אלגברה ב' (104168) — אביב 2021-2020
תרגול 5 — נילפוטנטיות

אלעד צורני

27 באפריל 2021

1 נילפוטנטיות

1.1 חזרה

הגדרה 1.1 (העתקה נילפוטנטית). העתקה $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקראת נילפוטנטית אם יש $k \in \mathbb{N}_+$ עבורו $T^k = 0$. ה־k המינימלי הזה נקרא אינדקס הנילפוטנטיות של T.

1.2 תרגילים

הערה 1.2. נניח לאורך התרגול כי V מרחב וקטורי סוף־מימדי.

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ ותהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נילפוטנטית מאינדקס k. הראו כי $k \leq n$.

פתרון. ראינו כי $\ker(T^k) \leq \ker(T^n)$, לכן אם $T^k = 0$ נקבל $\ker(T^k) = V \leq \ker(T^n)$ כלומר $\ker(T^n) = V$ כלומר $T^n = 0$. ממינימליות k נקבל $k \leq n$.

תרגיל 2. יהי $\mathbb{F}$ סגור אלגברית ותהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו ש־$T$ נילפוטנטית אם ורק אם הערך העצמי היחיד שלה הוא 0. מצאו דוגמא נגדית כאשר $\mathbb{F}$ אינו סגור אלגברית.

פתרון. נניח כי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נילפוטנטית. יש $k \in \mathbb{N}_+$ עבורו $T^k = 0$. יהי $v \in V$ וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ. אז $T^k v = \lambda^k v = 0$ לכן $\lambda = 0$.
נניח כי $S \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם ערך עצמי יחיד 0. כיוון ש־$\mathbb{F}$ סגור־אלגברית, יש בסיס B כך ש־$[S]_B$ משולשת עליונה, ונקבל שיש על האלכסון שלה אפסים כי 0 ערך עצמי יחיד של S. נכתוב $B = (v_1, \ldots, v_n)$ וגם $V_i := \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_i)$ לכל $i \in [n]$. נסיק כי $SV_i \subseteq V_{i-1}$ לכל $i \in [n]$, וגם $SV_1 = 0$. אז

$$S^n V = S^n V_n = S^{n-1} V_{n-1} = \ldots = SV_1 = 0$$

כלומר $S^n = 0$.
עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ניקח את $T = L_A$ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שהערך העצמי הממשי היחיד שלה הוא 0 (כי $\pm i \notin \mathbb{R}$) אבל $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכן $T^4 e_1 = e_1$. כלומר $T^4 \neq 0$ ולכן T אינה נילפוטנטית.

דוגמאות. העתקות נילפוטנטיות: ההעתקה L_A נילפוטנטית עבור כל אחת מהמטריצות הבאות.

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- כל A משולשת עליונה עם 0 על כל האלכסון הראשי, כפי שראינו בתרגיל האחרון.

- $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

העתקות שאינן נילפוטנטיות: עבור המטריצות הבאות, L_A אינה נילפוטנטית.

- $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. מתקיים $Ae_1=e_1$ ולכן 1 ערך עצמי ולא יתכן כי L_A נילפוטנטית.
- $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. מתקיים $A\left(e_1+e_2+e_3\right)=3\left(e_1+e_2+e_3\right)$ לכן 3 ערך עצמי, ולא יתכן כי L_A נילפוטנטית.
- $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in M_3\left(\mathbb{R}\right)$. מתקיים $A^4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$ לכן $L_A^4\neq 0$ וראינו שאינדקס הנילפוטנטיות חייב להיות לכל היותר 3 במקרה זה. לכן L_A אינה נילפוטנטית.

תרגיל 3. הראו כי $T\in \text{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ נילפוטנטית אם ורק אם לכל $v\in V$ יש $k\in\mathbb{N}_+$ עבורו $T^kv=0$.

פתרון. נניח כי T נילפוטנטית מאינדקס k. אז $T^kv=0v=0$ לכל $v\in V$.
נניח להיפך כי לכל $v\in V$ יש $k\in\mathbb{N}_+$ עבורו $T^kv=0$. אז $v\in\ker\left(T^k\right)$. אבל, ראינו כי

$$\ker\left(T\right)\leq\ker\left(T^2\right)\leq\ker\left(T^3\right)\leq\ldots$$

מתייצבת, לכן יש $m\in\mathbb{N}_+$ עבורו $\ker\left(T^k\right)\subseteq\ker\left(T^m\right)$ לכל $k\in\mathbb{N}_+$. נקבל $v\in\ker\left(T^m\right)$ לכל $v\in V$, לכן $T^m=0$.

תרגיל 4. הראו שצירוף לינארי של העתקות נילפוטנטיות מתחלפות הוא נילפוטנטי. מצאו דוגמה נגדית עבור העתקות נילפוטנטיות שאינן מתחלפות.

פתרון. יהיו $T_1.T_2\in\text{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ נילפוטנטיות מאינדקסים k_1,k_2 בהתאמה וכך שמתקיים $T_1T_2=T_2T_1$. יהי $\alpha\in\mathbb{F}$.
מתקיים

$$\left(\alpha T_1\right)^{k_1}=\alpha^{k_1}T_1^{k_1}=\alpha^{k_1}0=0$$

לכן αT_1 נילפוטנטית מאינדקס קטן או שווה ל־k. כעת

$$\left(T_1+T_2\right)^{k_1+k_2+1}=\sum_{i=0}^{k_1+k_2}\binom{k_1+k_2}{i}T_1^iT_2^{k_1+k_2-i}\ .$$

כאשר $i\geq k_1$ מתקיים $T_1^i=0$ וכאשר $i<k_1$ מתקיים $k_1+k_2-i\geq k_2$ לכן $T_2^{k_1+k_2-i}=0$. נקבל בסך הכל כי T_1+T_2 נילפוטנטית מאינדקס קטן או שווה k_1+k_2.
בלי ההנחה שההעתקות מתחלפות, אפשר לקחת

$$T_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$
$$T_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

כאשר שתיהן נילפוטנטיות מאינדקס 2, אבל

$$T_1+T_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

הפיכה ולכן אינה נילפוטנטית (אין לה ערך עצמי 0).

תרגיל 5. תהי $T \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נילפוטנטית. הראו כי $\det(T) = \operatorname{tr}(T) = 0$.

פתרון. ראינו בהרצאה שיש בסיס B של V כך ש־$[T]_B$ משולשת עליונה. כיוון שכל הערכים העצמיים של T שווים לאפס, נקבל שיש 0 על האלכסון. אז $\det(T) = \det([T]_B) = 0$ כמכפלת איברי האלכסון וגם $\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}([T]_B) = 0$ כסכום איברי האלכסון.

תרגיל 6. תהי T נילפוטנטית מאינדס k. הראו שהעתקות $(\mathsf{Id}_V \pm T)$ הפיכות ומצאו את ההופכיות שלהן.

פתרון. אנו יודעים כי

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} r^k = \frac{1}{1-r}$$

עבור $r < 0$. נרצה אם כן שההופכית של $\mathsf{Id}_V - T$ תהיה $\mathsf{Id}_V + T + \ldots + T^{k-1}$. אכן,

$$\begin{aligned}(\mathsf{Id}_V - T)\left(\mathsf{Id}_V + T + \ldots + T^{k-1}\right) &= \sum_{i=0}^{k-1} T^i - \sum_{i=1}^{k} T) \\ &= \mathsf{Id}_V - T^k \\ &= \mathsf{Id}_V - 0 \\ &= \mathsf{Id}_V\end{aligned}.$$

כעת, אם T נילפוטנטית מאינדקס k גם $-T$ נילפוטנטית מאינדקס k, לכן ההופכית של $\mathsf{Id}_V + T = \mathsf{Id}_V - (-T)$ היא

$$\mathsf{Id}_V - T + T^2 - T^3 + \ldots + (-1)^{k-1} T^{k-1}.$$

תרגיל 7. הראו כי

$$\begin{aligned} D \colon \mathbb{F}_n[x] &\to \mathbb{F}_n[x] \\ p &\mapsto p' \end{aligned}$$

נילפוטנטית.

פתרון. לכל $p \in \mathbb{F}_n[x]$ מתקיים $\deg_{\mathbb{F}}(p) \le n$ לכן $D^{n-1}(p)$ פולינום קבוע, ולכן $D^n p = 0$.

תרגיל 8. הראו כי

$$\begin{aligned} D \colon \mathbb{F}[x] &\to \mathbb{F}[x] \\ p &\mapsto p' \end{aligned}$$

אינה נילפוטנטית.

פתרון. נניח בשלילה כי D נילפוטנטית מאינדקס k. אז $D^k x^{k+1} = 0$, אבל

$$\begin{aligned} D^k x^{k+1} &= (k+1) D^{k-1} x^k \\ &= \ldots \\ &= (k+1)! \\ &\ne 0 \end{aligned}$$

בסתירה.

תרגיל 9. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ ותהי $T \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נילפוטנטית מאינדקס k. לכל $i \in [k]$ נסמן $n_i := \dim\ker\left(T^i\right)$. הראו שמתקיים

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < n_k = n.$$

פתרון. מתקיים $\ker\left(T^k\right) = \ker(0) = V$ לכן $n_k = \dim(V) = n$. אם $n_1 = 0$ נקבל $\dim\ker(T) = 0$ לכן T חד־חד ערכית ולכן הפיכה, בסתירה לנילפוטנטיות.
אם $n_i = n_{i+1}$ עבור $i \in [k-1]$ נקבל $\ker\left(T^i\right) = \ker\left(T^{i+1}\right)$. אבל, ראינו שבמקרה זה $\ker\left(T^i\right) = \ker\left(T^j\right)$ לכל $j \ge i$. בפרט $\ker\left(T^i\right) = \ker\left(T^k\right) = V$, כלומר $i = k$ בסתירה להנחה $i \in [k-1]$.

תרגיל 10. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ עם בסיס $B(v_1, \ldots, v_n)$. תהי

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ v_1 &\mapsto 0 \\ \forall i > 1 : v_i &\mapsto v_{i-1} \end{aligned}.$$

הראו כי T נילפוטנטית מאינדקס n וכיתבו את $[T]_B$.

פתרון. מתקיים
$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
וזאת משולשת עליונה עם 0 על האלכסון, לכן כפי שתיארנו מקודם $T^n = 0$. מאידך, $T^{n-1}v_n = v_1 \neq 0$ לכן האינדקס של T שווה n.

הגדרה 1.3 (מטריצה נילפוטנטית). תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נאמר כי A נילפוטנטית אם L_A נילפוטנטית ונגדיר את אינדקס הנילפוטנטיות של A להיות זה של L_A.

הערה 1.4. לחלופין, A נילפוטנטית אם יש $k \in \mathbb{N}_+$ עבורו $A^k = 0$. הערך המינימלי של k כזה הוא אינדקס הנילפוטנטיות של A.

תרגיל 11. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אלכסונית בלוקים $(n_1, \dots, n_k)$ כאשר כל בלוק A_i נילפוטנטי מאינדקס k_i. הראו כי A נילפוטנטית מאינדקס $\max_{i\in[k]} n_i$.

פתרון. יהי $n' \coloneqq \max_{i\in[k]} n_i$. מתקיים
$$A^{n'} = \begin{pmatrix} A_1^{n'} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_k^{n'} \end{pmatrix} = 0$$
כי $n' \geq n_i$ לכל $i \in [k]$. אם $n'' < n'$ יש $i \in [k]$ עבורו $n_i > n''$. אז $A_i^{n''} \neq 0$ ממינימליות n_i. אז $A^{n''} \neq 0$. לכן n' אינדקס הנילפוטנטיות של A.