אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 8 — מכפלות פנימיות, ניצבות ותהליך גרם־שמידט

אלעד צורני

31 במאי 2021

1 מכפלות פנימיות

1.1 חזרה

נרצה הרבה פעמים לדון במושג של זווית בין וקטורים. לשם כך לא מספיקה ההגדרה של מרחב וקטורי, וצריך להסתכל על מבנה נוסף של מכפלה פנימית על מרחב וקטורי.

הגדרה 1.1 (מכפלה פנימית). יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. מכפלה פנימית על V היא העתקה

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

המקיימת את התכונות הבאות.

לינאריות ברכיב הראשון: לכל $u, v, w \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle .$$

הרמיטיות: לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} .$$

מוגדרות חיובית: לכל $v \in V \setminus \{0\}$ מתקיים

$$\langle v, v \rangle > 0 .$$

נרצה פעמים לדון במושג של אורך של וקטורים במרחב וקטורי. לשם כך צריך מבנה נוסף על המרחב הוקטורי, בשם נורמה.
נניח בדיון על מכפלות פנימיות כי אנו עובדים מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1.2 תרגילים

תרגיל 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית.

1. הוכיחו כי אם $\langle v, w \rangle = 0$ לכל $w \in V$ אז $v = 0$.
2. הוכיחו כי אם $\langle v, w \rangle = \langle u, w \rangle$ לכל $w \in V$ אז $v = u$.
3. הוכיחו כי אם $T, S \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ו־$\langle Tu, v \rangle = \langle Su, v \rangle$ לכל $u, v \in V$ אז $T = S$.

פתרון. 1. ניקח $w = v$ ונקבל

$$\langle v, v \rangle = 0 .$$

ולכן $v = 0$.

2. נעביר אגף ונקבל

$$\langle v - u, w \rangle = 0$$

לכל $w \in V$. אז מהסעיף הקודם $v - u = 0$ ולכן $v = u$.

3. נעביר אגף ונקבל

$$\langle (T - S)(u), v \rangle = 0 .$$

לכל $u, v \in V$. אז עבור כל $u \in V$ מתקיים $(T - S)(u) = 0$, ולכן $T(u) = S(u)$.

2 ניצבות

2.1 חזרה

הגדרה 2.1 (וקטורים ניצבים). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, v \in V$. נגיד ש־u, v ניצבים ונכתוב $v \perp u$ אם $\langle u, v\rangle = 0$.

הגדרה 2.2 (מרחב ניצב). יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $S \subseteq V$ תת־קבוצה. נגדיר את המרחב הניצב ל־S על ידי

$$S^{\perp} := \{v \in V \mid \forall u \in S : v \perp u\}.$$

הערה 2.3. $S^{\perp}$ תמיד מרחב וקטורי. אם $u \in v, w$ ו־$\alpha \in \mathbb{F}$, גם $\alpha v + w \perp u$ כי

$$\langle \alpha v + w, u\rangle = \alpha \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle = 0 .$$

טענה 2.4. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. אז

$$\dim (V) = \dim (W) + \dim \left(W^{\perp}\right) .$$

2.2 תרגילים

תרגיל 2. מצאו את $W^{\perp}$ עבור

$$W := \operatorname{Span}(e_1 + e_2) \leq \mathbb{R}^2.$$

פתרון. מתקיים $v \in W^{\perp}$ אם ורק אם $v \perp e_1 + e_2$ אם ורק אם $v_1 + v_2 = 0$ אם ורק אם $v_1 = -v_2$. לכן

$$W^{\perp} = \operatorname{Span}(e_1 - e_2).$$

תרגיל 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. הראו כי $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

פתרון. יהי $w \in W$ ויהי $v \in W^{\perp}$. מהגדרת $W^{\perp}$ מתקיים $\langle w, v\rangle = 0$. לכן $w \in (W^{\perp})^{\perp}$ ולכן $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$. מתקיים

$$\dim \left(\left(W^{\perp}\right)^{\perp}\right) = \dim (V) - \dim \left(W^{\perp}\right) = \dim (W)$$

ולכן בעצם יש שוויון.

תרגיל 4. 1. הראו שאם $S \subseteq T$ תת־קבוצות במרחב מכפלה פנימית אז

$$T^{\perp} \subseteq S^{\perp}.$$

2. הסיקו כי

$$\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{Span}(S) .$$

פתרון. 1. יהי $v \in T^{\perp}$. אז $v \perp u$ לכל $u \in T$. בפרט $v \perp u$ לכל $u \in S$, ולכן $v \in S^{\perp}$.

2. מתקיים $S \subseteq \operatorname{Span}(S)$ ולכן

$$\operatorname{Span}(S)^{\perp} \subseteq S^{\perp}$$

וגם

$$\left(S^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq \left(\operatorname{Span}(S)^{\perp}\right)^{p} erp .$$

אבל, $\operatorname{Span}(S)$ מרחב וקטורי ולכן

$$\left(\operatorname{Span}(S)^{\perp}\right)^{p} erp = \operatorname{Span}(S) .$$

ונקבל כי

$$\left(S^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq \operatorname{Span}(S) .$$

כעת, $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$ כמו בתרגיל הקודם, ולכן $(S^{\perp})^{\perp}$ מרחב וקטורי שמכיל את S ומוכל ב־$\operatorname{Span}(S)$. ממינימליות $\operatorname{Span}(S)$ נקבל כי

$$\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{Span}(S) ,$$

כנדרש.

3 הטלות אורתוגונליות ותהליך גרם־שמידט

3.1 חזרה

הגדרה 3.1 (בסיס אורתוגונלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית. בסיס אורתוגונלי של V הוא בסיס $(v_1, \ldots, v_n)$ עבורו

$$\left\langle v_i, v_j \right\rangle = 0$$

לכל $i, j \in [n]$ שונים.
אם גם $\|v_i\| = 1$ לכל $i \in [n]$, או באופן שקול אם $\left\langle v_i, v_j \right\rangle = \delta_{i,j}$, נאמר שזה בסיס אורתונורמלי.

הגדרה 3.2 (הטלה אורתוגונלית). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$ עם בסיס אורתונורמלי $(w_1, \ldots, w_m)$. ההטלה האורתוגונלית על W היא

$$\begin{aligned} P_W \colon V &\to V \\ v &\mapsto \sum_{i \in [m]} \langle v, w \rangle w \end{aligned} .$$

משפט 3.3 (תהליך גרם־שמידט). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $(v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V. קיים בסיס $(w_1, \ldots, w_n)$ אורתונורמלי של V עבורו $\operatorname{Span}(w_1, \ldots, w_i) = \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_i)$ לכל $i \in [n]$.

3.2 תרגילים

תרגיל 5. יהי

$$W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \leq \mathbb{R}^3 .$$

1. מצאו את $[P_W]_E$.
2. מצאו את $W^\perp$.
3. תהי $p = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. מצאו את המרחק של p מ־W ונקודה $q \in W$ עבורה $\|p - q\|$ שווה למרחק זה.

פתרון. 1. כדי לחשב את P_W נחפש בסיס אורתונורמלי עבור W. ננרמל את $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ונקבל $w = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ עבורו (w) בסיס אורתונורמלי של W. אז

$$P_W(v) = \langle v, w \rangle w .$$

נקבל כי

$$P_W(e_1) = \frac{1}{25}\left\langle e_1, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_W(e_2) = \frac{1}{25}\left\langle e_2, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_W(e_3) = \frac{1}{25}\left\langle e_3, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ולכן

$$.\,[P_W]_E = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. כדי למצוא את $W^{\perp}$ נשלים את $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ לבסיס של $\mathbb{R}^3$ ונבצע את תהליך גרם־שמידט כדי לקבל בסיס אורתונורמלי.

יהי $B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2, e_3\right)$ בסיס ל־$\mathbb{R}^3$. ננרמל את הוקטור הראשון ונקבל $w_1 := w$. נגדיר

$$\begin{aligned} \hat{w}_2 &:= e_2 - \langle e_2, w_1 \rangle w_1 \\ &= e_2 - \frac{1}{25}\left\langle e_2, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e_2 - \frac{4}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{12}{25} \\ \frac{9}{25} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ואז

$$\|\hat{w}_2\| = \frac{1}{25}\sqrt{12^2 + 9^2} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

ונקבל

$$.w_2 = \frac{\hat{w}_2}{\|\hat{w}_2\|} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נגדיר

$$\begin{aligned} \hat{w}_3 &:= e_3 - \cancelto{0}{\langle e_3, w_2 \rangle} w_2 - \cancelto{0}{\langle e_3, w_1 \rangle} w_1 \\ &= e_3 \end{aligned}$$

וגם

$$.w_3 = \frac{\hat{w}_3}{\|\hat{w}_3\|} = \frac{e_3}{1} = e_3$$

אז

$$.W^{\perp} = \operatorname{Span}(w_2, w_3) = \operatorname{Span}(\hat{w}_2, \hat{w}_3) = \operatorname{Span}\left(\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3\right)$$

נמצא קודם נקודה $q \in W$ כמתואר. ידוע כי נקודה זאת היא $P_W(p)$. מתקיים

$$.P_W(p) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז המרחק הוא

$$\begin{aligned}\left\|\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\right\| &= \sqrt{(5-3)^2+(5-2)^2+5^2}\\ &= \sqrt{4+9+25}\\ &= \sqrt{38}\end{aligned}.$$

4 האופרטור הצמוד ומשפט ריס

4.1 חזרה

הגדרה 4.1 (האופרטור הצמוד). יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. האופרטור הצמוד של T שנסמנו T^* הוא האופרטור היחיד $T^*\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורו

$$\langle Tu,v\rangle=\langle u,T^*v\rangle$$

לכל $u,v\in V$.

משפט 4.2 (ריס). לכל $f\in V^*$ קיים $v\in V$ עבורו $f(u)=\langle u,v\rangle$ לכל $u\in V$.

4.2 תרגילים

תרגיל 6. יהי $V=M_2(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^tA\right).$$

נגדיר

$$T\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&c\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3d&2c\\-b&4a\end{pmatrix}.$$

חשבו את T^* בשתי דרכים שונות.

פתרון. **דרך 1:** נמצא את התנאים על מקדמי T^* בעזרת המכפלה הפנימית. מתקיים

$$\begin{aligned}\left\langle T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}\right\rangle &= \left\langle\begin{pmatrix}3d&2c\\-b&4a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}\right\rangle\\ &= 3de+2cf-bg+4ah\\ &= \left\langle\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4h&-g\\2f&3e\end{pmatrix}\right\rangle\end{aligned}$$

ולכן

$$T^*\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4h&-g\\2f&3e\end{pmatrix}.$$

דרך 2: נשים לב כי

$$E=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

בסיס אורתונורמלי ל־$M_2(\mathbb{R})$. נחשב:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}0&0&0&3\\0&0&2&0\\0&-1&0&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}$$

כיוון ש־E אורתונורמלי, מתקיים

$$[T^*]_E = [T]_E^* := \overline{[T]_E}^t$$

ולכן

$$[T^*]_E = [T]_E^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$T^* \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4h & -g \\ 2f & 3e \end{pmatrix}.$$

תרגיל 7. 1. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $C > 0$ כך שלכל $p \in \mathbb{R}_n[x]$ מתקיים

$$|p(0)| \leq C \left(\int_{-1}^{1} p(x)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. חשבו את C המינימלי עבור $n = 2$.

פתרון. 1. נשים לב כי

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

מכפלה פנימית. אז

$$\left(\int_{-1}^{1} p(x)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\langle p, p \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \|p\|.$$

כלומר, עלינו להוכיח

$$|p(0)| \leq C \|p\|.$$

ההצבה

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_0 : \mathbb{R}_n[x] &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

היא פונקציונל לינארי, ולכן ממשפט ריס יש $g \in \mathbb{R}_n[x]$ עבורו

$$p(0) = \mathrm{ev}_0(p) = \langle p, g \rangle.$$

עכשיו, מקושי־שוורץ

$$|p(0)| = |\langle p, g \rangle| \leq \|p\| \|g\|.$$

לכן ניקח $C = \|g\|$.

2. נסמן $g(x) = ax^2 + bx + c$. נשים לב כי כאשר $p = g$ יש שוויון בקושי־שוורץ ואז

$$|p(0)| = \|p\| \|g\| \leq C \|p\|.$$

גורר $C \geq \|g\|$. ראינו כי $C = \|g\|$ מקיים את הנדרש, ולכן נותר למצוא את $\|g\|$. כעת

$$\begin{aligned} 1 = 1(0) = \langle g(x), 1 \rangle = \int_{-1}^{1} g(x) \, \mathrm{d}x = \left. \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right|_{x=-1}^{1} = \frac{2a}{3} + 2c \\ 0 = x(0) = \langle g(x), x \rangle = \int_{-1}^{1} g(x) x \, \mathrm{d}x = \left. \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} \right|_{x=-1}^{1} = \frac{2b}{3} \\ 0 = x^2(0) = \left\langle g(x), x^2 \right\rangle = \int_{-1}^{1} g(x) x^2 \, \mathrm{d}x = \left. \frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3} \right|_{x=-1}^{1} = \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3}. \end{aligned}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $b = 0$. מהמשוואה הראשונה פחות 3 פעמים השנייה נקבל

$$1 = \frac{2a}{3} - 3 \cdot \frac{2a}{5} + 0 = \frac{10a - 18a}{15}$$

ולכן $a = -\frac{15}{8}$. אז מהמשוואה השלישית נקבל

$$c = -\frac{3a}{5} = -\frac{9}{8}$$

ולכן

$$g(x) = -\frac{15}{8}x^2 - \frac{9}{8}.$$

אז

$$C = \|g\| = \int_{-1}^{1} -\frac{15}{8}x^2 - \frac{9}{8}\,\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}.$$