

Modelación Computacional de Sistemas Electromagnéticos

Prof. Víctor Francisco Robledo Rella

Prof. Martín Molina Espinosa

Entrega 3: Frenado magnético

Equipo 5

Manuel Hernandez A01652985

Iñigo Zepeda Ceballos A01023684

Daniel Fuentes Jiménez A01422590

Alan Estiel Aguirre Mohar A01657644

Samantha Barrón Martínez A01652135

11 de Junio de 2020

Introducción

Para la entrega final del reto utilizaremos los conocimientos aprendidos en clase, tanto computacionales como de las leyes de la física para poder resolver un escenario en el cual está involucrado el frenado magnético de un dipolo magnético el cual está cayendo a través de un tubo conductor hecho de cobre. En este caso, el material del que está hecho es de cobre. Este dato será tomado en cuenta para generar nuestra simulación.

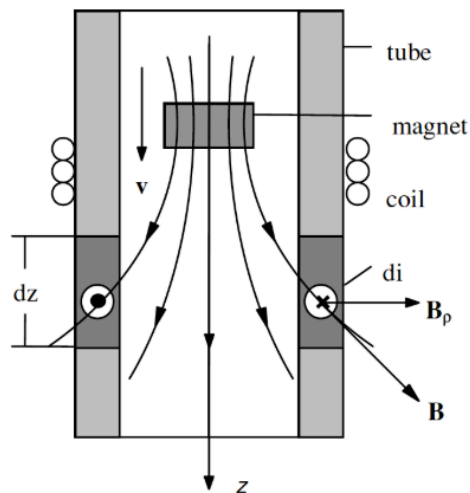


Imagen adaptada de Donoso et al. 2009, Eur. J. Phys. 30, pp. 855-869

Para solucionar este problema se utilizarán ecuaciones relacionadas con la Ley de Faraday y la Ley de Lenz las cuales están involucrada con las corrientes de Eddy en situaciones donde hay cambios en el flujo magnético en el espacio y en el tiempo.

Desarrollo

Para la solución tomaremos en cuenta un imán de masa m (kg) y con un momento dipolar μ ($A \cdot m^2$). El imán va cayendo dentro de un tubo con un radio medio a , tiene un espesor e y una resistividad eléctrica ρ_e (Ωm).

También tomaremos en cuenta que la fuerza magnética de frenado total como F_{mag} , esta la podemos obtener al sumar las dF_{mag} (contribuciones infinitesimales) y la altura diferencial dz la cual es la que recorre el imán mientras va cayendo dentro del tubo de cobre.

Le fuerza disipativa del imán mientras va cayendo está dada por $F_{mag} = -kv$ lo cual ocasiona que la velocidad terminal del imán se alcance casi inmediatamente.

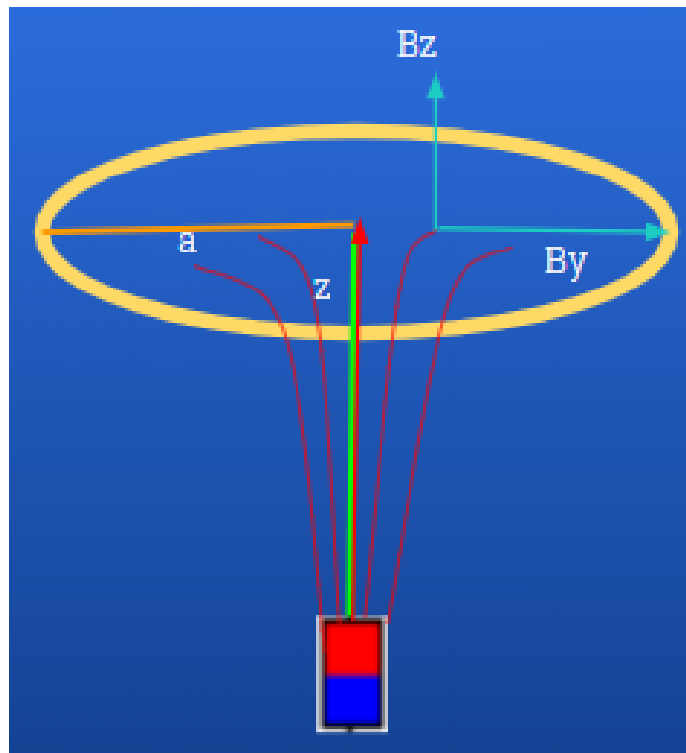
--Componentes del campo magnético z y y con ley de Biot-Savart :

En este paso, tomaremos en cuenta la ley de Biot-Savart para encontrar las componentes y & z del campo magnético.

$$B_y = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \left(\frac{3yz}{r^2} \right)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right)$$

Utilizando el teorema de Pitágoras, encontramos que el valor de r está dado por $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ para la geometría presentada.



Dado que el plano de la espira es perpendicular al eje **z**, el flujo de la componente **y** del campo es nulo. Mientras que el componente **Bz** se expresa de la siguiente forma.

$$B_z = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} (2) = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r^3}$$

Por lo tanto el flujo del campo producido por el imán a través de una espira de radio **a** : $\Phi_b = \int_0^a B_z dA$, donde **dA** es el elemento diferencial de la superficie.

Al evaluar nuestra ecuación con la geometría de nuestro sistema y los valores obtenidos anteriormente, obtenemos

$$\Phi_b = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Posteriormente utilizando la ley de Faraday, calculamos la Fem inducida en nuestro sistema

$$\mathcal{E}_{\text{inducida}} = -N \frac{d\Phi_b}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{\text{inducida}} = \frac{3}{2} \mu_0 a^2 \frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} * v$$

Con esta ecuación calculamos la fuerza magnética sobre la espira

$$F = (6.940 \times 10^{-14}) \frac{e * \mu^2}{a^4 P_e} * v$$

Esta es la ecuación final, que fue insertada en el programa Matlab. Y a la cual le agregamos los valor que se mencionan en la siguiente etapa del proyecto.

Al haber terminado de deducir las ecuaciones que dan lugar a la Fuerza magnética podemos obtener una ecuación de movimiento a partir de la segunda ley de Newton:

$$+ \downarrow \sum F_z = ma_z,$$

$$+ \downarrow mg - kv = ma,$$

$$+ \downarrow m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - k \frac{dz}{dt}$$

$$+ \downarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = g - \left(\frac{k}{m} \right) \frac{dz}{dt}$$

Resultados y gráficas

Para poder crear la simulación de un imán cayendo verticalmente dentro de un cilindro largo conductor, utilizamos los siguientes valores. Estos pueden ser cambiados en cualquier momento con el propósito de observar otro comportamiento físico.

$m=0.1$; masa en kg

$m_dipolar=5$; momento dipolar en Am^2

$a=0.02$; radio en metros

$esp=0.001$; espesor del tubo

$rE=1.7e-8$; resistividad electrica en $ohm \cdot m$

$vi=10$; velocidad inicial en m/s

$ti=0$; tiempo inicial en s

$tf=3$; tiempo final en s

$zi=0$; posición inicial en m

$h=0.01$; tamaño de los intervalos

Justificación de los valores anteriores

Los valores mencionados anteriormente fueron elegidos por las siguientes razones. Se eligió el valor de la masa como 100 grs, puesto que un imán no tiene tanta masa. Los momentos dipolares son la fuerza que ejerce el imán sobre el tubo. Esto produce un campo magnético dipolar. Por lo general, los momentos dipolares no son muy grandes, por lo que se tomó como ejemplo base el que tuviera un valor de 5.

Se decidió darle un valor al radio, de 2 cm, debido a que nuestro sistema no puede ser de gran tamaño. De igual manera, el espesor fue elegido considerando que los tubos de metal tiene un espesor de entre 0.5 a 50 mm. En nuestro caso elegimos que tuviera 0.001m de espesor.

Para poder observar la trayectoria completa, se eligió el tiempo final = 3s. La $zi = 0$ puesto que a partir de ese punto se va a calcular las ecuaciones de nuestro sistema. Finalmente, utilizamos el tamaño de los intervalos = 0.01

Utilizamos la resistividad del cobre, la cual es de $1.7 \times 10^{-8} (\Omega \cdot m)$.

Solución en código, posteriormente usado para la app

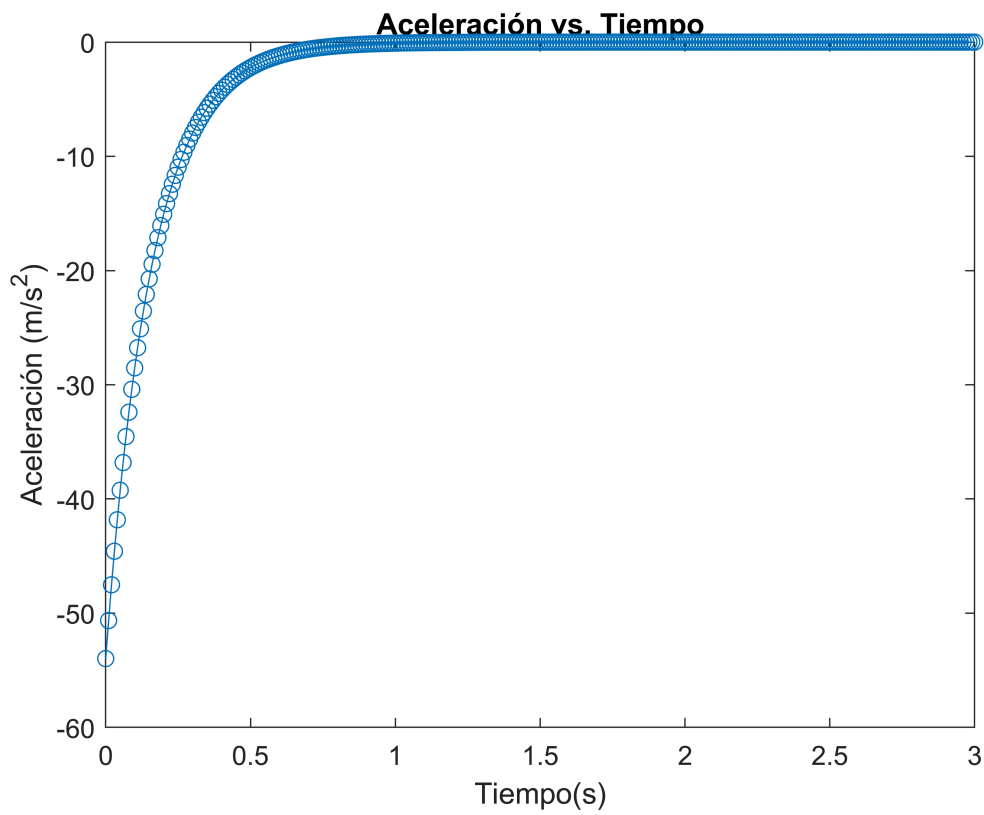
```
close all;
clear;
clc;
syms z(t);
m=0.1; %masa en kg
mdipolar=5; %momento dipolar en Am^2
a=0.02; %radio en metros
esp=0.001; %espesor
rE=1.7e-8; %Resistividad electrica en ohm*m
vi=10; %velocidad inicial en m/s
ti=0;
tf=3;
zi=0;
h=0.01;%tamaño de los intervalos
g = 9.81;% aceleracion de la gravedad
N=(tf/h)+1;%número de intervalos de acuerdo a la h
k = 6.940e-14 * ((esp*mdipolar^2)/(a^4*rE)); % ecuación de la fuerza magnética disipativa

ode = diff(z,t,2) == g - (k/m)*diff(z,t);%método ode y la ecuación diferencial a resolver
[V] = odeToVectorField(ode);
%Función de matlab que establece un sistema de ecuaciones para resolver la diferencial

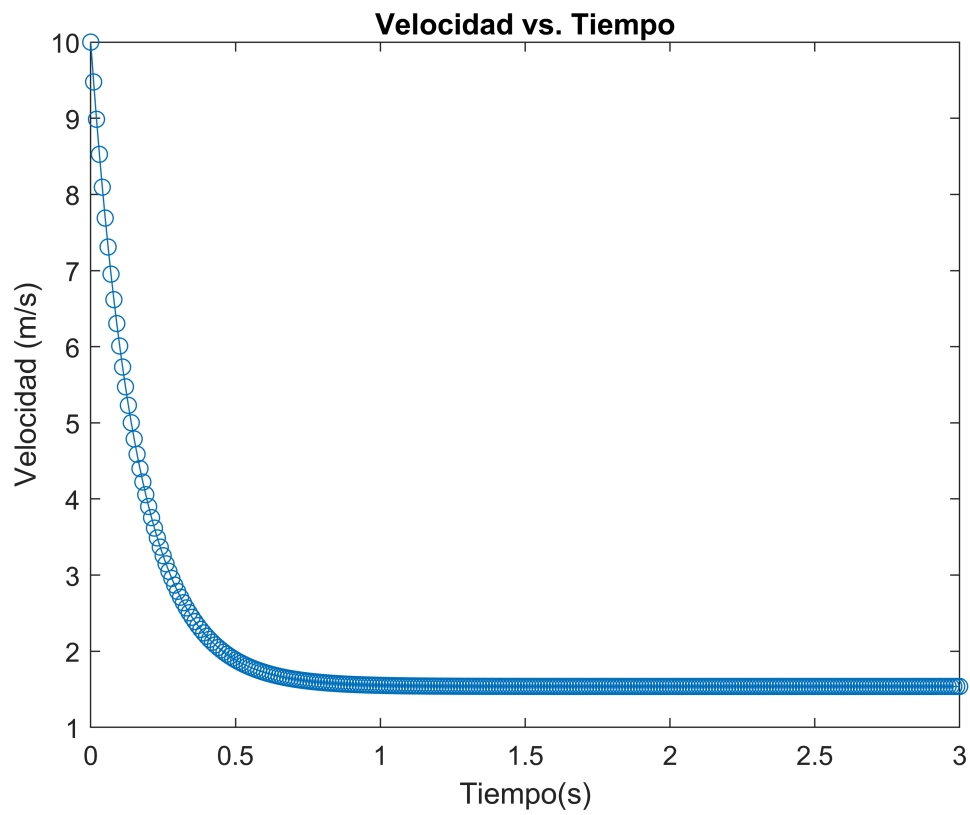
M = matlabFunction(V,'vars', {'t','Y'}); %Convierte la expresión simbólica V en una función
% MATLAB en el controlador M
sol = ode45(M,[0 tf],[ti vi]);%Se resuelve ode45
z = linspace(0,tf,N);% Crea un vector con el tamaño de los intervalos introducidos
distancia = deval(sol,z,1); %distancia es igual al priemer componente
velocidad = deval(sol,z,2); %velocidad es igual al segundo componente

aceleracion= g- (k/m)*(velocidad);%Sustituir derivadas en formula

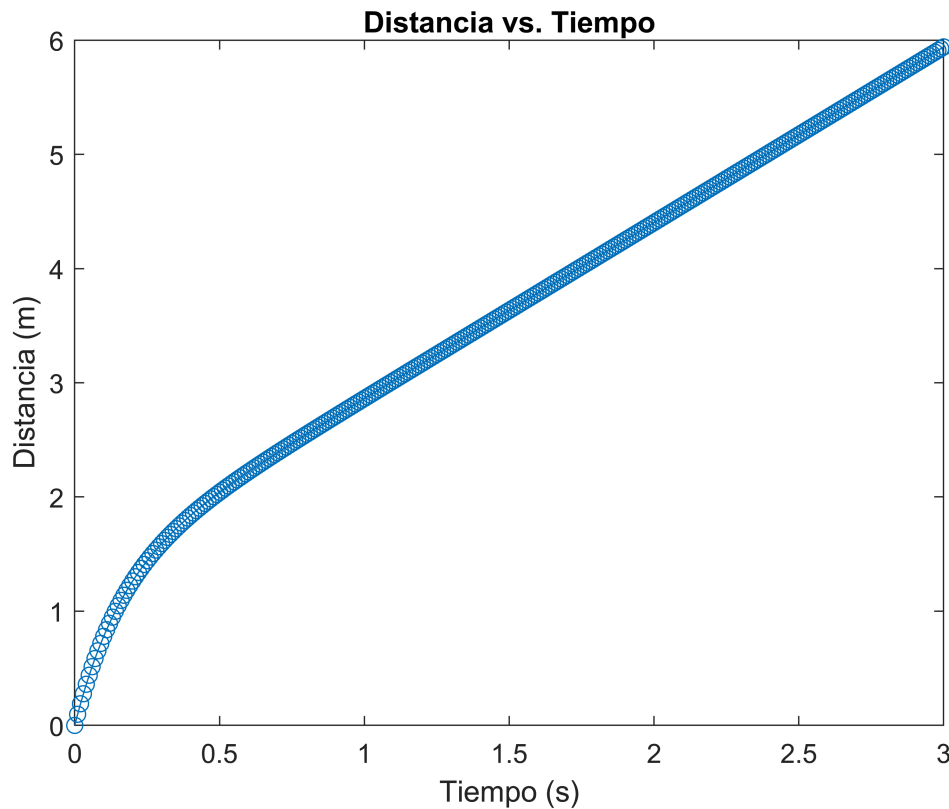
% Aceleración vs tiempo
figure("name", "Aceleración (m/s2) en el tiempo (s)");
plot(z,aceleracion,'-o');
title("Aceleración vs. Tiempo")
xlabel('Tiempo(s)')
ylabel('Aceleración (m/s^2)')
```



```
% Velocidad vs tiempo
figure("name", "Velocidad (m/s) en el tiempo (s)");
plot(z, velocidad, '-o');
title("Velocidad vs. Tiempo")
xlabel('Tiempo(s)')
ylabel('Velocidad (m/s)')
```



```
% Distancia vs tiempo
figure("name", "Distancia (m) en el tiempo (s)");
plot(z,distancia,'-o');
hold on;
title("Distancia vs. Tiempo")
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Distancia (m)')
```



```
%punto 6
%solamente es válido si la velocidad inicial es igual a 0, debido a que en
%las ecuaciones de la solución analítica no se toma en cuenta la velocidad
%inicial
%solución a velocidad terminal analítica
if vi==0
    vt= (m*g)/k;
    %solución a distancia analítica
    defc=m/k;
    teval = (z(2));
    %Tiempo en el que se evaluara la resolución analítica para compararla con la numérica

    posicion= vt*teval+ vt*defc*exp(-teval/defc)-vt*defc;
    %ecuación de la solución analítica de posición

    err = abs((posicion*100/distancia(2))-100);%calculamos el error
    disp ("error actual: " + err);
    while err > 0.0001%debido a la exactitud del método el error es más pequeño
        h = h - (h/2);%Disminución de la h
        N=(tf/h)+1;%número de intervalos de acuerdo a la h
        z = linspace(0,tf,N);% Crea un vector con el tamaño de los intervalos introducidos
        distancia = deval(sol,z,1); %distancia es igual al primer componente
        teval = (z(2));
        %Tiempo en el que se evaluara la resolución analítica para compararla con la numérica

        posicion= vt*teval+ vt*defc*exp(-teval/defc)-vt*defc;
```

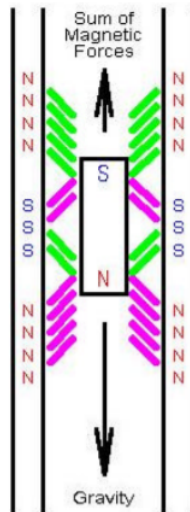

%ecuacion de la solucion analítica de posicion

```
err = abs((posicion*100/distancia(2))-100);%calculamos el error
end
disp ("h sugerida: " + h);
disp ("error con h sugerida: " + err);
figure("name", "Distancia (m) en el tiempo (s)");
plot(z,distancia,'-o');
hold on;
title("Distancia vs. Tiempo con h actualizada")
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Distancia (m)')
else
    disp("Encontrar la mejor h sólo es posible si la velocidad inicial es igual a 0")
end
```

Encontrar la mejor h sólo es posible si la velocidad inicial es igual a 0

Análisis de resultados

Los resultados obtenidos se deben a que consideramos que el tubo es infinito. Desde las deducciones de las fórmulas esto es una parte fundamental. Si consideramos que el tubo no es finito nuestras ecuaciones terminarían dependiendo además de la posición en z ya que la suma de las fuerzas magnéticas no sería la misma para el polo positivo que el negativo más que justamente a la mitad del tubo. En cualquier otra posición no estarían en equilibrio. La imagen siguiente muestra lo que ocurre cuando el imán está en un tubo infinito.



Conclusiones

A todas las personas les gustan los parques de diversiones y sus atracciones, y debemos agradecerse a los ingenieros que hacen estos juegos tan emocionante y seguros, las leyes de la física no son solo para aprenderlas si no también para aplicarlas en situaciones de la vida real, en este caso aprendimos acerca de las leyes de Biot Savart, Faraday, corrientes de Eddy, y demás. Al realizar el reto no dimos cuenta de la importancia de conocer las leyes de la física y aplicarlas para cuidar la vida las personas, como en este caso las aplicamos para crear una aplicación computacional que simula la desaceleración por frenado magnético de un juego mecánico de caída libre para así poder asegurarnos de que el juego cuenta con todas las medidas necesarias y que el mecanismo va a funcionar adecuadamente.

Referencias

Magnetismo. (2017, April). Retrieved June 2020, from <https://fisica.cab.cnea.gov.ar/resonancias/images/stories/guia.pdf>

Freno magnético. (n.d.). Retrieved June 2020, from https://www.ucm.es/data/cont/docs/76-2013-07-11-25_Magnetic_brake.pdf

sc.ehu. (2020). Movimiento de un imán en un tubo metálico vertical. Retrieved June 2020, from <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/inducccion/foucault1/foucault1.htm>