אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 1
מטריצות מייצגות וכלל קרמר

תאריך הגשה: 6.4.2021

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T\colon V \to V$ לינארית המקיימת $T^2 = -5\,\mathsf{Id}_V$.

1. הוכיחו כי לכל $v \in V \setminus \{0\}$ הקבוצה $\{v, Tv\}$ בלתי־תלויה לינארית.
2. נתון גם כי $\dim V = 2$. הוכיחו כי קיים בסיס בו T מיוצגת על ידי $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

תרגיל 2. יהי $B = (v_i)_{i\in[n]}$ בסיס למרחב וקטורי V. נתונה $T\colon V \to V$ הפיכה המקיימת

$$T\left(v_1 + 2v_2\right) = \sum_{i\in[n]} v_i.$$

מצאו את סכום איברי $\left[T^{-1}\right]_B$.

תרגיל 3. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי B בסיס של V.

1. תהי

$$\begin{aligned} \rho_B\colon V &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B. \end{aligned}$$

הראו ש־ρ_B חד־חד ערכית ועל.

2. תהיינה $T, S\colon V \to V$ העתקות לינאריות עבורן $[T]_B = [S]_B$. הסיקו שמתקיים $T = S$.

תרגיל 4 (כלל קרמר). תהי $Ax = b$ מערכת משוואות כאשר $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ הפיכה.
לכל $i \in [n]$ תהי

$$\begin{aligned} K_{A,i}\colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F} \\ b &\mapsto \frac{\det\begin{pmatrix} | & & | & | & | & & | \\ A_1 & \cdots & A_{i-1} & b & A_{i+1} & \cdots & A_n \\ | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}}{\det\left(A\right)} \end{aligned}$$

ותהי

$$\begin{aligned} K_A\colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ b &\mapsto \begin{pmatrix} K_{A,1}\left(b\right) \\ K_{A,2}\left(b\right) \\ \vdots \\ K_{A,n-1}\left(b\right) \\ K_{A,n}\left(b\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

נראה שהפתרון היחיד למערכת נתון על ידי $x = K_A\left(b\right)$.

1. הראו שלכל $i \in [n]$ ההעתקה $K_{A,i}$ לינארית.
2. הסיקו ש־K_A העתקה לינארית.
3. תהי

$$\begin{aligned} L_A \colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned} .$$

הראו ש־$K_A \circ L_A = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}$ על ידי בדיקה על הבסיס הסטנדרטי, והסיקו שמתקיים $K_A = (L_A)^{-1}$.

4. הסיקו שמתקיים $[K_A]_E = A^{-1}$ כאשר E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$.

תרגיל 5. תהי $T \colon V \to V$ העתקה לינארית ויהיו B, C בסיסים של V. הראו כי

$$\mathrm{tr}\left([T]_B\right) = \mathrm{tr}\left([T]_C\right)$$

וגם

$$\det\left([T]_B\right) = \det\left([T]_C\right) .$$

אז נוכל להגדיר

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\, T &:= \mathrm{tr}\left([T]_B\right) \\ \det T &:= \det\left([T]_B\right) . \end{aligned}$$

תרגיל 6 (מטריצות בלוקים). מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ נקראת **אלכסונית בלוקים** $(n_1, \ldots, n_k)$ אם היא מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & 0 & & A_{k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

כאשר $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ לכל $i \in [k]$.
תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אלכסונית בלוקים $(n_1, \ldots, n_k)$ עם בלוקים $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$.

1. הראו שמתקיים

$$\det(A) = \prod_{i \in [k]} \det(A_i) .$$

2. הראו שמתקיים

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i \in [k]} \mathrm{tr}(A_i) .$$

3. תהי $B \in M_n(\mathbb{F})$ אלכסונית בלוקים $(n_1, \ldots, n_k)$ עם בלוקים $B_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$. הראו שמתקיים

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & A_2B_2 & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & 0 & & A_{k-1}B_{k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & A_kB_k \end{pmatrix} .$$

4. הסיקו שלכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$A^m = \begin{pmatrix} A_1^m & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & A_2^m & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & 0 & & A_{k-1}^m & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & A_k^m \end{pmatrix} .$$

5. הסיקו שאם $(P_i)_{i\in[k]}$ מטריצות הפיכות כך ש־$P_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ לכל $i\in[k]$ ו־$P\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה אלכסונית בלוקים $(n_1,\ldots,n_k)$ עם בלוקים P_i, אז P הפיכה ומתקיים

$$.PAP^{-1} = \begin{pmatrix} P_1A_1P_1^{-1} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & P_2A_2P_2^{-1} & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & 0 & & P_{k-1}A_{k-1}P_{k-1}^{-1} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & P_kA_kP_k^{-1} \end{pmatrix}$$