אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 13 — קריטריון סילבסטר ותרגילים ממבחנים

אלעד צורני

2 ביולי 2021

1 קריטריון סילבסטר

משפט 1.1 (קריטריון סילבסטר). $A \in M_n(\mathbb{R})$ מוגדרת חיובית אם ורק אם

$$\Delta_i := \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,i} & \end{pmatrix} > 0$$

לכל $i \in [n]$.

הגדרה 1.2 (מינור ראשי). Δ_i נקרא המינור הראשי ה־i.

תרגיל 1. מצאו תנאי על המינורים של $A \in M_n(\mathbb{R})$ על מנת ש־A תהיה מוגדרת שלילית.

פתרון. נרצה וריאציה על קריטריון סילבסטר עבור מטריצות מוגדרות שלילית. נשים לב כי A מוגדרת שלילית אם ורק אם $-A$ מוגדרת חיובית, כיוון ש־$0 > \langle Av, v\rangle$ אם ורק אם $\langle -Av, v\rangle = -\langle A, v\rangle > 0$. נסמן ב־$\Delta_i'$ את המינור הראשי ה־i של $-A$. אז

$$\Delta_i' = \det\left(-\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} \end{pmatrix}\right) = (-1)^i \Delta_i.$$

כעת, A מוגדרת שלילית אם ורק אם $-A$ מוגדרת חיובית, אם ורק אם $\Delta_i' > 0$ לכל $i \in [n]$ אם ורק אם $(-1)^i \Delta_i > 0$ לכל $i \in [n]$.

תרגיל 2. הראו כי

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

מוגדרת שלילית.

2 תרגילים ממבחנים

תרגיל 3. 1. הראו כי ל־$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ אין צורת ז'ורדן ב־$M_2(\mathbb{Z}_2)$.

2. הראו כי כל מטריצה אחרת ב־$M_2(\mathbb{Z}_2)$ דומה למטריצת ז'ורדן.

פתרון. 1. מתקיים

$$\det(A), \det(B) = -1 = 1$$
$$.\operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(B) = 1$$

מהשוויון הראשון הערך העצמי היחיד של A, B הוא 1. אז אם יש צורת ז'ורדן היא $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, אך בשני המקרים האלו העקבה היא $2 = 0$, בסתירה.

2. תהי $C \in M_2(\mathbb{Z}_2) \setminus \{A, B\}$. אם $\operatorname{tr}(C) = 1$ נקבל

$$.C \in \left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

אז

(א) אם $C = \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ נכתוב $B = (e_1 + e_2, e_2)$ ואז

$$C(e_1 + e_2) = Ce_1 + Ce_2 = e_2 + e_2 = 0$$
$$Ce_2 = e_2$$

לכן B בסיס ז'ורדן של C וצורת ז'ורדן לפיו היא $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(ב) אם $C = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ היא המטריצה המשוחלפת של המטריצה הקודמת, ולכן לפי תרגיל משיעורי הבית יש לה צורת ז'ורדן והיא זהה לזאת הקודמת.

(ג) אם $C = \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ נכתוב $B := (e_1 + e_2, e_1)$ ואז B בסיס ז'ורדן כמו במקרה הראשון.

(ד) אם $C = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ היא המטריצה המשוחלפת של המטריצה הקודמת, ולכן לפי תרגיל משיעורי הבית יש לה צורת ז'ורדן והיא זהה לזאת הקודמת.

(ה) שאר המטריצות כבר בצורת ז'ורדן.

אם $\operatorname{tr}(C) = 0$ נקבל

$$.C \in \left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

אז

(א) אם $C = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ נכתוב $B := (e_1 + e_2, e_1)$ ואז

$$C(e_1 + e_2) = Ce_1 + Ce_2 = e_2 + e_1 = e_1 + e_2$$
$$Ce_1 = e_2 = e_1 + e_2 - e_1 = (e_1 + e_2) + e_1$$

ולכן B בסיס ז'ורדן וצורת ז'ורדן היא $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

(ב) אם $C = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ נכתוב $B = (e_1 + e_2, e_1)$ ואז

$$C(e_1 + e_2) = 2(e_1 + e_2) = 0$$
$$Ce_1 = e_1 + e_2$$

ולכן B בסיס ז'ורדן וצורת ז'ורדן היא $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

(ג) אם $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ או $C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ היא מטריצה משוכלפת של מטריצה ז'ורדן ולכן יש לה צורת ז'ורדן עם בסיס $B=\left(e_2,e_1\right)$.

(ד) שאר האופציות כבר בצורת ז'ורדן.

תרגיל 4. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב סוף־מימדי.

1. תהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$. הראו ש־$T$ נורמלית אם ורק אם יש פולינום $p\in\mathbb{C}[x]$ עבורו $T^*=p(T)$.
היעזרו בעובדה הבאה.

משפט 2.1 (אינטרפולציית לגרנג'). תהיינה $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k\in\mathbb{C}$. קיים פולינום $p\in\mathbb{C}[x]$ ממעלה $k+1$ המקיים $p(x_i)=y_i$ לכל $i\in[k]$.

2. הוכיחו כי T_1,T_2 מתחלפות אם ורק אם T_1^*,T_2 מתחלפות.

פתרון. 1. אם יש $p\in\mathbb{C}[x]$ עבורו $T^*=p(T)$ אז T נורמלית כי העתקה מתחלפת עם פולינום בה.
בכיוון השני, נניח כי T נורמלית. אז יש בסיס B אורתונורמלי עבורו

$$[T]_B=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

עבור ערכים $\lambda_i\in\mathbb{C}$. כיוון ש־B אורתונורמלי מתקיים

$$[T^*]_B=[T]_B^*=\operatorname{diag}\left(\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_n\right).$$

מאינטרפולציית לגרנג', קיים פולינום $p\in\mathbb{C}[x]$ עבורו $p(\lambda_i)=\bar\lambda_i$ אז

$$[T^*]_B=p([T]_B)=[p(T)]_B$$

ולכן $T^*=p(T)$, כנדרש.

2. נניח כי $T_1T_2=T_2T_1$ ונראה כי $T_1^*T_2=T_2T_1^*$. הכיוון השני ינבע על ידי שימוש באותה תכונה עם T_1^* במקום T_1.
T_1 נורמלית ולכן $T_1=p(T_1)$ עבור איזשהו $p\in\mathbb{C}[x]$. נכתוב $p(x)=\sum_{i\in[d]}a_ix^i$ ואז

$$\begin{aligned}T_1^*T_2&=p(T_1)T_2\\&=\sum_{i\in[d]}a_iT_1^iT_2\\&=\sum_{i\in[d]}a_iT_2T_1^i\\&=T_2\sum_{i\in[d]}a_iT_1^i\\&=T_2p(T_1)\\&=T_2T_1^*\end{aligned}$$

כנדרש.

תרגיל 5. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי ותהיינה $S,T\in\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ יוניטריות. הוכיחו או מצאו דוגמא נגדית עבור כל אחד מהסעיפים הבאים.

1. $S+T$ נורמלית.
2. $S\circ T$ נורמלית.
3. אם S,T מתחלפות אז $S+T$ נורמלית.

פתרון. 1. מתקיים

$$\begin{aligned}(S+T)^*\circ(S+T)&=(S^*+T^*)\circ(S+T)\\&=S^*\circ S+S^*\circ T+T^*\circ S+T^*\circ T\\&=2\operatorname{Id}_V+S^*\circ T+T^*\circ S\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}(S+T)\circ(S+T)^* &= (S+T)\circ(S^*+T^*)\\ &= S\circ S^* + S\circ T^* + T\circ S^* + T\circ T^*\\ &= 2\,\mathrm{Id}_V + S\circ T^* + T\circ S^*\end{aligned}$$

לכן נרצה לדעת האם בהכרח

$$S^*\circ T + T^*\circ S = S\circ T^* + T\circ S^*.$$

כדי למצוא דוגמא נגדית, נצטרך שלפחות אחת מבין S, T לא תהיה צמודה לעצמה. ניקח

$$\begin{aligned}S : \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

וכן

$$\begin{aligned}T : \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}\frac{x+y}{\sqrt{2}}\\ \frac{x-y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

E בסיס אורתונורמלי ולכן

$$[S^*]_E = [S]_E^t = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = [S]_E$$

וגם

$$[T^*]_E = [T]_E^t = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

כעת

$$\begin{aligned}[S^*\circ T + T^*\circ S]_E &= [S^*]_E[T]_E + [T^*]_E[S]_E\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

אבל

$$\begin{aligned}\left(S\circ T^* + T\circ S^*\right)_E &= [S]_E[T^*]_E + [T]_E[S^*]_E\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ואלו מטריצות שונות.

2. מתקיים

$$\begin{aligned}(S\circ T)^*\circ(S\circ T) &= T^*\circ S^*\circ S\circ T\\ &= T^*\circ S\circ S^*\circ T\\ &= T^*\circ T\\ &= \mathrm{Id}_V\end{aligned}$$

לכן $S\circ T$ יוניטרית ובפרט נורמלית.

הערה 2.2. ראיתם בתרגול שהרכבה של העתקות יוניטריות היא יוניטרית, ולכן אין צורך בפירוט מעבר לכך כפי שהתרגיל מנוסח.

3. כמו מקודם, מתקיים

$$\begin{aligned}(S+T)^*\circ(S+T) &= (S^*+T^*)\circ(S+T)\\ &= S^*\circ S+S^*\circ T+T^*\circ S+T^*\circ T\\ &= 2\operatorname{Id}_V+S^*\circ T+T^*\circ S\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}(S+T)\circ(S+T)^* &= (S+T)\circ(S^*+T^*)\\ &= S\circ S^*+S\circ T^*+T\circ S^*+T\circ T^*\\ &= 2\operatorname{Id}_V+S\circ T^*+T\circ S^*\end{aligned}$$

כעת, S,T מתחלפות, לכן גם S^*,T מתחלפות וגם S,T^* מתחלפות, ונקבל שוויון.

תרגיל 6. יהיו $v_1,\ldots,v_n\in\mathbb{R}^n$. הראו כי $B:=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של $\mathbb{R}^n$ אם ורק אם למטריצת Gram של B

$$\operatorname{Gr}(B):=\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n,v_1\rangle & \cdots & \langle v_n,v_n\rangle\end{pmatrix}=\left(\left\langle v_i,v_j\right\rangle\right)_{i,j\in[n]}$$

יש דטרמיננטה חיובית.

פתרון. נניח כי B בסיס. אז $\operatorname{Gr}(B)$ המטריצה המייצגת של המכפלה הפנימית הסטנדרטית לפי B. לכן קיים $a\in\mathbb{R}$ עבורו

$$\det(\operatorname{Gr}(B))=a^2\det(I_n)=a^2$$

(כי $\operatorname{Gr}(B)=P^tI_nP$ וכי הדטרמיננטה כפלית). כיוון ש־$\operatorname{Gr}(B)$ הפיכה, לא יתכן $a=0$ ולכן $\det(\operatorname{Gr}(B))=a^2>0$.
בכיוון השני, נניח ש־B אינו בסיס. אז יש סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{R}$ עבורם

$$v_n=\sum_{i\in[n-1]}\alpha_iv_i.$$

נקבל

$$(\operatorname{Gr}(B))=\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \left\langle v_1,\sum_{i\in[n-1]}\alpha_iv_i\right\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n,v_1\rangle & \cdots & \left\langle v_i,\sum_{i\in[n-1]}\alpha_iv_i\right\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \sum_{i\in[n-1]}\alpha_i\langle v_1,v_i\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n,v_1\rangle & \cdots & \sum_{i\in[n-1]}\alpha_i\langle v_i,v_i\rangle\end{pmatrix}.$$

לכן, העמודה הימנית של $\operatorname{Gr}(B)$ היא צירוף לינארי של שאר העמודות, ולכן $\det(\operatorname{Gr}(B))=0$.

תרגיל 7. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{R}$. תהי g מכפלה פנימית על V ותהי h תבנית בילינארית סימטרית על V. הוכיחו שקיים בסיס B של V עבורו $[g]_B,[h]_B$ שתיהן אלכסוניות.

פתרון. נסמן $n:=\dim_{\mathbb{R}}(V)$. יהי E בסיס אורתונורמלי של V ביחס ל־g. אז $[g]_E=I_n$. כעת, $[h]_E$ סימטרית כי h סימטרית, ולכן יש מטריצה $Q\in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית עבורה $Q^t[h]_EQ$ אלכסונית. נרצה $Q=P_E^B$ ולכן נגדיר $B:=\left(Q^{-1}v_1,\ldots,Q^{-1}v_n\right)$ עבור $E:=(v_1,\ldots,v_n)$. אז

$$\begin{aligned}[g]_B&=\left(P_E^B\right)^t[g]_EP_E^B=Q^t[g]_EQ=Q^tI_nQ=Q^tQ=I_n\\ [h]_B&=\left(P_E^B\right)^t[h]_EP_E^B=Q^t[h]_EQ\end{aligned}$$

שתיהן אלכסוניות, כנדרש.

תרגיל 8. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד $n\in\mathbb{N}$ מעל $\mathbb{R}$. יהיו $U,W\le V$ עבורם $V=U\oplus W$. עבור $v=u+w$ כאשר $u\in U,w\in W$ נגדיר $T(v)=u-w$. הניחו כי T לינארית והראו כי T צמודה לעצמה אם ורק אם $U\perp W$.

פתרון. נניח כי $W \perp U$. יהי B בסיס אורתונורמלי ל־U ויהי C בסיס אורתונורמלי ל־W. אז $D := B * C$ בסיס אורתונורמלי ל־V. נקבל כי בבסיס זה

$$[T]_D = \begin{pmatrix} [T|_U]_B & 0 \\ 0 & [T|_W]_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_\ell \end{pmatrix}$$

עבור $k := \dim U, \ell := \dim W$. כיוון ש־$D$ אורתונורמלי, מתקיים

$$[T^*]_D = [T]_D^t = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_\ell \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_\ell \end{pmatrix} = [T]_D .$$

לכן, $T^* = T$, כנדרש.
נניח כעת כי $T^* = T$ ויהיו $u \in U$ ו־$w \in W$. מתקיים

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle &= \langle Tu, w \rangle \\ &= \langle u, T^* w \rangle \\ &= \langle u, Tw \rangle \\ &= \langle u, -w \rangle \\ &= -\langle u, w \rangle \end{aligned}$$

לכן $\langle u, w \rangle = 0$ ולכן $u \perp w$. נקבל כי $U \perp W$.