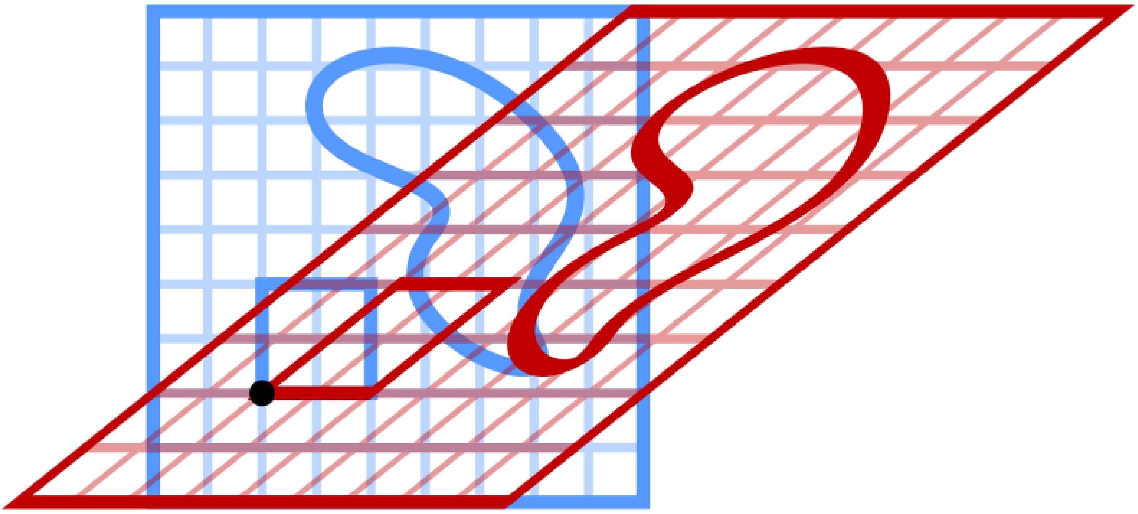

אלגברה ב' (104168)
אביב 2025
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־3 באפריל 2025

תוכן העניינים

סימונים

- $[n]=\{1,\ldots,n\}$.
- $\sum_{i\in[n]}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\ldots+a_n$
- $\mathrm{Mat}_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ הוא מרחב המטריצות עם m שורות ו־n עמודות, עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$.
- $\mathbb{F}^n=\mathrm{Mat}_{n\times 1}\left(\mathbb{F}\right)$
- $\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)=\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$ הוא מרחב ההעתקות הלינאריות $V\to W$ כאשר V,W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.
- $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,V\right)$

חלק I

חלק ראשון – מרחבים שמורים

פרק 1

חזרה על מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ויהי $v \in V$. וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B הוא הוקטור $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \coloneqq \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\begin{aligned} \rho_B \colon V &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \ldots, v_n).$$

נסמן גם $n \coloneqq \dim(V)$ ו־$m \coloneqq \dim(W)$. עבור $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}).$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E = (e_1, \ldots, e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אז:

(i) לכל $i \in [m]$ מתקיים כי Ae_i העמודה ה־i של A.

(ii) לכל $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_\ell \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{n \times \ell}(\mathbb{F})$ מתקיים $AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell \\ | & & | \end{pmatrix}$.

תרגיל 1.1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\begin{aligned} \eta_C^B \colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) &\to \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}) \\ T &\mapsto [T]_C^B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$ ויהיו $B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ בסיס של V ו־C בסיס של W. אז

$$[T]_C^B\left[v\right]_B=\left[T\left(v\right)\right]_C$$

לכל $v\in V$.

סימון 1.1.7. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי V ואם $T\in\operatorname{End}\left(V\right)$, נסמן $[T]_B\coloneqq[T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B.

סימון 1.1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים B,C. נסמן $M_C^B\coloneqq\left[\operatorname{Id}_V\right]_C^B$.

סימון 1.1.9. אם $A\in\operatorname{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, נסמן

$$\begin{aligned}T_A\colon\mathbb{F}^n&\to\mathbb{F}^n\\ v&\mapsto Av\end{aligned}.$$

1.2 תרגילים

תרגיל 1.2. יהי $V=\mathbb{R}_3\left[x\right]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned}T\colon\mathbb{R}_3\left[x\right]&\to\mathbb{R}_3\left[x\right]\\ p\left(x\right)&\mapsto p\left(x+1\right)\end{aligned}$$

ויהי $B=\left(1,x,x^2,x^3\right)$ בסיס של V. כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $\left[T\left(x^i\right)\right]_B$ עבור $i\in\{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned}T\left(1\right)&=1\\ T\left(x\right)&=x+1=1+x\\ T\left(x^2\right)&=\left(x+1\right)^2=1+2x+x^2\\ T\left(x^3\right)&=\left(x+1\right)^3=1+3x+3x^2+x^3\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left[T\left(1\right)\right]_B&=e_1\\ \left[T\left(x\right)\right]_B&=e_1+e_2\\ \left[T\left(x^2\right)\right]_B&=e_1+2e_2+e_3\\ \left[T\left(x^3\right)\right]_B&=e_1+3e_2+3e_3+e_4\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

תרגיל 1.3. יהי $V=\operatorname{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{C}\right)$, תהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ A&\mapsto\frac{1}{2}\left(A-A^t\right)\end{aligned}$$

ויהי

$$E=\left(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}\right)\coloneqq\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V. כיתבו את $[T]_E$.

פתרון. כמו מקודם, נחשב את $[T(E_{i,j})]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$\begin{aligned} T(E_{1,1}) &= \frac{1}{2}(E_{1,1}-E_{1,1}) = 0 \\ T(E_{1,2}) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}E_{1,2}-\frac{1}{2}E_{2,1} \\ T(E_{2,1}) &= \frac{1}{2}(E_{2,1}-E_{1,2}) = \frac{1}{2}E_{2,1}-\frac{1}{2}E_{1,2} \\ T(E_{2,2}) &= \frac{1}{2}(E_{2,2}-E_{2,2}) = 0, \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} [T(E_{1,1})]_E &= 0 \\ [T(E_{1,2})]_E &= \frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_3 \\ [T(E_{2,1})]_E &= -\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3 \\ [T(E_{2,2})]_E &= 0 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_E = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

כנדרש.

תרגיל 1.4. יהי $V=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B=(f_1,f_2)$ כאשר

$$\begin{aligned} f_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= x \\ f_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= y, \end{aligned}$$

ותהי

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

מיצאו $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ עבורו $[T]_B=A$.

פתרון. עבור $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}.$$

לכן נדרוש

$$\begin{aligned} [T(f_1)]_B &= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \\ [T(f_2)]_B &= \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

אז

$$T\left(f_1\right)=f_1+2f_2$$
$$.T\left(f_2\right)=3f_1+4f_2$$

לכן, אם $f\in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha x+\beta y=\alpha f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}(T(f))\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=(T(\alpha f_1+\beta f_2))\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\alpha T(f_1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta T(f_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\alpha(f_1+2f_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta(3f_1+4f_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\alpha(x+2y)+\beta(3x+4y)\end{aligned}.$$

תרגיל 1.5. תהיינה $A,B\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים $Av=Bv$. אז $A=B$.

פתרון. מהנתון, מתקיים $(A-B)v=0$ לכל $v\in\mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־i של $A-B$, שהינה $(A-B)e_i$, שווה ל־0. לכן $A-B=0$.

טענה 1.2.1. יהיו U,V,W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B,C,D בהתאמה, ותהיינה

$$S\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$$
$$.T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$$

אז

$$.\left[T\circ S\right]_D^B=\left[T\right]_D^C\left[S\right]_C^B$$

תרגיל 1.6. יהיו V,W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ חד־חד ערכית. יהיו

$$B=(v_1,\ldots,v_n)$$
$$C=(u_1,\ldots,u_n)$$

בסיסים של V ויהיו

$$B'=(T(v_1),\ldots,T(v_n))$$
$$.C'=(T(u_1),\ldots,T(u_n))$$

אז B',C' בסיסים של $\mathrm{Im}(T)=\{T(v)\mid v\in V\}$ וגם $M_C^B=M_{C'}^{B'}$.

פתרון. ביוון ש־T חד־חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T\colon V\xrightarrow{\sim}\mathrm{Im}(T)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן B',C' בסיסים.
בעת, לכל $i\in[n]$ נכתוב

$$v_i=\sum_{j\in[n]}\alpha_{i,j}u_i$$

ואז

$$.M_C^Be_i=[v_i]_C=\begin{pmatrix}\alpha_{i,1}\\\vdots\\\alpha_{i,n}\end{pmatrix}$$

כמו כן,

$$T\left(v_{i}\right)=T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_{i,j}u_{j}\right)=\sum_{i\in[n]}\alpha_{i,j}T\left(u_{j}\right)$$

ולכן גם

$$.M_{C'}^{B'}e_{i}=\left[T\left(v_{i}\right)\right]_{C'}=\begin{pmatrix}\alpha_{i,1}\\ \vdots\\ \alpha_{i,n}\end{pmatrix}$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

תרגיל 1.7. תהי $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^{n}$. מיצאו בסיס B של $\mathbb{F}^{n}$ עבורו $A=M_{E}^{B}$.
2. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^{n}$ עבורו $A=M_{C}^{E}$.
3. (לא הספקנו בתרגול) יהי B בסיס של $\mathbb{F}^{n}$. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^{n}$ עבורו $A=M_{C}^{B}$.
4. (לא הספקנו בתרגול) יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_{+}$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ איזומורפיזם ויהי $B=\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$ בסיס של V. מיצאו בסיס C של V עבורו $\left[T\right]_{C}^{B}=A$.

פתרון.

1. אם $B=\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$, מתקיים מההגדרה כי

$$.M_{E}^{B}=\begin{pmatrix}| & & |\\ \left[v_{1}\right]_{E} & \cdots & \left[v_{n}\right]_{E}\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ v_{1} & \cdots & v_{n}\\ | & & |\end{pmatrix}$$

לכן ניקח את $\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$ להיות עמודות A, לפי הסדר.

2. לכל $v\in\mathbb{F}^{n}$ מתקיים

$$M_{E}^{C}M_{C}^{E}v=M_{E}^{C}\left[v\right]_{C}=\left[v\right]_{E}=v$$

ולכן $M_{C}^{E}=\left(M_{E}^{C}\right)^{-1}$. אם ניקח $C=\left(u_{1},\ldots,u_{n}\right)$ כאשר u_{i} העמודה ה־i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_{E}^{C}=A^{-1}$ ולכן $M_{C}^{E}=\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$. כלומר ניקח, $u_{i}=A^{-1}e_{i}$.

3. מתקיים $M_{C}^{B}=M_{C}^{E}M_{E}^{B}$ לכן נרצה שיתקיים $M_{C}^{E}M_{E}^{B}=A$ או במילים אחרות $M_{C}^{E}=A\left(M_{E}^{B}\right)^{-1}=AM_{B}^{E}$. מהסעיף הקודם, נרצה $C=\left(u_{1},\ldots,u_{n}\right)$ כאשר u_{i} העמודה ה־i של $\left(AM_{B}^{E}\right)^{-1}=M_{E}^{B}A^{-1}$, כלומר

$$.u_{i}=M_{E}^{B}A^{-1}e_{i}$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $\left[T\right]_{C'}^{B}=M_{C'}^{B}\left[T\right]_{B}^{B}$ לכן נרצה $M_{C}^{B}\left[T\right]_{B}^{B}=A$. כיוון ש־$T$ איזומורפיזם, המטריצה $\left[T\right]_{B}^{B}$ הפיכה, ולכן נרצה $M_{C}^{B}=A\left(\left[T\right]_{B}^{B}\right)^{-1}$. כעת, אם $C=\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$ נקבל לפי **??** עבור האיזומורפיזם ρ_{B} כי $M_{C}^{B}=M_{\hat{C}}^{E}$ כאשר $\hat{C}=\left(\left[v_{1}\right]_{B},\ldots,\left[v_{n}\right]_{B}\right)$. לכן נחפש $\hat{C}$ עבורו $M_{\hat{C}}^{E}=A\left[T\right]_{B}^{-1}$. לפי הסעיף השני, נרצה $\hat{C}=\left(u_{1},\ldots,u_{n}\right)$ עבור

$$.u_{i}=\left(A\left[T\right]_{B}^{-1}\right)^{-1}e_{i}=\left[T\right]_{B}A^{-1}e_{i}$$

לכן

$$.v_{i}=\rho_{B}^{-1}\left(\left[T\right]_{B}A^{-1}e_{i}\right)$$

תרגיל 1.8 (לא הספקנו בתרגול). יהי $V=\mathbb{C}_{3}\left[x\right]$, תהי

$$\begin{aligned}T\colon V & \to V\\ p\left(x\right) & \mapsto p\left(x+1\right)\end{aligned},$$

יהי $E=\left(1,x,x^2,x^3\right)$, הבסיס הסטנדרטי ותהי $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו $A=[T]_C^E$.

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C}=(u_1,\dots,u_4)$ כאשר $u_i=[T]_E\,A^{-1}e_i$. חישבנו ב־1.2 כי

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2=I$ כלומר $A^{-1}=A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned}Ae_1&=e_2\\Ae_2&=e_1\\Ae_3&=e_4\\Ae_4&=e_3\end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1=[T]_E\,A^{-1}e_1=[T]_E\,e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_2=[T]_E\,A^{-1}e_2=[T]_E\,e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_3=[T]_E\,A^{-1}e_3=[T]_E\,e_4=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$u_4=[T]_E\,A^{-1}e_4=[T]_E\,e_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},$$

כלומר

$$\hat{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right),$$

ולבסוף

$$C=(v_1,v_2,v_3,v_4)\coloneqq\left(1+x,1,1+3x+3x^2+x^3,1+2x+x^2\right).$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן A. מתקיים

$$\begin{aligned}T\left(1\right)&=1=v_2\\T\left(x\right)&=x+1=v_1\\T\left(x^2\right)&=\left(x+1\right)^2=1+2x+x^2=v_4\\T\left(x^3\right)&=\left(x+1\right)^3=1+3x+3x^2+x^3=v_3\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}[T]_C^E&=\begin{pmatrix}| & | & | & |\\ \left[T\left(1\right)\right]_C & \left[T\left(x\right)\right]_C & \left[T\left(x^2\right)\right]_C & \left[T\left(x^3\right)\right]_C\\ | & | & | & |\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}| & | & | & |\\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C\\ | & | & | & |\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}| & | & | & |\\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3\\ | & | & | & |\end{pmatrix}\\&=A\end{aligned}$$

כנדרש.

פרק 2

הדטרמיננטה

2.1 הגדרות ותבונות בסיסיות

הגדרה 2.1.1 (דטרמיננטה). תהי $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. נגדיר את הדטרמיננטה $\det(A)$ של A באופן הרקורסיבי הבא.
תהי $A_{(i,j)}$ המטריצה המתקבלת מ־A על ידי הסרת השורה ה־i והעמודה ה־j. המספר $\det \mathrm{pr}\, A_{\mathrm{pr}\, i,j}$ נקרא המינור ה־(i,j) של A והדטרמיננטה של A שווה

$$\det(A) = \sum_{i \in [n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{(i,j)}\right)$$

עבור כל $j \in [n]$ קבוע, ושווה

$$\det(A) = \sum_{j \in [n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{(i,j)}\right)$$

עבור כל $i \in [n]$ קבוע.

משפט 2.1.2. תהיינה $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי C הפיכה. מתקיימות התבונות הבאות.

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
2. $\det\left(C^{-1}\right) = (\det(C))^{-1}$

משפט 2.1.3.
1. החלפת שתי שורות או עמודות במטריצה בופלת את הדטרמיננטה ב־(-1).
2. בפל שורה או עמודה במטריצה בסקלר α בופל את הדטרמיננטה ב־α.
3. הוספת בפולה שורה או עמודה לשורה או עמודה במטריצה אינה משנה את הדטרמיננטה.

2.2 תרגילים

תרגיל 2.1. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{R}\right)$$

.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{R}\right)$$

פתרון. 1. נחשב לפי השורה הראשונה.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \\ &= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \\ &= -3 + 12 - 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. החלפת שורות כופלת את הדטרמיננטה ב־(-1). כיוון שניתן לקבל את המטריצה ממטריצת היחידה על ידי החלפת השורות $1,4$ והשורות $2,3$, נקבל כי הדטרמיננטה שווה לזאת של היחידה. לכן

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 .$$

3. הוספת כפולה של השורות הראשונה והשנייה ב־(-1) לשורה השלישית לא משנה את הדרמיננטה. לכן הדטמיננטה של המטריצה שווה לזאת של היחידה, ולכן

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 .$$

4. הוספת כפולה של השורות הראשונה והשנייה ב־(-1) לשורה השלישית לא משנה את הדרמיננטה. לכן הדטמיננטה של המטריצה שווה לזאת של

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

כיוון שהשורה השלישית היא שורת אפסים, אם נפתח את הדטרמיננטה לפיה נקבל שהדטרמיננטה שווה 0. זה נכון באופן כללי יותר אם השורות תלויות לינארית, כי נוכל לקבל שורת אפסים מצירוף לינארי של השורות.

תרגיל 2.2. תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ העתקה לינארית ויהי B בסיס של V. הראו כי ניתן להגדיר $\det\left(T\right) = \det\left(\left[T\right]_B\right)$. כלומר, הראו שאם C בסיס נוסף של V מתקיים $\det\left(\left[T\right]_B\right) = \det\left(\left[T\right]_C\right)$.

פתרון. מתקיים

$$\left[T\right]_B = \left(M_C^B\right)^{-1} \left[T\right]_C M_C^B$$

ולכן

$$\det\left([T]_B\right)=\det\left(\left(M_C^B\right)^{-1}\right)\det\left([T]_C\right)\det\left(M_C^B\right).$$

כיוון ש-$\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}$ לכל מטריצה A, מתקיים $\det\left(\left(M_C^B\right)^{-1}\right)=\frac{1}{\det\left(M_C^B\right)}$. לכן, נקבל בסה"כ כי

$$\det\left([T]_B\right)=\det\left([T]_C\right),$$

כנדרש.