

אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 7

מכפלות פנימיות וגרם־שמידט

תאריך הגשה: 02.06.2021

תרגיל 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $T: V \rightarrow V$ לינארית. הוכיחו:

1. אם $T^*T = 0$ אז $T = 0$.

2. אם T, T^* מתחלפות, $\ker T = \ker T^*$.

3. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

4. $\ker(T^*) = (\operatorname{Im}(T))^\perp$.

5. $\operatorname{Im}(T^*) = (\ker(T))^\perp$.

תרגיל 2. על $\mathbb{R}_3[x]$ נגדיר מכפלה פנימית לפי

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx$$

מצאו בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}_3[x]$ לפיו להעתקת הגזירה יש צורה משולשת עליונה.

תרגיל 3. יהי

$$W = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \leq \mathbb{R}^3$$

מצאו את המרחק של $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ מ- W .

תרגיל 4. יהי V מרחב מכפלה פנימית עם בסיס אורתונורמלי (v_1, \dots, v_n) , ויהיו $u_1, \dots, u_n \in V$ עבורם

$$\forall i \in [n] : \|v_i - u_i\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

הוכיחו כי (u_1, \dots, u_n) בסיס של V .