אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 3
מרחבים שמורים, מרחבים עצמיים מוכללים ומשפט קיילי־המילטון

תאריך הגשה: 28.4.2021

תרגיל 1. 1. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יהי $W\le V$ תת־מרחב T־שמור ויהי $U\le V$ משלים ישר של W ב־V. הראו כי $T|_W=T_{W,U}$.

2. מצאו דוגמא עבור $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$, $W\le V$ כלשהו עם משלימים ישרים $U_1,U_2\le V$, כך ש־$T_{W,U_1}\neq T_{W,U_2}$.

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יהי

$$B=(v_1,\ldots,v_n)$$

בסיס של V, יהי $k\in[n-1]$ ויהיו

$$\begin{aligned}B_1&\coloneqq(v_1,\ldots,v_k)\\ B_2&\coloneqq(v_{k+1},\ldots,v_n)\\ W&\coloneqq\operatorname{Span}B_1\\ .U&\coloneqq\operatorname{Span}B_2\end{aligned}$$

1. הראו כי W הוא T־שמור אם ורק אם $[T]_B$ מהצורה

$$[T]_B=\begin{pmatrix}[T|_W]\,B_1 & *\\ 0 & [T_{U,W}]_{B_2}\end{pmatrix}.$$

2. הראו כי U הוא T־שמור אם ורק אם $[T]_B$ מהצורה

$$[T]_B=\begin{pmatrix}[T_{W,U}]_{B_1} & 0\\ * & [T|_U]_{B_2}\end{pmatrix}.$$

תרגיל 3. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

1. הראו כי לכל $i,j\in[n]$ המקיימים $i<j$, מתקיים

$$\operatorname{Im}\left(T^i\right)\supseteq\operatorname{Im}\left(T^j\right).$$

2. יהי $k\in[n]$ עבורו $\operatorname{Im}\left(T^k\right)=\operatorname{Im}\left(T^{k+1}\right)$. הראו כי לכל $m\in\{k,k+1,\ldots,n\}$ מתקיים $\operatorname{Im}\left(T^k\right)=\operatorname{Im}\left(T^m\right)$.

תרגיל 4. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נזכיר כי משפט קיילי המילטון קובע כי $p_T(T)=0$ כאשר

$$p_T(x)\coloneqq\prod_{i\in[k]}(x-\lambda)^{r_{a,T}(\lambda)}$$

הפולינום האופייני של T וכאשר $(\lambda_i)_{i\in[k]}$ הערכים העצמיים השונים של T.

1. יהי

$$\mathbb{F}[T]\coloneqq\{p(T)\mid p\in\mathbb{F}[x]\}\le\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V).$$

הראו כי

$$\mathbb{F}[T]=\operatorname{Span}\left(I,T,\ldots,T^{n-1}\right).$$

2. מצאו דוגמא עבור $S \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה

$$\left\{I, S, \ldots, S^{n-1}\right\}$$

קבוצה בלתי־תלויה לינארית. הסיקו שבמקרה זה

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[S] = n .$$

3. נניח כי T הפיכה. הראו שמתקיים $T^{-1} \in \mathbb{F}[T]$.

4. נניח כי T הפיכה ונסמן

$$\mathbb{F}(T) \coloneqq \left\{ \sum_{i=-m}^{m} a_i T^i \;\middle|\; {\scriptstyle m \in \mathbb{N} \atop \forall i : a_i \in \mathbb{F}} \right\} \leq \text{End}_{\mathbb{F}}(V).$$

הראו כי לכל $S_1, S_2 \in \mathbb{F}[T]$ מתקיים $S_1 \circ S_2 \in \mathbb{F}[T]$ והסיקו שמתקיים $\mathbb{F}[T] = \mathbb{F}(T)$.

תרגיל 5. 1. תהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^4\right)$ שהערכים העצמיים שלה הם $3, 5, 8$. הראו כי

$$(T - 3I)^2 (T - 5I)^2 (T - 8I)^2 = 0 .$$

2. תהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הטלה ויהיו

$$m \coloneqq \dim \ker (T), \quad n \coloneqq \dim \text{Im}(T).$$

הראו כי

$$p_T(x) = x^m (x-1)^n.$$