אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 2 — וקטורים עצמיים, שקילות בין העתקות וסכומים ישרים

אלעד צורני

5 באפריל 2021

1 ערכים ווקטורים עצמיים

הגדרה 1.1 (ערך ווקטור עצמיים). יהי V מרחב וקטורי ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. $\lambda \in \mathbb{F}$ נקרא ערך עצמי של T אם קיים $v \in V \setminus \{0\}$ עבורו $Tv = \lambda v$. v כזה נקרא וקטור עצמי (של T) עבור הערך העצמי λ.

הגדרה 1.2 (מרחב עצמי). יהי λ ערך עצמי של העתקה $T \in \mathrm{End}(V)$. אוסף הוקטורים העצמיים של T עם ערך עצמי λ הוא תת־מרחב וקטורי של V שנקרא המרחב העצמי של הערך העצמי λ (עבור T). נסמנו בדרך כלל V_λ.

הערה 1.3. בסימון הנ"ל לא מצוין מה ההעתקה T. נבהיר מה ההעתקה כשהדבר אינו ברור מהקונטקסט.

תרגיל 1. תהיינה $T, S, P \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כך שמתקיים

$$T = P^{-1}SP$$

הוכיחו כי $v \in V$ וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ אם ורק אם Pv וקטור עצמי של S עם ערך עצמי λ.

פתרון. יהי $v \in V$ וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ. מתקיים

$$SPv = \left(PTP^{-1}\right)Pv = PTv = P\lambda v = \lambda(Pv).$$

יהי $v \in V$ כך ש־Pv וקטור עצמי של S עם ערך עצמי λ. מתקיים

$$Tv = P^{-1}SPv = P^{-1}\lambda Pv = \lambda P^{-1}Pv = \lambda v.$$

הגדרה 1.4 (שדה סגור אלגברית). שדה $\mathbb{F}$ נקרא סגור אלגברית אם לכל פולינום $p \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ יש $\deg(p)$ שורשים מעל $\mathbb{F}$.

הערה 1.5. באופן שקול, $\mathbb{F}$ סגור אלגברית אם לכל פולינום שאינו קבוע יש שורש מעל $\mathbb{F}$.

עובדה 1.6. יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברי ויהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. לכל $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ יש ערך עצמי.

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ממימד $n > 1$ מעל שדה סגור אלגברית $\mathbb{F}$ ותהי $T \in \mathrm{End}(V)$. הראו כי

$$\{p(T) \mid p \in \mathbb{F}[x]\} \neq \mathrm{End}(V).$$

פתרון.

- אם ל־T יש ערך עצמי יחיד λ מריבוי גיאומטרי מלא, יש בסיס B של V בו $[T]_B = \lambda I$. אז

$$[p(T)]_B = p([T]_B) = p(\lambda I) = p(\lambda) I$$

מטריצה סקלארית. אבל, לא כל אנדומורפיזם מיוצג על ידי מטריצה סקלארית, לכן אין שוויון.

- יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T ויהי $v \in V$ וקטור עצמי עבור λ. מהרדוקציה הקודמת, הריבוי הגיאומטרי של λ אינו n. נראה שיש העתקה $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ שאינה מתחלפת עם T, וכיוון שכל פולינום ב־T מתחלף עם T נקבל

$$S \notin \{p(T) \mid p \in \mathbb{F}[x]\}.$$

λ מריבוי גיאומטרי קטן מ־n לכן יש $w \in V \setminus V_\lambda$. אז (v, w) בלתי־תלויה לינארית ולכן ניתן להשלים אותה לבסיס

$$B = (v, w, u_3, \ldots, u_n).$$

תהי

$$\begin{aligned} S\colon V &\to V \\ v &\mapsto w \\ w &\mapsto v \\ u_i &\mapsto u_i \end{aligned} .$$

אכן

$$\begin{aligned} ST(v) &= S\lambda v = \lambda Sv = \lambda w \\ TS(v) &= Tw \neq \lambda w \end{aligned}$$

כאשר האי־שוויון נכון כי $w \notin V_\lambda$. לכן S אינה פולינום ב־T.

2 שקילות בין העתקות

תרגיל 3. נאמר שהעתקות $T \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ו־$S \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(W)$ צמודות ונסמן $T \sim S$ אם קיים איזומורפיזם $P\colon V \to W$ עבורו $T = P^{-1}SP$.

1. הראו כי $\sim$ יחס שקילות.
2. ראיתם בהרצאה שמטריצות מייצגות של העתקות צמודות הן צמודות. הסיקו שכל שתי מטריצות מייצגות של אותה העתקה הן צמודות.

פתרון. 1. **רפלקסיביות:** תהי $T \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(V)$. מתקיים

$$T = \mathsf{Id}_V^{-1} \circ T \circ \mathsf{Id}_V$$

לכן $T \sim T$.

סימטריות: תהיינה $T \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ו־$S \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(W)$ עבורן $T \sim S$. קיים איזומורפיזם $P\colon V \to W$ עבורו $T = P^{-1}SP$. אז $S = PTP^{-1}$. נסמן $Q = P^{-1}$ ונקבל

$S = Q^{-1}TQ$.

טרנזיטיביות: תהיינה

$$\begin{aligned} T &\in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(U) \\ S &\in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(V) \\ R &\in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}(W) \end{aligned}$$

המקיימות $T \sim S$ וגם $S \sim R$. קיימים איזומורפיזמים $P\colon U \to V$ ו־$Q\colon V \to W$ עבורם $T = P^{-1}SP$ וגם $S = Q^{-1}RQ$. אז

$$T = P^{-1}\left(Q^{-1}RQ\right)P = (QP)^{-1}R(QP)$$

כאשר QP איזומורפיזם כהרכבת איזומורפיזמים. לכן $T \sim R$.

2. מרפלקסיביות נקבל $T \sim T$. לכן, מהטענה בכיתה, כל שתי מטריצות מייצגות של T צמודות.

תרגיל 4. מטריצות $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{F})$ נקראות צמודות אם יש $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $A_1 = P^{-1}A_2P$. במקרה זה נסמן $A_1 \sim A_2$.
יהיו $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{F})$ צמודות. הראו שיש העתקה $T\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ ובסיסים B, C של $\mathbb{F}^n$ עבורם $[T]_B = A_1, [T]_C = A_2$.

פתרון. נתון $A_1 \sim A_2$ לכן קיימת P הפיכה עבורה $A_1 = PA_2P^{-1}$. תהי $T = L_{A_1}$ ויהי $B = E$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אז

$$[T]_B = [L_{A_1}]_E = A_1 .$$

P הפיכה לכן יש בסיס C עבורו $P = P_E^C$. אז מתקיים

$$\begin{aligned} A_2[v]_C &= P^{-1}A_1P[v]_C \\ &= P_C^E A_1 P_E^C [v]_C \\ &= P_C^E [L_{A_1}]_E [v]_E \\ &= P_C^E [L_{A_1}v]_E \\ &= [L_{A_1}v]_C \\ &= [Tv]_C \end{aligned}$$

לכן $A_2 = [T]_C$.

תרגיל 5. תהיינה $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ו־$S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(W)$ ויהי B בסיס של V. הראו שמתקיים $T \sim S$ אם ורק אם יש בסיס C של W עבורו

$$[T]_B = [S]_C .$$

פתרון.

- נניח כי $T \sim S$ ויהי $P \colon V \xrightarrow{\sim} W$ המקיים $T = P^{-1}SP$. כיוון ש־I הפיכה ו־P איזומורפיזם, ראינו שיש בסיס C של W עבורו $[P]_C^B = I$. אז מתקיים

$$\begin{aligned}[T]_B &= \left[P^{-1}SP\right]_B \\ &= \left[P^{-1}\right]_B^C [S]_C [P]_C^B \\ &= I^{-1}[S]_C I \\ &= [S]_C\end{aligned}$$

כנדרש.

- נניח כי יש בסיס C של W עבורו $[T]_B = [S]_C$. נכתוב

$$\begin{aligned}B &= (v_1, \ldots, v_n) \\ C &= (w_1, \ldots, w_n)\end{aligned}$$

ותהי

$$\begin{aligned}P \colon V &\to W \\ v_i &\mapsto w_i .\end{aligned}$$

אז P איזומורפיזם כי היא שולחת בסיס לבסיס. מתקיים

$$\begin{aligned}\left[P^{-1}SP\right]_B &= \left[P^{-1}\right]_B^C [S]_C [P]_C^B \\ &= I [S]_C I \\ &= [S]_C \\ &= [T]_B\end{aligned}$$

לכן לפי תרגיל משיעורי הבית

$$P^{-1}SP = T .$$

3 סכומים ישרים

הגדרה 3.1. יהיו $B_1 \coloneqq (v_1, \ldots, v_m)$ ו־$B_2 \coloneqq (w_1, \ldots, w_n)$ קבוצות סדורות. נגדיר את השרשור שלהן להיות

$$B_1 * B_2 = (v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m) .$$

הגדרה 3.2 (סכום ישר). יהי V מרחב וקטורי ויהיו $V_1, V_2 \leq V$. אם $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ נקרא לסכום $V_1 + V_2$ סכום ישר ונסמנו $V_1 \oplus V_2$.

תרגיל 6. יהי V מרחב וקטורי ויהיו $V_1, \ldots, V_n \leq V$ עבורם

$$V = \bigoplus_{i \in [n]} V_i \coloneqq V_1 \oplus \ldots \oplus V_n .$$

לכל $i \in [n]$ יהי B_i בסיס של V_i. הראו כי

$$B \coloneqq B_1 * \ldots * B_n$$

בסיס של V.

פתרון. יהי $v \in V$. יש $v_1, \ldots, v_n \in V$ כך ש־$v_i \in V_i$ ויש $(\alpha_i)_{i \in [n]} \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים

$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i .$$

נכתוב

$$B_i = (u_{i,1}, \ldots, u_{i,n_i}) .$$

לכל $i \in [n]$ אפשר כתוב
$$v_i = \sum_{j \in [n_i]} \beta_j u_{i,j}.$$
אז
$$v = \sum_{i \in [n]} \sum_{j \in [n_i]} \alpha_i \beta_j u_{i,j}.$$
לכן Span $B = V$.
נראה כי B בלתי־תלויה לינארית. נניח כי יש $\alpha_{i,j}$ כך ש־
$$\sum_{i \in [n]} \sum_{j \in [n_i]} \alpha_{i,j} u_{i,j} = 0.$$
מהגדרת הסכום הישר, לכל $i \in [n]$ מתקיים
$$\sum_{j \in [n_i]} \alpha_{i,j} u_{i,j} = 0.$$
כיוון ש־B_i בסיס נקבל מכך $\alpha_{i,j} = 0$ לכל $j \in [n_i]$. לכן כל המקדמים שווים 0, ולכן B בלתי־תלויה לינארית.

תרגיל 7. יהי V מרחב וקטורי ויהיו $W, U \leq V$ עם בסיסים B, C בהתאמה. נניח כי $B * C$ בסיס של V. הראו כי
$$V = W \oplus U.$$

פתרון. נסמן
$$B = (w_1, \ldots, w_k)$$
$$C = (u_1, \ldots, u_\ell).$$
יהי $v \in V$. אפשר לכתוב
$$v = \sum_{i \in [k]} \alpha_i w_i + \sum_{i \in [\ell]} \beta_i u_i \in W + U$$
לכן $V = W + U$.
אם $v \in W \cap U$ נוכל לכתוב
$$v = \sum_{i \in [k]} \alpha_i w_i = \sum_{i \in [\ell]} \beta_i u_i$$
ואז
$$0 = \sum_{i \in [k]} \alpha_i w_i - \sum_{i \in [\ell]} \beta_i u_i.$$
כיוון ש־$B * C$ בסיס של V זאת קבוצה בלתי־תלויה לינארית ולכן נקבל $\alpha_i, \beta_i = 0$ לכל i. לכן $v = 0$, כלומר $W \cap U = \{0\}$. לכן הסכום ישר.

תרגיל 8. יהי V מרחב וקטורי ויהי $W \leq V$. הראו שקיים $U \leq V$ עבורו $V = W \oplus U$.

פתרון. יהי B בסיס של W. אז B קבוצה בת"ל ב־V וראינו באלגברה ב' שאפשר להשלים קבוצה כזאת לבסיס של V. לכן יש B' בת"ל כך ש־$B * B'$ בסיס של V. מהתרגיל הקודם נקבל
$$V = W \oplus \text{Span}\, B'.$$