МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Расчетно-графическая работа по линейной алгебре и аналитической геометрии:

“Аналитическая геометрия”

Работу выполнили:

Андреев Владислав Р3119

Кокорев Михаил Р3119

Петрова Анастасия Р3119

Чежин Павел Андреевич Р3119

Преподаватель:

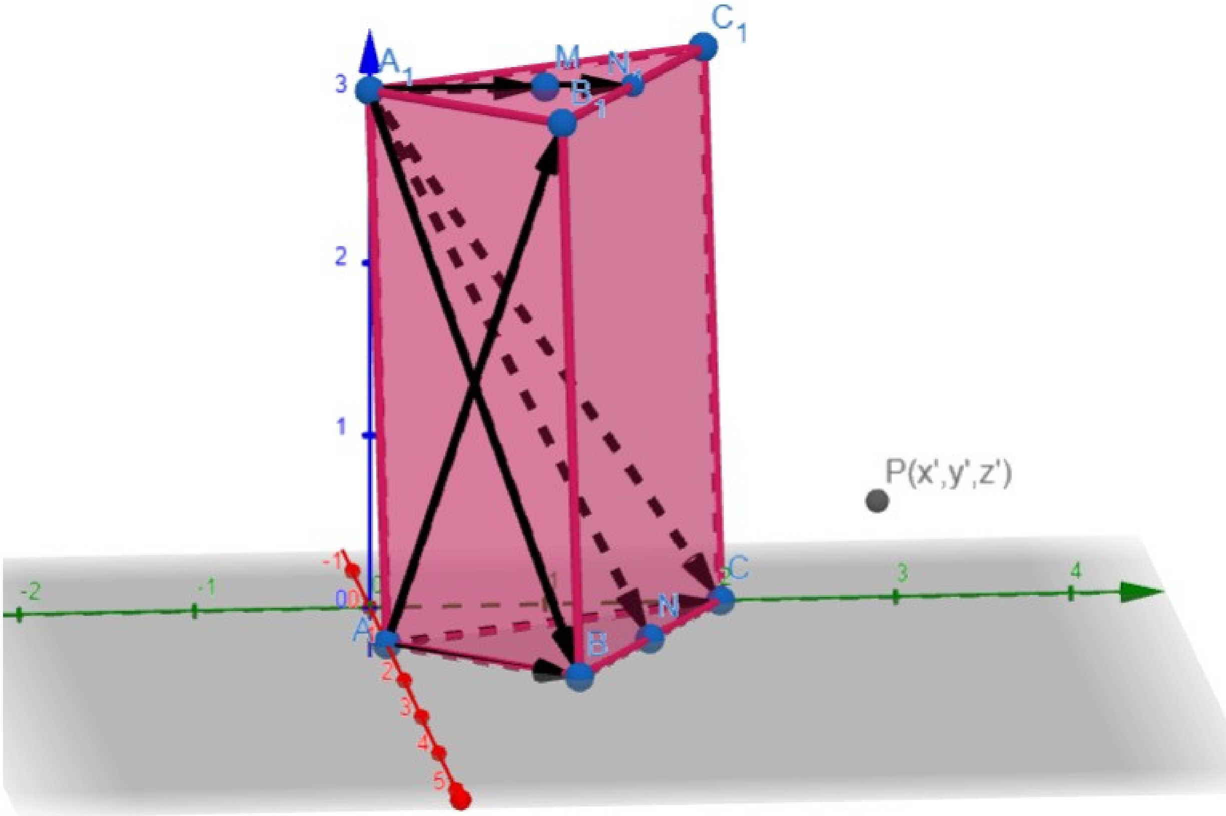
Правдин Константин

Ментор:

Анастасия Кузьмина

Санкт-Петербург, 2022

Задание №1.
1,2) Обозначим середину стороны B_1C_1 – N_1, BC - N



3) Чтобы найти координаты в новом базисе, найдем матрицу перехода, для этого выразим векторы нового базиса через старые.

$$\vec{A_1B}=\vec{AA_1}+\vec{AB}=-\vec{AA_1}+\vec{AB}$$
$$\vec{AB}=\vec{A_1B}+\vec{AA_1}$$
$$\vec{AA_1}=\vec{A_1N_1}-\vec{A_1N}$$
$$\vec{A_1N}=\frac{1}{2}\vec{A_1B}+\frac{1}{2}\vec{A_1C}$$
$$\vec{A_1N_1}=\frac{3}{2}\vec{A_1M}$$
$$\vec{AA_1}=\frac{3}{2}\vec{A_1M}-\frac{1}{2}\vec{A_1B}-\frac{1}{2}\vec{A_1C}$$
$$\vec{AB}=\vec{A_1B}+\frac{3}{2}\vec{A_1M}-\frac{1}{2}\vec{A_1B}-\frac{1}{2}\vec{A_1C}=\frac{1}{2}\vec{A_1B}-\frac{1}{2}\vec{A_1C}+\frac{3}{2}\vec{A_1M}$$
$$\vec{A_1C}=\vec{A_1A}+\vec{AC}$$
$$\vec{AC}=\vec{A_1C}+\vec{AA_1}=\vec{A_1C}+\frac{3}{2}\vec{A_1M}-\frac{1}{2}\vec{A_1B}-\frac{1}{2}\vec{A_1C}=\frac{-1}{2}\vec{A_1B}+\frac{1}{2}\vec{A_1C}+\frac{3}{2}\vec{A_1M}$$
$$\vec{AB_1}=\vec{AB}+\vec{AA_1}=\frac{1}{2}\vec{A_1B}-\frac{1}{2}\vec{A_1C}+\frac{3}{2}\vec{A_1M}+\frac{3}{2}\vec{A_1M}-\frac{1}{2}\vec{A_1B}-\frac{1}{2}\vec{A_1C}=-\vec{A_1C}+3\vec{A_1M}$$

Таким образом, матрица перехода:

$$T=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу:

$$\det T=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*3+0+\frac{3}{2}*\left(-\frac{1}{2}\right)*(-1)-0-(-1)*\frac{3}{2}*\frac{1}{2}-3*\left(-\frac{1}{2}\right)*\left(-\frac{1}{2}\right)=1.5$$

$$T^{*}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1.5 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1.5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

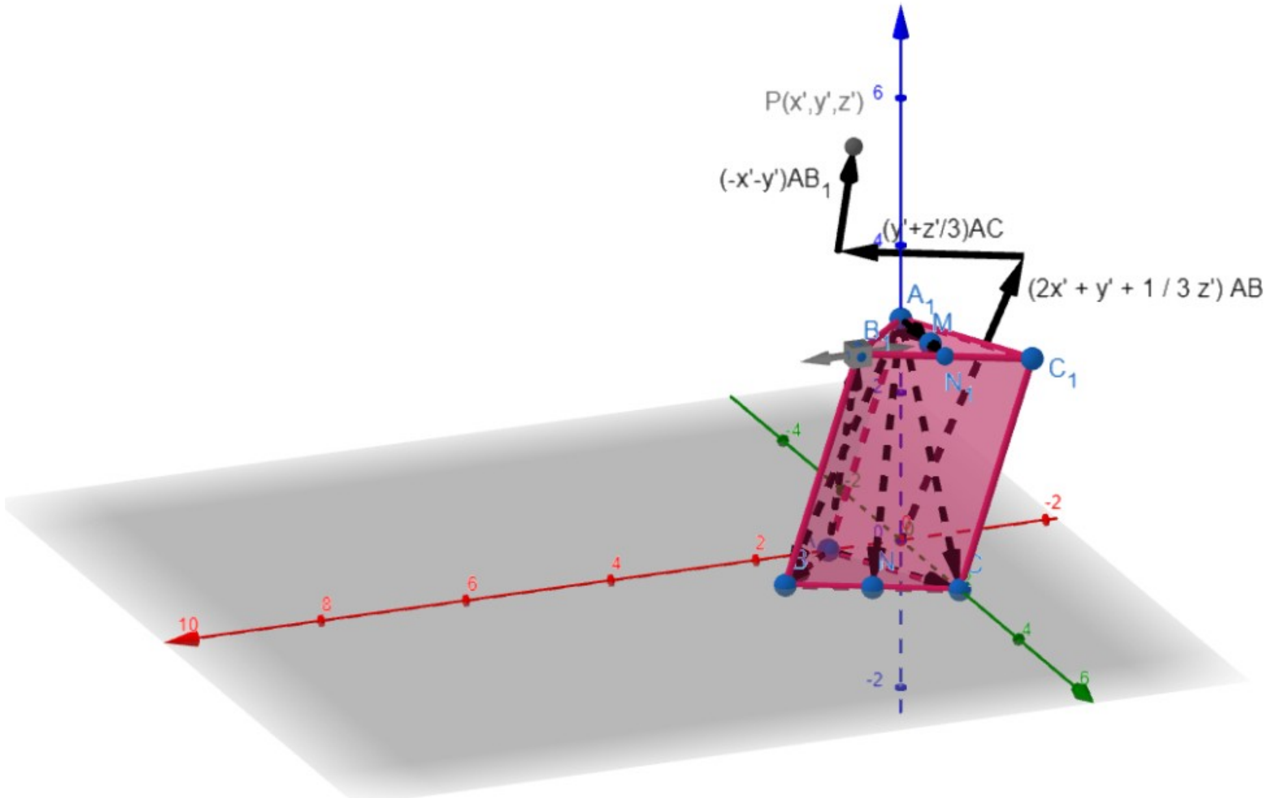
$$\left(T^{*}\right)^{T}=\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1.5 & -1.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}=\frac{\left(T^{*}\right)^{T}}{\det T}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда координаты в новом базисе x'', y'', z''

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x'+y'+\frac{1}{3}z' \\ y'+\frac{1}{3}z' \\ -x'-y' \end{pmatrix}$$

4) Проверим решение построением:



Точка в старых и новых координатах совпадает.

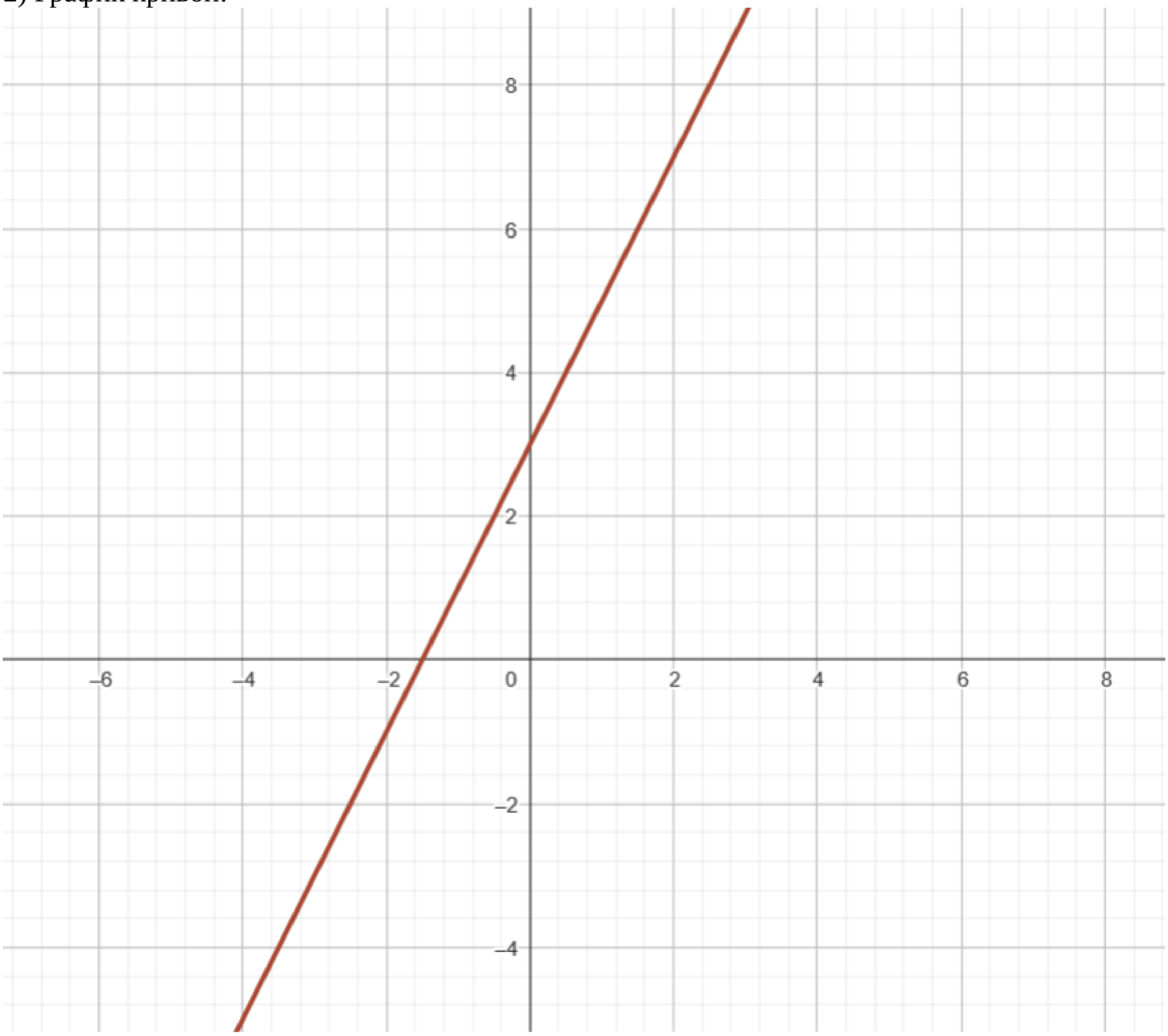
Задание №2.
Множество 1:
1) $4x^2-4xy+y^2+12x-6y+9=0$
Решим уравнение как квадратное относительно y:

$$y^2+y(-4x-6)+(2x-3)^2=0$$

$$D=(-4x-6)^2-4(2x-3)^2=(2(2x-3))^2-4(2x-3)^2=4(2x-3)^2-4(2x-3)^2=0$$

$$y=\frac{4x+6}{2}=2x+3$$

Таким образом, множество задает прямую на плоскости.
2) График кривой:



Множество №2:
1) $7x^2-24xy-38x+24y+175=0$
Сделаем перенос системы координат так, чтобы коэффициенты a_{13} и a_{23} в общем виде уравнения стали равны 0, для этого должно выполняться условие:

$$\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0=-a_{13} \\ a_{12}x_0+a_{22}y_0=-a_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_0-12y_0=19 \\ -12x_0=-12 \end{cases}$$

$$x_0=1,\ y_0=-1$$

Тогда новые коэффициенты уравнения:

$$a'_{11}=a_{11}=7$$
$$a'_{12}=a_{12}=-12$$
$$a'_{22}=a_{22}=0$$
$$a'_{13}=0$$
$$a'_{23}=0$$
$$a'_{33}=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}=7+24-38-24+175=144$$

Новое уравнение:

$$7x'^2-24x'y'+144=0$$

Новые координаты:

$$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+1 \end{cases}$$

Сделаем поворот системы координат так, чтобы коэффициент a'_{12} стал равен 0.

$$a''_{12}=-\frac{a'_{11}-a'_{22}}{2}\sin 2\varphi+a_{12}\cos 2\varphi$$

$$-\frac{7}{2}\sin 2\varphi-12\cos 2\varphi=0$$

$$7tg2\varphi+24=0$$

$$2\varphi=arctg\left(\frac{-24}{7}\right)$$

Тогда новые коэффициенты уравнения:

$$a''_{11}=a'_{12}\sin 2\varphi+\frac{a'_{11}-a'_{22}}{2}\cos 2\varphi+\frac{a'_{11}+a'_{22}}{2}=-12\sin\left(arctg\frac{-24}{7}\right)+\frac{7}{2}\cos\left(arctg\frac{-24}{7}\right)+\frac{7}{2}=16$$

$$a''_{12}=0$$

$$a''_{22}=-a'_{12}\sin 2\varphi-\frac{a'_{11}-a'_{22}}{2}\cos 2\varphi-\frac{a'_{11}+a'_{22}}{2}=12\sin\left(arctg\frac{-24}{7}\right)-\frac{7}{2}\cos\left(arctg\frac{-24}{7}\right)-\frac{7}{2}=-16$$

$$a''_{13}=0$$
$$a''_{23}=0$$
$$a''_{33}=a'_{33}=144$$

Новое уравнение:

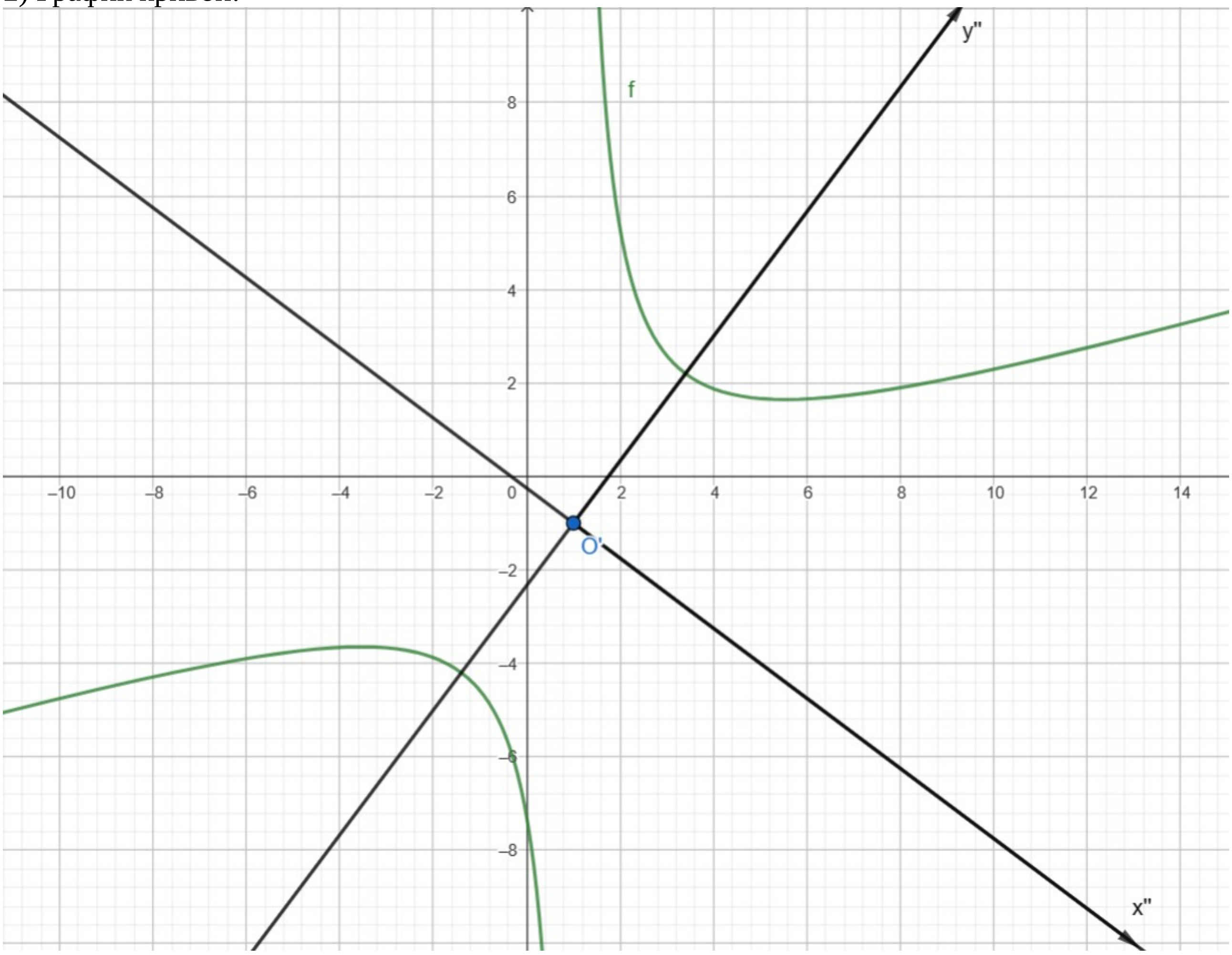
$$16x''^2-16y''^2+144=0$$

$$\frac{y''^2}{9}-\frac{x''^2}{9}=1$$

Полученное уравнения является каноническим уравнением гиперболы с фокусами лежащими на оси y'' .
Новые координаты:

$$\begin{cases} x'' = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi = 0.8(x-1) - 0.6(y+1) \\ y'' = -x' \sin\varphi + y' \cos\varphi = 0.6(x-1) + 0.8(y+1) \end{cases}$$

2) График кривой:



3) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$

a = 3, b = 3

$$c^2 = a^2 + b^2 = 18$$

$$c = 3\sqrt{2}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

уравнение директрисы d_1:

$$y = \frac{b}{\varepsilon} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

координаты фокус имеет координаты: $F_1(0, c)$

расстояние между фокусом и директрисой:

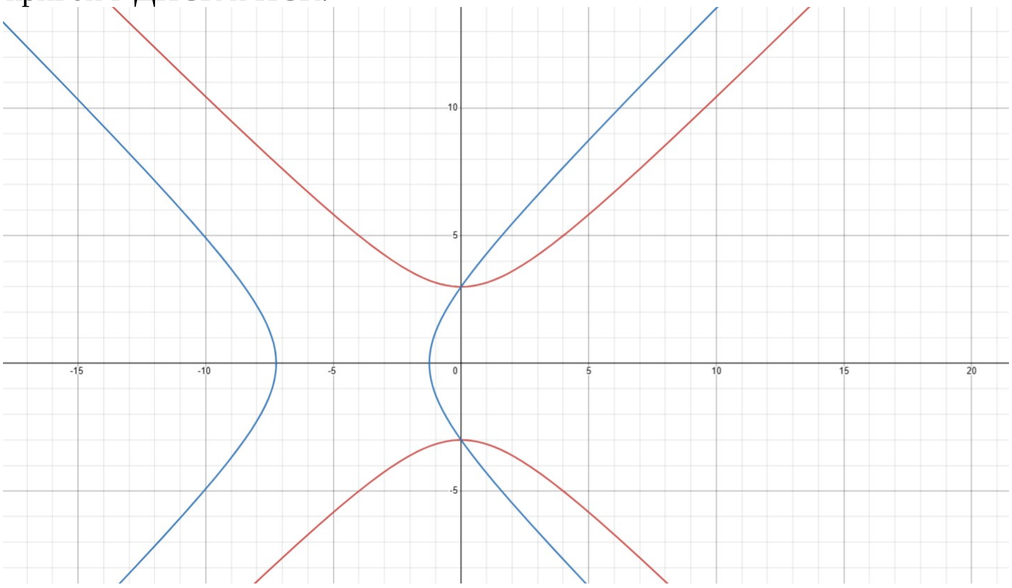
$$p = 3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

уравнения веток гиперболы в полярной системе координат:

$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}, \rho = \frac{-\varepsilon p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$

$$\rho=\frac{3}{1-\sqrt{2}\cos\varphi},\ \rho=\frac{-3}{1+\sqrt{2}\varphi}$$

4) График кривой в ДПСК и ПСК:



Графики не совпадают, так как в полярном уравнение гиперболы центр координат выбран в фокусе и фокусы расположены на оси совпадающей с осью Ox в ДПСК.

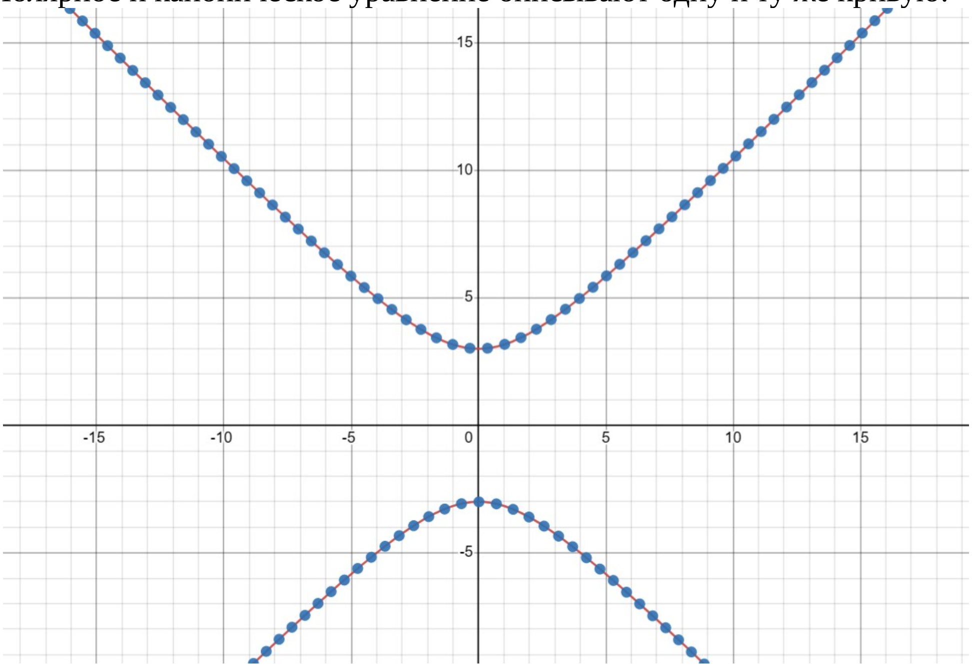
5)

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

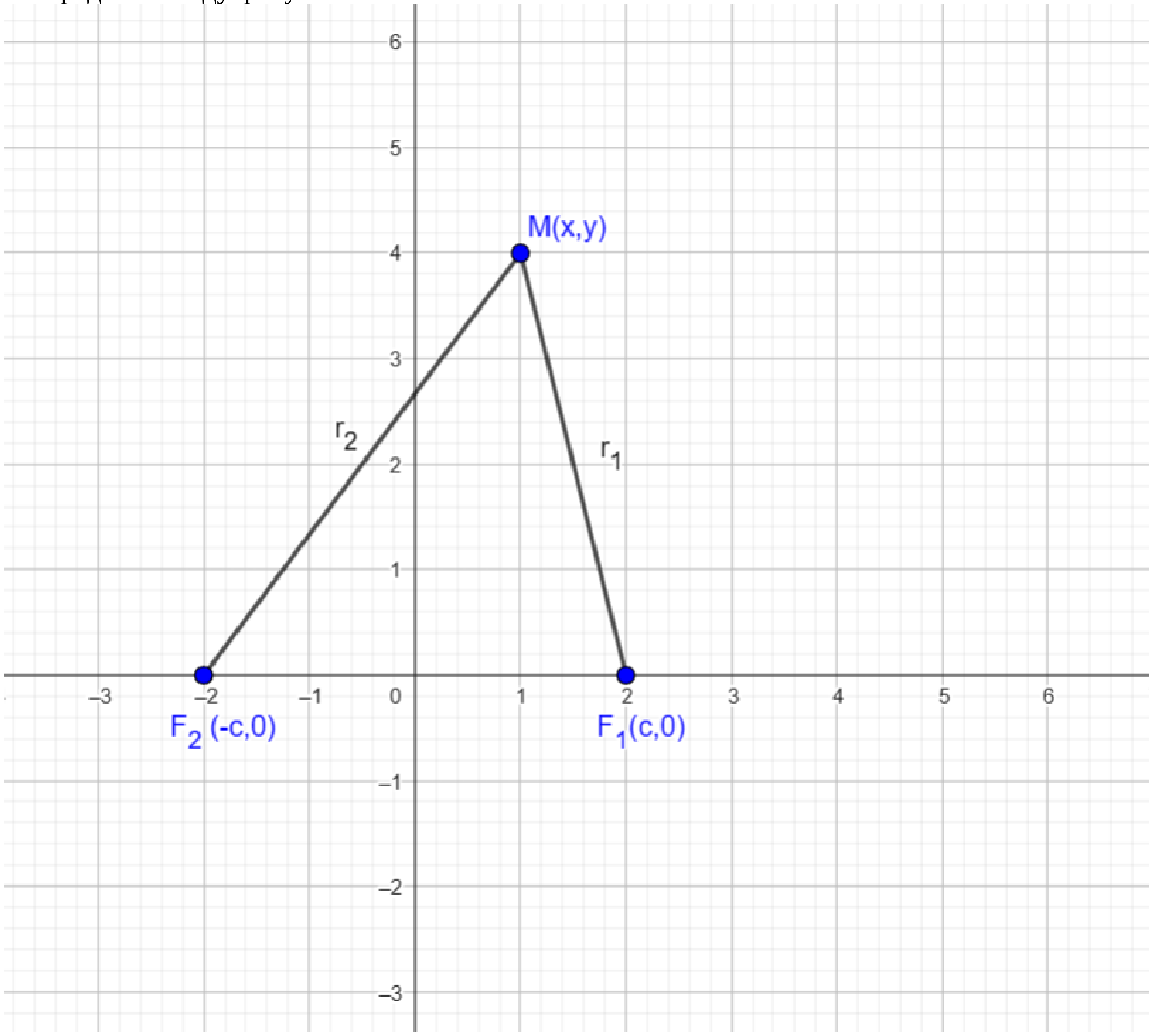
$$\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{9}-\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{9}=1$$

$$\rho=\frac{3}{\sqrt{-\cos 2\varphi}}$$

Полярное и каноническое уравнение описывают одну и ту же кривую:



Задание №3.
Даны две точки, расстояние между которыми 2с. Найдите геометрическое место точек и его уравнение, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных равна $2a^2$, $a>c$.
1) Обозначим две данные точки F_1, F_2, расстояния до этих фокусов — r_1, r_2
Введем систему координат: фокусы расположим на оси Ох, начало координат поместим посередине между фокусами.



2)По условию: $r_1^2+r_2^2=2a^2$

3) $r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a^2$

$(x-c)^2+y^2=4a^4-4a^2\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$

$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^4-4a^2\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$

$4a^2\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^4+4cx$

$a^4((x+c)^2+y^2)=a^8+2a^4cx+c^2x^2$

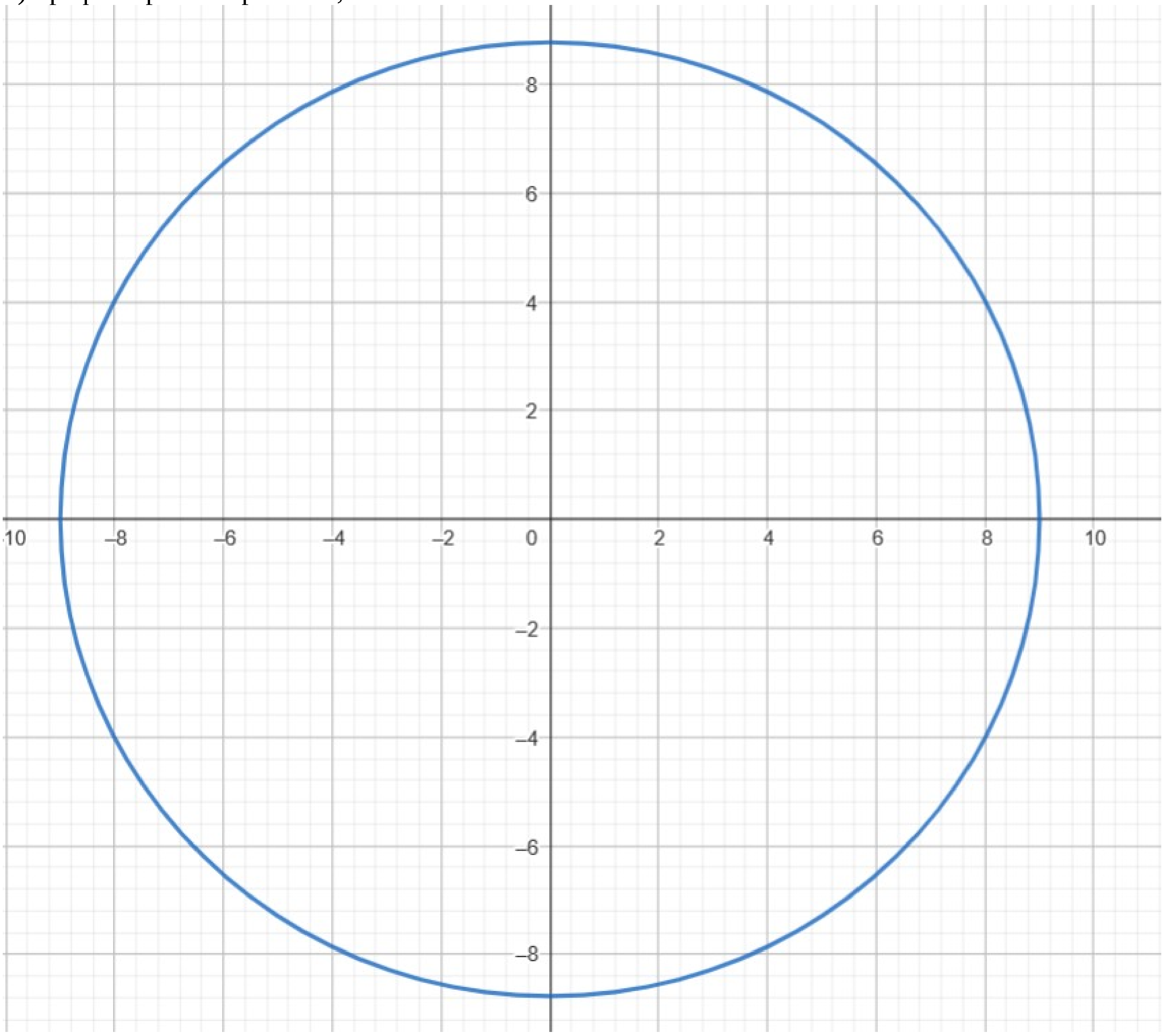
$a^4x^2+2a^4cx+a^4c^2+a^4y^2=a^8+2a^4cx+c^2x^2$

$$x^2(a^4 - c^2) + a^4 y^2 + a^4(c^2 - a^4) = 0$$

Поделим обе части уравнения на $a^4(a^4 - c^2)$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4 - c^2} = 1$$

4) График кривой при a = 3, c = 2:



Оценочный лист:

Андреев Владислав P3119 - 100%

Чежин Павел Андреевич P3119 - 100%

Кокорев Михаил P3119 - 100%

Петрова Анастасия P3119 - 100%