אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 4 — הטלות ומרחבים עצמיים מוכללים

אלעד צורני

17 במאי 2021

1 הטלות

1.1 חזרה

הגדרה 1.1 (הטלה במקביל לתת־מרחב). יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו־$U, W \leq V$ עבור $V = U \oplus W$.
נגדיר את ההטלה על U במקביל ל־W להיות ההעתקה

$$\begin{aligned} P_U \colon V &\to V \\ u + w &\mapsto u \end{aligned}.$$

הערה 1.2. ההטלה P_U תלויה ב־W.

דוגמה 1.3. יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהיו

$$\begin{aligned} U &= \mathsf{Span}\left(e_1\right) \\ W_1 &= \mathsf{Span}\left(e_2\right) \\ W_2 &= \mathsf{Span}\left(e_1 + e_2\right) \end{aligned}$$

ויהיו P_1, P_2 ההטלות על U במקביל ל־W_1, W_2 בהתאמה.
מתקיים

$$P_1\left(e_1 + e_2\right) = e_1$$

אבל

$$P_2\left(e_1 + e_2\right) = e_1 + e_2.$$

הגדרה 1.4 (הטלה). העתקה $P \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ נקראת הטלה אם קיימים $U, W \leq V$ עבורם $P = P_U$.

עובדה 1.5. העתקה $P \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ היא הטלה אם ורק אם $P^2 = P$.

1.2 תרגילים

תרגיל 1. מצאו את כל הערכים העצמיים האפשריים של הטלה.

פתרון. יהי λ ערך עצמי של הטלה P עם וקטור עצמי v. אז

$$\lambda^2 v = P^2 v = Pv = \lambda v$$

לכן $\lambda \in \{0, 1\}$.
אפשר לקחת $P = \mathsf{Id}_V$ או $P = 0_V$ ולקבל את שתי האופציות האלו.

תרגיל 2. תהי $P \in \mathsf{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ הטלה. הראו כי P הטלה על $U \leq V$ במקביל ל־$W \leq V$ אם ורק אם $U = \mathsf{Im}\, P$ וגם $W = \ker P$.

פתרון.
- נניח כי P הטלה על U במקביל ל־W. לכל $u \in U$ מתקיים

$$P\left(u\right) = P\left(u + 0\right) = u$$

לכן $U \subseteq \mathsf{Im}\, P$. להיפך, אם $v \in \mathsf{Im}\, P$ יש $u \in U, w \in W$ עבורם $v = P\left(u + w\right) = u \in U$ לכן $\mathsf{Im}\, P = U$.

יהי $w \in W$. מתקיים

$$P(w) = P(0+w) = 0$$

לכן $W \subseteq \ker(P)$. להיפך, נניח כי $v \in \ker P$ ונכתוב $v = u + w$. אז

$$0 = Pv = u$$

לכן $v = w \in W$, לכן $\ker P = \operatorname{Im} P$.

- נניח כי $\ker P = W$ וכי $\operatorname{Im} P = U$. נניח כי $v \in U \cap W$. ראינו כי $P|_{\operatorname{Im} P} = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} P}$ לכן $Pv = v$. אבל גם $Pv = 0$, לכן $v = 0$ ולכן U, W זרים. ממשפטי המימדים מתקיים

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Im} P + \ker P) &= \dim(\operatorname{Im} P) + \dim(\ker P) - \dim(\operatorname{Im} P \cap \ker P) \\ &= \dim(\operatorname{Im} P) + \dim(\ker P) \\ &= V \end{aligned}.$$

לכן $V = U \oplus W$. עבור $u \in U, w \in W$ נכתוב $u = P(u')$. אז

$$\begin{aligned} P(u+w) &= P(u) + P(w) \\ &= P(u) \\ &= u \end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון נכון כי $P|_{\operatorname{Im} P} = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} P}$. לכן P ההטלה על $\operatorname{Im} P$ בניצב ל־$\ker P$.

הערה 1.6. בכיוון השני בפתרון הראינו שעבור הטלה P מתקיים $V = \operatorname{Im} P \oplus \ker P$.

תרגיל 3. תהי $P \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי P לכסינה.

פתרון. יהי B בסיס עבור $\operatorname{Im} P$ ויהי C בסיס עבור $\ker P$. ראינו כי $P|_{\operatorname{Im} P} = \operatorname{Id}$ וכי $P|_{\ker P} = 0$ לכן המטריצה המייצגת של P בבסיס $B * C$ היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & & 0 \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}.$$

תרגיל 4. תהי $P \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה ותהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כלשהי. הראו כי $\ker P$ הוא T־שמור אם ורק אם יש $\hat{T} \colon \ker P \to \ker P$ לינארית המקיימת

$$\hat{T} \circ P = P \circ T.$$

כלומר, כך שהדיאגרמה

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "P"'] & V \arrow[d, "P"] \\ \operatorname{Im} P \arrow[r, "\hat{T}"'] & \operatorname{Im} P \end{tikzcd}$$

מתחלפת.

פתרון. • נניח כי W הוא T־שמור ויהי $u \in \operatorname{Im} P$. יש $v \in V$ עבורו $P(v) = u$, ואז $P(u) = P^2(u) = P(v) = u$. נגדיר

$$\hat{T}(u) = P \circ T(u).$$

יהי $v \in V$, צריך להראות שמתקיים

$$P \circ T(v) = \hat{T} \circ P(v).$$

נכתוב $v = u + w$ כאשר $u \in \operatorname{Im} P, w \in \ker P$. אז

$$\hat{T} \circ P(v) = \hat{T}(u) = P \circ T(u)$$

וגם
$$T\left(w\right)\in\ker P$$
לכן
$$P\circ T\left(u\right)=P\circ T\left(u\right)+P\circ T\left(w\right)=P\circ T\left(u+w\right)=P\circ T\left(v\right).$$
בסך הכל
$$\hat{T}\circ P\left(v\right)=P\circ T\left(u\right)=P\circ T\left(v\right),$$
כנדרש.

- נניח כי יש העתקה $\hat{T}$ כמתואר ויהי $w\in\ker P$. אז
$$PT\left(w\right)=\hat{T}P\left(w\right)=\hat{T}\left(0\right)=0$$
ולכן $T\left(w\right)\in\ker P$. נקבל $T\left(\ker P\right)\subseteq\ker P$.

2 מרחבים עצמיים מוכללים והפולינום האופייני

2.1 תזכורת

הגדרה 2.1 (מרחב עצמי מוכלל). תהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ ונסמן $n\coloneqq\dim_{\mathbb{F}}\left(V\right)$. המרחב העצמי המוכלל של T עבור ערך עצמי λ הוא
$$V_{\lambda}'\coloneqq\ker\left(\left(T-\lambda\,\mathrm{Id}_{V}\right)^{n}\right).$$
הריבוי האלגברי של λ הוא
$$r_{a,T}\left(\lambda\right)\coloneqq\dim V_{\lambda}'.$$

הגדרה 2.2 (פולינום אופייני). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי. הפולינום האופייני של $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ שערכיה העצמיים השונים הם $\left(\lambda_{i}\right)_{i\in\left[k\right]}$ הוא
$$p_{T}\left(x\right)\coloneqq\sum_{i\in\left[k\right]}\left(x-\lambda_{i}\right)^{r_{a,T}\left(\lambda_{i}\right)}.$$

משפט 2.3 (קיילי־המילטון). לכל $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ מתקיים
$$p_{T}\left(T\right)=0.$$

2.2 תרגילים

תרגיל 5. תהי
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$
מצאו את המרחבים העצמיים ואת המרחבים העצמיים המוכללים של A.

פתרון. הערכים העצמיים של A הם 1 מריבוי אלגברי 2 ו־3 מריבוי אלגברי 1. נחשב.

$$\begin{aligned}\ker(A-I) &= \ker\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&2\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{Span}\{e_1\}\\ \ker(A-I)^2 &= \ker\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&4\\0&0&4\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{Span}\{e_1,e_2\}\\ \ker(A-3I) &= \ker\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= \ker\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= \ker\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

בסך הכל

$$\begin{aligned}V_1 &= \operatorname{Span}\{e_1\}\\ V_1' &= \operatorname{Span}\{e_1,e_2\}\\ V_3 = V_3' &= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

תרגיל 6. תהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ויהי λ ערך עצמי של T. יהי $(v_1,\ldots,v_r)$ בסיס של V_λ' כאשר $(v_1,\ldots,v_s)$ בסיס של V_λ. הראו כי $\hat{V}_\lambda := \operatorname{Span}\{v_{s+1},v_{s+2},\ldots,v_r\}$ אינו T־שמור.

פתרון. אם $\hat{V}_\lambda$ מרחב T־שמור, להעתקה $T|_{\hat{V}_\lambda}$ יש ערך עצמי μ. אבל, אז μ ערך עצמי של T. אם $\lambda \neq \mu$ נקבל $V_\mu' \cap V_\lambda' \neq \{0\}$ בסתירה. אחרת, יש ל־$T|_{\hat{V}_\lambda}$ וקטור עצמי עם ערך עצמי λ, כלומר $\hat{V}_\lambda \cap V_\lambda \neq \{0\}$ בסתירה להגדרת $\hat{V}_\lambda$.

תרגיל 7. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ כך שמתקיים $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} \neq 0$, ויהיו $P_1,P_2\colon V \to V$ הטלות.

1. הוכיחו כי $\operatorname{Id}_V + P_1$ הפיכה ומצאו את $(\operatorname{Id}_V + P_1)^{-1}$.
2. נניח כי $P_1 + P_2$ הטלה. הוכיחו כי $P_1P_2 = 0$.
3. מצאו דוגמאות נגדיות לשני הסעיפים במקרה $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} = 0$.

פתרון. 1. P_1 לכסינה עם ערכים עצמיים $0,1$ בלבד, לכן הערכים העצמיים של $I + P_1$ הם $1,2$ בלבד. בפרט 0 אינו ערך עצמי ולכן P_1 הפיכה. יש מטריצה אלכסונית D ובסיס B כך ש־$[T]_B$ אלכסונית עם איברי אלכסון בקבוצה $\{0,1\}$. אז

$$[T + \operatorname{Id}_V]_B = [T]_B + [\operatorname{Id}_V]_B = D + I$$

עם איברי אלכסון בקבוצה $\{1,2\}$. אם זאת מטריצת היחידה, $D=0$ ואז $P=0$ ונקבל $(\mathsf{Id}_V+P)^{-1}=\mathsf{Id}_V$.
אם $P=\mathsf{Id}_V$ נקבל $(\mathsf{Id}_V+P)^{-1}=\frac{1}{2}\mathsf{Id}_V$. אחרת,

$$D=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ונקבל

$$\left(I-\frac{1}{2}D\right)(I+D)=I$$

לכן

$$\left(\mathsf{Id}_V-\frac{1}{2}P\right)(\mathsf{Id}_V+P)=\mathsf{Id}_V .$$

נציג דרך נוספת. מתקיים $P^2=P$ לכן $P^2-P=0$. אז

$$(P+\mathsf{Id}_V-\mathsf{Id}_V)^2-(P+\mathsf{Id}_V-\mathsf{Id}_V)=0 .$$

נפתח את הביטוי, נכפול ב־$(P+\mathsf{Id}_V)^{-1}$ ונקבל את התוצאה.

2. מתקיים

$$P_1+P_2=(P_1+P_2)^2=P_1^2+P_1P_2+P_2P_1+P_2^2=P_1+P_1P_2+P_2P_1+P_2$$

לכן

$$P_1P_2=-P_2P_1 .$$

נניח בשלילה ש־$P_1P_2\neq 0$. אז יש $v\in V$ כך ש־$u:=P_2(v)\notin\ker(P_1)$. אז

$$-P_2P_1(v)=P_1P_2(u)=-P_2P_1(u)=-P_2P_1P_2(v)=P_2^2P_1(v)=P_2P_1(v)$$

לכן $P_2P_1(v)=0$. אז

$$P_1(u)=P_1P_2(v)=-P_2P_1(v)=0$$

כלומר $u\in\ker(P_1)$, בסתירה.

3. ניקח $P_1=P_2=\mathsf{Id}_V$. אז $P_1+P_2=0$ הטלה אבל $P_1P_2=\mathsf{Id}_V\neq 0$. כמו כן $\mathsf{Id}_V+P_1=2\,\mathsf{Id}_V=0$ אינה הפיכה.

תרגיל 8. תהי $T\in\mathsf{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ויהיו $(V_i)_{i\in[m]}$ תת־מרחבים T־שמורים של V. לכל $i\in[m]$ יהי $p_i:=p_{T|_{V_i}}$. הוכיחו כי

$$p_T=\prod_{i\in[m]}p_i .$$

פתרון. ראינו בהרצאה כי כל אנדומורפיזם של מרחב וקטורי יש בסיס לפיו הוא מיוצג כמטריצה משולשת עליונה. לכן יש בסיסים $B_1,\ldots,B_m$ עבור $V_1,\ldots,V_m$ כך ש־B_i $\left[T|_{V_i}\right]$ משולשות עליונות. יהי $B=B_1*\ldots*B_m$, ואז $[T]_B$ משולשת עליונה. הריבוי האלגברי של λ הוא מספר הפעמים שהוא מופיע על האלכסון, לכן נקבל

$$r_{a,T}(\lambda)=\sum_{i\in[m]}r_{a,T|_{V_i}}(\lambda)$$

ולכן החזקה של $x-\lambda$ ב־p_T היא מכפלת החזקות ב־p_i. אלגברית,

$$\begin{aligned}r_{a,T}(\lambda)&=\dim\ker(T-\lambda\,\mathsf{Id}_V)\\&=\dim\ker\left(\bigoplus_{i\in[m]}T-\lambda\,\mathsf{Id}_V|_{V_i}\right)\\&=\dim\bigoplus_{i\in[m]}\ker\left(T-\lambda\,\mathsf{Id}_V|_{V_i}\right)\\&=\sum_{i\in[m]}r_{a,T|_{V_i}}(\lambda)\end{aligned} .$$