

אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021 תרגול 3 — סכומים ישרים, מרחבים שמורים והטלות

אלעד צורני

11 באפריל 2021

1 פולינומים

הגדרה 1.1 (הצבת מטריצה בפולינום). עבור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} \text{ev}_T: \mathbb{F}[x] &\mapsto \text{End}_{\mathbb{F}}(V) \\ p &\mapsto p(T) \end{aligned}$$

הגדרה 1.2 (חוג). חוג $(R, +, \cdot)$ הוא חבורה אבלית $(R, +)$ עם העתקה $R \rightarrow R$: אסוציאטיבית כך שמתקיים

$$x(y+z) = xy + xz$$

וגם

$$(y+z)x = yx + zx$$

הגדרה 1.3 (יחידה). יהי R חוג. איבר $e \in R$ נקרא יחידה אם

$$ex = xe = x$$

לכל $x \in R$.

היחידה בדרך כלל מסומנת 1.

דוגמה 1.4. $\mathbb{F}[x]$ הוא חוג עם יחידה לפי חיבור וכפל פולינומים.

דוגמה 1.5.

הגדרה 1.6 (אידיאל). יהי R חוג.

תת-חבורה $I \leq (R, +)$ נקראת אידיאל אם לכל $x \in R$ מתקיים $xI, Ix \subseteq I$.

דוגמה 1.7. יהי $R = \mathbb{Z}$ חוג עם פעילות החיבור והכפל הרגילות. התת-חבורה $2\mathbb{Z}$ היא אידיאל ב- R כי

$$x \cdot 2\mathbb{Z} = \{x \cdot 2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{2xn \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq 2\mathbb{Z}$$

הגדרה 1.8 (הומומורפיזם של חוגים). יהיו R, S שני חוגים. הומומורפיזם $\varphi: R \rightarrow S$ הוא העתקה המקיימת

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y) \end{aligned}$$

הגדרה 1.9 (גרעין). יהי $\varphi: R \rightarrow S$ הומומורפיזם של חוגים. נגדיר את הגרעין של φ להיות

$$\ker \varphi := \{x \in R \mid \varphi(x) = 0\}$$

תרגיל 1. יהי $\varphi: R \rightarrow S$ הומומורפיזם של חוגים. הראו כי $\ker \varphi \leq R$ אידיאל.

פתרון. יהי $x \in \ker \varphi$ ויהי $a \in \ker \varphi$. צריך להראות כי $ax, xa \in \ker \varphi$. אכן

$$\begin{aligned} \varphi(xa) &= \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(x) \cdot 0 = 0 \\ \varphi(ax) &= \varphi(a)\varphi(x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0 \end{aligned}$$