אלגברה ב' - טענה בנוגע לדרך מציאת בסיס ז'ורדן

טענה. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי n ומעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור נילפוטנטי עם אינדקס נילפוטנטיות k, ולכל $i\in[k]$ יהי $B_i:=(v_{i,1},\ldots,v_{i,n_i})$ בסיס עבור $\ker(T^i)\setminus\ker(T^{i-1})$. לכל $v\in\ker(T^\ell)\setminus\ker(T^{\ell-1})$ נסמן $C_v=(T^{\ell-1}(v),\ldots,T(v),v)$ ובן $V_{v_{i,j}}=\operatorname{Span}(C_v)$.
אז ניתן לקבל בסיס ז'ורדן עבור T באופן הבא.

1. ניקח $B=\biguplus_{j\in n_k}C_{v_{k,j}}$ וניקח $i=k$.
2. נקטין את i באחת. נבחר תת־קבוצה סדורה מקסימלית $\tilde{B}_i$ של B_i שהינה בלתי־תלויה לינארית בוקטורים ב־B (היא תהיה מגודל $2\dim\ker(T^i)-\dim\ker(T^{i+1})-\dim\ker(T^{i-1})$), ולכל וקטור $v\in\tilde{B}_i$ נשרשר ל־B את C_v. בלומר נעדכן

$$B_{\mathsf{new}}=B_{\mathsf{old}}\uplus C_v.$$

3. אם B באורך n, נסיים. אחרת נחזור לשלב הקודם.

לשם הוכחת הטענה, נוכיח תחילה שתי למות לגבי סכומים ישרים.

למה 0.1. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו $V_1,V_2\le V$ תת־מרחבים עבורם $V=V_1\oplus V_2$. תהי P ההטלה על V_1 במקביל ל־V_2, בלומר ההעתקה המקיימת $P(v_1+v_2)=v_1$ לכל $v_1\in V_1$ ולכל $v_2\in V_2$.
יהי $B=(u_1,\ldots,u_k)$ בסיס של V_2 ותהי $C=(w_1,\ldots,w_\ell)$ קבוצה סדורה של $\ell:=\dim_{\mathbb{F}}(V_1)$ וקטורים. אז $B\uplus C$ בסיס של V אם ורק אם $P(C):=(P(w_1),\ldots,P(w_\ell))$ בסיס של C באשר $P\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ההטלה על V_1 במקביל ל־V_2. בלומר, ההעתקה המקיימת $P(v_1+v_2)=v_1$ לכל $v_1\in V_1,v_2\in V_2$.

הוכחה.
- נניח כי $B\uplus C$ בסיס של V ונראה כי $P(C)$ בסיס של V_1. יהיו $\alpha_i\in\mathbb{F}$ עבורם

$$\sum_{i\in[\ell]}\alpha_iP(w_i)=0.$$

נראה כי $\alpha_i=0$ לכל $i\in[\ell]$.
מתקיים

$$\begin{aligned}\sum_{i\in[\ell]}\alpha_iw_i&=\sum_{i\in[\ell]}\alpha_i(w_i-P(w_i))+\sum_{i\in[\ell]}\alpha_iP(w_i)\\&=\sum_{i\in[\ell]}\alpha_i(w_i-P(w_i))\end{aligned}$$

באשר $w_i-P(w_i)\in V_2$ לכל $i\in[\ell]$. קיבלנו צירוף לינארי של וקטורים ב־C ששווה לוקטור ב־$\operatorname{Span}(B)$, אך $B\uplus C$ הינו בסיס של V ולכן הביטוי הנ"ל שווה אפס. לכן, מכך שהקבוצה C בלתי תלויה לינארית (כי $B\uplus C$ בסיס) נקבל כי $\alpha_i=0$ לכל $i\in[\ell]$, כנדרש.

- נניח כעת כי $P(C)$ הינו בסיס של V_1. בסיס של V.
מתקיים כי $P(C)$ בסיס של V_1 ו־B בסיס של V_2 באשר $V=V_1\oplus V_2$, לכן $B\uplus P(C)$ בסיס של V.
יהיו $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{F}$ עבורם

$$\sum_{i\in[\ell]}\alpha_iw_i+\sum_{j\in[k]}\beta_ju_j=0.$$

נראה כי $\alpha_i=\beta_j=0$ לכל i,j. אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}0&=\sum_{i\in[\ell]}\alpha_iw_i+\sum_{j\in[k]}\beta_ju_j\\&=\sum_{i\in[\ell]}\alpha_iP(w_i)+\sum_{i\in[\ell]}\alpha_i(w_i-P(w_i))+\sum_{j\in[k]}\beta_ju_j\end{aligned}$$

אבל $w_i - P\left(w_i\right) \in V_2$ לכל $i \in [\ell]$ ולכן יש $\gamma_j \in \mathbb{F}$ עבורן

$$\sum_{i \in [\ell]} \alpha_i \left(w_i - P\left(w_i\right)\right) = \sum_{j \in [k]} \gamma_j u_j$$

ונקבל כי

$$0 = \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i P\left(w_i\right) + \sum_{j \in [k]} \left(\beta_j + \gamma_j\right) u_j$$

ולכן כי $\alpha_i = \beta_j + \gamma_j = 0$ לכל i, j. כיוון ש־$\alpha_i = 0$ לכל i, מתקיים כי $\gamma_j = 0$ לכל j מאופן הגדרת γ_j, ולכן נקבל כי גם $\beta_j = 0$, כנדרש. ■

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ מתקיים כי T אופרטור סקלרי נילפוטנטי, ולכן אופרטור האפס. אז $k = 1$ ולכן

$$B = \left(v_{1,1}\right)$$

בסיס של V ובן $V = \operatorname{Span}\left(B\right)$ כי $v_{1,1}$ וקטור השונה מאפס.

צעד האינדוקציה: נניח בעת שהטענה נכונה עבור כל מרחב־וקטורי ממימד קטן מ־n, ונוכיח את הטענה עבור V שהינו ממימד n.

לפי משפט מההרצאה, קיימים תת־מרחבים T־שמורים $V_1, \ldots, V_\ell \leq V$ עבורם $V = \bigoplus_{i \in [\ell]} V_i$ וכך ש־$T|_{V_i}$ הינו אי־פריד לכל $i \in [\ell]$.

מספר האיברים ב־B_k הוא מספר הבלוקים מגודל k בצורת ז'ורדן של T, שזהו מספר הערכים i עבורם $\dim_{\mathbb{F}} V_i = k$, כי עבור בסיסים D_i ל־V_i ועבור $D \coloneqq \biguplus_{i \in [\ell]} D_i$ מתקיים

$$[T]_D = \begin{pmatrix} [T|_{V_1}]_{D_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & [T|_{V_2}]_{D_2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \left[T|_{V_{\ell-1}}\right]_{D_{\ell-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & [T|_{V_\ell}]_{D_\ell} \end{pmatrix}.$$

לכל $d \in [k]$ נסמן

$$N_d \coloneqq \left\{i \in [k] \mid \dim_{\mathbb{F}} V_i = d\right\}.$$

כיוון שלכל $T|_{V_i}$ יש צורת ז'ורדן, וכיוון שאלו אופרטורים אי־פרידים, קיימים וקטורים $u_1, \ldots, u_{n_k}$ כך ש־$C_{u_1}, \ldots, C_{u_{n_k}}$ בסיסי ז'ורדן של המרחבים V_i כך ש־$i \in N_k$. מתקיים $u_j \in \ker\left(T^k\right) \setminus \ker\left(T^{k-1}\right)$ לכל $j \in n_k$ ובן $\left(u_1, \ldots, u_{n_k}\right)$ בלתי־תלויה לינארית כיוון שהסכום $V = \bigoplus_{i \in [\ell]} V_i$ ישר. לכן $\left(u_1, \ldots, u_{n_k}\right)$ בסיס של $\ker\left(T^k\right) \setminus \ker\left(T^{k-1}\right)$. אז

$$\operatorname{Span}\left(B_k\right) = \operatorname{Span}\left(u_1, \ldots, u_{n_k}\right)$$

ולכן

$$\operatorname{Span}\left(\biguplus_{j \in [n_k]} C_{v_{k,j}}\right) = \operatorname{Span}\left(\biguplus_{j \in \ [n_k]} C_{u_j}\right) = \bigoplus_{i \in N_k} V_i.$$

בעת, עבור כל $i < k$ נגדיר

$$\tilde{B}_i \coloneqq P\left(B_i\right)$$

כאשר P ההטלה על $\bigoplus_{i \notin [\ell]} V_i$ במקביל ל־$\bigoplus_{i \in [\ell]} V_i$, וכאשר $P\left(v_1, \ldots, v_m\right) = \left(P\left(v_1\right), \ldots, P\left(v_k\right)\right)$ עבור כל קבוצה סדורה $\left(v_1, \ldots, v_k\right)$. לפי למה 0.1 הקבוצות הסדורות $\tilde{B}_i = P\left(B_i\right)$ הן בסיסים עבור

$$\ker\left(T^i\right) \setminus \ker\left(T^{i-1}\right)$$

בהתאמה. אז לפי הנחת האינדוקציה

$$\biguplus_{i \in [k-1]} \tilde{B}_i = P\left(\biguplus_{i \in [k-1]} B_i\right)$$

בסיס ז'ורדן עבור $T|_{\biguplus_{i\notin N_k} V_i}$, ולכן, לפי למה 0.1,

$$B = \biguplus_{i\in[k]} B_i$$

הינו בסיס V, שמאופן בנייתו הינו בסיס ז'ורדן עבור T. ■