

אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 8

העתקות נורמליות, צמודות לעצמן ואורתוגונליות

14.06.2021

תרגיל 1. 1. הראו כי עבור $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים

$$\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} a_{j,i}$$

2. הסיקו שעבור $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים

$$\text{tr}(B^t A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$$

3. עבור $i, j \in [n]$ נסמן ב- $E_{i,j}$ את המטריצה עבורה

$$(E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k} \delta_{j,\ell}$$

(כלומר, שיש בה 1 במקום i, j ו-0 בכל שאר המקומות). נסמן

$$E := (E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{2,n}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{n,n})$$

ונקרא לו **הבסיס הסטנדרטי של $M_n(\mathbb{F})$** . הסיקו כי

$$\text{tr}(B^t A) = \langle A, B \rangle_E := \langle [A]_E, [B]_E \rangle$$

כאשר המכפלה הפנימית בצד ימין היא הסטנדרטית על \mathbb{R}^{n^2} .

תרגיל 2. יהי $V = M_n(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ ותהי $B \in V$. נגדיר אופרטור

$$T_B: V \rightarrow V \\ A \mapsto BA$$

1. חשבו את T_B^* .

2. עבור אילו מטריצות B ההעתקה T_B נורמלית?

3. עבור אילו מטריצות B ההעתקה T_B צמודה לעצמה?

4. עבור אילו מטריצות B ההעתקה T_B אורתוגונלית?

תרגיל 3. יהי $V = M_2(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ ותהי

$$T: V \rightarrow V \\ A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

מצאו את T^* .