אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
עוד תרגילים

אלעד צורני

19 באפריל 2021

2 מרחבי העתקות

תרגיל 1. תהי $S := \{4\}$ ויהי $V = \mathbb{R}^S$ מרחב הפונקציות מ־S ל־$\mathbb{R}$. תהי

$$\begin{aligned} f \colon S &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto n^2 - 1 \end{aligned}$$

ותהי

$$\begin{aligned} m_f \colon \mathbb{R}^S &\to \mathbb{R}^S \\ g &\mapsto fg \end{aligned} .$$

מצאו בסיס של $\mathbb{R}^S$ ומטריצה מייצגת של m_f לפי אותו בסיס.

פתרון. נשים לב כי $B := (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ בסיס עבור $\mathbb{R}^S$, כי זאת קבוצה בלתי־תלויה לינארית וכי עבור כל $g \in \mathbb{R}^S$ ו־$n \in [4]$ מתקיים

$$g(n) = \sum_{i \in [4]} g(i) \delta_i(n).$$

מתקיים

$$m_f(\delta_1) = f\delta_1 = f(1)\delta_1$$

ובאותו אופן $m_f(\delta_i) = f(i)\delta_i$ לכל $i \in [4]$. לכן

$$\begin{aligned} [m_f]_B &= \begin{pmatrix} f(1) & & & \\ & f(2) & & \\ & & f(3) & \\ & & & f(4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 3 & & \\ & & 8 & \\ & & & 15 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

תרגיל 2. הראו כי

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) = \dim_{\mathbb{F}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{F}}(W) .$$

פתרון. יהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ויהי $C = (w_1, \ldots, w_m)$ בסיס של w. עבור $i \in [n], j \in [m]$ תהי

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} \colon V &\to W \\ \sum_{k \in [n]} \alpha_k v_k &\to \alpha_i w_j \end{aligned} .$$

נראה כי

$$B = (\rho_{1,1}, \ldots, \rho_{1,2}, \ldots, \rho_{1,n}, \rho_{2,1}, \ldots, \rho_{2,n}, \ldots, \rho_{n,1}, \ldots, \rho_{n,n})$$

בסיס של $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$. מספיק להראות שזאת קבוצה בלתי־תלויה לינארית, ואכן אם

$$\rho_{i,j}=\sum_{(k,\ell)\neq(i,j)}\alpha_{k,\ell}\rho_{k,\ell}$$

נקבל

$$\rho_{i,j}(v_i)=w_j$$

אבל

$$\sum_{(k,\ell)\neq(i,j)}\alpha_{k,\ell}\rho_{k,\ell}(v_i)=\sum_{\ell\neq j}\alpha_{i,\ell}w_\ell$$

וזה שונה מ־w_j כי $(w_1,\ldots,w_m)$ בלתי־תלויה.

תרגיל 3. תהי

$$\begin{aligned}S\colon \mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\mapsto(-2y,x)\end{aligned}.$$

נגדיר

$$\begin{aligned}T\colon \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)&\to\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)\\ U&\mapsto SU\end{aligned}.$$

יהי

$$B=(\rho_{i,j})\,i,j\in[2]$$

כאשר $\rho_{i,j}$ מוגדרות כמו בסעיף הקודם לפי הבסיסים הסטנדרטיים על $\mathbb{R}^2$.

1. מצאו את $[S]_E$.
2. מצאו את $[T]_B$.

פתרון. 1. $Se_1=e_2$ וגם $Se_2=-2e_1$ לכן

$$[S]_E=\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}.$$

2. מתקיים

$$\begin{aligned}
T\rho_{1,1}e_1&=S\rho_{1,1}e_1=Se_1=e_2\\
T\rho_{1,1}e_2&=S\rho_{1,1}e_2=S0=0\\
T\rho_{1,2}e_1&=S\rho_{1,2}e_1=Se_2=-2e_1\\
T\rho_{1,2}e_2&=S\rho_{1,2}e_2=S0=0\\
T\rho_{2,1}e_1&=S\rho_{2,1}e_1=S0=0\\
T\rho_{2,1}e_2&=S\rho_{2,1}e_2=Se_1=e_2\\
T\rho_{2,2}e_1&=S\rho_{2,2}e_1=S0=0\\
T\rho_{2,2}e_2&=S\rho_{2,2}e_2=Se_2=-2e_1
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
T\rho_{1,1}&=\rho_{1,2}\\
T\rho_{1,2}&=-2\rho_{1,1}\\
T\rho_{2,1}&=\rho_{2,2}\\
T\rho_{2,2}&=-2\rho_{2,1}
\end{aligned}$$

ולכן

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&-2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S&0\\0&S\end{pmatrix}.$$

סכומים ישרים

הגדרה 2.1 (מכפלה של מרחבים וקטוריים). יהי $\mathcal{S}$ אוסף סדור (לאו דווקא סופי או בן־מנייה) של מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$ (עם חזרות). נגדיר את המכפלה

$$\prod_{V\in\mathcal{S}} V$$

להיות המכפלה התורת־קבוצתית עם חיבור וכפל בסקלר רכיב רכיב.
אם $\mathcal{S}=(V_1,\ldots,V_n)$ סופי, נכתוב לפעמים

$$V_1\times\ldots\times V_n := \prod_{V\in\mathcal{S}} V.$$

אם כל איברי $\mathcal{S}$ שווים לאותו מרחב V נכתוב לפעמים

$$V^{|\mathcal{S}|} := \prod_{V\in\mathcal{S}} V.$$

תרגיל 4. תהי $S:=\{4\}$ ויהי $V=\mathbb{R}^S$ מרחב הפונקציות מ־S ל־$\mathbb{R}$. תהי

$$\begin{aligned} f\colon S &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto n^2-1 \end{aligned}$$

ותהי

$$\begin{aligned} m_f\colon \mathbb{R}^S &\to \mathbb{R}^S \\ g &\mapsto fg \end{aligned}.$$

מצאו בסיס של $\mathbb{R}^S$ ומטריצה מייצגת של m_f לפי אותו בסיס.

פתרון. נשים לב כי $B:=(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$ בסיס עבור $\mathbb{R}^S$, כי זאת קבוצה בלתי־תלויה לינארית וכי עבור כל $g\in\mathbb{R}^S$ ו־$n\in[4]$ מתקיים

$$g(n)=\sum_{i\in[4]} g(i)\,\delta_i(n).$$

מתקיים

$$m_f(\delta_1)=f\delta_1=f(1)\,\delta_1$$

ובאותו אופן $m_f(\delta_i)=f(i)\,\delta_i$ לכל $i\in[4]$. לכן

$$\begin{aligned} [m_f]_B &= \begin{pmatrix} f(1) & & & \\ & f(2) & & \\ & & f(3) & \\ & & & f(4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 3 & & \\ & & 8 & \\ & & & 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

תרגיל 5.

1. הראו שמתקיים
$$\dim_{\mathbb{F}}(V\times W)=\dim_{\mathbb{F}} V+\dim_{\mathbb{F}} W.$$

2. הראו שמתקיים
$$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)=(\dim_{\mathbb{F}} V)(\dim_{\mathbb{F}} W).$$

3. הסיקו שמתקיים
$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W_1\times\ldots\times W_n)\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W_1)\times\ldots\times\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W_n)$$
וגם
$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1\times\ldots\times V_n,W)\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1,W)\times\ldots\times\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_n,W).$$

פתרון.

הגדרה 2.2 (מכפלה של העתקות). תהי $\mathcal{I}$ קבוצה סדורה עם חזרות, יהיו $(W_i)_{i\in\mathcal{I}}$,$(V_i)_{i\in\mathcal{I}}$ מרחבים וקטוריים ויהיו $(T_i)_{i\in\mathcal{I}}$ העתקות לינאריות כך ש־

$$T_i \colon V_i \to W_i.$$

נגדיר את המכפלה

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} T_i \colon \prod_{i\in\mathcal{I}} V_i \to \prod_{i\in\mathcal{I}} W_i$$
$$(v_i)_{i\in\mathcal{I}} \mapsto (T_i v_i)_{i\in\mathcal{I}}.$$

אם $\mathcal{I}$ סופית, ניקח בדרך כלל $\mathcal{I} = [n]$ ואז נכתוב לפעמים

$$T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n \coloneqq \prod_{i\in[n]} T_i.$$

תרגיל 6. 1. יהיו $V_1 \coloneqq \mathbb{R}^3$ עם הבסיס הסטנדרטי $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ ו־$V_2 \coloneqq \mathbb{R}^2$ עם הבסיס הסטנדרטי $B_2 = (f_1, f_2)$.

יהי $B = (e_1, e_2, e_3, f_1, f_2)$ בסיס של $V_1 \times V_2$, ותהיינה

$$T_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$$

ו־

$$T_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

חשבו את $(T_1 \times T_2)_B$.

2. יהיו $(V_i)_{i\in[n]}$ מרחבים וקטוריים עם בסיסים

$$B_i \coloneqq \left(v_1^{(i)}, \ldots, v_{k_i}^{(i)}\right)$$

בהתאמה. לכל $i \in [n]$ תהי $T_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_i, V_i)$. יהי

$$B = \left(v_1^{(1)}, \ldots, v_{k_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(n)}, \ldots, v_{k_n}^{(n)}\right).$$

הראו כי

$$[T_1 \times \ldots \times T_n]_B$$

מטריצה $(k_1, \ldots, k_n)$אלכסונית בלוקים.

תרגיל 7. תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ הערכים העצמיים השונים של T. נראה בתרגיל זה כי T לכסינה אם ורק אם

$$V = \bigoplus_{i\in[k]} V_\lambda.$$

1. נניח כי

$$V = \bigoplus_{i\in[k]} V_\lambda.$$

הראו כי יש בסיס של V שמורכב מוקטורים עצמיים של T והסיקו כי T לכסינה.

2. נניח כי T לכסינה. הראו שניתן לכתוב

$$V = \bigoplus_{i\in[k]} V'_{\lambda_i}$$

עבור $V'_{\lambda_i} \subseteq V_{\lambda_i}$ לכל $i \in [k]$.

3. הראו תחת הנחות הסעיף הקודם שמתקיים $V'_{\lambda_i}=V_{\lambda_i}$ והסיקו כי במקרה זה
$$V=\bigoplus_{i\in[k]}V_\lambda.$$

תרגיל 8. יהיו V,W מרחבים וקטוריים n־מימדיים מעל $\mathbb{F}$. תהי $T\in\mathsf{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ עם מרחב עצמי V_λ. נקרא ל־$\dim_{\mathbb{F}}V_\lambda$ הריבוי הגיאומטרי של λ כערך עצמי של T.

1. תהי $S\in\mathsf{End}_{\mathbb{F}}(W)$. ויהי $P\in\mathsf{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ איזומורפיזם עבורו $T=P^{-1}SP$. הראו של־T,S אותם ערכים עצמיים מאותם ריבויים גיאומטריים.
2. הסיקו ש־S לכסינה אם ורק אם T לכסינה.
3. נניח כי T לכסינה ותהי $S'\in\mathsf{End}_{\mathbb{F}}(W)$ עם אותם ערכים עצמיים וריבויים גיאומטריים כמו של T. הראו כי $T\sim S'$.

תרגיל 9 (נילפוטנטיות). העתקה לינארית $T\colon V\to V$ נקראת נילפוטנטית אם קיים $n\in\mathbb{N}_+$ עבורו $T^n=0$. n המינימלי המקיים זאת נקרא האינדקס של T.

1. הראו שצירוף לינארי של העתקות נילפוטנטיות הוא נילפוטנטי.
2. הראו שעבור $T\colon V\to V$ נילפוטנטית מתקיים $\mathsf{det}(T)=\mathsf{tr}(T)=0$.
3. הראו שעבור $T\colon V\to V$ נילפוטנטית הערך העצמי היחיד הוא 0. הסיקו שעבור T נילפוטנטית ולכסינה מתקיים $T=0$.
4. תהי T נילפוטנטית. הראו שההעתקות $\mathsf{Id}_V\pm T$ הפיכות.

   רמז: נסו לחשוב על ההופכי של $x\pm 1$ כאשר x מספר.
5. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ ותהי T נילפוטנטית מאינדקס k. לכל $i\in[k]$ נסמן $n_i:=\mathsf{dim}\,\mathsf{ker}\,T^i$. הראו שמתקיים
$$0<n_1<n_2<\ldots<n_{k-1}<n_k=n.$$
6. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ ותהי $T\colon V\to V$. יהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V ותהי
$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ v_1&\mapsto 0\\ \forall i>1\colon v_i&\mapsto v_{i-1}.\end{aligned}$$
   הראו כי T נילפוטנטית מאינדקס n וכיתבו את $[T]_B$.
7. נאמר כי $A\in M_n(\mathbb{F})$ נילפוטנטית אם L_A נילפוטנטית.

   תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ אלכסונית בלוקים $(m_1,\ldots,m_k)$ כאשר כל בלוק A_i נילפוטנטי מאינדקס n_i. הראו ש־A נילפוטנטית מאינדקס $\mathsf{max}_{i\in[k]}(n_i)$.
8. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ ותהי
$$0<n_1<n_2<\ldots<n_{k-1}<n_k=n$$
   סדרת מספרים.

   הראו שיש העתקה $T\colon V\to V$ כך שמתקיים $n_i=\mathsf{dim}\,\mathsf{ker}\,T^i$ לכל $i\in[k]$.

תרגיל 10. פולינום $p\in\mathbb{F}[x]$ נקרא מתוקן אם המקדם המוביל שלו שווה 1. עבור פולינום כזה ממעלה $n\in\mathbb{N}$ נכתוב
$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$$
כאשר $c_n=1$, ונגדיר את המטריצה המלווה של p על ידי
$$C(p):=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-c_0\\1&0&\cdots&0&-c_1\\0&1&\cdots&0&-c_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\ldots&1&-c_{n-1}\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F}).$$

1. יהי $p \in \mathbb{F}[x]$ ממעלה $n \in \mathbb{N}$. מצאו את הפולינום המינימלי של $C(p)$.
רמז: השתמשו בעובדה שהפולינום המינימלי של מטריצה A שווה ל־$\det(xI - A)$ וחשבו את הדטרמיננטה לפי השורה הראשונה.

2. הראו שהתנאים הבאים שקולים עבור $A \in M_n(\mathbb{F})$.
   (i) A דומה ל־$C(p_A)$.
   (ii) לכל פולינום $p \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$ מתקיים $p(A) \neq 0$.
   (iii) יש וקטור $v \in \mathbb{F}^n$ ציקלי עבור A במובן שהקבוצה $\{v, Av, \ldots, A^{n-1}v\}$ היא בסיס של V.