

# אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 6

## הפולינום המינימלי וההעתקה המשוכללת

תאריך הגשה: 25.05.2021

**תרגיל 1.** עבור פולינום מתוקן  $p \in \mathbb{F}[x]$  נכתוב

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$$

כאשר  $c_n = 1$ , ונגדיר את **המטריצה המלווה של  $p$  על ידי**

$$C(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

נתון כי עבור  $p \in \mathbb{F}[x]$  הפולינומים האופייני והמינימלי של  $C(p)$  שווים ל- $p$  (הוכחה לכך מופיעה ברשימות תרגול).<sup>(7)</sup>

1. הראו שהתנאים הבאים שקולים עבור  $A \in M_n(\mathbb{F})$ .  
מותר להניח כי  $\mathbb{F}$  סגור אלגברית, למרות שזה לא נחוץ.

(i)  $A$  דומה ל- $C(p_A)$ .

(ii) הפולינום האופייני של  $A$  שווה לפולינום המינימלי שלה.

(iii) יש וקטור  $v \in \mathbb{F}^n$  ציקלי עבור  $A$ , במובן ש- $(v, Av, \dots, A^{n-1}v)$  בסיס של  $V$ .

2. עבור  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  ו- $v \in V$  נגדיר את **הפולינום המינימלי של  $T$  ביחס ל- $v$**  להיות הפולינום המתוקן  $m_{T,v}$  מהמעלה הנמוכה ביותר עבורו  $m_{T,v}(T)(v) = 0$ .  
הראו כי  $\deg_{\mathbb{F}} m_{T,v} \geq k$  אם ורק אם

$$(v, Tv, \dots, T^{k-1}v)$$

בלתי-תלויה לינארית.

3. מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

נקראת **בלוק רציונלי**. מטריצת בלוקים שכל בלוקיה הם בלוקים רציונליים נקראת **מטריצה רציונלית קנונית**.

תהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  עבור  $\mathbb{F}$  סגור אלגברית. הראו שקיים בסיס  $B$  של  $V$  עבורו  $[T]_B$  מטריצה רציונלית קנונית.

**רמז:** השתמשו בבסיס ז'ורדן כדי לבנות תת-מרחבים מהצורה

$$\text{Span}(v, Av, \dots, A^{n-1}v)$$

וכך ש- $V$  הוא הסכום הישר שלהם.

**תרגיל 2.** עבור  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  נגדיר

$$\begin{aligned} T^t: W^* &\rightarrow V^* \\ f &\mapsto f \circ T \end{aligned}$$

1. הראו כי עבור  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  מתקיים  $T^t \sim T$ .
2. הראו כי עבור  $A \in M_n(\mathbb{F})$  מתקיים  $L_A^t \sim L_{A^t}$  וגם  $L_A^t \sim R_A$  ו- $R_A^t \sim L_A$ . הסיקו כי מתקיים  $L_A \sim L_{A^t} \sim R_A \sim R_{A^t}$ .