אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 9 — משפט ריס, העתקות אורתוגונליות, צמודות לעצמן ונורמליות, ומשפט הפירוק הספקטרלי

אלעד צורני

31 במאי 2021

1 משפט ריס

1.1 חזרה

משפט 1.1 (ריס). לכל $f \in V^*$ קיים $v \in V$ עבורו $f(u) = \langle u, v \rangle$ לכל $u \in V$.

1.2 תרגילים

תרגיל 1. 1. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $C > 0$ כך שלכל $p \in \mathbb{R}_n[x]$ מתקיים

$$|p(0)| \le C \left(\int_{-1}^{1} p(x)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. חשבו את C המינימלי עבור $n = 2$.

פתרון. 1. נשים לב כי

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

מכפלה פנימית. אז

$$\left(\int_{-1}^{1} p(x)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\langle p, p \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \|p\|.$$

כלומר, עלינו להוכיח

$$|p(0)| \le C \|p\|.$$

ההצבה

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_0 \colon \mathbb{R}_n[x] &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

היא פונקציונל לינארי, ולכן ממשפט ריס יש $g \in \mathbb{R}_n[x]$ עבורו

$$p(0) = \mathrm{ev}_0(p) = \langle p, g \rangle.$$

עכשיו, מקושי־שוורץ

$$|p(0)| = |\langle p, g \rangle| \le \|p\| \|g\|.$$

לכן ניקח $C = \|g\|$.

2. נסמן $g(x) = ax^2 + bx + c$. נשים לב כי כאשר $p = g$ יש שוויון בקושי־שוורץ ואז

$$|p(0)| = \|p\| \|g\| \le C \|p\|.$$

גורר $\|g\| \le C$. ראינו כי $C = \|g\|$ מקיים את הנדרש, ולכן נותר למצוא את $\|g\|$. כעת

$$1 = 1(0) = \langle g(x), 1 \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \left.\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right|_{x=-1}^{1} = \frac{2a}{3} + 2c$$

$$0 = x(0) = \langle g(x), x \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)\,x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\right|_{x=-1}^{1} = \frac{2b}{3}$$

$$0 = x^2(0) = \left\langle g(x), x^2 \right\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)\,x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3}\right|_{x=-1}^{1} = \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3}.$$

מהמשוואה השנייה נקבל $b = 0$. מהמשוואה הראשונה פחות 3 פעמים השנייה נקבל

$$1 = \frac{2a}{3} - 3 \cdot \frac{2a}{5} + 0 = \frac{10a - 18a}{15}$$

ולכן $a = -\frac{15}{8}$. אז מהמשוואה השלישית נקבל

$$c = -\frac{3a}{5} = -\frac{9}{8}$$

ולכן

$$g(x) = -\frac{15}{8}x^2 - \frac{9}{8}.$$

אז

$$C = \|g\| = \int_{-1}^{1} -\frac{15}{8}x^2 - \frac{9}{8}\,\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}.$$

2 העתקות אורתוגונליות, צמודות לעצמן ונורמליות

2.1 חזרה

הגדרה 2.1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. נאמר כי T

אורתוגונלית (יוניטרית) אם $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$ לכל $v \in V$.

צמודה לעצמן (הרמיטית) אם $T^* = T$.

נורמלית: אם $T^*T = TT^*$.

הערה 2.2. העתקה $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V, V)$ היא אורתוגונלית (יוניטרית) אם ורק אם $T^* = T^{-1}$.

2.2 תרגילים

תרגיל 2. יהי V מרחב מכפה פנימית ויהיו $T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$ והסיקו שהרכבת איזומטריות היא איזומטריה.

פתרון. ראשית, אם B בסיס אורתונורמלי ל־V מתקיים

$$\begin{aligned}
[(T \circ S)^*]_B &= \overline{[T \circ S]_B^t} \\
&= \overline{[S]_B^t\,[T]_B^t} \\
&= \overline{[S]_B^t}\,\overline{[T]_B^t} \\
&= [S^*]_B\,[T^*]_B \\
&= [S^* \circ T^*]_B
\end{aligned}$$

לכן $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.
כעת, אם S, T איזומטריות נקבל

$$(T \circ S)^{-1} = (T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1} = S^* \circ T^* = (T \circ S)^*.$$

תרגיל 3. תהי

$$R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

שיקוף דרך ציר ה־x. עבור $\theta \in \mathbb{R}$ נסמן

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

וגם $\rho_\theta = L_{A_\theta}$.
הראו כי כל איזומטריה של $\mathbb{R}^2$ היא מהצורה ρ_θ או $\rho_\theta R$ עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

פתרון. T אורתוגונלית ולכן מעבירה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. לכן $v = T(e_1)$ מנורמה 1. לכן $v_1^2 + v_2^2 = 1$. בפרט $v_1 \in [-1, 1]$ ולכן יש $\theta \in \mathbb{R}$ עבורה $v_1 = \cos\theta$. נקבל

$$v_2^2 = 1 - (\cos\theta)^2 = (\sin\theta)^2$$

לכן $v_2 \in \{\pm \sin\theta\}$. אם $v_2 = \sin\theta$ סיימנו. אחרת ניתן לכתוב

$$v_1 = \cos(-\theta)$$
$$v_2 = \sin(-\theta)$$

ואז הזווית המתאימה היא $-\theta$.
כעת $\rho_{-\theta} \circ T(e_1) = e_1$. ראינו בהרצאה שסיבוב הוא איזומטריה (העמודות של A_θ הן בסיס אורתונורמלי) ולכן $\rho_{-\theta} \circ T$ היא איזומטריה כהרכבת איזומטריות. לכן היא מעבירה בסיס אורתונורמלי ולבסיס אורתונורמלי. אבל אם (e_1, u) אורתונורמלי אז $u = \pm e_2$. אם $u = e_2$ נקבל כי $\rho_{-\theta} \circ T = \mathrm{Id}_V$ ואז $T = \rho_\theta$. אחרת, $\rho_{-\theta} \circ T = R$ ואז $T = \rho_\theta \circ R$.

תרגיל 4. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלית.

1. הוכיחו כי $\ker(T) = \ker(TT^*)$.
2. הוכיחו כי $\ker(T) = \ker(T^n)$ לכל $n \in \mathbb{N}_+$.
3. תהי $S = T + T^*$. הוכיחו כי כל מרחב עצמי של S הוא T־שמור.

פתרון. 1. יהי $v \in \ker(T)$. אז $TT^*v = T^*Tv = T^*0 = 0$ ולכן $\ker(T) \subseteq \ker(TT^*)$.
יהי $v \in \ker(TT^*)$. אז $TT^*v = 0$. אז

$$\begin{aligned} \langle Tv, Tv \rangle &= \langle v, T^*Tv \rangle \\ &= \langle v, TT^*v \rangle \\ &= \langle v, 0 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ולכן $Tv = 0$, כלומר $v \in \ker(T)$.

2. T נורמלית, לכן יש לה בסיס מלכסן B בו $[T]_B$ אלכסונית. אז $[T^n]_B = [T]_B^n$ אלכסונית ויש להן 0 על האלכסון באותם מקומות. לכן
$$\ker(T) = V_0^{(T)} = V_0^{(T^n)} = \ker(T^n) .$$

3. מתקיים

$$\begin{aligned} ST &= (T + T^*)T \\ &= T^2 + T^*T \\ &= T^2 + TT^* \\ &= T(T + T^*) \\ &= TS \end{aligned}$$

לכן T, S מתחלפות וכפי שראינו אז כל מרחב עצמי של S הוא T־שמור.

3 משפט הפירוק הספקטרלי

3.1 חזרה

משפט 3.1 (הפירוק הספקטרלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}$ נורמלית (צמודה לעצמה) אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B$ אלכסונית.

3.2 תרגילים

תרגיל 5. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

מצאו מטריצה אורתוגונלית $O \in M_3(\mathbb{R})$ עבורה $O^{-1}AO$ מטריצה אלכסונית.

פתרון. ראשית נמצא ערכים עצמיים. מתקיים

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 .$$

לכן אם λ_1, λ_2 הערכים העצמיים נקבל $\lambda_1\lambda_2 = 3$ וגם $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$, לכן הערכים העצמיים של A הם 3 מריבוי אלגברי 2 ו־1 מריבוי אלגברי 1.
המרחב העצמי של 3 הוא $\operatorname{Span}(e_1, e_2 + e_3)$. נחפש את המרחב העצמי של 1. נדרג

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז המרחב העצמי הוא $\operatorname{Span}(e_2 - e_3)$.
כדי לקבל בסיס אורתונורמלי נוכל לבצע את תהליך גרם־שמידט על בסיס של כל מרחב עצמי בנפרד, או על הבסיס כולו. אם אנו יודעים שהמטריצה נורמלית, המרחבים העצמיים השונים שלה ניצבים, ולכן שתי הדרכים שקולות.
באופן כללי, יש להראות שקיבלנו בסיס מלכסן, או אורתונורמלי, תלוי בשיטה שבחרנו.
נבצע את תהליך גרם־שמידט על $(e_1, e_2 + e_3)$. נקבל בסיס $\left(e_1, \frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}}\right)$. על $(e_2 - e_3)$ נקבל בסיס $\left(\frac{e_2-e_3}{\sqrt{2}}\right)$. נרצה להראות כי

$$B = \left(\frac{e_2-e_3}{\sqrt{2}}, e_1, \frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}}\right)$$

בסיס מלכסן של A.
אכן, כל הוקטורים ב־B הם וקטורים עצמיים של A. לכן אם ניקח $O := [\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3}]_E^B$ נקבל כי $O^{-1}AO$ מטריצה אלכסונית, וכי O אורתוגונלית, שכן עמודותיה הן בסיס אורתונורמלי.

תרגיל 6. בתרגיל זה נראה שכל העתקה היא צירוף לינארי של 4 העתקות יוניטריות.
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

1. נניח כי T הרמיטית ועם ערכים עצמיים אי־שליליים. הראו כי יש $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הרמיטית עם ערכים עצמיים אי־שליליים עבורה $S^2 = T$. נסמנה $\sqrt{T}$.
2. נניח כי T הרמיטית. הראו כי הערכים העצמיים של T ממשיים.

3. נסמן ב־$\sigma(T)$ את אוסף הערכים העצמיים של T ונסמן

$$c(T) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

תהי

$$\tilde{T} := \frac{T}{c(T)}.$$

הראו כי $\mathrm{Id}_V - \tilde{T}$ הרמיטית עם ערכים עצמיים אי־שליליים.

4. הראו כי T צירוף לינארי של שתי העתקות הרמיטיות.

5. נניח ש־T הרמיטית. הראו ש־T צירוף לינארי של שתי העתקות יוניטריות.

6. הסיקו כי T צירוף לינארי של ארבע העתקות יוניטריות.

פתרון. 1. T הרמיטית, לכן נורמלית ולכן לפי משפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ עבורו $[T]_B$ אלכסונית עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ על האלכסון. נגדיר

$$\begin{aligned} S : V &\to V \\ v_i &\mapsto \sqrt{\lambda_i} v_i \end{aligned}$$

ואז

$$S(v_i) = \lambda_i v_i.$$

נקבל $[T]_B = [S]_B$ ולכן $S = T$. S הרמיטית כי $[S]_B = \overline{[S]_B}^t$ וכי B בסיס אורתונורמלי.

2. כמו מקודם, קיים בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ של V לפיו T לכסינה. אבל, $[T]_B = \overline{[T]_B}^t$ ולכן לכל $i \in [n]$ מתקיים $\lambda_i = \overline{\lambda_i}$, ואז λ_i ממשי.

3. יהי B בסיס אורתונורמלי עבורו $[T]_B$ אלכסונית. אז

$$\left[\tilde{T}\right]_B = \frac{1}{c(T)}[T]_B$$

ונקבל כי הערכים העצמיים של $\tilde{T}$ בקטע $[0,1]$. אז גם $\left[\mathrm{Id}_V - \tilde{T}^2\right]_B$ אלכסונית עם ערכים עצמיים בקטע $[0,1]$. כיוון ש־B אורתונורמלי, נקבל כי $\mathrm{Id}_V - \tilde{T}^2$ הרמיטית.

4. נכתוב

$$T = \frac{T+T^*}{2} + \frac{T-T^*}{2}.$$

מתקיים

$$\begin{aligned} \left(\frac{T+T^*}{2}\right)^* &= \frac{T^* + T^{**}}{2} = \frac{T+T^*}{2} \\ \left(\frac{T-T^*}{2}\right)^* &= \frac{T^* - T^{**}}{2} = \frac{T^*-T}{2} \end{aligned}$$

אבל

$$\left(\frac{T-T^*}{2i}\right)^* = i\left(\frac{T-T^*}{2}\right)^* = -i\frac{T-T^*}{2} = \frac{T-T^*}{2i}$$

ולכן

$$T = \frac{T+T^*}{2} + i\left(\frac{T-T^*}{2i}\right)$$

צירוף לינארי של שתי העתקות הרמיטיות.

5. מספיק להראות כי $\tilde{T}$ צירוף של שתי העתקות יוניטריות, לכן נניח $c(T) = 1$. נרצה $f(T), g(T)$ יוניטריות עבורן

$$T = \frac{f(T) + g(T)}{2}.$$

כמו מקודם, נכתוב $f(T) = A + iB$ עבור A, B הרמיטיות. אם ניקח $g(T) = A - iB$ נקבל

$$T = \frac{A + iB + A - iB}{2} = A.$$

אז $f(T) = T + iB$. T הרמיטית ולכן נורמלית ומתחלפת עם T^*. לכן היא מתחלפת עם B. מיוניטריות נקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_V &= f(T) f(T)^* \\ &= (T + iB)(T - iB) \\ &= T^2 + B^2\end{aligned}$$

ואז

$$.B^2 = \mathrm{Id}_V - T^2$$

כיוון שראינו ש־$\mathrm{Id}_V - T^2$ הרמיטית עם ערכים עצמיים אי־שליליים ולכן קיים לה שורש. ניקח $B = \sqrt{\mathrm{Id}_V - T^2}$.
אז אכן מתקיים $\mathrm{Id}_V = T^2 + B^2 = f(T) f(T)^*$ ולכן $f(T)$ יוניטרית. נשים לב כי $g(T) = f(T)^*$ ולכן גם $g(T)$ יוניטרית.

6. ראינו כי $T = \alpha H_1 + \beta H_2$ צירוף של שתי העתקות הרמיטיות וכי H_1, H_2 כל אחת צירוף של שתי העתקות יוניטריות, לכן

$$T = \alpha(aU_1 + bU_2) + \beta(cU_3 + dU_4)$$

צירוף לינארי של ארבע העתקות יוניטריות.

תרגיל 7. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב סוף־מימדי ותהיינה $T, T_1, T_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

1. הוכיחו כי T נורמלית אם ורק אם יש פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $T^* = p(T)$. השתמשו בעובדה הבאה.

משפט 3.2 (אינטרפולציית לגרנג'). תהיינה

$$.x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{C}$$

קיים פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ ממעלה $k + 1$ עבורו $p(x_i) = y_i$ לכל $i \in [k]$.

הוכיחו כי $T_1 T_2 = T_2 T_1$ אם ורק אם $T_1^* T_2 = T_2 T_1^*$.

הוכיחו כי אם T_1, T_2 נורמליות ומתחלפות, גם $T_1 T_2, T_1 + T_2$ נורמליות.

פתרון. 1. אם יש $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $T^* = p(T)$, אז T נורמלית כי העתקה מתחלפת עם כל פולינום בה.
בכיוון השני, נניח כי T נורמלית וניקח בסיס B עבורו $[T]_B$ אלכסונית. אז

$$. [T]_B^* = [T]_B^* := \overline{[T]_B}^t$$

לכן גם $[T^*]_B$ אלכסונית, ונכתוב

$$\begin{aligned}[T]_B &= \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ . [T^*]_B &= \mathrm{diag}\left(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n\right)\end{aligned}$$

יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $p(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ לכל $i \in [n]$, שקיים מאינטרפולציית לגרנג'. אז

$$[T^*]_B = p([T]_B) = [p(T)]_B$$

ולכן $T^* = p(T)$, כנדרש.

2. נניח כי $T_1 T_2 = T_2 T_1$ ונראה כי $T_1^* T_2 = T_2 T_1^*$. הכיוון השני ינבע על ידי שימוש באותה תכונה עבור T_1^* במקום T_1.
T_1 נורמלית, לכן $T_1^* = p(T_1)$ עבור פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$. העתקה שמתחלפת עם T מתחלפת עם כל פולינום ב־T, לכן נקבל כי T_1^*, T_2 מתחלפות.

3. נניח כי T_1, T_2 נורמליות ומתחלפות. אז

$$\begin{aligned}(T_1 T_2)(T_1 T_2)^* &= T_1 T_2 T_2^* T_1^* \\ &= T_1 T_2^* T_2 T_1^* \\ &= T_2^* T_1 T_1^* T_2 \\ &= T_2^* T_1^* T_1 T_2 \\ &= (T_1 T_2)^* (T_1 T_2)\end{aligned}$$

ולכן $T_1 T_2$ נורמלית. כמו כן,

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(T_1 + T_2)^* &= T_1 T_1^* + T_1 T_2^* + T_2 T_1^* + T_2 T_2^* \\ &= T_1^* T_1 + T_2^* T_1 + T_1^* T_2 + T_2^* T_2 \\ &= (T_1 + T_2)^* (T_1 + T_2)\end{aligned}$$

ולכן גם $T_1 + T_2$ נורמלית.