אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 6 — צורת ובסיס ז'ורדן

אלעד צורני

10 במאי 2021

1 צורת ז'ורדן

1.1 חזרה

הגדרה 1.1 (בלוק ז'ורדן). לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ ולכל $m \in \mathbb{F}$ נסמן

$$J_m(0) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & \cdots & & \lambda \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{F})$$

ונקרא למטריצה זאת בלוק ז'ורדן מגודל n עם ערך עצמי λ.

הגדרה 1.2 (מטריצת ז'ורדן). מטריצה A נקראת מטריצת ז'ורדן אם A מטריצת בלוקים עם בלוקים $A_1, \ldots, A_k$ כך שכל A_i בלוק ז'ורדן.

הגדרה 1.3 (צורת ובסיס ז'ורדן של העתקה). תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. צורת ז'ורדן של T היא מטריצה מייצגת $[T]_B$ של T שהיא מטריצת ז'ורדן.
בסיס B עבורו $[T]_B$ מטריצת ז'ורדן נקרא בסיס ז'ורדן עבור T.

משפט 1.4 (משפט ז'ורדן). יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית ויהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. לכל $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ יש צורת ז'ורדן, וצורת הז'ורדן של T יחידה עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

הגדרה 1.5 (צורת ז'ורדן של מטריצה). תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. צורת ז'ורדן של A היא מטריצת ז'ורדן J שדומה ל־A.

הערה 1.6. משפט ז'ורדן אומר שאם $\mathbb{F}$ סגור אלגברית, לכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ יש צורת ז'ורדן. אכן, ל־L_A יש צורת ז'ורדן, והמטריצה $[L_A]_B$ דומה ל־$A = [L_A]_E$ כאשר B בסיס ז'ורדן.

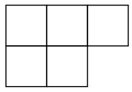
1.2 מציאת צורת ז'ורדן

תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבור $\mathbb{F}$ סגור אלגברית. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T ונסתכל על $T|_{V'_\lambda}$. נתאר את צורת ז'ורדן של $T|_{V'_\lambda}$ באמצעות דיאגרמת יאנג, כאשר אורכי השורות הם גדלי הבלוקים.

דוגמה 1.7. נסתכל על המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3(0) & 0 \\ 0 & J_2(0) \end{pmatrix}.$$

מתאימה לה הדיאגרמה הבאה.



נסמן ב־b_i את אורך העמודה ה־i. אז b_1 הוא מספר הבלוקים שגודלם לפחות 1. זה בדיוק מספר הוקטורים העצמיים של הערך העצמי 0 כי כל בלוק מתאים לשרשרת

$$\left((T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^{k-1}(v),\dots,(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)(v),v\right)$$

כאשר $(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^k(v)=0$.
באופן כללי אפשר לראות כי b_i הוא מספר הבלוקים מגודל לפחות i, וכי $\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^i$ הוא הסכום $b_1+\dots+b_i$.
מספר הבלוקים מגודל j הוא מספר הבלוקים מגודל לכל הפחות j פחות מספר הבלוקים מגודל גדול מ־j. מספר זה שווה b_j-b_{j+1}. אבל, מהמשוואה

$$\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^i=b_1+\dots+b_i$$

נקבל

$$b_i=\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^i-\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^{i-1}$$

ולכן מספר הבלוקים מגודל j הוא

$$\begin{aligned}b_j-b_{j+1}&=\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^j-\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^{j-1}-\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^{j+1}+\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^j\\&=2\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^j-\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^{j+1}-\dim\ker(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^{j-1}\end{aligned}.$$

1.3 תרגילים

תרגיל 1. מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\\0&0&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&1&1\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C}).$$

פתרון. המטריצה משולשת עליונה ולכן הערכים העצמיים של A על האלכסון. נקבל כי 1 הערך העצמי היחיד וכי הוא מריבוי n. הדרגה של $A-I$ היא $n-1$ ולכן הריבוי הגיאומטרי של 1 הוא 1. לכן יש בלוק יחיד בצורת ז'ורדן, ונקבל כי צורת ז'ורדן היא $J(A)=J_n(1)$.

תרגיל 2. חשבו את צורת ז'ורדן $J(A)$ של המטריצה הבאה,

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&-1&0&0&-1\\1&-1&0&0&-1\\0&0&0&0&-1\\-1&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

כאשר נתון כי $p_A(x)=x^4(x-1)$.

פתרון. לפי הפולינום האופייני, 1 ערך עצמי מריבוי אלגברי 1. לכן גם הריבוי הגיאומטרי שלו הוא 1 ונקבל כי יש בלוק יחיד עם ערך עצמי 1, ושגודלו 1.
כמו כן, אנו יודעים כי 0 ערך עצמי מריבוי אלגברי 4. לכן יהיו בלוקי ז'ורדן עם ערך עצמי 0 שסכום הגדלים שלהם הוא 4. ניתן לראות כי $r(A)=3$, ולכן יש $5-r(A)=2$ וקטורים עצמיים עם ערך עצמי 0. אז, $J(A)$ היא אחת

מהמטריצות הבאות.

$$J_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\operatorname{diag}\left(J_1(1),J_2(0),J_2(0)\right)$$

$$J_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\operatorname{diag}\left(J_1(1),J_1(0),J_3(0)\right)$$

כדי למצוא איזו מהמטריצות היא צורת ז'ורדן של A ניעזר בנוסחא לחישוב מספר הבלוקים מגודל נתון. מספר הבלוקים מגודל לפחות 2 הוא

$$b_2=\dim\ker\left(L_A{}^2\right)-\dim\ker\left(L_A{}^1\right)$$

כאשר ניתן לראות כי

$$\dim\ker\left((L_A)^1\right)=2\,.$$

מתקיים

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&-1&0&0&-1\\-1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\dim\ker\left(L_A{}^2\right)=3\,.$$

אז $b_2=3-2=1$, כלומר יש בלוק אחד עם ערך עצמי 0 ומגודל לפחות 2. זה לא המקרה עבור J_2 ולכן נקבל כי צורת ז'ורדן של A היא J_1.

תרגיל 3. 1. האם כל המטריצות $A\in M_5(\mathbb{C})$ המקיימות $A^4\neq 0$ וגם $A^5=0$ הן דומות?

2. האם כל המטריצות $A\in M_5(\mathbb{C})$ המקיימות $A^3\neq 0$ וגם $A^4=0$ הן דומות?

3. האם כל המטריצות $A\in M_5(\mathbb{C})$ המקיימות $A^2\neq 0$ וגם $A^3=0$ הן דומות?

פתרון. 1. התנאי $A^4\neq 0$ וגם $A^5=0$ אומר כי

$$\dim\ker\left(L_A^5\right)-\dim\ker\left(L_A^4\right)\geq 1\,,$$

כלומר יש בלוק מגודל לפחות 5. לכן A דומה ל־$J_5(0)$, ולכן התשובה היא כן.

2. התנאי $A^3\neq 0$ וגם $A^4=0$ אומר כי

$$\dim\ker\left(L_A^4\right)-\dim\ker\left(L_A^3\right)\geq 1\,,$$

ולכן יש בלוק מגודל לפחות 4. אבל, $A^4=0$ ולכן לא יתכן שיש בלוק ז'ורדן מגודל 5. לכן כל A כזאת דומה ל-$\operatorname{diag}\left(J_4(0),J_1(0)\right)$, והתשובה היא כן.

3. התנאים $A^2\neq 0, A^3=0$ מראים כי

$$\dim\ker\left(L_A^3\right)-\dim\ker\left(L_A^2\right)\geq 1\,,$$

ולכן יש בלוק מגודל לפחות 3. אבל,

$$\operatorname{diag}\left(J_3(0),J_2(0)\right)$$
$$\operatorname{diag}\left(J_3(0),J_1(0),J_1(0)\right)$$

שתיהן עומדות בתנאים, ואינן דומות.

2 בסיס ז'ורדן

2.1 מציאת בסיס ז'ורדן

נציג שתי דרכים למציאת בסיס ז'ורדן. כל אחת שמה דגש אחר על מבנה הבסיס, ולכן חשוב להבין את שתיהן. האלכוריתם מבוסס על ההנחה שקיימת צורת ז'ורדן, ועל האופן בו צריכים להיראות הוקטורים בבסיס ז'ורדן.
רעיון:
ננסה להבין בסיס למרחב ציקלי W. אם $B = (v_1, \ldots, v_k)$ וגם

$$[T|_W]_B = J_k(\lambda)$$

נקבל כי בהכרח

$$(T|_W - \lambda \operatorname{Id}_V) v_i = v_{i-1}$$

לכל $i > 1$ וגם

$$(T|_W - \lambda \operatorname{Id}_V) v_1 = 0 \, .$$

מפני שמטריצת ז'ורדן היא מטריצה אלכסונית בלוקים של בלוקי ז'ורדן, כאשר כל בלוק מייצג צמצום לתת־מרחב ציקלי, נקבל כי בסיס ז'ורדן מורכב משרשראות כאלו של וקטורים. נציג זאת בדוגמא.

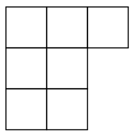
דוגמה 2.1. תהי

$$J \coloneqq \operatorname{diag}(J_4(1), J_2(1), J_2(1), J_3(0), J_1(0)) .$$

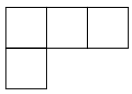
נסתכל על כל ערך עצמי בנפרד. עבור הערך העצמי 1 נשים לב מתקיים

$$(J - I) e_1 = (J - I) e_5 = (J - I) e_7 = 0$$
$$\forall i \in [8] \setminus \{1, 5, 7\} : \ (J - I) e_i = e_{i-1} .$$

אפשר לתאר זאת בדיאגרמת יאנג באופן הבא, כאשר נחשוב על כל ריבוע כוקטור שכשכופלים אותו ב־$(J - I)$ (משמאל) מקבלים את הוקטור שמשמאלו.



עבור הערך העצמי 0 נקבל באופן דומה את הדיאגרמה הבאה.



בכל אחת מהדרכים הבאות, נמצא קודם כל את הערכים העצמיים של $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$, ולאחר מכן נתייחס לכל ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ בנפרד.

2.1.1 דרך 1: השלמה של בסיס - משמאל לימין

1. נמצא את המרחב העצמי V_λ עבור λ.
$$V_\lambda = \ker(T - \lambda \operatorname{Id}_V)$$
נמצא לו בסיס $B_1 \coloneqq (u_1, \ldots, u_m)$.

2. לכל $i \in [m]$ נפתור את מערכת המשוואות $(T - \lambda \operatorname{Id}_V) v_i = u_i$. הוקטור v_i יהיה מימין לוקטור u_i בשרשרת המתאימה.

   הערה 2.2. שימו ♥ שיתכן שאין וקטור v_i כזה.
   הדרך הזאת לא תמיד עובדת. כי צריכים לקחת בחירה מתאימה של בסיס כדי שיהיו v_i כאלו.

3. נחזור על השלב הקודם עם וקטורים w_i עבורם $(T - \lambda \operatorname{Id}_V) w_i = v_i$ ונמשיך כך עד שלאף אחת מהמערכות לא יהיה פתרון.
   אם הגענו לאוסף שרשראות מאורך כולל n, הן מרכיבות בסיס ז'ורדן.

הערה 2.3. החיסרון בדרך הזאת היא שהיא לא תמיד עובדת. צריך לבחור בסיס מתאים ל־$\ker(T - \lambda \operatorname{Id}_V)$ כדי שהיא תעבוד. קיימת צורת ז'ורדן עבור T ולכן קיים בסיס כזה, אבל לא תמיד נמצא אותו.

דוגמה 2.4. נסתכל על $A = \operatorname{diag}(J_3(0), J_1(0))$. נקבל $\ker L_A = \operatorname{Span}\{e_1, e_4\}$. אז $B \coloneqq (e_1 + e_4, e_4)$ בסיס לגרעין, אבל אין פתרון ל־$Av = e_4$ או ל־$Av = e_1 + e_4$.
אם היינו לוקחים את e_1, e_4 כבסיס ל־$\ker(L_A)$ היה אפשר להשלים אותו לבסיס ז'ורדן $E = (e_1, \ldots, e_4)$.

הערה 2.5. סדר הכתיבה של הבסיס חשוב.

2.1.2 דרך 2: בניית השרשראות מימין לשמאל

הדרך השנייה שנציג יסודית יותר וכוללת חישובים של כל הוקטורים העצמיים המוכללים. היא מתבססת על אופן הוכחת משפט ז'ורדן כפי שמופיעה בהרצאה.
נמצא וקטורים v עבורם

$$\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-1}v,\dots,(T-\lambda\operatorname{Id}_V)v,v\right)$$

שרשראות ז'ורדן מקסימליות, עבור ערכים מתאימים של k, כאשר נחפש את השרשראות מהארוכה לקצרה.

1. נמצא את k- אורך השרשרת המקסימלית, בעזרת מימד הגרעין. זהו הערך המינימלי עבורו
$$\dim\ker\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^k\right)=r_a(\lambda).$$

2. נמצא וקטורים $v_1,\dots,v_r$ שמשלימים בסיס של $\ker\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-1}\right)$ לבסיס של $\ker\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^k\right)$. לכל $i\in[r]$ נוסיף את
$$\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-1}v_i,(T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-2}v_i,\dots,(T-\lambda\operatorname{Id}_V)v_i,v_i\right)$$
לבסיס ז'ורדן שאנו מרכיבים. נסמן
$$B_k:=\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-1}v_1,\dots,v_1,\dots,(T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-1}v_r,\dots,v_r\right).$$
הערה 2.6. שימו ♥ שיש חשיבות לסדר הוקטורים בבסיס.

3. נמצא את אורך השרשרת השנייה הכי ארוכה, באמצעות הסתכלות על מימדי הגרעינים. נחפש את ה-k הבא (הקטן יותר) עבורו יש שרשרת ז'ורדן מגודל k, כלומר זה שעבורו מתקיים
$$\dim\ker\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^k\right)-\dim\ker\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-1}\right)>\dim\ker\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k+1}\right)-\dim\ker\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^k\right).$$

4. נשלים בסיס של $\ker\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-1}\right)$ לבסיס של $\ker\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^k\right)$ שנסמנו $\tilde{B}_k$ וניקח תת־קבוצה $\{v_1,\dots,v_r\}\subseteq\tilde{B}_k$ מקסימלית כך ש־
$$\{v_1\dots,v_r\}\cup B_{k+1}$$
בלתי־תלויה לינארית, כאשר B_{k+1} אוסף הוקטורים מהשלב הקודם.
לכל $i\in[r]$ נוסיף את השרשרת
$$\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-1}v_i,(T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-2}v_i,\dots,(T-\lambda\operatorname{Id}_V)v_i,v_i\right)$$
לבסיס ז'ורדן. נסמן
$$B_k:=B_{k+1}*\left((T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-1}v_1,\dots,v_1,\dots,(T-\lambda\operatorname{Id}_V)^{k-1}v_r,\dots,v_r\right).$$

5. נחזור על שני השלבים הקודמים עד שנמצא $r_a(\lambda)$ וקטורים עצמיים מוכללים בלתי־תלויים $B_0:=B_0(\lambda)$ לכל ערך עצמי λ. אז
$$B:=B_0(\lambda_1)*\dots B_0(\lambda_m)$$
בסיס ז'ורדן כאשר $(\lambda_i)_{i\in[m]}$ הערכים העצמיים השונים של T.

הערה 2.7. בהרבה מהמקרים, נחפש צורת ז'ורדן עבור העתקות ומטריצות יחסית פשוטות. במקרה זה יכול לעזור לנו למצוא קודם כל את צורת ז'ורדן בעזרת גדלי הבלוקים, ורק אז את בסיס ז'ורדן.

2.2 תרגילים

תרגיל 4. מצאו צורת ובסיס ז'ורדן עבור

$$\begin{aligned}D\colon\mathbb{C}_n[x]&\to\mathbb{C}_n[x]\\ p&\mapsto p'\end{aligned}.$$

פתרון. נשים לב כי

$$\ker\left(D^i\right)=\operatorname{Span}\left(1,x,\dots,x^{i-1}\right)=\mathbb{C}_{i-1}[x].$$

לכן נסתכל על $k=n+1$. נרצה להשלים בסיס של $\ker(D^n)$ לבסיס של $\ker\left(D^{n+1}\right)$. מתקיים

$$\ker(D^n)=\operatorname{Span}\left\{1,x,x^2,\dots,x^{n-1}\right\}$$

לכן נשלים את הבסיס $\left(1,\dots,x^{n-1}\right)$ לבסיס $\left(1,\dots,x^{n-1},x^n\right)$. נקבל בסיס ז'ורדן

$$\left(D^n(x^n),D^{n-1}(x^n),\dots,D(x^n),x^n\right)=\left(n!,n!x,\frac{n!}{2!}x^2,\dots,fracn!(n-1)!x^{n-1},x^n\right).$$

תרגיל 5. נתונה המטריצה הנילפוטנטית

$$A = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 8 \\ 60 & -20 & 23 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

מצאו צורת ובסיס ז'ורדן עבור A.

פתרון. חישוב ישיר מראה כי $A^2 \neq 0$. A נילפוטנטית ולכן $A^3 = 0$ ונקבל $\dim \ker \left(L_A^3\right) = 3 = r_a(0)$. אז אורך השרשרת המקסימלית הוא 3 ונקבל כי $J(A) = J_3(0)$. ניתן לראות שהעמודה הראשונה והשנייה של A תלויות לינארית, ושהן בלתי תלויות בשלישית, לכן $r(A) = 2$. אז הריבוי הגיאומטרי של 0 הוא 1 (יכולנו לדעת את זה גם לפי מספר הבלוקים) ונקבל כי

$$\ker(L_A) = \operatorname{Span}\{e_1 + 3e_2\}.$$

כעת נחשב את $\ker\left(L_A^2\right)$. מתקיים

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -9 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $\ker\left(L_A^2\right)$, ששווה למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגונית, הוא

$$\ker\left(A^2\right) = \operatorname{Span}\{e_1 + 3e_2, e_2 + e_3\}.$$

הערה 2.8. קיבלנו בינתיים גרעין דו־מימדי עבור L_A^2, מה שמסתדר עם צורת ז'ורדן של A שגילינו.

כעת, נשלים את הבסיס של $\ker\left(L_A^2\right)$ לבסיס של $\ker\left(L_A^3\right)$, למשל על ידי הוספת e_1:

$$\ker\left(L_A^3\right) = \operatorname{Span}\{e_1 + 3e_2, e_2 + e_3, e_1\}.$$

אז שרשרת ז'ורדן תהיה

$$\left(A^2 e_1, Ae_1, e_1\right) = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 60 \\ -3 \end{pmatrix}, e_1\right).$$

הערה 2.9. אין קשר בין בסיס ז'ורדן לבין הבסיסים שמצאנו עבור הגרעינים השונים תוך כדי מציאת הוקטורים בראש השרשרת.