אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 1 — חזרה - מטריצות מייצגות

אלעד צורני

25 במרץ 2021

מטריצות מייצגות

הגדרות וסימונים

הגדרה 1.1 (בסיס של מרחב וקטורי). יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. בסיס של V הוא קבוצה **סדורה** B כך שכל $v \in V$ ניתן לכתיבה באופן **יחיד** כצירוף לינארי של (מספר סופי של) איברי B.

סימון 1.2 (מרחב מטריצות). יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $n, m \in \mathbb{N}_+$. נסמן ב־$M_{n,m}(\mathbb{F})$ מטריצות מעל $\mathbb{F}$ עם n שורות ו־m עמודות. נסמן גם $M_n(\mathbb{F}) \coloneqq M_{n,n}(\mathbb{F})$.

סימון 1.3 (מרחב העתקות לינאריות). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. נסמן ב־$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ את מרחב ההעתקות הלינאריות $V \to W$.
נסמן לפעמים

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$$

ונקרא לאיברי מרחב זה אנדומורפיזמים של V.

סימון 1.4. נסמן $\mathbb{F}^n \coloneqq M_{n,1}(\mathbb{F})$ וגם $(\mathbb{F}^n)^\perp \coloneqq M_{1,n}(\mathbb{F})$.

הגדרה 1.5 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים

$$B = (v_1, \ldots, v_n),$$
$$C = (w_1, \ldots, w_m)$$

בהתאמה. המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים B, C היא המטריצה $A \coloneqq [T]_B^C \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ שמוגדרת על ידי

$$\forall j \in [n] : Tv_j = \sum_{i \in [m]} A_{i,j} w_i.$$

סימון 1.6. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיס B. נסמן $[T]_B \coloneqq [T]_B^B$.

הגדרה 1.7 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ עם בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$. עבור $u \in V$ נסמן $[u]_B \in \mathbb{F}^n$ את וקטור הקואורדינטות של u לפי הבסיס B שמוגדר על ידי

$$u = \sum_{i \in [n]} \left([u]_B\right)_i v_i.$$

הגדרה 1.8 (מטריצת מעבר). יהיו V מרחב וקטורי עם בסיסים B, C. נסמן

$$P_C^B \coloneqq [\mathrm{Id}_V]_C^B$$

ונקרא לה מטריצת המעבר מ־B ל־C.

הגדרה 1.9 (העתקות המתאימות למטריצה). יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נגדיר

$$L_A \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$$
$$v \mapsto Av$$

וגם

$$R_A \colon (\mathbb{F}^n)^\perp \to (\mathbb{F}^n)^\perp$$
$$v \mapsto vA.$$

הגדרה 1.10. יהי V מרחב וקטורי n־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$. נגדיר

$$\begin{aligned}\rho_B \colon V &\to \mathbb{F}^n\\ .v &\mapsto [v]_B\end{aligned}$$

הערה 1.11. ρ_B שולחת בסיס לבסיס, ולכן הינה איזומורפיזם.

תרגיל. תהי $T \colon V \to W$ העתקה בין מרחבים וקטוריים ויהיו B, C בסיסים עבור V, W בהתאמה. לכל $v \in V$ מתקיים

$$.\ [T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$$

להיפך, אם A מטריצה המקיימת

$$A [v]_B = [Tv]_C$$

לכל $v \in V$, אז $A = [T]_C^B$.

מסקנה 1.12. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהיינה

$$\begin{aligned}T &\colon U \to V\\ S &\colon V \to W\end{aligned}$$

העתקות לינאריות. יהיו B, C, D בסיסים של U, V, W בהתאמה. אז

$$.\ [S \circ T]_D^B = [S]_D^C [T]_C^B$$

הוכחה. לכל $v \in V$ מתקיים

$$\begin{aligned}[S]_D^C [T]_C^B [v]_B &= [S]_D^C [Tv]_C\\ &= [S \circ Tv]_D\end{aligned}$$

לכן

$$,\ [S]_D^C [T]_C^B = [S \circ T]_D^B$$

כנדרש. ■

תרגילים

תרגיל 1. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. הראו שלכל בסיס B של $\mathbb{F}^n$ קיים בסיס C של $\mathbb{F}^n$ כך שמתקיים

$$.A = [\mathsf{Id}_V]_C^B$$

2. יהי V מרחב וקטורי n־מימדי מעל $\mathbb{F}$ ויהי B בסיס של V. מצאו בסיס B' של V כך ש־$A = P_{B'}^B$.

3. יהי $T \colon V \to W$ איזומורפיזם בין מרחבים וקטוריים ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$. יהי B בסיס של V. מצאו בסיס C של W כך שמתקיים

$$.A = [T]_C^B$$

פתרון. 1. A מטריצה הפיכה, לכן L_A איזומורפיזם, ולכן שולחת בסיס לבסיס. ידוע כי ρ_B איזומורפיזם ולכן גם היא שולחת בסיס לבסיס. מתקיים

$$\begin{aligned}[\mathsf{Id}_V]_C^B &= \left[\rho_B^{-1} \circ \rho_B\right]_C^B\\ &= \left[\rho_B^{-1}\right]_C^E [\rho_B]_E^B\\ &= \left[\rho_B^{-1}\right]_C^E I_n\\ &= \left[\rho_B^{-1}\right]_C^E\end{aligned}$$

לכן מספיק למצוא C עבורו

$$.\ \left[\rho_B^{-1}\right]_C^E = A$$

יהי

$$.C \coloneqq \left(\rho_B^{-1} \circ L_A^{-1}(e_1), \ldots, \rho_B^{-1} \circ L_A^{-1}(e_n)\right)$$

לכל $i\in[n]$ נקבל

$$\begin{aligned}\left[\rho_B^{-1}\right]_C^E A^{-1}e_i &= \left[\rho_B^{-1}\right]_C^E\left[A^{-1}e_i\right]_E\\ &= \left[\rho_B^{-1}A^{-1}e_i\right]_C\\ &= e_i\end{aligned}.$$

לכן $\left[\rho_B^{-1}\right]_C^E A^{-1}e_i=e_i$ לכל $i\in[n]$, לכן

$$\left[\rho_B^{-1}\right]_C^E=\left(A^{-1}\right)^{-1}=A\ .$$

מוטיבציה:

מהסתכלות על המקרה $B=E$ רואים שבמקרה זה עובדת הבחירה

$$C:=\left(L_A^{-1}\left(e_1\right),\ldots,L_A^{-1}\left(e_n\right)\right).$$

באופן כללי, הדבר לא עובד. אבל כיוון שיש איזומורפיזם של $\mathbb{F}^n$ ששולח את הבסיס B לבסיס E, נוכל להיעזר בו כדי למצוא בסיס C מתאים, בעזרת הצמדה. C שבחרנו הוא בעצם

$$C=\left(\rho_B^{-1}\circ L_A^{-1}\circ\rho_B\left(v_1\right),\ldots,\rho_B^{-1}L_A^{-1}\rho_B\left(v_n\right)\right).$$

בדרך כלל כאשר אנו יודעים משהו עבור אוביקט, ורוצים להראות אותו עבור אוביקט איזומורפי, נוכל להיעזר בהצמדה באופן דומה.

2. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ ויהי $E'=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ בסיס עבורו $A=\left[\mathsf{Id}_{\mathbb{F}^n}\right]_{E'}^E$, שקיים לפי הסעיף הקודם. יהי

$$B'=\left(\rho_B^{-1}\left(u_1\right),\ldots,\rho_B^{-1}\left(u_n\right)\right)$$

בסיס של V כי ρ_B^{-1} איזומופריזם.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_B^{-1}\circ L_A\circ\rho_B"] \arrow[d, "\rho_B"'] & V \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{F}^n \arrow[u, "\rho_B^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

אז מתקיים

$$\begin{aligned}\left[\mathsf{Id}_V\right]_{B'}^B &= \left[\rho_B^{-1}\circ\mathsf{Id}_{\mathbb{F}^n}\circ\rho_B\right]_{B'}^B\\ &\underset{(1.12)}{=} \left[\rho_B^{-1}\right]_{B'}^{E'}\left[\mathsf{Id}_{\mathbb{F}^n}\right]_{E'}^E\left[\rho_B\right]_E^B\\ &= \left[\mathsf{Id}\right]_{E'}^E\\ &= P_{E'}^E\\ &= A\end{aligned}.$$

3. יהי

$$B'=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$$

הבסיס של V מהסעיף הקודם. יהי

$$C=\left(T\left(u_1\right),\ldots,T\left(u_n\right)\right)$$

בסיס של W כי T איזומורפיזם. מתקיים

$$\begin{aligned}\left[T\right]_C^B &= \left[T\circ\mathsf{Id}_V\right]_C^B\\ &\underset{(1.12)}{=} \left[T\right]_C^{B'}\left[\mathsf{Id}_V\right]_{B'}^B\\ &= I_nA\\ &= A\end{aligned}.$$

תרגיל 2. תהי $D\in \text{Hom}\left(\mathbb{R}_3\left[x\right],\mathbb{R}_2\left[x\right]\right)$ העתקת הגזירה, המוגדרת על ידי $Dp=p'$. מצאו בסיסים של $\mathbb{R}_3\left[x\right],\mathbb{R}_2\left[x\right]$ לפיהם המטריצה המייצגת של T היא

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

פתרון. יהי $U:=\mathbb{R}\le\mathbb{R}_3\left[x\right]$ התת־מרחב של הפולינומים הקבועים. מתקיים $U=\ker D$. יהי

$$W=\text{Span}\left\{x,x^2,x^3\right\}\le\mathbb{R}_3\left[x\right]$$

כך שמתקיים $U\oplus W=\mathbb{R}_3\left[x\right]$. נגדיר

$$T:=\left.D\right|_W\colon W\to\mathbb{R}_3\left[x\right]$$

וזה איזומורפיזם כי $\dim_{\mathbb{R}}W=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2\left[x\right]=3$ וכי $\ker T=\{0\}$.
תהי $A=I_3\in M_3\left(\mathbb{R}\right)$. מהתרגיל הקודם, יש בסיסים $\tilde{B},C$ של $U,\mathbb{R}_2\left[x\right]$ בהתאמה כך ש־$\left[T\right]_C^{\tilde{B}}=A$. נכתוב

$$\tilde{B}=\left(v_1,v_2,v_3\right)$$

ואז

$$B:=\left(v_1,v_2,v_3,1\right)$$

נותן את המבוקש.

תרגיל 3. יהי V מרחב וקטורי סוף מימדי ויהי $v\in V$. הראו שקיים בסיס B של V עבורו $\left[v\right]_B=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את $\left(v\right)$ לבסיס

$$B_0=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$$

של V, עם $v_1=v$. תהי

$$A:=\begin{pmatrix}1&&&&\\1&1&&0&\\\vdots&&\ddots&&\\1&&&1&\\1&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\in M_n\left(\mathbb{F}\right).$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס B של V עבורו $\left[\text{Id}_V\right]_B^{B_0}=A$. נקבל

$$\begin{aligned}\left[v\right]_B&=\left[\text{Id}_V\,v\right]_B\\&=\left[\text{Id}_V\right]_B^{B_0}\left[w\right]_{B_0}\\&=A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לכן B הבסיס שחיפשנו.

תרגיל 4. יהיו V,W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T\in\text{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$. הראו כי $\text{rank}\,T=1$ אם ורק אם יש בסיסים B,C ל־V,W בהתאמה כך שכל מקדמי $\left[T\right]_C^B$ הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים B,C כמתואר. אז $1=\operatorname{rank}[T]_C^B=\operatorname{rank}T$.
בכיוון השני, נניח כי $\operatorname{rank}T=1$. כלומר, $\dim\operatorname{Im}T=1$. ממשפט המימדים מתקיים $\dim V=\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T$, לכן

$$\dim\ker T=\dim V-\dim\operatorname{Im}T=\dim V-1\,.$$

יהי $n\coloneqq\dim V$ ויהי

$$\tilde{B}\coloneqq(u_1,\ldots,u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי w וקטור פורש של $\operatorname{Im}T$ ויהי C בסיס של W כך שמתקיים $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי $v\coloneqq T^{-1}(w)$, ואז $(v,u_1,\ldots,u_{n-1})$ בלתי־תלויים לינארית, כי $v\notin\ker T$. לכן זה בסיס של V. אז גם $B\coloneqq(v,v+u_1,\ldots,v+u_{n-1})$ בסיס של V כי המטריצה

$$\begin{pmatrix}| & & |\\ [v]_{\tilde{B}} & \cdots & [v+u_{n-1}]_{\tilde{B}}\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ & 0 & & 1 & 0\\ 0 & & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

הפיכה.
נסמן $C=(w_1,\ldots,w_m)$. מתקיים

$$T(v)=w=w_1+\ldots+w_m$$

ולכל $i\in[n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned}T(v+u_i)&=T(v)+T(u_i)\\&=T(v)+0\\&=T(v)\\&=w_1+\ldots+w_m\end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.