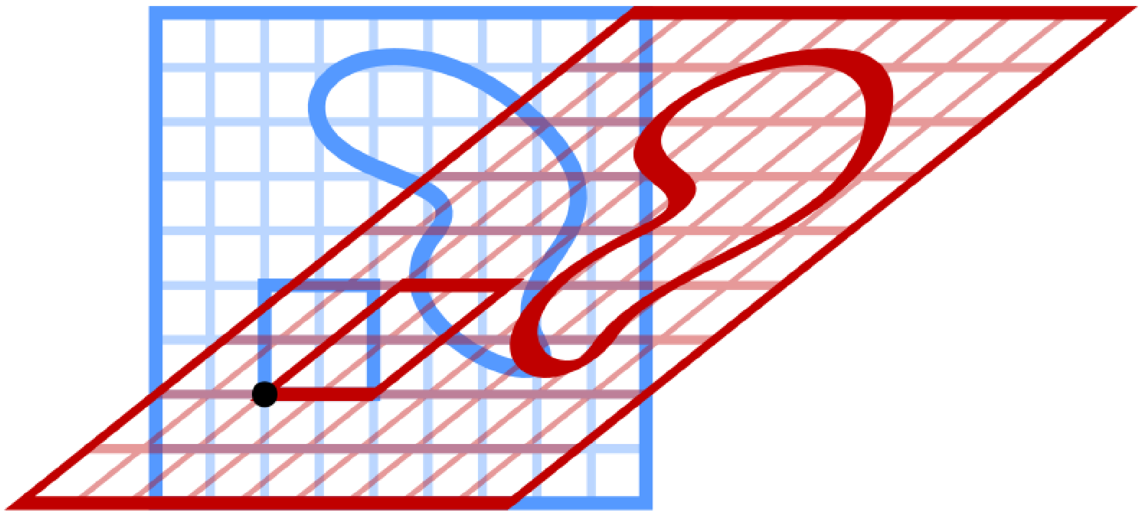

# אלגברה ב' (01040168)

## אביב 2025

## רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־27 במאי 2025

# תוכן העניינים


I חלק ראשון – מרחבים שמורים 2

1 חזרה על מטריצות מייצגות 3
1.1 הגדרות ותבונות בסיסיות . . . 3
1.2 תרגילים . . . 4

2 הדטרמיננטה 10
2.1 הגדרות ותבונות בסיסיות . . . 10
2.2 תרגילים . . . 10
2.3 הדטרמיננטה לפי תמורות . . . 12

3 המטריצה המצורפת וכלל קרמר 13
3.1 הגדרות ותבונות בסיסיות . . . 13
3.2 תרגילים . . . 13

4 מרחבים שמורים ולכסינות 21
4.1 מרחבים שמורים . . . 21
4.2 לכסינות . . . 24

5 צורת ז'ורדן 30
5.1 אופרטורים נילפוטנטיים . . . 30
5.1.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור אופרטורים נילפוטנטיים . . . 31
5.2 משפט ז'ורדן הכללי . . . 33
5.2.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור אופרטור כללי . . . 34

II חלק שני – מרחבי מכפלה פנימית ואלגברה מולטי־לינארית 39

6 מרחבי מכפלה פנימית 40
6.1 מוטיבציה . . . 40
6.2 הגדרות . . . 40
6.3 תבונות של מכפלות פנימיות, ונורמות . . . 42
6.4 מטריקות וניצבות . . . 44
6.5 בסיסים אורתונורמליים והמרחב הניצב . . . 46

## סימונים

- $[n]=\{1,\ldots,n\}$.
- $\sum_{i\in[n]}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\ldots+a_n$
- $\mathrm{Mat}_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ הוא מרחב המטריצות עם $m$ שורות ו־$n$ עמודות, עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$.
- $\mathbb{F}^n=\mathrm{Mat}_{n\times1}\left(\mathbb{F}\right)$
- $\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)=\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$ הוא מרחב ההעתקות הלינאריות $V\to W$ כאשר $V,W$ מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.
- $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,V\right)$

# חלק I

# חלק ראשון – מרחבים שמורים

# פרק 1

# חזרה על מטריצות מייצגות

## 1.1 הגדרות ותבונות בסיסיות

**הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות).** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של $V$ ויהי $v\in V$. וקטור הקואורדינטות של $v$ לפי הבסיס $B$ הוא הוקטור $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$.v=\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\coloneqq\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n$$

**הערה 1.1.2.** ההעתקה

$$\begin{aligned}\rho_B\colon V&\to\mathbb{F}^n\\ v&\mapsto[v]_B\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

**הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת).** יהיו $V,W$ מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים $B,C$ בהתאמה, ונסמן

$$.B=(v_1,\ldots,v_n)$$

נסמן גם $n\coloneqq\dim(V)$ ו־$m\coloneqq\dim(W)$. עבור $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ נגדיר

$$.\ [T]_C^B=\begin{pmatrix}| & & |\\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C\\ | & & |\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$$

**משפט 1.1.4 (כפל מטריצות).** תהי $A\in\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E=(e_1,\ldots,e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אז:

(i) לכל $i\in[m]$ מתקיים כי $Ae_i$ העמודה ה־$i$ של $A$.

(ii) לכל $B=\begin{pmatrix}| & & |\\ b_1 & \cdots & b_\ell\\ | & & |\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_{n\times\ell}(\mathbb{F})$ מתקיים $AB=\begin{pmatrix}| & & |\\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell\\ | & & |\end{pmatrix}$.

**תרגיל 1.1.** הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

**הערה 1.1.5.** ההעתקה

$$\begin{aligned}\eta_C^B\colon\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,B)&\to\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})\\ T&\mapsto[T]_C^B\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

**טענה 1.1.6.** תהי $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ ויהיו $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של $V$ ו־$C$ בסיס של $W$. אז

$$[T]_C^B [v]_B = [T(v)]_C$$

לכל $v \in V$.

**סימון 1.1.7.** אם $B$ בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי $V$ ואם $T \in \operatorname{End}(V)$, נסמן $[T]_B \coloneqq [T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של $T$ לפי הבסיס $B$.

**סימון 1.1.8.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים $B,C$. נסמן $M_C^B \coloneqq [\operatorname{Id}_V]_C^B$.

**סימון 1.1.9.** אם $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, נסמן

$$\begin{aligned} T_A \colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned} .$$

## 1.2 תרגילים

**תרגיל 1.2.** יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$

ויהי $B=\left(1,x,x^2,x^3\right)$ בסיס של $V$. כיתבו את $[T]_B$.

**פתרון.** לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $\left[T\left(x^i\right)\right]_B$ עבור $i \in \{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(x) &= x+1 = 1+x \\ T\left(x^2\right) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 \\ T\left(x^3\right) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T(1)]_B &= e_1 \\ [T(x)]_B &= e_1+e_2 \\ \left[T\left(x^2\right)\right]_B &= e_1+2e_2+e_3 \\ \left[T\left(x^3\right)\right]_B &= e_1+3e_2+3e_3+e_4 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

**תרגיל 1.3.** יהי $V=\operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, תהי

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ A &\mapsto \frac{1}{2}\left(A - A^t\right) \end{aligned}$$

ויהי

$$E = \left(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}\right) \coloneqq \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של $V$. כיתבו את $[T]_E$.

**פתרון.** כמו מקודם, נחשב את $[T(E_{i,j})]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$\begin{aligned}T(E_{1,1}) &= \frac{1}{2}(E_{1,1}-E_{1,1})=0\\ T(E_{1,2}) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}E_{1,2}-\frac{1}{2}E_{2,1}\\ T(E_{2,1}) &= \frac{1}{2}(E_{2,1}-E_{1,2})=\frac{1}{2}E_{2,1}-\frac{1}{2}E_{1,2}\\ T(E_{2,2}) &= \frac{1}{2}(E_{2,2}-E_{2,2})=0,\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}[T(E_{1,1})]_E &= 0\\ [T(E_{1,2})]_E &= \frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_3\\ [T(E_{2,1})]_E &= -\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3\\ [T(E_{2,2})]_E &= 0\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_E=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

כנדרש.

**תרגיל 1.4.** יהי $V=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B=(f_1,f_2)$ כאשר

$$\begin{aligned}f_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= x\\ f_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= y,\end{aligned}$$

ותהי

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

מיצאו $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ עבורו $[T]_B=A$.

**פתרון.** עבור $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ מתקיים

$$[T]_B=\begin{pmatrix}|&|\\ [T(f_1)]_B&[T(f_2)]_B\\ |&|\end{pmatrix}.$$

לכן נדרוש

$$\begin{aligned}[T(f_1)]_B &= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\ [T(f_2)]_B &= \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

אז

$$T(f_1) = f_1 + 2f_2$$
$$.T(f_2) = 3f_1 + 4f_2$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y = \alpha f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}(T(f))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(f_1 + 2f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta(3f_1 + 4f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x+2y) + \beta(3x+4y)\end{aligned}$$
.

**תרגיל 1.5.** תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$. אז $A = B$.

**פתרון.** מהנתון, מתקיים $(A-B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־$i$ של $A - B$, שהינה $(A-B)e_i$, שווה ל־$0$. לכן $A - B = 0$.

**טענה 1.2.1.** יהיו $U, V, W$ מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים $B, C, D$ בהתאמה, ותהיינה

$$S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$$
$$.T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$$

אז

$$.[T\circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B$$

**תרגיל 1.6.** יהיו $V, W$ מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ חד־חד ערכית. יהיו

$$B = (v_1, \ldots, v_n)$$
$$C = (u_1, \ldots, u_n)$$

בסיסים של $V$ ויהיו

$$B' = (T(v_1), \ldots, T(v_n))$$
$$.C' = (T(u_1), \ldots, T(u_n))$$

אז $B', C'$ בסיסים של $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ וגם $M_C^B = M_{C'}^{B'}$.

**פתרון.** ביוון ש־$T$ חד־חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T\colon V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(T)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן $B', C'$ בסיסים.
בעת, לכל $i \in [n]$ נכתוב

$$v_i = \sum_{j\in[n]} \alpha_{i,j} u_i$$

ואז

$$.M_C^B e_i = [v_i]_C = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

כמו כן,

$$T(v_i) = T\left(\sum_{i\in[n]} \alpha_{i,j} u_j\right) = \sum_{i\in[n]} \alpha_{i,j} T(u_j)$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'} e_i = [T(v_i)]_{C'} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}.$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

**תרגיל 1.7.** תהי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. יהי $E$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס $B$ של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_E^B$.
2. מיצאו בסיס $C$ של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^E$.
3. (לא הספקנו בתרגול) יהי $B$ בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס $C$ של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^B$.
4. (לא הספקנו בתרגול) יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ איזומורפיזם ויהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של $V$. מיצאו בסיס $C$ של $V$ עבורו $A = [T]_C^B$.

**פתרון.** 1. אם $B = (v_1, \ldots, v_n)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

לכן ניקח את $(v_1, \ldots, v_n)$ להיות עמודות $A$, לפי הסדר.

2. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן $M_C^E = \left(M_E^C\right)^{-1}$. אם ניקח $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר $u_i$ העמודה ה־$i$ של $A^{-1}$ נקבל מהסעיף הקודם כי $M_E^C = A^{-1}$ ולכן $M_C^E = \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. כלומר ניקח, $u_i = A^{-1} e_i$.

3. מתקיים $M_C^B = M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $M_C^E M_E^B = A$ או במילים אחרות $M_C^E = A\left(M_E^B\right)^{-1} = AM_B^E$. מהסעיף הקודם, נרצה $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר $u_i$ העמודה ה־$i$ של $\left(AM_B^E\right)^{-1} = M_E^B A^{-1}$, כלומר

$$u_i = M_E^B A^{-1} e_i.$$

4. עבור כל בסיס $C'$ מתקיים $[T]_{C'}^B = M_{C'}^B [T]_B^B$ לכן נרצה $M_C^B [T]_B^B = A$. כיוון ש־$T$ איזומורפיזם, המטריצה $[T]_B^B$ הפיכה, ולכן נרצה $M_C^B = A\left([T]_B^B\right)^{-1}$. כעת, אם $C = (v_1, \ldots, v_n)$ נקבל לפי **??** עבור האיזומורפיזם $\rho_B$ כי $M_C^B = M_{\hat{C}}^E$ כאשר $\hat{C} = ([v_1]_B, \ldots, [v_n]_B)$. לכן נחפש $\hat{C}$ עבורו $M_{\hat{C}}^E = A[T]_B^{-1}$. לפי הסעיף השני, נרצה $\hat{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ עבור

$$u_i = \left(A[T]_B^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i.$$

לכן

$$v_i = \rho_B^{-1}\left([T]_B A^{-1} e_i\right).$$

**תרגיל 1.8 (לא הספקנו בתרגול).** יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned},$$

יהי $E=\left(1,x,x^2,x^3\right)$, הבסיס הסטנדרטי ותהי $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס $C$ של $V$ עבורו $A=[T]_C^E$.

**פתרון.** לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C}=(u_1,\ldots,u_4)$ כאשר $u_i=[T]_E\,A^{-1}e_i$. חישבנו ב־1.2 כי

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2=I$ כלומר $A^{-1}=A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned}Ae_1&=e_2\\Ae_2&=e_1\\Ae_3&=e_4\\Ae_4&=e_3\end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1=[T]_E\,A^{-1}e_1=[T]_E\,e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_2=[T]_E\,A^{-1}e_2=[T]_E\,e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_3=[T]_E\,A^{-1}e_3=[T]_E\,e_4=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$u_4=[T]_E\,A^{-1}e_4=[T]_E\,e_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},$$

כלומר

$$\hat{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right),$$

ולבסוף

$$C=(v_1,v_2,v_3,v_4):=\left(1+x,1,1+3x+3x^2+x^3,1+2x+x^2\right).$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן $A$. מתקיים

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1 = v_2 \\
T(x) &= x + 1 = v_1 \\
T\left(x^2\right) &= (x+1)^2 = 1 + 2x + x^2 = v_4 \\
T\left(x^3\right) &= (x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = v_3
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
[T]_C^E &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_C & [T(x)]_C & \left[T\left(x^2\right)\right]_C & \left[T\left(x^3\right)\right]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\
&= A
\end{aligned}$$

כנדרש.

# פרק 2

# הדטרמיננטה

## 2.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

**הגדרה 2.1.1 (דטרמיננטה).** תהי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. נגדיר את הדטרמיננטה $\det(A)$ של $A$ באופן הרקורסיבי הבא.
תהי $A_{(i,j)}$ המטריצה המתקבלת מ־$A$ על ידי הסרת השורה ה־$i$ והעמודה ה־$j$. המספר $\det\left(A_{(i,j)}\right)$ נקרא המינור ה־$(i,j)$ של $A$ והדטרמיננטה של $A$ שווה

$$\det(A) = \sum_{i\in[n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{(i,j)}\right)$$

עבור כל $j \in [n]$ קבוע, ושווה

$$\det(A) = \sum_{j\in[n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{(i,j)}\right)$$

עבור כל $i \in [n]$ קבוע.

**משפט 2.1.2.** תהיינה $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי $C$ הפיכה. מתקיימות התכונות הבאות.

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
2. $\det\left(C^{-1}\right) = (\det(C))^{-1}$

**משפט 2.1.3.**
1. החלפת שתי שורות או עמודות במטריצה בופלת את הדטרמיננטה ב־$(-1)$.
2. בפל שורה או עמודה במטריצה בסקלר $\alpha$ בופל את הדטרמיננטה ב־$\alpha$.
3. הוספת בפולה שורה או עמודה לשורה או עמודה במטריצה אינה משנה את הדטרמיננטה.

## 2.2 תרגילים

**תרגיל 2.1.** חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

.3

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{R}\right)$$

.4

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{R}\right)$$

**פתרון.** 1. נחשב לפי השורה הראשונה.

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} &= 1\cdot\det\begin{pmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{pmatrix} + 3\cdot\det\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2\cdot(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3\cdot(4\cdot 8 - 5\cdot 7)\\ &= 1\cdot(-3) - 2\cdot(-6) + 3\cdot(-3)\\ &= -3 + 12 - 9\\ &= 0\end{aligned}$$

2. החלפת שורות כופלת את הדטרמיננטה ב־$(-1)$. כיוון שניתן לקבל את המטריצה ממטריצת היחידה על ידי החלפת השורות $1,4$ והשורות $2,3$, נקבל כי הדטרמיננטה שווה לזאת של היחידה. לכן

$$\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1\ .$$

3. הוספת כפולה של השורות הראשונה והשנייה ב־$(-1)$ לשורה השלישית לא משנה את הדרמיננטה. לכן הדטמיננטה של המטריצה שווה לזאת של היחידה, ולכן

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 1\ .$$

4. הוספת כפולה של השורות הראשונה והשנייה ב־$(-1)$ לשורה השלישית לא משנה את הדרמיננטה. לכן הדטמיננטה של המטריצה שווה לזאת של

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

ביוון שהשורה השלישית היא שורת אפסים, אם נפתח את הדטרמיננטה לפיה נקבל שהדטרמיננטה שווה $0$. זה נכון באופן כללי יותר אם השורות תלויות לינארית, כי נוכל לקבל שורת אפסים מצירוף לינארי של השורות.

**תרגיל 2.2.** תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ העתקה לינארית ויהי $B$ בסיס של $V$. הראו כי ניתן להגדיר $\det\left(T\right) = \det\left(\left[T\right]_B\right)$. כלומר, הראו שאם $C$ בסיס נוסף של $V$ מתקיים $\det\left(\left[T\right]_B\right) = \det\left(\left[T\right]_C\right)$.

**פתרון.** מתקיים

$$\left[T\right]_B = \left(M_C^B\right)^{-1}\left[T\right]_C M_C^B$$

ולכן

$$\det\left([T]_B\right) = \det\left(\left(M_C^B\right)^{-1}\right)\det\left([T]_C\right)\det\left(M_C^B\right).$$

כיוון ש־$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$ לכל מטריצה $A$, מתקיים $\det\left(\left(M_C^B\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(M_C^B\right)}$. לכן, נקבל בסה"כ כי

$$\det\left([T]_B\right) = \det\left([T]_C\right),$$

כנדרש.

## 2.3 הדטרמיננטה לפי תמורות

**סימון 2.3.1.** נסמן תמורה $\sigma \in S_n$ בתור $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$, וחילוף $\tau$ בין איברים $n, m$ בתור $(n; m)$.

**טענה 2.3.2.** תהי $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j\in[n]} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. מתקיים

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i\in[n]} a_{i,\sigma(i)}.$$

**תרגיל 2.3.** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה לפי תמורות.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

**פתרון.** נרשום את כל איברי $S_3$. הם

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}_{S_3} &= (1,2,3), \\
&(1,3,2), \\
&(2,1,3), \\
&(2,3,1), \\
&(3,1,2), \\
&(3,2,1).
\end{aligned}$$

עבור כל אחד מהאיברים, נפעיל חילופים משמאל כדי להביא אותו ליחידה, ומספר החילופים יהיה החזקה של $(-1)$ בסימן של התמורה. אם הגענו לתמורה קודמת, מספר החילופים שנותרו משלב זה הוא מספר החילופים שכבר מצאנו בחישוב קודם.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}_{S_3} = \mathrm{Id}_{S_3} &\implies \operatorname{sgn}\left(\mathrm{Id}_{S_3}\right) = 1 \\
(2;3)\circ((1,3,2)) = ((1,2,3)) = \mathrm{Id}_{S_3} &\implies \operatorname{sgn}((1,3,2)) = -1 \\
(1;2)\circ((2,1,3)) = ((1,2,3)) = \mathrm{Id}_{S_3} &\implies \operatorname{sgn}((2,1,3)) = -1 \\
(1;2)\circ((2,3,1)) = ((1,3,2)) &\implies \operatorname{sgn}((2,3,1)) = -1\cdot\operatorname{sgn}((1,3,2)) = 1 \\
(1;3)\circ((3,1,2)) = ((1,3,2)) &\implies \operatorname{sgn}((3,1,2)) = (-1)\cdot\operatorname{sgn}((1,3,2)) = 1 \\
(1;3)\circ((3,2,1)) = ((1,2,3)) = \mathrm{Id}_{S_3} &\implies \operatorname{sgn}((3,2,1)) = -1.
\end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 1\cdot5\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 \\
&= 45 - 48 - 72 + 84 + 96 - 105 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

# פרק 3

# המטריצה המצורפת וכלל קרמר

## 3.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

**הגדרה 3.1.1 (המטריצה המצורפת).** תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. המטריצה המצורפת של $A$ היא המטריצה $\mathrm{adj}(A) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ המקיימת

$$\mathrm{adj}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{(j,i)}\right).$$

**טענה 3.1.2.** עבור $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ מתקיים

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)\,A = \det(A)\,I_n.$$

**מסקנה 3.1.3.** עבור $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה מתקיים

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A).$$

**משפט 3.1.4 (כלל קרמר).** תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה, ויהי $b \in \mathbb{F}^n$. עבור כל $i \in [n]$, נסמן ב־$A_i$ את המטריצה המתקבלת על ידי החלפת העמודה ה־$i$ של $A$ ב־$b$. אז, למשוואה $Ax = b$ קיים פתרון יחיד $x := (x_i)_{i\in[n]} \in \mathbb{F}^n$ הנתון על ידי

$$\forall i \in [n] : x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}.$$

## 3.2 תרגילים

**תרגיל 3.1.** תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$. חשבו את $\mathrm{adj}(A)$.

**פתרון.** נחשב את $\mathrm{adj}(A)$ לפי ההגדרה.

$$\begin{aligned}
\mathrm{adj}(A) &= \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**תרגיל 3.2.** היעזרו במטריצה המצורפת כדי לחשב את ההופכית עבור כל אחת מהמטריצות הבאות.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{R}\right)$$
$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{R}\right)$$

עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

**פתרון.** עבור כל אחת משתי המטריצות, נחשב את הדטרמיננטה ואת המטריצה המצורפת שלה. מתקיים

$$\begin{aligned} \det\left(A\right) &= -2\det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2\cdot(-3) - 3\cdot(-18) + 2\cdot 6 \\ &= 72 \\ \det\left(B\right) &= 0 + 1\cdot\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} - 0 \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

ובן

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}\det\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\end{pmatrix}&-\det\begin{pmatrix}6&3\\4&-1\end{pmatrix}&\det\begin{pmatrix}6&0\\4&1\end{pmatrix}\\-\det\begin{pmatrix}3&2\\1&-1\end{pmatrix}&\det\begin{pmatrix}-2&2\\4&-1\end{pmatrix}&-\det\begin{pmatrix}-2&3\\4&1\end{pmatrix}\\\det\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix}&-\det\begin{pmatrix}-2&2\\6&3\end{pmatrix}&\det\begin{pmatrix}-2&3\\6&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}^t$$
$$=\begin{pmatrix}-3&18&6\\5&-6&14\\9&18&-18\end{pmatrix}^t$$
$$=\begin{pmatrix}-3&5&9\\18&-6&18\\6&14&-18\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(B)=\begin{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1&0\\0&\cos\theta\end{pmatrix}&-\det\begin{pmatrix}0&0\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}&\det\begin{pmatrix}0&1\\\sin\theta&0\end{pmatrix}\\-\det\begin{pmatrix}0&-\sin\theta\\0&\cos\theta\end{pmatrix}&\det\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}&-\det\begin{pmatrix}\cos\theta&0\\\sin\theta&0\end{pmatrix}\\\det\begin{pmatrix}0&-\sin\theta\\1&0\end{pmatrix}&-\det\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\0&0\end{pmatrix}&\det\begin{pmatrix}\cos\theta&0\\0&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}^t$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta&0&-\sin\theta\\0&1&0\\\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}^t$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל כי

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$
$$=\frac{1}{72}\begin{pmatrix}-3&5&9\\18&-6&18\\6&14&-18\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1/24&5/72&1/8\\1/4&-1/12&1/4\\1/12&7/36&-1/4\end{pmatrix}$$
$$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\operatorname{adj}(B)$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix},$$

כנדרש.

**תרגיל 3.3.** תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה. הראו כי $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-2} A$.

**פתרון.** **דרך 1:** $A$ הפיכה, לכן $\mathrm{adj}(A) = \det(A) A^{-1}$ גם היא הפיכה. לפי אותה נוסחה נקבל כי

$$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \det(\mathrm{adj}(A))\,\mathrm{adj}(A)^{-1}$$

$$= \frac{\det(\mathrm{adj}(A))}{\det(A)} A$$

ולכן נותר להראות כי

$$\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}\,.$$

אכן

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{adj}(A)) &= \det\left(\det(A) A^{-1}\right)\\ &= \det(A)^n \det\left(A^{-1}\right)\\ &= \det(A)^{n-1}\end{aligned},$$

כנדרש.

**דרך 2:** $A$ הפיכה, לכן $\mathrm{adj}(A) = \det(A) A^{-1}$ גם היא הפיכה. לכן

$$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \mathrm{adj}\left(\det(A) A^{-1}\right)\,.$$

בעת, כיוון שמקדמי $\mathrm{adj}\left(\det(A) A^{-1}\right)$ הם מינורים של $\det(A) A^{-1}$, וכיוון שהדטרמיננטה של $\alpha B$ שווה ל-$\alpha^m$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}, B \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{F})$, מתקיים כי $\mathrm{adj}\left(\det(A) A^{-1}\right) = \det(A)^{n-1}\,\mathrm{adj}\left(A^{-1}\right)$.

נוכיח זאת גם פורמלית: לכל $i,j \in [n]$ מתקיים

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}\left(\det(A) A^{-1}\right)_{i,j} &= (-1)^{i+j} \det\left(\left(\det(A) A^{-1}\right)_{(j,i)}\right)\\ &= (-1)^{i+j} \det\left(\det(A) \left(A^{-1}\right)_{(j,i)}\right)\\ &= (-1)^{i+j} \det(A)^{n-1} \det\left(\left(A^{-1}\right)_{(j,i)}\right)\\ &= \det(A)^{n-1} (-1)^{i+j} \det\left(\left(A^{-1}\right)_{(j,i)}\right)\\ &= \det(A)^{n-1}\,\mathrm{adj}\left(A^{-1}\right)_{i,j}\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \mathrm{adj}\left(\det(A) A^{-1}\right) = \det(A)^{n-1}\,\mathrm{adj}\left(A^{-1}\right)\,.$$

בעת

$$\mathrm{adj}\left(A^{-1}\right) = \det A^{-1} \left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A$$

ולכן

$$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-1} \cdot \frac{1}{\det(A)} A = \det(A)^{n-2} A\,,$$

כנדרש.

**תרגיל 3.4.** תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. הוכיחו את התכונות הבאות.

1. $\mathrm{adj}\left(A^t\right) = \mathrm{adj}(A)^t$.
2. $A$ הפיכה אם ורק אם $\mathrm{adj}(A)$ הפיכה.
3. אם $A$ הפיכה, מתקיים $\mathrm{adj}\left(A^{-1}\right) = (\mathrm{adj}(A))^{-1}$.

**פתרון.** 1. לכל $i,j\in[n]$ מתקיים

$$\operatorname{adj}\left(A^t\right)_{i,j}=(-1)^{i+j}\det\left(A^t_{(j,i)}\right).$$

אבל $A^t_{(j,i)}=\left(A_{(i,j)}\right)^t$ ולכן

$$\operatorname{adj}\left(A^t\right)_{i,j}=(-1)^{i+j}\det\left(A_{(i,j)}\right).$$

מצד שני,

$$\operatorname{adj}(A)^t_{i,j}=\operatorname{adj}(A)_{j,i}=(-1)^{i+j}\det\left(A_{(i,j)}\right),$$

ולכן מתקיים שוויון

$$\operatorname{adj}\left(A^t\right)=\operatorname{adj}(A)^t,$$

כנדרש.

2. אם $A$ הפיכה, מתקיים $\operatorname{adj}(A)=\det(A)A^{-1}$ ולכן גם $\operatorname{adj}(A)$ הפיכה.
להיפך, אם $\operatorname{adj}(A)$ הפיכה, נכתוב

$$\operatorname{adj}(A)A=\det(A)I_n$$

ואז

$$A=\det(A)\operatorname{adj}(A)^{-1}.$$

אם $\det(A)=0$ נקבל כי $A=0$, אבל אז $\operatorname{adj}(A)=0$ אינה הפיכה, בסתירה להנחה. לכן $\det(A)\neq 0$, ולכן $A$ הפיכה.

3. נניח כי $A$ הפיכה. אז

$$\begin{aligned}\operatorname{adj}\left(A^{-1}\right)&=\det\left(A^{-1}\right)\left(A^{-1}\right)^{-1}\\&=\frac{1}{\det(A)}A\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}\operatorname{adj}(A)^{-1}&=\left(\det(A)A^{-1}\right)^{-1}\\&=\frac{1}{\det(A)}\left(A^{-1}\right)^{-1}\\&=\frac{1}{\det(A)}A\end{aligned}.$$

מכן נסיק כי

$$\operatorname{adj}\left(A^{-1}\right)=\operatorname{adj}(A)^{-1},$$

כנדרש.

**תרגיל 3.5.** היעזרו בכלל קרמר כדי לפתור את כל אחת ממערכות המשוואות הלינאריות הבאות, מעל $\mathbb{Q}$.

1.

$$\begin{aligned}x+y+z&=11\\2x-6y-z&=0\\3x+4y+2z&=0\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}3x-2y&=7\\3y-2z&=6\\3z-2x&=-1\end{aligned}$$

**פתרון.** 1. נכתוב את מערכת המשוואות בעזרת מטריצות, בתור $A\vec{x}=b$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-6&-1\\3&4&2\end{pmatrix},\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}11\\0\\0\end{pmatrix}.$$

מתקיים כי

$$\begin{aligned}\det\left(A\right)&=\det\begin{pmatrix}-6&-1\\4&2\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}2&-6\\3&4\end{pmatrix}\\&=-8-7+26\\&=11\\\det\left(A_1\right)&=11\det\begin{pmatrix}-6&-1\\4&2\end{pmatrix}\\&=-88\\\det\left(A_2\right)&=-11\det\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}\\&=-77\\\det\left(A_3\right)&=11\det\begin{pmatrix}2&-6\\3&4\end{pmatrix}\\&=11\cdot 26\end{aligned}$$

ולכן לפי כלל קרמר

$$\begin{aligned}x&=\det\left(A_1\right)/\det\left(A\right)=-8\\y&=\det\left(A_2\right)/\det\left(A\right)=-7\\z&=\det\left(A_3\right)/\det\left(A\right)=26.\end{aligned}$$

2. נכתוב את מערכת המשוואות בעזרת מטריצות, בתור $A\vec{x}=b$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\0&3&-2\\-2&0&3\end{pmatrix},\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}7\\6\\-1\end{pmatrix}.$$

מתקיים כי

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 3\cdot\det\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\\
&= 27-8\\
&= 19\\
\det(A_1) &= \det\begin{pmatrix}7 & -2 & 0\\ 6 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\\
&= 7\cdot\det\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}6 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\\
&= 7\cdot 9 + 2\cdot 16\\
&= 63+32\\
&= 95\\
\det(A_2) &= \det\begin{pmatrix}3 & 7 & 0\\ 0 & 6 & -2\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}\\
&= 3\cdot\det\begin{pmatrix}6 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix} - 7\cdot\det\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\\
&= 3\cdot 16 - 7\cdot(-4)\\
&= 76\\
\det(A_3) &= \det\begin{pmatrix}3 & -2 & 7\\ 0 & 3 & 6\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= 3\cdot\det\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 3 & 6\end{pmatrix}\\
&= -9 - 2\cdot(-12-21)\\
&= -9+66\\
&= 57
\end{aligned}$$

ולכן לפי כלל קרמר

$$\begin{aligned}
x &= \det(A_1)/\det(A) = 95/19 = 5\\
y &= \det(A_2)/\det(A) = 76/19 = 4\\
.z &= \det(A_3)/\det(A) = 57/19 = 3
\end{aligned}$$

**תרגיל 3.6.** תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$, יהי $b \in \mathbb{F}^n$ ונניח כי $y \in \mathbb{F}^n$ מקיים $Ay = b$. תהי $\tilde{A}$ מטריצה המתקבלת מ־$A$ על ידי כפל של העמודה ה־$i$ ב־$\alpha \in \mathbb{F}$. הראו ישירות לפי כלל קרמר כי $\tilde{y} = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_{i-1}\\ y_i/\alpha\\ y_{i+1}\\ y_n\end{pmatrix}$ פתרון עבור המערכת $\tilde{A}x = b$.

**פתרון.** מתקיים כי $\det\left(\tilde{A}\right) = \alpha\det(A)$. כמו כן $\det\left(\tilde{A}_i\right) = \det(A_i)$ כיוון שמתקיים $\tilde{A}_i = A_i$, ולכל $j \in [n]\setminus\{i\}$ מתקיים $\det\left(\tilde{A}_j\right) = \alpha\det(A_j)$.

לפי כלל קרמר נקבל כי $\tilde{y}$ פתרון של המערכת $\tilde{A}x = b$, כיוון שמתקיים

$$\det\left(\tilde{A}_i\right) / \det\left(\tilde{A}\right) = \det\left(A_i\right) / \left(\alpha \det\left(A\right)\right) = y_i/\alpha$$

וכן לכל $j \in [n] \setminus \{i\}$ מתקיים

$$\det\left(\tilde{A}_j\right) / \det\left(\tilde{A}\right) = \alpha \det\left(A_j\right) / \left(\alpha \det\left(A\right)\right) = \det\left(A_j\right) / \det\left(A\right) = y_j\,.$$

# פרק 4

# מרחבים שמורים ולכסינות

## 4.1 מרחבים שמורים

נרצה להבין אופרטורים לינאריים דרך הבנה של צמצום שלהם לתת־מרחבים קטנים יותר. אם $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$, נוכל תמיד לצמצם את המקור כדי לקבל העתקה לינארית $T|_W : W \to V$, אבל לא נוכל ללמוד מספיק כאשר הצמצום אינו אופרטור. לכן נרצה לצמצם גם את הטווח, מה שמוביל להגדרה הבאה.

**הגדרה 4.1.1 (מרחב שמור).** יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $U \leq V$. נגיד כי $U$ הינו $T$־שמור (או $T$־אינווריאנטי אם $T(U) \subseteq U$.

**הגדרה 4.1.2.** במקרה ש־$W$ מרחב $T$־שמור, נוכל להסתכל על הצמצום $T|_W : W \to W$ שמוגדר על ידי $T|_W(w) = T(w)$.

**הערה 4.1.3.** שימו לב שהסימון הוא אותו סימון כמו הצמצום של המקור, אך במסגרת הקורס צמצום אופרטורים יתייחס לזה שבהגדרה אלא אם כן יצוין מפורשות אחרת.

**תרגיל 4.1.** יהיו $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהיו $P, T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כאשר $P$ איזומורפיזם. יהי $W \leq V$.
הראו כי $W$ הינו $T$־שמור אם ורק אם $P^{-1}(W)$ הינו $P^{-1} \circ T \circ P$־שמור.

**פתרון.** נניח כי $W$ הינו $T$־שמור ויהי $v \in P^{-1}(W)$. נרצה להראות כי $P^{-1} \circ T \circ P(v) \in P^{-1}(W)$. יהי $w \in W$ עבורו $v = P^{-1}(w)$. אז

$$\begin{aligned} P^{-1} \circ T \circ P(v) &= P^{-1} \circ T \circ P \circ P^{-1}(W) \\ &= P^{-1} \circ T(w) \end{aligned}$$

כאשר $T(w) \in W$ כי $W$ הוא $T$־שמור. נקבל כי $P^{-1} \circ T \circ P(v) \in P^{-1}(W)$.
בכיוון השני, נניח כי $U := P^{-1}(W)$ הינו $P^{-1} \circ T \circ P$־שמור. נגדיר $S = P^{-1} \circ T \circ P$, וגם $Q = P^{-1}$. אז $T = Q^{-1} \circ T \circ Q$ וגם $W = P\left(P^{-1}(W)\right) = P(U) = Q^{-1}(U)$. מהכיוון הראשון, נקבל כי $W$ הינו $\left(Q^{-1} \circ T \circ Q\right)$־שמור, כלומר $T$־שמור.

**תרגיל 4.2.** יהי $\mathbb{C}$ במרחב וקטורי ממשי ויהי

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned} .$$

מצאו את התת־מרחבים ה־$T$־שמורים של $\mathbb{C}$ והסיקו כי $T$ אינו לכסין מעל $\mathbb{R}$.

**פתרון.** $\mathbb{C}, \{0\}$ תת־מרחבים $T$־שמורים.
נניח כי $W \leq \mathbb{C}$ מרחב $T$־שמור נוסף. אז $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$ ולכן יש

$$z_0 \in \mathbb{C}^{\times} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

עבורו $W = \operatorname{Span}\{z_0\}$. נקבל $T(z_0) \in W$ לכן $T(z_0) = cz_0$ עבור $c \in \mathbb{R}$. אבל $cz_0 = iz_0$ גורר $c = i$ בסתירה.
תת־מרחבים $T$־שמורים 1־מימדיים של $\mathbb{C}$ הם $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור $v$ וקטור עצמי של $T$. לכן אין ל־$T$ וקטורים עצמיים, ולכן הוא אינו לכסין מעל $\mathbb{R}$.

**סימון 4.1.4.** עבור מטריצות ריבועיות $A_1,\ldots,A_k$ נסמן

$$A_1\oplus\ldots\oplus A_k=\begin{pmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_k\end{pmatrix}.$$

**תרגיל 4.3.** יהי $V=\mathbb{C}^n$ ותהי

$$T\colon V\to V$$

עם

$$[T]_E=\lambda_1 I_{m_1}\oplus\ldots\oplus\lambda_k I_{m_k}$$

עבור $\lambda_i\neq\lambda_j$ לכל $i\neq j$. נסמן $n_i=m_1+\ldots+m_{i-1}+1$. מצאו את כל התת־מרחבים ה־$T$־שמורים של $V$.

**פתרון.** ראשית, אם $W\leq V_i:=\operatorname{Span}\left(e_{n_i},\ldots,e_{n_i+m_i-1}\right)$, נקבל כי $T(w)=\lambda_i w\in W$ לכל $w\in W$. לכן כל תת־מרחב בזה הינו $T$־שמור. גם סכום של תת־מרחבים כאלה יהיה $T$־שמור כי אם $v_i\in W_i:=W\cap V_i$ לכל $i\in[k]$ אז

$$T(v_1+\ldots+v_k)=T(v_1)+\ldots+T(v_k)$$

כאשר $T(v_i)\in W$ וגם $T(v_i)=\lambda_i v_i\in V_i$, כלומר $T(v_i)\in W_i$. נראה שאלו כל האפשרויות לתת־מרחבים שמורים.
ראינו בהרצאה כי אם $W$ הינו $T$־שמור, אז $T|_W$ הינו לכסין. לכן, $W$ סכום ישר של המרחבים העצמיים של $T|_W$. לכל ערך עצמי $\lambda$, המרחב העצמי $W_\lambda$ של $T|_W$ הוא החיתוך $W\cap V_\lambda$ כאשר $V_\lambda$ המרחב העצמי של $T$.
כיוון שעבור אופרטור לכסין המרחב שווה לסכום ישר של המרחבים העצמיים, נקבל כי

$$W=\bigoplus_{i\in[k]}W_{\lambda_i}=\bigoplus_{i\in[k]}W\cap V_{\lambda_i},$$

כנדרש.

**הגדרה 4.1.5 (בלוק ז'ורדן).** יהי $\lambda\in\mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל $m$ עם ערך עצמי $\lambda$ בתור

$$J_m(\lambda):=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_m(\mathbb{F}).$$

**הגדרה 4.1.6 (אופרטור אי־פריד).** אופרטור $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא אי־פריד אם לכל $U,W\leq V$ שהינם $T$־שמורים ועבורם $U\oplus W=V$, בהכרח $U=V,W=\{0\}$ או $U=\{0\},W=V$.

**תרגיל 4.4.** 1. יהי $T=T_{J_n(0)}\in\operatorname{End}(\mathbb{F}^n)$. מיצאו את המרחבים ה־$T$ שמורים של $\mathbb{F}^n$.

2. יהי $N\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$. הראו שהמרחבים ה־$S$־שמורים של $V$ הם המרחבים ה־$(N+\lambda\operatorname{Id}_V)$־שמורים של $V$.

3. יהי $S=T_{J_n(\lambda)}\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}^n}$. הסיקו מה המרחבים ה־$S$־שמורים של $\mathbb{F}^n$.

4. הראו כי $S$ הינו אי־פריד.

**פתרון.** 1. נשים לב כי

$$\begin{aligned}&\{0\}\\ \ker(T)&=\operatorname{Span}(e_1)\\ \operatorname{Im}(T)&=\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_{n-1})\\ V&=\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_n)\end{aligned}$$

כולם $T$־שמורים, כיוון שמרחב האפס, הגרעין, התמונה, והמרחב כולו תמיד $T$־שמורים. גם, מתקיים

$$\begin{aligned}\forall i>1\colon T(e_i)&=e_{i-1}\in\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_i)\\ T(e_1)&=0\end{aligned}$$

ולכן כל מרחב מהצורה $\mathrm{Span}\left(e_1,\ldots,e_i\right)$ עבור $i\in\{0,\ldots,n\}$ הינו $T$-שמור. נרצה להראות שהמרחבים ה-$T$-שמורים הם בדיוק אלו מהצורה הזאת.

יהי $W\le\mathbb{F}^n$ מרחב $T$-שמור, ויהי $k\in\{0,\ldots,n\}$ המקסימלי עבורו $\mathrm{Span}\left(e_1,\ldots,e_k\right)\subseteq W$ (יש כזה $k$ כיוון שעבור $k=0$ נקבל $\{0\}\subseteq W$). נרצה להראות כי $W=\mathrm{Span}\left(e_1,\ldots,e_k\right)$.

אחרת, קיים וקטור $v=\sum_{i\in[\ell]}\alpha_ie_i\in W$ עם $\ell>k$ וגם $\alpha_\ell\neq 0$. אם $\ell=k+1$ נקבל כי $\alpha_ie_i\in W$ לכל $i<\ell$ ולכן

$$\alpha_\ell e_\ell=v-\sum_{i\in[\ell-1]}\in W$$

וביוון ש-$\alpha_\ell\neq 0$ אז $e_{k+1}=e_\ell\in W$. במקרה זה $e_1,\ldots,e_{k+1}\in W$ ולכן $\mathrm{Span}\left(e_1,\ldots,e_{k+1}\right)\subseteq W$ בסתירה להנחה.

באופן כללי, מתקיים $T^i\left(v\right)\in W$ לכל $i$. כדי שיתקיים $T^i\left(e_\ell\right)=e_{k+1}$ צריך לקחת $\ell-i=k+1$ כלומר $i=\ell-(k+1)$. אז

$$\begin{aligned}T^{\ell-(k+1)}\left(v\right)&=\sum_{i\in[\ell]}\alpha_iT^{\ell-(k+1)}\left(e_i\right)\\&=\sum_{i=\ell-k}^{\ell}\alpha_ie_{i-\ell+k+1}\\&=\sum_{j=1}^{k+1}\alpha_{j+\ell-k-1}e_j\in W\end{aligned}$$

ונקבל את הנדרש מהמקרה הקודם $\ell=k+1$.

2. יהי $W\le V$ תת־מרחב $N$-שמור. לכל $w\in W$ מתקיים

$$\left(N+\lambda\,\mathrm{Id}_V\right)\left(w\right)=N\left(w\right)+\lambda w\in W$$

ביוון ש-$N\left(w\right),\lambda w\in W$. לכן $W$ הינו $N+\lambda\,\mathrm{Id}_V$-שמור.

אם $W\le V$ תת־מרחב $\left(N+\lambda\,\mathrm{Id}_V\right)$-שמור, נקבל מהכיוון הראשון שהוא $\left(N+\lambda\,\mathrm{Id}_V\right)+\left(-\lambda\right)\mathrm{Id}_V$-שמור, כלומר $N$-שמור.

3. מהסעיף הקודם, נקבל כי המרחבים ה-$S$ שמורים הם המרחבים ה-$T$-שמורים, שהינם אלו מהצורה $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\left(e_1,\ldots,e_i\right)$ עבור $i\in\{0,\ldots,n\}$.

4. נניח כי יש תת־מרחבים $S$-שמורים $W_1,W_2$ עבורם $\mathbb{F}^n=W_1\oplus W_2$. מהסעיף הקודם, יש $i,j\in\{0,\ldots,n\}$ עבורם

$$\begin{aligned}W_1&=\mathrm{Span}\left(e_1,\ldots,e_i\right)\\.W_2&=\mathrm{Span}\left(e_1,\ldots,e_j\right)\end{aligned}$$

כיוון ש-$W_1\oplus W_2=\mathbb{F}^n$, בהכרח $e_n\in W_1+W_2$, ולכן $i=n$ או $j=n$. במקרה הראשון, $W_1=\mathbb{F}^n,W_2=\{0\}$ ובמקרה השני $W_1=\{0\},W_2=\mathbb{F}^n$, ובכל מקרה הפירוק הינו טריוויאלי.

**דוגמה 4.1.7.** יהי $V=\mathbb{C}^4$, ויהי $T=T_{J_4(0)}\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V\right)$. נניח כי $W\le V$ מכיל

**תרגיל 4.5.** 1. תהי $A\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{R}\right)$. הוכיחו כי אם ל-$T_A$ אין תת־מרחב שמור ממימד 1, יש לו תת־מרחב שמור ממימד 2.

2. נניח כי $A\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{C}\right)$ מטריצה שבל מקדמיה ממשיים. הוכיחו כי אם $\lambda$ ערך עצמי של $T_A$ אז $\bar{\lambda}$ גם ערך עצמי של $T_A$.

**פתרון.** עבור מטריצה $A=\left(a_{i,j}\right)\in\mathrm{Mat}_{n,m}$ נגדיר

$$\bar{A}=\left(\bar{a}_{i,j}\right)$$

את המטריצה שמקדמיה הם המספרים הצמודים לאלו ב-$A$. נשים לב כי עבור שתי מטריצות $A\in\mathrm{Mat}_{m,n}\left(\mathbb{C}\right)$ ו-$B\in\mathrm{Mat}_{n,\ell}\left(\mathbb{C}\right)$, מתקיים

$$\begin{aligned}\left(\overline{AB}\right)_{i,j}&=\overline{\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\overline{a_{i,k}}\overline{b_{k,j}}\\&=\left(\left|A\right|\left|B\right|\right)_{i,j}\end{aligned}$$

ולכן $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$.

1. תת־מרחב $T_A$-שמור ממימד 1 הוא מהצורה $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור וקטור עצמי $v$ של $T_A$. לכן מההנחה, אין ל־$T_A$ וקטורים עצמיים.

אבל, אפשר לחשוב על $A$ כעל מטריצה ב־$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ שנסמנה $\tilde{A}$. אז ל־$T_{\tilde{A}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ יש וקטור עצמי כאופרטור מעל $\mathbb{C}$. יהי $v \in \mathbb{C}^n$ וקטור עצמי של $T_{\tilde{A}}$ עם ערך עצמי $\lambda = \alpha + i\beta$, ונכתוב

$$v = \begin{pmatrix} u_1 + iw_1 \\ \vdots \\ u_n + iw_n \end{pmatrix} = u + iw$$

כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ וקטורים עם מקדמים ממשיים. נוכל לחשוב עליהם כחיים ב־$\mathbb{R}^n$. אז

$$\begin{aligned} Au + iAw &= A(u + iw) \\ &= Av \\ &= \lambda v \\ &= (\alpha + i\beta)(u + iw) \\ &= \alpha u + \alpha i w + \beta i u - \beta w \\ &= (\alpha u - \beta w) + i(\alpha w + \beta u) \end{aligned}$$

כאשר $Au, Aw \in \mathbb{R}^n$. אז, נוכל להשוות מקדמים ולקבל

$$\begin{aligned} T_A(u) &= Au = \alpha u - \beta w \in \mathrm{Span}(u, w) \\ .T_A(w) &= Aw = \alpha w + \beta u \in \mathrm{Span}(u, w) \end{aligned}$$

לכן $\mathrm{Span}(u, w)$ הינו תת־מרחב $L_A$-שמור של $\mathbb{R}^n$.

2. אם $\lambda$ ממשי אין מה להוכיח כי $\lambda = \bar{\lambda}$. נניח אם כן כי $\lambda = \alpha + i\beta$ עבור $\beta \neq 0$. נסמן ב־$v = u + iw$ וקטור עצמי של $A$ עם ערך עצמי $\lambda$, כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ עם מקדמים ממשיים. אז

$$\bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

ולכן $\bar{v}$ וקטור עצמי של $A$ עם ערך עצמי $\bar{\lambda}$, כנדרש.

## 4.2 לבסינות

יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. מקרה בו פשוט להבין את $T$ הוא אם ניתן לכתוב את $V$ בתור סכום ישר של תת־מרחבים שמורים ממימד 1. אם

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$$

כאשר $V_i = \mathrm{Span}(v_i)$ עבור וקטורים $v_i \in V$, מתקיים לכל $i \in [n]$ כי $T(v_i) \in V_i = \mathrm{Span}(v_i)$ ולכן קיים $\lambda_i \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v_i) = \lambda_i v_i$ ואז $B := (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של וקטורים עצמיים של $T$ ומתקיים

$$.[T]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**הגדרה 4.2.1 (אופרטור לבסין).** אופרטור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא לבסין אם קיים בסיס $B$ של $V$ וקיימות $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ עבורם

$$.[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

בסיס $B$ בזה נקרא בסיס מלבסן עבור $T$, והמטריצה $[T]_B$ נקראת מטריצה אלכסונית.

**הגדרה 4.2.2.** יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. וקטור $v \in V \setminus \{0\}$ נקרא וקטור עצמי של $T$ אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $.T(v) = \lambda v$

במקרה זה $\lambda$ נקרא ערך עצמי של $T$.

**הערה 4.2.3.** $v$ וקטור עצמי של $T$ אם ורק אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \lambda v$. מתקיים $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ ולכן באופן שקול $T(v) \in \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ ובאופן שקול $T(\alpha v) = \alpha T(v) \in \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}$.
לכן, $v$ וקטור עצמי של $T$ אם ורק אם $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ הינו $T$-שמור.

**הערה 4.2.4.** אופרטור $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הינו לכסין אם ורק אם קיים בסיס של $V$ שמורכב מוקטורים עצמיים של $T$.

**הגדרה 4.2.5 (מרחב עצמי).** יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $\lambda$ ערך עצמי של $T$. המרחב העצמי של $T$ עם הערך $\lambda$ הוא

$$V_\lambda \coloneqq \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \operatorname{Id}_V - T).$$

**הגדרה 4.2.6 (פולינום אופייני).** יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הפולינום האופייני של $T$ הוא

$$p_T(x) \coloneqq \det(x \operatorname{Id}_V - T).$$

**הערה 4.2.7.** בפועל, נסתכל בדרך כלל על פולינום אופייני של מטריצה, כיוון שצריך לבחור בסיס כדי לחשב את הדטרמיננטה. ראינו כי הדטרמיננטה לא תלויה בבחירת הבסיס, ולכן $p_T(x) = p_{[T]_B}(x)$ לכל בסיס $B$ של $V$, כאשר $p_A(x) = \det(xI - A)$.

**מסקנה 4.2.8.** איבר $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של $T$ אם ורק אם $\ker(\lambda \operatorname{Id}_V - T) \neq 0$, אם ורק אם $p_T(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id}_V - T) = 0$.
בלומר, הערכים העצמיים של $T$ הם השורשים של $p_T$.

**הערה 4.2.9.** כיוון שלכל פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ יש שורש, לכל $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ יש ערך עצמי.

**הגדרה 4.2.10 (ריבוי אלגברי).** יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי האלגברי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא הריבוי שלו כשורש של $p_T$. נסמנו $r_a(\lambda)$.

**הגדרה 4.2.11 (ריבוי גיאומטרי).** יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא $r_g(\lambda) \coloneqq \dim V_\lambda$.

**הערה 4.2.12.** מתקיים תמיד $r_g(\lambda) \le r_a(\lambda)$.

**הגדרה 4.2.13.** תהי $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ ויהי $T = T_A$ אופרטור כפל ב-$A$ משמאל (כלומר, $T(v) = Av$). אם $T$ לכסין, קיים בסיס $B$ עבורו $D \coloneqq [T]_B$ אלכסונית. אז

$$\begin{aligned} A &= [T]_E \\ &= [\operatorname{Id} \circ T \circ \operatorname{Id}]_E \\ &= M_E^B [T]_B M_B^E \\ &= M_E^B D \left(M_E^B\right)^{-1} \end{aligned}$$

ואם נסמן $P = M_E^B$ נקבל כי זאת מטריצה הפיכה עבורה $P^{-1}AP = D$.
לכן, נגיד שמטריצה $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה אם קיימת $P \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $P^{-1}AP$ אלכסונית.

**תרגיל 4.6.** הראו כי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$$

לכסינה ומצאו $P \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$ עבורה $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.

**פתרון.** סכום הערכים העצמיים של $A$ שווה לעקבה שלה $\operatorname{tr}(A) = 1$ ומכפלת הערכים העצמיים שווה $\det(A) = 0$. לכן הערכים העצמיים הם $0, 1$. כיוון שלכל אחד מהם הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי, המטריצה הינה לכסינה.
נמצא וקטורים עצמיים עבור שני הערכים העצמיים השונים. עבור $0$ ניתן לראות כי $e_2$ ערך עצמי, כי $Ae_2$ היא העמודה השנייה של $A$, ששווה לוקטור האפס. עבור $1$, נחפש וקטור $v \in \mathbb{R}^2$ עבורו $Av = v$, כלומר $(A - I)v = 0$. מתקיים $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ולכן אם $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ צריך להתקיים $v_1 - v_2 = 0$, כלומר $v_1 = v_2$. ניקח אם כך $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ ונקבל $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Av$.

אז $B=(e_2,e_1+e_2)$ בסיס מלכסן של ההעתקה

$$\begin{aligned} T_A\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto Av \end{aligned}.$$

נקבל כי

$$D \coloneqq [T_A]_B = \left(M_E^B\right)^{-1} [T_A]_E\, M_E^B$$

מטריצה אלכסונית, ולכן ניקח $P = M_E^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**תרגיל 4.7.** תהי

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -6 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_6\left(\mathbb{C}\right).$$

מיצאו את הערכים העצמיים של $A$ ועבור כל אחד מהם מיצאו ריבוי אלגברי וגיאומטרי.

**פתרון.** נחשב ראשית את הפולינום האופייני של $A$.

$$\begin{aligned} p_A\left(x\right) &= \det\left(xI-A\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} x+3 & 4 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & x+3 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & x-5 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & x-2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & x-2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & x-2 \end{pmatrix} \\ &= \left(x-2\right)\begin{pmatrix} x+3 & 4 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & x+3 & 4 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & x-5 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & x-2 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & x-2 \end{pmatrix} \\ &= \dots \\ &= \left(x-2\right)\left(x^5-3x^4+x^3+x^2+4\right) \end{aligned}.$$

ניתן לראות כי 2 הינו ערך עצמי של $A$, כי הוא שורש של $p_A\left(x\right)$. נחשב את הריבוי שלו $r_a\left(2\right)$, ששווה לערך $i\in\mathbb{N}$ המינימלי עבורו $p_A\left(x\right)^{(i)}\left(2\right)\neq 0$, כאשר $f^{(k)}$ הינה הנגזרת ה־$k$-ית של $f$. מתקיים

$$\begin{aligned} p_A\left(x\right) &= x^6-5x^5+7x^4-x^3-2x^2+4x-8 \\ p_A'\left(x\right) &= 6x^5-25x^4+28x^3-3x^2-4x+4 \\ p_A'\left(2\right) &= 6\cdot 32-20\cdot 16+28\cdot 8-3\cdot 4-4\cdot 2+4=0 \\ p_A''\left(x\right) &= 30x^4-100x^3+84x^2-6x-4 \\ p_A''\left(2\right) &= 30\cdot 16-100\cdot 8+84\cdot 4-6\cdot 2-4=0 \\ p_A'''\left(x\right) &= 120x^3-300x^2+168x-6 \\ p_A'''\left(2\right) &= 120\cdot 8-300\cdot 4+168\cdot 2-6=90\neq 0 \end{aligned}$$

ולכן $r_a\left(2\right)=3$. נקבל כי $\left(x-2\right)^3=x^3-6x^2+12x-8$ מחלק את $p_A\left(x\right)$ וכדי למצוא ערכים עצמיים נוספים נבצע חילוק פולינומים.

בכל שלב נכפול את הפולינום בו אנו מחלקות במונום מתאים כך שהכפל יהיה בעל אותו גורם מוביל כמו הפולינום שקיבלנו לאחר חיסור בשלב הקודם, ולאחר מכן נחסר זאת מהפולינום שקיבלנו בשלב הקודם. נסכום את המונומים המתאימים כדי לקבל את המנה, כאשר אם נשארנו עם פולינום מדרגה קטנה יותר מזה שאנו מחלקות בו, הוא יהיה שארית החלוקה.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + x^2 + x + 1 \\
\hline
x^3 - 6x^2 + 12x - 8 & x^6 - 5x^5 + 7x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\
 & -x^6 + 6x^5 - 12x^4 + 8x^3 \\
\cline{2-2}
 & x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 \\
 & -x^5 + 6x^4 - 12x^3 + 8x^2 \\
\cline{2-2}
 & x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x \\
 & -x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x \\
\cline{2-2}
 & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\
 & -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

לכן

$$p_A(x) = (x-2)^3\left(x^3 + x^2 + x + 1\right)$$

וניתן לראות כי $-1$ שורש של $x^3 + x^2 + x + 1$ (הוא שורש של כל פולינום ממעלה אי־זוגית שבל מקדמיו 1)ץ נבצע חילוק פולינומים נוסף

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 1 \\
\hline
x + 1 & x^3 + x^2 + x + 1 \\
 & -x^3 - x^2 \\
\cline{2-2}
 & x + 1 \\
 & -x - 1 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

ולכן

$$p_A(x) = (x-2)^3(x+1)\left(x^2+1\right) = (x-2)^3(x+1)(x+i)(x-i)$$

ונקבל כי הערכים העצמיים הם 2 מריבוי אלגברי 3, ו־$-1, i, -i$ כל אחד מריבוי אלגברי 1.

כיוון שהריבוי הגיאומטרי תמיד גדול או שווה ל־1 וקטן או שווה לריבוי האלגברי, נקבל כי $r_g(-1) = r_g(i) = r_g(-i) = 1$ ולכן נותר למצוא את הריבוי הגיאומטרי של 2, ששווה לדרגת המטריצה $A - 2I$. נחשב דרגה זאת.

$$A-2I=\begin{pmatrix}-5&-4&-6&-3&-3&0\\-2&-5&-4&-3&-3&0\\3&3&3&3&3&0\\-1&2&1&0&0&0\\2&1&3&0&0&0\\3&3&3&3&3&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_5\mapsto C_5-C_4}\begin{pmatrix}-5&-4&-6&-3&0&0\\-2&-5&-4&-3&0&0\\3&3&3&3&0&0\\-1&2&1&0&0&0\\2&1&3&0&0&0\\3&3&3&3&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_3\mapsto C_3-C_4]{\substack{C_1\mapsto C_1-C_4\\C_2\mapsto C_2-C_4}}\begin{pmatrix}-2&-1&-3&-3&0&0\\1&-2&-1&-3&0&0\\0&0&0&3&0&0\\-1&2&1&0&0&0\\2&1&3&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3\mapsto C_3-C_1-C_2}\begin{pmatrix}-2&-1&0&-3&0&0\\1&-2&0&-3&0&0\\0&0&0&3&0&0\\-1&2&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\end{pmatrix}$$

וניתן לראות מכאן כי $\operatorname{rank}(A-2I)=3$, לכן $r_g(2)=3$.

עבור התרגול על מרחבים שמורים בו יואב החליף אותי, ראו את
הרשימות של יואב בקובץ הרלוונטי שבדף הקורס.

# פרק 5

# צורת ז'ורדן

כדי לבצע חישובים על אופרטורים לינאריים, בדרך כלל יש לקחת בסיס ולערוך את החישובים על המטריצות המייצגות. נרצה לקחת בסיס שיתן לנו מטריצה שתאפשר חישובים פשוטים בכל הניתן: מטריצה אלכסונית. אין לכל אופרטור צורה אלכסונית, אבל, מעל שדה סגור אלגברית יש צורה "כמעט אלכסונית" שנקראת צורת ז'ורדן.

**הגדרה 5.0.1.** יהי $\lambda \in \mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל $m$ עם ערך עצמי $\lambda$ בתור

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{F}).$$

**הגדרה 5.0.2 (מטריצת ז'ורדן).** מטריצה $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ נקראת מטריצת ז'ורדן אם היא מטריצה אלכסונית בלוקים שכל הבלוקים בה הם בלוקי ז'ורדן.

**הגדרה 5.0.3 (בסיס ז'ורדן).** יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. בסיס ז'ורדן עבור $T$ הוא בסיס $B$ של $V$ עבורו $[T]_B$ מטריצת ז'ורדן.

**הגדרה 5.0.4 (שדה סגור אלגברית).** שדה $\mathbb{F}$ נקרא סגור אלגברית אם לכל פולינום $p \in \mathbb{F}[x]$ שאינו קבוע יש שורש.

**משפט 5.0.5 (משפט ז'ורדן).** יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית, יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. קיים בסיס ז'ורדן עבור $T$, וצורת ז'ורדן של $T$ יחידה עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

בהוכחת משפט ז'ורדן בהרצאה, הסתכלנו קודם כל על אופרטורים שעבורם הערך העצמי היחיד הוא $0$, שהינם אופרטורים נילפוטנטיים. נדון תחילה במשפט ז'ורדן עבור אופרטורים אלו.

## 5.1 אופרטורים נילפוטנטיים

עבור בלוק ז'ורדן $A = J_n(0)$ מתקיים $A^n = 0$, ולכן גם $T_A^n = 0$. נוכל באופן דומה לדבר על אופרטורים כלליים עם תכונה זאת.

**הגדרה 5.1.1 (אופרטור נילפוטנטי).** אופרטור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא נילפוטנטי אם קיים $i \in \mathbb{N}_+$ עבורו $T^i = 0$.
הערך $k$ המינימלי עבורו $T^k = 0$ נקרא אינדקס הנילפוטנטיות של $T$.

התרגיל הבא מראה שאלו בדיוק האופרטורים שמעניינים אותנו כאשר אנו רוצות להתייחס רק לערך עצמי $0$.

**תרגיל 5.1.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה סגור אלגברית $\mathbb{F}$, ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. אז $T$ נילפוטנטי אם ורק אם $0$ הוא הערך העצמי היחיד של $T$.

**פתרון.** נניח כי $T$ נילפוטנטי מאינדקס $k$, ויהי $\lambda$ ערך עצמי של $T$ עם וקטור עצמי $v$. אז $0 = T^k(v) = \lambda^k v$ וכיוון ש־$v \neq 0$ נקבל $\lambda^k = 0$ ואז $\lambda = 0$.

בביוון השני, נניח כי $0$ הוא הערך העצמי היחיד. ממשפט ז'ורדן, קיים בסיס $B$ של $V$ עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}.$$

לכל $i \in [k]$ מתקיים $J_{m_i}(0)^{m_i} = 0$, ולכן אם ניקח $m = \max_{i\in[k]} m_i$ נקבל כי

$$[T]_B^m = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0)^m & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(0)^m \end{pmatrix} = 0$$

ואז $T^m = 0$.

**תרגיל 5.2.** תהי $T$ נילפוטנטית מאינדס $k$. הראו שהעתקות $(\mathrm{Id}_V \pm T)$ הפיכות ומצאו את ההופכיות שלהן.

**פתרון.** אנו יודעות כי

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} r^k = \frac{1}{1-r}$$

עבור $r < 0$. נרצה אם כן שההופכית של $\mathrm{Id}_V - T$ תהיה $\mathrm{Id}_V + T + \ldots + T^{k-1}$. אכן,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_V - T)\left(\mathrm{Id}_V + T + \ldots + T^{k-1}\right) &= \sum_{i=0}^{k-1} T^i - \sum_{i=1}^{k} T) \\ &= \mathrm{Id}_V - T^k \\ &= \mathrm{Id}_V - 0 \\ &= \mathrm{Id}_V\end{aligned}.$$

כעת, אם $T$ נילפוטנטית מאינדקס $k$ גם $-T$ נילפוטנטית מאינדקס $k$, לכן ההופכית של $\mathrm{Id}_V + T = \mathrm{Id}_V - (-T)$ היא

$$\mathrm{Id}_V - T + T^2 - T^3 + \ldots + (-1)^{k-1} T^{k-1}.$$

### 5.1.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור אופרטורים נילפוטנטיים

**הגדרה 5.1.2 (אופרטור הזזה).** יהי $V$ מרחב וקטורי עם בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נגיד כי $T$ אופרטור הזזה ביחס לבסיס $B$ אם מתקיים

$$T(v_i) = \begin{cases} v_{i-1} & i > 1 \\ 0 & i = 1 \end{cases},$$

או באופן שקול אם $[T]_B = J_n(0)$.

כדי למצוא בסיס ז'ורדן עבור אופרטור הזזה, נרצה למצוא וקטור $v \in V$ עבורו $T^n(v) = 0$ אבל $T^{n-1}(v) \neq 0$, ואז $\left(T^{n-1}(v), T^{n-2}(v), \ldots, T(v), v\right)$ יהיה בסיס ז'ורדן.

**תרגיל 5.3.** תהי

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$$

ויהי $T = T_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^3\right)$. מיצאו בסיס ז'ורדן עבור $T$.

**פתרון.** מתקיים

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = 0$$

ולכן $A$ נילפוטנטית מסדר $\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^3\right)=3$. מתקיים $\ker\left(T^2\right)=\operatorname{Span}\left(e_1-e_2,e_1-e_3\right)$ כי שני הוקטורים נמצאים בגרעין וכי $\dim\ker\left(T^2\right)=3-\operatorname{rank}\left(A^2\right)=2$. ניקח $v\in\ker\left(T^3\right)\setminus\ker\left(T^2\right)$ ואז יתקיים $T^3(v)=0$ וגם $T^2(v)\neq 0$. למשל, ניקח $v=e_1$, ואת הבסיס

$$\left(T^2\left(e_1\right),T\left(e_1\right),e_1\right)=\left(e_1-e_3,e_2-e_3,e_1\right).$$

כעת, יתכנו אופרטורים נילפוטנטיים שאינם אופרטורי הזזה. באופן כללי, עבור אופרטורים כאלה, נשלים בסיס של $\ker\left(T^{k-1}\right)$ לבסיס של $\ker\left(T^k\right)$ ונסתכל על השרשראות $\left(T^{k-1}(v),\ldots,T(v),v\right)$ שמתקבלות מהוקטורים המתאימים. אם שרשור השרשראות מאורך ששווה למימד של $V$, נקבל בסיס ז׳ורדן

$$\left(T^{k-1}\left(v_1\right),\ldots,T\left(v_1\right),v_1,T^{k-1}\left(v_2\right),\ldots,T\left(v_2\right),v_2,\ldots,T^{k-1}\left(v_k\right),\ldots,T\left(v_k\right),v_k\right).$$

אבל, יתכן שזה לא המצב. במקרה זה, נחפש שרשראות קצרות יותר, שיתחילו בוקטורים באיזשהו $v\in\ker\left(T^i\right)\setminus\ker\left(T^{i-1}\right)$ ויהיו מהצורה

$$\left(T^{i-1}(v),\ldots,T(v),v\right).$$

נראה בהמשך נוסחא לחישוב מספר בלוקי ז׳ורדן מכל גודל, וכיוון שכל שרשרת כזאת תתאים לבלוק ז׳ורדן, נוכל לדעת בדיוק אילו ערכי $i$ לבדוק.

**הערה 5.1.3.** בכל שרשרת ז׳ורדן עבור $T$ יש וקטור עצמי יחיד. לכן עבור אופרטור נילפוטנטי $T$ הריבוי הגיאומטרי של $0$ הוא מספר בלוקי הז׳ורדן של $T$.

**הערה 5.1.4.** עבור $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם צורת ז׳ורדן, עבור $n=\dim V$ ועבור $i\in[n]$, ההפרש

$$\dim\ker\left(T^i\right)-\dim\ker\left(T^{i-1}\right)$$

הוא מספר הוקטורים $v$ בבסיס ז׳ורדן של $T$ עבורם $T^i(v)=0$ אבל $T^{i-1}(v)\neq 0$, כלומר מספר שרשראות הז׳ורדן מאורך לפחות $i$ בבסיס ז׳ורדן.
לכן

$$\dim\ker\left(T^i\right)-\dim\ker\left(T^{i-1}\right)$$

הוא בדיוק מספר הבלוקים מגודל לפחות $i$ בצורת ז׳ורדן של $T$.
אז, מספר הבלוקים מגודל בדיוק $i$ הוא מספר הבלוקים מגודל לפחות $i$ פחות מספר הבלוקים מגודל לפחות $i+1$, שהוא

$$\dim\ker\left(T^i\right)-\dim\ker\left(T^{i-1}\right)-\left(\dim\ker\left(T^{i+1}\right)-\dim\ker\left(T^i\right)\right)=2\dim\ker\left(T^i\right)-\dim\ker\left(T^{i+1}\right)-\dim\ker\left(T^{i-1}\right).$$

**תרגיל 5.4.** מצאו את צורת ז׳ורדן של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(n).$$

**פתרון.** $A_n$ משולשת עליונה, לכן הערכים העצמיים שלה הם על האלכסון. לכן $0$ ערך עצמי מריבוי אלגברי $n$. מתקיים $r(A)=n-1$ כי השורות בלתי־תלויות לינארית, ולכן הריבוי הגיאומטרי של $A$ הוא $1$. נקבל כי בצורת ז׳ורדן של $A$ יש בלוק יחיד, כלומר $A\sim J_n(0)$.

**תרגיל 5.5.** יהי $V=\mathbb{C}^7$, יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ אופרטור הזזה ביחס לבסיס הסטנדרטי, ויהי $S=T^3$. מיצאו בסיס ז׳ורדן עבור $S$.

**פתרון.** נשים לב ראשית שמתקיים

$$S\left(e_i\right)=\begin{cases}e_{i-3} & i>3\\0 & i\leq 3\end{cases}.$$

מתקיים אם כן $S^2\left(e_7\right)=e_{7-2\cdot 3}=e_1\neq 0$ וגם $S^3=0$ ולכן $S$ נילפוטנטי מאינדקס $3$. מתקיים $\ker\left(S^2\right)=\operatorname{Span}\left(e_1,\ldots,e_6\right)$. ניקח $e_7\in\ker\left(S^3\right)\setminus\ker\left(S^2\right)$ שיתאים לשרשרת ז׳ורדן $\left(S^2\left(e_7\right),S\left(e_7\right),e_7\right)=\left(e_1,e_4,e_7\right)$.
אורך השרשרת הוא $3$ ואילו $\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^7\right)=7$, ולכן יש למצוא עוד שרשראות ז׳ורדן.
מתקיים $\dim\ker\left(S^2\right)-\dim\ker(S)=6-3=3$, וכפי שראינו זה מספר בלוקי הז׳ורדן מגודל לפחות $2$ לכן נחפש עוד שני וקטורים כאן, שיפתחו שרשראות נוספות. מתקיים $e_5,e_6\in\ker\left(S^2\right)\setminus\ker(S)$ ושני

וקטורים אלו יחד בלתי תלויים בשרשרת $(e_1, e_4, e_7)$ שמצאנו. נשרשר את השרשרת שמצאנו עם השרשראות $(S(e_5), e_5), (S(e_6), e_6)$ ונקבל בסיס ז'ורדן

$$B = (e_1, e_4, e_7, e_2, e_5, e_3, e_6)$$

שעבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_3(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix}.$$

נשים לב שהבלוק מגודל 3 מופיע ראשון בדיוק כי השרשרת מאורך 3 היא זאת שכתבנו ראשונה. אם היינו משנות את סדר השרשראות, היה משתנה סדר הבלוקים.

**תרגיל 5.6.** 1. הראו כי $J_n(\lambda)^t \cong J_n(\lambda)$, מעל $\mathbb{C}$.

2. הסיקו כי $A \cong A^t$ לכל $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

**פתרון.** 1. נכתוב $T = T_{J_n(\lambda)^t}$ ונרצה למצוא בסיס $B$ עבורו $[T]_B = J_n(\lambda)$. נניח תחילה כי $\lambda = 0$ כשבמקרה זה מתקיים

$$T(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & i < n \\ 0 & i = n \end{cases}.$$

אז הבסיס $B = (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_2, e_1)$ מקיים את הנדרש.

באופן כללי,

$$T = T_{J_n(0)^t + \lambda I} = T_{J_n(0)^t} + \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$$

ולכן

$$[T]_B = \left[T_{J_n(0)^t}\right]_B + \lambda \left[\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\right]_B = J_n(0) + \lambda I = J_n(\lambda)$$

ולכן הבסיס $B$ עדיין עובד.

2. ממשפט ז'ורדן, קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ עבורה $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\, J_{m_1}(\lambda_1), \ldots, J_{m_k}(\lambda_k)$ מטריצה אלכסונית בלוקים עם בלוקים $J_{m_i}(\lambda_i)$. אז

$$P^t A^t \left(P^t\right)^{-1} = \mathrm{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1)^t, \ldots, J_{m_k}(\lambda_k)^t\right).$$

בעת, $J_{m_1}(\lambda_1)^t \cong J_{m_1}(\lambda_1)$ ולכן קיימות מטריצות $Q_i \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ הפיכות עבורן $Q_i^{-1} J_{m_i}(\lambda_i)^t Q_i = J_{m_i}(\lambda_i)$. ולכן אם נסמן $Q := \mathrm{diag}(Q_1, \ldots, Q_n)$ נקבל כי

$$\begin{aligned} Q^{-1}\left(P^t A^t \left(P^t\right)^{-1}\right) Q &= Q^{-1}\,\mathrm{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1)^t, \ldots, J_{m_k}(\lambda_k)^t\right) Q \\ &= \mathrm{diag}\left(Q_1^{-1} J_{m_1}(\lambda_1)^t Q_1, \ldots, Q_k^t J_{m_k}(\lambda_k)^t Q_k\right) \\ &= \mathrm{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1), \ldots, J_{m_k}(\lambda_k)\right) \\ &= P^{-1}AP \end{aligned}$$

כלומר

$$A = \left(PQ^{-1}P^t\right) A^t \left(\left(P^t\right)^{-1} QP^{-1}\right) = \left(PQ^{-1}P^t\right) A^t \left(PQ^{-1}P^t\right)^{-1}$$

ולכן $A \cong A^t$.

## 5.2 משפט ז'ורדן הכללי

לאחר שהבנו כיצד למצוא בסיס ז'ורדן עבור אופרטורים נילפוטנטיים, נוכל לדבר על אופרטורים כלליים. אם $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, נוכל לכתוב

$$V = V'_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V'_{\lambda_k}$$

כאשר $V'_{\lambda_i}$ מרחבים עצמיים מוכללים, שהינם $T$־שמורים. כדי למצוא את הבלוקים עם ערך עצמי $\lambda_i$ נסתכל על $T|_{V'_{\lambda_i}} - \mathrm{Id}_{V'_{\lambda_i}}$ שהינו אופרטור נילפוטנטי על $V'_{\lambda_i}$, וניעזר באלגוריתם למציאת בסיס ז'ורדן למקרה הנילפוטנטי.

**הגדרה 5.2.1 (מרחב עצמי מוכלל).** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נסמן $n := \dim_{\mathbb{F}}(V)$. המרחב העצמי המוכלל של $T$ עבור $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא

$$V'_\lambda := \ker\left(\left(T - \lambda\,\mathrm{Id}_V\right)^n\right).$$

**משפט 5.2.2 (פירוק למרחבים עצמיים מוכללים).** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה סגור אלגברית, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ הערכים העצמיים השונים של $T$. אז $V'_{\lambda_i}$ הינו $T$־שמור לכל $i \in [k]$, וגם

$$V = \bigoplus V'_{\lambda_i}.$$

לפני שנתאר את האלגוריתם הכללי, נזכיר תכונות שראינו בהרצאה.

**טענה 5.2.3.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה סגור אלגברית, ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

1. מספר הבלוקים עם ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ בצורת ז'ורדן של $T$ הוא $r_g(\lambda)$, וסכום גדלי הבלוקים עם ערך עצמי $\lambda$ הוא $r_a(\lambda)$.
2. הבלוק המקסימלי עם ערך עצמי $\lambda$ בצורת ז'ורדן של $T$ שווה לאינדקס הנילפוטנטיות של $T|_{V'_\lambda} - \mathrm{Id}_{V'_\lambda}$ באשר $V'_\lambda$ המרחב העצמי המוכלל של $\lambda$ עבור $T$.
3. מספר הבלוקים עם ערך עצמי $\lambda$ שהינם מגודל לפחות $r$ הוא
$$\dim\ker\left((T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^r\right) - \dim\ker\left((T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^{r-1}\right).$$
4. מספר הבלוקים עם ערך עצמי $\lambda$ מגודל בדיוק $r$ הוא
$$2\dim\ker\left((T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^r\right) - \dim\ker\left((T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^{r+1}\right) - \dim\ker\left((T-\lambda\,\mathrm{Id}_V)^{r-1}\right).$$

### 5.2.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור אופרטור כללי

יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד סופי $n$ מעל שדה סגור אלגברית $\mathbb{F}$, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של $T$. כדי למצוא בסיס ז'ורדן עבור $T$ נסתכל על כל ערך עצמי בנפרד. לכל ערך עצמי $\lambda$ האופרטור $T|_{V'_\lambda} - \mathrm{Id}_{V'_\lambda}$ נילפוטנטי ולכן מהאלגוריתם במקרה הנילפונטי נוכל לקבל בסיס ז'ורדן $B_\lambda$ עבורו. נשרשר את כל הבסיסים הללו ונקבל בסיס ז'ורדן $B = B_{\lambda_1} \cup \ldots \cup B_{\lambda_k}$ עבור $T$.

**תרגיל 5.7.** ידוע כי כל הערכים העצמיים של

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_6(\mathbb{C})$$

רציונליים. מצאו צורת ובסיס ז'ורדן עבור $A$.

**פתרון.** נסמן $V = \mathbb{C}^6$.
חישוב ישיר נותן

$$p_A(x) = \det(xI - A) = x^6 - 15x^5 + 93x^4 - 305x^3 + 558x^2 - 540x + 216.$$

ממשפט ניחוש השורש הרציונלי אפשר למצוא את השורשים ולקבל

$$p_A(x) = (x-2)^3(x-3)^3.$$

נסתכל על הערכים העצמיים $2, 3$ בנפרד.

$\lambda = 3$: מתקיים

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ומרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הוא

$$\ker\left(T_A - 3\,\mathrm{Id}_V\right) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

חישוב ישיר נותן כי

$$\ker\left(\left(T_A - 3\,\mathrm{Id}_V\right)^2\right) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, e_3\right\}$$

וגם

$$\ker\left(\left(T_A - 3\,\mathrm{Id}_V\right)^3\right) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, e_3, e_4\right\}.$$

אז, $e_4$ פותח שרשרת ז'ורדן

$$B_3 = \left((A-3I)^2 e_4, (A-3I)\, e_4, e_4\right) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_3, e_4\right).$$

$\lambda = 2$: מתקיים

$$\ker\left(T_A - 2\,\mathrm{Id}_V\right) = \mathrm{Span}\left\{e_6, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן יש ל־2 ריבוי גיאומטרי 2. אז יש שני בלוקי ז'ורדן עבור הערך העצמי 2, ולכן השרשרת המקסימלית מגודל 2. אפשר לראות כי סכום העמודות של

$$A - 2I = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

שווה 0, ולכן $e_1 \in \ker\left(\left(T_A - \mathrm{Id}_V\right)^2\right)$ ונקבל

$$\ker\left(\left(T_A - \mathrm{Id}_V\right)^2\right) = \mathrm{Span}\left\{e_6, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, e_1\right\}.$$

אז $e_1$ מתחיל שרשרת ז'ורדן

$$\left(\left(A-2I\right)e_1, e_1\right) = \left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_1\right).$$

חסרה שרשרת ז'ורדן מאורך 1 עבור $\lambda = 2$. היא וקטור עצמי של 2 שאינו תלוי ב־$\left(\left(A-2I\right)e_1, e_1\right)$. למשל, $e_6$ הוא כזה וקטור עצמי.

נקבל בסיס ז'ורדן

$$B_2 \coloneqq \left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_1, e_6\right)$$

של $T|_{V_2'}$.

**סיכום:** נסדר את השרשראות השונות בבסיס ונקבל בסיס ז'ורדן

$$B = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_3, e_4, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_1, e_6\right)$$

לפיו

$$\left[T_A\right]_B = \mathrm{diag}\left(J_3\left(3\right), J_2\left(2\right), J_1\left(2\right)\right).$$

**תרגיל 5.8.** הראו כי

$$J_n\left(\lambda\right)^r = \begin{pmatrix}\lambda^r & \binom{r}{1}\lambda^{r-1} & \binom{r}{2}\lambda^{r-2} & \cdots & \\ & \lambda^r & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \binom{r}{2}\lambda^{r-2} \\ & & & \lambda^r & \binom{r}{1}\lambda^{r-1} \\ & & & & \lambda^r\end{pmatrix}.$$

**פתרון.** מתקיים

$$J_n(\lambda)^r = (J_n(0) + \lambda I)^r$$

כאשר $\lambda I, J_n(0)$ מתחלפות כי $\lambda I$ סקלרית. נקבל מהבינום של ניוטון כי

$$J_n(\lambda)^r = \lambda^r I + \binom{r}{1}\lambda^{r-1} J_n(0) + \binom{r}{2}\lambda^{r-2} J_n(0)^2 + \dots$$

כאשר $J_n(0)^k$ היא מטריצה עם אפסים פרט ל־$1$ באלכסון ה־$k$ מעל האלכסון הראשי. לכן

$$J_n(\lambda)^r = \begin{pmatrix} \lambda^r & \binom{r}{1}\lambda^{r-1} & \binom{r}{2}\lambda^{r-2} & \cdots & \\ & \lambda^r & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \binom{r}{2}\lambda^{r-2} \\ & & & \lambda^r & \binom{r}{1}\lambda^{r-1} \\ & & & & \lambda^r \end{pmatrix},$$

כנדרש.

**תרגיל 5.9.** תהי

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}).$$

חשבו את $A^{2025}$.

**פתרון.** נסמן $V = \mathbb{C}^3$ ונמצא בסיס ז'ורדן $B$ עבור $A$. אז נקבל $P \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ עבורה $J := PAP^{-1}$ מטריצת ז'ורדן, ואז

$$A^{2025} = \left(P^{-1}JP\right)^{2025} = P^{-1}J^{2025}P$$

כאשר מהחישוב הנ"ל נדע לחשב את $J^{2025}$.

**ערכים עצמיים:** ניתן לראות כי $9$ ערך עצמי של $A$ כי $Ae_3 = 9e_3$. נסמן ב־$\lambda_1, \lambda_2$ את הערכים העצמיים הנוספים ונקבל

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 9 &= \mathrm{tr}(A) = 9 \\ 9\lambda_1\lambda_2 &= \det(A) = 9(-4+4) = 0 \end{aligned}$$

לכן $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

נקבל כי $9$ ערך עצמי מריבוי אלגברי $1$ וכי $0$ ערך עצמי מריבוי אלגברי $2$. בפרט, $(e_3)$ שרשרת ז'ורדן עבור הערך העצמי $9$.

**שרשרת ז'ורדן עבור $\lambda = 0$:** ניתן לראות כי $r(A) = 2$ ולכן $\dim\ker(T_A) = 1$. נשים לב כי

$$2e_1 - e_2 - e_3 \in \ker(L_A)$$

ולכן

$$\ker(T_A) = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 - e_3).$$

מתקיים

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 81 & 81 & 81 \end{pmatrix}$$

לבן נוכל להשלים את $(2e_1 - e_2 - e_3)$ לבסיס

$$(2e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3)$$

של $\ker\left(T_A^2\right)$. מתקיים

$$A\left(e_1 - e_3\right) = 2e_1 - e_2 - e_3$$

לבן נקבל שרשרת ז'ורדן

$$\left(A\left(e_1 - e_3\right), e_1 - e_3\right) = \left(2e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3\right).$$

**מסקנה:** קיבלנו

$$B \coloneqq \left(2e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3, e_3\right)$$

עבורו

$$\left[T_A\right]_B = J \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$A = \left[T_A\right]_E = \left[\mathrm{Id}_V\right]_E^B \left[T_A\right]_B \left[\mathrm{Id}_V\right]_B^E.$$

נסמן

$$P \coloneqq \left[\mathrm{Id}_V\right]_E^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

שעמודותיה הן וקטורי הבסיס $B$, ונקבל

$$A = PJP^{-1}.$$

אז

$$\begin{aligned} A^{2025} &= PJ^{2025}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9^{2025} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9^{2025} & 9^{2025} & 9^{2025} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# חלק II

# חלק שני – מרחבי מכפלה פנימית ואלגברה מולטי־לינארית

# פרק 6

# מרחבי מכפלה פנימית

## 6.1 מוטיבציה

נסתכל תחילה על המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^n$. כיוון שנוכל לחשוב על וקטורים ב־$\mathbb{R}^n$ בתור נקודות במרחב, נוכל לחשוב על המרחק בין שני וקטורים $u,v\in\mathbb{R}^n$, שנסמנו $d\left(u,v\right)$.
כדי לחשב מרחק כזה, נסתכל על האורך של הקטע המחבר בין $u,v$, וזה אותו אורך כמו של הקטע המחבר בין $0,u-v$. לכן, $d\left(u,v\right)=d\left(0,u-v\right)$. נקרא למרחק $d\left(0,u-v\right)$ האורך של $u-v$, כיוון שזה האורך של הקו המחבר בין $0,u-v$, ונסמנו $\left\Vert u-v\right\Vert$ בדומה לסימון $\left|z\right|$ של ערך מוחלט ב־$\mathbb{C}$. נוכל להשתמש במשפט פיתגורס כדי לקבל כי

$$\left\Vert \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\right\Vert =\sqrt{v_1^2+\ldots+v_n^2}$$

ולמשל מתקיים $\left|a+ib\right|=\sqrt{a^2+b^2}=\left\Vert \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right\Vert$.

כשמדובר על גיאומטריה אוקלידית, מושג חשוב בנוסף למרחק ואורך הוא זה של זווית. נסתכל על שני וקטורים $u,v$ באורך $1$ ועל הישרים $\ell_u,\ell_v$ שעוברים דרכם. הקוסינוס $\cos\left(\alpha\right)$ של הזווית מ־$\ell_u$ ל־$\ell_v$ שווה לאורך של הוקטור שהקצה שלו הוא החיתוך בין $\ell_u$ לאנך מ־$v$ ל־$\ell_u$. נסמן וקטור זה $\left\langle v,u\right\rangle u$, כיוון שהוא אכן כפולה של $u$ מהיותו על $\ell_u$. במקרה זה נקרא לו ההטלה של $v$ על $u$. אז יתקיים

$$\cos\left(\alpha\right)=\left\langle v,u\right\rangle$$

ולכן

$$\alpha=\arccos\left(\left\langle v,u\right\rangle \right).$$

כדי להכליל את המושג של זווית, נכליל את הביטוי $\left\langle v,u\right\rangle$ באמצעות ההגדרה הבאה, של מכפלה פנימית.

## 6.2 הגדרות

**הגדרה 6.2.1 (מכפלה פנימית).** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{R},\mathbb{C}\right\}$. מכפלה פנימית על $V$ היא פונקציה

$$\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle :V\times V\to\mathbb{F}$$

המקיימת את התכונות הבאות.

**חיוביות:** לכל $v\in V\setminus\left\{ 0\right\}$ מתקיים $\left\langle v,v\right\rangle \geq0$.

**סימטריות (הרמיטיות):** לכל $u,v\in V$ מתקיים $\left\langle u,v\right\rangle =\overline{\left\langle v,u\right\rangle }$.

**לינאריות ברכיב הראשון:** לכל $u,v\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$\left\langle \alpha u+v,w\right\rangle =\alpha\left\langle u,w\right\rangle +\left\langle v,w\right\rangle .$$

מרחב וקטורי $V$ יחד עם מכפלה פנימית $\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle$ נקרא מרחב מכפלה פנימית.

**הערה 6.2.2.** בודגמא מהמרחב האוקלידי, ניתן לראות שנובע מהדרישה הגיאומטרית שלנו כי

$$\langle u,v\rangle=\sum_{i\in[n]}u_iv_i$$

עבור $u,v\in\mathbb{R}^n$ מאורך $1$. נוכל בעצם להגדיר זאת עבור וקטור כללי, ונשים לב כי הדבר אכן מקיים את שלוש התכונות הדרושות, ולכן הינו מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$.
מכפלה פנימית זאת נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$ ולעתים נסמן אותה $u\cdot v:=\langle u,v\rangle_{\mathrm{std}}$.

**תרגיל 6.1.** קיבעו אלו מההעתקות הבאות הן מכפלות פנימיות.

1.

$$\begin{aligned}f_1\colon\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\mathbb{R}\\ \left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\mapsto ax+by+(cz)^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}f_2\colon\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}\\ \left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\mapsto ax+by+cz\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}f_3\colon\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}\\ \left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\mapsto ax+by+cz\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}f_4\colon\ \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})\times\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\\ (A,B)\mapsto\mathrm{tr}\left(B^tA\right)\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}f_5\colon\ \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\times\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}\\ (A,B)\mapsto\mathrm{tr}\left(B^tA\right)\end{aligned}$$

**פתרון.** אף אחת מההעתקות אינה מכפלה פנימית.

1. ההעתקה $f_1$ אינה לינארית ברכיב הראשון, כי

$$f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=1$$

ואילו

$$f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=2^2=4\neq2=2f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

2. ההעתקה $f_2$ אינה חיובית, כי

$$f_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=0\leq 0.$$

3. ההעתקה $f_3$ אינה הרמיטית, כי

$$f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right)=i$$

ואילו

$$f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=i\neq -i=\bar{i}=\overline{f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right)}.$$

ההעתקה $f_4$ היא אכן מכפלה פנימית. מתקיים כי

$$f_4(A,B)=\sum_{i,j\in[n]}a_{i,j}b_{i,j}.$$

אז $f$ סימטרית כי

$$\sum_{i,j\in[n]}a_{i,j}b_{i,j}=\sum_{i,j\in[n]}b_{i,j}a_{i,j},$$

חיובית כי

$$\sum_{i,j\in[n]}a_{i,j}^2=0$$

גורר כי $a_{i,j}=0$ לכל $i,j\in[n]$, ולכן $A=0$, ולינארית ברכיב הראשון כי עבור מטריצות $A_1,A_2,B\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ וסקלר $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{aligned}f(\alpha A_1+A_2,B)&=\sum_{i,j\in[n]}\Big(\alpha(A_1)_{i,j}+(A_2)_{i,j}\Big)b_{i,j}\\&=\alpha\sum_{i,j\in[n]}(A_1)_{i,j}+\sum_{i,j\in[n]}(A_2)_{i,j}b_{i,j}\\&=\alpha f(A_1,B)+f(A_2,B)\end{aligned}$$

ההעתקה $f_5$ אינה הרמיטית, כי $f_4(I_n,iI_n)=\mathrm{tr}(iI_n)=in$ ואילו

$$f_4(iI_n,I_n)=\mathrm{tr}(iI_n)=in\neq\overline{in}=\overline{f_4(I_n,iI_n)}.$$

## 6.3 תבונות של מכפלות פנימיות, ונורמות

במרחב האוקלידי, כאשר $\|u\|=\|v\|=1$, אמרנו שהערך $|\langle u,v\rangle|$ שווה לאורך של ההטלה של $v$ על $u$ (או להיפך, כי המכפלה הפנימית סימטרית). בפרט, אורך זה יכול להיות לכל היותר 1, והינו שווה 1 אם ורק אם $u=v$, כי אחרת ההטלה תהיה קצרה יותר.
ניעזר בלינאריות של המכפלה הפנימית ונקבל כי לוקטורים $u,v\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ כלליים מתקיים

$$\begin{aligned}|\langle u,v\rangle|&=\left\langle\|u\|\frac{u}{\|u\|},\|v\|\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\\&=\|u\|\|v\|\left|\left\langle\frac{u}{\|u\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right|\\&\leq\|u\|\|v\|\end{aligned}$$

כאשר $\left|\left\langle\frac{u}{\|u\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right|\leq 1$ כי הוקטורים $\frac{u}{\|u\|},\frac{v}{\|v\|}$ הינם מאורך 1.
אי־שוויון כזה מתקבל גם במרחב מכפלה פנימית כללי, כפי שקובע אי־שוויון קושי־שוורץ, אך לשם כך עלינו להגדיר מושג של אורך בהגדרה הבאה.

**הגדרה 6.3.1 (נורמה).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. נורמה על $V$ היא פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות הבאות.

**חיוביות:** לכל $v \in V \setminus \{0\}$ מתקיים $\|v\| > 0$.

**הומוגניות:** לכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

**אי־שוויון המשולש:** לכל $u, v \in V$ מתקיים $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

מרחב וקטורי עם נורמה נקרא מרחב נורמי.

**משפט 6.3.2 (נורמה המושרית ממכפלה פנימית).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית. הפונקציה $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ היא נורמה על $V$. נקרא לה הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית $\langle \cdot, \cdot\rangle$.

**משפט 6.3.3 (אי־שוויון קושי־שוורץ).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית. אז לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם $u, v$ תלויים לינארית.

**תרגיל 6.2.** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in V$. הראו שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2}.$$

**פתרון.** נרצה לפרש את אגף שמאל בתור מכפלה פנימית. כיוון שהוא מזכיר את המכפלה הפנימית על $\mathbb{R}^n$, רק עם וקטורים מ־$V$ במקום מספרים ב־$\mathbb{R}$, נרצה להגדיר מכפלה זאת על המרחב

$$V^n := \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i \in V\}.$$

זה אכן מרחב וקטורי עם חיבור וכפל בסקלר לפי כל קואורדינטה בנפרד, ונגדיר עליו מכפלה פנימית לפי

$$\langle (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)\rangle := \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle .$$

אם $v := (v_1, \ldots, v_n) \neq (0, \ldots, 0)$, יש $v_j \neq 0$ ולכן

$$\langle v, v\rangle \geq \langle v_j, v_j\rangle > 0 ,$$

לכון מתקיימת חיוביות. סימטריה ולינאריות ברכיב הראשון מתקיימות בכל רכיב בנפרד, ולכן גם בסך הכל. בעת, אי־שוויון קושי־שוורץ על $V^n$ אומר לנו כי

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle\right| \\
&= |\langle u, v\rangle| \\
&\leq \|u\| \|v\| \\
&= \sqrt{\langle u, u\rangle} \cdot \sqrt{v, v} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, u_i\rangle} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle v_i, v_i\rangle} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2} ,
\end{aligned}$$

כנדרש.

ראינו שממכפלה פנימית ניתן לקבל נורמה המושרית ממנה. שאלה הגיונית לשאול היא האם כל נורמה מגיעה ממכפלה פנימית באופן זה. הטענה הבאה מתארת איך למצוא מכפלה פנימית כזאת, אם היא קיימת.

**טענה 6.3.4 (זהות הפולריזציה).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

2. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\,\|u+iv\|^2 - i\,\|u-iv\|^2\right).$$

**תרגיל 6.3.** יהי $V = \mathbb{R}^n$ עם הנורמה $\|v\|_\infty = \max_{i\in[n]} |v_i|$. הראו כי נורמה זאת אינה מושרית ממכפלה פנימית.

**פתרון.** אם הנורמה מושרית ממכפלה פנימית, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, מתקיים מזהות הפולריזציה כי

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\left(\max_{i\in[n]} |u_i + v_i|\right)^2 - \left(\max_{i\in[n]} |u_i - v_i|\right)^2\right).$$

אבל זאת לא מכפלה פנימית, למשל כי אינה לינארית. מתקיים

$$\langle e_1, e_2\rangle = \frac{1}{4}\left(1^2 - 1^2\right) = 0$$
$$\langle e_2, e_2\rangle = \frac{1}{4}\left(2^2 - 0^2\right) = 1$$

ואילו

$$\langle e_1 + e_2, e_2\rangle = \frac{1}{4}\left(2^2 + 1^2\right) = \frac{5}{4} \neq 1 + 0.$$

יש לנו דרך נוספת לבדוק האם נורמה מושרית ממכפלה פנימית.

**משפט 6.3.5 (זהות המקבילית).** יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם לכל $u, v$ מתקיים

$$2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2.$$

**תרגיל 6.4.** הראו שהנורמה

$$\|p\| = |p(0)| + |p(1)| + |p(2)|$$

על $\mathbb{R}_2[x]$ אינה מושרית ממכפלה פנימית.

**פתרון.** נראה שלא מתקיימת זהות המקבילית. נסתכל על הפולינומים $p(x) = x, q(x) = x^2 - 1$. אז

$$\|p\| = 0 + 1 + 2 = 3$$
$$\|q\| = 1 + 0 + 3 = 4$$
$$\|p+q\| = 1 + 1 + 5 = 7$$
$$\|p-q\| = 1 + 1 + 1 = 3$$

ולכן

$$2\left(\|p\|^2 + \|q\|^2\right) = 2(9 + 16) = 50$$
$$\|p-q\|^2 + \|p-q\|^2 = 49 + 9 = 58$$

ערכים שונים.

## 6.4 מטריקות וניצבות

ראינו שבמרחבי מכפלה פנימית יש מושג של אורך—נורמה. על מרחב נורמי יש גם מושג של מרחק.

**הגדרה 6.4.1 (מטריקה).** תהי $X$ קבוצה. מטריקה על $X$ היא פונקציה $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימת את התכונות הבאות.

**חיוביות:** $d(x,y) \geq 0$ וגם $d(x,y) = 0$ אם ורק אם $x = y$.

**סימטריה:** $d(x,y) = d(y,x)$.

**אי־שוויון המשולש:** $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

קבוצה עם מטריקה נקראת מרחב מטרי.

**הגדרה 6.4.2 (מטריקה המושרית מנורמה).** יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. המטריקה המושרית על $V$ היא $d(x,y) = \|x-y\|$.

כעת, את המרחק בין שני שני וקטורים קל בדרך כלל לחשב כאשר יש לנו נורמה נתונה. מעט מסובך יותר לחשב את המרחב מוקטור לקבוצה.

**הגדרה 6.4.3 (מרחק מקבוצה).** יהי $(X,d)$ מרחב מטרי, יהי $x \in X$ ותהי $S \subseteq X$. נגדיר את המרחק של $x$ מ־$S$ להיות

$$d(x,S) \coloneqq \inf\{d(x,s) \mid s \in S\}.$$

תת־קבוצות של מרחב וקטורי שמעניינות אותנו הן בדרך כלל תת־מרחבים. במקרה האוקלידי, אנו יודעות כיצד לחשב את המרחק מתת־מרחב. כדי לחשב את $d(x,W)$ עבור $W \le \mathbb{R}^n$, נעביר אנך מ־$x$ ל־$W$ ונחשב את המרחק בין $x$ ונקודת החיתוך בין $W$ לאנך.
כדי לעשות דבר דומה במרחבי מכפלה פנימית כלליים, נצטרך לדבר קודם כל על ניצבות.

**הגדרה 6.4.4 (זווית במרחב מכפלה פנימית).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u,v \in V$. נגדיר את הזווית בין $u,v$ בתור

$$\angle(u,v) = \arccos\left(\frac{\Re(\langle u,v\rangle)}{\|u\|\,\|v\|}\right).$$

**הגדרה 6.4.5 (וקטורים ניצבים).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית. וקטורים $u,v \in V$ נקראים ניצבים אם $\langle u,v\rangle = 0$. במקרה זה נסמן $u \perp v$.

**הערה 6.4.6.** מעל $\mathbb{R}$, וקטורים ניצבים בדיוק כאשר הזווית בינם היא $\frac{\pi}{2}$.

**הגדרה 6.4.7.** קבוצה $S \subseteq V$ במרחב מכפלה פנימית נקראת אורתוגונלית אם $s_1 \perp s_2$ לכל $s_1, s_2 \in S$ שונים.

**משפט 6.4.8 (פיתגורס).** תהי $(v_1, \ldots, v_n)$ סדרה של וקטורים אורתוגונליים במרחב מכפלה פנימית $V$. אז

$$\|v_1 + \ldots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2 .$$

**תרגיל 6.5.** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית.

1. הוכיחו כי אם $\langle v,w\rangle = 0$ לכל $w \in V$ אז $v = 0$.
2. הוכיחו כי אם $\langle v,w\rangle = \langle u,w\rangle$ לכל $w \in V$ אז $v = u$.
3. הוכיחו כי אם $T,S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ו־$\langle Tu,v\rangle = \langle Su,v\rangle$ לכל $u,v \in V$ אז $T = S$.

**פתרון.**
1. ניקח $w = v$ ונקבל
$$\langle v,v\rangle = 0 .$$
ולכן $v = 0$.
2. נעביר אגף ונקבל
$$\langle v-u,w\rangle = 0$$
לכל $w \in V$. אז מהסעיף הקודם $v - u = 0$ ולכן $v = u$.
3. נעביר אגף ונקבל
$$\langle (T-S)(u), v\rangle = 0 .$$
לכל $u,v \in V$. אז עבור כל $u \in V$ מתקיים $(T-S)(u) = 0$, ולכן $T(u) = S(u)$.

## 6.5 בסיסים אורתונורמליים והמרחב הניצב

בעת, כדי לדבר על המרחק של וקטור $v \in V$ מתת־מרחב $W \leq V$, נרצה לכתוב את $v$ בתור סכום של שני וקטורים, כאשר אחד מהם מ־$W$ והשני ניצב ל־$W$. ראינו כי $V = W \oplus W^{\perp}$ עבור $W^{\perp}$ תת־המרחב של הוקטורים הניצבים ל־$W$ ולכן זה אפשרי. ככה, ושהמרחק יצא, כמו במקרה האוקלידי, האורך של החלק הניצב ל־$W$.

**הגדרה 6.5.1 (מרחב ניצב).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית, ותהי $S \subseteq V$. המרחב הניצב ל־$S$ הוא

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \forall s \in S \colon v \perp s\}.$$

**טענה 6.5.2.** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. מתקיים $V = W \oplus W^{\perp}$.

**תרגיל 6.6.** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית ותהיינה $S, T \subseteq V$.

1. נניח כי $S \subseteq T$. הראו כי $T^{\perp} \subseteq S^{\perp}$.
   התאמה בזאת, כמו $S \mapsto S^{\perp}$, שהופכת יחס הכלה, נקראת התאמת גלואה.
2. נסמן $W = \operatorname{Span}(S)$. הראו כי $S^{\perp} = W^{\perp}$.
3. הראו כי $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{Span}(S)$.

**פתרון.** 1. יהי $v \in T^{\perp}$ ויהי $s \in S$. אז $s \in T$ כי $S \subseteq T$, ולכן $v \perp s$, כי $v$ ניצב לכל וקטור ב־$T$. לכן $v \in S^{\perp}$.

2. מתקיים $S \subseteq W$ ולכן $W^{\perp} \subseteq S^{\perp}$. יהי $v \in S^{\perp}$ ויהי $w \in W$. כיוון ש־$W = \operatorname{Span}(S)$, יש איברים $s_1, \ldots, s_k$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ עבורם $w = \sum_{i \in [k]} \alpha_i s_i$. אז

$$\langle v, w \rangle = \left\langle v, \sum_{i \in [k]} \alpha_i s_i \right\rangle = \sum_{i \in [k]} \alpha_i \cancelto{0}{\langle v, s_i \rangle} = 0$$

ולכן $v \in W^{\perp}$.

3. ראינו כי $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$ עבור $W \leq V$. ניקח $W = \operatorname{Span}(S)$. מתקיים $S \subseteq W$ ולכן $W^{\perp} \subseteq S^{\perp}$ ואז $W = \left(W^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. כמו כן, $S^{\perp} = W^{\perp}$ תת־מרחב וקטורי ומכיוון ש־$V = S^{\perp} \oplus \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$, נקבל כי

$$\dim\left(\left(S^{\perp}\right)^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim\left(S^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim\left(W^{\perp}\right) = \dim(W)$$

ולכן יש שוויון $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = W = \operatorname{Span}(S)$.

**הערה 6.5.3.** לא יכולנו בתרגיל האחרון להניח כי $S$ אינסופית. באופן כללי,

$$\operatorname{Span}(S) = \left\{ \sum_{i \in [k]} \alpha_i s_i \,\middle|\, \substack{\alpha_i \in \mathbb{F} \\ s_i \in S} \right\}$$

גם כאשר $S$ אינסופית.

**תרגיל 6.7.** מצאו את $W^{\perp}$ עבור

$$W \coloneqq \operatorname{Span}(e_1 + e_2) \leq \mathbb{R}^2.$$

**פתרון.** ראינו כי מתקיים $v \in \operatorname{Span}(e_1 + e_2)^{\perp}$ אם ורק אם $v \perp e_1 + e_2$. זה מתקיים אם ורק אם $v_1 + v_2 = 0$ אם ורק אם $v_2 = -v_1$. לכן

$$W^{\perp} = \operatorname{Span}(e_1 - e_2).$$

**הגדרה 6.5.4 (בסיס אורתונורמלי).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית. בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ של $V$ נקרא אורתוגונלי אם $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ לכל $i \neq j$, ואורתונורמלי אם $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} \coloneqq \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$.

**הגדרה 6.5.5 (הטלה אורתוגונלית).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. ההטלה האורתוגונלית על $W$ היא ההטלה על $W$ ביחס לסכום הישר $V = W \oplus W^{\perp}$.

**טענה 6.5.6.** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. יהי $B = (w_1, \ldots, w_m)$ בסיס **אורתונורמלי** של $W$ ויהי $v \in V$. תהי $P_W$ ההטלה האורתוגונלית על $W$. אז

$$P_W (w) = \sum_{i \in [m]} \langle v, w_i \rangle w_i .$$

**תרגיל 6.8.** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, v \in V$. הראו כי $u \perp v$ אם ורק אם

$$\|u\| \leq \|u + av\|$$

לכל $a \in \mathbb{F}$.

**פתרון.** אם $u \perp v$ ו־$a \in \mathbb{F}$, נקבל מפיתגורס

$$\|u + av\|^2 = \|u\|^2 + |a|^2 \|v\|^2 \geq \|u\|^2$$

ולכן $\|u\| \leq \|u + av\|$.
נניח כי $\langle u, v \rangle \neq 0$ ונניח תחילה כי $\|v\| = 1$. אז

$$\langle \langle u, v \rangle v, v \rangle = \langle u, v \rangle \langle v, v \rangle = \langle u, v \rangle \|v\|^2 = \langle u, v \rangle \neq 0$$

וגם

$$\langle u - \langle u, v \rangle v, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle \langle u, v \rangle v, v \rangle = 0 .$$

אז, ממשפט פיתגורס

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|u - \langle u, v \rangle v + \langle u, v \rangle v\|^2 \\ &= \|u - \langle u, v \rangle v\|^2 + \|\langle u, v \rangle v\|^2 \\ &> \|u - \langle u, v \rangle v\|^2 \end{aligned}$$

כאשר האי־שוויון חזק כי $\langle u, v \rangle v \neq 0$ מההנחה $\langle u, v \rangle \neq 0$. לכן, עבור $a = \langle u, v \rangle$ לא מתקיים $\|u\| \leq \|u + av\|$.
בעת, אם $v$ כללי, הוקטור $\frac{v}{\|v\|}$ הינו מאורך $1$ ולכן יש $a' \in \mathbb{F}$ עבורו $\left\| u + a' \frac{v}{\|v\|} \right\| < \|u\|$. אז ניקח $a = \frac{a'}{\|v\|}$ ונקבל כי $\|u + av\| < \|u\|$.

כדי למצוא בסיסים אורתונורמליים ומשלימים ישרים, ניעזר בתהליך שלוקח בסיס כלשהו ומחזיר בסיס אורתונורמלי.

**משפט 6.5.7 (גרם־שמידט).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית ויהי $B = (u_1, \ldots, u_n)$ בסיס של $V$. קיים בסיס אורתונורמלי $C = (v_1, \ldots, v_n)$ של $V$ עבורו

$$\mathrm{Span} (u_1, \ldots, u_i) = \mathrm{Span} (v_1, \ldots, v_i)$$

לכל $i \in [n]$.

ניסוח זה של המשפט לא מתאר לנו איך למצוא את $C$, אבל ההוכחה שלו קונסטרוקטיבית ומתארת את האלגוריתם הבא.

1. עבור $i = 1$ ניקח $v_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$.
2. עבור כל $i$ לאחר מכן, לפי הסדר, ניקח

$$w_i = u_i - \sum_{j \in [i-1]} \langle u_i, v_j \rangle$$

ואז $v_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$.

**מסקנה 6.5.8.** יהי $W \leq V$ תת־מרחב במרחב מכפלה פנימית. כדי למצוא אורתונורמלי של $W$ ושל $W^\perp$ ניקח בסיס $B_W$ של $W$ ונשלים אותו לבסיס $B = B_W \cup B'_W$ של $V$. נבצע את תהליך גרם־שמידט על $B$ ונקבל בסיס $C = C_W \cup C_W^\perp$ כך ש־$W = \mathrm{Span} (B_W) = \mathrm{Span} (C_W)$. כל הוקטורים ב־$C_W^\perp$ ניצבים ל־$W$ כי $C$ אורתונורמלי, ולכן $W' := \mathrm{Span} \left( C_W^\perp \right) \subseteq W^\perp$. כמו כן,

$$\dim (W') = \dim (V) - \dim (W) = \dim \left( W^\perp \right)$$

כי $V = W \oplus W' = W \oplus W^\perp$, ולכן יש שוויון $W' = W^\perp$.

**משפט 6.5.9 (מרחק של וקטור מתת־מרחב).** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית, יהי $W \leq V$, תהי $P_W$ ההטלה האורתוגונלית על $W$ ויהי $v \in V$. מתקיים

$$d\left(v, W\right) = d\left(v, p_W\left(v\right)\right).$$

**תרגיל 6.9.** יהי $V = \mathrm{Mat}_2\left(\mathbb{R}\right)$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית

$$\left\langle A, B\right\rangle = \mathrm{tr}\left(B^t A\right)$$

ויהי $W \leq V$ התת־מרחב של המטריצות הסימטריות.

1. מיצאו בסיס אורתונורמלי עבור $W$ ועבור $W^{\perp}$.
2. הראו כי $P_W\left(A\right) = \frac{A+A^t}{2}$ בשתי דרכים שונות.
3. חשבו את המרחק של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ מ־$W$.

**פתרון.** 1. ניקח בסיס $B_W = \left(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2}\right)$ של $W$ ונשלים אותו לבסיס

$$B = \left(u_1, u_2, u_3, u_4\right) = \left(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2}, E_{1,2}\right)$$

של $V$. נבצע את תהליך גרם־שמידט כדי לקבל בסיס אורתונורמלי $\left(v_1, v_2, v_3, v_4\right)$ עבורו $W = \mathrm{Span}\left(v_1, v_2, v_3\right)$ וגם $W^{\perp} = \mathrm{Span}\left(v_4\right)$.

נחשב

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\left\|E_{1,1}\right\|} E_{1,1} = E_{1,1} \\
w_2 &= u_2 - \left\langle u_2, v_1\right\rangle v_1 = E_{1,2} + E_{2,1} - 0 = E_{1,2} + E_{2,1} \\
v_2 &= \frac{1}{\left\|w_2\right\|} w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2} + E_{2,1}\right) \\
w_3 &= u_3 - \left\langle u_3, v_2\right\rangle v_2 - \left\langle u_3, v_1\right\rangle v_1 = u_3 = E_{2,2} \\
v_3 &= \frac{1}{\left\|w_3\right\|} w_3 = E_{2,2} \\
w_4 &= u_4 - \left\langle u_4, v_3\right\rangle v_3 - \left\langle u_4, v_2\right\rangle v_2 - \left\langle u_4, v_1\right\rangle v_1 \\
&= E_{1,2} - \left\langle E_{1,2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2} + E_{2,1}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2} + E_{2,1}\right)\right) \\
&= E_{1,2} - \frac{1}{2}\left(E_{1,2} + E_{2,1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(E_{1,2} - E_{2,1}\right) \\
v_4 &= \frac{w_4}{\left\|w_4\right\|} = \frac{1}{\left\|E_{1,2} - E_{2,1}\right\|}\left(E_{1,2} - E_{2,1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2} - E_{2,1}\right)
\end{aligned}$$

ונקבל כי

$$\left(v_1, v_2, v_3\right) = \left(E_{1,1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2} + E_{2,1}\right), E_{2,2}\right)$$

בסיס אורתונורמלי של $W$ וכי $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2} - E_{2,1}\right)$ בסיס אורתונורמלי של $W^{\perp}$. אז, $W^{\perp}$ מרחב המטריצות האנטיסימטריות.

2. בדרך אחת, זכור לנו מאלגברה א' כי

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

כאשר $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ו־$\frac{A-A^t}{2}$ אנטי־סימטרית. אז $\frac{A+A^t}{2} \in W$ וכיוון ש־$W^{\perp}$ מרחב המטריצות האנטיסימטריות, נקבל גם $\frac{A-A^t}{2} \in W^{\perp}$. לכן $P_W\left(A\right) = \frac{A+A^t}{2}$.

אבל, במקרה הכללי, לא נדע מראש איך לכתוב וקטור $v \in V$ בתור סכום של וקטור ב־$W \leq V$ ווקטור ב־$W^{\perp}$. כדי לחשב את ההטלה $P_W\left(A\right)$ נוכל לקחת בסיס אורתונורמלי של $W$ ולהשתמש בנוסחא עבור ההטלה האורתוגונלית לפי בסיס בזה.

אכן,

$$\begin{aligned} P_W(A) &= \sum_{i\in[3]} \langle A, v_i\rangle v_i \\ &= \langle A, E_{1,1}\rangle E_{1,1} + \left\langle A, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1})\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1}) + \langle A, E_{2,2}\rangle, E_{2,2} \\ &= a_{1,1}E_{1,1} + \frac{1}{2}(a_{1,2}+a_{2,1})(E_{1,2}+E_{2,1}) + a_{2,2}E_{2,2} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} \\ \frac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{A+A^t}{2} \end{aligned}.$$

3. נכתוב את $A$ בתור סכום של מטריצה סימטרית ואנטי־סימטרית. ראינו כי

$$A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$$

כאשר $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ו־$\frac{A-A^t}{2}$ אנטי־סימטרית. אז $d_W(A) = \frac{A+A^t}{2}$ ונקבל כי המרחק של $A$ מ־$W$ הוא

$$.d\left(A, \frac{A+A^t}{2}\right) = \left\|A - \frac{A+A^t}{2}\right\|$$

מתקיים

$$\begin{aligned} \left\|A - \frac{A+A^t}{2}\right\| &= \left\|\frac{A-A^t}{2}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ולכן $.d(A,W) = \frac{1}{\sqrt{2}}$