אלגברה 1מ'
תרגול 1 – פולינומים

אלעד צורני

25 באוקטובר 2020

הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1 (פולינום). פולינום במשתנה x מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא ביטוי מהצורה

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\ldots+a_1x+a_0$$

כאשר $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$.
לפעמים נכתוב זאת בקצרה

$$.f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

דוגמאות (פולינומים).

1. 0
2. 42
3. $x-16$
4. x^2-7x-2
5. $3x^2$

הגדרה 1.2 (הדרגה של פולינום). עבור מספר אי־שלילי m נאמר ש**הדרגה של פולינום** $f(x)$ **היא** m ונסמן

$$\deg(f)\coloneqq m$$

אם יש איברים $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ עבורם $a_n\neq 0$ וגם

$$.f(x)=a_nx^n+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

עבור $f(x)=0$ נגדיר את הדרגה של f להיות $\deg(f)\coloneqq-\infty$.

הגדרה 1.3 (מקדם מוביל). עבור פולינום $f(x)$ מדרגה n המקדם a_n נקרא **המקדם המוביל של** f.

הגדרה 1.4 (פולינום מוני). אם המקדם המוביל של פולינום $f(x)$ שווה 1, נאמר ש־f **פולינום מוני**.

הגדרה 1.5 (מקדם מוביל). עבור פולינום $f(x)$, המקדם a_0 נקרא **המקדם המוביל של** f (גם אם $a_0=0$).

סימון 1.6 (מרחב פולינומים). אוסף הפולינומים במשתנה x מעל שדה $\mathbb{F}$ מסומן $\mathbb{F}[x]$.

סימון 1.7 (פולינומים עד דרגה n). מרחב הפולינומים במשתנה x מעל שדה $\mathbb{F}$ שדרגתם לכל היותר n מסומן $\mathbb{F}_n[x]$.

חיבור, כפל וחילוק פולינומים

כדי לחבר פולינומים, נחבר את המקדמים שלהם.

הגדרה 1.8 (חיבור פולינומים). בהינתן שני פולינומים

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\quad g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_ix^i$$

נגדיר את **הסכום שלהם** על ידי

$$(f+g)(x)\coloneqq\sum_{i=0}^{\max\{n,m\}}(a_i+b_i)x^i$$

עם הסימון $a_i=0$ עבור $i>n$ והסימון $b_j=0$ עבור $j>m$.

הערה 1.9. מתקיים

$$\deg(f+g) \le \max(\deg(f), \deg(g)).$$

דוגמה 1.10.

$$\left(x^3+17x-42\right)+\left(-x^3+x^2-17x+3\right)=(1-1)x^3+1\cdot x^2+(17-17)x+(-42+3)=x^2-39$$

כדי לכפול פולינומים, נחבר את מכפלות הגורמים שלהם.

הגדרה 1.11 (כפל פולינומים). עבור פולינומים

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_i x^i$$

נגדיר את **המכפלה שלהם** על ידי

$$(f\cdot g)(x) \coloneqq \sum_{d=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{d} a_i b_{d-i}\right)x^d.$$

בדרך כלל נסמן fg במקום $f\cdot g$.

הערה 1.12. מתקיים

$$\deg(f\cdot g) \le \deg(f)+\deg(g).$$

דוגמה 1.13.

$$\begin{aligned}\left(x^3+6x-5\right)\left(2x^2+3x-7\right) &= ((-5)\cdot(-7))+(-5\cdot 3+6\cdot(-7))x+(-5\cdot 2+6\cdot 3)x^2\\ &\quad+(6\cdot 2+1\cdot(-7))x^3+(1\cdot 3)x^4+(1\cdot 2)x^5\\ &= 35+(-15-42)x+(-10+18)x^2+(12-7)x^3+3x^4+2x^5\\ &= 2x^5+3x^4+5x^3+8x^2-57x+35\end{aligned}$$

הגדרה 1.14 (חילוק פולינומים). עבור פולינומים $f,g,r\in\mathbb{F}[x]$ נגיד כי f **מתחלק ב־g עם שארית** r אם קיים פולינום $h\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $f=hg+r$ וגם $\deg(r)\le\deg(g)$.
אם קיים פולינום $h\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $f=hg$ נאמר כי f **מתחלק ב־g**, נגיד ש־h שווה לחלוקה של f ב־g ונסמן

$$h=\frac{f}{g}.$$

במקרה זה גם נאמר ש־g מחלק את f ונסמן $g\mid f$.

אלגוריתם 1.15 (חילוק ארוך של פולינומים). נתאר אלגוריתם לחילוק פולינום f בפולינום g עם שארית.
נציג תוך כדי זאת דוגמה בה

$$f(x)=x^3-2x^2-4, \quad g(x)=x-3.$$

1. נכתוב את הפולינום f כולל גורמים עם מקדם 0. משמאלו נכתוב את הפולינום g.

$$x-3\overline{)x^3-2x^2+0x-4}$$

2. נחלק את הגורם המוביל של f בזה של g ונכתוב את התוצאה למעלה.

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-3\overline{)x^3-2x^2+0x-4} \end{array}$$

3. נכפול את הגורם שהוספנו למעלה ב־g ונכתוב את מינוס התוצאה מתחת ל־f.

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-3\overline{)x^3-2x^2+0x-4} \\ -x^3+3x^2 \end{array}$$

4. נסכום את השורה שכתבנו עם f ונכתוב את התוצאה מתחתיה. "נוריד" גורם נוסף מ־f למטה ונוסיף אותו לתוצאה.

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-3\overline{)x^3-2x^2+0x-4} \\ -\underline{x^3+3x^2} \\ x^2+0x \end{array}$$

5. נחזור על שלבים 2 עד 4, רק שהפעם נחלק את ההפרש שקיבלנו ב־g.

$$\begin{array}{r} x^2+\ \ x \\ x-3\overline{)x^3-2x^2+0x-4} \\ -\underline{x^3+3x^2} \\ x^2+0x \\ -\underline{x^2+3x} \\ 3x-4 \end{array}$$

6. נחזור על שלב 5 עד לקבל הפרש מדרגה שקטנה מזאת של g. ההפרש יהיה השארית $r(x)$ והפולינום מעל f יהיה המנה $h\left(x\right)$ של $f\left(x\right)$ ב־$g\left(x\right)$ עם שארית $r\left(x\right)$.

$$\begin{array}{r} x^2+\ \ x \\ x-3\overline{)x^3-2x^2+0x-4} \\ -\underline{x^3+3x^2} \\ x^2+0x \\ -\underline{x^2+3x} \\ 3x-4 \\ -\underline{3x+9} \\ 5 \end{array}$$

שורשים של פולינומים

הגדרה 1.16 (שורש של פולינום). יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$. איבר $\alpha\in\mathbb{F}$ נקרא **שורש של** f אם $f\left(\alpha\right)=0$.

דוגמה 1.17. השורשים של הפולינום $f\left(x\right)=x^2-1$ הם $\{-1,1\}$.

משפט 1.18 (המשפט היסודי של האלגברה). *לכל פולינום מרוכב $f\in\mathbb{C}\left[x\right]$ ממעלה לפחות 1 קיים שורש.*

מסקנה 1.19. *יהי $f\in\mathbb{C}\left[x\right]$ מדרגה n. קיימים ל־f בדיוק n שורשים $\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$ ב־$\mathbb{C}$ ומתקיים*

$$f=a_n\prod_{i=1}^{n}\left(x-\alpha_n\right)\coloneqq a_n\left(x-\alpha_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-\alpha_n\right)$$

כאשר a_n המקדם המוביל של f.

מסקנה 1.20. *יהי $f\in\mathbb{C}\left[x\right]$. אם $\alpha\in\mathbb{C}$ שורש של f, מתקיים*

$$\left(x-\alpha\right)\mid f\left(x\right).$$

הגדרה 1.21 (הריבוי של שורש). יהי $f\in\mathbb{C}\left[x\right]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{C}$ שורש של f. המספר n המקסימלי עבורו $\left(x-\alpha\right)^n\mid f$ נקרא **הריבוי של** α **כשורש של** f ומסומן $m\left(\alpha\right)$.

הגדרה 1.22 (שורש פשוט). יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$. שורש α של f יקרא **פשוט** אם $m\left(\alpha\right)=1$.

טענה 1.23. *יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$. מתקיים $m\left(\alpha\right)=\ell$ אם ורק אם*

$$f\left(\alpha\right)=f'\left(\alpha\right)=\ldots=f^{\left(\ell-1\right)}\left(\alpha\right)=0,\quad f^{\left(\ell\right)}\left(\alpha\right)\neq0.$$

מסקנה 1.24. *שורש α של פולינום f הוא פשוט אם ורק אם $f\left(\alpha\right)=0$ וגם $f'\left(\alpha\right)\neq0$.*

משפט 1.25 (משפט השורש הרציונלי). עבור

$$f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}\in\mathbb{Z}\left[x\right]$$

פולינום עם מקדמים שלמים, כל שורש רציונלי של f הוא מהצורה $\frac{p}{q}$ עבור $p,q\in\mathbb{Z}$ שלמים המקיימים $p\mid a_{0}$ וגם $q\mid a_{n}$.

תרגיל 1. השתמשו במשפט השורש הרציונלי כדי למצוא את השורשים מעל $\mathbb{C}$ של הפולינום $f\left(x\right)=2x^{3}-x^{2}-4x+2$ ואת הריבויים שלהם.

פתרון. מתקיים $f\in\mathbb{Z}\left[x\right]$ ולכן אפשר להשתמש במשפט השורש הרציונלי. אצלנו $a_{n}=a_{0}=2$ לכן שורש רציונלי יהיה מהצורה $\frac{p}{q}$ עבור $p,q\in\{\pm1,\pm2\}$. לכן שורש רציונלי יהיה בקבוצה $\{\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm2\}$. בדיקה של השורשים האפשריים תיתן שהשורש הרציונלי היחיד של f הוא $\frac{1}{2}$. לכן, $x-\frac{1}{2}\mid f$ ונוכל למצוא את שאר שורשי f על ידי הסתכלות על שורשי $g\left(x\right)\coloneqq\frac{f}{x-\frac{1}{2}}$.

נמצא את $\frac{f}{x-\frac{1}{2}}$ באמצעות חילוק ארוך:

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^{2}+0x-4\\
\cline{2-2}
x-\frac{1}{2}\big) & 2x^{3}-x^{2}-4x+2\\
 & -2x^{3}+x^{2}\\
\cline{2-2}
 & 0x^{2}-4x\\
 & 0x^{2}+0x\\
\cline{2-2}
 & -4x+2\\
 & 4x-2\\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

קיבלנו

$$g\left(x\right)=2x^{2}-4=\left(\sqrt{2}x+2\right)\left(\sqrt{2}x-2\right)=2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$

לכן

$$f\left(x\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$$

ושורשי f הם $\left\{\frac{1}{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}\right\}$, כולם מריבוי 1.

תרגיל 2. יהי

$$f\left(x\right)=x^{4}-2x^{3}-x^{2}+4x-2.$$

מצאו את השורשים של f ואת הריבויים שלהם.

פתרון. ממשפט השורש הרציונלי, השורשים הרציונליים האפשריים של f הם $\{\pm1,\pm2\}$. מהצבה נקבל שהשורש הרציונלי היחיד של f הוא 1. אם נחלק את f ב־$\left(x-1\right)$ נקבל פולינום ממעלה 3 ולא נוכל להשתמש בנוסחת השורשים. לכן נבדוק קודם מה הריבוי של 1. מתקיים

$$\begin{aligned}
f'\left(x\right) & =4x^{3}-6x^{2}-2x+4\\
f''\left(x\right) & =12x^{2}-12x-2
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
f'\left(1\right)=4-6-2+4=0\\
f''\left(1\right)=12-12-2=-2\neq0
\end{aligned}$$

ולכן $m\left(1\right)=2$. לכן $\left(x-1\right)^{2}\mid f\left(x\right)$. נחשב את המנה

$$g\left(x\right)\coloneqq\frac{f\left(x\right)}{\left(x-1\right)^{2}}=\frac{f\left(x\right)}{x^{2}-2x+1}$$

ונקבל

$$\begin{array}{rl}
 & x^{2}+0x-2\\
\cline{2-2}
x^{2}-2x+1\big) & x^{4}-2x^{3}-x^{2}+4x-2\\
 & -x^{4}+2x^{3}-x^{2}\\
\cline{2-2}
 & 0x^{3}-2x^{2}+4x\\
 & 0x^{3}+0x^{2}+0x\\
\cline{2-2}
 & -2x^{2}+4x-2\\
 & 2x^{2}-4x+2\\
\cline{2-2}
 & 0x+0
\end{array}$$

כלומר
$$f\left(x\right)=\left(x-1\right)^{2}\left(x^{2}-2\right)=\left(x-1\right)^{2}\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$
לכן שורשי f הם 1 מריבוי 2 ו־$\left\{ \pm\sqrt{2}\right\}$ כל אחד מריבוי 1.

נוסחאות וייטה

לפעמים נרצה תיאור נוח לסכומים או מכפלות של שורשי פולינום. אם נתון פולינום
$$f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$$
מדרגה n ועם שורשים $\left(r_{i}\right)_{i=1}^{n}$, נכתוב
$$f\left(x\right)=a_{n}\prod_{i=1}^{n}\left(x-r_{i}\right)$$
ונקבל כי המקדם החופשי הוא
$$a_{0}=a_{n}\left(-1\right)^{n}\prod_{i=1}^{n}r_{i}$$
לכן
$$\prod_{i=1}^{n}r_{i}=\left(-1\right)^{n}\frac{a_{0}}{a_{n}}.$$
נקבל גם
$$a_{n-1}=a_{n}\left(-r_{1}-\ldots-r_{n}\right)$$
ולכן
$$\sum_{i=1}^{n}r_{i}=-\frac{a_{n-1}}{a_{n}}.$$
נוסחאות וייטה מתארות קשר כללי יותר בין מקדמי פולינום לשורשיו.

משפט 1.26 (נוסחאות וייטה). *יהי*
$$f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$$
פולינום מדרגה n מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.
יהיו $\left(r_{i}\right)_{i=1}^{n}$ שורשי f. לכל $k\in\left\{ 1,\ldots,n\right\}$ מתקיים
$$\sum_{1\leq i_{1}<\ldots<i_{k}\leq n}\left(\prod_{j=1}^{k}r_{i_{j}}\right)=\left(-1\right)^{k}\frac{a_{n-k}}{a_{n}}.$$

תרגיל 3. מצאו את שורשי הפולינום
$$f\left(x\right)=x^{3}-\left(2+\sqrt{2}\right)x^{2}+\left(2\sqrt{2}+1\right)x-\sqrt{2}.$$

פתרון. נשים לב שסכום מקדמי הפולינום שווה 0, לכן 1 שורש של f. מתקיים
$$\begin{aligned}f'\left(x\right)&=3x^{2}-\left(4+2\sqrt{2}\right)x+2\sqrt{2}+1\\ f''\left(x\right)&=6x-4-2\sqrt{2}\end{aligned}$$
לכן
$$\begin{aligned}f'\left(1\right)&=3-4-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+1=\sqrt{2}=0\\ f''\left(1\right)&=6-4-2=0\end{aligned}$$
ולכן $m\left(1\right)=2$. מנוסחאת וייטה נקבל שסכום שורשי f שווה $2+\sqrt{2}$ לכן השורש הנוסף הוא $\sqrt{2}$ מריבוי 1.

תרגיל 4. יהי
$$f\left(x\right)=-4x^{3}+a_{2}x^{2}+a_{0}$$
פולינום מעל $\mathbb{C}$ שתלוי בנעלמים a_{0},a_{2}. נתון כי סכום שורשי f שווה 4 וכי מכפלתם שווה -3. מצאו את שורשי f ואת הריבויים שלהם.

פתרון. נסמן את שורשי הפולינום $\{r_{1},r_{2},r_{3}\}$. מנוסחאת וייטה עבור $k=1$ נקבל
$$4=r_{1}+r_{2}+r_{3}=-\frac{a_{2}}{a_{3}}$$
לכן
$$a_{2}=-4a_{3}=\left(-4\right)^{2}=16.$$
מנוסחת וייטה עבור $k=3$ נקבל
$$-3=r_{1}r_{2}r_{3}=\left(-1\right)^{3}\frac{a_{0}}{a_{n}}$$
כלומר
$$a_{0}=3a_{n}=-12.$$
לכן
$$f\left(x\right)=-4x^{3}+16x^{2}-12.$$
ל־f אותם שורשים כמו ל־$-\frac{f}{4}$ כיוון שכפל בקבוע שונה מאפס אינו משפיע על שורשי פולינום. לכן נחפש שורשים עבור
$$g\left(x\right):=-\frac{f\left(x\right)}{4}=x^{3}-4x^{2}+3.$$
מקדמי g שלמים ולכן נוכל להיעזר במשפט השורש הרציונלי. נקבל שהשורשים הרציונליים של g הם מהצורה $\frac{p}{q}$ עבור $p,q\in\mathbb{Z}$ המקיימים $p\mid 1$ ו־$q\mid 3$. לכן, השורשים הרציונליים של g בקבוצה $\{\pm1,\pm\frac{1}{3}\}$. נשים לב כי 1 אכן שורש של g. נבצע חילוק פולינומים

$$\begin{array}{r|l}
 & x^{2}-3x-3\\
\hline
x-1 & x^{3}-4x^{2}+3\\
 & -x^{3}+x^{2}\\
\hline
 & -3x^{2}\\
 & 3x^{2}-3x\\
\hline
 & -3x+3\\
 & 3x-3\\
\hline
 & 0
\end{array}$$

ונקבל כי
$$g\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x^{2}-3x-3\right).$$
את שורשי $x^{2}-3x-3$ נמצא בעזרת נוסחת השורשים ונקבל
$$g\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}\right).$$
לכן שורשי f הם $\left\{1,\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{21}}{2}\right\}$, כל אחד מהם מריבוי 1.