אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
עוד תרגילים

אלעד צורני

16 ביוני 2021

2 מרחבי העתקות

תרגיל 1. תהי $S \coloneqq \{4\}$ ויהי $V = \mathbb{R}^S$ מרחב הפונקציות מ־S ל־$\mathbb{R}$. תהי

$$\begin{aligned} f \colon S &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto n^2 - 1 \end{aligned}$$

ותהי

$$\begin{aligned} m_f \colon \mathbb{R}^S &\to \mathbb{R}^S \\ g &\mapsto fg \end{aligned} .$$

מצאו בסיס של $\mathbb{R}^S$ ומטריצה מייצגת של m_f לפי אותו בסיס.

פתרון. נשים לב כי $B \coloneqq (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ בסיס עבור $\mathbb{R}^S$, כי זאת קבוצה בלתי־תלויה לינארית וכי עבור כל $g \in \mathbb{R}^S$ ו־$n \in [4]$ מתקיים

$$g(n) = \sum_{i \in [4]} g(i)\, \delta_i(n) .$$

מתקיים

$$m_f(\delta_1) = f\delta_1 = f(1)\,\delta_1$$

ובאותו אופן $m_f(\delta_i) = f(i)\,\delta_i$ לכל $i \in [4]$. לכן

$$\begin{aligned} [m_f]_B &= \begin{pmatrix} f(1) & & & \\ & f(2) & & \\ & & f(3) & \\ & & & f(4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 3 & & \\ & & 8 & \\ & & & 15 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

תרגיל 2. הראו כי

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) = \dim_{\mathbb{F}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{F}}(W) .$$

פתרון. יהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ויהי $C = (w_1, \ldots, w_m)$ בסיס של w. עבור $i \in [n], j \in [m]$ תהי

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} \colon V &\to W \\ \sum_{k \in [n]} \alpha_k v_k &\to \alpha_i w_j \end{aligned} .$$

נראה כי

$$B = (\rho_{1,1}, \ldots, \rho_{1,2}, \ldots, \rho_{1,n}, \rho_{2,1}, \ldots, \rho_{2,n}, \ldots, \rho_{n,1}, \ldots, \rho_{n,n})$$

בסיס של $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$. מספיק להראות שזאת קבוצה בלתי־תלויה לינארית, ואכן אם

$$\rho_{i,j}=\sum_{(k,\ell)\neq(i,j)}\alpha_{k,\ell}\rho_{k,\ell}$$

נקבל

$$\rho_{i,j}(v_i)=w_j$$

אבל

$$\sum_{(k,\ell)\neq(i,j)}\alpha_{k,\ell}\rho_{k,\ell}(v_i)=\sum_{\ell\neq j}\alpha_{i,\ell}w_\ell$$

וזה שונה מ־w_j כי $(w_1,\dots,w_m)$ בלתי־תלויה.

תרגיל 3. תהי

$$\begin{aligned}S\colon \mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\mapsto(-2y,x)\end{aligned}.$$

נגדיר

$$\begin{aligned}T\colon \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)&\to\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)\\ U&\mapsto SU\end{aligned}.$$

יהי

$$B=(\rho_{i,j})\, i,j\in[2]$$

כאשר $\rho_{i,j}$ מוגדרות כמו בסעיף הקודם לפי הבסיסים הסטנדרטיים על $\mathbb{R}^2$.

1. מצאו את $[S]_E$.
2. מצאו את $[T]_B$.

פתרון. 1. $Se_1=e_2$ וגם $Se_2=-2e_1$ לכן

$$[S]_E=\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}.$$

2. מתקיים

$$\begin{aligned}
T\rho_{1,1}e_1&=S\rho_{1,1}e_1=Se_1=e_2\\
T\rho_{1,1}e_2&=S\rho_{1,1}e_2=S0=0\\
T\rho_{1,2}e_1&=S\rho_{1,2}e_1=Se_2=-2e_1\\
T\rho_{1,2}e_2&=S\rho_{1,2}e_2=S0=0\\
T\rho_{2,1}e_1&=S\rho_{2,1}e_1=S0=0\\
T\rho_{2,1}e_2&=S\rho_{2,1}e_2=Se_1=e_2\\
T\rho_{2,2}e_1&=S\rho_{2,2}e_1=S0=0\\
T\rho_{2,2}e_2&=S\rho_{2,2}e_2=Se_2=-2e_1
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
T\rho_{1,1}&=\rho_{1,2}\\
T\rho_{1,2}&=-2\rho_{1,1}\\
T\rho_{2,1}&=\rho_{2,2}\\
T\rho_{2,2}&=-2\rho_{2,1}
\end{aligned}$$

ולכן

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&-2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S&0\\0&S\end{pmatrix}.$$

סכומים ישרים

הגדרה 2.1 (מכפלה של מרחבים וקטוריים). יהי $\mathcal{S}$ אוסף סדור (לאו דווקא סופי או בן־מנייה) של מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$ (עם חזרות). נגדיר את המכפלה

$$\prod_{V\in\mathcal{S}} V$$

להיות המכפלה התורת־קבוצתית עם חיבור וכפל בסקלר רכיב רכיב.
אם $\mathcal{S}=(V_1,\ldots,V_n)$ סופי, נכתוב לפעמים

$$V_1\times\ldots\times V_n \coloneqq \prod_{V\in\mathcal{S}} V.$$

אם כל איברי $\mathcal{S}$ שווים לאותו מרחב V נכתוב לפעמים

$$V^{|\mathcal{S}|} \coloneqq \prod_{V\in\mathcal{S}} V.$$

תרגיל 4. תהי $S\coloneqq\{4\}$ ויהי $V=\mathbb{R}^S$ מרחב הפונקציות מ־S ל־$\mathbb{R}$. תהי

$$\begin{aligned} f\colon S&\to\mathbb{R}\\ n&\mapsto n^2-1\end{aligned}$$

ותהי

$$\begin{aligned} m_f\colon \mathbb{R}^S&\to\mathbb{R}^S\\ g&\mapsto fg\end{aligned}.$$

מצאו בסיס של $\mathbb{R}^S$ ומטריצה מייצגת של m_f לפי אותו בסיס.

פתרון. נשים לב כי $B\coloneqq(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$ בסיס עבור $\mathbb{R}^S$, כי זאת קבוצה בלתי־תלויה לינארית וכי עבור כל $g\in\mathbb{R}^S$ ו־$n\in[4]$ מתקיים

$$g(n)=\sum_{i\in[4]} g(i)\,\delta_i(n).$$

מתקיים

$$m_f(\delta_1)=f\delta_1=f(1)\,\delta_1$$

ובאותו אופן $m_f(\delta_i)=f(i)\,\delta_i$ לכל $i\in[4]$. לכן

$$\begin{aligned}[m_f]_B&=\begin{pmatrix} f(1)&&&\\ &f(2)&&\\ &&f(3)&\\ &&&f(4)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 0&&&\\ &3&&\\ &&8&\\ &&&15\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

תרגיל 5.
1. הראו שמתקיים
$$\dim_{\mathbb{F}}(V\times W)=\dim_{\mathbb{F}}V+\dim_{\mathbb{F}}W.$$
2. הראו שמתקיים
$$\dim_{\mathbb{F}}\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)=(\dim_{\mathbb{F}}V)(\dim_{\mathbb{F}}W).$$
3. הסיקו שמתקיים
$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W_1\times\ldots\times W_n)\cong\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W_1)\times\ldots\times\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W_n)$$
וגם
$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1\times\ldots\times V_n,W)\cong\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1,W)\times\ldots\times\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_n,W).$$

פתרון.

הגדרה 2.2 (מכפלה של העתקות). תהי $\mathcal{I}$ קבוצה סדורה עם חזרות, יהיו $(V_i)_{i\in\mathcal{I}}, (W_i)_{i\in\mathcal{I}}$ מרחבים וקטוריים ויהיו $(T_i)_{i\in\mathcal{I}}$ העתקות לינאריות כך ש־
$$T_i \colon V_i \to W_i.$$
נגדיר את המכפלה
$$\prod_{i\in\mathcal{I}} T_i \colon \prod_{i\in\mathcal{I}} V_i \to \prod_{i\in\mathcal{I}} W_i$$
$$(v_i)_{i\in\mathcal{I}} \mapsto (T_i v_i)_{i\in\mathcal{I}}.$$
אם $\mathcal{I}$ סופית, ניקח בדרך כלל $\mathcal{I} = [n]$ ואז נכתוב לפעמים
$$T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n \coloneqq \prod_{i\in[n]} T_i.$$

תרגיל 6. 1. יהיו $V_1 \coloneqq \mathbb{R}^3$ עם הבסיס הסטנדרטי $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ ו־$V_2 \coloneqq \mathbb{R}^2$ עם הבסיס הסטנדרטי $B_2 = (f_1, f_2)$.

יהי $B = (e_1, e_2, e_3, f_1, f_2)$ בסיס של $V_1 \times V_2$, ותהיינה
$$T_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$$
ו־
$$T_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$
חשבו את $(T_1 \times T_2)_B$.

2. יהיו $(V_i)_{i\in[n]}$ מרחבים וקטוריים עם בסיסים
$$B_i \coloneqq \left(v_1^{(i)}, \ldots, v_{k_i}^{(i)}\right)$$
בהתאמה. לכל $i \in [n]$ תהי $T_i \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_i, V_i)$. יהי
$$B = \left(v_1^{(1)}, \ldots, v_{k_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(n)}, \ldots, v_{k_n}^{(n)}\right).$$
הראו כי
$$[T_1 \times \ldots \times T_n]_B$$
מטריצה $(k_1, \ldots, k_n)$אלכסונית בלוקים.

תרגיל 7. תהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ הערכים העצמיים השונים של T. נראה בתרגיל זה כי T לכסינה אם ורק אם
$$V = \bigoplus_{i\in[k]} V_\lambda.$$

1. נניח כי
$$V = \bigoplus_{i\in[k]} V_\lambda.$$
הראו כי יש בסיס של V שמורכב מוקטורים עצמיים של T והסיקו כי T לכסינה.

2. נניח כי T לכסינה. הראו שניתן לכתוב
$$V = \bigoplus_{i\in[k]} V'_{\lambda_i}$$
עבור $V'_{\lambda_i} \subseteq V_{\lambda_i}$ לכל $i \in [k]$.

3. הראו תחת הנחות הסעיף הקודם שמתקיים $V'_{\lambda_i}=V_{\lambda_i}$ והסיקו כי במקרה זה
$$.V=\bigoplus_{i\in[k]}V_\lambda$$

תרגיל 8. יהיו V,W מרחבים וקטוריים n־מימדיים מעל $\mathbb{F}$. תהי $T\in\mathsf{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ עם מרחב עצמי V_λ. נקרא ל־$\dim_{\mathbb{F}}V_\lambda$ הריבוי הגיאומטרי של λ כערך עצמי של T.

1. תהי $S\in\mathsf{End}_{\mathbb{F}}(W)$. ויהי $P\in\mathsf{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ איזומורפיזם עבורו $T=P^{-1}SP$. הראו של־T,S אותם ערכים עצמיים מאותם ריבויים גיאומטריים.
2. הסיקו ש־S לכסינה אם ורק אם T לכסינה.
3. נניח כי T לכסינה ותהי $S'\in\mathsf{End}_{\mathbb{F}}(W)$ עם אותם ערכים עצמיים וריבויים גיאומטריים כמו של T. הראו כי $T\sim S'$.

תרגיל 9 (נילפוטנטיות). העתקה לינארית $T\colon V\to V$ נקראת נילפוטנטית אם קיים $n\in\mathbb{N}_+$ עבורו $T^n=0$. n המינימלי המקיים זאת נקרא האינדקס של T.

1. הראו שצירוף לינארי של העתקות נילפוטנטיות הוא נילפוטנטי.
2. הראו שעבור $T\colon V\to V$ נילפוטנטית מתקיים $\mathsf{det}(T)=\mathsf{tr}(T)=0$.
3. הראו שעבור $T\colon V\to V$ נילפוטנטית הערך העצמי היחיד הוא 0. הסיקו שעבור T נילפוטנטית ולכסינה מתקיים $T=0$.
4. תהי T נילפוטנטית. הראו שההעתקות $\mathsf{Id}_V\pm T$ הפיכות.
רמז: נסו לחשוב על ההופכי של $x\pm1$ כאשר x מספר.
5. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ ותהי T נילפוטנטית מאינדקס k. לכל $i\in[k]$ נסמן $n_i:=\mathsf{dim\,ker}\,T^i$. הראו שמתקיים
$$.0<n_1<n_2<\ldots<n_{k-1}<n_k=n$$
6. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ ותהי $T\colon V\to V$. יהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V ותהי
$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ v_1&\mapsto 0\\ .\forall i>1\colon v_i&\mapsto v_{i-1}\end{aligned}$$
הראו כי T נילפוטנטית מאינדקס n וכיתבו את $[T]_B$.
7. נאמר כי $A\in M_n(\mathbb{F})$ נילפוטנטית אם L_A נילפוטנטית.
תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ אלכסונית בלוקים $(m_1,\ldots,m_k)$ כאשר כל בלוק A_i נילפוטנטי מאינדקס n_i. הראו ש־A נילפוטנטית מאינדקס $\mathsf{max}_{i\in[k]}(n_i)$.
8. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ ותהי
$$0<n_1<n_2<\ldots<n_{k-1}<n_k=n$$
סדרת מספרים.
הראו שיש העתקה $T\colon V\to V$ כך שמתקיים $n_i=\mathsf{dim\,ker}\,T^i$ לכל $i\in[k]$.

תרגיל 10. פולינום $p\in\mathbb{F}[x]$ נקרא מתוקן אם המקדם המוביל שלו שווה 1. עבור פולינום כזה ממעלה $n\in\mathbb{N}$ נכתוב
$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$$
כאשר $c_n=1$, ונגדיר את המטריצה המלווה של p על ידי
$$.C(p):=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-c_0\\1&0&\cdots&0&-c_1\\0&1&\cdots&0&-c_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\ldots&1&-c_{n-1}\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$$

1. יהי $p\in\mathbb{F}[x]$ ממעלה $n\in\mathbb{N}$. מצאו את הפולינום המינימלי של $C(p)$.
רמז: השתמשו בעובדה שהפולינום המינימלי של מטריצה A שווה ל־$\det(xI-A)$ וחשבו את הדטרמיננטה לפי השורה הראשונה.

2. הראו שהתנאים הבאים שקולים עבור $A\in M_n(\mathbb{F})$.
   (i) A דומה ל־$C(p_A)$.
   (ii) לכל פולינום $p\in\mathbb{F}_{n-1}[x]$ מתקיים $p(A)\neq 0$.
   (iii) יש וקטור $v\in\mathbb{F}^n$ ציקלי עבור A במובן שהקבוצה $\{v,Av,\ldots,A^{n-1}v\}$ היא בסיס של V.

תרגיל 11. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ ותהי

$$0<n_1<n_2<\ldots<n_{k-1}<n_k=n$$

סדרת מספרים.

1. נניח כי n_i-n_{i-1} מונוטונית יורדת (לאו דווקא ממש). הראו שיש העתקה $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה $n_i=\dim\ker(T^i)$ לכל $i\in[k]$.
2. נניח כי יש $i\in[k]$ עבורו $n_{i+1}-n_i>n_i-n_{i-1}$. הראו שאין העתקה $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה $n_i=\dim\ker(T^i)$ לכל $i\in[k]$.

פתרון. 1.
- במקרה $k=1$ ניקח בסיס B של V, וראינו כי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם

$$[T]_B=J_n(0):=\begin{pmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&0&\ddots&0\\0&0&\ddots&0&1\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

נילפוטנטית מאינדקס n.

- באופן כללי, נרצה להשתמש בדוגמא הנ"ל כדי לבנות את המקרה הכללי. אם $V=\bigoplus_{j\in[\ell]}V_j$ ונתונות $T_j\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V_j)$ מתקיים

$$\ker\left(\bigoplus_{j\in[\ell]}T_j\right)=\bigoplus_{j\in[\ell]}\ker(T_j)$$

לכן

$$\begin{aligned}\dim\ker\left(\left(\bigoplus_{j\in[\ell]}T_j\right)^i\right)&=\dim\ker\left(\bigoplus_{j\in[\ell]}T_j^i\right)\\&=\dim\bigoplus_{j\in[\ell]}\ker\left(T_j^i\right)\\&=\sum_{j\in[\ell]}\dim\ker\left(T_j^i\right)\end{aligned}\quad.$$

נסמן $n_0=0$ וגם $m_i=n_i-n_{i-1}$. אז

$$\sum_{i\in[k]}m_i=n_k-0=n_k=n\,.$$

יהי B בסיס ל־V ותהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם

$$[T]_B=\begin{pmatrix}A_1&&0\\&\ddots&\\0&&A_\ell\end{pmatrix}$$

כאשר $m_1 - m_2$ הבלוקים הראשונים הם $J_1(0) = (0)$, כאשר $m_2 - m_3$ הבלוקים שאחריהם הם $J_2(0)$ וכאשר באופן כללי יש $m_i - m_{i+1}$ בלוקים שהם $J_i(0)$ לכל $i \in [k-1]$ וגם m_k בלוקים שהם $J_k(0)$. נקבל שסכום הבלוקים הוא

$$\sum_{i\in[k-1]} i\left(m_i - m_{i+1}\right) + km_k = \sum_{i\in[k]} m_i = n$$

לכן באמת אפשר לקחת $[T]_B$ כזאת.
נקבל

$$V = \bigoplus_{j\in[\ell]} V_j$$

והעתקות $T_j \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(V_j)$ עבורן $\dim\ker\left(T_j^i\right) = \min\{i, \dim V_j\}$ וגם

$$.T = \bigoplus_{j\in[\ell]} T_j$$

עבור $i < k$ נקבל

$$\begin{aligned}
\dim\ker\left(T^i\right) &= \sum_{j\in[\ell]} \dim\ker\left(T_j^i\right) \\
&= \sum_{s\in[i]} s\left(m_s - m_{s+1}\right) + i\left(\sum_{s=i+1}^{k-1}\left(m_s - m_{s+1}\right) + m_k\right) \\
&= \sum_{s\in[i]} m_s - im_{i+1} + im_{i+1} \\
&= \sum_{s\in[i]} n_s - n_{s-1} \\
&= \sum_{s\in[i]} n_s - \sum_{s=0}^{i-1} n_s \\
&= n_i - n_0 \\
&= n_i
\end{aligned}$$

כנדרש.

2. נניח שיש T כזאת. מתקיים

$$n_{i+1} - n_i = \dim\ker\left(T^{i+1}\right) - \dim\ker\left(T^i\right)$$

לכן יש $m_{i+1} := n_{i+1} - n_i$ וקטורים בלתי־תלויים לינארית $v_1, \ldots, v_{m_{i+1}}$ ב־$\ker\left(T^{i+1}\right) \setminus \ker\left(T^i\right)$. נראה כי $T(v_1), \ldots, T\left(v_{m_i+1}\right)$ בלתי־תלויים לינארית. יהי

$$\sum_{j\in[m_{i+1}]} \alpha_j T(v_j) = 0$$

צירוף לינארי שלהם ששווה 0. אז

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j\in[m_{i+1}]} \alpha_j T(v_j) \\
&= T\left(\sum_{j\in[m_{i+1}]} \alpha_j v_j\right)
\end{aligned}$$

כלומר

$$\sum_{j\in[m_{i+1}]} \alpha_j v_j \in \ker(T) \subseteq \ker\left(T^i\right)$$

בסתירה להנחה על ה־v_j. כעת, $T(v_1), \ldots, T\left(v_{m_{i+1}}\right) \notin \ker\left(T^{i-1}\right)$ כי אחרת

$$T^i(v_j) = T^{i-1}\left(T(v_j)\right) = 0$$

בסתירה להנחה. לכן $T(v_1), \ldots, T\left(v_{m_{i+1}}\right)$ הם m_{i+1} וקטורים בלתי־תלויים לינארית ב־$\ker\left(T^i\right) -$ $\ker\left(T^{i-1}\right)$. לכן $n_i - n_{i-1} \geq m_{i+1} = n_{i+1} - n_i$ בסתירה לנתון.

תרגיל 12. עבור פולינום מתוקן $p\in\mathbb{F}[x]$ נכתוב

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$$

כאשר $c_n=1$, ונגדיר את המטריצה המלווה של p על ידי

$$C(p):=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-c_0\\1&0&\cdots&0&-c_1\\0&1&\cdots&0&-c_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1&-c_{n-1}\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F}).$$

1. יהי $p\in\mathbb{F}[x]$ ממעלה n. מצאו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של $C(p)$.
2. הראו שהתנאים הבאים שקולים עבור $A\in M_n(\mathbb{F})$.
   (i) A דומה ל־$C(p_A)$.
   (ii) הפולינום האופייני של A שווה לפולינום המינימלי שלה.
   (iii) יש וקטור $v\in\mathbb{F}^n$ ציקלי עבור A, במובן ש־$\left(v,Av,\dots,A^{n-2}v,A^{n-1}v\right)$ בסיס של V.

פתרון. 1. • מתקיים

$$p_{C(p)}=\det(I-xC(p))=\det\begin{pmatrix}x&0&\cdots&0&c_0\\-1&x&\cdots&0&c_1\\0&-1&\cdots&0&-c_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&-1&x+c_{n-1}\end{pmatrix}.$$

ניעזר בכך שהטרמיננטה אינווריאנטית תחת הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת. נוסיף את השורה האחרונה כפול x לזאת שלפניה. לאחר מכן נוסיף את השורה ה־$n-1$ כפול x לזאת שלפניה ונמשיך כך עד שנקבל מטריצה

$$\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&y\\-1&0&\cdots&0&*\\0&-1&\cdots&0&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&-1&*\end{pmatrix}$$

כאשר

$$y=a_0+x(a_1+x(a_2+x(\dots(a_{n-2}+x(a_{n-1}+x))\dots)))=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i=f.$$

אז

$$p_{C(p)}=(-1)^{n-1}\det\begin{pmatrix}-1&x&\cdots&0\\0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{pmatrix}=(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}f=f.$$

• יהי $g\in\mathbb{F}_{n-1}[x]$ ונכתוב

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i.$$

אז

$$\begin{aligned} g\left(C\left(p\right)\right)\left(e_1\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i C\left(p\right)^i e_1 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i e_{1+i} \end{aligned}$$

וביטוי זה שונה מאפס כאשר $g \neq 0$ כי אז יש $b_i \neq 0$ עבור i כלשהו.
לכן $\deg\left(m_{C(p)}\right) \geq n$ ולכן $m_{C(p)} = p_{C(p)}$.

2. **1 גורר 2:** נניח כי A דומה ל־$C\left(p_A\right)$. ראינו כי $p_{C(p_A)} = m_{C(p_A)}$ ונקבל

$$p_A = p_{C(p_A)} = m_{C(p_A)} = m_A$$

כנדרש.

2 גורר 3: כיוון שהפולינום המינימלי של A שווה לפולינום האופייני שלה, הוא מדרגה n. לכן לכל $v \in V \setminus \{0\}$ הקבוצה הסדורה $\left(v, Av, \ldots, A^{n-1}v\right)$ בלתי־תלויה לינארית. כיוון שהיא מגודל n היא גם בסיס.

3 גורר 1: יהי

$$B \coloneqq \left(v, Av, \ldots, A^{n-1}v\right)$$

הבסיס הנתון. נרצה להראות כי

$$[L_A]_B = C\left(p_A\right).$$

ניתן לראות כי $n-1$ העמודות הראשונות בשתי המטריצות שוות, מהגדרת B. כעת נכתוב

$$p_A\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

ואז מקיילי־המילטון

$$A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i.$$

לכן

$$L_A\left(A^{n-1}v\right) = A^n v = -\sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i v$$

ולכן העמודה ה־n של $[L_A]_B$ היא $\begin{pmatrix} -c_0 \\ \vdots \\ -c_{n-1} \end{pmatrix}$, כנדרש.

הגדרה 2.3 (פולינום מינימלי של וקטור). תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ ויהי $v \in V$. הפולינום המינימלי של T ביחס ל־v הוא הפולינום המתוקן $m_{T,v}$ מהמעלה הנמוכה ביותר עבורו

$$m_{T,v}\left(T\right)\left(v\right) = 0.$$

תרגיל 13. מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$$

נקראת בלוק רציונלי. מטריצת בלוקים שכל בלוקיה הם בלוקים רציונליים נקראת מטריצה רציונלית קנונית.
תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$. הראו שקיים בסיס B של V עבורו $[T]_B$ מטריצה רציונלית קנונית.

פתרון. עבור וקטור $v\in V$ נסמן

$$\begin{aligned} d &\coloneqq \deg_{\mathbb{F}} m_{T,v}\left(x\right) \\ B_v &\coloneqq \left(v, Tv, T^2 v, \ldots, T^{d-1} v\right) \\ .\left\langle v\right\rangle &\coloneqq \operatorname{Span} B_v \end{aligned}$$

מהגדרת $m_{T,v}$ נקבל כי B_v בלתי־תלויה לינארית. נקבל מהתרגיל הקודם כי $\left[T|_{\langle v\rangle}\right]_{B_v}$ בלוק רציונלי לכל $v\in V$.
לכן די למצוא וקטורים $v_1,\ldots,v_k\in V$ עבורם

$$.V=\bigoplus_{i\in[k]}\left\langle v_i\right\rangle$$

עבור שרשרת ז'ורדן מקסימלית

$$\left(\left(T-\lambda \operatorname{Id}_V\right)^{k-1} v, \ldots, \left(T-\lambda \operatorname{Id}_V\right) v, v\right)$$

מתקיים

$$.m_{T,v}\left(x\right)=\left(x-\lambda\right)^k$$

אז

$$B_v=\left(v, Tv, T^2 v, \ldots, T^{k-1} v\right)$$

בלתי־תלויה לינארית. ניקח

$$B=B_{v_1} * \ldots * B_{v_k}$$

עבור $(v_1,\ldots,v_k)$ אוסף הוקטורים בראש שרשראות ז'ורדן המקסימליות של T (לפי בסיס כלשהו). אז

$$V=\bigoplus_{i\in[k]}\left\langle v_i\right\rangle$$

כמסקנה ממשפט ז'ורדן ונקבל כי $[T]_B$ מטריצה רציונלית קנונית.

תרגיל 14 (זהות הפולריזציה). יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$. הראו שלכל $u,v\in V$ מתקיים

$$.\left\langle u,v\right\rangle=\frac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2}{4}$$

פתרון. עבור u,v מתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2}{4} &= \frac{\left\langle u+v,u+v\right\rangle-\left\langle u-v,u-v\right\rangle}{4} \\ &= \frac{\left\langle u,u\right\rangle+\left\langle u,v\right\rangle+\left\langle v,u\right\rangle+\left\langle v,v\right\rangle-\left(\left\langle u,u\right\rangle-\left\langle u,v\right\rangle-\left\langle v,u\right\rangle+\left\langle v,v\right\rangle\right)}{4} \\ &= \frac{2\left\langle u,v\right\rangle+2\left\langle v,u\right\rangle}{4} \\ &= \frac{4\left\langle u,v\right\rangle}{4} \\ &= \left\langle u,v\right\rangle \quad . \end{aligned}$$

תרגיל 15. תהי g תבנית בילינארית. הראו כי יש $w\in V$ עבורו $g\left(w,w\right)=0$, אם ורק אם יש $n_0>0$ בצורת סילבסטר של g.

פתרון. יהי $C=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ בסיס של V עבורו $[g]_C$ בצורת סילבסטר ונניח כי $n_0>0$. אז $g\left(u_n,u_n\right)=0$.
להיפך, נניח כי יש $w\in V$ עבורו $g\left(w,w\right)=0$. נסמן $w_1=w$ ונשלים לבסיס אורתונורמלי $B=\left(w_1,\ldots,w_n\right)$.
ננרמל על ידי

$$\tilde{u}_i \coloneqq \begin{cases} \frac{w_i}{\sqrt{g\left(w_i,w_i\right)}} & g\left(w_i,w_i\right)\neq 0 \\ w_i & g\left(w_i,w_i\right)=0 \end{cases}$$

וניקח שינוי סדר u_i עבורו $u_n=\tilde{u}_1$ ועבורו בבסיס $C=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ המטריצה $[g]_C$ היא בצורת סילבסטר.