

אלגברה 1' תרגול 1 – פולינומים

אלעד צורני

25 באוקטובר 2020

הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1 (פולינום). פולינום במשתנה x מעל שדה \mathbb{F} הוא ביטוי מהצורה

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$$

כאשר $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}$.
לפעמים נכתוב זאת בקצרה

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

דוגמאות (פולינומים).

1. 0

2. 42

3. $x - 16$

4. $x^2 - 7x - 2$

5. $3x^2$

הגדרה 1.2 (הדרגה של פולינום). עבור מספר אי-שלילי m נאמר שהדרגה של פולינום $f(x)$ היא m ונסמן

$$\deg(f) := m$$

אם יש איברים $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ עבורם $a_n \neq 0$ וגם

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

עבור $f(x) = 0$ נגדיר את הדרגה של f להיות $-\infty$. $\deg(f) := -\infty$

הגדרה 1.3 (מקדם מוביל). עבור פולינום $f(x)$ מדרגה n המקדם a_n נקרא המקדם המוביל של f .

הגדרה 1.4 (פולינום מוני). אם המקדם המוביל של פולינום $f(x)$ שווה 1, נאמר ש- f פולינום מוני.

הגדרה 1.5 (מקדם מוביל). עבור פולינום $f(x)$, המקדם a_0 נקרא המקדם המוביל של f (גם אם $a_0 = 0$).

סימון 1.6 (מרחב פולינומים). אוסף הפולינומים במשתנה x מעל שדה \mathbb{F} מסומן $\mathbb{F}[x]$.

סימון 1.7 (פולינומים עד דרגה n). מרחב הפולינומים במשתנה x מעל שדה \mathbb{F} שדרגתם לכל היותר n מסומן $\mathbb{F}_n[x]$.

חיבור, כפל וחילוק פולינומים

כדי לחבר פולינומים, נחבר את המקדמים שלהם.

הגדרה 1.8 (חיבור פולינומים). בהינתן שני פולינומים

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$$

נגדיר את הסכום שלהם על ידי

$$(f+g)(x) := \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i + b_i) x^i$$

עם הסימון $a_i = 0$ עבור $i > n$ והסימון $b_j = 0$ עבור $j > m$.

הערה 1.9. מתקיים

$$\deg(f+g) \leq \deg(f) + \deg(g)$$

דוגמה 1.10

$$(x^3 + 17x - 42) + (-x^3 + x^2 - 17x + 3) = (1-1)x^3 + 1 \cdot x^2 + (17-17)x + (-42+3) = x^2 - 39$$

כדי לכפול פולינומים, נחבר את מכפלות הגורמים שלהם.

הגדרה 1.11 (כפל פולינומים). עבור פולינומים

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$$

נגדיר את המכפלה שלהם על ידי

$$(f \cdot g)(x) := \sum_{d=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^d a_i b_{d-i} \right) x^d$$

בדרך כלל נסמן fg במקום $f \cdot g$.

הערה 1.12. מתקיים

$$\deg(f \cdot g) \leq \deg(f) + \deg(g)$$

דוגמה 1.13

$$\begin{aligned} (x^3 + 6x - 5)(2x^2 + 3x - 7) &= ((-5) \cdot (-7)) + (-5 \cdot 3 + 6 \cdot (-7))x + (-5 \cdot 2 + 6 \cdot 3)x^2 \\ &\quad + (6 \cdot 2 + 1 \cdot (-7))x^3 + (1 \cdot 3)x^4 + (1 \cdot 2)x^5 \\ &= 35 + (-15 - 42)x + (-10 + 18)x^2 + (12 - 7)x^3 + 3x^4 + 2x^5 \\ &= 2x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 57x + 35 \end{aligned}$$

הגדרה 1.14 (חילוק פולינומים). עבור פולינומים $f, g, r \in \mathbb{F}[x]$ נגיד כי f מתחלק ב־ g עם שארית r אם קיים פולינום $h \in \mathbb{F}[x]$ עבורו $f = hg + r$ וגם $\deg(r) < \deg(g)$.

אם קיים פולינום $h \in \mathbb{F}[x]$ עבורו $f = hg$ נאמר כי f מתחלק ב־ g , נגיד ש־ h שווה לחלוקה של f ב־ g ונסמן

$$h = \frac{f}{g}$$

במקרה זה גם נאמר ש־ g מחלק את f ונסמן $g \mid f$.

אלגוריתם 1.15 (חילוק ארוך של פולינומים). נתאר אלגוריתם לחילוק פולינום f בפולינום g עם שארית. נציג תוך כדי זאת דוגמה בה

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4, \quad g(x) = x - 3$$

1. נכתוב את הפולינום f כולל גורמים עם מקדם 0. משמאלו נכתוב את הפולינום g .

$$\begin{array}{r} x-3 \overline{) x^3 - 2x^2 + 0x - 4} \end{array}$$

2. נחלק את הגורם המוביל של f בזה של g ונכתוב את התוצאה למעלה.

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-3 \overline{) x^3 - 2x^2 + 0x - 4} \end{array}$$

3. נכפול את הגורם שהוספנו למעלה ב־ g ונכתוב את מינוס התוצאה מתחת ל־ f .

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-3 \overline{) x^3 - 2x^2 + 0x - 4} \\ \underline{-x^3 + 3x^2} \end{array}$$

4. נסכום את השורה שכתבנו עם f ונכתוב את התוצאה מתחתיה. "נוריד" גורם נוסף מ- f למטה ונוסיף אותו לתוצאה.

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-3 \overline{) x^3 - 2x^2 + 0x - 4} \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline x^2 + 0x \end{array}$$

5. נחזור על שלבים 2 עד 4, רק שהפעם נחלק את ההפרש שקיבלנו ב- g .

$$\begin{array}{r} x^2 + x \\ x-3 \overline{) x^3 - 2x^2 + 0x - 4} \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline x^2 + 0x \\ -x^2 + 3x \\ \hline 3x - 4 \end{array}$$

6. נחזור על שלב 5 עד לקבל הפרש מדרגה שקטנה מזאת של g . ההפרש יהיה השארית $r(x)$ והפולינום מעל f יהיה המנה $h(x)$ של $f(x)$ ב- $g(x)$ עם שארית $r(x)$.

$$\begin{array}{r} x^2 + x \\ x-3 \overline{) x^3 - 2x^2 + 0x - 4} \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline x^2 + 0x \\ -x^2 + 3x \\ \hline 3x - 4 \\ -3x + 9 \\ \hline 5 \end{array}$$

שורשים של פולינומים

הגדרה 1.16 (שורש של פולינום). יהי $f \in \mathbb{F}[x]$. איבר $\alpha \in \mathbb{F}$ נקרא **שורש של f** אם $f(\alpha) = 0$.

דוגמה 1.17. השורשים של הפולינום $f(x) = x^2 - 1$ הם $\{-1, 1\}$.

משפט 1.18 (המשפט היסודי של האלגברה). לכל פולינום מרוכב $f \in \mathbb{C}[x]$ ממעלה לפחות 1 קיים שורש.

מסקנה 1.19. יהי $f \in \mathbb{C}[x]$ מדרגה n . קיימים ל- f בדיוק n שורשים $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ב- \mathbb{C} ומתקיים

$$f = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) := a_n (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$$

כאשר a_n המקדם המוביל של f .

מסקנה 1.20. יהי $f \in \mathbb{C}[x]$ אם $\alpha \in \mathbb{C}$ שורש של f , מתקיים

$$(x - \alpha) \mid f(x)$$

הגדרה 1.21 (הריבוי של שורש). יהי $f \in \mathbb{C}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{C}$ שורש של f . המספר n המקסימלי עבורו $(x - \alpha)^n \mid f$ נקרא **הריבוי של α כשורש של f** ומסומן $m(\alpha)$.

הגדרה 1.22 (שורש פשוט). יהי $f \in \mathbb{F}[x]$. שורש α של f יקרא **פשוט** אם $m(\alpha) = 1$.

טענה 1.23. יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$. מתקיים $m(\alpha) = \ell$ אם ורק אם

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(\ell)}(\alpha) \neq 0$$

מסקנה 1.24. שורש α של פולינום f הוא פשוט אם ורק אם $f(\alpha) = 0$ וגם $f'(\alpha) \neq 0$.

משפט 1.25 (משפט השורש הרציונלי). עבור

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$$

פולינום עם מקדמים שלמים, כל שורש רציונלי של f הוא מהצורה $\frac{p}{q}$ עבור $p, q \in \mathbb{Z}$ שלמים המקיימים $p \mid a_0$ וגם $q \mid a_n$.

תרגיל 1. השתמשו במשפט השורש הרציונלי כדי למצוא את השורשים מעל \mathbb{C} של הפולינום $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$ ואת הריבויים שלהם.

פתרון. מתקיים $f \in \mathbb{Z}[x]$ ולכן אפשר להשתמש במשפט השורש הרציונלי. אצלנו $a_n = a_0 = 2$ לכן שורש רציונלי יהיה מהצורה $\frac{p}{q}$ עבור $p, q \in \{\pm 1, \pm 2\}$. לכן שורש רציונלי יהיה בקבוצה $\{\pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$. בדיקה של השורשים האפשריים תיתן שהשורש הרציונלי היחיד של f הוא $\frac{1}{2}$. לכן, $x - \frac{1}{2} \mid f$, ונוכל למצוא את שאר שורשי f על ידי הסתכלות על שורשי $g(x) := \frac{f}{x - \frac{1}{2}}$.

נמצא את $\frac{f}{x - \frac{1}{2}}$ באמצעות חילוק ארוך:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 0x - 4 \\ x - \frac{1}{2} \overline{) 2x^3 - x^2 - 4x + 2} \\ \underline{-2x^3 + x^2} \\ 0x^2 - 4x \\ \underline{0x^2 + 0x} \\ -4x + 2 \\ \underline{4x - 2} \\ 0 \end{array}$$

קיבלנו

$$g(x) = 2x^2 - 4 = (\sqrt{2}x + 2)(\sqrt{2}x - 2) = 2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

לכן

$$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

ושורשי f הם $\{\frac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, כולם מריבוי 1.

תרגיל 2. יהי

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$$

מצאו את השורשים של f ואת הריבויים שלהם.

פתרון. ממשפט השורש הרציונלי, השורשים הרציונליים האפשריים של f הם $\{\pm 1, \pm 2\}$. מהצבה נקבל שהשורש הרציונלי היחיד של f הוא 1. אם נחלק את f ב- $(x - 1)$ נקבל פולינום ממעלה 3 ולא נוכל להשתמש בנוסחת השורשים. לכן נבדוק קודם מה הריבוי של 1. מתקיים

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 2$$

לכן

$$f'(1) = 4 - 6 - 2 + 4 = 0$$

$$f''(1) = 12 - 12 - 2 = -2 \neq 0$$

ולכן $m(1) = 2$. לכן $(x - 1)^2 \mid f(x)$. נחשב את המנה

$$g(x) := \frac{f(x)}{(x - 1)^2} = \frac{f(x)}{x^2 - 2x + 1}$$

ונקבל

$$\begin{array}{r} x^2 + 0x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 \overline{) x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2} \\ \underline{-x^4 + 2x^3 - x^2} \\ 0x^3 - 2x^2 + 4x \\ \underline{0x^3 + 0x^2 + 0x} \\ -2x^2 + 4x - 2 \\ \underline{2x^2 - 4x + 2} \\ 0x + 0 \end{array}$$

כלומר

$$f(x) = (x-1)^2(x^2-2) = (x-1)^2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

לכן שורשי f הם 1 מריבוי 2 ו- $\pm\sqrt{2}$ כל אחד מריבוי 1.

נוסחאות וייטה

לפעמים נרצה תיאור נוח לסכומים או מכפלות של שורשי פולינום. אם נתון פולינום

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

מדרגה n ועם שורשים $(r_i)_{i=1}^n$, נכתוב

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - r_i)$$

ונקבל כי המקדם החופשי הוא

$$a_0 = a_n (-1)^n \prod_{i=1}^n r_i$$

לכן

$$\prod_{i=1}^n r_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

נקבל גם

$$a_{n-1} = a_n (-r_1 - \dots - r_n)$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^n r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

נוסחאות וייטה מתארות קשר כללי יותר בין מקדמי פולינום לשורשיו.

משפט 1.26 (נוסחאות וייטה). יהי

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

פולינום מדרגה n מעל \mathbb{R} או \mathbb{C} .

יהיו $(r_i)_{i=1}^n$ שורשי f . לכל $k \in \{1, \dots, n\}$ מתקיים

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\prod_{j=1}^k r_{i_j} \right) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

תרגיל 3. מצאו את שורשי הפולינום

$$f(x) = x^3 - (2 + \sqrt{2})x^2 + (2\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{2}$$

פתרון. נשים לב שסכום מקדמי הפולינום שווה 0, לכן 1 שורש של f . מתקיים

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - (4 + 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} + 1 \\ f''(x) &= 6x - 4 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} f'(1) &= 3 - 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} = 0 \\ f''(1) &= 6 - 4 - 2 = 0 \end{aligned}$$

ולכן $m(1) = 2$. מנוסחאות וייטה נקבל שסכום שורשי f שווה $2 + \sqrt{2}$ לכן השורש הנוסף הוא $\sqrt{2}$ מריבוי 1.

תרגיל 4. יהי

$$f(x) = -4x^3 + a_2x^2 + a_0$$

פולינום מעל \mathbb{C} שתלוי בנעלמים a_0, a_2 . נתון כי סכום שורשי f שווה 4 וכי מכפלתם שווה -3. מצאו את שורשי f ואת הריבויים שלהם.

פתרון. נסמן את שורשי הפולינום $\{r_1, r_2, r_3\}$. מנוסחאת וייטה עבור $k = 1$ נקבל

$$4 = r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

לכן

$$a_2 = -4a_3 = (-4)^2 = 16.$$

מנוסחת וייטה עבור $k = 3$ נקבל

$$-3 = r_1 r_2 r_3 = (-1)^3 \frac{a_0}{a_n}$$

כלומר

$$a_0 = 3a_n = -12$$

לכן

$$f(x) = -4x^3 + 16x^2 - 12$$

ל- f אותם שורשים כמו ל- $\frac{f}{4}$ כיוון שכפל בקבוע שונה מאפס אינו משפיע על שורשי פולינום. לכן נחפש שורשים עבור

$$g(x) := -\frac{f(x)}{4} = x^3 - 4x^2 + 3$$

מקדמי g שלמים ולכן נוכל להיעזר במשפט השורש הרציונלי. נקבל שהשורשים הרציונליים של g הם מהצורה $\frac{p}{q}$ עבור $p, q \in \mathbb{Z}$ המקיימים $1 \mid p$ ו- $3 \mid q$. לכן, השורשים הרציונליים של g בקבוצה $\{\pm 1, \pm \frac{1}{3}\}$. נשים לב כי 1 אכן שורש של g . נבצע חילוק פולינומים

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x - 3 \\ x-1 \overline{) x^3 - 4x^2 + 3} \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -3x^2 \\ \underline{3x^2 - 3x} \\ -3x + 3 \\ \underline{3x - 3} \\ 0 \end{array}$$

ונקבל כי

$$g(x) = (x-1)(x^2 - 3x - 3)$$

את שורשי $x^2 - 3x - 3$ נמצא בעזרת נוסחת השורשים ונקבל

$$g(x) = (x-1) \left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} \right)$$

לכן שורשי f הם $\left\{ 1, \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2} \right\}$, כל אחד מהם מריבוי 1.