אלגברה ב' (104168) — אביב 2020-2021
תרגול 11 — תבניות בילינאריות

אלעד צורני

16 ביוני 2021

1 תבניות בילינאריות

1.1 חזרה

הגדרה 1.1 (תבנית בילינארית). תבנית בילינארית על מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ היא העתקה

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

לינארית בשני הרכיבים.

הערה 1.2. מעל $\mathbb{C}$ בדרך כלל עוסקים בתבניות ססקווילינאריות במקום תבניות בילינאריות, שנדבר עליהן בהמשך.

הגדרה 1.3 (מטריצות חופפות). מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ נקראות חופפות אם קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $B = P^t A P$.

הערה 1.4. חפיפת מטריצות היא יחס שקילות. אם $B = P^t A P$ וגם $C = Q^t B Q$ אז

$$C = Q^t P^t A P Q = (PQ)^t A (PQ).$$

הגדרה 1.5 (מטריצה מייצגת לתבנית בילינארית). עבור העתקה בילינארית $f : V \times V \to \mathbb{F}$ ובסיס $B = (v_i)_{i \in [n]}$ של V נסמן ב־$[f]_B$ את המטריצה עם $([f]_B)_{i,j} = f\left(v_i, v_j\right)$.

הערה 1.6. מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ חופפות אם ורק אם הן מייצגות את אותה תבנית בילינארית בבסיסים שונים.

הערה 1.7. ניתן לשחזר את התבנית הבילינארית מהמטריצה המייצגת. עבור g בילינארית ועבור בסיס C מתקיים

$$g(u, v) = [u]_C^t [g]_C [v]_C.$$

למעשה $g \mapsto [g]_C$ איזומורפיזם בין מרחב התבניות הבילינאריות והמרחב $M_n(\mathbb{R})$.

1.2 תרגילים

תרגיל 1. תהיינה

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ g &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto (x_1 + y_1)^2 - x_2 y_2 . \end{aligned}$$

קבעו האם f, g בילינאריות.

פתרון. • מתקיים

$$f(y, x) = y_1 x_2 - y_2 x_1 = -f(x, y)$$

ולכן מספיק לבדוק לינאריות ברכיב הראשון. אכן

$$f(x + \alpha x', y) = (x_1 + \alpha x_1') y_2 - (x_2 + \alpha x_2') y_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 + \alpha (x_1' y_2 - x_2' y_1) = f(x, y) + \alpha f(x', y).$$

- g אינה תבנית בילינארית. מתקיים

$$g\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=2^2-2=2$$

אבל

$$2g\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=2\left(1^1-1\right)=0.$$

תרגיל 2. תהיינה $A,B,P\in M_n(\mathbb{R})$ כאשר P הפיכה ומתקיים $B=P^tAP$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

1. $\det(A)=\det(B)$.
2. ל־A,B יש אותם ערכים עצמיים.
3. $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.
4. A הפיכה אם ורק אם B הפיכה, וכאשר זה מתקיים A^{-1},B^{-1} חופפות.

פתרון. 1. מתקיים

$$\det(B)=\det\left(P^tAP\right)=\det\left(P^t\right)\det(A)\det(P)$$

ולכן יש שוויון אם ורק אם $\det(P^t)\det(P)=1$. אבל, $\det(P^t)=\det(P)$ ולכן זה מתקיים אם ורק אם $\det(P)\in\{\pm1\}$. זה לא חייב להיות המצב. למשל, נוכל לקחת $A=I_n,B=4I_n,P=2I_n$.

2. הדוגמא הקודמת מראה שהערכים העצמיים לא נשמרים.
3. הדרגה נשמרת כי P^t,P הפיכות.
4. נניח כי A הפיכה. אז B הפיכה כי הדרגות שלהן שוות. נשים לב כי

$$B^{-1}=\left(P^tAP\right)^{-1}=P^{-1}A^{-1}\left(P^t\right)^{-1}$$

ועבור $\tilde{P}=(P^t)^{-1}$ נקבל $B^{-1}=\tilde{P}^tA^{-1}\tilde{P}$.

2 חוק האינרציה של סילבסטר

2.1 חזרה

משפט 2.1 (סילבסטר). תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית. A חופפת למטריצה יחידה מהצורה $\begin{pmatrix}I_{(n_+)}&&\\&-I_{(n_-)}&\\&&0_{(n_0)}\end{pmatrix}$.
מטריצה זאת נקראת צורת סילבסטר הקנונית של A. n_+ ו־n_- נקראים אינדקס האינרציה החיובי והשלילי של A, בהתאמה. ההפרש n_+-n_- נקרא הסיגנטורה של A.

הערה 2.2. משפט סילבסטר אומר באופן שקול שלכל תבנית בילינארית סימטרית g קיים בסיס C עבורו $[g]_C$ בצורת סילבסטר.

2.2 תרגילים

תרגיל 3. תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית.

1. הוכיחו כי A,A^3 חופפות.
2. הוכיחו כי אם A הפיכה, היא חופפת ל־A^{-1}.
3. תהי $B\in M_n(\mathbb{R})$ ונניח כי

$$p_A(x)=x^2-2$$
$$p_B(x)=x^2+2x-3.$$

האם A,B בהכרח חופפות?

פתרון. 1. ל־A, A^3 יש אותם אינדקסיי אינרציה כי הערכים העצמיים של A^3 הם λ^3 עבור λ ערך עצמי של A. לכן ל־A, A^3 אותה צורת סילבסטר, ולכן הן חופפות.

2. כמו מקודם, כאשר הערכים העצמיים של A^{-1} הם $\frac{1}{\lambda}$ עבור λ ערך עצמי של A.

3. נמצא שורשים של הפולינומים.

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$
$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 3x - (x+3) = (x-1)(x+3)$$

לכן לכל אחד מהפולינומים ערך עצמי אחד חיובי ואחד שלילי. לכן צורות סילבסטר של A, B שתיהן $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ולכן הן חופפות.

תרגיל 4. מצאו את צורת סילבסטר של

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

פתרון. כדי למצוא את צורת סילבסטר, נחפש ערכים עצמיים. נשים לב כי 1 ערך עצמי מריבוי $n-1$. אז הערך העצמי הנוסף הוא $\operatorname{tr}(A) - (n-1)\cdot 1 = -n+1$. אם $n = 1$ מתקיים $A = (0)$. אחרת צורת סילבסטר היא $\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & -1 \end{pmatrix}$.

אלגוריתם 2.3. כדי למצוא בסיס C עבורו $[g]_C$ בצורת סילבסטר נבצע את השלבים הבאים.

1. נמצא בסיס $\tilde{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ של V עבורו $[g]_{\tilde{C}}$ אלכסונית, בעזרת לכסון אורתוגונלי.

2. נגדיר

$$u_i = \begin{cases} \frac{v_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \lambda_i \neq 0 \\ v_i & \lambda_i = 0 \end{cases}.$$

3. על ידי בחירת סדר מתאים של ה־u_i נקבל בסיס C המקיים את הנדרש.

תרגיל 5. תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו מטריצה $P \in M_3(\mathbb{R})$ עבורה P^tAP בצורת סילבסטר.

פתרון. נתחיל במציאת ערכים עצמיים של A. נשים לב כי 1 ערך עצמי של A מריבוי 2. הערך העצמי הנוסף הוא $\operatorname{tr}(A) - 2\cdot 1 = 4$. בסיס מתאים הוא $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

נבצע את תהליך גרם־שמידט על כל אחד מהמרחבים העצמיים, כדי לקבל בסיס אורתונורמלי

$$\tilde{C} := (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}\right).$$

נחלק את הוקטורים העצמיים ב־$\sqrt{\lambda_i}$ ונקבל בסיס

$$C := \left(\begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}\right).$$

תהי

$$P = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{6}/6 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{6}/3 \\ 1/2\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

ונקבל כי

$$P^t A P = I_3$$

בצורת סילבסטר.

הערה 2.4. לפעמים חישוב הערכים העצמיים יכול להיות מסובך. נוכל בעצם למצוא את צורת סילבסטר ואת הבסיס המתאים לה בלי מציאת המרחבים העצמיים. לשם כך, נשים לב כי אם E מטריצה אלמנטרית, הכפל $A \mapsto AE^t$ נקבע על פי אותן פעולות על עמודות A כמו פעולות E על השורות. נוכל אם כן לדרג את A לפי שורה ועמודה במקביל, כאשר בכל שלב נבצע את אותה פעולה על השורות ואז על העמודות (או להיפך). נקבל מטריצה P כמכפלת המטריצות האלמנטריות, שעבורה PAP^t תהיה בצורת סילבסטר.

תרגיל 6. מצאו $P \in M_4(\mathbb{R})$ הפיכה עבורה PAP^t בצורת סילבסטר, כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

פתרון. נבצע דירוג שורה ועמודה במקביל.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

עבור

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נקבל כי

$$PAP^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

צורת סילבסטר קנונית.