Entrelazamiento sistema-tiempo en un modelo discreto de evolución cuántica.

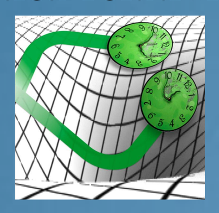
A. Boette, R. Rossignoli, N. Gigena, M. Cerezo
Dto. Física IFLP, FCE, Universidad Nacional de La Plata

Motivaciones:

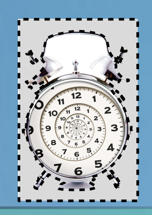
Tiempo

parámetro externo clásico

Conexión cuántica-relatividad



Descripción cuántica del tiempo $\Longrightarrow$ Información cuántica decribir evolución



Formalismo:

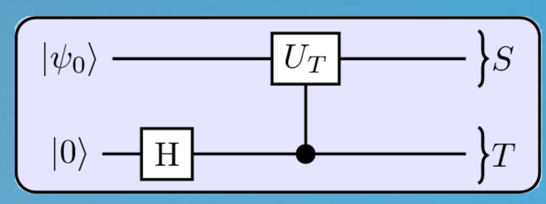
Estado Historia: $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=0}^{N-1}|\psi_t\rangle|t\rangle$

Base ortonormal de T
$\{|t\rangle,\ t=0,\dots,N-1\}$

$|\psi_t\rangle = U_t|\psi_0\rangle,\quad t=0,\dots,N-1$

Estados puros arbitrarios de S
$\{|\psi_t\rangle,\ t=0,\dots,N-1\}$

Se puede generar con el circuito:



recuperar el estado al tiempo t:

$$|\psi_t\rangle \propto \langle t|\Psi\rangle$$

Autoestado "estático" del super-operador:

$$\mathcal{U} = \sum_{t=1}^{N} U_{t,t-1}\otimes|t\rangle\langle t-1|$$

con condiciones cíclicas
$\mathcal{U}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$
(para cualquier $|\Psi_0\rangle$)

invariante frente a traslaciones $S+T$

Los restantes autoestados de $\mathcal{U}$ son de la forma

$$|\Psi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=0}^{N-1} e^{i2\pi kt/N}|\psi_t\rangle|t\rangle \text{ con } k \text{ entero}$$

Representa la evolución asociada a operadores $U_t^k = e^{i2\pi kt/N}U_t$

$$\mathcal{U}|\Psi_k\rangle = e^{-i2\pi k/N}|\Psi_k\rangle\,,\quad k=0,\dots,N-1$$

Se puede escribir, para U_t general $\quad \mathcal{U} = \exp[-i\mathcal{J}]$

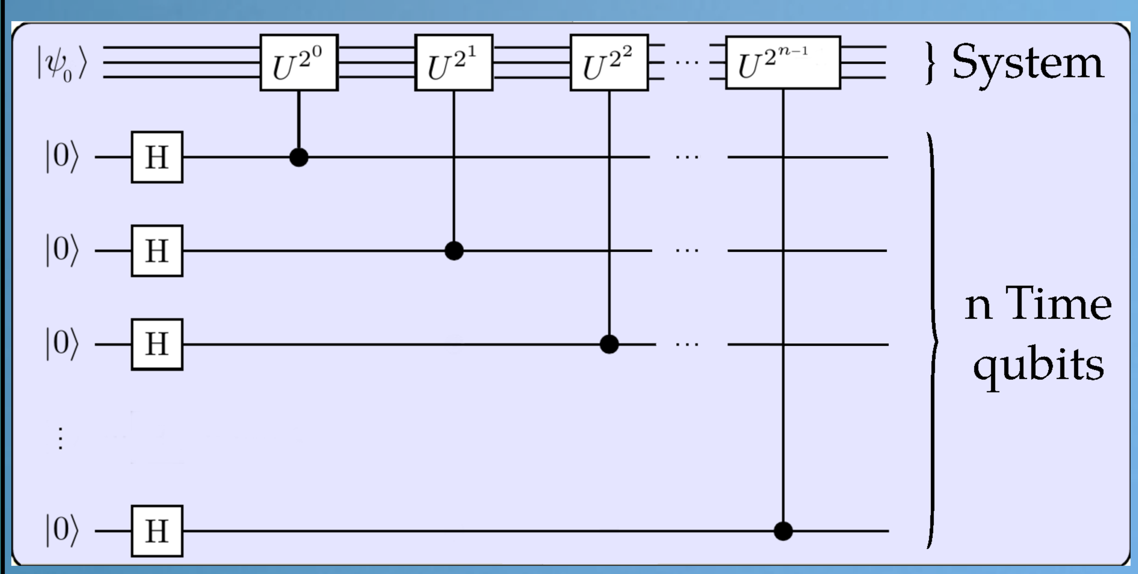
Ecuación de Wheeler-DeWitt discreta:
$\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0$

$\mathcal{J}$ hermíticio y satisface
$\mathcal{J}|\Psi_k\rangle = 2\pi\frac{k}{N}|\Psi_k\rangle$
para $k=0,\dots,N-1$.

Operador de Evolución Constante

$$U_{t,t-1} = U\ \forall\ t \Longrightarrow U_t = (U)^t = \exp[-iHt] \qquad N=2^n$$
$$t=0,\dots,N-1$$

Se puede generar el estado historia por el circuito:



n compuertas de control
$U^t|\psi_0\rangle = \prod_{j=1}^{n} U^{t_j 2^{j-1}}|\psi_0\rangle$

n compuertas Hadamard

$$|0\rangle_T \equiv \otimes_{j=1}^{n}|0_j\rangle \to \otimes_{j=1}^{n}\frac{|0_j\rangle+|1_j\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=0}^{N-1}|t\rangle$$

Una medida en los qubits de tiempo con resultado t hace colapsar a S al estado: $\quad |\psi_t\rangle = e^{-iHt}|\psi_0\rangle$

Entrelazamiento sistema-tiempo

- Cuantificar la evolución distinguible de un estado puro, siendo τ_m el tiempo mínimo o número de pasos $\quad \tau_m = 2^{E(S,T)} - 1$

Descomposición de Schmidt

$$|\Psi\rangle = \sum_k \sqrt{p_k}|k\rangle_S|k\rangle_T \quad \rho_{S(T)} = \mathrm{Tr}_{T(S)}|\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_k p_k|k\rangle_{S(T)}$$
$$E(S,T) = S(\rho_S) = S(\rho_T) = -\sum_k p_k\log_2 p_k$$

- Estado estacionario
$|\Psi\rangle = |\psi_0\rangle(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_t e^{i\gamma_t}|t\rangle)$ $\Longrightarrow$ $E(S,T)=0 \Longrightarrow \tau_m = 0$

- N estados $|\psi_t\rangle$ ortogonales
$|\Psi\rangle$ es *máximamente entrelazado* $\Longrightarrow$ $E(S,T) = E_{\max}(S,T) = \log_2 N$
$\tau_m = N-1$

Relación con la distribución de energía

En el caso de evolución constante: $|\psi_0\rangle = \sum_k c_k|k\rangle$ con $H|k\rangle = E_k|k\rangle$ (autoestados)

$$|\psi_t\rangle = \sum_k c_k e^{-iE_kt}|k\rangle \Longrightarrow |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k,t} c_k e^{-iE_kt}|k\rangle|t\rangle$$
$$= \sum_k c_k|k\rangle|\tilde{k}\rangle_T$$

Para el caso cíclico $\quad U^N = I$
$E_k = 2\pi k/N,\ k=0,\dots,N-1$

Es la *Descomposición de Schmidt* $\quad p_k = |c_k|^2$

En general $\quad E(S,T) \leq -\sum_k |c_k|^2\log_2|c_k|^2 \qquad \{|c_k|^2\}\prec\{p_k\}$

Para cualquier forma entrópica $\quad E_f(S,T) = \sum_k f(p_k) \leq \sum_k f(|c_k|^2)$

El entrelazamiento sistema-tiempo generado por *cualquier* Hamiltoniano diagonal en $|k\rangle$ está acotado por la entropía de la distribución de estos autoestados de H

El **máximo** para una dada distribución $\{|c_k|^2\}$

evolución cíclica
espectro equiespaciado
$E_k = 2\pi k/N \in [0,2\pi]$

Relaciones de incerteza energía-tiempo

El estado inicial equiespaciado se expresar en una base ortogonal

$$|\psi_0\rangle = \sum_{l=0}^{N}\tilde{c}_l|\tilde{l}\rangle_S\,,\quad |\tilde{l}\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k e^{i2\pi kl/N}|k\rangle$$

Transformados por Fourier
$\tilde{c}_l = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k e^{-i2\pi k/N}c_k$

$$|\Psi\rangle = \sum_{l,t}\tilde{c}_l|\widetilde{l-t}\rangle_S|t\rangle = \sum_l|\tilde{l}\rangle_S(\sum_t\tilde{c}_t|t-l\rangle)$$

determinan la distribución de $|t\rangle$ para cada $|\tilde{l}\rangle_S$

$$E(S,T) + \tilde{E}(S,T) \geq \log_2 N$$

Localizado en energía
$|c_k| = \delta_{kk'}$
$E(S,T) = 0$

$\Longleftrightarrow$

Máxima incerteza temporal
$|\tilde{c}_l| = \frac{1}{\sqrt{N}}$,
$\tilde{E}(S,T) = \log_2 N$

$n(\{c_k\})\,n(\{\tilde{c}_l\}) \geq N$

$n(\{\alpha_k\})$ número de α_k no nulos

Ejemplos:

El reloj qubit

$$|\Psi\rangle = (|\psi_0\rangle|0\rangle + |\psi_1\rangle|1\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{p_+}|++\rangle + \sqrt{p_-}|--$$
$$p_\pm = (1\pm|\langle\psi_0|\psi_1\rangle|)/2$$
$$E_2(S,T) = 4p_+p_- = 1 - |\langle\psi_0|\psi_1\rangle|^2$$

$$E_2(S,T) = S_2(\rho_T) = S_2(\rho_S) = 2(1-\mathrm{Tr}\,\rho_S^2)$$

S=A+B dos qubits

$$\rho_{Bt} = p|\psi_t^0\rangle\langle\psi_t^0| + q|\psi_t^1\rangle\langle\psi_t^1|\,,\quad t=0,1$$
$$|\Psi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_0^j\rangle|0\rangle + |\psi_1^j\rangle|1\rangle)$$

Para un estado puro *B+T*

$$E_2(B,T) = C^2(B,T) = 1 - F^2(\rho_{B0},\rho_{B1})$$

Fidelidad

Límite contínuo

S evoluciona de
$|\psi_0\rangle = |0\rangle \to |\psi_f\rangle = \cos\phi|0\rangle + \sin\phi|1\rangle$
en *N-1* pasos

$$|\psi_t\rangle = \cos(\tfrac{\phi t}{N-1})|0\rangle + \sin(\tfrac{\phi t}{N-1})|1\rangle$$

$$E_2(S,T_N) = 1 - \frac{\sin^2(\frac{N\phi}{N-1})}{N^2\sin^2(\frac{\phi}{N-1})}$$

Disminuye pero *permanece finito*

$$E_2(S,T_\infty) = 1 - \frac{\sin^2\phi}{\phi^2}$$

Conclusiones

Modelo discreto de evolución reloj entrelazado con el sistema

- Satisface — Ecuación de Wheeler-DeWitt discreta: $\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0$
- $U_{t,t-1} = U\ \forall\ t$ — implementar 2^n tiempos, $O(n)$ qubits y control gates
- Dispersión energía $|\psi_0\rangle$ / Incerteza energía-tiempo
- Límite continuo $E_2(S,T_\infty)$ *Permanece finito*

qubit clock="building block" discrete-time quantum evolution

Perspectivas

Definición de tiempo propio descomposición de Schmidt

Interacción entre relojes

Modelo simple de espacio-tiempo discreto emergente

A. Boette, R. Rossignoli, N. Gigena, and M. Cerezo, Phys. Rev. A 93, 062127 (2016).