# אלגברה ב' - טענה בנוגע לדרך מציאת בסיס ז'ורדן

**טענה.** יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד סופי $n$ ומעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור נילפוטנטי עם אינדקס נילפוטנטיות $k$. לכל $i \in [n]$ נסמן $n_i = \dim\ker\left(T^i\right) - \dim\ker\left(T^{i-1}\right)$ שזהו מספר הבלוקים בצורת ז'ורדן של $T$ מגודל לפחות $i$. יהי $B_1 = \left(v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_k}^{(1)}\right)$ בסיס לגרעין $\ker(T)$ ונבנה באופן אינדוקטיבי קבוצות סדורות $B_i = \left(v_1^{(i)}, \ldots, v_{n_i}^{(i)}\right)$ כך שלכל $i$ מתקיים כי $\biguplus_{i\in[i]} B_i$ בסיס עבור $\ker\left(T^i\right)$. בלומר, $B_i$ משלימה בסיס של $\ker\left(T^{i-1}\right)$ לבסיס של $\ker\left(T^i\right)$ לכל $i \in [k]$.
לכל $v \in V$ עבורו $T^\ell(v) = 0$ אבל $T^{\ell-1}(v) \neq 0$ נסמן את שרשרת ז'ורדן $C_v = \left(T^{\ell-1}(v), \ldots, T(v), v\right)$ ובן את המרחב הנפרש על ידה $V_v = \operatorname{Span}(C_v)$.
אז ניתן לקבל בסיס ז'ורדן עבור $T$ באופן הבא.

1. ניקח $B = \biguplus_{v\in B_k} C_v$ וניקח $i = k$.

2. נקטין את $i$ באחת. נבחר תת־קבוצה סדורה מקסימלית $\tilde{B}_i$ של $B_i$ שהינה בלתי־תלויה לינארית בוקטורים ב־$B$ היא תהיה מגודל $2\dim\ker\left(T^i\right) - \dim\ker\left(T^{i+1}\right) - \dim\ker\left(T^{i-1}\right)$ בי זה מספר הבלוקים מגודל $i$ בצורת ז'ורדן של $T$. לכל וקטור $v \in \tilde{B}_i$ נשרשר ל־$B$ את $C_v$. בלומר נעדבן
$$B_{\text{new}} = B_{\text{old}} \uplus C_v .$$

3. אם $B$ באורך $n$, נסיים. אחרת נחזור לשלב הקודם.

לשם הוכחת הטענה, נזכיר תחילה הגדרה וטענה מההרצאה, ונוכיח למה על סכומים ישרים.

**הגדרה 0.1.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $V_1, V_2 \leq V$ תת־מרחבים וקטוריים עבורם $V = V_1 \oplus V_2$. ההטלה על $V_1$ במקביל ל־$V_2$ היא ההעתקה $P_{V_1,V_2} \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ היחידה המקיימת $P_{V_1,V_2}(v_1 + v_2) = v_1$ לכל $v_1 \in V_1$ ולכל $v_2 \in V_2$.

**טענה 0.2.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $V_1, \ldots, V_m \leq V$ תת־מרחבים וקטוריים של $V$. התנאים הבאים שקולים.

1. $V = \bigoplus_{i\in[m]} V_i$;

2. לכל בחירה של בסיסים $B_i$ עבור כל $V_i$ בהתאמה, הקבוצה הסדורה $\biguplus_{i\in[m]} B_i$ הינה בסיס של $V$;

3. קיימים בסיסים $B_i$ לכל $V_i$ בהתאמה כך שהקבוצה הסדורה $\biguplus_{i\in[m]} B_i$ היא בסיס של $V$.

**למה 0.3.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $V_1, V_2 \leq V$ תת־מרחבים עבורם $V = V_1 \oplus V_2$. יהי $B = (u_1, \ldots, u_k)$ בסיס של $V_1$ ותהי $C = (w_1, \ldots, w_\ell)$ קבוצה סדורה של $\ell := \dim_{\mathbb{F}}(V_2)$ וקטורים. אז $B \uplus C$ בסיס של $V$ אם ורק אם
$$P_{V_2,V_1}(C) := \left(P_{V_2,V_1}(w_1), \ldots, P_{V_2,V_1}(w_\ell)\right)$$
בסיס של $V_2$.

הוכחה.
- נניח כי $B \uplus C$ בסיס של $V$ ונראה כי $P_{V_2,V_1}(C)$ בסיס של $V_2$. יהיו $\alpha_i \in \mathbb{F}$ עבורם
$$\sum_{i\in[\ell]} \alpha_i P_{V_2,V_1}(w_i) = 0 .$$
נראה כי $\alpha_i = 0$ לכל $i \in [\ell]$.
מתקיים
$$\begin{aligned}\sum_{i\in[\ell]} \alpha_i w_i &= \sum_{i\in[\ell]} \alpha_i \left(w_i - P_{V_2,V_1}(w_i)\right) + \sum_{i\in[\ell]} \alpha_i P_{V_2,V_1}(w_i) \\ &= \sum_{i\in[\ell]} \alpha_i \left(w_i - P_{V_2,V_1}(w_i)\right)\end{aligned}$$

כאשר

$$w_i - P_{V_2,V_1}(w_i) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_V - P_{V_2,V_1}) \subseteq V_1$$

לכל $i \in [\ell]$. קיבלנו צירוף לינארי של וקטורים ב־$C$ ששווה לוקטור ב־$\mathrm{Span}(B)$, אך $B \uplus C$ הינו בסיס של $V$ ולכן הביטוי הנ"ל שווה אפס. לכן, מכך שהקבוצה הסדורה $C$ בלתי תלויה לינארית (כי $B \uplus C$ בסיס) נקבל כי $\alpha_i = 0$ לכל $i \in [\ell]$, כנדרש.

- נניח כעת כי $P_{V_2,V_1}(C)$ הינו בסיס של $V_2$.

מטענה 0.2 נקבל כי $B \uplus P_{V_2,V_1}(C)$ בסיס של $V$.

יהיו $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}$ עבורם

$$\sum_{i\in[k]} \alpha_i u_i + \sum_{j\in[\ell]} \beta_j w_j = 0 .$$

נראה כי $\alpha_i = \beta_j = 0$ לכל $i, j$. אכן, מתקיים

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i\in[k]} \alpha_i u_i + \sum_{j\in[\ell]} \beta_j w_j \\ &= \sum_{i\in[k]} \alpha_i u_i + \sum_{j\in[\ell]} \beta_j P_{V_2,V_1}(w_j) + \sum_{j\in[\ell]} \beta_j (w_j - P_{V_2,V_1}(w_j)) \end{aligned}$$

אבל $w_j - P_{V_2,V_1}(w_j) \in V_1$ לכל $j \in [\ell]$ ולכן גם

$$\sum_{j\in[\ell]} \beta_j (w_j - P_{V_2,V_1}(w_j)) \in V_1 .$$

אז יש $\gamma_j \in \mathbb{F}$ עבורן

$$\sum_{j\in[\ell]} \beta_j (w_j - P_{V_2,V_1}(w_j)) = \sum_{i\in[k]} \gamma_i u_i$$

ונקבל כי

$$0 = \sum_{i\in[k]} (\alpha_i + \gamma_i) u_i + \sum_{j\in[\ell]} \beta_j P_{V_2,V_1}(w_j)$$

אבל ראינו כי $B \uplus P_{V_2,V_1}(C)$ הינו בסיס עבור $V$, ולכן כל המקדמים שווים לאפס. כלומר, $\alpha_i + \gamma_i = 0$ וכן $\beta_j = 0$ לכל $i, j$. מכך ש־$\beta_j = 0$ לכל $j$ נקבל מהגדרת $\gamma_i$ כי

$$\sum_{i\in[k]} \gamma_i u_i = 0$$

ולכן כיוון ש־$B = (u_1, \ldots, u_k)$ בסיס נקבל כי $\gamma_i = 0$ לכל $i$. אז מכך ש־$\alpha_i + \gamma_i = 0$ נקבל כי גם $\alpha_i = 0$ לכל $i \in [k]$, כנדרש. ■

הוכחה (הוכחת הטענה). נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n$.

**בסיס האינדוקציה:** עבור $n = 1$ מתקיים כי $T$ אופרטור סקלרי נילפוטנטי, ולכן אופרטור האפס. אז לכל בחירה $(v)$ עבור בסיס של $\ker(T)$ נקבל כי $B = (v)$ בסיס ז'ורדן.

**צעד האינדוקציה:** נניח כעת שהטענה נכונה עבור כל מרחב־וקטורי ממימד קטן מ־$n$, ונוכיח את הטענה עבור $V$ שהינו ממימד $n$.

לפי משפט מההרצאה, קיימים תת־מרחבים $T$־שמורים $V_1, \ldots, V_\ell \leq V$ עבורם $V = \bigoplus_{i\in[\ell]} V_i$ וכן ש־$T|_{V_i}$ הינו אי־פריד לכל $i \in [\ell]$. נניח בלי הגבלת הכלליות כי המרחבים $V_i$ עבורם $\dim_{\mathbb{F}}(V_i) = k$ הם $V_1, \ldots, V_{n_k}$ (נזכיר כי $n_k$ הוא מספר הבלוקים מגודל $k$ בצורת ז'ורדן של $T$). נסמן $\tilde{W} = \bigoplus_{i\in[n_k]} V_i$ ו-$\hat{W} = \bigoplus_{i\in[\ell]\setminus[n_k]} V_i$.

מתקיים כי לכל $i \in [n_k]$ הצמצום $T|_{V_i}$ הוא אופרטור נילפוטנטי אי־פריד על מרחב וקטורי ממימד $k$, ולכן יש לו צורת ז'ורדן $J_k(0)$. לכן, קיימים וקטורים $w_1, \ldots, w_{n_k}$ עבורם $C_{w_i}$ בסיס ז'ורדן של $V_i$, לכל $i \in [n_k]$. כיוון שהסכום $V = \bigoplus_{i\in\ell} V_i$ ישר, נקבל מטענה 0.2 כי

$$B_W := \biguplus_{i\in[n_k]} C_{w_i} = \left(T^{k-1}(w_1), \ldots, T(w_1), w_1, \ldots, T^{k-1}(w_{n_k}), \ldots, T(w_{n_k}), w_{n_k}\right)$$

בסיס של $W$. ■