אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 3 — סכומים ישרים, מרחבים שמורים והטלות

אלעד צורני

21 באפריל 2021

1 תת־מרחבים שמורים

1.1 חזרה

הגדרה 1.1 (תת־מרחב שמור). תהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. תת־מרחב $W \leq V$ יקרא T־שמור אם $T(W) \subseteq W$.

הגדרה 1.2 (צמצום של העתקה). יהיו $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ו־$W \leq V$ מרחב T־שמור. נגדיר את הצמצום של T ל־W על ידי

$$\begin{aligned} T|_W \colon W &\to W \\ w &\mapsto T(w) \end{aligned}.$$

הערה 1.3. הגדרנו בעבר צמצום של העתקה כללית $T \colon V_1 \to V_2$. בדרך כלל נצמצם העתקות רק לתת־מרחבים שמורים, ואז נתייחס להגדרה הנוכחית. במקרים אחרים נבהיר במיוחד את הכוונה.

הגדרה 1.4 (שרשור של בסיסים). יהיו

$$\begin{aligned} B_1 &= (v_{1,1}, \ldots, v_{1,n_1}) \\ B_2 &= (v_{2,1}, \ldots, v_{2,n_2}) \\ &\vdots \\ B_k &= (v_{k,1}, \ldots, v_{k,n_k}) \end{aligned}$$

קבוצות סדורות. נגדיר את השרשור שלהן על ידי

$$B_1 * \ldots * B_k = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,n_1}, v_{2,1} \ldots, v_{2,n_2}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,n_k}).$$

הגדרה 1.5 (סכום ישר של העתקות). יהי $V = \bigoplus_{i \in [k]} V_i$ ותהיינה $T_i \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V_i)$. נגדיר את הסכום הישר שלהן על ידי

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in [k]} T_i \colon V &\to V \\ \sum_{i \in [k]} \alpha_i v_i &\mapsto \sum_{i \in [k]} \alpha_i T(v_i) \end{aligned}$$

כאשר $v_i \in V_i$ לכל $i \in [k]$.

1.2 תרגילים

תרגיל 1. יהי $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי ממשי ותהי

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned}.$$

מצאו את התת־מרחבים ה־T־שמורים של $\mathbb{C}$ והסיקו כי T אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

פתרון. $\mathbb{C},\{0\}$ תת־מרחבים T־שמורים.
נניח כי $W\leq\mathbb{C}$ מרחב T־שמור נוסף. אז $\dim_{\mathbb{R}}(W)=1$ ולכן יש $z_0\in\mathbb{C}^*:=\{z\in\mathbb{C}\mid z\neq 0\}$ עבורו $W=\operatorname{Span}\{z_0\}$. נקבל $Tz_0\in W$ לכן $Tz_0=cz_0$ עבור $c\in\mathbb{R}$. אבל $cz_0=iz_0$ גורר $c=i$ בסתירה.
תת־מרחבים T־שמורים של $\mathbb{C}$ מתאימים לוקטורים עצמיים. לכן אין ל־T וקטורים עצמיים ממשיים, ולכן אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

תרגיל 2. תהי

$$T\colon\mathbb{F}^4\to\mathbb{F}^4$$

עם

$$[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

מצאו בסיס B של $\mathbb{F}^n$ בו אין ב־$[T]_B$ יותר מבלוק אחד.

הערה 1.6. כל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ היא אלכסונית בלוקים עם בלוק מגודל $n\times n$, כך שאין משמעות לשאלה האם מטריצה היא אלכסונית בלוקים. יש טעם לשאול האם יש במטריצה בלוקים עם יותר מבלוק אחד, או עם גדלים מסוימים של בלוקים.

פתרון. מתקיים

$$Te_1=e_2$$
$$Te_2=e_1.$$

יהי $B=(e_1,e_4,e_3,e_2)$. מתקיים

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

להעתקה T הנ"ל יש תת־מרחבים שמורים $\operatorname{Span}(e_1,e_2),\operatorname{Span}(e_3,e_4)$, אבל מצאנו בסיס B בו $[T]_B$ אינה אלכסונית בלוקים באופן לא טריוויאלי. נרצה לתאר באופן כללי את הקשר בין מטריצות אלכסוניות בלוקים לבין תת־מרחבים שמורים.

הערה 1.7. יהיו $B_1,\ldots,B_k$ בסיסים עבור מרחבים וקטוריים $V_1,\ldots,V_k$. נרצה שהקבוצה הסדורה $B:=B_1*\ldots*B_k$ תהיה בסיס עבור $V_1\oplus\ldots\oplus V_k$, אבל אם למשל ניקח כל B_i להיות הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ זאת תהיה קבוצה עם חזרות.
נוכל תמיד לקחת את המרחבים $V_1,\ldots,V_k$ להיות זרים על ידי בחירת מרחבים וקטוריים איזומורפיים $\tilde{V}_i:=V_i\times\{i\}$ עם פעולות חיבור וכפל לפי הרכיב הראשון. למשל,

$$V_1=\{(v,1)\mid v\in V_1\}$$

עם

$$(u,1)+(v,1)=(u+v,1)$$
$$\alpha(u,1)=(\alpha u,1).$$

לכן ההנחה שהמרחבים $V_1,\ldots,V_k$ זרים אינה מגבילה את הכלליות, ובמקרה זה ראינו כי B בסיס של

$$V_1\oplus\ldots\oplus V_k.$$

תרגיל 3. תהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V_1\oplus\ldots\oplus V_k)$ ויהיו $B_1,\ldots,B_k$ בסיסים עבור $V_1,\ldots,V_k$ בהתאמה. נניח כי $V_1,\ldots,V_k$ זרים. יהיו $n_i:=\dim_{\mathbb{F}}V_i$ ויהי $B=B_1*\ldots*B_n$. הראו שהתנאים הבאים שקולים.

1. $[T]_B$ מטריצה $(n_1,\ldots,n_k)$־אלכסונית בלוקים.
2. לכל $i\in[k]$ המרחב V_i הוא T־שמור.
3. יש העתקות $T_i\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V_i)$ עבורן $T=\bigoplus_{i\in[k]}T_i$.

פתרון. עבור $i \in [k]$ נסמן
$$.m_i := \left(\sum_{j\in[i-1]} n_i\right) + 1$$
אז זה ש־$[T]_B$ מטריצה $(n_1,\dots,n_k)$־אלכסונית בלוקים אומר שלכל $j \in [k]$ מתקיים
$$.\forall i \in [m_j, m_{j+1}-1] : \ [T]_B\, e_i \in \text{Span}\left\{e_\ell \mid \ell \in [m_j, m_j+n_j-1]\right\}$$

1 גורר 2: נניח כי $[T]_B$ מטריצה $(n_1,\dots,n_k)$־אלכסונית בלוקים ויהי $v \in V_i$. אז
$$.[Tv]_B = [T]_B\,[v]_B \in \text{Span}\left\{[T]_B\, e_j \mid j \in [m_i, m_i+n_i-1]\right\} \subseteq \text{Span}\left\{e_j \mid j \in [m_i, m_i+n_i-1]\right\}$$
מתקיים
$$\rho_B\left(V_1\right) = \text{Span}\left\{e_i \mid i \in [m_i, m_i+n_i-1]\right\} \le \mathbb{F}^n$$
לכן
$$Tv = \rho_B^{-1}\left([Tv]_B\right) \in \rho_B^{-1}\left(\text{Span}\left\{e_i \mid i \in [m_i, m_i+n_i-1]\right\}\right) = V_i$$
ולכן V_i מרחב T־שמור.

2 גורר 3: נניח כי כל V_i הוא T־שמור ונגדיר $T_i = T|_{V_i} \in \text{End}_{\mathbb{F}}\left(V_i\right)$. מתקיים
$$.T\left(\sum_{i\in[k]} v_i\right) = \sum_{i\in[k]} T\left(v_i\right) = \sum_{i\in[k]} T_i\left(v_i\right) = \bigoplus_{i\in[k]} T_i\left(v\right)$$

3 גורר 1: עבור $v \in V_i$ מתקיים
$$T\left(v\right) = T_i\left(v\right) \in V_i$$
לכן עבור $j \in [m_i, m_i+n_i-1]$ מתקיים
$$[T]_B\, e_j = [Tv_j]_B \in \rho_B\left(V_i\right) = \text{Span}\left\{e_j \mid j \in [m_i, m_i+n_i-1]\right\}$$
ולכן $[T]_B$ מטריצה $(n_1,\dots,n_k)$־אלכסונית בלוקים.

הערה 1.8. בהמשך הקורס נמצא פירוק של V לסכום של תת־מרחבים T־שמורים V'_λ ונמצא עבורם בסיסים שלפיהם קל למצוא תת־מרחבים T־שמורים. נוכל בעזרת כך לתאר בהמשך דרך לחישוב תת־מרחבים T־שמורים.

2 הטלות

2.1 חזרה

הגדרה 2.1 (הטלה במקביל לתת־מרחב). יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו־$U, W \le V$ עבורם $U \oplus W = V$. נגדיר את ההטלה על U במקביל ל־W להיות ההעתקה
$$\begin{aligned} P_U \colon V &\to V \\ u + w &\mapsto u \end{aligned} \quad .$$

הערה 2.2. ההטלה P_U תלויה ב־W.

דוגמה 2.3. יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהיו
$$\begin{aligned} U &= \text{Span}\left(e_1\right) \\ W_1 &= \text{Span}\left(e_2\right) \\ W_2 &= \text{Span}\left(e_1+e_2\right) \end{aligned}$$
ויהיו P_1, P_2 ההטלות על U במקביל ל־W_1, W_2 בהתאמה.
מתקיים
$$P_1\left(e_1+e_2\right) = e_1$$
אבל
$$.P_2\left(e_1+e_2\right) = 0$$

הגדרה 2.4 (הטלה). העתקה $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ נקראת הטלה אם קיימים $U, W \le V$ עבורם $P = P_U$.

עובדה 2.5. העתקה $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ היא הטלה אם ורק אם $P^2 = P$.

2.2 תרגילים

תרגיל 4. תהי $P\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי $\mathrm{Im}\,(P)$ תת־מרחב P־שמור וכי $P|_{\mathrm{Im}\,P}=\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\,P}$.

פתרון. יהי $v\in \mathrm{Im}\,P$. קיים $u\in V$ עבורו $v=Pu$. אז

$$Pv=P\left(Pu\right)=P^2u=Pu=v\in \mathrm{Im}\,P.$$

תרגיל 5. יהי $n\in\mathbb{N}$. מצאו משלים ישר W של $\mathbb{F}_n\left[x\right]\le\mathbb{F}\left[x\right]$ ומצאו את ההטלה על $\mathbb{F}_n\left[x\right]$ במקביל ל־W.

פתרון. ניקח

$$W=\mathrm{Span}\left\{x^m \mid m>n\right\}.$$

אז ההטלה לוקחת פולינום $p=\sum_{i\in[m]}a_ix^i$ לפולינום $\sum_{i\in[n]}a_ix^i$.

תרגיל 6. יהי $S\le M_n\left(\mathbb{F}\right)$ התת־מרחב של המטריצות הסימטריות. מצאו הטלה

$$P\colon M_n\left(\mathbb{F}\right)\to S.$$

פתרון. יהי $A\le M_n\left(\mathbb{F}\right)$ תת־המרחב של המטריצות האנטי־סימטריות. מטריצה סימטרית ואנטי סימטרית X מקיימת

$$-X=X^t=X$$

לכן $X=0$. מתקיים $M_n\left(\mathbb{F}\right)=S+A$ כי אפשר לכתוב

$$X=\frac{1}{2}\left(X+X^t\right)+\frac{1}{2}\left(X-X^t\right).$$

אז ההטלה על S במקביל ל־A היא

$$X\mapsto\frac{1}{2}\left(X+X^t\right).$$

תרגיל 7. יהי

$$U=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\le\mathbb{R}^3.$$

מצאו משלים ישר W של U, את ההטלה P_U במקביל ל־W ומטריצה מייצגת של P.

פתרון. נשלים את $B:=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ לבסיס $C=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ של $\mathbb{R}^3$ ואז $W:=\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ משלים ישר של U כי $C=B*\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ ומתרגיל מהתרגול הקודם.

אז

$$\begin{aligned}P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&=P\left(\left(x-\frac{y}{2}-z\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{y}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\&=\left(x-\frac{y}{2}-z\right)P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{y}{2}P\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+zP\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\&=\frac{y}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

בבסיס C נקבל

$$\left[P\right]_C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

תרגיל 8. מצאו את כל הערכים העצמיים האפשריים של הטלה.

פתרון. יהי λ ערך עצמי של הטלה P עם וקטור עצמי v. אז

$$\lambda^2 v = P^2 v = Pv = \lambda v$$

לכן $\lambda \in \{0,1\}$.
אפשר לקחת $P = \mathrm{Id}_V$ או $P = 0_V$ ולקבל את שתי האופציות האלו.

תרגיל 9. תהי $P \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי P הטלה על $U \leq V$ במקביל ל־$W \leq V$ אם ורק אם $U = \mathrm{Im}\, P$ וגם $W = \ker P$.

פתרון.

- נניח כי P הטלה על U במקביל ל־W. לכל $u \in U$ מתקיים

$$P(u) = P(u+0) = u$$

לכן $U \subseteq \mathrm{Im}\, P$. להיפך, אם $v \in \mathrm{Im}\, P$ יש $u \in U, w \in W$ עבורם $v = P(u+w) = u \in U$ לכן $\mathrm{Im}\, P = U$.

יהי $w \in W$. מתקיים

$$P(w) = P(0+w) = 0$$

לכן $W \subseteq \ker(P)$. להיפך, נניח כי $v \in \ker P$ ונכתוב $v = u + w$. אז

$$0 = Pv = u$$

לכן $v = w \in W$, לכן $\ker P = \mathrm{Im}\, P$.

- נניח כי $\ker P = W$ וכי $\mathrm{Im}\, P = U$. נניח כי $v \in U \cap W$. ראינו כי $P|_{\mathrm{Im}\, P} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, P}$ לכן $Pv = v$. אבל גם $Pv = 0$, לכן $v = 0$ ולכן U, W זרים. ממשפטי המימדים מתקיים

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}\, P + \ker P) &= \dim(\mathrm{Im}\, P) + \dim(\ker P) - \dim(\mathrm{Im}\, P \cap \ker P)\\ &= \dim(\mathrm{Im}\, P) + \dim(\ker P)\\ &= V\end{aligned}.$$

לכן $V = U \oplus W$. עבור $u \in U, w \in W$ נכתוב $u = P(u')$. אז

$$\begin{aligned}P(u+w) &= P(u) + P(w)\\ &= P(u)\\ &= u\end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון נכון כי $P|_{\mathrm{Im}\, P} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, P}$. לכן P ההטלה על $\mathrm{Im}\, P$ בניצב ל־$\ker P$.

הערה 2.6. בכיוון השני בפתרון הראינו שעבור הטלה P מתקיים $V = \mathrm{Im}\, P \oplus \ker P$.

תרגיל 10. תהי $P \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי P לכסינה.

פתרון. יהי B בסיס עבור $\mathrm{Im}\, P$ ויהי C בסיס עבור $\ker P$. ראינו כי $P|_{\mathrm{Im}\, P} = \mathrm{Id}$ וכי $P|_{\ker P} = 0$ לכן המטריצה המייצגת של P בבסיס $B * C$ היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0\\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & & 0\\ & & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & 0 & & \vdots\\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & & 0\end{pmatrix}.$$

תרגיל 11. תהי $P \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כלשהי. הראו כי $\ker P$ הוא T־שמור אם ורק אם יש $\hat{T}\colon \ker P \to \ker P$ לינארית המקיימת

$$\hat{T} \circ P = P \circ T.$$

כלומר, כך שהדיאגרמה

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V\\ {\scriptstyle P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P}\\ \mathrm{Im}\, P & \xrightarrow[\hat{T}]{} & \mathrm{Im}\, P\end{array}$$

מתחלפת.

פתרון. • נניח כי W הוא T־שמור ויהי $u \in \operatorname{Im} P$. יש $v \in V$ עבורו $P(v) = u$, ואז $P(u) = P^2(u) = P(v) = u$. נגדיר

$$\hat{T}(u) = P \circ T(u).$$

יהי $v \in V$, צריך להראות שמתקיים

$$P \circ T(v) = \hat{T} \circ P(v).$$

נכתוב $v = u + w$ כאשר $u \in \operatorname{Im} P, w \in \ker P$. אז

$$\hat{T} \circ P(v) = \hat{T}(u) = P \circ T(u)$$

וגם

$$T(w) \in \ker P$$

לכן

$$P \circ T(u) = P \circ T(u) + P \circ T(w) = P \circ T(u + w) = P \circ T(v).$$

בסך הכל

$$\hat{T} \circ P(v) = P \circ T(u) = P \circ T(v),$$

כנדרש.

• נניח כי יש העתקה $\hat{T}$ כמתואר ויהי $w \in \ker P$. אז

$$PT(w) = \hat{T}P(w) = \hat{T}(0) = 0$$

ולכן $T(w) \in \ker P$. נקבל $T(\ker P) \subseteq \ker P$.