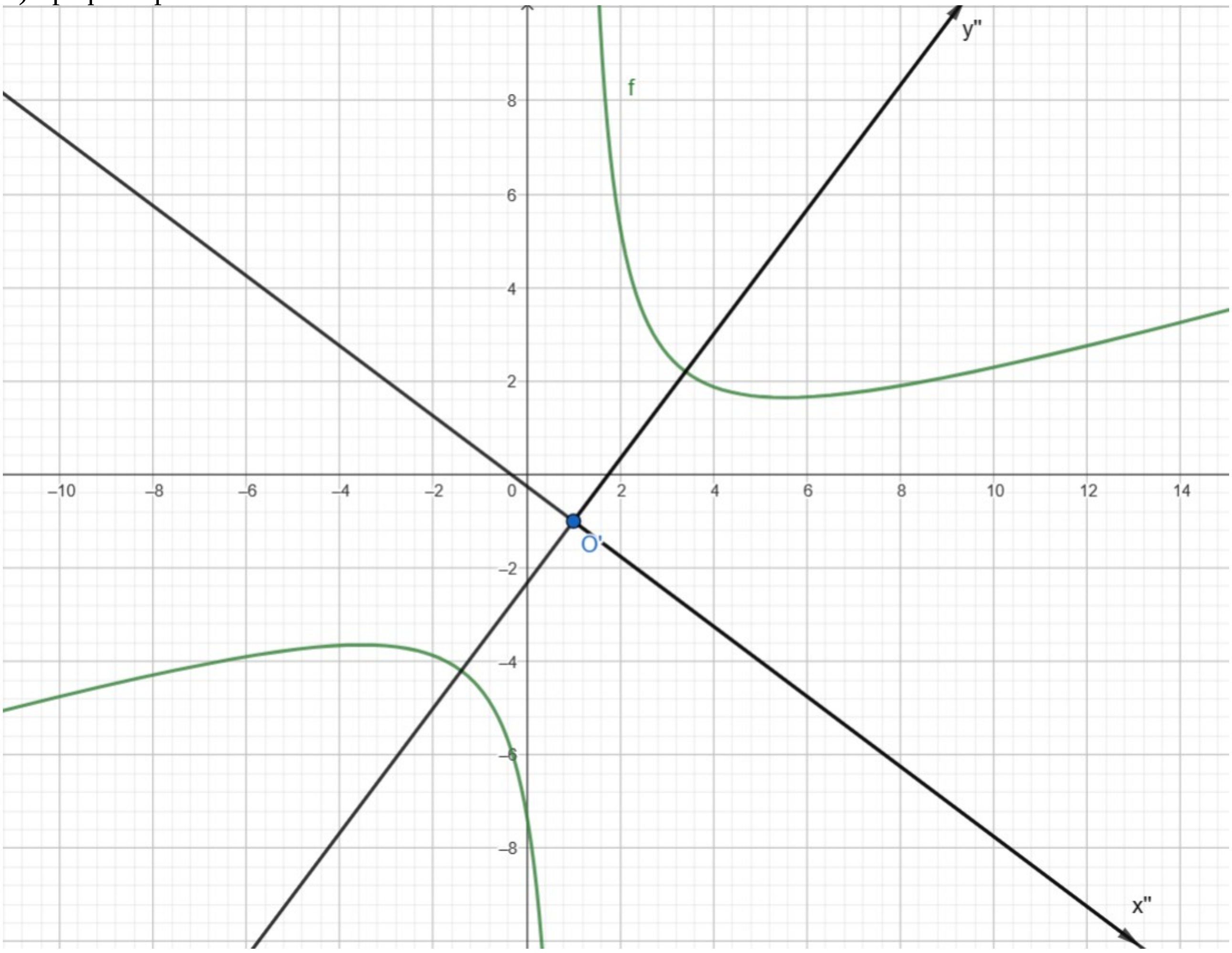
$$16x''^2-16y''^2+144=0$$
$$\frac{y''^2}{9}-\frac{x''^2}{9}=1$$

Полученное уравнения является каноническим уравнением гиперболы с фокусами лежащими на оси y'' .

Новые координаты:

$$\begin{cases} x''=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi=0.8(x-1)-0.6(y+1) \\ y''=-x'\sin\varphi+y'\cos\varphi=0.6(x-1)+0.8(y+1) \end{cases}$$

2) График кривой:



3) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{9}=1$

a = 3, b = 3

$c^2=a^2+b^2=18$

$c=3\sqrt{2}$

$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

уравнение директрисы d_1:

$y=\frac{b}{\varepsilon}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

координаты фокус имеет координаты: $F_1(0,c)$

расстояние между фокусом и директрисой:

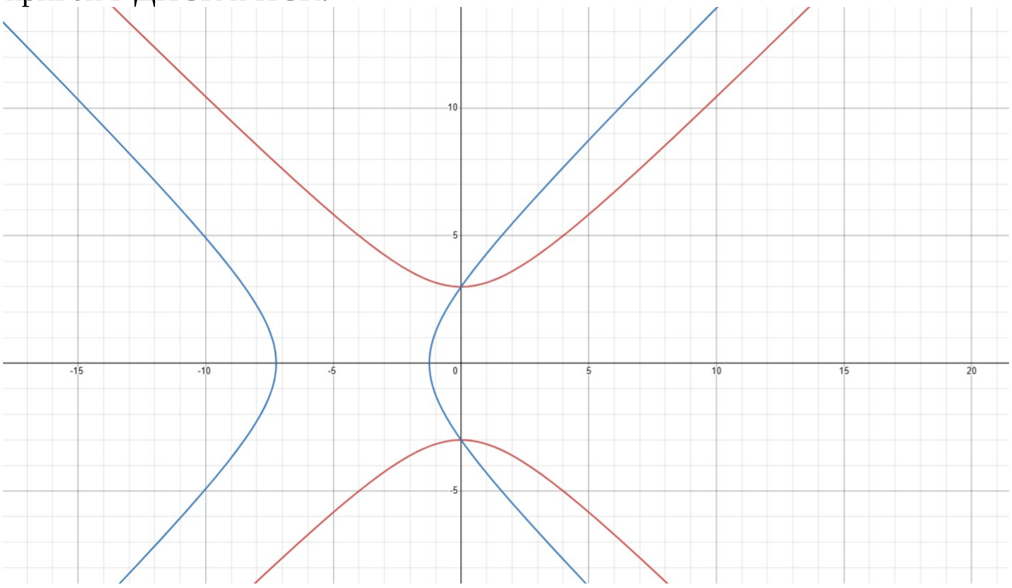
$p=3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

уравнения веток гиперболы в полярной системе координат:

$\rho=\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \rho=\frac{-\varepsilon p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

$$\rho=\frac{3}{1-\sqrt{2}\cos\varphi}, \rho=\frac{-3}{1+\sqrt{2}\cos\varphi}$$

4) График кривой в ДПСК и ПСК:



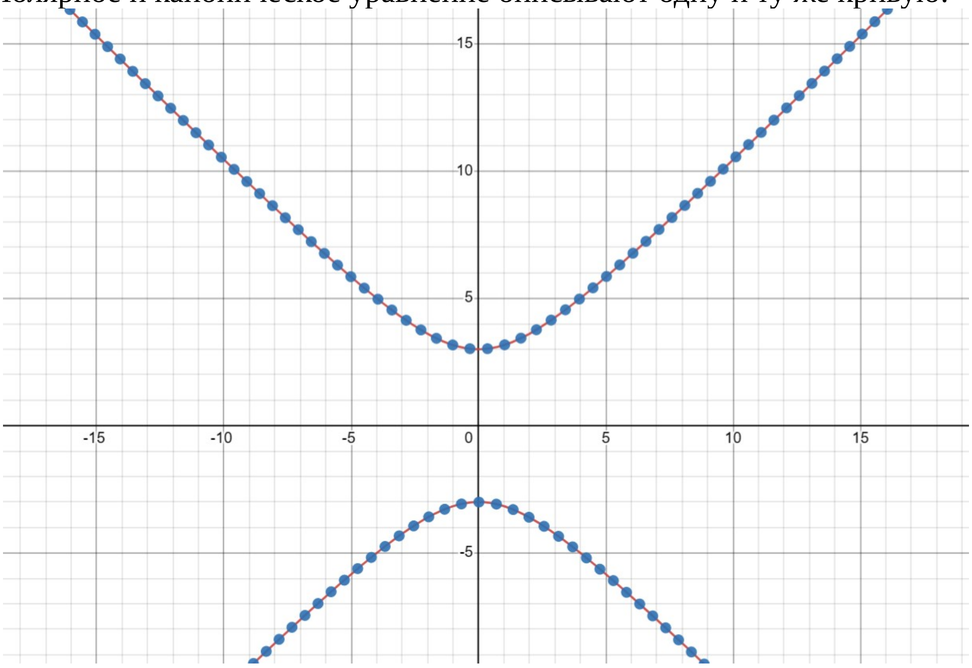
Графики не совпадают, так как в полярном уравнение гиперболы центр координат выбран в фокусе и фокусы расположены на оси совпадающей с осью Ox в ДПСК.

5) $\begin{cases} x=\rho\cos\phi \\ y=\rho\sin\phi \end{cases}$

$$\frac{\rho^2\sin^2\phi}{9}-\frac{\rho^2\cos^2\phi}{9}=1$$

$$\rho=\frac{3}{\sqrt{-\cos 2\phi}}$$

Полярное и каноническое уравнение описывают одну и ту же кривую:

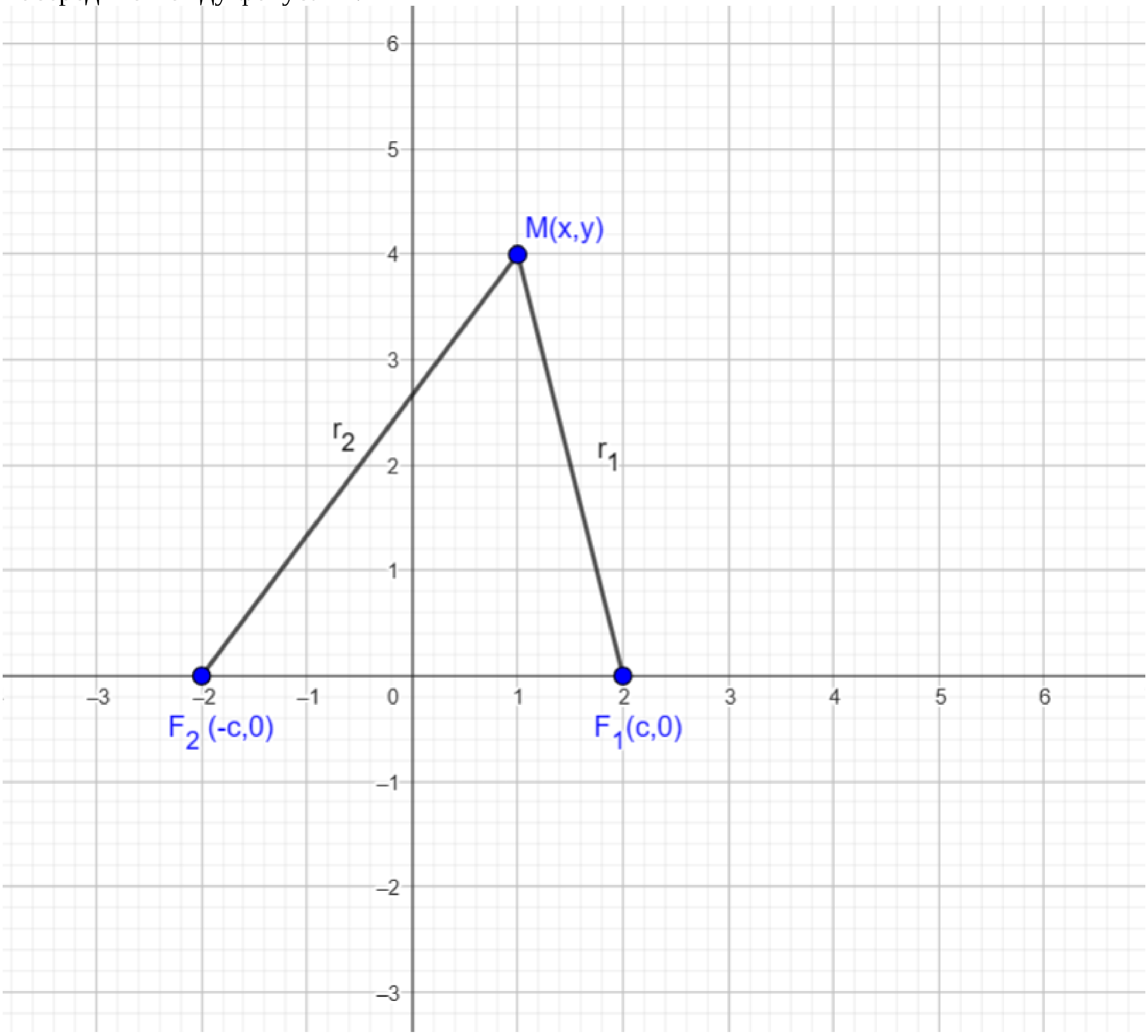


Задание №3.

Даны две точки, расстояние между которыми 2с. Найдите геометрическое место точек и его уравнение, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных равна $2a^2$, $a>c$.

1) Обозначим две данные точки F_1, F_2, расстояния до этих фокусов — r_1, r_2

Введем систему координат: фокусы расположим на оси Ox, начало координат поместим посередине между фокусами.



2)По условию: $r_1^2+r_2^2=2a^2$

3) $r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

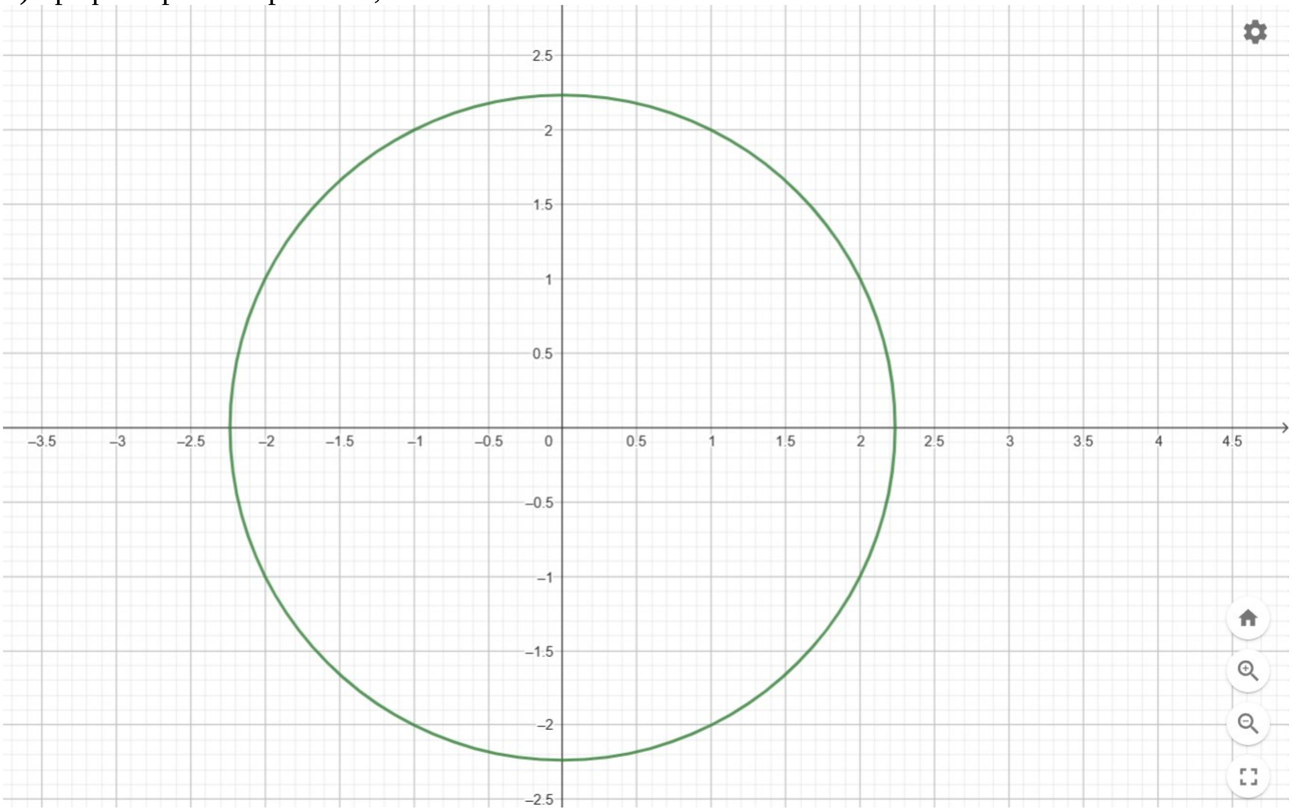
$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2=2a^2$

$x^2-2cx+c^2+y^2+x^2+2cx+c^2+y^2=2a^2$

$2x^2+2c^2+2y^2=2a^2$

$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$

Уравнение является каноническим уравнением эллипса. Так как коэффициенты при x и при y равны, то графиком уравнения будет являться частный случай эллипса — окружность.
4) График кривой при a = 3, c = 2:



Оценочный лист:

Андреев Владислав P3119 - 100%

Чежин Павел Андреевич P3119 - 100%

Кокорев Михаил P3119 - 100%

Петрова Анастасия P3119 - 100%