Introducción a al Arquitectura de Computadoras Cuánticas

Práctica III: (Curso 2025)

Verificar en el caso de ser posible las cuentas con Mathematica, Jupyter notebook o algún software similar.

I. Traza Parcial, Entrelazamiento y Medidas

1) Hallar el estado reducido del subsistema de los primeros m qubits y evaluar la entropía de entrelazamiento de la correspondiente partición $(m, n-m)$, con $1 \le m \le n-1$, para los estados siguientes:

$$|\Psi\rangle = (|0\dots 0\rangle + |1\dots 1\rangle)/\sqrt{2}$$

$$|\Phi\rangle = (|10\dots 0\rangle + |010\dots\rangle + \dots |0\dots 01\rangle)/\sqrt{n}$$

II. **Estados de dos qubits y traspuesta parcial.**

1) A partir de la forma general de un estado de dos qubits

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}[I\otimes I + \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij}(r_i^A\,\sigma_i\otimes I + r_i^B\, I\otimes\sigma_i) + J_{ij}\sigma_i\otimes\sigma_j]$$

donde σ_i, $i = x, y, z$, son las matrices de Pauli de cada qubit,

a) expresar r_i^A, r_i^B y J_{ij} en términos de valores medios de observables del sistema.

b) Indicar si es siempre posible encontrar ejes locales tales que la matriz de elementos J_{ij} es diagonal.

c) Hallar las matrices densidad reducidas $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\,\rho_{AB}$, $\rho_B = \mathrm{Tr}_A\,\rho_{AB}$.

d) Hallar la traspuesta parcial respecto de B en esta representación.

e) Expresar en la forma anterior el estado puro $\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, para

i) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ y ii) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$.

2) Para $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, considerar el estado

$$\rho_{AB} = x|\Psi\rangle\langle\Psi| + (1-x)I\otimes I/4$$

a) Indicar para qué valores de x es ρ_{AB} un estado físico.

b) Indicar para qué valores de x es ρ_{AB} un estado puro.

c) Indicar para qué valores de x se viola la desigualdad de Bell $|\mathrm{Tr}\rho_{AB}O| \le 2$, con $\hat{O} = \sigma_x\otimes\sigma_{x'} + \sigma_z\otimes\sigma_{z'} + \sigma_x\otimes\sigma_{z'} - \sigma_z\otimes\sigma_{x'}$ el observable CHSH descripto en clase.

d) Indicar para qué valores de x es ρ_{AB} entrelazado.

I. **Compuertas Lógicas Cuánticas (2^a parte)**

1) Escribir explícitamente el operador de rotación de un qubit alrededor de un eje $\boldsymbol{n}$, $R_{\boldsymbol{n}}(\theta) = \exp[-i\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2]$, y verificar que una transformación unitaria arbitraria de un qubit puede escribirse como $U = e^{i\alpha}R_{\vec{n}}(\theta)$.

2) Verificar que $X = iR_x(\pi)$, $Y = iR_y(\pi)$, $Z = iR_z(\pi)$, $H = iR_{\boldsymbol{n}}(\pi)$, con $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, y que por lo tanto $XZX = -Z$, $XYX = -Y$, $HXH = Z$, $HZH = X$.
3) Determinar los tiempos t y el Hamiltoniano de dos qubits tales que el operador evolución $U(t) = \exp[-iHt/\hbar]$ coincida con $R_{\boldsymbol{n}}(\theta) \otimes R_{\boldsymbol{m}}(\phi)$.

4) Determinar un Hamiltoniano de dos qubits H y un tiempo t tal que $U = \exp[-iHt/\hbar]$ sea el operador QCnot usual (U_X).