אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 4
העתקות נילפוטנטיות וצורת ז'ורדן

תאריך הגשה: 05.05.2021

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ ותהי

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < n_k = n$$

סדרת מספרים.

1. נניח כי $n_i - n_{i-1}$ מונוטונית יורדת (לאו דווקא ממש). הראו שיש העתקה $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה $n_i = \dim\ker(T^i)$ לכל $i \in [k]$.
2. נניח כי יש $i \in [k]$ עבורו $n_{i+1} - n_i > n_i - n_{i-1}$. הראו שאין העתקה $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה $n_i = \dim\ker(T^i)$ לכל $i \in [k]$.

תרגיל 2 (פירוק Jordan-Chevalley). יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.
הראו שקיימות $T_s, T_n \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כך ש־T_s לכסינה, T_n נילפוטנטית ומתקיים

$$T = T_s + T_n$$

וגם

$$T_sT_n = T_nT_s.$$

תרגיל 3.
1. תהי $T \coloneqq L_{J_m(0)} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m)$. הראו כי כל התת־מרחבים ה־T־שמורים של $\mathbb{C}^m$ הם $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_k)$ עבור $0 \leq k \leq m$.

   רמז: הניחו כי W תת־מרחב T־שמור. מצאו וקטור עצמי של $T|_W$ והיעזרו בו כדי להראות שאם $w \in W \setminus \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_k)$ אז $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_{k+1}) \subseteq W$.
2. יהי $\lambda \in \mathbb{C}$. ויהי $W \leq \mathbb{C}^n$. הראו כי W הוא $L_{J_m(0)}$־שמור אם ורק אם הוא $L_{J_m(\lambda)}$־שמור.
3. תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ כך שכל ערך עצמי של T מריבוי גיאומטרי 1, ויהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס ז'ורדן עבור T (כלומר, בסיס עבורו $[T]_B$ מטריצת בלוקים כך שכל בלוק הוא בלוק ז'ורדן). מצאו את כל התת־מרחבים ה־T־שמורים של V.

תרגיל 4. עבור מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ נגיד שמטריצת ז'ורדן J (מטריצת בלוקים שבלוקיה הם בלוקי ז'ורדן) היא **צורת ז'ורדן של** A אם יש $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $P^{-1}AP = J$.
מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצות **המרוכבות** הבאות. השתמשו בכך שמספר הבלוקים בצורת ז'ורדן של T מגודל לפחות i ועם ערך עצמי λ הוא

$$\dim\ker\left((T - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^i\right) - \dim\ker\left((T - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{i-1}\right).$$

1. $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

תרגיל 5. 1. מצאו צורת ובסיס ז'ורדן של $J_n(\lambda)^t$.

רמז: אפשר לקחת שינוי סדר של הבסיס הסטנדרטי, שיהיה מורכב משרשראות ז'ורדן עבור $J_n(\lambda)^t$. כדאי קודם לחשוב על המקרה $\lambda = 0$ בשביל פשטות.

2. הסיקו כי $A \sim A^t$ לכל $A \in M_n(\mathbb{C})$.

רמז: עבור P הפיכה מתקיים $\left(P^{-1}\right)^t = \left(P^t\right)^{-1}$.

תרגיל 6.

מצאו בסיס וצורת ז'ורדן עבור $\left(J_n(0)\right)^2$ לכל $n \in \mathbb{N}_+$.