

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Расчетно-графическая работа по математическому анализу

“Производная и дифференциал”

Команда №3

Работу выполнили:

Андреев Владислав Р3119

Кокорев Михаил Р3119

Петрова Анастасия Р3119

Чежин Павел Андреевич Р3119

Преподаватель:

Правдин Константин

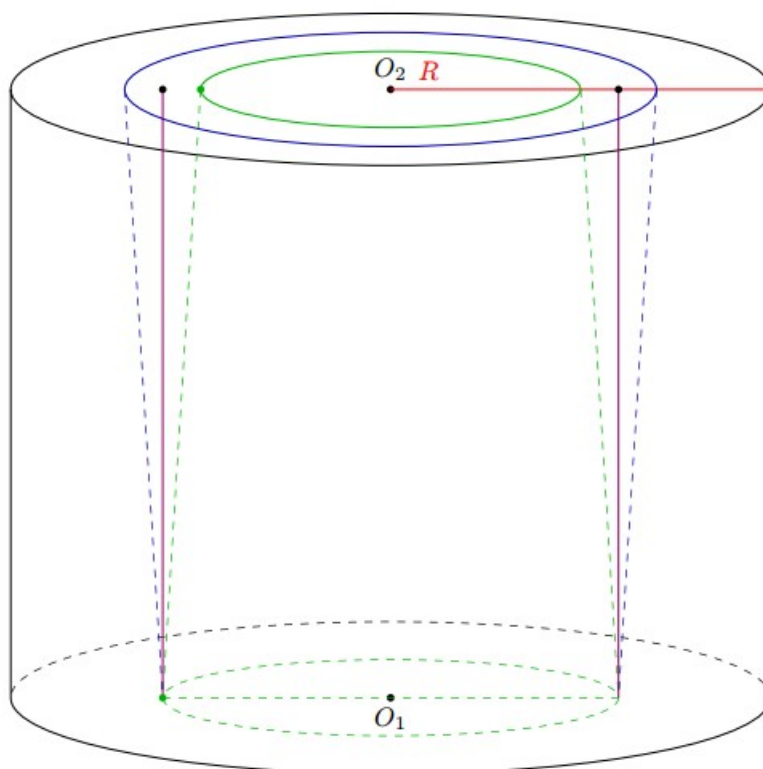
Ментор:

Анастасия Кузьмина

Санкт-Петербург, 2022

Задание №1.

1) Общая композиция выглядит следующим образом:



Объем внешнего цилиндра:

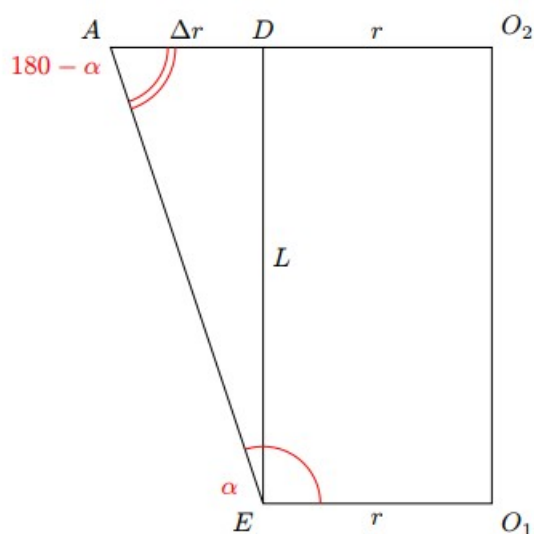
$$V_{\text{внеш}} = \pi R^2 L = 375 \pi$$

Где R — радиус внешнего цилиндра.

r — радиус постоянного основания внутреннего усеченного конуса. Второе основание может иметь как больший (обозначен синим), так и меньший (обозначен зеленым) или такой же радиус в зависимости от угла α

Найдем объем внутреннего цилиндра:

Рассмотрим случай $\alpha > 90^\circ$



$$\Delta r = L \operatorname{ctg} (180 - \alpha) = -L \operatorname{ctg} \alpha$$

Тогда верхний радиус равен $r + \Delta r = r - L \operatorname{ctg} \alpha$

Если $\alpha = 90^\circ$, То верхний радиус равен нижнему, что соответствует формуле $r - \operatorname{ctg} \alpha$, так как в этом случае $\operatorname{ctg} \alpha = 0$

Если $\alpha < 90^\circ$, То верхний радиус равен $r - \Delta r = [\Delta r = L \operatorname{ctg} \alpha] = r - L \operatorname{ctg} \alpha$

Так во всех случаях формула радиуса верхнего основания одинакова, можно рассматривать все три случая как один, в котором радиус верхнего основания равен $r - L \operatorname{ctg} \alpha$, без ограничения общности.

Объем внутреннего цилиндра можно вычислить как объем усеченного конуса:

$$V_{\text{внутр}} = \frac{1}{3} \pi L (r^2 + r(r - L \operatorname{ctg} \alpha) + (r - L \operatorname{ctg} \alpha)^2) = 5\pi (1 + 1 - 15 \operatorname{ctg} \alpha + 1 - 30 \operatorname{ctg} \alpha + 225 \operatorname{ctg}^2 \alpha) = 5\pi (3 - 45 \operatorname{ctg} \alpha + 225 \operatorname{ctg}^2 \alpha)$$

Тогда функция зависимости объема фигуры от угла:

$$f(\alpha) = V_{\text{внеш}} - V_{\text{внутр}} = 375\pi - 5\pi (3 - 45 \operatorname{ctg} \alpha + 225 \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \pi (360 + 225 \operatorname{ctg} \alpha - 1125 \operatorname{ctg}^2 \alpha)$$

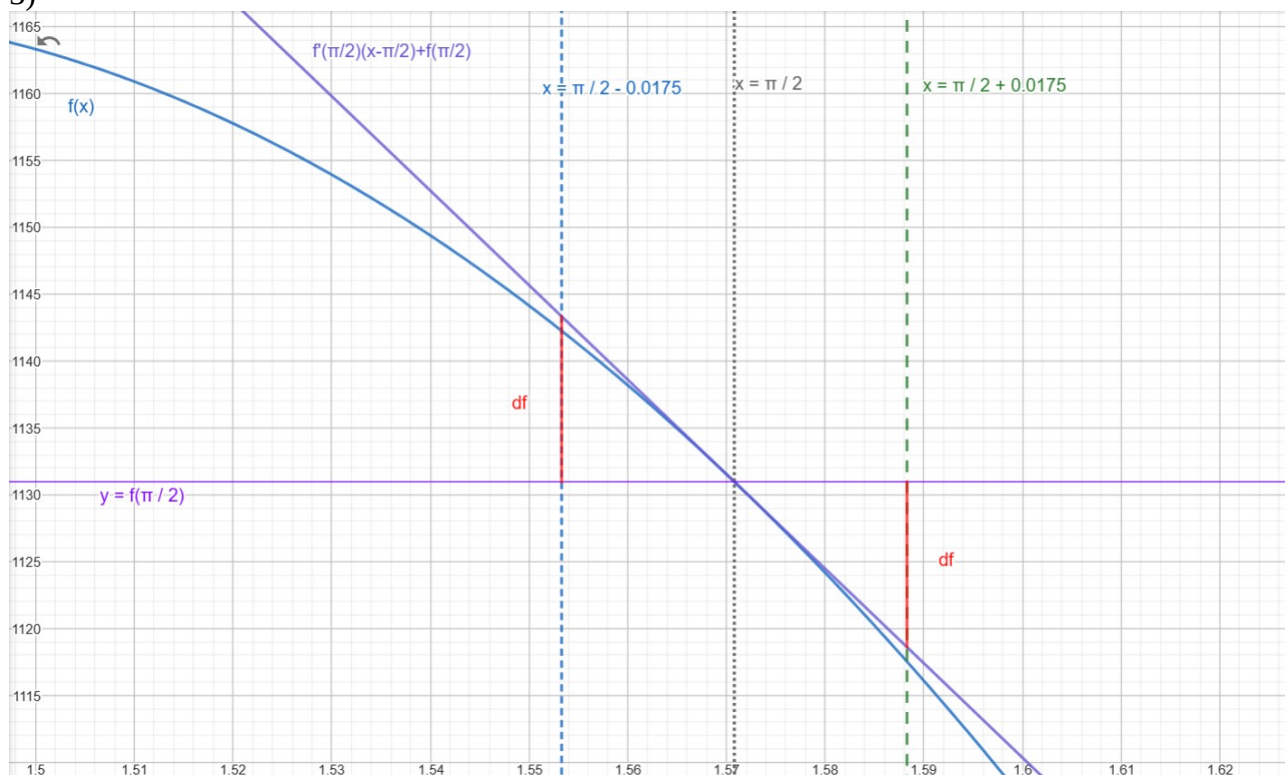
2) Найдем абсолютную погрешность, приблизив точное изменение ее линейной частью, для этого вычислим модуль дифференциала при $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $\Delta \alpha = 1^\circ \approx 0.0175$

$$|df| = |f'(\alpha) * \Delta \alpha| = \left| \left(-\frac{225\pi}{\sin^2 \alpha} - 2250\pi \operatorname{ctg} \alpha * \left(-\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \right) * \Delta \alpha \right| = \left| \left(-\frac{225\pi}{1} - 2250\pi * 0 * \left(-\frac{1}{1} \right) \right) * 0.0175 \right| = 3.9375\pi \approx 12.37$$

Относительная погрешность вычисляется как отношение абсолютной погрешности и точного значения.

$$\delta = \frac{|df|}{f(90)} = \frac{12.37}{360\pi} \approx 0.01 = 1\%$$

3)



Линейная часть изменения функции почти совпадает с действительным изменением функции, аналитическое решение совпадает с графиком.

4) Ответ: 12.37; 1%

Задание №2.

Расходы на топливо для топки парохода пропорциональны кубу его скорости.

Известно, что при скорости в 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб. в час, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб. в час.

При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

1) Обозначим коэффициент пропорциональности между расходом на топливо и скоростью k . Тогда функция зависимости общей суммы расходов в час от скорости:

$$f(v) = kv^3 + 480$$

При $v = 10$ общая сумма расходов в час равна $30 + 480 = 510$.

$$510 = 1000k + 480$$

$$k = 0,03$$

$$f(v) = 0.03v^3 + 480$$

Время за которое пароход проходит 1 км:

$$t = \frac{1}{v}$$

Функция зависимости общих расходов на 1 км. пути от скорости:

$$g(v) = f(v) \cdot t = 0.03v^2 + \frac{480}{v}$$

2) Чтобы найти значение v , при котором минимальную общую сумму расходов найдем экстремумы функции, для этого воспользуемся необходимым и достаточным условием экстремума: если точка стационарная или критическая и производная меняет знак при переходе через x_0 , то в x_0 экстремум.

$$g'(v) = 0.06v - \frac{480}{v^2}$$

Найдем критические точки:

Производная не существует в одной точке — 0, следовательно, 0 единственная критическая точка.

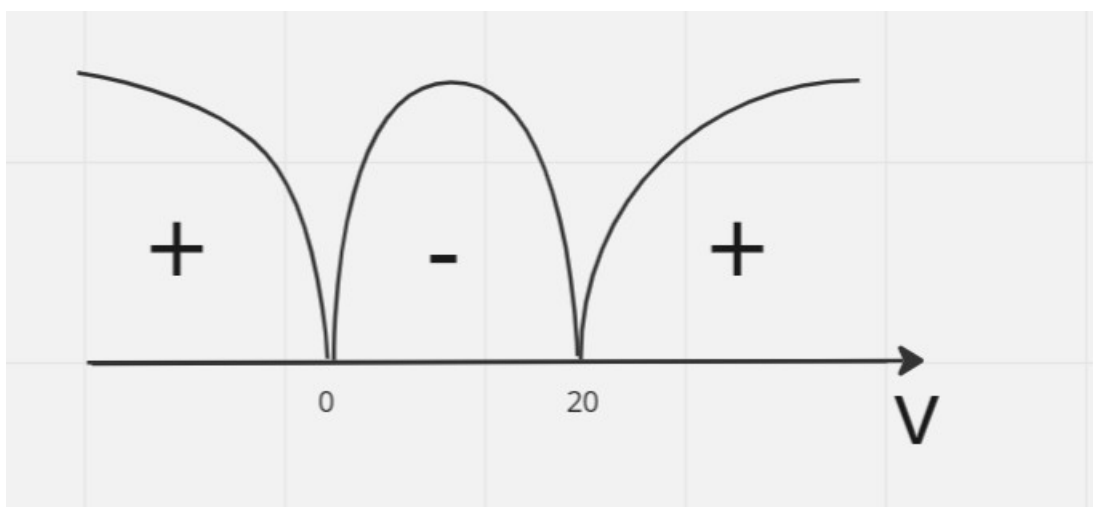
Найдем стационарные точки:

$$g'(v) = 0$$

$$0.06v - \frac{480}{v^2} = 0$$

$$0.06v^3 = 480$$

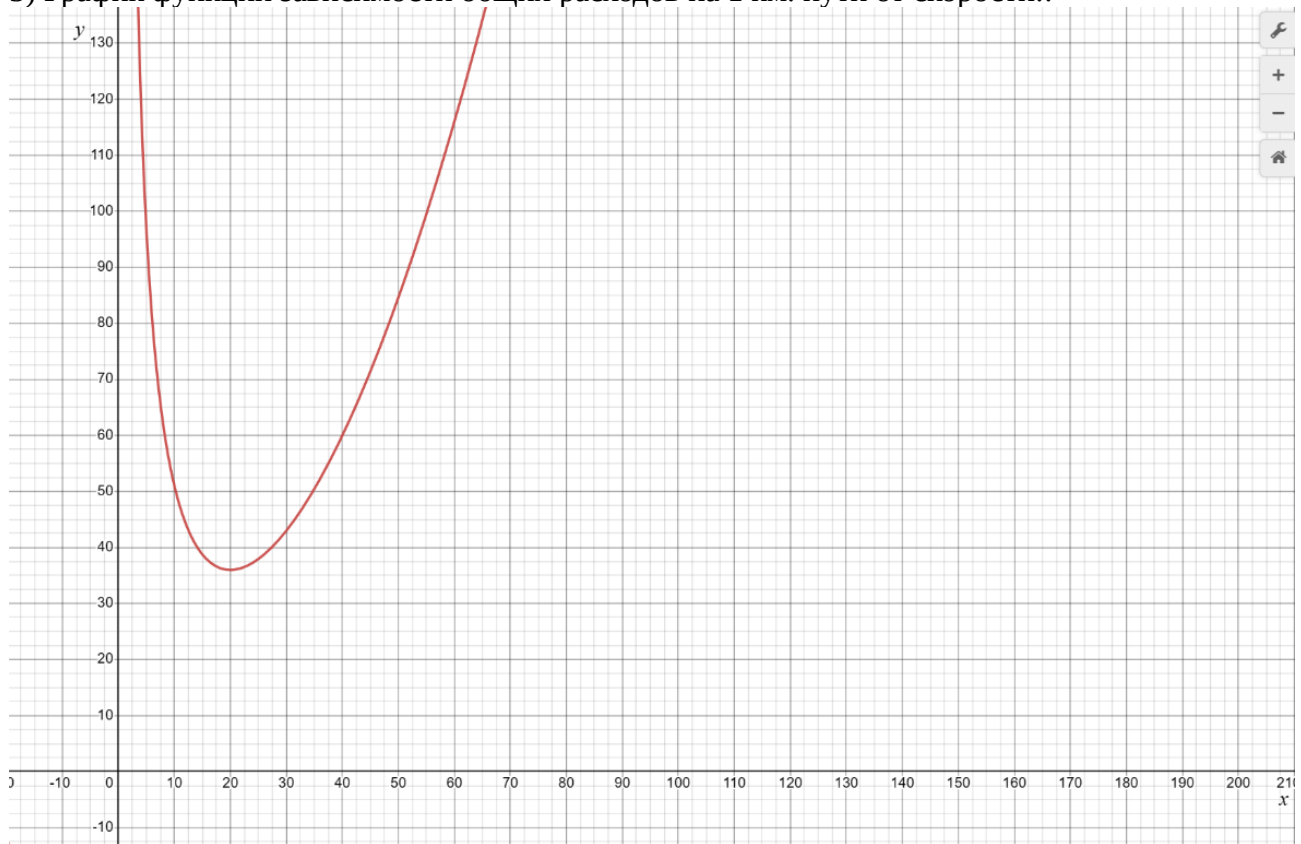
$$v = 20$$



В точке 0 производная меняет знак с “+” на “-”, значит, точка 0 — точка максимума.
В точке 20 производная меняет знак с “-” на “+”, значит, точка 20 — точка минимума.
Значит, искомая точка минимума функции — точка 20.

Общая сумма расходов в час: $f(20) = 0.03 * 20^3 + 480 = 720$

3) График функции зависимости общих расходов на 1 км. пути от скорости::



На графике видно, что при положительных значениях функция достигает минимального значения в точке 20.

4) Ответ: 20; 720.

Задание №3.1

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$$

1) Область определения:

$$x^2+2x-3 \neq 0$$

$$x \neq 1, x \neq -3$$

$$D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$2) f(-x) = \frac{-x+1}{x^2-2x-3}$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

Так как нет T , для которого выполняется $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$, функция не является периодической.

3) Найдем нулевые значения функции:

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3} = 0$$

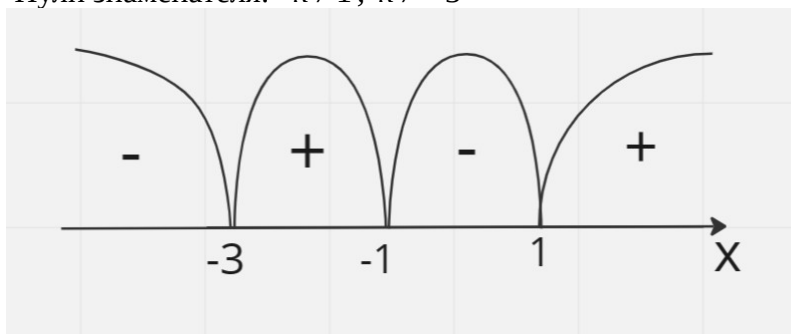
$$x+1=0$$

$$x=-1$$

Найдем промежутки знакопостоянства методом интервалов:

Нули числителя: $x=-1$

Нули знаменателя: $x \neq 1, x \neq -3$



$$f(x) > 0, \text{ при } x \in (-3; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$f(x) < 0, \text{ при } x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1)$$

$$4) f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+2x-3) - (2x+2)(x+1)}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{-x^2-2x-5}{(x^2+2x-3)^2}$$

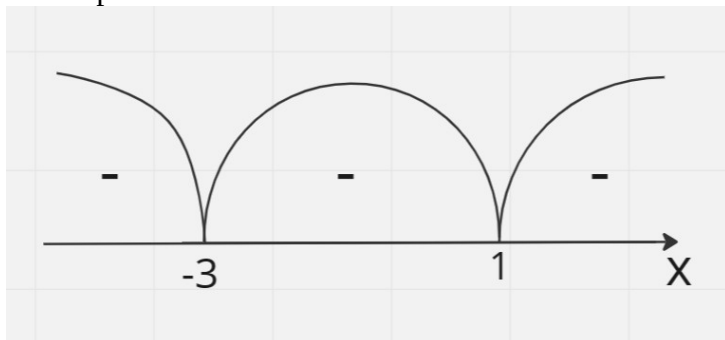
Найдем критические и стационарные точки:

Производная не существует, если $x^2+2x-3=0$

Критические точки: $x=1, x=-3$

Стационарные точки: $-x^2-2x-5=0$

Нет корней.



Так как производная отрицательна на области определения функции, функция убывает на своей области определения.

Функция не имеет экстремумов.

5)

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)(x^2+2x-3)^2 - 2(x^2+2x-3)(2x+2)(-x^2-2x-5)}{(x^2+2x-3)^4} = \frac{(x^2+2x-3)(2x^3+6x^2+30x+26)}{(x^2+2x-3)^4} =$$

$$= \frac{2x^3+6x^2+30x+26}{(x^2+2x-3)^3}$$

Вторая производная не существует, если $x^2+2x-3=0$
 $x=1, x=-3$

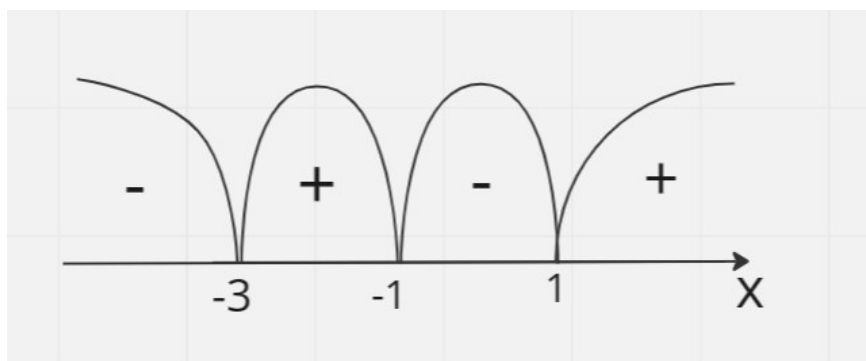
Вторая производная равна 0, если:

$$2x^3+6x^2+30x+26=0$$

$$(x+1)(x^2+2x+13)=0$$

$$\begin{cases} x+1=0 \\ x^2+2x+13=0 \\ x=-1 \\ \text{Нет корней} \end{cases}$$

$$x=-1$$



Функция выпукла на $(-3; -1) \cup (1; +\infty)$

Функция вогнута на $(-\infty; -3) \cup (-1; 1)$

Точки перегиба: $x=-3, x=-1, x=1$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+1}{x^2+2x-3} = \infty$$

Следовательно, $x=-3$, является вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+2x-3} = \infty$$

Следовательно, $x=1$, является вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x+2-\frac{3}{x}} = 0$$

Следовательно, $y=0$, является горизонтальной асимптотой.

Наклонная асимптота имеет вид $y=kx+b, k \neq 0, k \neq \infty$

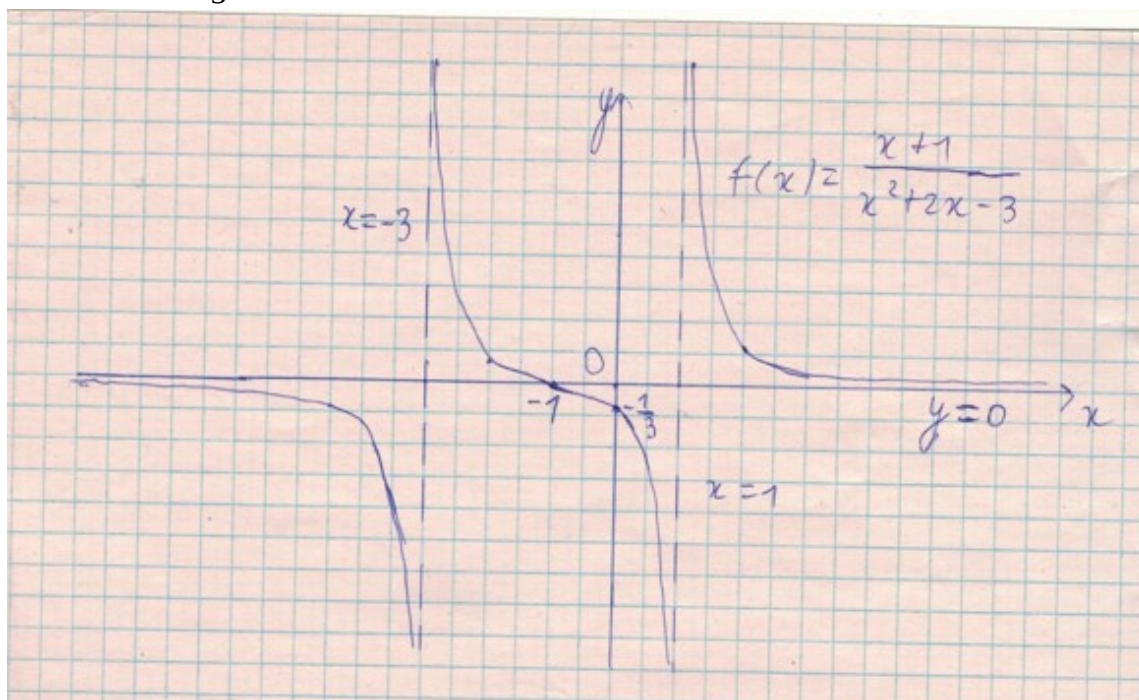
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x+2-\frac{3}{x}} = 0$$

Так как $k=0$, функция не имеет наклонной асимптотой.

$$f(x)=0, \text{ npu } x=-1$$

$$7) \text{ npu } x=0 \quad f(x)=\frac{-1}{3}$$

8)



Задание №3.2

$$g(x) = \sqrt[3]{1 - \cos x}$$

1) Область определения:

$g(x)$ – всюду определенная функция

$$D(g) = (-\infty; +\infty)$$

$$2) \quad g(-x) = \sqrt[3]{1 - \cos(-x)} = \sqrt[3]{1 - \cos x} = g(x)$$

Значит, $g(x)$ является четной функцией. Для графика это означает, что функция симметрична относительно оси Ox .

$$g(x + 2\pi) = \sqrt[3]{1 - \cos(x + 2\pi)} = \sqrt[3]{1 - \cos x} = g(x)$$

$$g(x - 2\pi) = \sqrt[3]{1 - \cos(x - 2\pi)} = \sqrt[3]{1 - \cos x} = g(x)$$

Значит, $T = 2\pi$ является периодом функции. Для графика это означает, что график состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов.

3) Найдем нули функции

$$\sqrt[3]{1 - \cos x} = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{N}$$

Так как $-1 \leq \cos x \leq 1$, $1 - \cos x \geq 0$, следовательно, $g(x) = 0$ при $x = 2\pi n$ и $g(x) > 0$ при $x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{N}$

$$4) \quad g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}} * (\sin x) = \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}$$

Найдем стационарные точки: $\frac{\sin x}{3\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}} = 0$

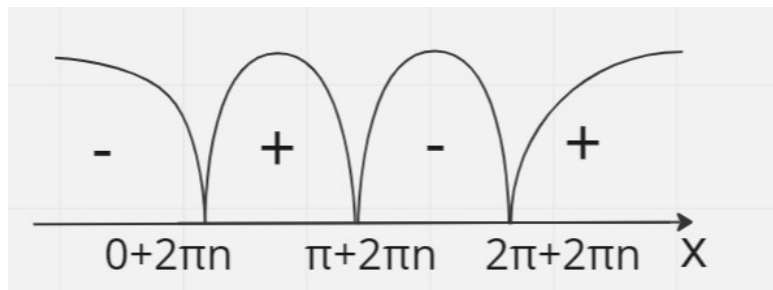
$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{N}$$

Найдем критические точки:

Производной не существует, если $1 - \cos x = 0$

$$x = 2\pi n \quad n \in \mathbb{N}$$



$g(x)$ возрастает на $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$

$g(x)$ убывает на $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$

Точки минимума функции: $2\pi n$

Точки максимума функции: $\pi + 2\pi n$

Минимумы функции: $g(2\pi n) = 0$

Максимумы функции: $g(\pi + 2\pi n) = \sqrt[3]{2}$

$$5) \quad g''(x) = \frac{3\cos x \sqrt[3]{(1 - \cos x)^2} - \frac{2\sin^2 x}{\sqrt[3]{1 - \cos x}}}{9\sqrt[3]{(1 - \cos x)^4}} = \frac{3\cos x (1 - \cos x) - 2\sin^2 x}{9\sqrt[3]{(1 - \cos x)^5}} = \frac{-\cos^2 x + 3\cos x - 2}{9\sqrt[3]{(1 - \cos x)^5}}$$

Вторая производная не существует, если $1 - \cos x = 0$

$$x = 2\pi n$$

Вторая производная равна 0, если $-\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2\pi n \\ \text{нет корней} \end{cases}$$

Так как при $x=2\pi n$ Вторая производная не существует, она не обращается в ноль.



Так как $g''(x) < 0$ функция является вогнутой.

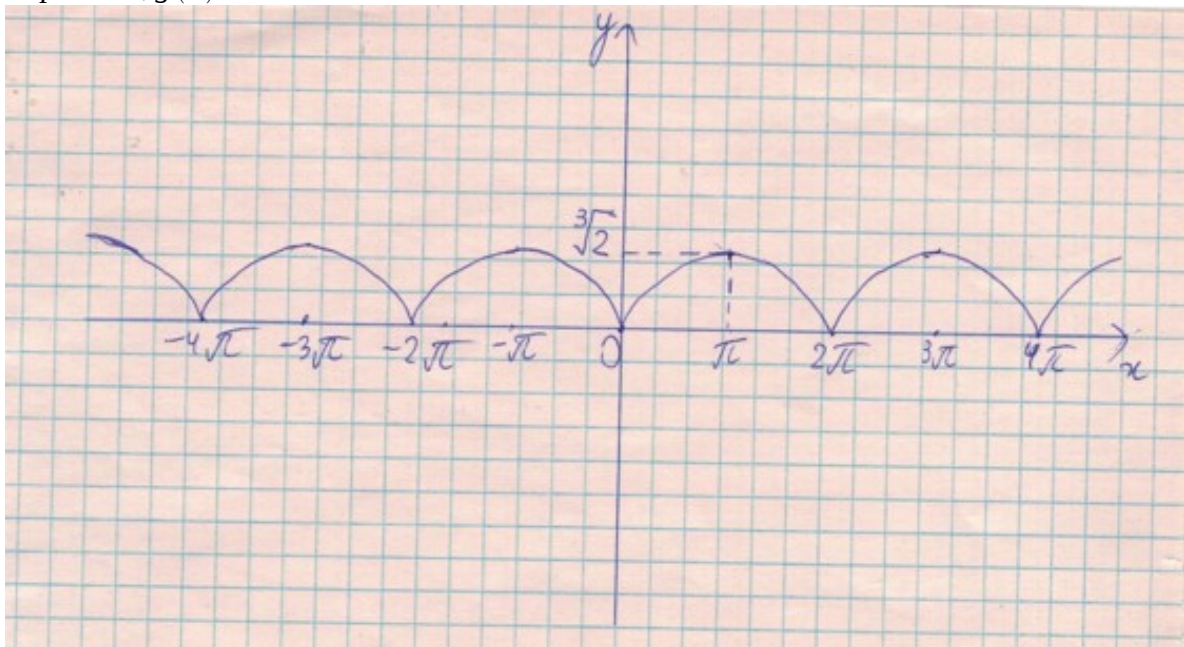
Точек перегиба нет.

6) Так как функция не имеет разрывов у нее нет вертикальных асимптот.

Так как $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, функция не имеет горизонтальных и наклонных асимптот.

7) $g(x)=0$, при $x=2\pi n$
при $x=0$, $g(x)=0$

8)



Оценочный лист:

Андреев Владислав Р3119 - 100%

Чежин Павел Андреевич Р3119 - 100%

Кокорев Михаил Р3119 - 100%

Петрова Анастасия Р3119 - 100%