

אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 3

מרחבים שמורים, מרחבים עצמיים מוכללים ומשפט קיילי-המילטון

תאריך הגשה: 25.4.2021

תרגיל 1. 1. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל שדה \mathbb{F} ותהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יהי $W \leq V$ תת-מרחב שמור ויהי $U \leq V$ משלים ישר של W ב- V . הראו כי $T|_W = T_{W,U}$.

2. מצאו דוגמא עבור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, $W \leq V$ כלשהו עם משלימים ישרים $U_1, U_2 \leq V$, כך ש- $T|_{W,U_1} \neq T|_{W,U_2}$.

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל שדה \mathbb{F} ותהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יהי

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

בסיס של V , יהי $k \in [n-1]$ ויהיו

$$B_1 := (v_1, \dots, v_k)$$

$$B_2 := (v_{k+1}, \dots, v_n)$$

$$W := \text{Span } B_1$$

$$U := \text{Span } B_2$$

1. הראו כי W הוא תת-מרחב שמור אם ורק אם $[T]_B$ מהצורה

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_W]_{B_1} & * \\ 0 & [T_{U,W}]_{B_2} \end{pmatrix}$$

2. הראו כי U הוא תת-מרחב שמור אם ורק אם $[T]_B$ מהצורה

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_{W,U}]_{B_1} & 0 \\ * & [T|_U]_{B_2} \end{pmatrix}$$

תרגיל 3. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל שדה \mathbb{F} ותהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

1. הראו כי לכל $i, j \in [n]$ המקיימים $i < j$, מתקיים

$$\text{Im}(T^i) \supseteq \text{Im}(T^j)$$

2. יהי $k \in [n]$ עבורו $\text{Im}(T^k) = \text{Im}(T^{k+1})$. הראו כי לכל $m \in \{k, k+1, \dots, n\}$ מתקיים $\text{Im}(T^k) = \text{Im}(T^m)$.

תרגיל 4. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל שדה \mathbb{F} ותהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נזכיר כי משפט קיילי-המילטון קובע כי $p_T(T) = 0$ כאשר

$$p_T(x) := \prod_{i \in [k]} (x - \lambda_i)^{r_{\lambda_i, T}}$$

הפולינום האופייני של T וכאשר $(\lambda_i)_{i \in [k]}$ הערכים העצמיים השונים של T .

1. יהי

$$\mathbb{F}[T] := \{p(T) \mid p \in \mathbb{F}[x]\} \leq \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$$

הראו כי

$$\mathbb{F}[T] = \text{Span}(I, T, \dots, T^{n-1})$$

2. מצאו דוגמא עבור $S \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה

$$\{I, S, \dots, S^{n-1}\}$$

קבוצה בלתי־תלויה לינארית. הסיקו שבמקרה זה

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[S] = n$$

3. נניח כי T הפיכה. הראו שמתקיים $T^{-1} \in \mathbb{F}[T]$.

4. נניח כי T הפיכה ונסמן

$$\mathbb{F}(T) := \left\{ \sum_{i=-m}^m a_i T^i \mid \begin{matrix} m \in \mathbb{N} \\ \forall i: a_i \in \mathbb{F} \end{matrix} \right\} \leq \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$$

הראו כי לכל $S_1, S_2 \in \mathbb{F}[T]$ מתקיים $S_1 \circ S_2 \in \mathbb{F}[T]$ והסיקו שמתקיים $\mathbb{F}[T] = \mathbb{F}(T)$.

תרגיל 5. 1. תהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$ שהערכים העצמיים שלה הם 3, 5, 8. הראו כי

$$(T - 3I)^2 (T - 5I)^2 (T - 8I)^2 = 0$$

2. תהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הטלה ויהיו

$$m := \dim \ker(T), \quad n := \dim \text{Im}(T)$$

הראו כי

$$p_T(x) = x^m (x - 1)^n$$