אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 10 — תכונות של העתקות, פירוק לערכים סינגולריים, פירוק פולארי ותבניות בילינאריות

אלעד צורני

1 ביולי 2021

1 העתקות נורמליות וכו'

1.1 חזרה

הגדרה 1.1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $F = \mathbb{R}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$). $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ תיקרא

- נורמלית אם $T^*T = TT^*$.
- צמודה לעצמה (הרמיטית) אם $T = T^*$.
- אורתוגונלית (יוניטרית) אם $T^* = T^{-1}$.

משפט 1.2 (משפט הפירוק הספקטרלי). $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלית אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי לפיו היא אלכסונית.

1.2 תרגילים

תרגיל 1. בתרגיל זה נראה שכל העתקה היא צירוף לינארי של 4 העתקות יוניטריות.
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

1. נניח כי T הרמיטית ועם ערכים עצמיים אי־שליליים. הראו כי יש $S \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הרמיטית עם ערכים עצמיים אי־שליליים עבורה $S^2 = T$. נסמנה $\sqrt{T}$.
2. נניח כי T הרמיטית. הראו כי הערכים העצמיים של T ממשיים.
3. נסמן ב־$\sigma(T)$ את אוסף הערכים העצמיים של T ונסמן
$$c(T) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$
תהי
$$\tilde{T} := \frac{T}{c(T)}.$$
הראו כי $\operatorname{Id}_V - \tilde{T}$ הרמיטית עם ערכים עצמיים אי־שליליים.
4. הראו כי T צירוף לינארי של שתי העתקות הרמיטיות.
5. נניח ש־T הרמיטית. הראו ש־T צירוף לינארי של שתי העתקות יוניטריות.
6. הסיקו כי T צירוף לינארי של ארבע העתקות יוניטריות.

פתרון. 1. T הרמיטית, לכן נורמלית ולכן לפי משפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ עבורו $[T]_B$ אלכסונית עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ על האלכסון. נגדיר
$$\begin{aligned} S \colon V &\to V \\ v_i &\mapsto \sqrt{\lambda_i} v_i \end{aligned}$$
ואז
$$S(v_i) = \lambda_i v_i.$$
נקבל $[T]_B = [S]_B$ ולכן $S = T$. S הרמיטית כי $\overline{[S]_B}^t = [S]_B$ וכי B בסיס אורתונורמלי.

2. כמו מקודם, קיים בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ של V לפיו T לכסינה. אבל, $[T]_B = \overline{[T]_B}^t$ ולכן לכל $i \in [n]$ מתקיים $\lambda_i = \overline{\lambda_i}$, ואז λ_i ממשי.

3. יהי B בסיס אורתונורמלי עבורו $[T]_B$ אלכסונית. אז
$$\left[\tilde{T}\right]_B = \frac{1}{c(T)} [T]_B$$
ונקבל כי הערכים העצמיים של $\tilde{T}$ בקטע $[0,1]$. אז גם $\left[\mathrm{Id}_V - \tilde{T}^2\right]_B$ אלכסונית עם ערכים עצמיים בקטע $[0,1]$. כיוון ש־B אורתונורמלי, נקבל כי $\mathrm{Id}_V - \tilde{T}^2$ הרמיטית.

4. נכתוב
$$.T = \frac{T + T^*}{2} + \frac{T - T^*}{2}$$
מתקיים
$$\left(\frac{T + T^*}{2}\right)^* = \frac{T^* + T^{**}}{2} = \frac{T + T^*}{2}$$
$$\left(\frac{T - T^*}{2}\right)^* = \frac{T^* - T^{**}}{2} = \frac{T^* - T}{2}$$
אבל
$$\left(\frac{T - T^*}{2i}\right)^* = i\left(\frac{T - T^*}{2}\right)^* = -i\frac{T - T^*}{2} = \frac{T - T^*}{2i}$$
ולכן
$$T = \frac{T + T^*}{2} + i\left(\frac{T - T^*}{2i}\right)$$
צירוף לינארי של שתי העתקות הרמיטיות.

5. מספיק להראות כי $\tilde{T}$ צירוף של שתי העתקות יוניטריות, לכן נניח $c(T) = 1$. נרצה $f(T), g(T)$ יוניטריות עבורן
$$.T = \frac{f(T) + g(T)}{2}$$
כמו מקודם, נכתוב $f(T) = A + iB$ עבור A, B הרמיטיות. אם ניקח $g(T) = A - iB$ נקבל
$$.T = \frac{A + iB + A - iB}{2} = A$$
אז $f(T) = T + iB$. T הרמיטית ולכן נורמלית ומתחלפת עם T^*. לכן היא מתחלפת עם B. מיוניטריות נקבל
$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_V &= f(T) f(T)^* \\ &= (T + iB)(T - iB) \\ &= T^2 + B^2\end{aligned}$$
ואז
$$.B^2 = \mathrm{Id}_V - T^2$$
כיוון שראינו ש־$\mathrm{Id}_V - T^2$ הרמיטית עם ערכים עצמיים אי־שליליים ולכן קיים לה שורש. ניקח $B = \sqrt{\mathrm{Id}_V - T^2}$.
אז אכן מתקיים $\mathrm{Id}_V = T^2 + B^2 = f(T) f(T)^*$ ולכן $f(T)$ יוניטרית. נשים לב כי $g(T) = f(T)^*$ ולכן גם $g(T)$ יוניטרית.

6. ראינו כי $T = \alpha H_1 + \beta H_2$ צירוף של שתי העתקות הרמיטיות וכי H_1, H_2 כל אחת צירוף של שתי העתקות יוניטריות, לכן
$$T = \alpha(aU_1 + bU_2) + \beta(cU_3 + dU_4)$$
צירוף לינארי של ארבע העתקות יוניטריות.

2 פירוק לערכים סינגולריים

2.1 חזרה

הגדרה 2.1 (ערך סינגולרי). תהי $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הערכים הסינגולריים של T הם הערכים העצמיים של $\sqrt{T^*T}$, כאשר כל אחד נספר מספר פעמים כריבוי הגיאומטרי שלו.

משפט 2.2 (פירוק לערכים סינגולריים). תהי $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. קיימים בסיסים אורתונורמליים B,C של V עבורם $[T]_C^B$ אלכסונית כאשר ערכי האלכסון הם הערכים הסינגולריים של T כולל כפילויות.

משפט 2.3 (פירוק לערכים סינגולריים של מטריצה). תהי $A\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. קיימות $U\in M_n(\mathbb{F})$ ו־$V\in M_m(\mathbb{F})$ אורתוגונליות (יוניטריות) וקיימת מטריצה מלבנית אלכסונית Σ עבורן

$$A=U\Sigma V^*.$$

2.2 חישוב

אלגוריתם 2.4 (מציאת SVD). כאשר נרצה למצוא פירוק לערכים סינגולריים נבצע את השלבים הבאים.

1. נמצא בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים עבור T^*T. אפשר לעשות את זה למשל לפי גרם־שמידט. נסדר אותו לפי סדר יורד של הערכים העצמיים. זה יהיה הבסיס B.
2. עבור כל וקטור v ב־B נסתכל על $\frac{1}{\sigma}T(v)$ כאשר σ הערך הסינגולרי המתאים לו. אם $B=(v_1,\ldots,v_n)$ נקבל קבוצה סדורה אורתונורמלית
$$\tilde{C}=\left(\frac{1}{\sigma_1}T(v_1),\ldots,\frac{1}{\sigma_n}T(v_n)\right).$$
3. אם אנו עובדים עם מטריצות, נשלים את $\tilde{C}$ לבסיס אורתונורמלי C של $(\mathbb{F})^m$. אחרת ניקח $C=\tilde{C}$.

דוגמה 2.5. תהי

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\in M_{3,2}(\mathbb{C}).$$

מתקיים $AA^*=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$. הערכים העצמיים של AA^* הם $3,1$ ולכן הערכים הסינגולריים של A הם $\sqrt{3},1$. e_1-e_2 וקטור עצמי של 3 ו־e_1+e_2 וקטור עצמי של 1. ננרמל את שני הוקטורים ונקבל בסיס אורתונורמלי $B=\left(\frac{e_1-e_2}{\sqrt{2}},\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\right)$ של $\mathbb{C}^2$.
נגדיר

$$\begin{aligned}\tilde{C}&=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}A\left(\frac{e_1-e_2}{\sqrt{2}}\right),A\left(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\right)\right)\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

ונשלים קבוצה סדורה זאת לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$. נסמן $w=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ונפתור את המשוואות

$$\begin{aligned}2a-b+c&=0\\b+c&=0\end{aligned}$$

כדי לקבל $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. כעת, $\|w\| = 3$ לכן לאחר נרמול נקבל $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. נגדיר

$$C := \tilde{C} * (v_3).$$

אז

$$A = [\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3}]_E^C \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}]_B^E$$

כאשר מתקיים

$$[\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}]_B^E = \left([\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}]_E^B\right)^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

וגם

$$[\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3}]_E^C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

2.3 תרגילים

תרגיל 2. הוכיחו או הפריכו: הערכים הסינגולריים של T^2 הם ריבועי הערכים הסינגולריים של T.

פתרון. הטענה איננה נכונה, למשל עבור $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3 פירוק פולארי

3.1 חזרה

הגדרה 3.1 (אופרטור מוגדר אי־שלילית). $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ צמוד לעצמו (הרמיטי) נקרא מוגדר אי־שלילית אם $\langle Tv, v \rangle \geq 0$ לכל $v \in V$.

משפט 3.2 (פירוק פולארי). תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יש איזומטריה $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה $T = S\sqrt{T^*T}$.

הערה 3.3. האופרטור T^*T מוגדר אי־שלילית כי $\langle T^*Tv, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle \geq 0$ לכל $v \in V$. ראינו בתרגול הקודם שעבור $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ יש לו שורש יחיד מוגדר אי־שלילית, וכי שורש זה הרמיטי.

אלגוריתם 3.4. כדי למצוא פירוק פולארי ניעזר בפירוק לערכים סינגולריים. ניתן לכתוב $A = W\Sigma V^*$. ניקח $P = V\Sigma V^*$ ו־$U = WV^*$. אז P מוגדרת אי־שלילית כמטריצה צמודה ל־Σ, ו־U אורתוגונלית (יוניטרית) כהרכבה של כאלה.

3.2 תרגילים

תרגיל 3. מצאו את הפירוק הפולארי עבור

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ 2x \\ 3y \end{pmatrix}.$$

פתרון. מתקיים

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T^*]_E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T^*T]_E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן הערכים הסינגולריים של T הם $3, 2, 1$. יש לנו בסיס אורתונורמלי $B = (e_2, e_1, e_3)$ של וקטורים עצמיים. כדי לקבל את הבסיס השני, נפעיל את T וננרמל. נקבל

$$.C = \left(\tfrac{1}{3}T\left(e_2\right), \tfrac{1}{2}T\left(e_1\right), T\left(e_3\right)\right) = (e_3, e_2, e_1)$$

אז

$$.\ [T]_E = W\Sigma V^*$$

עבור

$$\Sigma = \left[\sqrt{T^*T}\right]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = [\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3}]_E^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$.W = [\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3}]_E^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים

$$V\Sigma V^* = P_E^B\left[\sqrt{T^*T}\right]_B P_B^E = \left[\sqrt{T^*T}\right]_E$$

ולכן

$$\begin{aligned}
[T]_E &= W\Sigma V^* \\
&= WV^*V\Sigma V^* \\
&= WV^*\left[\sqrt{T^*T}\right]_E \\
&= \left[\sqrt{T^*T}\right]_C^E
\end{aligned}$$

נסמן $U := WV^*$, שהינה יוניטרית כמכפלת יוניטריות ונסמן $S := \left(\rho_E^E\right)^{-1}(U)$, שהינה יוניטרית כי היא מיוצגת על ידי מטריצה יוניטרית בבסיס אורתונורמלי. נקבל $T = S\sqrt{T^*T}$. כאשר

$$.\ [S]_E = U = WV^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה 3.5. באופן כללי ראינו בתרגיל כי $[T]_E = P_E^C P_E^B$ כאשר B, C הבסיסים מהפירוק לערכים סינגולריים.