אלגברה ב' – הצעה לפתרון מועד ב'

אביב 2025

שאלה 5. נסמן $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p(x)) \leq 2\}$, ונגדיר מכפלה פנימית על $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ על ידי $\langle p(x), q(x) \rangle := \int_0^1 p(t)\, q(t)\, \mathrm{d}t$ לכל $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. מצאו בסיס אורתונורמלי $(p_0(x), p_1(x), p_2(x))$ של $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ כך ש־$\mathrm{Span}(p_0(x), p_1(x)) = \mathrm{Span}(1, x)$.

פתרון. נסתכל על הבסיס $E := (u_0, u_1, u_2) = (1, x, x^2)$ של $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. תהליך גרם־שמידט על בסיס $(v_1, \ldots, v_n)$ של מרחב מכפלה פנימית נותן בסיס אורתונורמלי $(e_1, \ldots, e_n)$ של אותו מרחב כך שמתקיים

$$\forall i \in [n] : \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_i) = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_i).$$

לכן, תהליך גרם־שמידט על E יתן לנו בסיס אורתונורמלי $(p_0(x), p_1(x), p_2(x))$ של $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ עבורו

$$\forall i \in \{0,1,2\} : \mathrm{Span}(p_0(x), \ldots, p_i(x)) = \mathrm{Span}(v_0, \ldots, v_i),$$

ובפרט

$$\mathrm{Span}(p_0(x), p_1(x)) = \mathrm{Span}(v_0, v_1) = \mathrm{Span}(1, x),$$

כנדרש.

נבצע את תהליך גרם־שמידט על הבסיס E. בשלב הראשון, ננרמל את הוקטור הראשון בבסיס. מתקיים

$$\|u_0\|^2 = \|1\|^2 = \int_0^1 1^2\, \mathrm{d}t = x\big|_{x=0}^1 = 1$$

ולכן גם $\|u_0\| = 1$ ונקבל

$$p_0(x) = \frac{u_0}{\|u_0\|} = \frac{1}{1} = 1.$$

בעת, נחסר מ־u_1 את ההטלה שלו על המרחב הנפרש על ידי $p_0(x)$, וננרמל את הוקטור שנקבל.

$$\begin{aligned}
w_1 &:= u_1 - \langle u_1, p_0(x) \rangle\, p_0(x) \\
&= x - \langle x, 1 \rangle\, 1 \\
&= x - \int_0^1 x\, \mathrm{d}x \\
&= x - \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^1 \\
&= x - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned}\|w_1\|^2 &= \int_0^1 w_1^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} \,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\right|_{x=0}^{1} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{4}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

ואז

$$\|w_1\| = \frac{1}{\sqrt{12}}\,.$$

נגרמל את הוקטור w_1 ונקבל

$$p_1(x) = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \sqrt{12}w_1 = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

בעת, חסר מ־u_2 את ההטלה שלו על המרחב הנפרש על ידי $p_0(x), p_1(x)$, וננרמל את התוצאה כדי לקבל את $p_2(x)$.

$$\begin{aligned}w_2 &\coloneqq u_2 - \langle u_2, p_0(x)\rangle p_0(x) - \langle u_2, p_1(x)\rangle p_1(x) \\ &= x^2 - \left\langle x^2, 1\right\rangle 1 - \left\langle x^2, \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\rangle \cdot \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= x^2 - \left\langle x^2, 1\right\rangle - 12\left\langle x^2, x - \frac{1}{2}\right\rangle \left(x - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

נחשב את המכפלות הפנימיות המופיעות בביטוי שקיבלנו.

$$\left\langle x^2, 1\right\rangle = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{1} = \frac{1}{3}\,,$$

וכן

$$\begin{aligned}\left\langle x^2, x - \frac{1}{2}\right\rangle &= \int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right|_{x=0}^{1} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{12} - \frac{2}{12} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}\,.$$

נציב זאת בביטוי שקיבלנו עבור w_2 ונקבל כי

$$\begin{aligned}w_2 &= x^2 - \frac{1}{3} - 12 \cdot \frac{1}{12}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{6}\end{aligned}\,.$$

אז

$$\begin{aligned}\left\|w_2\right\|^2 &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)_2^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^5}{5} - 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36}\bigg|_{x=0}^{1} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{18}{36} + \frac{4}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{7}{36} \\ &= \frac{36 - 35}{180} \\ &= \frac{1}{180}\end{aligned}$$

ולכן

$$\left\|w_2\right\| = \frac{1}{\sqrt{180}}$$

ואז

$$.p_2\left(x\right) = \frac{w_2}{\left\|w_2\right\|} = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

שאלה 8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$. נסמן $n \coloneqq \dim_{\mathbb{C}}(V)$ ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$. האם בהכרח מתקיים ש־$V = \ker(T^n) \oplus \operatorname{Im}(T^n)$?

פתרון. כן. נציג שתי דרכים לכך.

דרך 1: נראה כי $\ker(T^n) \cap \operatorname{Im}(T^n) = \{0\}$ ונקבל כי הסכום $\ker(T^n) \oplus \operatorname{Im}(T^n)$ ישר. אך המימד של סכום ישר הוא סכום המימדים, ולפי משפט המימדים

$$\dim\ker(S) + \dim\operatorname{Im}(S) = \dim V$$

לכל אופרטור $S \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ובפרט

$$.\dim\left(\ker(T^n) \oplus \operatorname{Im}(T^n)\right) = \dim\ker(T^n) + \dim\operatorname{Im}(T^n) = \dim V$$

אז $\ker(T^n) \oplus \operatorname{Im}(T^n)$ תת־מרחב של V ממימד $\dim V$ ולכן שווה ל־V, כנדרש.

נניח בדרך השלילה שקיים $y \in \ker(T^n) \cap \operatorname{Im}(T^n) \setminus \{0\}$. אז $T^n(y) = 0$ וגם קיים $x \in V$ עבורו $T^n(x) = y$. נקבל כי הסדרה

$$x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x), y = T^n(x), T^{n+1}(x), \ldots, T^{2n}(x) = T^n(y)$$

מתאפסת החל ממקום מסוים כי $T^n(y) = 0$, ונסמן ב־ℓ את האינדקס המינימלי עבורו $T^m(x) = 0$. אז $m > n$ כי $T^n(x) = y \neq 0$. אז

$$\begin{aligned} T^{m-1}(x) &\neq 0 \\ T^m(x) &= 0 \end{aligned}$$

ומלמה מההרצאה זה מראה כי הקבוצה הסדורה

$$\mathcal{C} \coloneqq \left(T^{m-1}(x), \ldots, T(x), x\right)$$

הינה בלתי־תלויה לינארית. אך זאת קבוצה סדורה מגודל $m > n$ ואילו כל בסיס של V הינו מגודל n, בסתירה.

דרך 2: לפי משפט ז'ורדן, מעל שדה סגור אלגברית, לכל אופרטור קיימת צורת ז'ורדן. לכן, קיימים בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ של V, סקלרים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ ושלמים חיוביים $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}_+$ עבורם

$$.[T]_B = \operatorname{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1), \ldots, J_{m_k}(\lambda_k)\right)$$

אז

$$.[T^n]_B = [T]_B^n = \operatorname{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1)^n, \ldots, J_{m_k}(\lambda_k)^n\right)$$

מטריצת ז'ורדן עם ערך עצמי שונה מאפס הינה הפיכה, לכן $J_{m_i}(\lambda_i)^n$ גם הן הפיכות לכל $i \in [k]$. מטריצת ז'ורדן $J_m(0)$ הינה נילפוטנטית מסדר m וכיוון ש־$m_i \leq n$ לכל $i \in [k]$ נקבל כי $J_{m_i}(\lambda_i)^n = 0$ לכל $i \in [k]$ עבורו $\lambda_i = 0$.

נבחר את B כך שבצורת ז'ורדן $[T]_B$ הבלוקים עם ערך עצמי 0, אם קיימים, יופיעו בסוף, ונקבל כי

$$[T^n]_B = \operatorname{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1), \ldots, J_{m_{k'}}(\lambda_{k'}), 0_{\ell\times\ell}\right)$$

באשר k' מספר הבלוקים עם ערך עצמי שונה מאפס בצורת ז'ורדן של T ובאשר ℓ הריבוי האלגברי של 0 בערך עצמי של T.

המטריצה

$$A \coloneqq \operatorname{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1), \ldots, J_{m_{k'}}(\lambda_{k'})\right)$$

הפיכה כיוון שזאת מטריצה אלכסונית בלוקים עם בלוקים הפיכים, ומתקיים

$$.[T^n]_B = \operatorname{diag}\left(A, 0_{\ell\times\ell}\right)$$

כיוון שמימד הגרעין של מטריצה אלכסונית בלוקים הוא סכום מימדי הגרעין של הבלוקים השונים, נקבל כי

$$.\dim\ker\left([T^n]_B\right) = \dim\ker(A) + \dim\ker\left(0_{\ell\times\ell}\right) = \ell$$

כיוון ש־

$$[T^n]_B e_i = 0$$

לכל $i \geq n-\ell+1$, שכן זאת העמודה ה־i של $[T^n]_B$ וכי ה־ℓ העמודות האחרונות הן עמודות אפסים, נקבל כי

$$\operatorname{Span}(e_{n-\ell+1},\dots,e_n) \subseteq \ker([T^n]_B)$$

אך כיוון ששני אלו מרחבים וקטוריים ממימד ℓ נקבל שוויון.

בעת,

$$[T^n]_B [v]_B = [T^n(v)]_B$$

ולכן $\ker(T^n)$ נפרש על ידי וקטורים ש־$(e_{n-\ell+1},\dots,e_n)$ הם וקטורי הקואורדינטות שלהם בבסיס B. נקבל כי $(v_{n-\ell+1},\dots,v_n)$ בסיס של $\ker(T^n)$.

נשים לב כי אף אחד מהוקטורים ב־$\operatorname{Span}(e_{n-\ell+1},\dots,e_n)$ אינו נמצא במרחב העמודות של $[T^n]_B$, כיוון ש־ℓ השורות האחרונות במטריצה הן שורות אפסים. לכן אף אחד מהוקטורים ב־$\operatorname{Span}(v_{n-\ell+1},\dots,v_n)$ אינו נמצא ב־$\operatorname{Im}(T^n)$ ונקבל כי $\operatorname{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\}$. לכן הסכום $\ker(T^n) + \operatorname{Im}(T^n)$ הינו ישר.

ממשפט המימדים, מתקיים כי

$$\dim(V) = \dim\ker(T^n) + \dim\operatorname{Im}(T^n),$$

אך כיוון שהמימד של סכום ישר הוא סכום המימדים מתקיים גם

$$\dim(\ker(T^n) \oplus \operatorname{Im}(T^n)) = \dim\ker(T^n) + \dim\operatorname{Im}(T^n).$$

לכן $\ker(T^n) \oplus \operatorname{Im}(T^n)$ תת־מרחב של V ממימד $\dim(V)$, ולכן

$$V = \ker(T^n) \oplus \operatorname{Im}(T^n),$$

כנדרש.

שאלה 9. יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$. יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נילפוטנטי כך ש־$\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$ לכל $v \in V$. האם בהכרח מתקיים ש־$T = 0$?

פתרון. כן. נציג שתי דרכים להוכיח זאת.

דרך 1: מטענה מההרצאה, עבור אופרטור S על מרחב מכפלה פנימית מרוכב U מתקיים כי $S^* = S$ אם ורק אם $\langle S(u), u\rangle \in \mathbb{R}$ לכל $u \in U$. נקבל מכך כי $T^* = T$. ובפרט כי T נורמלי.

ממשפט הפירוק הספקטרלי, לאופרטור נורמלי על מרכב מכפלה פנימית מרוכב קיים בסיס אורתונורמלי מלכסן. לכן קיים B אורתונורמלי עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית. אך T נילפוטנטי, וראינו כי מעל $\mathbb{C}$ זה שקול לכך ש־0 הינו ערך עצמי יחיד של T. לכן $[T]_B = 0$ ולכן $T = 0$.

דרך 2: נניח בשלילה כי $T \neq 0$, ויהי $v \in V$ עבורו $T(v) \neq 0$ אך $T^2(v) = 0$.

יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ונסמן $u := \alpha v + \beta T(v)$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(u), u\rangle &= \left\langle \alpha T(v) + \beta T^2(v), \alpha v + \beta T(v)\right\rangle \\ &= \alpha^2 \langle T(v), v\rangle + \alpha\beta \langle T(v), T(v)\rangle\end{aligned}$$

ביטוי ממשי מההנחה. כיוון שלקחנו $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ כלליים, מתקיים שוויון גם עבור הבחירה $\alpha = 1$, ואז

$$\langle T(u), u\rangle = \langle T(v), v\rangle + \beta \langle T(v), T(v)\rangle = \langle T(v), v\rangle + \beta \|T(v)\|^2 .$$

הביטוי $\langle T(v), v\rangle$ גם הוא ממשי מההנחה, והנורמה $\|T(v)\|$ הינה ממשית ושונה מאפס, לכן נקבל כי β גם הוא חייב להיות ממשי. אך β איבר כללי ב־$\mathbb{C}$, לכן זאת סתירה.

שאלה 10. האם קיימים בסיסים אורתונורמליים $\mathcal{U}$ ו־$\mathcal{V}$ של $\mathbb{R}^3$, ואופרטור $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right)$, כך שהמטריצות $[T]_{\mathcal{U}}$ ו־$[T]_{\mathcal{V}}$ אינן חופפות?

פתרון. לא.
יהיו $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ בסיסים של $\mathbb{R}^3$ ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right)$. אז

$$\left(M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\right)^{-1}[T]_{\mathcal{U}} M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}=[T]_{\mathcal{V}} \tag{1}$$

כאשר $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ המטריצה היחידה A שמקיימת $A[v]_{\mathcal{U}}=[v]_{\mathcal{V}}$ לכל $v \in \mathbb{R}^3$.
מתקיים $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}=M_{\mathcal{V}}^{E} M_{E}^{\mathcal{U}}$ לפי נוסחה למטריצות מעבר בסיס, וכן $M_{\mathcal{V}}^{E}=\left(M_{E}^{\mathcal{V}}\right)^{-1}$. המטריצות $U:=M_{E}^{\mathcal{U}}$ ו־$V:=M_{E}^{\mathcal{V}}$ הינן מטריצות עם עמודות שמהוות בסיסים אורתונורמליים, כי עמודותיהן הן איברי $\mathcal{U}$ ו־$\mathcal{V}$ בהתאמה. מטענה מההרצאה, מטריצה $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ הינה אורתוגונלית (או מעל $\mathbb{C}$, אוניטרית) אם ורק אם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל־$\mathbb{F}^n$, ולכן U, V שתיהן אורתוגונליות. אז V^{-1} אורתוגונלית כהופכית של מטריצה אורתוגונלית (מתקיים כי $\left(V^{-1}\right)^*=\left(V^*\right)^*=V$ וזאת ההופכית של V^{-1}) ולכן גם $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}=V^{-1} U$ אורתוגונלית ככפל של מטריצות אורתוגונליות (אם A, B אורתוגונליות, מתקיים כי $(AB)^*=B^* A^*=B^{-1} A^{-1}=(AB)^{-1}$ ולכן גם AB אורתוגונלית).
לכן

$$\left(M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\right)^{-1}=\left(M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\right)^*=\left(M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\right)^t$$

כאשר בשוויון השני השתמשנו בכך שעבור מטריצה ממשית A מתקיים $A^*=A^t$. נקבל מהצבה ב־(1) כי

$$\left(M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\right)^t[T]_{\mathcal{U}} M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}=[T]_{\mathcal{V}}$$

ולכן $[T]_{\mathcal{U}}$ ו־$[T]_{\mathcal{V}}$ חופפות.