МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Расчетно-графическая работа по математическому анализу

“Производная и дифференциал”

Работу выполнили:

Андреев Владислав Р3119

Кокорев Михаил Р3119

Петрова Анастасия Р3119

Чежин Павел Андреевич Р3119

Преподаватель:

Правдин Константин

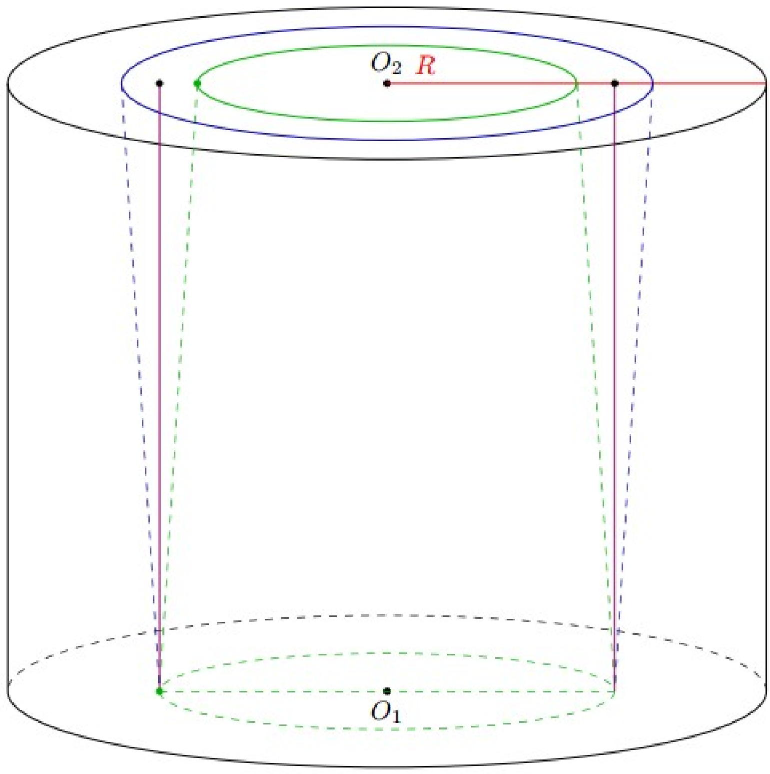
Ментор:

Анастасия Кузьмина

Санкт-Петербург, 2022

Задание №1.

1) Общая композиция выглядит следующим образом:



Объем внешнего цилиндра:

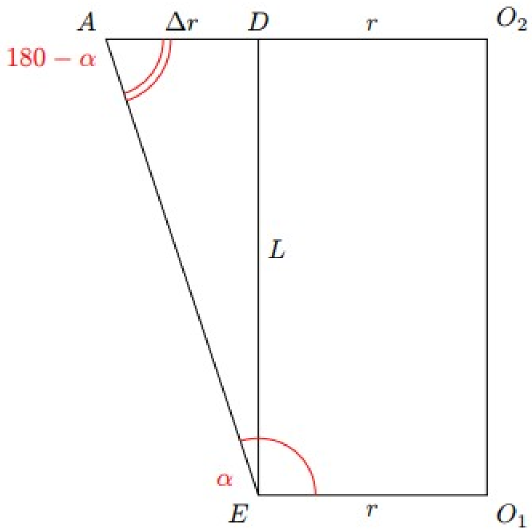
$$V_{внеш} = \pi R^2 L = 375\pi$$

Где R — радиус внешнего цилиндра.

r – радиус постоянного основания внутреннего усеченного конуса. Второе основание может иметь как больший (обозначен синим), так и меньший (обозначен зеленым) или такой же радиус в зависимости от угла α

Найдем объем внутреннего цилиндра:

Рассмотрим случай $\alpha > 90^\circ$



$\Delta r = L\,ctg(180-\alpha) = -L\,ctg\,\alpha$

Тогда верхний радиус равен $r+\Delta r = r - L\,ctg\,\alpha$

Если $\alpha = 90^\circ$, То верхний радиус равен нижнему, что соответствует формуле $r - ctg\,\alpha$, так как в этом случае $ctg\,\alpha = 0$

Если $\alpha < 90^\circ$, То верхний радиус равен $r - \Delta r = [\Delta r = L\,ctg\,\alpha] = r - L\,ctg\,\alpha$

Так во всех случаях формула радиуса верхнего основания одинакова, можно рассматривать все три случая как один, в котором радиус верхнего основания равен $r - L\,ctg\,\alpha$, без ограничения общности.

Объем внутреннего цилиндра можно вычислить как объем усеченного конуса:

$$V_{внутр} = \frac{1}{3}\pi L\left(r^2 + r(r - L\,ctg\,\alpha) + (r - L\,ctg\,\alpha)^2\right) = 5\pi\left(1+1-15\,ctg\,\alpha + 1 - 30\,ctg\,\alpha + 225\,ctg^2\alpha\right) =$$

$$= 5\pi\left(3 - 45\,ctg\,\alpha + 225\,ctg^2\alpha\right)$$

Тогда функция зависимости объема фигуры от угла:

$$f(\alpha) = V_{внеш} - V_{внутр} = 375\pi - 5\pi\left(3 - 45\,ctg\,\alpha + 225\,ctg^2\alpha\right) = \pi\left(360 + 225\,ctg\,\alpha - 1125\,ctg^2\alpha\right)$$

2) Найдем абсолютную погрешность, приблизив точное изменение ее линейной частью, для этого вычислим модуль дифференциала при $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \Delta\alpha = 1^\circ \approx 0.0175$

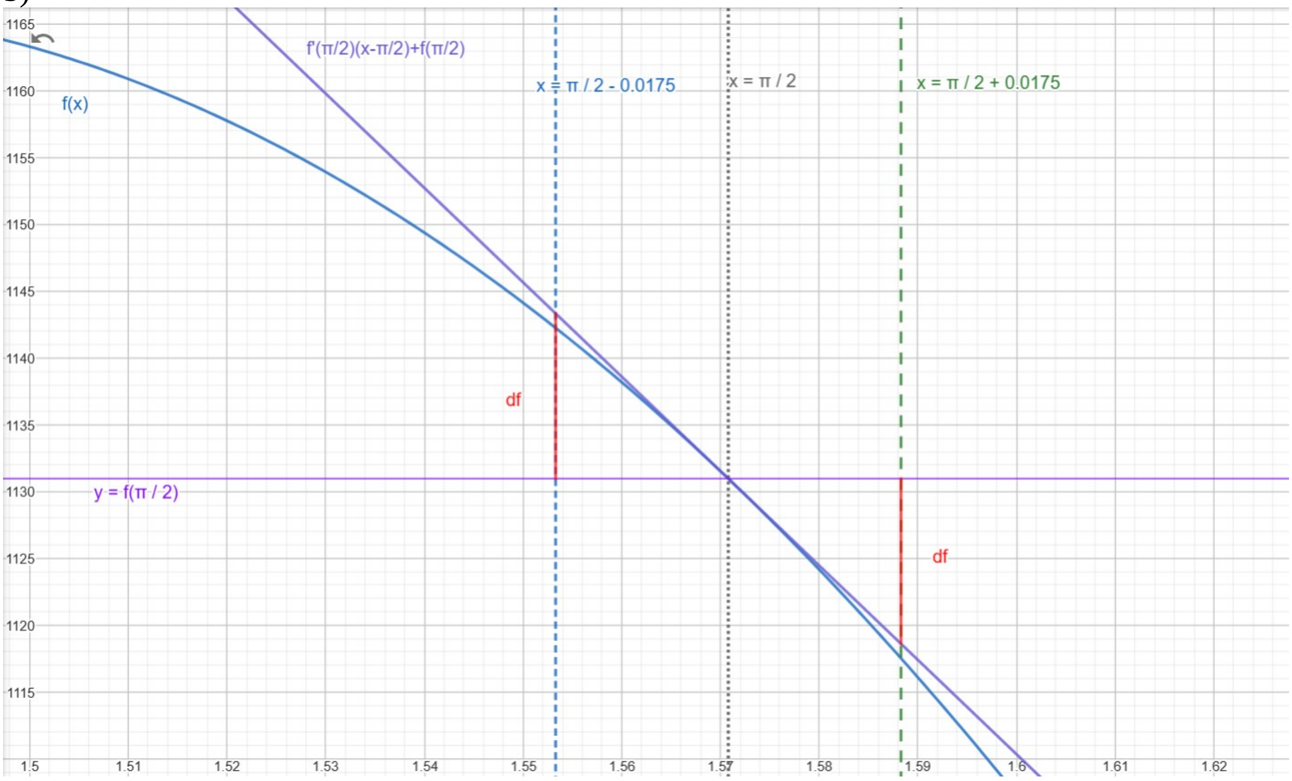
$$|df| = |f'(\alpha) * \Delta\alpha| = \left|\left(-\frac{225\pi}{\sin^2\alpha} - 2250\pi\,ctg\,\alpha * \left(-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\right) * \Delta\alpha\right| = \left|\left(-\frac{225\pi}{1} - 2250\pi * 0 * \left(-\frac{1}{1}\right)\right) * 0.0175\right| =$$

$$= 3.9375\pi \approx 12.37$$

Относительная погрешность вычисляется как отношение абсолютной погрешности и точного значения.

$$\delta = \frac{|df|}{f(90)} = \frac{12.37}{360\pi} \approx 0.01 = 1\%$$

3)



Линейная часть изменения функции почти совпадает с действительным изменением функции, аналитическое решение совпадает с графиком.

4) Ответ: 12.37; 1%

Задание №2.
Расходы на топливо для топки парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости в 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб. в час, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб. в час. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

1) Обозначим коэффициент пропорциональности между расходом на топливо и скоростью k.
Тогда функция зависимости общей суммы расходов в час от скорости:

$$f(v)=kv^3+480$$

При $v=10$ общая сумма расходов в час равна 30+480 = 510.

$$510=1000k+480$$

$$k=0{,}03$$

$$f(v)=0.03v^3+480$$

Время за которое пароход проходит 1 км:

$$t=\frac{1}{v}$$

Функция зависимости общих расходов на 1 км. пути от скорости:

$$g(v)=f(v)*t=0.03v^2+\frac{480}{v}$$

2) Чтобы найти значение v, при котором минимальную общую сумму расходов найдем экстремумы функции, для этого воспользуемся необходимым и достаточным условием экстремума: если точка стационарная или критическая и производная меняет знак при переходе через x_0, то в x_0 экстремум.

$$g'(v)=0.06v-\frac{480}{v^2}$$

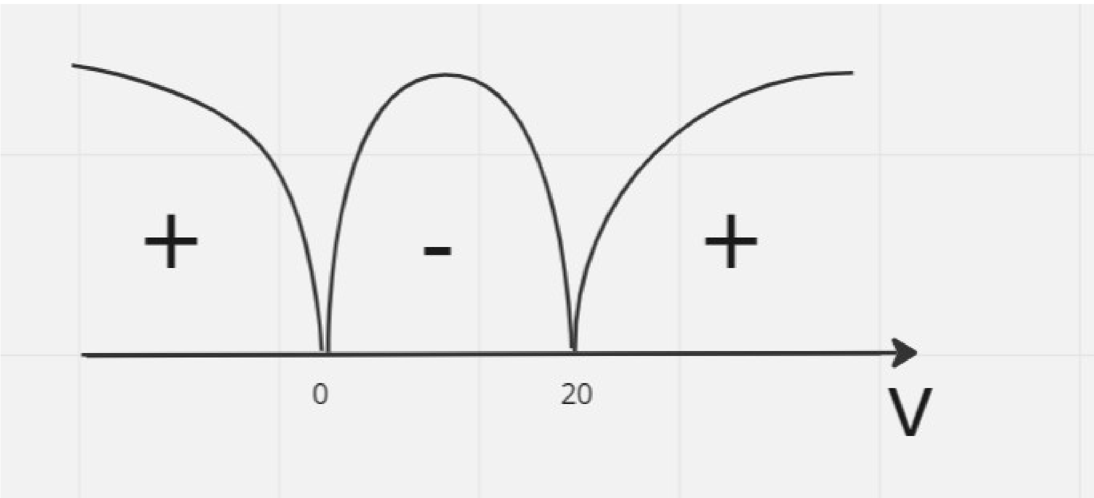
Найдем критические точки:
Производная не существует в одной точке — 0, следовательно, 0 единственная критическая точка.
Найдем стационарные точки:

$$g'(v)=0$$

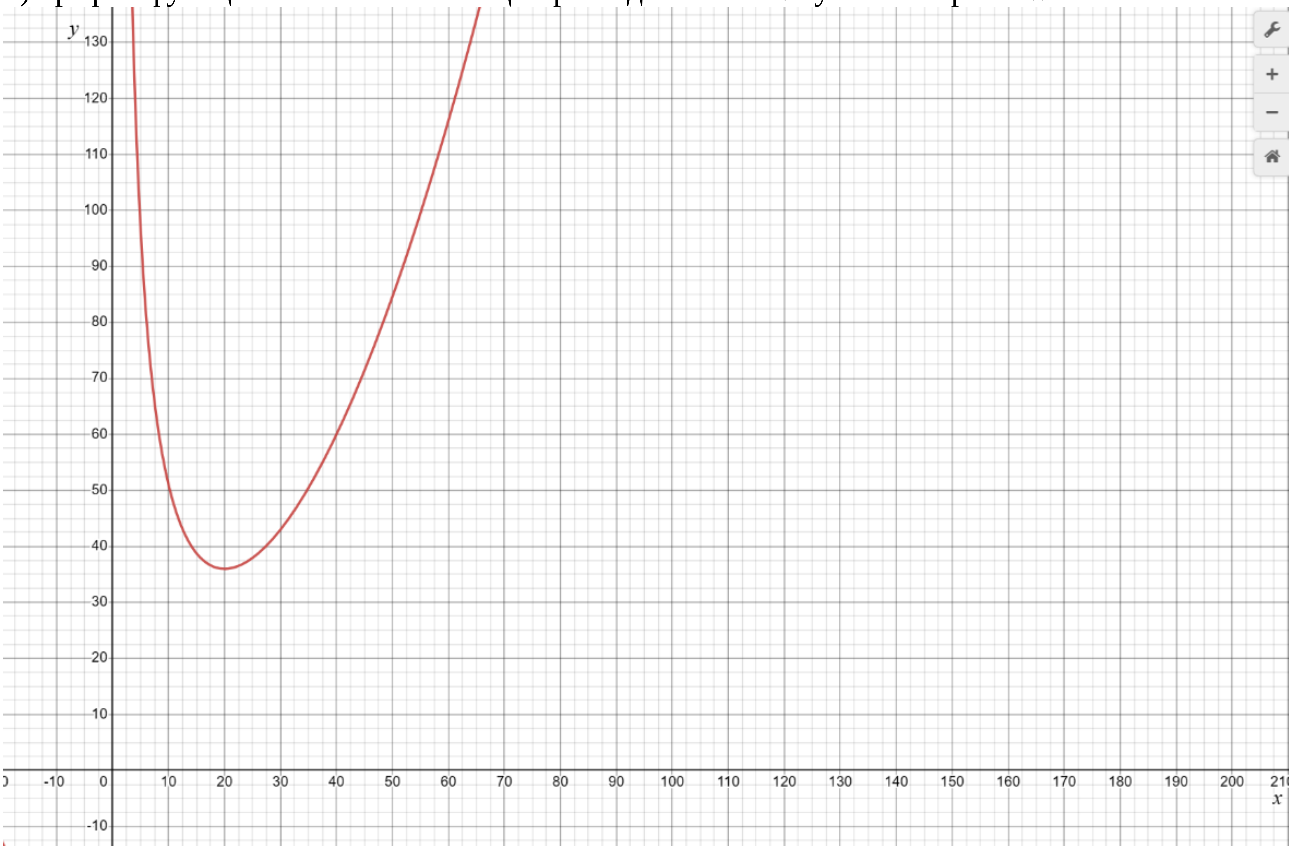
$$0.06v-\frac{480}{v^2}=0$$

$$0.06v^3=480$$

$$v=20$$



В точке 0 производная меняет знак с “+” на “-”, значит, тока 0 — точка максимума.
В точке 20 производная меняет знак с “-” на “+”, значит, тока 20 — точка минимума.
Значит, искомая точка минимума функции — точка 20.
Общая сумма расходов в час: $f(20)=0.03*20^3+480=720$
3) График функции зависимости общих расходов на 1 км. пути от скорости::



На графике видно, что при положительных значениях функция достигает минимального значения в точке 20.
4) Ответ: 20; 720.

Задание №3.1

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x-3}$$

1) Область определения:

$x^2+2x-3\neq 0$

$x\neq 1,\ x\neq -3$

$D(f)=(-\infty;-3)\cup(-3;1)\cup(1;+\infty)$

2) $f(-x)=\dfrac{-x+1}{x^2-2x-3}$

$f(-x)\neq f(x)$

$f(-x)\neq -f(x)$

Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

Так как нет T, для которого выполняется $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$, функция не является периодической.

3)Найдем нулевые значения функции:

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3}=0$$

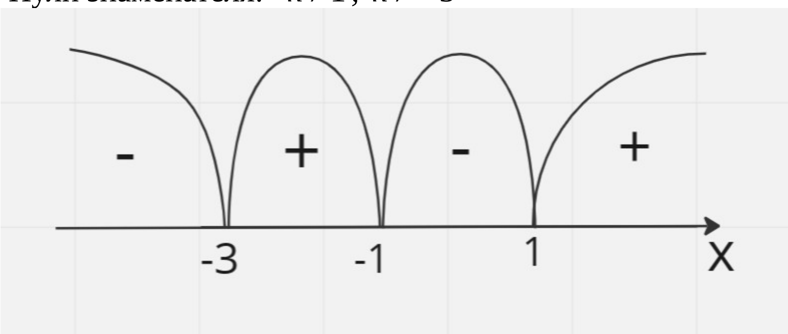
$x+1=0$

$x=-1$

Найдем промежутки знакопостоянства методом интервалов:

Нули числителя: $x=-1$

Нули знаменателя: $x\neq 1,\ x\neq -3$



$f(x)>0, при\, x\in(-3;-1)\cup(1;+\infty)$

$f(x)<0, при\, x\in(-\infty;-3)\cup(-1;1)$

4) $f'(x)=\dfrac{1*(x^2+2x-3)-(2x+2)(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}=\dfrac{-x^2-2x-5}{(x^2+2x-3)^2}$

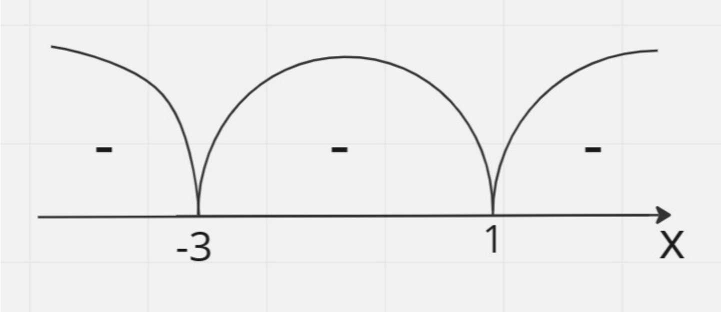
Найдем критические и стационарные точки:

Производная не существует, если $x^2+2x-3=0$

Критические точки: $x=1,\ x=-3$

Стационарные точки: $-x^2-2x-5=0$

Нет корней.



Так как производная отрицательна на области определения функции, функция убывает на своей области определения.
Функция не имеет экстремумов.
5)

$$f''(x)=\frac{(-2x-2)(x^2+2x-3)^2-2(x^2+2x-3)(2x+2)(-x^2-2x-5)}{(x^2+2x-3)^4}=\frac{(x^2+2x-3)(2x^3+6x^2+30x+26)}{(x^2+2x-3)^4}=$$

$$=\frac{2x^3+6x^2+30x+26}{(x^2+2x-3)^3}$$

Вторая производная не существует, если $x^2+2x-3=0$

$x=1,\ x=-3$

Вторая производная равна 0, если:

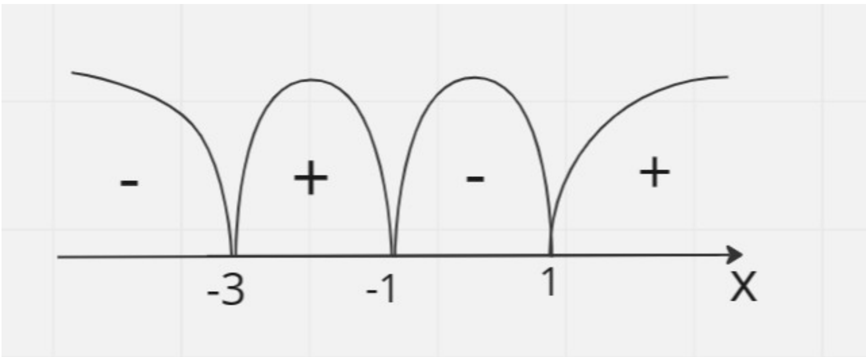
$2x^3+6x^2+30x+26=0$

$(x+1)(x^2+2x+13)=0$

$$\left[\begin{array}{c} x+1=0 \\ x^2+2x+13=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} x=-1 \\ \text{Нет корней} \end{array}\right.$$

$x=-1$



Функция выпукла на $(-3;-1)\cup(1+\infty)$
Функция вогнута на $(-\infty;-3)\cup(-1;1)$
Точки перегиба: $x=-3,\ x=-1,\ x=1$

6) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=\infty$

Следовательно, $x=-3$, является вертикальной асимптотой.

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=\infty$

Следовательно, $x=1$, является вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{x+2-\frac{3}{x}}=0$$

Следовательно, $y=0$, является горизонтальной асимптотой.
Наклонная асимптота имеет вид $y=kx+b,\ k\neq0, k\neq\infty$

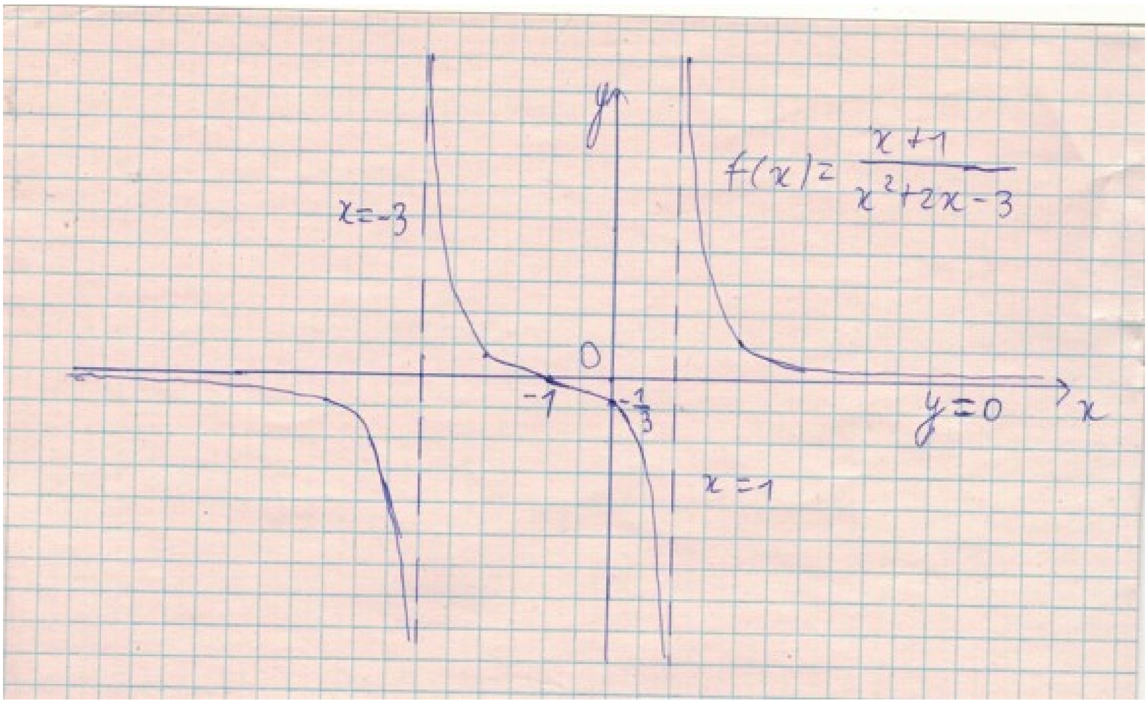
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^3+2x^2-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2x-3}=0$$

Так как k=0, функция не имеет наклонной асимптотой.

7) $f(x)=0$, при $x=-1$

при $x=0$ $f(x)=\frac{-1}{3}$

8)



Задание №3.2

$g(x)=\sqrt[3]{1-cosx}$

1) Область определения:

g(x) – всюду определенная функция

$D(g)=(-\infty;+\infty)$

2) $g(-x)=\sqrt[3]{1-\cos(-x)}=\sqrt[3]{1-cosx}=g(x)$

Значит, g(x) является четной функции. Для графика это означает, что функция симметрична относительно оси Ох.

$g(x+2\pi)=\sqrt[3]{1-\cos(x+2\pi)}=\sqrt[3]{1-cosx}=g(x)$

$g(x-2\pi)=\sqrt[3]{1-\cos(x-2\pi)}=\sqrt[3]{1-cosx}=g(x)$

Значит, $T=2\pi$ является периодом функции. Для графика это означает, что график состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов.

3) Найдем нули функции

$\sqrt[3]{1-cosx}=0$

$cosx=1$

$x=2\pi n, n\in N$

$Так\ как -1\leq cosx\leq 1, 1-cosx\geq 0, следовательно, g(x)=0\ при\ x=2\pi n\ \ и\ \ g(x)>0\ при\ x\neq 2\pi n, n\in N$

4) $g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-cosx)^2}}*(sinx)=\frac{sinx}{3\sqrt[3]{(1-cosx)^2}}$

Найдем стационарные точки: $\frac{sinx}{3\sqrt[3]{(1-cosx)^2}}=0$

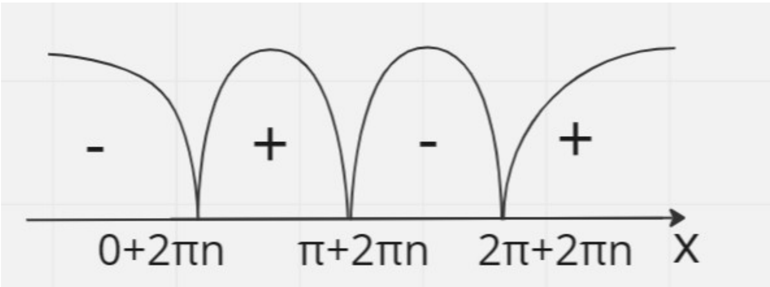
$\sin x=0$

$x=\pi n, n\in N$

Найдем критические точки:

Производной не существует, если $1-cosx=0$

$x=2\pi n\ \ n\in N$



g(x) возрастает на $(2\pi n;\pi+2\pi n)$

g(x) убывает на $(\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n)$

Точки минимума функции: $2\pi n$

Точки максимума функции: $\pi+2\pi n$

Минимумы функции: $g(2\pi n)=0$

Максимумы функции: $g(pi+2\pi n)=\sqrt[3]{2}$

5) $g''(x)=\frac{3cosx\sqrt[3]{(1-cosx)^2}-\frac{2\sin^2 x}{\sqrt[3]{1-cosx}}}{9\sqrt[3]{(1-cosx)^4}}=\frac{3cosx(1-cosx)-2\sin^2 x}{9\sqrt[3]{(1-cosx)^5}}=\frac{-\cos^2 x+3cosx-2}{9\sqrt[3]{(1-cosx)^5}}$

Вторая производная не существует, если $1-cosx=0$

$x=2\pi n$

Вторая производная равна 0, если $-\cos^2 x+3cosx-2=0$

$\left[\begin{array}{l} cosx=1 \\ cosx=2 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x=2\pi n \\ \text{нет корней} \end{array}\right.$$

Так как при $x=2\pi n$ Вторая производная не существует, она не обращается в ноль.

Так как $g''(x)<0$ функция является вогнутой.

Точек перегиба нет.

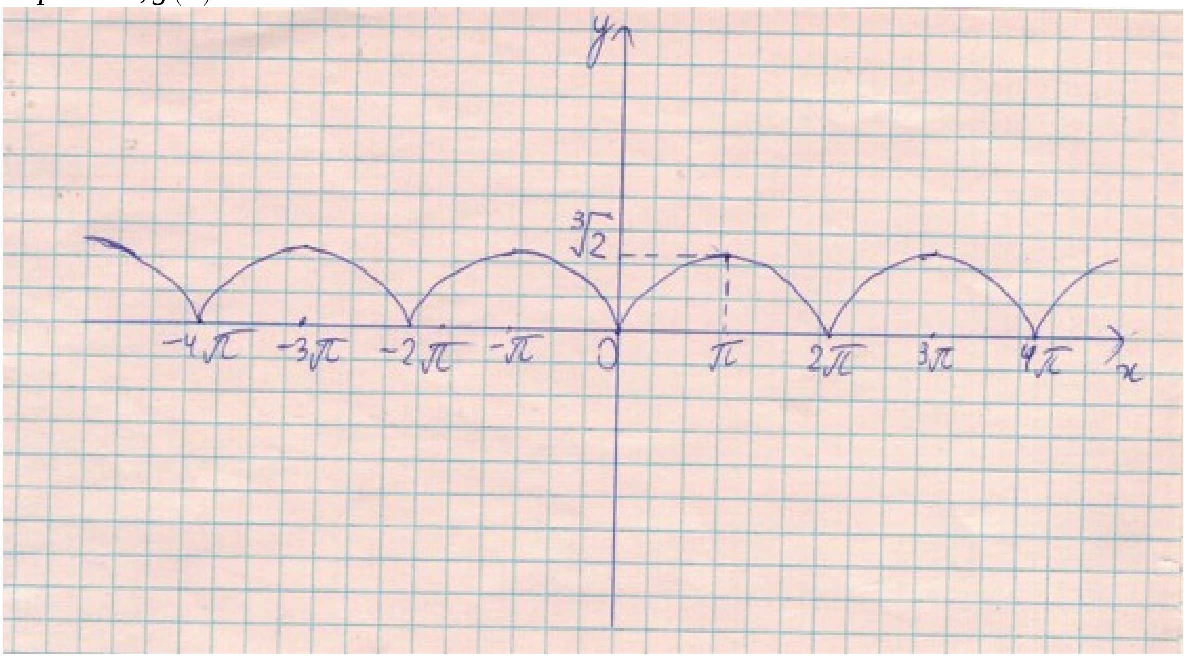
6) Так как функция не имеет разрывов у нее нет вертикальных асимптот.

Так как $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, функция не имеет горизонтальных и наклонных асимптот.

7) $g(x)=0, при\, x=2\pi n$

$при\, x=0, g(x)=0$

8)



Оценочный лист:

Андреев Владислав Р3119 - 100%

Чежин Павел Андреевич Р3119 - 100%

Кокорев Михаил Р3119 - 100%

Петрова Анастасия Р3119 - 100%