МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО» Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Расчетно-графическая работа по линейной алгебре и аналитической геометрии:

"Аналитическая геометрия"

Работу выполнили:

Андреев Владислав Р3119 Кокорев Михаил Р3119 Петрова Анастасия Р3119 Чежин Павел Андреевич Р3119

Преподаватель:

Правдин Константин

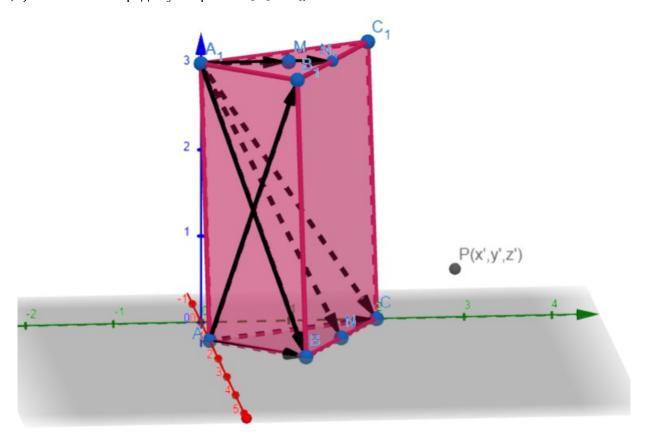
Ментор:

Анастасия Кузьмина

Санкт-Петербург, 2022

Задание №1.

1,2) Обозначим середину стороны $B_1C_1 - N_1$, BC - N



3) Чтобы найти координаты в новом базисе, найдем матрицу перехода, для этого выразим векторы нового базиса через старые.

$$\vec{A_1}B = \vec{AA_1} + \vec{AB} = -\vec{AA_1} + \vec{AB}$$

$$\vec{AB} = \vec{A_1}B + \vec{AA_1}$$

$$\vec{AA_1} = \vec{A_1}N_1 - \vec{A_1}N$$

$$\vec{A_1}N = \frac{1}{2}\vec{A_1}B + \frac{1}{2}\vec{A_1}C$$

$$\vec{A_1}N_1 = \frac{3}{2}\vec{A_1}M$$

$$\vec{AA_1} = \frac{3}{2}\vec{A_1}M - \frac{1}{2}\vec{A_1}B - \frac{1}{2}\vec{A_1}C$$

$$\vec{AB} = \vec{A_1}B + \frac{3}{2}\vec{A_1}M - \frac{1}{2}\vec{A_1}B - \frac{1}{2}\vec{A_1}C = \frac{1}{2}\vec{A_1}B - \frac{1}{2}\vec{A_1}C + \frac{3}{2}\vec{A_1}M$$

$$\vec{A_1}C = \vec{A_1}A + \vec{AC}$$

$$\vec{AC} = \vec{A_1}C + \vec{AA_1} = \vec{A_1}C + \frac{3}{2}\vec{A_1}M - \frac{1}{2}\vec{A_1}B - \frac{1}{2}\vec{A_1}C = \frac{-1}{2}\vec{A_1}C = \frac{-1}{2}\vec{A_1}B + \frac{1}{2}\vec{A_1}C + \frac{3}{2}\vec{A_1}M$$

$$\vec{AB_1} = \vec{AB} + \vec{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{A_1}B - \frac{1}{2}\vec{A_1}C + \frac{3}{2}\vec{A_1}M + \frac{3}{2}\vec{A_1}M - \frac{1}{2}\vec{A_1}B - \frac{1}{2}\vec{A_1}C = -\vec{A_1}C + 3\vec{A_1}M$$

Таким образом, матрица перехода:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу:

$$det T = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 3 + 0 + \frac{3}{2} * (-\frac{1}{2}) * (-1) - 0 - (-1) * \frac{3}{2} * \frac{1}{2} - 3 * (-\frac{1}{2}) * (-\frac{1}{2}) = 1.5$$

$$T^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1.5 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1.5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

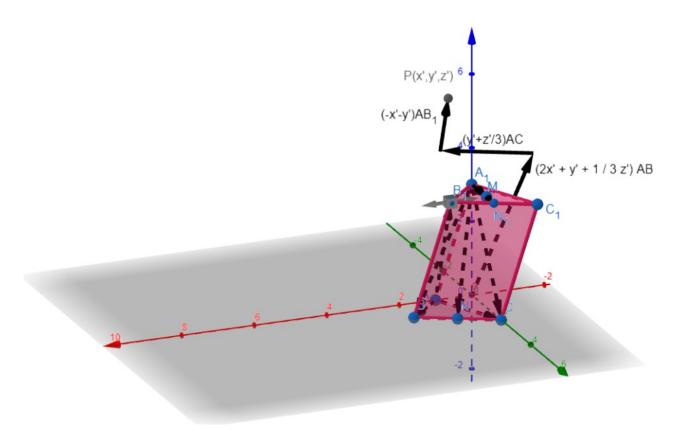
$$T^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1.5 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1.5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
$$(T^*)^T = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1.5 & -1.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{(T^*)^T}{\det T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда координаты в новом базисе $x^{\prime\prime},y^{\prime\prime},z^{\prime\prime}$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' + y' + \frac{1}{3}z' \\ y' + \frac{1}{3}z' \\ -x' - y' \end{pmatrix}$$

4) Проверим решение построением:



Точка в старых и новых координатах совпадает.

Задание №2.

Множество 1:

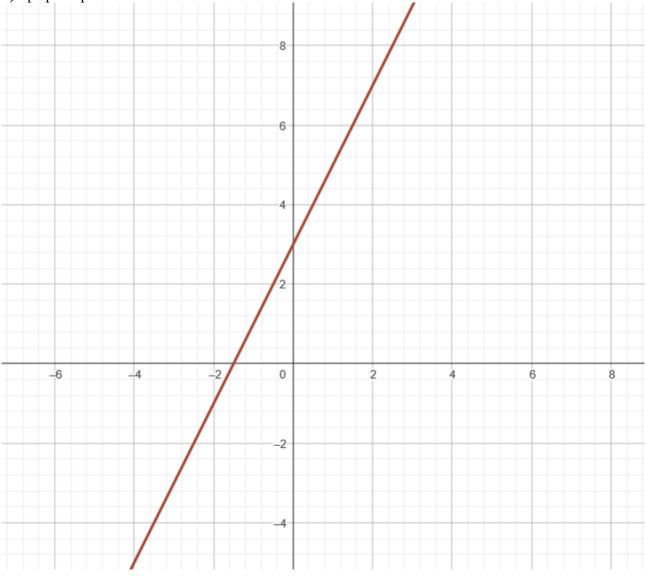
1)
$$4x^2-4xy+y^2+12x-6y+9=0$$

Иножество 1.

1)
$$4x^2-4xy+y^2+12x-6y+9=0$$
Решим уравнение как квадратное относительно у: $y^2+y(-4x-6)+(2x-3)^2=0$
 $D=(-4x-6)^2-4(2x-3)^2=(2(2x-3))^2-4(2x-3)^2=4(2x-3)^2-4(2x-3)^2=0$
 $y=\frac{4x+6}{2}=2x+3$

Таким образом, множество задает прямую на плоскости.

2) График кривой:



Множество №2:

1)
$$7x^2-24xy-38x+24y+175=0$$

Сделаем перенос системы координат так, чтобы коэффициенты a_{13} и a_{23} в общем виде уравнения стали равны 0, для этого должно выполняться условие:

$$\begin{cases} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 = -a_{13} \\ a_{12} x_0 + a_{22} y_0 = -a_{23} \\ 7 x_0 - 12 y_0 = 19 \\ -12 x_0 = -12 \\ x_0 = 1, y_0 = -1 \end{cases}$$

Тогда новые коэффициенты уравнения:

$$a'_{11} = a_{11} = 7$$
 $a'_{12} = a_{12} = -12$
 $a'_{22} = a_{22} = 0$
 $a'_{13} = 0$
 $a'_{23} = 0$
 $a'_{23} = a_{11} x_0^2 + 2 a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2 + 2 a_{13} x_0 + 2 a_{23} y_0 + a_{33} = 7 + 24 - 38 - 24 + 175 = 144$

Новое уравнение:

$$7x'^2-24x'y'+144=0$$

Новые координаты:

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Сделаем поворот системы координат так, чтобы коэффициент a'_{12} стал равен 0.

$$a''_{12} = -\frac{a'_{11} - a'_{22}}{2} \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi$$
$$-\frac{7}{2} \sin 2\varphi - 12 \cos 2\varphi = 0$$
$$7tg 2\varphi + 24 = 0$$
$$2\varphi = arctg(\frac{-24}{7})$$

Тогда новые коэффициенты уравнения:

$$a''_{11} = a'_{12} \sin 2\varphi + \frac{a'_{11} - a'_{22}}{2} \cos 2\varphi + \frac{a'_{11} + a'_{22}}{2} = -12 \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{-24}{7} \right) + \frac{7}{2} \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{-24}{7} \right) + \frac{7}{2} = 16$$

$$a''_{12} = 0$$

$$a''_{22} = -a'_{12} \sin 2\varphi - \frac{a'_{11} - a'_{22}}{2} \cos 2\varphi - \frac{a'_{11} + a'_{22}}{2} = 12 \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{-24}{7} \right) - \frac{7}{2} \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{-24}{7} \right) - \frac{7}{2} = -16$$

$$a''_{13} = 0$$

$$a''_{23} = 0$$

$$a''_{33} = a'_{33} = 144$$
 Новое уравнение:
$$16x''^2 - 16y''^2 + 144 = 0$$

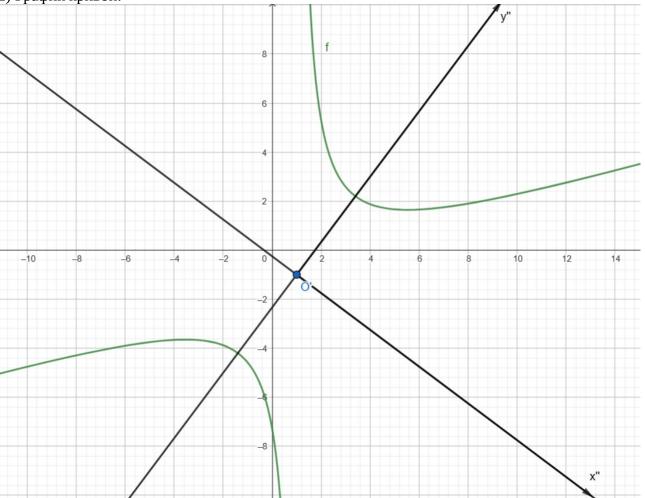
$$\frac{y''^2}{9} - \frac{x''^2}{9} = 1$$

Полученное уравнения является каноническим уравнением гиперболы с фокусами лежащими на оси $y^{\prime\prime}$.

Новые координаты:

$$\begin{cases} x'' = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi = 0.8(x-1) - 0.6(y+1) \\ y'' = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = 0.6(x-1) + 0.8(y+1) \end{cases}$$

2) График кривой:



3)
$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$$

 $a = 3, b = 3$
 $c^2 = a^2 + b^2 = 18$
 $c = 3\sqrt{2}$
 $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$

уравнение директрисы
$$d_1$$
:
$$y = \frac{b}{\varepsilon} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

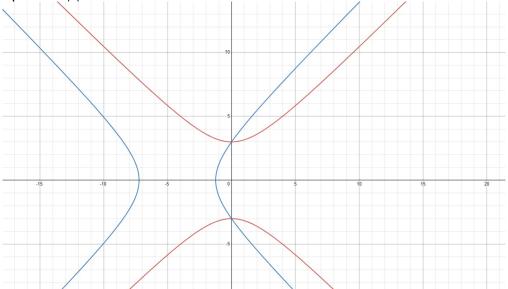
координаты фокус имеет координаты: $F_1(0,c)$

расстояние между фокусом и директрисой:
$$p = 3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

уравнения веток гиперболы в полярной системе координат:

$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \rho = \frac{-\varepsilon p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

$$\rho\!=\!\!\frac{3}{1\!-\!\sqrt{2}\cos\varphi}, \rho\!=\!\!\frac{-3}{1\!+\!\sqrt{2}\,\varphi}$$
 4) График кривой в ДПСК и ПСК:



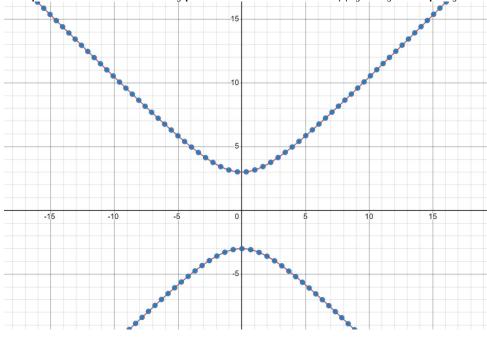
Графики не совпадают, так как в полярном уравнение гиперболы центр координат выбран в фокусе и фокусы расположены на оси совпадающей с осью Ох в ДПСК.

5)
$$\begin{cases}
x = \rho \cos \varphi \\
y = \rho \sin \varphi
\end{cases}$$

$$\frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{9} - \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{9} = 1$$

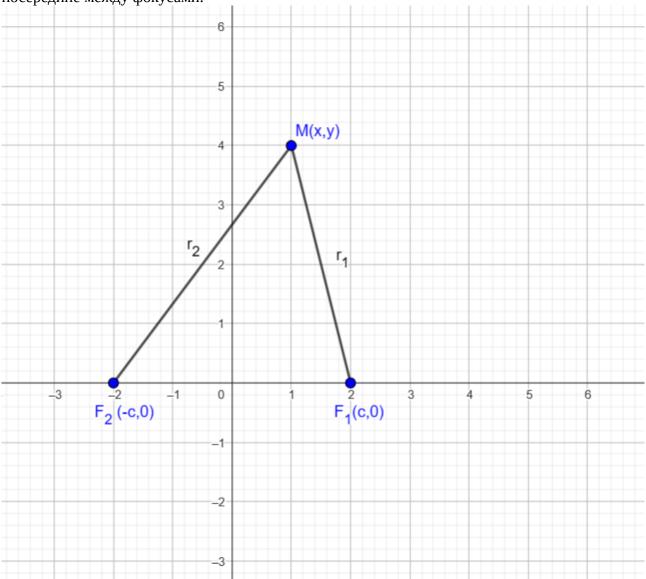
$$\rho = \frac{3}{\sqrt{-\cos 2 \varphi}}$$

Полярное и каноническое уравнение описывают одну и ту же кривую:



Задание №3.

Даны две точки, расстояние между которыми 2с. Найдите геометрическое место точек и его уравнение, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных равна $2a^2$, a>c. 1) Обозначим две данные точки F_1 , F_2 , расстояния до этих фокусов — r_1 , r_2 Введем систему координат: фокусы расположим на оси Ох, начало координат поместим посередине между фокусами.



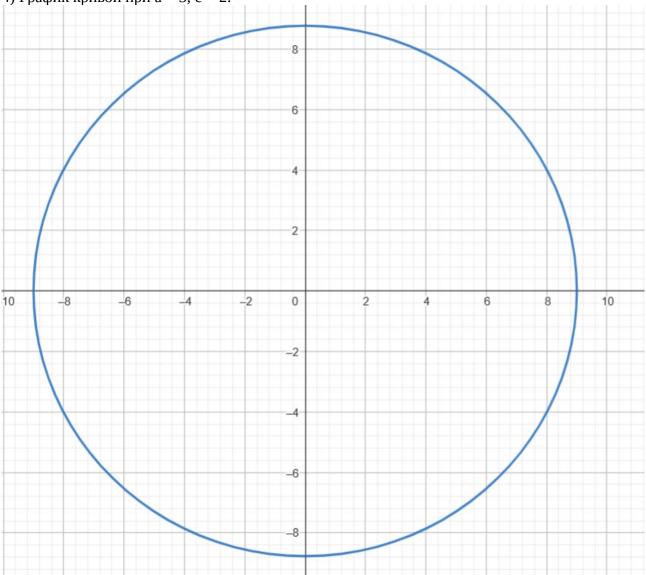
2)По условию:
$$r_1^2 + r_2^2 = 2 a^2$$
3) $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2 a^2$ $(x-c)^2 + y^2 = 4 a^4 - 4 a^2 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$ $x^2 - 2 cx + c^2 + y^2 = 4 a^4 - 4 a^2 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2 cx + c^2 + y^2$ $4 a^2 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4 a^4 + 4 cx$ $a^4 ((x+c)^2 + y^2) = a^8 + 2 a^4 cx + c^2 x^2$ $a^4 x^2 + 2 a^4 cx + a^4 c^2 + a^4 y^2 = a^8 + 2 a^4 cx + c^2 x^2$

$$x^{2}(a^{4}-c^{2})+a^{4}v^{2}+a^{4}(c^{2}-a^{4})=0$$

 $x^2(a^4-c^2)+a^4y^2+a^4(c^2-a^4)=0$ Поделим обе части уравнения на $a^4(a^4-c^2)$ $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{a^4-c^2}=1$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4 - c^2} = 1$$

График кривой при а = 3, с = 2:



Оценочный лист:

Андреев Владислав Р3119 - 100% Чежин Павел Андреевич Р3119 - 100% Кокорев Михаил Р3119 - 100% Петрова Анастасия Р3119 - 100%