אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 12 — תבניות ריבועיות

אלעד צורני

22 ביוני 2021

1 תבניות ריבועיות

1.1 חזרה

הגדרה 1.1 (תבנית בילינארית). תבנית בילינארית על מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ היא העתקה

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

לינארית בשני הרכיבים.

הערה 1.2. מעל $\mathbb{C}$ בדרך כלל עוסקים בתבניות ססקווילינאריות במקום תבניות בילינאריות, שנדבר עליהן בהמשך.

הגדרה 1.3 (מטריצות חופפות). מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ נקראות חופפות אם קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $B = P^t AP$.

הגדרה 1.4 (מטריצה מייצגת לתבנית בילינארית). עבור העתקה בילינארית $f : V \times V \to \mathbb{F}$ ובסיס $B = (v_i)_{i \in [n]}$ של V נסמן ב־$[f]_B$ את המטריצה עם $\left([f]_B\right)_{i,j} = f\left(v_i, v_j\right)$.

הגדרה 1.5 (תבנית ריבועית). תבנית ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$ (כללי, לאו דווקא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$) היא פולינום $q \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m]$ שדרגת כל מונום בו היא 2.

הערה 1.6. מטריצה סימטרית A מגדירה תבנית ריבועית על ידי $q(\vec{x}) = \vec{x}^t Ax$. להיפך, אם q תבנית ריבועית נוכל לכתוב

$$q(x) = \sum_{i \in [n]} \sum_{j \in [n]} a_{i,j} x_i x_j$$

כאשר $a_{i,j} = a_{j,i}$. אז נגדיר $A \in M_n(\mathbb{F})$ עם

$$A_{i,j} = a_{i,j}.$$

היא מקיימת $q(\vec{x}) = \vec{x}^t Ax$. זה מגדיר איזומורפיזם בין מרחבי המטריצות הסימטריות והתבניות הריבועיות.

סימון 1.7. עבור $A \in M_n(\mathbb{F})$ סימטרית נסמן ב־g_A את התבנית הריבועית

$$g_A(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x}.$$

1.2 תרגילים

תרגיל 1. יהי $\mathbb{F} := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ השדה בן 5 האיברים. יתכן כי ראיתם את הסימון $\mathbb{Z}_5$ במקום זאת. תהי

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 \in \mathbb{F}[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

תבנית ריבועית מעל $\mathbb{F}$.

1. מצאו מטריצה $A \in M_4(\mathbb{F})$ אלכסונית עבורה $g = g_A$.
2. מצאו $P \in M_4(\mathbb{F})$ עבורה PAP^t אלכסונית.
3. האם יש $P \in M_4(\mathbb{F})$ עבורה PAP^t אלכסונית עם $\pm 1, 0$ על האלכסון?

4. האם כל $A \in M_4(\mathbb{F})$ חופפת למטריצה עם $\pm 1, 0$ על האלכסון?

פתרון. 1. לא מופיע ביטוי x_i^2. לכן נסתכל רק על המקדם של $x_i x_j$ עבור $i \neq j$. כדי שיתקיים $a_{i,j} = a_{j,i}$ ניקח את חצי המקדם של $x_i x_j$ כפי שהוא כתוב (כי לא מופיע גם $x_j x_i$). נקבל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. נלכסן לפי שורה ועמודה כדי להביא את המטריצה לצורה אלכסונית. כאשר יש 0 על כל האלכסון, נוסיף כפולה של שורה או עמודה אחרת, כדי שיופיע מספר שונה מאפס במקום ה־$(1,1)$. נקבל

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

כעת, נשתמש באיבר על האלכסון כדי לאפס את שאר האיברים, ונמשיך הלאה.

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ניקח את P להיות המכפלה של 5 המטריצות האלמנטריות שמתאימות לפעולות הדירוג.

3. כן. נוכל בדירוג להוסיף 3 פעמים את השורה/עמודה הרלוונטית כדי לקבל $3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 5$ על האלכסון.

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

4. לא. למשל $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ כי $\det(A) = 3$ אבל אם $\det(A) = 0$ נקבל $3 = \det(A) = a^2 \cdot 0 = 0$ בסתירה, ואם $\det(A) \in \{\pm 1\}$ נקבל $3 = \det(A) = \pm a^2$. לא יתכן $a^2 = 3$ כי 3 אינו ריבוע ב־$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, ולא יתכן $3 = -a^2$ כי אז $a^2 = -3 = 2$ ואילו גם 2 אינו ריבוע ב־$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

תרגיל 2. תהי
$g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 - ix_3^2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

1. מצאו מטריצה A עבורה $g = g_A$.
2. הראו כי g אינה מנוונת.
3. מצאו בסיס B של $\mathbb{C}^3$ עבורו $[g]_B = I_3$.

פתרון. 1. כמו מקודם, נכתוב

$$.A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&0\\1&0&-i\end{pmatrix}$$

2. מתקיים

$$.\left(a,b,c\right)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(a,b,c\right)\begin{pmatrix}y+z\\x-y\\x-iz\end{pmatrix}=a\left(y+z\right)+b\left(x-y\right)+c\left(x-iz\right)$$

נניח כי $\left(a,b,c\right)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$ לכל $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3$ ונראה כי $\left(a,b,c\right)=(0,0,0)$.

אם ניקח $(xyz)=\begin{pmatrix}1\\1\\-i\end{pmatrix}$ נקבל

$$0=a\left(1-i\right)+b\left(1-1\right)+c\left(1+i^2\right)=a\left(1-i\right)$$

לכן $a=0$. אם ניקח $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\\1\\-1\end{pmatrix}$ נקבל

$$0=b\left(-i-1\right)$$

ולכן $b=0$, ואם ניקח $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ נקבל

$$0=c\left(1+i\right)$$

ולכן $c=0$. בסך הכל $\left(a,b,c\right)=\left(0,0,0\right)$, כנדרש.

3. נבצע דירוג לפי שורה ועמודה על A

$$A\mapsto\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&1&-i\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\0&1&-i\end{pmatrix}$$

$$\mapsto\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&1\\0&1&-i\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&1&-i\end{pmatrix}$$

$$\mapsto\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&1&-1-i\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1-i\end{pmatrix}$$

$$\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1-i\end{pmatrix}$$

$$\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כאשר בשני השלבים האחרונים חילקנו ב־$\sqrt{-1}$ וב־$\sqrt{-1-i}$ בהתאמה, כל אחד מהם בשורה ובעמודה. נקבל כי עבור

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{-1-i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-i-1}} & -\frac{1}{\sqrt{-i-1}} & \frac{1}{\sqrt{-i-1}} \end{pmatrix}$$

מתקיים $PAP^t = I_3$. נכתוב

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-i-1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{-i-1}} \\ \frac{1}{\sqrt{-i-1}} \end{pmatrix} \right)$$

כאשר הוקטורים ב־B הם עמודות P^t. אז $P^t = P_E^B$ ונקבל

$$.I_3 = PAP^t = \left(P_E^B\right)^t [g]_E \, P_E^B = [g]_B$$

הערה 1.8. כפי שתראו בהרצאה, לכל תבנית בילינארית סימטרית g שאינה מנוונת יש בסיס B עבורו $[g]_B = I_3$.
נובע מכך שכל התבניות הבלתי־מנוונת מעל מרחב וקטורי (סוף־מימדי) מרוכב שקולות.