אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 1
מטריצות מייצגות ודטרמיננטה

תאריך הגשה: 14.04.2025

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T\colon V \to V$ לינארית המקיימת $T^2 = -5\,\mathrm{Id}_V$.

1. הוכיחו כי לכל $v \in V \setminus \{0\}$ הקבוצה $\{v, Tv\}$ בלתי־תלויה לינארית.
2. נתון גם כי $\dim V = 2$. הוכיחו כי קיים בסיס בו T מיוצגת על ידי $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

תרגיל 2. יהי $B = (v_i)_{i\in[n]}$ בסיס למרחב וקטורי V. נתונה $T\colon V \to V$ הפיכה המקיימת

$$T\left(v_1 + 2v_2\right) = \sum_{i\in[n]} v_i.$$

מצאו את סכום איברי $\left[T^{-1}\right]_B$.

תרגיל 3. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות המרוכבות הבאות.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -5 & 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & 5 & 15 & -9 \\ -6 & 0 & 5 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4. יהי $p=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינום מתוקן (כלומר, $a_n=1$). ותהי

$$C\left(p\right)\coloneqq\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right).$$

הראו כי

$$\det\left(xI-C\left(p\right)\right)=p\left(x\right).$$

תרגיל 5. תהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית ויהיו B בסיס של V. ראינו בתרגול שאפשר להגדיר

$$\det T\coloneqq\det\left(\left[T\right]_B\right)$$

ושההגדרה אינה תלויה בבחירת הבסיס.
יהי $V=\mathrm{Mat}_2\left(\mathbb{C}\right)$ ותהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ A&\mapsto\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}.$$

חשבו את $\det\left(T\right)$.

תרגיל 6. תהי $A\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{R}\right)$ בלי ערכים עצמיים ממשיים. הראו כי $\det\left(A\right)>0$.