אלגברה ב׳
תרגול 5 – סכומים ישרים ותת־מרחבים שמורים

אלעד צורני

25 באוקטובר 2020

מבוא

כעת לאחר שהשתכנענו בשימושיות של צורת ז׳ורדן, נעבור לשלב של פיתוח הכלים לקראת הוכחת משפט ז׳ורדן. נתחיל בדיון בסכומים ישרים ותת־מרחבים שמורים, אשר הרעיון מאחוריהם הוא הבנה של אופרטור לינארי על מרחב וקטורי באמצעות הבנה של הפעולה שלו על אוסף תת־מרחבים שמרכיבים אותו.

תזכורת

הגדרה 1.1 (סכום ישר של תת־מרחבים). יהי V מרחב וקטורי ויהיו $U, W \leq V$ תת־מרחבים. נאמר שהסכום $U + W$ הוא **ישר** ונסמנו $U \oplus W$ אם כל וקטור ב־$U + W$ ניתן להצגה כסכום $u + w$ בצורה יחידה עבור $u \in U, w \in W$.

הערה 1.2. ראינו באלגברה א׳ שהסכום $U + W$ ישר אם ורק אם $\dim (U \cap W) = 0$, אם ורק אם $\dim (U + W) = \dim (U) + \dim (W)$.

הגדרה 1.3 (סכום ישר של מרחבים וקטוריים). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. נגדיר את **הסכום הישר** שלהם $V \oplus W$ על ידי

$$V \oplus W := \left\{ v + w \;\middle|\; {v \in V \atop w \in W} \right\}$$

עם פעולת החיבור

$$(v + w) + (v' + w') = (v + v') + (w + w') \,.$$

הערה 1.4. כאשר V, W תת־מרחבים של אותו מרחב וקטורי, ומתקיים $V \cap W = \{0\}$, שתי ההגדרות של הסכום הישר מסכימות.

הגדרה 1.5 (תת־מרחב שמור). יהי V מרחב וקטורי ויהי $T \colon V \to V$ אופרטור לינארי. נאמר שתת־מרחב $W \leq V$ הוא T**־שמור**, או T**־אינווריאנטי**, אם $T(w) \in W$ לכל $w \in W$.
במקרה זה נגדיר גם $T|_W \colon W \to W$ על ידי $T|_W (w) = T(w)$.

הגדרה 1.6. יהי W מרחב וקטורי ויהיו $U, V \leq W$ כך שהסכום $U \oplus V$ ישר. יהיו $T \colon U \to W'$ ו־$S \colon V \to W'$ העתקות לינאריות. נגדיר את **הסכום הישר של** S, T על ידי

$$\begin{aligned} T \oplus S \colon U \oplus V &\to W' \\ u + v &\mapsto T(u) + S(v) \end{aligned} \,.$$

תרגילים

תרגיל 1. מצאו דוגמא למרחב וקטורי V, אופרטור לינארי $T \colon V \to V$ ותת־מרחב T־שמור W כך של־W אין משלים ישר T־שמור.

פתרון. נשים לב כי תת־מרחב ממימד 1 הוא T־שמור אם ורק אם הוא נפרש על ידי וקטור עצמי של T. אכן, אם $T(v) \in \operatorname{Span}\{v\}$ אז $T(v) = \alpha v$ עבור $\alpha \in \mathbb{F}$.
נסתכל על ההעתקה

$$T \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

המוגדרת על ידי $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y & 0 \end{pmatrix}$ ומיוצגת בבסיס הסטנדרטי על ידי $J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. אז $W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ תת־מרחב שמור של T.

נניח כי U משלים ישר T־שמור של W ויהי $u \in U$ שונה מאפס. נכתוב $u = \begin{pmatrix} {}_1u \\ {}_2u \end{pmatrix}$ כאשר $u_2 \neq 0$ כי אחרת $U \cap W \neq \{0\}$. נקבל

$$Tu = \begin{pmatrix} {}_2u \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

אבל גם $Tu \in U$ כי U מרחב T־שמור. לכן $Tu = 0$ ולכן $u_2 = 0$, בסתירה להנחה.
לכן אין ל־W משלים T־שמור.

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי, B בסיס ל־V ו־$W \leq V$ תת־מרחב של V. הוכיחו כי ל־W קיים משלים ישר הנפרש על ידי איברים של B.

פתרון. נסמן $k := \dim W$. נבנה את המשלים הישר באופן אינדוקטיבי. נתחיל בלמה.

למה 1.7. *לכל תת־מרחב $V \subsetneq U$ קיים $b \in B \setminus U$.*

הוכחה. אחרת נקבל $B \subseteq U$ ולכן $V = \operatorname{Span}(B) \subseteq U$ בסתירה להנחה. ∎

כעת, ניתן לבחור $b_1 \in B \setminus W$. לאחר מכן ניתן לבחור $b_2 \in B \setminus W + \operatorname{Span}\{b_1\}$ וכן הלאה, כאשר בשלב ה־i נבחר $b_i \in B \setminus (W + \operatorname{Span}\{b_1, \ldots, b_{i-1}\})$. לבסוף נמצא $n-k$ וקטורים $b_1, \ldots, b_{n-k} \in B$ עבורם $V = W + \operatorname{Span}\{b_1, \ldots, b_{n-k}\}$.
נסמן $U := \operatorname{Span}\{b_1, \ldots, b_{n-k}\}$ ויהי B' בסיס ל־W. כיוון שכל b_i בלתי־תלוי באיברי B' נקבל כי כל $v = \sum_{i \in [n-k]} \alpha_i b_i$ גם בלתי־תלוי באיברי B', ולכן $U \cap W = \{0\}$.
לכן $U + W$ סכום ישר.

תרגיל 3. מצאו את כל תת־המרחבים השמורים של המטריצות הבאות.

1.

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$B = J_3(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון. אם W תת־מרחב של V עם בסיס $(w_1, \ldots, w_k)$, יש מהתרגיל הקודם משלים ישר U עם בסיס $(v_1, \ldots, v_{n-k})$.
אז $B := (w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_{n-k})$ בסיס ל־V ו־W הוא T־שמור אם ורק אם

$$[T]_B = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

עבור מטריצות $X \in \mathbb{F}^{k \times k}, Y \in \mathbb{F}^{k \times n}$ ו־$Z \in \mathbb{F}^{(n-k) \times (n-k)}$.
כפי שראינו בתרגול 2, יש בסיס של W שבו ההעתקה $T|_W$ מיוצגת כמטריצה משולשת עליונה. לכן נוכל להניח כי X משולשת עליונה על ידי בחירת בסיס מתאים.

1. נסמן

$$\begin{aligned} T_A \colon V &\to V \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

ויהי W תת־מרחב A־שמור ממימד k. מהפירוט הקודם, T_A מיוצגת בבסיס $B_W := (w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_{n-k})$ על ידי מטריצה $A' = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ כאשר $X \in \mathbb{F}^{k \times k}$ משולשת עליונה ועבור $(w_1, \ldots, w_k)$ בסיס של W.

הערכים העצמיים של $T_A|_W$ הם גם כאלה של T ולכן יכולים להיות $i, i, 1, 3$ כולל ריבויים. אם 1 או 3 ע"ע של $T_A|_W$, בהכרח W מכיל את המרחב העצמי של אותו ע"ע. אם i ע"ע מריבוי 1, W מכיל וקטור עצמי כלשהו של T_A עם ע"ע i. אם i ע"ע מריבוי 2, W בהכרח מכיל את כל המרחב העצמי של i, כיוון שאחרת נבחר את B' כך ש־v_j כלשהו יהיה ו"ע של i, ונקבל כי i ע"ע של A' מריבוי לפחות 3.

לסיכום, W הוא סכום של חלק מהמרחבים

$$\operatorname{Span}\{\alpha e_1 + \beta e_3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}, \quad \operatorname{Span}\{e_2\}, \quad \operatorname{Span}\{e_4\}.$$

2. כאן הע"ע היחיד האפשרי של X הוא 3, והריבוי הגיאומטרי שלו הוא 1 מפני שהוא לפחות 1 וחסום על ידי זה של B. לכן האפשרויות ל־X הן

$$.\left(3\right), \quad \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \beta \\ 0 & 3 & \gamma \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

במקרה הראשון והשלישי נקבל $W = \text{Span}\left(e_1\right)$ ו־$W = \text{Span}\left\{e_1, e_2, e_3\right\}$. במקרה השני, הוקטור הנוסף לא יכול להכיל רכיב בכיוון e_3 וחייב להכיל רכיב בכיוון e_2 ולכן נקבל $W = \text{Span}\left\{e_1, e_2\right\}$.

3. C לכסינה עם מטריצה אלכסונית $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ והמרחבים השמורים יהיו סכומים ישרים של המרחבים העצמיים של הע"ע $\pm i$.

נשים לב כי מעל $\mathbb{R}$ למטריצה אין מרחבים שמורים לא טריוויאליים, כיוון שכל מרחב כזה צריך להיות חד־מימדי ולכן להיפרש על ידי ו"ע של C, שלא קיים מעל $\mathbb{R}$.

תרגיל 4. יהי V מרחב וקטורי ממימד n ויהי $T\colon V \to V$ אופרטור לינארי. הוכיחו כי קיים בסיס B ל־V בו $[T]_B$ משולשת עליונה אם ורק אם קיימת סדרה של תת־מרחבים T־שמורים

$$.\left\{0\right\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = V$$

פתרון. יהי E הבסיס נניח כי קיים בסיס $B = \left(v_1, \ldots, v_n\right)$ כנ"ל ונגדיר $V_i = \text{Span}\left\{v_1, \ldots, v_i\right\}$ לכל $i \in [n]$. אלו אכן מרחבים T־שמורים כי

$$\begin{aligned}
\left[Tv_i\right]_B &= [T]_B \left[v_i\right]_B \\
&= \begin{pmatrix} \left([T]_B\right)_{1,i} \\ \vdots \\ \left([T]_B\right)_{n,i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left([T]_B\right)_{1,i} \\ \vdots \\ \left([T]_B\right)_{i,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון נכון כי $[T]_B$ משולשת עליונה, מה שאומר

$$.Tv_i = \sum_{j \in [i]} \left([T]_B\right)_{j,i} v_j \subseteq V_i$$

מימד המרחבים אכן גדל ב־1 בכל שלב, ולכן הם מקיימים את הדרישה.
בכיוון השני, נניח כי קיימת סדרה של תת־מרחבים T־שמורים כנ"ל. נבחר $v_i \in V_i \setminus V_{i-1}$ לכל $i \in [n]$ ונבחר $B = \left(v_1, \ldots, v_n\right)$. אז כל v_i הוא לא צירוף לינארי של קודמיו, מה שאומר ש־B בסיס. מכיוון שהמרחבים T־שמורים, מתקיים

$$\begin{pmatrix} \left([T]_B\right)_{1,i} \\ \vdots \\ \left([T]_B\right)_{n,i} \end{pmatrix} = [T]_B \left[v_i\right]_B = \left[Tv_i\right]_B = \left[\sum_{j \in [i]} \alpha_j v_j\right]_B = \sum_{j \in [i]} \alpha_j \left[v_j\right]_B$$

לכן $[T]_B$ משולשת עליונה.

הערה 1.8. ניתן להסיק תוצאה דומה עבור מטריצות משולשות תחתונות על ידי בחירה הפוכה של הבסיס B.

הערה 1.9. בתרגיל זה V הינו מרחב וקטורי מעל שדה כללי $\mathbb{F}$. שימו לב כי בתרגול 2 הוכחנו כי כל מטריצה מעל המרוכבים דומה למטריצה משולשת. לכן, אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ ו־$T\colon V \to V$ קיימים תת־מרחבים T־שמורים

$$.\left\{0\right\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = V$$

תרגיל 5. 1. תהי $A \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ ויהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ עבורם $u + iv$ ו"ע של A מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו כי $\text{Span}\left\{u, v\right\}$ הוא תת־מרחב A־שמור של $\mathbb{R}^n$.

2. הסיקו כי לכל $A \in M_n(\mathbb{R})$ קיים תת־מרחב שמור ממימד 1 או 2.

פתרון. 1. נתון כי $u+iv$ ו"ע של A עם ע"ע מרוכב λ. נשים לב שאנחנו עובדים מעל $\mathbb{C}$ ושרק ידוע שקיים ע"ע מרוכב. לכן נכתוב $\lambda = a+bi$ עבור $a,b \in \mathbb{R}$ ונקבל

$$A(u+iv) = (a+bi)(u+iv) = au - bv + i(av+bu).$$

כעת, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ונרצה להשוות מקדמים. מתקיים

$$A(u+iv) = Au + (Av)i$$

ולכן נקבל את המשוואות

$$Au = au - bv$$
$$Av = av + bu.$$

לכן $Au, Av \in \text{Span}\{u,v\}$ ולכן $\text{Span}\{u,v\}$ תת־מרחב A־שמור.

2. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. קיים ל־A ערך עצמי מרוכב כלשהו $\lambda \in \mathbb{C}$ (כיוון שלפולינום המינימלי יש שורש מרוכב). אם λ ממשי עם ו"ע v נקבל כי $\text{Span}\{v\}$ תת־מרחב A־שמור. אחרת, יש ל־λ ו"ע $u+iv$ עבור $u,v \in \mathbb{R}^n$ ונקבל מסעיף 1 כי $\text{Span}\{u,v\}$ תת־מרחב A־שמור, שהינו ממימד 1 או 2.

תרגיל 6. יהי $T\colon V \to V$ אופרטור לינארי כך שכל תת־מרחב של V הוא T־שמור. הוכיחו כי T אופרטור סקלרי.

פתרון. נשים לב כי הפעלת הנתון על מרחבים וקטוריים חד־מימדיים $W = \text{Span}\{v\}$ נותנת כי $T(v) \in W$. במקרה זה קיים $\alpha_v \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \alpha_v v$ ולכן v וקטור־עצמי של T. נניח כי יש v_1, v_2 עבורם $\alpha_{v_1} \neq \alpha_{v_2}$. אז

$$\alpha v_1 v_1 + \alpha_{v_2} v_2 = T(v_1+v_2) = \alpha_{v_1+v_2}(v_1+v_2).$$

v_1, v_2 בת"ל כי אחרת $\alpha_{v_1} = \alpha_{v_2}$, לכן נוכל להשוות מקדמים ונקבל $\alpha_{v_1} = \alpha_{v_1+v_2}$ וגם $\alpha_{v_2} = \alpha_{v_1+v_2}$. אז $\alpha_{v_1} = \alpha_{v_2}$ בסתירה.

תרגיל 7 (המימד של מרחב עצמי מוכלל). תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$. נגדיר

$$V(A,\lambda) \coloneqq \left\{ v \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N}\colon\; (A-\lambda I)^k v = 0 \right\}$$

מרחב הוקטורים שמתאפסים על ידי חזרה כלשהי של $A-\lambda I$. נקרא לו **המרחב העצמי המוכלל של** λ. הוכיחו $\dim V(A,\lambda) = r_a(\lambda)$ כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

פתרון. נראה קודם שמתקיים $V(A',\lambda) = V(A,\lambda)$ עבור $A' = P^{-1}AP$ דומה ל־A. אכן, לכל

$$v = P^{-1}u \in P^{-1}V(A,\lambda)$$

יש $k \in \mathbb{N}$ עבורו $(A-I)^k v = 0$, ואז

$$(A'-\lambda I)^k v = P^{-1}(A-\lambda I)^k Pv = P^{-1}(A-\lambda I)^k u = P^{-1}0 = 0\ .$$

לכן $P^{-1}V(A,\lambda) \subseteq V(A',\lambda)$ ועם החלפת תפקידים נקבל הכלה בכיוון ההפוך. לכן $V(A',\lambda) = V(A,\lambda)$.
כעת, A דומה למטריצה A' בצורת ז'ורדן, ומהנ"ל נוכל להניח ש־A עצמה בצורת ז'ורדן. חזקה $(A-\mu I)^k$ היא מטריצת בלוקים עם בלוקים $(J_{m_i}(\lambda_i) - \mu I)^k$. עבור $\mu \neq \lambda_i$ המטריצה $J_{m_i}(\lambda_i|) - \mu I$ הפיכה, ולכן גם כל חזקה שלה הפיכה. אחרת, נקבל בלוק $J_m(\mu) - \mu I$ ששולח את הוקטור e_j לוקטור e_{j-1} ואת e_1 לאפס. לכן מספר הוקטורים ב־$V(A,\mu)$ הוא כמספר הפעמים ש־μ מופיע על האלכסון, שהוא סכום גדלי הבלוקים עם ע"ע μ, שהוא $r_a(\lambda)$.

הערה 1.10. למעשה הפתרון מראה
$$V(A,\lambda) = \ker(A-\lambda I)^{k_\lambda}$$
כאשר k_λ גודל הבלוק המקסימלי עם ע"ע λ בצורת ז'ורדן של A.

הערה 1.11. ממשפט קיילי המילטון אנו יודעים $p_A(A) = 0$, ומהגדרת הפולינום האופייני מתקיים $\sum r_a(\lambda) = n$. לכן נקבל מהתרגיל $\sum \dim V(A,\lambda) = n$. הפולינומים $(x-\mu)^m, (x-\lambda)^k$ זרים עבור $\lambda \neq \mu$, ולכן מתרגיל בתרגול 3

$$V = \bigoplus_{\lambda} V(A,\lambda).$$

מסקנה זאת נקראת משפט הפירוק הפרימרי ונדון בה בהמשך הקורס.

תרגיל 8. יהיו T, S העתקות מתחלפות. הוכיחו כי כל מרחב עצמי של T הוא תת מרחב S־שמור.

פתרון. יהי $v \in V$ ו"ע של T עם ע"ע λ. מתקיים

$$TSv = STv = S\lambda v = \lambda Sv$$

לכן Sv שייך למרחב העצמי של T עם ע"ע λ.

תרגיל 9. הוכיחו כי אם כל מרחב עצמי של העתקה לכסינה T הוא S־שמור, אז S, T מתחלפות בכפל.

פתרון. יהי B בסיס של ו"ע של T. מספיק לבדוק $STv = TSv$ לכל $v \in B$ ואכן אם $v \in B$ עם ע"ע λ מתקיים

$$STv = \lambda Sv = TSv$$

כאשר השוויון הימני נכון כי המרחב העצמי של λ הוא S־שמור.