אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 2
מטריצות מייצגות, ערכים עצמיים וסכומים ישרים
18.4.2020

תרגיל 1. יהיו V,W מרחבים וקטוריים ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\text{Hom}\left(V,W\right)$. הוכיחו כי יש בסיסים B,C ל־V,W בהתאמה עבור

$$\left(\left[T\right]_C^B\right)_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\in\left[\dim\text{Im}\,T\right]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

לכל $i,j\in\left[n\right]$.

תרגיל 2. יהי $V=\mathbb{F}_n\left[x\right]$ ותהי $A\subseteq\mathbb{F}$ מגודל $n+1$. יהיו $A_1,\ldots,A_k\subseteq\mathbb{F}$ זרות עבורן $A=\bigsqcup_{i\in[k]}A_i$. לכל $i\in\left[k\right]$ נגדיר

$$V_i\coloneqq\left\{p\in V\mid\forall x\in A\setminus A_i:p\left(x\right)=0\right\}.$$

1. יהי L שדה סגור אלגברית המכיל את $\mathbb{F}$ ויהי $p\in L_n\left[x\right]$. יהיו $a_1,\ldots,a_{n+1}\in L$ איברים שונים עבורם $p\left(a_i\right)=0$. הראו כי $p=0$.
2. יהי $p\in\mathbb{F}_n\left[x\right]$ ויהיו $a_1,\ldots,a_{n+1}\in\mathbb{F}$ שונים עבורם $p\left(a_i\right)=0$. הראו כי $p=0$.
3. הראו כי
$$V_i\cap\sum_{j\in[k]\setminus\{i\}}V_j=\left\{0\right\}.$$
4. חשבו את $\dim_{\mathbb{F}}V_i$ לכל $i\in\left[k\right]$ והסיקו כי
$$V=\bigoplus_{i\in[k]}V_i.$$

תרגיל 3 (מרחבי העתקות). יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. יהי $C=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ בסיס של V ויהי $D=\left(w_1,\ldots,w_m\right)$ בסיס של W.

1. עבור $i\in[n],j\in[m]$ נגדיר
$$\begin{aligned}\mu_{i,j}\colon V&\to W\\ \sum_{k\in[n]}\alpha_kv_k&\mapsto\alpha_iw_j\end{aligned}.$$
הראו כי
$$B\coloneqq\left(\mu_{1,1},\ldots,\mu_{1,m},\mu_{2,1},\ldots,\mu_{2,m},\ldots,\mu_{n,1},\ldots,\mu_{n,m}\right)$$
בסיס של $\text{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$.
2. הסיקו כי
$$\dim\text{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)=\dim_{\mathbb{F}}\left(V\right)\cdot\dim_{\mathbb{F}}\left(W\right).$$
3. תהי
$$\begin{aligned}S\colon\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}^2\\ \left(x,y\right)&\mapsto\left(-2y,x\right)\end{aligned}$$
ונגדיר
$$\begin{aligned}T\colon\text{End}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2\right)&\to\text{End}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2\right)\\ U&\mapsto SU\end{aligned}.$$
יהי
$$B\coloneqq\left(\mu_{1,1},\mu_{1,2},\mu_{2,1},\mu_{2,2}\right)$$
כמו בסעיף הראשון עבור $V=W=\mathbb{R}^2$. מצאו את $\left[S\right]_E$ ואת $\left[T\right]_B$.

תרגיל 4. יהיו V, V_1, V_2, W, W_1, W_2 מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$.

1. הראו שמתקיים
$$\dim_{\mathbb{F}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{F}}(V) + \dim_{\mathbb{F}}(W).$$
2. הראו שמתקיים
$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1 \oplus V_2, W) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, W) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_2, W).$$
3. הראו שמתקיים
$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W_1 \oplus W_2) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W_1) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W_2).$$

תרגיל 5. יהיו $V_1, \ldots, V_n$ מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. לכל $i \in [n]$ תהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V_i)$.

1. הראו כי
$$\ker\left(\bigoplus_{i \in [n]} T_i\right) = \bigoplus_{i \in [n]} \ker(T_i).$$
2. הראו כי
$$\operatorname{Im}\left(\bigoplus_{i \in [n]} T_i\right) = \bigoplus_{i \in [n]} \operatorname{Im}(T_i).$$