אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 3 — סכומים ישרים, מרחבים שמורים והטלות

אלעד צורני

12 באפריל 2021

1 תת־מרחבים שמורים

1.1 חזרה

הגדרה 1.1 (תת־מרחב שמור). תהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. תת־מרחב $W \leq V$ יקרא T־שמור אם $T(W) \subseteq W$.

הגדרה 1.2 (צמצום של העתקה). יהיו $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ו־$W \leq V$ מרחב T־שמור. נגדיר את הצמצום של T ל־W על ידי

$$\begin{aligned} T|_W \colon W &\to W \\ w &\mapsto T(w) \end{aligned}.$$

הערה 1.3. הגדרנו בעבר צמצום של העתקה כללית $T \colon V_1 \to V_2$. בדרך כלל נצמצם העתקות רק לתת־מרחבים שמורים, ואז נתייחס להגדרה הנוכחית. במקרים אחרים נבהיר במיוחד את הכוונה.

הגדרה 1.4 (שרשור של בסיסים). יהיו

$$\begin{aligned} B_1 &= (v_{1,1}, \ldots, v_{1,n_1}) \\ B_2 &= (v_{2,1}, \ldots, v_{2,n_2}) \\ &\vdots \\ B_k &= (v_{k,1}, \ldots, v_{k,n_k}) \end{aligned}$$

קבוצות סדורות. נגדיר את השרשור שלהן על ידי

$$B_1 * \ldots * B_k = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,n_1}, v_{2,1} \ldots, v_{2,n_2}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,n_k}).$$

1.2 תרגילים

תרגיל 1. יהי $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי ממשי ותהי

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned}.$$

מצאו את התת־מרחבים ה־T־שמורים של $\mathbb{C}$ והסיקו כי T אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

פתרון. $\mathbb{C}, \{0\}$ תת־מרחבים T־שמורים.
נניח כי $W \leq \mathbb{C}$ מרחב T־שמור נוסף. אז $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$ ולכן יש $z_0 \in \mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ עבורו $W = \operatorname{Span}\{z_0\}$. נקבל $Tz_0 \in W$ לכן $Tz_0 = cz_0$ עבור $c \in \mathbb{R}$. אבל $cz_0 = iz_0$ גורר $c = i$ בסתירה.
תת־מרחבים T־שמורים של $\mathbb{C}$ מתאימים לוקטורים עצמיים. לכן אין ל־T וקטורים עצמיים ממשיים, ולכן אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

תרגיל 2. תהי

$$T \colon \mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^4$$

עם

$$.\left[T\right]_{E}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

מצאו בסיס B של $\mathbb{F}^{n}$ בו אין ב־$\left[T\right]_{B}$ בלוקים לא טריוויאליים.

הערה 1.5. כל מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ היא אלכסונית בלוקים עם בלוק מגודל $n\times n$, כך שאין משמעות לשאלה האם מטריצה היא אלכסונית בלוקים. יש טעם לשאול האם יש במטריצה בלוקים שאינם טריוויאליים, או האם היא אלכסונית בלוקים עם גדלים מסוימים של בלוקים.

פתרון. מתקיים

$$Te_{1}=e_{2}$$
$$.Te_{2}=e_{1}$$

יהי $B=\left(e_{1},e_{4},e_{3},e_{2}\right)$. מתקיים

$$.\left[T\right]_{B}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

להעתקה T הנ"ל יש תת־מרחבים שמורים $\operatorname{Span}\left(e_{3},e_{4}\right),\operatorname{Span}\left(e_{1},e_{2}\right)$, אבל מצאנו בסיס B בו $\left[T\right]_{B}$ אינה אלכסונית בלוקים באופן לא טריוויאלי. נרצה לתאר באופן כללי את הקשר בין מטריצות אלכסוניות בלוקים לבין תת־מרחבים שמורים.

תרגיל 3. תהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V_{1}\oplus\ldots\oplus V_{k}\right)$ ויהיו $B_{1},\ldots,B_{k}$ בסיסים עבור $V_{1},\ldots,V_{k}$ בהתאמה. יהיו $n_{i}:=\dim_{\mathbb{F}}V_{i}$ ויהי $B=B_{1}*\ldots*B_{n}$. הראו שהתנאים הבאים שקולים.

1. $\left[T\right]_{B}$ מטריצה $\left(n_{1},\ldots,n_{k}\right)$־אלכסונית בלוקים.
2. לכל $i\in\left[k\right]$ המרחב V_{i} הוא T־שמור.
3. יש העתקות $T_{i}\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V_{i}\right)$ עבורן $T=\bigoplus_{i\in\left[k\right]}T_{i}$.

פתרון. **1 גורר 2:** נניח כי $\left[T\right]_{B}$ מטריצה $\left(n_{1},\ldots,n_{k}\right)$־אלכסונית בלוקים ויהי $v\in V_{i}$. אז

$$.\left[Tv\right]_{B}=\left[T\right]_{B}\left[v\right]_{B}\in\operatorname{Span}\left\{ \left[T\right]_{B}e_{j}\mid j\in\left[n_{1}\right]\right\} \subseteq\operatorname{Span}\left\{ e_{j}\mid j\in\left[n_{1}\right]\right\}$$

מתקיים

$$\rho_{B}\left(V_{1}\right)=\mathbb{F}^{n_{1}}\times\left\{ 0\right\} \leq\mathbb{F}^{n}$$

כי $\rho_{B}|_{V_{1}}$ חד־חד ערכית ומשוויון מימדים. לכן

$$Tv=\rho_{B}^{-1}\left(\left[Tv\right]_{B}\right)\in\rho_{B}^{-1}\left(\operatorname{Span}\left\{ e_{j}\mid j\in\left[n_{1}\right]\right\} \right)=V_{1}$$

ולכן V_{1} מרחב T־שמור.

2 גורר 3: נניח כי כל V_{i} הוא T־שמור ונגדיר $T_{i}=T|_{V_{i}}\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V_{i}\right)$. מתקיים

$$.T\left(\sum_{i\in\left[k\right]}v_{i}\right)=\sum_{i\in\left[k\right]}T\left(v_{i}\right)=\sum_{i\in\left[k\right]}T_{i}\left(v_{i}\right)=\bigoplus_{i\in\left[k\right]}T_{i}\left(v\right)$$

3 גורר 1: עבור $v\in V_{i}$ מתקיים

$$T\left(v\right)=T_{i}\left(v\right)\in V_{i}$$

לכן

$$\left(\left[T\left(v\right)\right]_{B}\right)_{\ell}=0$$

לכל $\ell\notin\left[n_{1}+\ldots+n_{i-1}+1,n_{1}+\ldots+n_{i}\right]$.

הערה 1.6. בהמשך הקורס נמצא פירוק של V לסכום של תת־מרחבים T־שמורים V_{λ}' ונמצא עבורם בסיסים שלפיהם קל למצוא תת־מרחבים T־שמורים. נוכל בעזרת כך לתאר בהמשך דרך לחישוב תת־מרחבים T־שמורים.

2 הטלות

2.1 חזרה

הגדרה 2.1 (הטלה במקביל לתת־מרחב). יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו־$U, W \leq V$ עבורם $U \oplus W = V$. נגדיר את ההטלה על U במקביל ל־W להיות ההעתקה

$$\begin{aligned} P_U \colon V &\to V \\ u + w &\mapsto u \end{aligned} .$$

הערה 2.2. ההטלה P_U תלויה ב־W.

דוגמה 2.3. יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהיו

$$\begin{aligned} U &= \text{Span}\left(e_1\right) \\ W_1 &= \text{Span}\left(e_2\right) \\ W_2 &= \text{Span}\left(e_1 + e_2\right) \end{aligned}$$

ויהיו P_1, P_2 ההטלות על U במקביל ל־W_1, W_2 בהתאמה. מתקיים

$$P_1\left(e_1 + e_2\right) = e_1$$

אבל

$$P_2\left(e_1 + e_2\right) = e_1 + e_2 .$$

הגדרה 2.4 (הטלה). העתקה $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקראת הטלה אם קיימים $U, W \leq V$ עבורם $P = P_U$.

עובדה 2.5. העתקה $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ היא הטלה אם ורק אם $P^2 = P$.

2.2 תרגילים

תרגיל 4. תהי $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי $\text{Im}(P)$ תת־מרחב P־שמור וכי $P|_{\text{Im}\, P} = \text{Id}_{\text{Im}\, P}$.

פתרון. יהי $v \in \text{Im}\, P$. קיים $u \in V$ עבורו $v = Pu$. אז

$$Pv = P(Pu) = P^2 u = Pu = v \in \text{Im}\, P .$$

תרגיל 5. יהי $n \in \mathbb{N}$. מצאו משלים ישר W של $\mathbb{F}_n[x] \leq \mathbb{F}[x]$ ומצאו את ההטלה על $\mathbb{F}_n[x]$ במקביל ל־W.

פתרון. ניקח

$$W = \text{Span}\left\{x^m \mid m > n\right\} .$$

אז ההטלה לוקחת פולינום $p = \sum_{i \in [m]} a_i x^i$ לפולינום $\sum_{i \in [n]} a_i x^i$.

תרגיל 6. יהי $S \leq M_n(\mathbb{F})$ התת־מרחב של המטריצות הסימטריות. מצאו הטלה

$$P \colon M_n(\mathbb{F}) \to S .$$

פתרון. יהי $A \leq M_n(\mathbb{F})$ תת־המרחב של המטריצות האנטי־סימטריות. מטריצה סימטרית ואנטי סימטרית X מקיימת

$$-X = X^t = X$$

לכן $X = 0$. מתקיים $M_n(\mathbb{F}) = S + A$ כי אפשר לכתוב

$$X = \frac{1}{2}\left(X + X^t\right) + \frac{1}{2}\left(X - X^t\right) .$$

אז ההטלה על S במקביל ל־A היא

$$X \mapsto \frac{1}{2}\left(X + X^t\right) .$$

תרגיל 7. יהי

$$U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leq \mathbb{R}^3 .$$

מצאו משלים ישר W של U, את ההטלה P_U במקביל ל־W ומטריצה מייצגת של P.

פתרון. נשלים את $B := \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ לבסיס $C = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ של $\mathbb{R}^3$ ואז $W := \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ משלים ישר של U כי $C = B * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ומתרגיל מהתרגול הקודם.

אז

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= P\left(\left(x-\frac{y}{2}-z\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{y}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\ &= \left(x-\frac{y}{2}-z\right)P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{y}{2}P\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+zP\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\ &= \frac{y}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \end{aligned}.$$

בבסיס C נקבל

$$[P]_C = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

תרגיל 8. מצאו את כל הערכים העצמיים האפשריים של הטלה.

פתרון. יהי λ ערך עצמי של הטלה P עם וקטור עצמי v. אז

$$\lambda^2 v = P^2 v = Pv = \lambda v$$

לכן $\lambda \in \{0,1\}$.
אפשר לקחת $P = \text{Id}_V$ או $P = 0_V$ ולקבל את שתי האופציות האלו.

תרגיל 9. תהי $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי P הטלה על $U \le V$ במקביל ל־$W \le V$ אם ורק אם $U = \text{Im}\, P$ וגם $W = \ker P$.

פתרון.
- נניח כי P הטלה על U במקביל ל־W. לכל $u \in U$ מתקיים

$$P(u) = P(u+0) = u$$

לכן $\text{Im}\, P \supseteq U$. להיפך, אם $v \in \text{Im}\, P$ יש $u \in U, w \in W$ עבורם $v = P(u+w) = u \in U$ לכן $\text{Im}\, P = U$.

יהי $w \in W$. מתקיים

$$P(w) = P(0+w) = 0$$

לכן $W \subseteq \ker(P)$. להיפך, נניח כי $v \in \ker P$ ונכתוב $v = u + w$. אז

$$0 = Pv = u$$

לכן $v = w \in W$, לכן $\ker P = \text{Im}\, P$.
- נניח כי $\ker P = W$ וכי $\text{Im}\, P = U$. נניח כי $v \in U \cap W$. ראינו כי $P|_{\text{Im}\, P} = \text{Id}_{\text{Im}\, P}$ לכן $Pv = v$. אבל גם $Pv = 0$, לכן $v = 0$ ולכן U, W זרים. ממשפטי המימדים מתקיים

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}\, P + \ker P) &= \dim(\text{Im}\, P) + \dim(\ker P) - \dim(\text{Im}\, P \cap \ker P) \\ &= \dim(\text{Im}\, P) + \dim(\ker P) \\ &= V \end{aligned}.$$

לכן $V=U\oplus W$. עבור $u\in U,w\in W$ נכתוב $u=P\left(u'\right)$. אז

$$\begin{aligned}P\left(u+w\right) & =P\left(u\right)+P\left(w\right)\\ & =P\left(u\right)\\ & =u\end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון נכון כי $P|_{\mathsf{Im}\,P}=\mathsf{Id}_{\mathsf{Im}\,P}$. לכן P ההטלה על $\mathsf{Im}\,P$ בניצב ל־$\mathsf{ker}\,P$.

הערה 2.6. בכיוון השני בפתרון הראינו שעבור הטלה P מתקיים $V=\mathsf{Im}\,P\oplus\mathsf{ker}\,P$.

תרגיל 10. תהי $P\in\mathsf{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ הטלה. הראו כי P לכסינה.

פתרון. יהי B בסיס עבור $\mathsf{Im}\,P$ ויהי C בסיס עבור $\mathsf{ker}\,P$. ראינו כי $P|_{\mathsf{Im}\,P}=\mathsf{Id}$ וכי $P|_{\mathsf{ker}\,P}=0$ לכן המטריצה המייצגת של P בבסיס $B*C$ היא

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & & \cdots & & 0\\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & & 0\\ & & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & 0 & & \vdots\\ & & & & \ddots\\ 0 & & \cdots & & & 0\end{pmatrix}.$$

תרגיל 11. תהי $P\in\mathsf{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ הטלה ותהי $T\in\mathsf{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ כלשהי. הראו כי $\mathsf{ker}\,P$ הוא T־שמור אם ורק אם יש $\hat{T}\colon\mathsf{ker}\,P\to\mathsf{ker}\,P$ לינארית המקיימת

$$\hat{T}\circ P=P\circ T.$$

כלומר, כך שהדיאגרמה

$$\begin{array}{ccc}V & \xrightarrow{T} & V\\ {\scriptstyle P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P}\\ \mathsf{Im}\,P & \xrightarrow[\hat{T}]{} & \mathsf{Im}\,P\end{array}$$

מתחלפת.

פתרון.

- נניח כי W הוא T־שמור ויהי $u\in\mathsf{Im}\,P$. יש $v\in V$ עבורו $P\left(v\right)=u$, ואז $P\left(u\right)=P^{2}\left(u\right)=P\left(v\right)=u$. נגדיר

$$\hat{T}\left(u\right)=P\circ T\left(u\right).$$

יהי $v\in V$, צריך להראות שמתקיים

$$P\circ T\left(v\right)=\hat{T}\circ P\left(v\right).$$

נכתוב $v=u+w$ כאשר $u\in\mathsf{Im}\,P,w\in\mathsf{ker}\,P$. אז

$$\hat{T}\circ P\left(v\right)=\hat{T}\left(u\right)=P\circ T\left(u\right)$$

וגם

$$T\left(w\right)\in\mathsf{ker}\,P$$

לכן

$$P\circ T\left(u\right)=P\circ T\left(u\right)+P\circ T\left(w\right)=P\circ T\left(u+w\right)=P\circ T\left(v\right).$$

בסך הכל

$$\hat{T}\circ P\left(v\right)=P\circ T\left(u\right)=P\circ T\left(v\right),$$

כנדרש.

- נניח כי יש העתקה $\hat{T}$ כמתואר ויהי $w\in\mathsf{ker}\,P$. אז

$$PT\left(w\right)=\hat{T}P\left(w\right)=\hat{T}\left(0\right)=0$$

ולכן $T\left(w\right)\in\mathsf{ker}\,P$. נקבל $T\left(\mathsf{ker}\,P\right)\subseteq\mathsf{ker}\,P$.