אלגברה ב' - הצעה לפתרון מועד א'

תרגיל 5. יהי W התת־מרחב הלינארי של $\mathbb{R}^4$ אשר נפרש על ידי הוקטורים $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ ו־$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$. מצאו את הוקטור $w\in W$ כך ש־$\left\|w-\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\|$ קטן ככל האפשר, כאשר $\|\cdot\|$ היא הנורמה המושרת מהמכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$.

פתרון. אנו מחפשות את הוקטור ב־W שקרוב ביותר לוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} =: x$. לפי משפט, וקטור זה שווה להטלה האורתוגונלית $P_W(u)$ של u על W. לשם חישוב ההטלה האורתוגונלית, נמצא בסיס אורתונורמלי של W, בעזרת תהליך גרם־שמידט על הבסיס $B := (u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ של W.

ננרמל את הוקטור הראשון בבסיס,

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

נחסר מהוקטור השני את ההטלה שלו על המרחב הנפרש על ידי v_1.

$$\begin{aligned}
w_2 &= u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle \, v_1 \\
&= u_2 - \left\langle u_2, \frac{1}{\sqrt{2} u_1} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (1+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ננרמל את הוקטור שקיבלנו.

$$v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{w_2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

בעת, לפי נוסחה עבור הטלה אורתוגונלית, ההטלה האורתוגונלית על תת־מרחב $U \leq V$ עם בסיס אורתונורמלי $(e_1, \ldots, e_m)$ היא

$$P_U(v) = \sum_{i \in [m]} \langle v, e_i \rangle e_i.$$

אצלנו נקבל כי

$$\begin{aligned}
P_W(x) &= \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{11}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{11}{5} \\ \frac{22}{5} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

וכאמור, זה הוקטור הקרוב ביותר ל־x ב־W, כנדרש.

תרגיל 8. האם קיים פולינום $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ ממעלה לכל היותר 5 כך שלכל פולינום $q(x)\in\mathbb{R}[x]$ ממעלה לכל היותר 5 מתקיים $q'(2)=\int_3^4 q(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t$?

פתרון. כן.
ראינו בביתה כי

$$\langle q,p\rangle\coloneqq\int_3^4 q(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t$$

הינה מכפלה פנימית על $\mathbb{R}_{\geq 5}[x]$. נראה כי

$$\begin{aligned}\varphi\colon\mathbb{R}_{\geq 5}[x]&\to\mathbb{R}\\ q&\mapsto q'(2)\end{aligned}$$

הינו פונקציונל לינארי. לפי משפט ריס, אם ψ פונקציונל לינארי על מרחב מכפלה פנימית V, קיים $w\in V$ עבורו $\varphi(v)=\langle v,w\rangle$ לכל $v\in V$. אצלנו נקבל כי קיים $p\in\mathbb{R}_{\geq 5}[x]$ עבורו

$$q'(2)=\varphi(q)=\langle q,p\rangle=\int_2^3 q(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t,$$

כנדרש.
אכן, φ פונקציונל לינארי, כי עבור $q_1,q_2\in\mathbb{R}_{\geq 5}[x]$ ועבור $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים כי

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha q_1+q_2)&=(\alpha q_1+q_2)'(2)\\&=(\alpha q_1'+q_2')(2)\\&=\alpha q_1'(2)+q_2'(2)\\&=\alpha\varphi(q_1)+\varphi(q_2)\end{aligned}$$

כאשר בשוויון השני השתמשנו בלינאריות הנגזרת ובשוויון השלישי בהגדרת סכום וכפל בסקלר של פונקציות.

תרגיל 9. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$, ותהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ איזומטריה. האם בהכרח קיימת איזומטריה $S \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ כך ש־$S^2 = T$?

פתרון. כן.
ניזכר כי T איזומטריה אם $\|Tv\| = \|v\|$ לכל $v \in V$, וכי ראינו בהרצאה שזה שקול לכך ש־$T^*T = \mathrm{Id}_V$, כלומר לכך ש־T אוניטרית. בפרט נקבל כי T נורמלית, ולכן לפי משפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B של V וקיימות $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ עבורם $[T]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ מטריצה אלכסונית.
ניזכר כי אופרטור נורמלי הינו אוניטרי אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלו על מעגל היחידה. לכן $|\lambda_i| = 1$ לכל $i \in [n]$, ונוכל לכתוב $\lambda_i = \operatorname{cis}(\theta_i)$ כאשר $\operatorname{cis}(\theta) := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ועבור ערכים $\theta_i \in \mathbb{R}$.
נסמן $\mu_i := \operatorname{cis}\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$ לכל $i \in [n]$ ונקבל כי

$$\begin{aligned} \mu_i^2 &= \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\right)^2 \\ &= \operatorname{cis}\left(2 \cdot \frac{\theta_i}{2}\right) \\ &= \operatorname{cis}(\theta_i) \\ &= \lambda_i \end{aligned} .$$

יהי $S \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ האופרטור עבורו $[S]_B = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.
אז S נורמלי לפי משפט הפירוק הספקטרלי כי קיים בסיס אורתונורמלי B המלכסן את S, ו־S אוניטרי כי הוא נורמלי עם ערכים עצמיים על מעגל היחידה, ולפי אותה טענה מהכיתה בה השתמשנו קודם. בנוסף,

$$\begin{aligned} \left[S^2\right]_B &= [S]_B^2 \\ &= \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)^2 \\ &= \operatorname{diag}\left(\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2\right) \\ &= \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ &= [T]_B \end{aligned}$$

ולכן $S^2 = T$, כנדרש.

תרגיל 10. האם קיימות מטריצות $A_1,\dots,A_6\in M_2\left(\mathbb{C}\right)$ כך ש־A_i ו־A_j אינן דומות לכל $1\le i<j\le 6$ וכן הפולינום האופייני של A_i^2 שווה ל־x^2-2x+1 לכל $1\le i\le 6$?

פתרון. לא.
עבור מטריצה ריבועית A, הערכים העצמיים של A^2 הם ריבועי הערכים העצמיים של A. הערכים העצמיים של מטריצה הם שורשי הפולינום האופייני שלה, ולכן אם A^2 עם פולינום אופייני $x^2-2x+1=\left(x-1\right)^2$, הערך העצמי היחיד של A^2 הוא 1 ואז הערכים העצמיים האפשריים של A הם ערכי $\lambda\in\mathbb{C}$ עבורם $\lambda^2=1$, כלומר ± 1.
נניח בשלילה שקיימות $A_1,\dots,A_6$ כמתואר בשאלה, ונקבל כי לכולן ערכים עצמיים בקבוצה $\{1,-1\}$.
אם ל־$A\in M_2\left(\mathbb{C}\right)$ ערכים עצמיים בקבוצה $\{1,-1\}$, צורת ז'ורדן שלה הינה בהכרח אחת מבין 5 המטריצות הבאות.

$$J_2\left(1\right),J_2\left(-1\right),\mathrm{diag}\left(1,1\right),\mathrm{diag}\left(1,-1\right),\mathrm{diag}\left(-1,-1\right)$$

מעקרון שובך היונים נקבל כי קיימים $1\le i<j\le 6$ עבורם ל־A_i,A_j אותה צורת ז'ורדן J. אבל אז

$$A_i\cong J\cong A_j$$

ולכן A_i ו־A_j דומות, בסתירה להנחה.