

אלגברה ב' - תרגיל על צורת ז'ורדן

לא להגשה

תרגיל 1. בתרגיל זה נראה כיצד צורת ז'ורדן עוזרת בחישוב בעיות המצריכות חזקות של מטריצות.

1. תהייה $A, B, P \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ כאשר P הפיכה וגם $A = P^{-1}BP$. הראו כי $A^r = P^{-1}B^rP$ לכל $r \in \mathbb{N}$.

2. בשמורת הטבע ליד הטכניון סין יש היום 2 דרקונים, 600 פנדות ו-20000 מבוקים.

כל שנה הדרקונים, הפנדות והמבוקים מתרבים ומספרם גדל פי 2.

לאחר מכן, כל פנדה אוכלת במבוק אחד וכל דרקון אוכל שתי פנדות.

אז, רשות הטבע והגנים הסינית משחררת לטבע 4 דרקונים ו-10 פנדות, אם עדיין יש פנדות בשמורה.

לבסוף, אם לא נשאר במבוק בסוף השנה, כל הפנדות מתות.

(א) מיצאו מטריצה $A \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$ וערכים d, p, b עבורם מספרי הדרקונים, הפנדות והמבוקים בסוף השנה ה- t

$$\text{הם מקדמים בוקטור } A^t \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ p \\ b \end{pmatrix} \text{ לכל } t \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(ב) נשיא הטכניון מתכנן לבקר בסין עוד 30 שנה. האם יהיו פנדות בשמורה בזמן הביקור שלו?

(ג) הטכניון החליט להעביר את הלימודים מסין למאדים עוד 230 שנה. האם ישארו עד אז פנדות בשמורת הטבע?