# אלגברה ב' - טענה בנוגע לדרך מציאת בסיס ז'ורדן

**טענה.** יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור נילפוטנטי על מרחב סוף־מימדי $V$, כך שמתקיים $r_a(0)=\dim_{\mathbb{F}}(V)$. יהיו $v_1,\dots,v_k\in V$ וגם $\ell_1,\dots,\ell_k\in\mathbb{N}_+$ עבורם $v_i\in\ker\left(T^{\ell_i}\right)\setminus\ker\operatorname{pr}T^{\ell_i-1}$. נסמן

$$B:=\left(T^{\ell_1-1}(v_1),T^{\ell_1-2}(v_1),\dots,T(v_1),v_1,\dots,T^{\ell_k-1}(v_k),T^{\ell_k-2}(v_k),\dots,T(v_k),v_k\right)$$

ויהיו $v\notin\operatorname{Span}(B)$ ו־$\ell\leq\min\{\ell_1,\dots,\ell_k\}$ שלם עבורם $T^{\ell}(v)=0$ וגם $T^{\ell-1}(v)\neq 0$. נסמן $C=\left(T^{k-1}(v),T^{k-2}(v),\dots,T(v),v\right)$. אז $B\uplus C$ קבוצה סדורה בלתי־תלויה לינארית.

כדי להוכיח את הטענה, ראשית נזכיר\נוכיח למה עבור משלימים ישרים.

**למה 0.1.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $U\leq V$ תת־מרחב עם בסיס $B$. יהי $C$ בסיס של $V$. אז:

1. ניתן להשלים את $B$ לבסיס של $V$ על ידי הוספת וקטורים מ־$C$.
2. קיים משלים ישר $W$ של $U$ עם בסיס של וקטורים מ־$C$.

הוכחה. 1. נסמן $n:=\dim_{\mathbb{F}}(V)$ ונוכיח את הטענה באינדוקציה על $m=n-|B|$.

עבור $m=0$ מתקיים $|B|=n$ ולכן $U=V$. נניח שהטענה נכונה לכל $k<m$ ונוכיח אותה עבור $m$.

אם $C\subseteq U$, מתקיים

$$V=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(C)\subseteq\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(U)=U$$

ולכן $V=U$ בסתירה לכך שהמימדים שונים. לכן, קיים $c\in C\setminus U$. אז $B\cup(c)$ קבוצה בלתי־תלויה לינארית, כי $c$ אינו צירוף לינארי של הוקטורים הקודמים. נגדיר $U'=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(B\cup(c))$. אז

$$n-\dim(U')=n-|B|-1=m-1<m$$

ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה ולקבל שניתן להשלים את $B\cup(c)$ לבסיס $(B\cup(c))\cup(c_2,\dots,c_m)$ של $V$, כאשר $c_i\in C$. אז $c,c_2,\dots,c_m\in C$ משלימים את $B$ לבסיס של $V$.

2. בסימונים של הסעיף הקודם, $B\cup(c,\dots,c_m)$ בסיס של $V$. נסמן $D=(c,c_2,\dots,c_m)$ וגם $W=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(D)$. אז $B\cup D$ בסיס של $V$ ולכן

$$V=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(B)\oplus\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(D)=U\oplus W,$$

כנדרש. ■

מכך נסיק את הלמה הבאה.

**למה 0.2.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $V_1,V_2\leq V$ תת־מרחבים עבורם $V=V_1+V_2$. קיים $\tilde{V}_2\leq V$ עבורו $V=V_1\oplus\tilde{V}_2$.

הוכחה. יהי $B$ בסיס ל־$V_1$ ויהי $\hat{C}$ בסיס ל־$V_2$. נשלים את $\hat{C}$ לבסיס $C$ של $V$.
לפי למה 0.1 ניתן להשלים את $B$ לבסיס $B\uplus\tilde{C}$ של $V$ כאשר וקטורי $\tilde{C}$ נמצאים ב־$C$. לכן

$$\tilde{V}_2:=\operatorname{Span}\left(\tilde{C}\right)\leq\operatorname{Span}(C)=V_2$$

וכן $V=\operatorname{Span}(B)\oplus\tilde{C}$ כיוון שמטענה מההרצאה מתקיים עבור בסיסים $B_1,B_2$ של תת־מרחבים $W_1,W_2$ בהתאמה כי $B_1\uplus B_2$ בסיס של $V$ אם ורק אם $V=W_1\oplus W_2$. ■

**למה 0.3.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה סופי $\mathbb{F}$, יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$, ויהיו $V_1,V_2\leq V_2$ תת־מרחבים $T$־שמורים של $V$ עבורם $V=V_1+V_2$ וגם $V_2\leq\ker(T)$. אז

$$\dim\ker(T)=\dim\ker\left(T|_{V_1}\right)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2).$$

הוכחה. מלמה 0.2 קיים $\tilde{V}_2 \leq V_2$ עבורו $V = V_1 \oplus \tilde{V}_2$. המרחב $\tilde{V}_2$ הינו $T$־שמור כיוון שהוא מוכל ב־$\ker(T)$. ראינו (בתרגיל בית) כי כאשר $V$ סכום ישר של מרחבים $T$־שמורים, הגרעין $\ker(T)$ הוא הסכום הישר של הצמצומים של $T$ לאותם מרחבים, לכן

$$\ker(T) = \ker\left(T|_{V_1}\right) \oplus \dim\ker\left(T|_{\tilde{V}_2}\right) .$$

אבל $\tilde{V}_2 \leq \ker(T)$ ולכן

$$\dim\ker\left(T|_{\tilde{V}_2}\right) = \dim\left(\tilde{V}_2\right) = \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

כאשר השוויון האחרון מתקיים מאי שוויון המימדים. מכך שהמימד של סכום ישר הוא סכום המימדים, נקבל את הנדרש. ∎

כיוון שעבור שרשרת ז'ורדן $C$ אמור להתאים בלוק, נצפה שהוקטור העצמי $T^{k-1}(v)$ אינו תלוי לינארית בוקטורי $B$, כי הוספת בלוק מצריכה הגדלה של הריבוי הגיאומטרי. זה מוביל אותנו ללמה הבאה.

**למה 0.4.** תחת תנאי הטענה וההנחה שבצורת ז'ורדן של $T|_W, T|_{W_B}$ גדלי הבלוקים מגודל לפחות $k+1$ זהים, מתקיים כי $B \uplus T^{k-1}(v)$ בלתי־תלויה לינארית.

הוכחה. ראשית,

$$\dim(W) \geq \dim\operatorname{Span}(B \uplus (v)) = \dim(B) + 1 ,$$

וביוון שגדלי הבלוקים מגודל לפחות $k+1$ זהים בשתי צורות הז'ורדן נקבל כי בצורת ז'ורדן של $T|_W$ יש לפחות בלוק אחד יותר מאשר בצורת ז'ורדן של $T|_{W_B}$. כלומר כי, $\dim\ker(T|_W) > \dim\ker(W_B)$.
לכן קיים וקטור $w \in W \setminus W_B$ עבורו $T(w) = 0$. נכתוב

$$w = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i T^i(v) + \sum_{u \in B} \beta_u u$$

עבור $\alpha_i, \beta_u \in \mathbb{F}$ וכאשר $\alpha_i$ לא כולם אפס.
אם $\alpha_i = 0$ לכל $i < k-1$ נקבל כי

$$\sum_{u \in B} \beta_u T(u) = 0$$

ולכן $\beta_0 = 0$ לכל $u \in B \setminus \ker(T)$. במקרה זה

$$w = T^{k-1}(v) + \sum_{u \in B \cap \ker(T)} \beta_u u$$

אינו נמצא ב־$W_B$ ולכן $B \uplus T^{k-1}(v)$ בלתי־תלויה לינארית כנדרש.
נניח אם כן שקיים $0 \leq j < k-1$ עבורו $\alpha_j \neq 0$, ונבחר את $j$ המינימלי המקיים זאת.
נפעיל $T^{k-j-1}$ ונקבל כי

$$\alpha_j T^{k-1}(v) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i T^{i+k-j-1}(v) = -\sum_{u \in B} \beta_u T^{k-j-1}(u) .$$

∎

הוכחה (הוכחת הטענה). יהיו

$$\begin{aligned} W_B &\coloneqq \operatorname{Span}(B), \\ W_C &\coloneqq \operatorname{Span}(C), \\ W &\coloneqq W_B \oplus W_C = \operatorname{Span}(B \uplus C) . \end{aligned}$$

נוכיח את הטענה בשלבים הבאים:

1. נראה שגדלי הבלוקים מגודל לפחות $k+1$ זהים בין צורות ז'ורדן של $T|_{W_B}$ ושל $T|_W$.
2. נראה שמספר הבלוקים מגודל $k$ בצורת ז'ורדן של $T|_W$ הוא אחד יותר מזה שבצורת ז'ורדן של $T|_{W_B}$.
3. נסיק כי בצורת ז'ורדן של $T|_W$ אותם גדלי בלוקים כמו בצורת ז'ורדן של $T|_{W_B}$, פרט לכך שיש בלוק נוסף מגודל $k$, ונסיק מכך כי $B \uplus C$ בסיס של $W$ ולכן קבוצה סדורה בלתי־תלויה לינארית.

נוכיח בעת את הטענה לפי השלבים.

1. הוקטורים ב־C כולם נמצאים ב־$\ker\left(T^{k}\right)$ ולכן גם ב־$\ker\left(T^{k+1}\right)$. לכן נצפה שיתקיים

$$\dim\ker\left(T|_{W}^{k+1}\right)-\dim\ker\left(T|_{W}^{k}\right)=\dim\ker\left(T|_{W_B}^{k+1}\right)-\dim\ker\left(T|_{W_B}^{k}\right),$$

כלומר שמספר בלוקי ז'ורדן מגודל לפחות $k+1$ זהה בין צורות ז'ורדן של $T|_{W_B}$ ושל $T|_{W}$. זה אכן מתקיים מלמה 0.3 עבור $T|_{W}^{k}, T|_{W}^{k+1}$, כיוון ששני הנסכמים באגף ימין גדולים מאלו שבאגף שמאל באותו קבוע.

2. נסמן

$$\hat{C}=\left(T^{k-1}\left(v\right),T^{k-2}\left(v\right),\ldots,T\left(v\right)\right)$$

וגם

$$W_{\hat{C}}\coloneqq\operatorname{Span}\left(\hat{C}\right).$$

מלמה 0.3 נקבל כי

$$\begin{aligned}\dim\ker\left(T|_{W}^{k-1}\right)&=\dim\ker\left(T|_{W_B}^{k-1}\right)+k-1-\dim\left(W_B\cap W_{\hat{C}}\right)\\ \dim\ker\left(T|_{W}^{k}\right)&=\dim\ker\left(T|_{W_B}^{k}\right)+k-\dim\left(W_B\cap W_{C}\right)\end{aligned}$$

ומהחסרת המשוואות נקבל כי

$$\begin{aligned}\dim\ker\left(T|_{W}^{k}\right)-\dim\ker\left(T|_{W}^{k-1}\right)&=\dim\ker\left(T|_{W_B}^{k}\right)-\dim\ker\left(T|_{W_B}^{k-1}\right)\\ &\quad+\dim\left(W_B\cap W_{\hat{C}}\right)-\dim\left(W_B\cap W_C\right)\\ &\quad+1\end{aligned}.$$

לכן נותר להראות כי $\dim\left(W_B\cap W_{\hat{C}}\right)=\dim\left(W_B\cap W_C\right)$, כלומר כי $W_B\cap W_{\hat{C}}=W_B\cap W_C$. נניח בדרך השלילה שקיים $u\in W_B\cap W_C\setminus W_B\cap W_{\hat{C}}$. אז ניתן לכתוב

$$\begin{aligned}u&=\sum_{i=0}^{k-1}=\alpha_iT^{i}\left(v\right)\\ u&=\sum_{w\in B}\beta_w w\end{aligned}$$

עבור סקלרים $\alpha_i,\beta_w\in\mathbb{F}$ כאשר $\alpha_0\neq0$. נקבל כי

$$\sum_{i=0}^{k-1}=\alpha_iT^{i}\left(v\right)=\sum_{w\in B}\beta_w w.$$

נפעיל את $T^{k-1}$ על שני האגפים ונקבל כי

$$\alpha_0T^{k-1}\left(v\right)=\sum_{w\in B}\beta_wT^{k-1}\left(w\right)$$

כאשר הוקטורים $T^{k-1}\left(w\right)$ כולם שייכים ל־$B$ מאופן הגדרתו. נחלק ב־$\alpha_0$ ונקבל כי

$$T^{k-1}\left(v\right)=\sum_{w\in B}\frac{\beta_w}{\alpha_0}T^{k-1}\left(w\right).$$

3. הראנו כי גדלי הבלוקים בצורת ז'ורדן של $T|_{W}$ הם בדיוק אלו בצורת ז'ורדן של $T|_{W_B}$ פרט לכך שיש בלוק נוסף מגודל $k$. לכן

$$\dim\left(W\right)=\dim\left(W_B\right)+k=\dim\left(W_B\right)+\dim\left(W_C\right).$$

ממשפט המימדים מתקיים כי

$$\dim\left(W\right)=\dim\left(W_B\right)+\dim\left(W_C\right)-\dim\left(W_B\cap W_C\right)$$

ולכן נקבל כי $\dim\left(W_B\cap W_C\right)=0$ ולכן הסכום $W=W_B+W_C$ הינו סכום ישר. קיבלנו כי $W=\operatorname{Span}\left(B\right)\oplus\operatorname{Span}\left(C\right)$ מה ששקול לכך ש־$B\uplus C$ בסיס של $W$, ובפרט קבוצה סדורה בלתי־תלויה לינארית.

■