אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 6 — צורת ובסיס ז'ורדן

אלעד צורני

14 במאי 2021

1 בסיס ז'ורדן

1.1 חזרה

אלגוריתם 1.1. כדי למצוא צורת ז'ורדן נסתכל על כל ערך עצמי λ בנפרד. נסמן $N := T - \lambda \operatorname{Id}_V$, נחפש וקטורים בלתי־תלויים ב־$\ker\left(N^k\right) \setminus \ker\left(N^{k-1}\right)$ שיפתחו שרשראות ז'ורדן שירכיבו קבוצה בלתי־תלויה B_k. נעשה זאת עבור ערכי k הולכים וקטנים ונקבל בסוף בסיס ז'ורדן B_0.

1.2 תרגילים

תרגיל 1. ידוע כי כל הערכים העצמיים של

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_6\left(\mathbb{C}\right)$$

רציונליים. מצאו צורת ובסיס ז'ורדן עבור A.

פתרון. נסמן $V = \mathbb{C}^6$.
חישוב ישיר נותן

$$p_A\left(x\right) = \det\left(xI - A\right) = x^6 - 15x^5 + 93x^4 - 305x^3 + 558x^2 - 540x + 216.$$

ממשפט ניחוש השורש הרציונלי אפשר למצוא את השורשים ולקבל

$$p_A\left(x\right) = \left(x-2\right)^3\left(x-3\right)^3.$$

נסתכל על הערכים העצמיים $2, 3$ בנפרד.

$\lambda = 3$: מתקיים

$$\left(A - 3I\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ומרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הוא

$$\ker\left(L_A - 3\,\mathrm{Id}_V\right) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

חישוב ישיר נותן כי

$$\ker\left(\left(L_A - 3\,\mathrm{Id}_V\right)^2\right) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, e_3\right\}$$

וגם

$$\ker\left(\left(L_A - 3\,\mathrm{Id}_V\right)^3\right) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, e_3, e_4\right\}.$$

אז, e_4 פותח שרשרת ז'ורדן

$$\left((A-3I)^2 e_4, (A-3I)\,e_4, e_4\right) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_3, e_4\right).$$

$\lambda = 2$: מתקיים

$$\ker\left(L_A - 2\,\mathrm{Id}_V\right) = \mathrm{Span}\left\{e_6, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן יש ל־2 ריבוי גיאומטרי 2. אז יש שני בלוקי ז'ורדן עבור הערך העצמי 2, ולכן השרשרת המקסימלית מגודל 2. אפשר לראות כי סכום העמודות של

$$A - 2I = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

שווה 0, ולכן $e_1 \in \ker\left((L_A - \mathrm{Id}_V)^2\right)$ ונקבל

$$.\ \ker\left((L_A - \mathrm{Id}_V)^2\right) = \operatorname{Span}\left\{e_6, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, e_1\right\}$$

אז e_1 מתחיל שרשרת ז'ורדן

$$.\ ((A-2I)e_1, e_1) = \left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_1\right)$$

חסרה שרשרת ז'ורדן מאורך 1 עבור $\lambda = 2$. היא וקטור עצמי של 2 שאינו תלוי ב־$((A-2I)e_1, e_1)$. למשל, e_6 הוא כזה וקטור עצמי.

סיכום: נסדר את השרשראות השונות בבסיס ונקבל בסיס ז'ורדן

$$B = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_3, e_4, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_1, e_6\right)$$

לפיו

$$.\ [L_A]_B = \operatorname{diag}\left(J_3(3), J_2(2), J_1(2)\right)$$

תרגיל 2. יהי $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

1. חשבו את $J_m(0)^k$ לכל $m, k \in \mathbb{N}_+$.
2. נשים לב שמתקיים $J_m(\lambda) = J_m(0) + \lambda I_m$ וכי $J_m(0), I_m$ מטריצות מתחלפות. השתמשו בכך כדי לחשב את $J_m(\lambda)^k$ לכל $m, k \in \mathbb{N}_+$ ולכל $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. תהי

$$.A \coloneqq \begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\-1 & -2 & 0\\8 & 7 & 9\end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

חשבו את A^{2021}.

פתרון. 1. נשים לב כי $J_m(0)(e_i) = e_{i-1}$ לכל $i > 1$ וכי $J_m(0)e_1 = 0$. אז

$$J_m(0)^k e_i = e_{i-k}$$

לכל $i > k$ וגם $J_m(0)^k e_j = 0$ לכל $i \le k$. נקבל כי $J_m(0)^k$ מטריצה עם 1 באלכסון ה־k מעל האלכסון הראשי, ו־0 בכל שאר הכניסות.

2. כיוון ש־$\lambda I_m, J_m(0)$ מתחלפות, אפשר לחשב את

$$J_m(\lambda)^k = \left(\lambda I_m + J_m(0)\right)^k$$

בעזרת הבינום. מתקיים

$$.J_m(\lambda)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}J_m(0)^i\lambda^{k-i}$$

לפי מה שראינו עבור $J_m(0)^i$, זאת מטריצה שבה על הלאכסון הראשי כתוב λ^k, על האלכסון מעליו $k\lambda^{k-1}$ ועל האלכסון ה־i מעל האלכסון הראשי $\binom{k}{i}\lambda^{k-i}$.

3. נסמן $V=\mathbb{C}^3$ ונמצא בסיס ז'ורדן B עבור J_A. אז נקבל $P\in M_3(\mathbb{C})$ עבורה $J:=PAP^{-1}$ מטריצת ז'ורדן, ואז

$$A^{2021}=\left(P^{-1}JP\right)^{2021}=P^{-1}J^{2021}P$$

כאשר מהחישוב הנ"ל נדע לחשב את J^{2021}.

ערכים עצמיים: ניתן לראות כי 9 ערך עצמי של A כי $Ae_3=9e_3$. נסמן ב־λ_1,λ_2 את הערכים העצמיים הנוספים ונקבל

$$\lambda_1+\lambda_2+9=\operatorname{tr}(A)=9$$
$$9\lambda_1\lambda_2=\det(A)=9(-4+4)=0$$

לכן $\lambda_1=\lambda_2=0$.
נקבל כי 9 ערך עצמי מריבוי אלגברי 1 וכי 0 ערך עצמי מריבוי אלגברי 2. בפרט, (e_3) שרשרת ז'ורדן עבור הערך העצמי 9.

שרשרת ז'ורדן עבור $\lambda=0$: ניתן לראות כי $r(A)=2$ ולכן $\dim\ker(L_A)=1$. נשים לב כי

$$2e_1-e_2-e_3\in\ker(L_A)$$

ולכן

$$.\ker(L_A)=\operatorname{Span}(2e_1-e_2-e_3)$$

מתקיים

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\81&81&81\end{pmatrix}$$

לכן נוכל להשלים את $(2e_1-e_2-e_3)$ לבסיס

$$(2e_1-e_2-e_3,e_1-e_3)$$

של $\ker\left(L_A^2\right)$. מתקיים

$$A(e_1-e_3)=2e_1-e_2-e_3$$

לכן נקבל שרשרת ז'ורדן

$$.(A(e_1-e_3),e_1-e_3)=(2e_1-e_2-e_3,e_1-e_3)$$

מסקנה: קיבלנו

$$B:=(2e_1-e_2-e_3,e_1-e_3,e_3)$$

עבורו

$$[L_A]_B=J:=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$

ולכן

$$.A=[L_A]_E=[\mathrm{Id}_V]_E^B[L_A]_B[\mathrm{Id}_V]_B^E$$

נסמן

$$P:=[\mathrm{Id}_V]_E^B=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

שעמודותיה הן וקטורי הבסיס B, ונקבל

$$A = PJP^{-1}.$$

אז

$$\begin{aligned} A^{2021} &= PJ^{2021}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9^{2021} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9^{2021} & 9^{2021} & 9^{2021} \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

2 פולינומים מינימליים

2.1 חזרה

הגדרה 2.1 (פולינום מינימלי). עבור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, הפולינום המינימלי של T, שנסמנו $m_T \in \mathbb{F}[x]$, הוא הפולינום המתוקן מהדרגה המינימלית עבורו $m_T(T) = 0$.

טענה 2.2. אם $p \in \mathbb{F}[x]$ מקיים $p(T) = 0$ אז $m_T \mid p$.

מסקנה 2.3. הפולינום המינימלי של T מחלק את הפולינום האופייני שלה.

עובדה 2.4. הריבוי של ערך עצמי λ בפולינום המינימלי m_T היא הגודל של בלוק ז׳ורדן המקסימלי עבור הערך העצמי λ.

מסקנה 2.5. העתקה $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ לכסינה אם ורק אם הפולינום המינימלי שלה מתפרק לגורמים לינאריים זרים.

2.2 תרגילים

תרגיל 3. יהי $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יהי $m \in \mathbb{N}_+$ עבורו $T^m = \mathrm{Id}_V$. הראו כי T לכסינה.

פתרון. כדי להראות ש־T לכסינה מספיק להראות שכל שורשי m_T הינם מריבוי 1. מההנחה, מתקיים $m_T \mid (x^m - 1)$ ולכן די להראות שכל שורשי $x^m - 1$ הם מריבוי 1. אכן, יש לפולינום זה m שורשים שונים

$$\left\{ e^{\frac{2\pi i k}{m}} \;\middle|\; k \in [m] \right\} = \left\{ \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \;\middle|\; k \in [m] \right\}.$$

תרגיל 4. 1. יהיו $A, B \in M_6(\mathbb{C})$ המקיימות

(i) $p_A = p_B$.

(ii) $m_A = m_B$ וזהו פולינום ממעלה 5.

הראו כי $A \sim B$.

2. מצאו $A, B \in M_6(\mathbb{C})$ שאינן דומות וכך שמתקיים

(i) $p_A = p_B$.

(ii) $m_A = m_B$ וזהו פולינום ממעלה 4.

פתרון. 1. נתון $\deg m_A = 5$, וזהו סכום גדלי הבלוקים המקסימליים של הערכים העצמיים השונים של A. לכן יש ערך עצמי λ מריבוי גיאומטרי 2 ובלוק מגודל 1, וכל ערך עצמי אחר הוא מריבוי גיאומטרי 1. אז

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & J_m(\lambda_1) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & J_{m_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

נתון $m_A = m_B$ לכן באותו אופן

$$B \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & J_m(\lambda_1) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & J_{m_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

ונסיק כי $A \sim B$.

2. נסתכל על

$$A := \begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_4(0) \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_4(0) \end{pmatrix}$$

ונקבל $m_A = m_B = x^4$ אבל $A \nsim B$ כי יש להן צורת ז'ורדן שונה.

תרגיל 5. עבור פולינום מתוקן $p \in \mathbb{F}[x]$ נכתוב

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

כאשר $c_n = 1$, ונגדיר את המטריצה המלווה של p על ידי

$$C(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

יהי $p \in \mathbb{F}[x]$ ממעלה n. מצאו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של $C(p)$.

פתרון. • מתקיים

$$p_{C(p)} = \det(I - xC(p)) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

ניעזר בכך שהדטרמיננטה אינווריאנטית תחת הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת. נוסיף את השורה האחרונה כפול x לזאת שלפניה. לאחר מכן נוסיף את השורה ה־$n-1$ כפול x לזאת שלפניה ונמשיך כך עד שנקבל מטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & * \end{pmatrix}$$

כאשר

$$y = a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + x\left(\ldots\left(a_{n-2} + x\left(a_{n-1} + x\right)\right)\ldots\right)\right)\right) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = f.$$

אז

$$p_{C(p)} = (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} -1 & x & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} (-1)^{n-1} f = f.$$

- יהי $g \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$ ונכתוב

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i.$$

אז

$$\begin{aligned} g(C(p))(e_1) &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i C(p)^i e_1 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i e_{1+i} \end{aligned}$$

וביטוי זה שונה מאפס כאשר $g \neq 0$ כי אז יש $b_i \neq 0$ עבור i כלשהו.
לכן $\deg\left(m_{C(p)}\right) \geq n$ ולכן $m_{C(p)} = p_{C(p)}$.