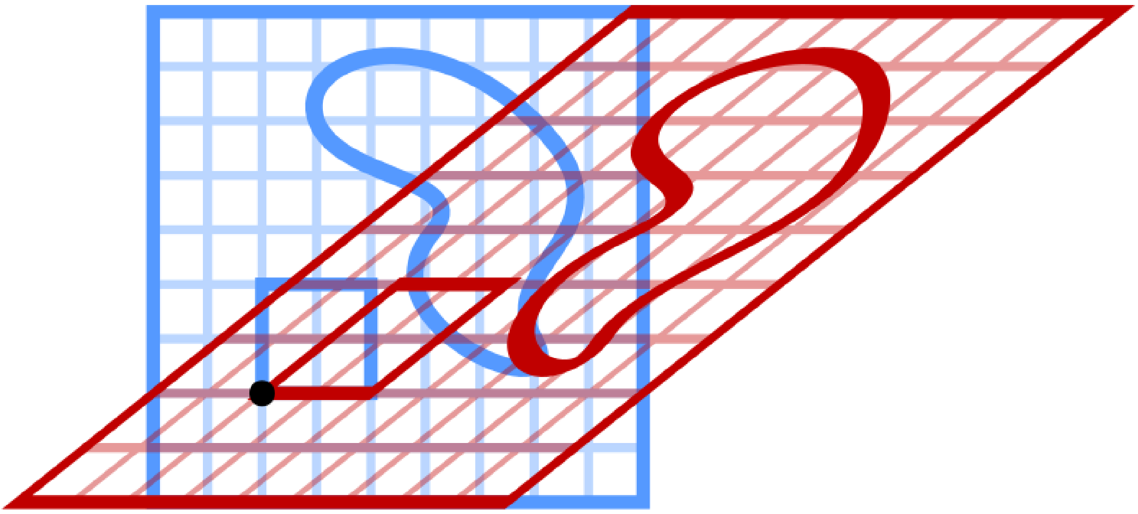

אלגברה ב' (01040168)
אביב 2025
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־9 ביולי 2025

תוכן העניינים

סימונים

- $[n]=\{1,\ldots,n\}$.
- $\sum_{i\in[n]} a_i=\sum_{i=1}^{n} a_i=a_1+a_2+\ldots+a_n$
- $\mathrm{Mat}_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ הוא מרחב המטריצות עם m שורות ו־n עמודות, עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$.
- $\mathbb{F}^n=\mathrm{Mat}_{n\times 1}\left(\mathbb{F}\right)$
- $\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)=\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$ הוא מרחב ההעתקות הלינאריות $V\to W$ כאשר V,W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.
- $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,V\right)$

חלק I

חלק ראשון – מרחבים שמורים

פרק 1

חזרה על מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ויהי $v \in V$. וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B הוא הוקטור $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \coloneqq \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n .$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\begin{aligned} \rho_B \colon V &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \ldots, v_n) .$$

נסמן גם $n \coloneqq \dim(V)$ ו־$m \coloneqq \dim(W)$. עבור $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}) .$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E = (e_1, \ldots, e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אז:

(i) לכל $i \in [m]$ מתקיים כי Ae_i העמודה ה־i של A.

(ii) לכל $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_\ell \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{n \times \ell}(\mathbb{F})$ מתקיים $AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell \\ | & & | \end{pmatrix}$.

תרגיל 1.1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\begin{aligned} \eta_C^B \colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) &\to \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}) \\ T &\mapsto [T]_C^B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ ויהיו $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ו־C בסיס של W. אז

$$[T]_C^B [v]_B = [T(v)]_C$$

לכל $v \in V$.

סימון 1.1.7. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי V ואם $T \in \mathrm{End}(V)$, נסמן $[T]_B := [T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B.

סימון 1.1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים B, C. נסמן $M_C^B := [\mathrm{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.9. אם $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, נסמן

$$\begin{aligned} T_A \colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}.$$

1.2 תרגילים

תרגיל 1.2. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$

ויהי $B = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ בסיס של V. כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $\left[T\left(x^i\right)\right]_B$ עבור $i \in \{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(x) &= x + 1 = 1 + x \\ T\left(x^2\right) &= (x+1)^2 = 1 + 2x + x^2 \\ T\left(x^3\right) &= (x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T(1)]_B &= e_1 \\ [T(x)]_B &= e_1 + e_2 \\ \left[T\left(x^2\right)\right]_B &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\ \left[T\left(x^3\right)\right]_B &= e_1 + 3e_2 + 3e_3 + e_4 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

תרגיל 1.3. יהי $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, תהי

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ A &\mapsto \frac{1}{2}\left(A - A^t\right) \end{aligned}$$

ויהי

$$E = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V. כיתבו את $[T]_E$.

פתרון. כמו מקודם, נחשב את $[T(E_{i,j})]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$\begin{aligned}
T(E_{1,1}) &= \frac{1}{2}(E_{1,1}-E_{1,1}) = 0\\
T(E_{1,2}) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}E_{1,2}-\frac{1}{2}E_{2,1}\\
T(E_{2,1}) &= \frac{1}{2}(E_{2,1}-E_{1,2}) = \frac{1}{2}E_{2,1}-\frac{1}{2}E_{1,2}\\
T(E_{2,2}) &= \frac{1}{2}(E_{2,2}-E_{2,2}) = 0,
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
[T(E_{1,1})]_E &= 0\\
[T(E_{1,2})]_E &= \frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_3\\
[T(E_{2,1})]_E &= -\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3\\
[T(E_{2,2})]_E &= 0
\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_E = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

כנדרש.

תרגיל 1.4. יהי $V=\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B=(f_1,f_2)$ כאשר

$$\begin{aligned}
f_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= x\\
f_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= y,
\end{aligned}$$

ותהי

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

מיצאו $T\in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ עבורו $[T]_B=A$.

פתרון. עבור $T\in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix}|&|\\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B\\ |&|\end{pmatrix}.$$

לכן נדרוש

$$\begin{aligned}
[T(f_1)]_B &= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\
[T(f_2)]_B &= \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

אז

$$T\left(f_1\right)=f_1+2f_2$$
$$.T\left(f_2\right)=3f_1+4f_2$$

לכן, אם $f\in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha x+\beta y=\alpha f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}(T(f))\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\left(T\left(\alpha f_1+\beta f_2\right)\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\alpha T\left(f_1\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta T\left(f_2\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\alpha\left(f_1+2f_2\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta\left(3f_1+4f_2\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\alpha(x+2y)+\beta(3x+4y)\end{aligned}$$
.

תרגיל 1.5. תהיינה $A,B\in\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים $Av=Bv$. אז $A=B$.

פתרון. מהנתון, מתקיים $(A-B)v=0$ לכל $v\in\mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־i של $A-B$, שהינה $(A-B)e_i$, שווה ל־0. לכן $A-B=0$.

טענה 1.2.1. יהיו U,V,W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B,C,D בהתאמה, ותהיינה

$$S\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$$
$$.T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$$

אז

$$.\,[T\circ S]_D^B=[T]_D^C[S]_C^B$$

תרגיל 1.6. יהיו V,W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ חד־חד ערכית. יהיו

$$B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$$
$$C=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$$

בסיסים של V ויהיו

$$B'=\left(T\left(v_1\right),\ldots,T\left(v_n\right)\right)$$
$$.C'=\left(T\left(u_1\right),\ldots,T\left(u_n\right)\right)$$

אז B',C' בסיסים של $\operatorname{Im}(T)=\{T(v)\mid v\in V\}$ וגם $M_C^B=M_{C'}^{B'}$.

פתרון. ביוון ש־T חד־חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T\colon V\xrightarrow{\sim}\operatorname{Im}(T)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן B',C' בסיסים.
כעת, לכל $i\in[n]$ נכתוב

$$v_i=\sum_{j\in[n]}\alpha_{i,j}u_i$$

ואז

$$.M_C^B e_i=\left[v_i\right]_C=\begin{pmatrix}\alpha_{i,1}\\\vdots\\\alpha_{i,n}\end{pmatrix}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned}T\left(v_i\right) &= T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_{i,j}u_j\right)\\ &= \sum_{i\in[n]}\alpha_{i,j}T\left(u_j\right)\end{aligned}$$

ולכן גם

$$.M_{C'}^{B'}e_i = \left[T\left(v_i\right)\right]_{C'} = \begin{pmatrix}\alpha_{i,1}\\ \vdots\\ \alpha_{i,n}\end{pmatrix}$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

תרגיל 1.7. תהי $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס B של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_E^B$.
2. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_C^E$.
3. (לא הספקנו בתרגול) יהי B בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_C^B$.
4. (לא הספקנו בתרגול) יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ איזומורפיזם ויהי $B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ בסיס של V. מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B=A$.

פתרון. 1. אם $B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$, מתקיים מההגדרה כי

$$.M_E^B = \begin{pmatrix}| & & |\\ \left[v_1\right]_E & \cdots & \left[v_n\right]_E\\ | & & |\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \cdots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}$$

לכן ניקח את $\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ להיות עמודות A, לפי הסדר.

2. לכל $v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C\left[v\right]_C = \left[v\right]_E = v$$

ולכן $M_C^E=\left(M_E^C\right)^{-1}$. אם ניקח $C=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ כאשר u_i העמודה ה־i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_E^C=A^{-1}$ ולכן $M_C^E=\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$. כלומר ניקח, $u_i=A^{-1}e_i$.

3. מתקיים $M_C^B=M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $A=M_C^E M_E^B$ או במילים אחרות $M_C^E=A\left(M_E^B\right)^{-1}=AM_B^E$. מהסעיף הקודם, נרצה $C=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ כאשר u_i העמודה ה־i של $\left(AM_B^E\right)^{-1}=M_E^B A^{-1}$, כלומר

$$.u_i=M_E^B A^{-1}e_i$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]_{C'}^B=M_{C'}^B\left[T\right]_B^B$ לכן נרצה $M_C^B\left[T\right]_B^B=A$. כיוון ש־$T$ איזומורפיזם, המטריצה $\left[T\right]_B^B$ הפיכה, ולכן נרצה $M_C^B=A\left(\left[T\right]_B^B\right)^{-1}$. כעת, אם $C=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ נקבל לפי **??** עבור האיזומורפיזם ρ_B כי $M_C^B=M_{\hat{C}}^E$ כאשר $\hat{C}=\left(\left[v_1\right]_B,\ldots,\left[v_n\right]_B\right)$. לכן נחפש $\hat{C}$ עבורו $M_{\hat{C}}^E=A\left[T\right]_B^{-1}$. לפי הסעיף השני, נרצה $\hat{C}=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ עבור

$$.u_i=\left(A\left[T\right]_B^{-1}\right)^{-1}e_i=\left[T\right]_B A^{-1}e_i$$

לכן

$$.v_i=\rho_B^{-1}\left(\left[T\right]_B A^{-1}e_i\right)$$

תרגיל 1.8 (לא הספקנו בתרגול). יהי $V=\mathbb{C}_3\left[x\right]$, תהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ p\left(x\right)&\mapsto p\left(x+1\right)\end{aligned},$$

יהי $E=\left(1,x,x^2,x^3\right)$, הבסיס הסטנדרטי ותהי $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו $A=[T]_C^E$.

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C}=(u_1,\ldots,u_4)$ כאשר $u_i=[T]_E\,A^{-1}e_i$. חישבנו ב־1.2 כי

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2=I$ כלומר $A^{-1}=A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned}Ae_1&=e_2\\Ae_2&=e_1\\Ae_3&=e_4\\Ae_4&=e_3\end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1=[T]_E\,A^{-1}e_1=[T]_E\,e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_2=[T]_E\,A^{-1}e_2=[T]_E\,e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_3=[T]_E\,A^{-1}e_3=[T]_E\,e_4=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$u_4=[T]_E\,A^{-1}e_4=[T]_E\,e_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},$$

כלומר

$$\hat{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right),$$

ולבסוף

$$C=(v_1,v_2,v_3,v_4)\coloneqq\left(1+x,1,1+3x+3x^2+x^3,1+2x+x^2\right).$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן A. מתקיים

$$\begin{aligned} T\left(1\right) &= 1 = v_2 \\ T\left(x\right) &= x+1 = v_1 \\ T\left(x^2\right) &= \left(x+1\right)^2 = 1+2x+x^2 = v_4 \\ T\left(x^3\right) &= \left(x+1\right)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 = v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T]_C^E &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T\left(1\right)]_C & [T\left(x\right)]_C & \left[T\left(x^2\right)\right]_C & \left[T\left(x^3\right)\right]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

כנדרש.

פרק 2

הדטרמיננטה

2.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

הגדרה 2.1.1 (דטרמיננטה). תהי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. נגדיר את הדטרמיננטה $\det(A)$ של A באופן הרקורסיבי הבא.
תהי $A_{(i,j)}$ המטריצה המתקבלת מ־A על ידי הסרת השורה ה־i והעמודה ה־j. המספר $\det\left(A_{(i,j)}\right)$ נקרא המינור ה־(i,j) של A והדטרמיננטה של A שווה

$$\det(A) = \sum_{i\in[n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{(i,j)}\right)$$

עבור כל $j \in [n]$ קבוע, ושווה

$$\det(A) = \sum_{j\in[n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{(i,j)}\right)$$

עבור כל $i \in [n]$ קבוע.

משפט 2.1.2. תהיינה $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי C הפיכה. מתקיימות התכונות הבאות.

1. $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$
2. $\det\left(C^{-1}\right) = (\det(C))^{-1}$

משפט 2.1.3.
1. החלפת שתי שורות או עמודות במטריצה בופלת את הדטרמיננטה ב־(-1).
2. בפל שורה או עמודה במטריצה בסקלר α בופל את הדטרמיננטה ב־α.
3. הוספת בפולה שורה או עמודה לשורה או עמודה במטריצה אינה משנה את הדטרמיננטה.

2.2 תרגילים

תרגיל 2.1. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

.3

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{R}\right)$$

.4

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{R}\right)$$

פתרון. 1. נחשב לפי השורה הראשונה.

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} &= 1\cdot\det\begin{pmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{pmatrix}-2\cdot\det\begin{pmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{pmatrix}+3\cdot\det\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot(5\cdot 9-6\cdot 8)-2\cdot(4\cdot 9-6\cdot 7)+3\cdot(4\cdot 8-5\cdot 7)\\ &= 1\cdot(-3)-2\cdot(-6)+3\cdot(-3)\\ &= -3+12-9\\ &= 0\end{aligned}$$

2. החלפת שורות כופלת את הדטרמיננטה ב־(-1). כיוון שניתן לקבל את המטריצה ממטריצת היחידה על ידי החלפת השורות $1,4$ והשורות $2,3$, נקבל כי הדטרמיננטה שווה לזאת של היחידה. לכן

$$\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1 .$$

3. הוספת כפולה של השורות הראשונה והשנייה ב־(-1) לשורה השלישית לא משנה את הדרמיננטה. לכן הדטמיננטה של המטריצה שווה לזאת של היחידה, ולכן

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=1 .$$

4. הוספת כפולה של השורות הראשונה והשנייה ב־(-1) לשורה השלישית לא משנה את הדרמיננטה. לכן הדטמיננטה של המטריצה שווה לזאת של

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

ביוון שהשורה השלישית היא שורת אפסים, אם נפתח את הדטרמיננטה לפיה נקבל שהדטרמיננטה שווה 0. זה נכון באופן כללי יותר אם השורות תלויות לינארית, כי נוכל לקבל שורת אפסים מצירוף לינארי של השורות.

תרגיל 2.2. תהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ העתקה לינארית ויהי B בסיס של V. הראו כי ניתן להגדיר $\det\left(T\right)=\det\left(\left[T\right]_B\right)$. כלומר, הראו שאם C בסיס נוסף של V מתקיים $\det\left(\left[T\right]_B\right)=\det\left(\left[T\right]_C\right)$.

פתרון. מתקיים

$$\left[T\right]_B=\left(M_C^B\right)^{-1}\left[T\right]_C M_C^B$$

ולכן

$$.\det\left([T]_B\right) = \det\left(\left(M_C^B\right)^{-1}\right)\det\left([T]_C\right)\det\left(M_C^B\right)$$

כיוון ש- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$ לכל מטריצה A, מתקיים $\det\left(\left(M_C^B\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(M_C^B\right)}$. לכן, נקבל בסה"כ כי

$$,\det\left([T]_B\right) = \det\left([T]_C\right)$$

כנדרש.

2.3 הדטרמיננטה לפי תמורות

סימון 2.3.1. נסמן תמורה $\sigma \in S_n$ בתור $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$, וחילוף τ בין איברים n, m בתור $(n; m)$.

טענה 2.3.2. תהי $A = (a_{i,j})_{i,j\in[n]} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. מתקיים

$$.\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i\in[n]} a_{i,\sigma(i)}$$

תרגיל 2.3. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה לפי תמורות.

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

פתרון. נרשום את כל איברי S_3. הם

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_{S_3} &= (1,2,3)\,, \\ &(1,3,2)\,, \\ &(2,1,3)\,, \\ &(2,3,1)\,, \\ &(3,1,2)\,, \\ &.\,(3,2,1) \end{aligned}$$

עבור כל אחד מהאיברים, נפעיל חילופים משמאל כדי להביא אותו ליחידה, ומספר החילופים יהיה החזקה של (-1) בסימן של התמורה. אם הגענו לתמורה קודמת, מספר החילופים שנותרו משלב זה הוא מספר החילופים שכבר מצאנו בחישוב קודם.

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_{S_3} = \mathrm{Id}_{S_3} &\implies \operatorname{sgn}(\mathrm{Id}_{S_3}) = 1 \\ (2;3)\circ((1,3,2)) = ((1,2,3)) = \mathrm{Id}_{S_3} &\implies \operatorname{sgn}((1,3,2)) = -1 \\ (1;2)\circ((2,1,3)) = ((1,2,3)) = \mathrm{Id}_{S_3} &\implies \operatorname{sgn}((2,1,3)) = -1 \\ (1;2)\circ((2,3,1)) = ((1,3,2)) &\implies \operatorname{sgn}((2,3,1)) = -1\cdot\operatorname{sgn}((1,3,2)) = 1 \\ (1;3)\circ((3,1,2)) = ((1,3,2)) &\implies \operatorname{sgn}((3,1,2)) = (-1)\cdot\operatorname{sgn}((1,3,2)) = 1 \\ .\,(1;3)\circ((3,2,1)) = ((1,2,3)) = \mathrm{Id}_{S_3} &\implies \operatorname{sgn}((3,2,1)) = -1 \end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1\cdot5\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 \\ &= 45 - 48 - 72 + 84 + 96 - 105 \\ . \qquad &= 0 \end{aligned}$$

פרק 3

המטריצה המצורפת וכלל קרמר

3.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

הגדרה 3.1.1 (המטריצה המצורפת). תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. המטריצה המצורפת של A היא המטריצה $\mathrm{adj}(A) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ המקיימת

$$\mathrm{adj}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{(j,i)}\right).$$

טענה 3.1.2. עבור $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ מתקיים

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)\,A = \det(A)\,I_n.$$

מסקנה 3.1.3. עבור $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה מתקיים

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A).$$

משפט 3.1.4 (כלל קרמר). תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה, ויהי $b \in \mathbb{F}^n$. עבור כל $i \in [n]$, נסמן ב־A_i את המטריצה המתקבלת על ידי החלפת העמודה ה־i של A ב־b. אז, למשוואה $Ax = b$ קיים פתרון יחיד $x := (x_i)_{i\in[n]} \in \mathbb{F}^n$ הנתון על ידי

$$\forall i \in [n] : x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}.$$

3.2 תרגילים

תרגיל 3.1. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$. חשבו את $\mathrm{adj}(A)$.

פתרון. נחשב את $\mathrm{adj}(A)$ לפי ההגדרה.

$$\begin{aligned}
\mathrm{adj}(A) &= \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

תרגיל 3.2. היעזרו במטריצה המצורפת כדי לחשב את ההופכית עבור כל אחת מהמטריצות הבאות.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ 6 & 0 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{R}\right)$$
$$B=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{R}\right)$$

עבור $\theta\in\mathbb{R}$.

פתרון. עבור כל אחת משתי המטריצות, נחשב את הדטרמיננטה ואת המטריצה המצורפת שלה. מתקיים

$$\begin{aligned}\det\left(A\right)&=-2\det\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}-3\det\begin{pmatrix}6 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}+2\det\begin{pmatrix}6 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\\ &=-2\cdot(-3)-3\cdot(-18)+2\cdot 6\\ &=72\\ \det\left(B\right)&=0+1\cdot\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}-0\\ &=\cos^2\theta+\sin^2\theta\\ &=1\end{aligned}$$

ובכן

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(A) &= \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 18 & 6 \\ 5 & -6 & 14 \\ 9 & 18 & -18 \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 18 & -6 & 18 \\ 6 & 14 & -18 \end{pmatrix} \\
\operatorname{adj}(B) &= \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ולכן נקבל כי

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) \\
&= \frac{1}{72}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 18 & -6 & 18 \\ 6 & 14 & -18 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/24 & 5/72 & 1/8 \\ 1/4 & -1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 7/36 & -1/4 \end{pmatrix} \\
B^{-1} &= \frac{1}{\det(B)}\operatorname{adj}(B) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

כנדרש.

תרגיל 3.3. תהי $A\in \mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$ הפיכה. הראו כי $\mathrm{adj}\left(\mathrm{adj}\left(A\right)\right)=\det\left(A\right)^{n-2}A$.

פתרון. דרך 1: A הפיכה, לכן $\mathrm{adj}\left(A\right)=\det\left(A\right)A^{-1}$ גם היא הפיכה. לפי אותה נוסחה נקבל כי

$$\mathrm{adj}\left(\mathrm{adj}\left(A\right)\right)=\det\left(\mathrm{adj}\left(A\right)\right)\mathrm{adj}\left(A\right)^{-1}$$

$$=\frac{\det\left(\mathrm{adj}\left(A\right)\right)}{\det\left(A\right)}A$$

ולכן נותר להראות כי

$$\det\left(\mathrm{adj}\left(A\right)\right)=\det\left(A\right)^{n-1}.$$

אכן

$$\begin{aligned}\det\left(\mathrm{adj}\left(A\right)\right)&=\det\left(\det\left(A\right)A^{-1}\right)\\&=\det\left(A\right)^{n}\det\left(A^{-1}\right)\\&=\det\left(A\right)^{n-1}\end{aligned},$$

כנדרש.

דרך 2: A הפיכה, לכן $\mathrm{adj}\left(A\right)=\det\left(A\right)A^{-1}$ גם היא הפיכה. לכן

$$\mathrm{adj}\left(\mathrm{adj}\left(A\right)\right)=\mathrm{adj}\left(\det\left(A\right)A^{-1}\right).$$

בעת, כיוון שמקדמי $\mathrm{adj}\left(\det\left(A\right)A^{-1}\right)$ הם מינורים של $\det\left(A\right)A^{-1}$, וכיוון שהדטרמיננטה של αB שווה ל-α^{m} לכל $\alpha\in\mathbb{F},B\in \mathrm{Mat}_m\left(\mathbb{F}\right)$, מתקיים כי $\mathrm{adj}\left(\det\left(A\right)A^{-1}\right)=\det\left(A\right)^{n-1}\mathrm{adj}\left(A^{-1}\right)$.
נוכיח זאת גם פורמלית: לכל $i,j\in[n]$ מתקיים

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}\left(\det\left(A\right)A^{-1}\right)_{i,j}&=\left(-1\right)^{i+j}\det\left(\left(\det\left(A\right)A^{-1}\right)_{(j,i)}\right)\\&=\left(-1\right)^{i+j}\det\left(\det\left(A\right)\left(A^{-1}\right)_{(j,i)}\right)\\&=\left(-1\right)^{i+j}\det\left(A\right)^{n-1}\det\left(\left(A^{-1}\right)_{(j,i)}\right)\\&=\det\left(A\right)^{n-1}\left(-1\right)^{i+j}\det\left(\left(A^{-1}\right)_{(j,i)}\right)\\&=\det\left(A\right)^{n-1}\mathrm{adj}\left(A^{-1}\right)_{i,j}\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathrm{adj}\left(\mathrm{adj}\left(A\right)\right)=\mathrm{adj}\left(\det\left(A\right)A^{-1}\right)=\det\left(A\right)^{n-1}\mathrm{adj}\left(A^{-1}\right).$$

בעת

$$\mathrm{adj}\left(A^{-1}\right)=\det A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{\det\left(A\right)}A$$

ולכן

$$\mathrm{adj}\left(\mathrm{adj}\left(A\right)\right)=\det\left(A\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\det\left(A\right)}A=\det\left(A\right)^{n-2}A,$$

כנדרש.

תרגיל 3.4. תהי $A\in \mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$. הוכיחו את התכונות הבאות.

1. $\mathrm{adj}\left(A^{t}\right)=\mathrm{adj}\left(A\right)^{t}$.
2. A הפיכה אם ורק אם $\mathrm{adj}\left(A\right)$ הפיכה.
3. אם A הפיכה, מתקיים $\mathrm{adj}\left(A^{-1}\right)=\left(\mathrm{adj}\left(A\right)\right)^{-1}$.

פתרון. 1. לכל $i,j\in[n]$ מתקיים

$$\operatorname{adj}\left(A^{t}\right)_{i,j}=(-1)^{i+j}\det\left(A^{t}_{(j,i)}\right).$$

אבל $A^{t}_{(j,i)}=\left(A_{(i,j)}\right)^{t}$ ולכן

$$\operatorname{adj}\left(A^{t}\right)_{i,j}=(-1)^{i+j}\det\left(A_{(i,j)}\right).$$

מצד שני,

$$\operatorname{adj}(A)^{t}_{i,j}=\operatorname{adj}(A)_{j,i}=(-1)^{i+j}\det\left(A_{(i,j)}\right),$$

ולכן מתקיים שוויון

$$\operatorname{adj}\left(A^{t}\right)=\operatorname{adj}(A)^{t},$$

כנדרש.

2. אם A הפיכה, מתקיים $\operatorname{adj}(A)=\det(A)\,A^{-1}$ ולכן גם $\operatorname{adj}(A)$ הפיכה.
להיפך, אם $\operatorname{adj}(A)$ הפיכה, נכתוב

$$\operatorname{adj}(A)\,A=\det(A)\,I_n$$

ואז

$$A=\det(A)\operatorname{adj}(A)^{-1}.$$

אם $\det(A)=0$ נקבל כי $A=0$, אבל אז $\operatorname{adj}(A)=0$ אינה הפיכה, בסתירה להנחה. לכן $\det(A)\neq 0$, ולכן A הפיכה.

3. נניח כי A הפיכה. אז

$$\begin{aligned}\operatorname{adj}\left(A^{-1}\right)&=\det\left(A^{-1}\right)\left(A^{-1}\right)^{-1}\\&=\frac{1}{\det(A)}A\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}\operatorname{adj}(A)^{-1}&=\left(\det(A)\,A^{-1}\right)^{-1}\\&=\frac{1}{\det(A)}\left(A^{-1}\right)^{-1}\\&=\frac{1}{\det(A)}A\end{aligned}.$$

מכן נסיק כי

$$\operatorname{adj}\left(A^{-1}\right)=\operatorname{adj}(A)^{-1},$$

כנדרש.

תרגיל 3.5. היעזרו בכלל קרמר כדי לפתור את כל אחת ממערכות המשוואות הלינאריות הבאות, מעל $\mathbb{Q}$.

1.

$$\begin{aligned}x+y+z&=11\\2x-6y-z&=0\\3x+4y+2z&=0\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}3x-2y&=7\\3y-2z&=6\\3z-2x&=-1\end{aligned}$$

פתרון. 1. נכתוב את מערכת המשוואות בעזרת מטריצות, בתור $A\vec{x}=b$ כאשר

$$.A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-6&-1\\3&4&2\end{pmatrix},\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}11\\0\\0\end{pmatrix}$$

מתקיים כי

$$\begin{aligned}\det\left(A\right)&=\det\begin{pmatrix}-6&-1\\4&2\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}2&-6\\3&4\end{pmatrix}\\&=-8-7+26\\&=11\\\det\left(A_1\right)&=11\det\begin{pmatrix}-6&-1\\4&2\end{pmatrix}\\&=-88\\\det\left(A_2\right)&=-11\det\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}\\&=-77\\\det\left(A_3\right)&=11\det\begin{pmatrix}2&-6\\3&4\end{pmatrix}\\&=11\cdot 26\end{aligned}$$

ולכן לפי כלל קרמר

$$\begin{aligned}x&=\det\left(A_1\right)/\det\left(A\right)=-8\\y&=\det\left(A_2\right)/\det\left(A\right)=-7\\.z&=\det\left(A_3\right)/\det\left(A\right)=26\end{aligned}$$

2. נכתוב את מערכת המשוואות בעזרת מטריצות, בתור $A\vec{x}=b$ כאשר

$$.A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\0&3&-2\\-2&0&3\end{pmatrix},\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}7\\6\\-1\end{pmatrix}$$

מתקיים כי

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 3\cdot\det\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\\
&= 27-8\\
&= 19\\
\det(A_1) &= \det\begin{pmatrix}7 & -2 & 0\\ 6 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\\
&= 7\cdot\det\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}6 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\\
&= 7\cdot 9 + 2\cdot 16\\
&= 63+32\\
&= 95\\
\det(A_2) &= \det\begin{pmatrix}3 & 7 & 0\\ 0 & 6 & -2\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}\\
&= 3\cdot\det\begin{pmatrix}6 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix} - 7\cdot\det\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\\
&= 3\cdot 16 - 7\cdot(-4)\\
&= 76\\
\det(A_3) &= \det\begin{pmatrix}3 & -2 & 7\\ 0 & 3 & 6\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= 3\cdot\det\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 3 & 6\end{pmatrix}\\
&= -9-2\cdot(-12-21)\\
&= -9+66\\
&= 57
\end{aligned}$$

ולכן לפי כלל קרמר

$$\begin{aligned}
x &= \det(A_1)/\det(A) = 95/19 = 5\\
y &= \det(A_2)/\det(A) = 76/19 = 4\\
z &= \det(A_3)/\det(A) = 57/19 = 3.
\end{aligned}$$

תרגיל 3.6. תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$, יהי $b \in \mathbb{F}^n$ ונניח כי $y \in \mathbb{F}^n$ מקיים $Ay = b$.
תהי $\tilde{A}$ מטריצה המתקבלת מ־A על ידי כפל של העמודה ה־i ב־$\alpha \in \mathbb{F}$. הראו ישירות לפי כלל קרמר כי $\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_{i-1}\\ y_i/\alpha\\ y_{i+1}\\ y_n\end{pmatrix}$ פתרון עבור המערכת $\tilde{A}x = b$.

פתרון. מתקיים כי $\det\left(\tilde{A}\right) = \alpha\det(A)$. כמו כן $\det\left(\tilde{A}_i\right) = \det(A_i)$ כיוון שמתקיים $\tilde{A}_i = A_i$, ולכל $j \in [n]\setminus\{i\}$ מתקיים $\det\left(\tilde{A}_j\right) = \alpha\det(A_j)$.

לפי כלל קרמר נקבל כי $\tilde{y}$ פתרון של המערכת $\tilde{A}x = b$, כיוון שמתקיים

$$\det\left(\tilde{A}_i\right) / \det\left(\tilde{A}\right) = \det\left(A_i\right) / \left(\alpha \det\left(A\right)\right) = y_i/\alpha$$

וכן לכל $j \in [n] \setminus \{i\}$ מתקיים

$$\det\left(\tilde{A}_j\right) / \det\left(\tilde{A}\right) = \alpha \det\left(A_j\right) / \left(\alpha \det\left(A\right)\right) = \det\left(A_j\right) / \det\left(A\right) = y_j \text{ .}$$

פרק 4

מרחבים שמורים ולכסינות

4.1 מרחבים שמורים

נרצה להבין אופרטורים לינאריים דרך הבנה של צמצום שלהם לתת־מרחבים קטנים יותר. אם $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, נוכל תמיד לצמצם את המקור כדי לקבל העתקה לינארית $T|_W : W \to V$, אבל לא נוכל ללמוד מספיק כאשר הצמצום אינו אופרטור. לכן נרצה לצמצם גם את הטווח, מה שמוביל להגדרה הבאה.

הגדרה 4.1.1 (מרחב שמור). יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $U \leq V$. נגיד כי U הינו T־שמור (או T־אינווריאנטי) אם $T(U) \subseteq U$.

הגדרה 4.1.2. במקרה ש־W מרחב T־שמור, נוכל להסתכל על הצמצום $T|_W : W \to W$ שמוגדר על ידי $T|_W(w) = T(w)$.

הערה 4.1.3. שימו לב שהסימון הוא אותו סימון כמו הצמצום של המקור, אך במסגרת הקורס צמצום אופרטורים יתייחס לזה שבהגדרה אלא אם כן יצוין מפורשות אחרת.

תרגיל 4.1. יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהיו $P, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כאשר P איזומורפיזם. יהי $W \leq V$.
הראו כי W הינו T־שמור אם ורק אם $P^{-1}(W)$ הינו $P^{-1} \circ T \circ P$־שמור.

פתרון. נניח כי W הינו T־שמור ויהי $v \in P^{-1}(W)$. נרצה להראות כי $P^{-1} \circ T \circ P(v) \in P^{-1}(W)$. יהי $w \in W$ עבורו $v = P^{-1}(w)$. אז

$$\begin{aligned} P^{-1} \circ T \circ P(v) &= P^{-1} \circ T \circ P \circ P^{-1}(W) \\ &= P^{-1} \circ T(w) \end{aligned}$$

כאשר $T(w) \in W$ כי W הוא T־שמור. נקבל כי $P^{-1} \circ T \circ P(v) \in P^{-1}(W)$.
בכיוון השני, נניח כי $U := P^{-1}(W)$ הינו $P^{-1} \circ T \circ P$־שמור. נגדיר $S = P^{-1} \circ T \circ P$, וגם $Q = P^{-1}$. אז $T = Q^{-1} \circ T \circ Q$ וגם $W = P\left(P^{-1}(W)\right) = P(U) = Q^{-1}(U)$. מהכיוון הראשון, נקבל כי W הינו $\left(Q^{-1} \circ T \circ Q\right)$־שמור, כלומר T־שמור.

תרגיל 4.2. יהי $\mathbb{C}$ במרחב וקטורי ממשי ויהי

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned} .$$

מצאו את התת־מרחבים ה־T־שמורים של $\mathbb{C}$ והסיקו כי T אינו לכסין מעל $\mathbb{R}$.

פתרון. $\mathbb{C}, \{0\}$ תת־מרחבים T־שמורים.
נניח כי $W \leq \mathbb{C}$ מרחב T־שמור נוסף. אז $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$ ולכן יש

$$z_0 \in \mathbb{C}^{\times} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

עבורו $W = \mathrm{Span}\{z_0\}$. נקבל $T(z_0) \in W$ לכן $T(z_0) = cz_0$ עבור $c \in \mathbb{R}$. אבל $cz_0 = iz_0$ גורר $c = i$ בסתירה.
תת־מרחבים T־שמורים 1־מימדיים של $\mathbb{C}$ הם $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור v וקטור עצמי של T. לכן אין ל־T וקטורים עצמיים, ולכן הוא אינו לכסין מעל $\mathbb{R}$.

סימון 4.1.4. עבור מטריצות ריבועיות $A_1,\ldots,A_k$ נסמן

$$A_1\oplus\ldots\oplus A_k=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k\end{pmatrix}.$$

תרגיל 4.3. יהי $V=\mathbb{C}^n$ ותהי

$$T\colon V\to V$$

עם

$$[T]_E=\lambda_1 I_{m_1}\oplus\ldots\oplus\lambda_k I_{m_k}$$

עבור $\lambda_i\neq\lambda_j$ לכל $i\neq j$. נסמן $n_i=m_1+\ldots+m_{i-1}+1$. מצאו את כל התת־מרחבים ה־T־שמורים של V.

פתרון. ראשית, אם $W\leq V_i:=\operatorname{Span}\left(e_{n_i},\ldots,e_{n_i+m_i-1}\right)$, נקבל כי $T(w)=\lambda_i w\in W$ לכל $w\in W$. לכן כל תת־מרחב בזה הינו T־שמור. גם סכום של תת־מרחבים כאלה יהיה T־שמור כי אם $v_i\in W_i:=W\cap V_i$ לכל $i\in[k]$ אז

$$T(v_1+\ldots+v_k)=T(v_1)+\ldots+T(v_k)$$

כאשר $T(v_i)\in W$ וגם $T(v_i)=\lambda_i v_i\in V_i$, כלומר $T(v_i)\in W_i$. נראה שאלו כל האפשרויות לתת־מרחבים שמורים.
ראינו בהרצאה כי אם W הינו T־שמור, אז $T|_W$ הינו לכסין. לכן, W סכום ישר של המרחבים העצמיים של $T|_W$. לכל ערך עצמי λ, המרחב העצמי W_λ של $T|_W$ הוא החיתוך $W\cap V_\lambda$ כאשר V_λ המרחב העצמי של T.
כיוון שעבור אופרטור לכסין המרחב שווה לסכום ישר של המרחבים העצמיים, נקבל כי

$$W=\bigoplus_{i\in[k]}W_{\lambda_i}=\bigoplus_{i\in[k]}W\cap V_{\lambda_i},$$

כנדרש.

הגדרה 4.1.5 (בלוק ז'ורדן). יהי $\lambda\in\mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל m עם ערך עצמי λ בתור

$$J_m(\lambda):=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_m(\mathbb{F}).$$

הגדרה 4.1.6 (אופרטור אי־פריד). אופרטור $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא אי־פריד אם לכל $U,W\leq V$ שהינם T־שמורים ועבורם $U\oplus W=V$, בהכרח $U=V,W=\{0\}$ או $W=V,U=\{0\}$.

תרגיל 4.4. 1. יהי $T=T_{J_n(0)}\in\operatorname{End}(\mathbb{F}^n)$. מיצאו את המרחבים ה־$T$ שמורים של $\mathbb{F}^n$.

2. יהי $N\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$. הראו שהמרחבים ה־S־שמורים של V הם המרחבים ה־$(N+\lambda\operatorname{Id}_V)$־שמורים של V.

3. יהי $S=T_{J_n(\lambda)}\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}^n}$. הסיקו מה המרחבים ה־$S$־שמורים של $\mathbb{F}^n$.

4. הראו כי S הינו אי־פריד.

פתרון. 1. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\{0\}&\\ \ker(T)&=\operatorname{Span}(e_1)\\ \operatorname{Im}(T)&=\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_{n-1})\\ V&=\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_n)\end{aligned}$$

כולם T־שמורים, כיוון שמרחב האפס, הגרעין, התמונה, והמרחב כולו תמיד T־שמורים. גם, מתקיים

$$\begin{aligned}\forall i>1\colon T(e_i)&=e_{i-1}\in\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_i)\\ T(e_1)&=0\end{aligned}$$

ולכן כל מרחב מהצורה $\operatorname{Span}\left(e_{1},\ldots,e_{i}\right)$ עבור $i\in\{0,\ldots,n\}$ הינו T־שמור. נרצה להראות שהמרחבים ה־T־שמורים הם בדיוק אלו מהצורה הזאת.

יהי $W\leq\mathbb{F}^{n}$ מרחב T־שמור, ויהי $k\in\{0,\ldots,n\}$ המקסימלי עבורו $\operatorname{Span}\left(e_{1},\ldots,e_{k}\right)\subseteq W$ (יש כזה k כיוון שעבור $k=0$ נקבל $\{0\}\subseteq W$). נרצה להראות כי $W=\operatorname{Span}\left(e_{1},\ldots,e_{k}\right)$.

אחרת, קיים וקטור $v=\sum_{i\in[\ell]}\alpha_{i}e_{i}\in W$ עם $\ell>k$ וגם $\alpha_{\ell}\neq0$. אם $\ell=k+1$ נקבל כי $\alpha_{i}e_{i}\in W$ לכל $i<\ell$ ולכן

$$\alpha_{\ell}e_{\ell}=v-\sum_{i\in[\ell-1]}\in W$$

וביוון ש־$\alpha_{\ell}\neq0$ אז $e_{k+1}=e_{\ell}\in W$. במקרה זה $e_{1},\ldots,e_{k+1}\in W$ ולכן $\operatorname{Span}\left(e_{1},\ldots,e_{k+1}\right)\subseteq W$ בסתירה להנחה.

באופן כללי, מתקיים $T^{i}\left(v\right)\in W$ לכל i. כדי שיתקיים $T^{i}\left(e_{\ell}\right)=e_{k+1}$ צריך לקחת $\ell-i=k+1$ כלומר $i=\ell-(k+1)$. אז

$$\begin{aligned}T^{\ell-(k+1)}\left(v\right)&=\sum_{i\in[\ell]}\alpha_{i}T^{\ell-(k+1)}\left(e_{i}\right)\\&=\sum_{i=\ell-k}^{\ell}\alpha_{i}e_{i-\ell+k+1}\\&=\sum_{j=1}^{k+1}\alpha_{j+\ell-k-1}e_{j}\in W\end{aligned}$$

ונקבל את הנדרש מהמקרה הקודם $\ell=k+1$.

2. יהי $W\leq V$ תת־מרחב N־שמור. לכל $w\in W$ מתקיים

$$\left(N+\lambda\operatorname{Id}_{V}\right)\left(w\right)=N\left(w\right)+\lambda w\in W$$

כיוון ש־$N\left(w\right),\lambda w\in W$. לכן W הינו $N+\lambda\operatorname{Id}_{V}$־שמור.

אם $W\leq V$ תת־מרחב $\left(N+\lambda\operatorname{Id}_{V}\right)$־שמור, נקבל מהכיוון הראשון שהוא $\left(N+\lambda\operatorname{Id}_{V}\right)+\left(-\lambda\right)\operatorname{Id}_{V}$־שמור, כלומר N־שמור.

3. מהסעיף הקודם, נקבל כי המרחבים ה־S שמורים הם המרחבים ה־T־שמורים, שהינם אלו מהצורה $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\left(e_{1},\ldots,e_{i}\right)$ עבור $i\in\{0,\ldots,n\}$.

4. נניח כי יש תת־מרחבים S־שמורים W_{1},W_{2} עבורם $\mathbb{F}^{n}=W_{1}\oplus W_{2}$. מהסעיף הקודם, יש $i,j\in\{0,\ldots,n\}$ עבורם

$$\begin{aligned}W_{1}&=\operatorname{Span}\left(e_{1},\ldots,e_{i}\right)\\W_{2}&=\operatorname{Span}\left(e_{1},\ldots,e_{j}\right).\end{aligned}$$

כיוון ש־$\mathbb{F}^{n}=W_{1}\oplus W_{2}$, בהכרח $e_{n}\in W_{1}+W_{2}$, ולכן $i=n$ או $j=n$. במקרה הראשון, $W_{1}=\mathbb{F}^{n},W_{2}=\{0\}$ ובמקרה השני $W_{1}=\{0\},W_{2}=\mathbb{F}^{n}$, ובכל מקרה הפירוק הינו טריוויאלי.

תרגיל 4.5. 1. תהי $A\in\operatorname{Mat}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$. הוכיחו כי אם ל־$T_{A}$ אין תת־מרחב שמור ממימד 1, יש לו תת־מרחב שמור ממימד 2.

2. נניח כי $A\in\operatorname{Mat}_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ מטריצה שכל מקדמיה ממשיים. הוכיחו כי אם λ ערך עצמי של T_{A} אז $\bar{\lambda}$ גם ערך עצמי של T_{A}.

פתרון. עבור מטריצה $A=\left(a_{i,j}\right)\in\operatorname{Mat}_{n,m}$ נגדיר

$$\bar{A}=\left(\bar{a}_{i,j}\right)$$

את המטריצה שמקדמיה הם המספרים הצמודים לאלו ב־A. נשים לב כי עבור שתי מטריצות $A\in\operatorname{Mat}_{m,n}\left(\mathbb{C}\right)$ ו־$B\in\operatorname{Mat}_{n,\ell}\left(\mathbb{C}\right)$, מתקיים

$$\begin{aligned}\left(\overline{AB}\right)_{i,j}&=\overline{\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\overline{a_{i,k}}\overline{b_{k,j}}\\&=\left(\left|A\right|\left|B\right|\right)_{i,j}\end{aligned}$$

ולכן $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$.

1. תת־מרחב T_A-שמור ממימד 1 הוא מהצורה $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור וקטור עצמי v של T_A. לכן מההנחה, אין ל־T_A וקטורים עצמיים.

אבל, אפשר לחשוב על A כבעל מטריצה ב־$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ שנסמנה $\tilde{A}$. אז ל־$T_{\tilde{A}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ יש וקטור עצמי כאופרטור מעל $\mathbb{C}$. יהי $v \in \mathbb{C}^n$ וקטור עצמי של $T_{\tilde{A}}$ עם ערך עצמי $\lambda = \alpha + i\beta$, ונכתוב

$$v = \begin{pmatrix} u_1 + iw_1 \\ \vdots \\ u_n + iw_n \end{pmatrix} = u + iw$$

כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ וקטורים עם מקדמים ממשיים. נוכל לחשוב עליהם כחיים ב־$\mathbb{R}^n$. אז

$$\begin{aligned} Au + iAw &= A(u+iw) \\ &= Av \\ &= \lambda v \\ &= (\alpha + i\beta)(u+iw) \\ &= \alpha u + \alpha i w + \beta i u - \beta w \\ &= (\alpha u - \beta w) + i(\alpha w + \beta u) \end{aligned}$$

כאשר $Au, Aw \in \mathbb{R}^n$. אז, נוכל להשוות מקדמים ולקבל

$$\begin{aligned} T_A(u) &= Au = \alpha u - \beta w \in \mathrm{Span}(u,w) \\ .T_A(w) &= Aw = \alpha w + \beta u \in \mathrm{Span}(u,w) \end{aligned}$$

לכן $\mathrm{Span}(u,w)$ הינו תת־מרחב L_A-שמור של $\mathbb{R}^n$.

2. אם λ ממשי אין מה להוכיח כי $\lambda = \bar{\lambda}$. נניח אם כן כי $\lambda = \alpha + i\beta$ עבור $\beta \neq 0$. נסמן ב־$v = u + iw$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ, כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ עם מקדמים ממשיים. אז

$$\bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

ולכן $\bar{v}$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי $\bar{\lambda}$, כנדרש.

4.2 לבסינות

יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. מקרה בו פשוט להבין את T הוא אם ניתן לכתוב את V בתור סכום ישר של תת־מרחבים שמורים ממימד 1. אם

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$$

כאשר $V_i = \mathrm{Span}(v_i)$ עבור וקטורים $v_i \in V$, מתקיים לכל $i \in [n]$ כי $T(v_i) \in V_i = \mathrm{Span}(v_i)$ ולכן קיים $\lambda_i \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v_i) = \lambda_i v_i$ ואז $B := (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של וקטורים עצמיים של T ומתקיים

$$.\,[T]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

הגדרה 4.2.1 (אופרטור לבסין). אופרטור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא לבסין אם קיים בסיס B של V וקיימות $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ עבורם

$$.\,[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

בסיס B בזה נקרא בסיס מלבסן עבור T, והמטריצה $[T]_B$ נקראת מטריצה אלכסונית.

הגדרה 4.2.2. יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. וקטור $v \in V \setminus \{0\}$ נקרא וקטור עצמי של T אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $.T(v) = \lambda v$

במקרה זה λ נקרא ערך עצמי של T.

הערה 4.2.3. v וקטור עצמי של T אם ורק אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \lambda v$. מתקיים $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ ולכן באופן שקול $T(v) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ ובאופן שקול $T(\alpha v) = \alpha T(v) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}$.
לכן, v וקטור עצמי של T אם ורק אם $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ הינו T-שמור.

הערה 4.2.4. אופרטור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הינו לכסין אם ורק אם קיים בסיס של V שמורכב מוקטורים עצמיים של T.

הגדרה 4.2.5 (מרחב עצמי). יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי λ ערך עצמי של T. המרחב העצמי של T עם הערך λ הוא

$$V_\lambda \coloneqq \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \mathrm{Id}_V - T).$$

הגדרה 4.2.6 (פולינום אופייני). יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הפולינום האופייני של T הוא

$$p_T(x) \coloneqq \det(x \mathrm{Id}_V - T).$$

הערה 4.2.7. בפועל, נסתכל בדרך כלל על פולינום אופייני של מטריצה, כיוון שצריך לבחור בסיס כדי לחשב את הדטרמיננטה. ראינו כי הדטרמיננטה לא תלויה בבחירת הבסיס, ולכן $p_T(x) = p_{[T]_B}(x)$ לכל בסיס B של V, כאשר $p_A(x) = \det(xI - A)$.

מסקנה 4.2.8. איבר $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\ker(\lambda \mathrm{Id}_V - T) \neq 0$, אם ורק אם $p_T(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_V - T) = 0$.
בלומר, הערכים העצמיים של T הם השורשים של p_T.

הערה 4.2.9. כיוון שלכל פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ יש שורש, לכל $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ יש ערך עצמי.

הגדרה 4.2.10 (ריבוי אלגברי). יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי האלגברי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא הריבוי שלו כשורש של p_T. נסמנו $r_a(\lambda)$.

הגדרה 4.2.11 (ריבוי גיאומטרי). יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא $r_g(\lambda) \coloneqq \dim V_\lambda$.

הערה 4.2.12. מתקיים תמיד $r_g(\lambda) \le r_a(\lambda)$.

הגדרה 4.2.13. תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ ויהי $T = T_A$ אופרטור כפל ב-A משמאל (כלומר, $T(v) = Av$). אם T לכסין, קיים בסיס B עבורו $D \coloneqq [T]_B$ אלכסונית. אז

$$\begin{aligned} A &= [T]_E \\ &= [\mathrm{Id} \circ T \circ \mathrm{Id}]_E \\ &= M_E^B [T]_B M_B^E \\ &= M_E^B D \left(M_E^B\right)^{-1} \end{aligned}$$

ואם נסמן $P = M_E^B$ נקבל כי זאת מטריצה הפיכה עבורה $P^{-1}AP = D$.
לכן, נגיד שמטריצה $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה אם קיימת $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $P^{-1}AP$ אלכסונית.

תרגיל 4.6. הראו כי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$$

לכסינה ומצאו $P \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ עבורה $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.

פתרון. סכום הערכים העצמיים של A שווה לעקבה שלה $\mathrm{tr}(A) = 1$ ומכפלת הערכים העצמיים שווה $\det(A) = 0$. לכן הערכים העצמיים הם $0, 1$. כיוון שלכל אחד מהם הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי, המטריצה הינה לכסינה.
נמצא וקטורים עצמיים עבור שני הערכים העצמיים השונים. עבור 0 ניתן לראות כי e_2 ערך עצמי, כי Ae_2 היא העמודה השנייה של A, ששווה לוקטור האפס. עבור 1, נחפש וקטור $v \in \mathbb{R}^2$ עבורו $Av = v$, כלומר $(A - I)v = 0$. מתקיים $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ולכן אם $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ צריך להתקיים $v_1 - v_2 = 0$, כלומר $v_1 = v_2$. ניקח אם כך $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ ונקבל $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Av$.

אז $B=(e_2,e_1+e_2)$ בסיס מלכסן של ההעתקה

$$\begin{aligned} T_A\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto Av \end{aligned}.$$

נקבל כי

$$D:=[T_A]_B=\left(M_E^B\right)^{-1}[T_A]_E\,M_E^B$$

מטריצה אלכסונית, ולכן ניקח $P=M_E^B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$.

תרגיל 4.7. תהי

$$A=\begin{pmatrix}-3&-4&-6&-3&-3&0\\-2&-3&-4&-3&-3&0\\3&3&5&3&3&0\\-1&2&1&2&0&0\\2&1&3&0&2&0\\3&3&3&3&3&2\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_6\left(\mathbb{C}\right).$$

מיצאו את הערכים העצמיים של A ועבור כל אחד מהם מיצאו ריבוי אלגברי וגיאומטרי.

פתרון. נחשב ראשית את הפולינום האופייני של A.

$$\begin{aligned} p_A(x)&=\det(xI-A)\\ &=\det\begin{pmatrix}x+3&4&6&3&3&0\\2&x+3&4&3&3&0\\-3&-3&x-5&-3&-3&0\\1&-2&-1&x-2&0&0\\-2&-1&-3&0&x-2&0\\-3&-3&-3&-3&-3&x-2\end{pmatrix}\\ &=(x-2)\begin{pmatrix}x+3&4&6&3&3\\2&x+3&4&3&3\\-3&-3&x-5&-3&-3\\1&-2&-1&x-2&0\\-2&-1&-3&0&x-2\end{pmatrix}\\ &=\dots\\ &=(x-2)\left(x^5-3x^4+x^3+x^2+4\right) \end{aligned}.$$

ניתן לראות כי 2 הינו ערך עצמי של A, כי הוא שורש של $p_A(x)$. נחשב את הריבוי שלו $r_a(2)$, ששווה לערך $i\in\mathbb{N}$ המינימלי עבורו $p_A(x)^{(i)}(2)\neq 0$, כאשר $f^{(k)}$ הינה הנגזרת ה־k-ית של f. מתקיים

$$\begin{aligned} p_A(x)&=x^6-5x^5+7x^4-x^3-2x^2+4x-8\\ p_A'(x)&=6x^5-25x^4+28x^3-3x^2-4x+4\\ p_A'(2)&=6\cdot 32-20\cdot 16+28\cdot 8-3\cdot 4-4\cdot 2+4=0\\ p_A''(x)&=30x^4-100x^3+84x^2-6x-4\\ p_A''(2)&=30\cdot 16-100\cdot 8+84\cdot 4-6\cdot 2-4=0\\ p_A'''(x)&=120x^3-300x^2+168x-6\\ p_A'''(2)&=120\cdot 8-300\cdot 4+168\cdot 2-6=90\neq 0 \end{aligned}$$

ולכן $r_a(2)=3$. נקבל כי $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$ מחלק את $p_A(x)$ וכדי למצוא ערכים עצמיים נוספים נבצע חילוק פולינומים.

בכל שלב נכפול את הפולינום בו אנו מחלקות במונום מתאים כך שהכפל יהיה בעל אותו גורם מוביל כמו הפולינום שקיבלנו לאחר חיסור בשלב הקודם, ולאחר מכן נחסר זאת מהפולינום שקיבלנו בשלב הקודם. נסכום את המונומים המתאימים כדי לקבל את המנה, כאשר אם נשארנו עם פולינום מדרגה קטנה יותר מזה שאנו מחלקות בו, הוא יהיה שארית החלוקה.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + x^2 + x + 1 \\
\hline
x^3 - 6x^2 + 12x - 8 & x^6 - 5x^5 + 7x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\
 & -x^6 + 6x^5 - 12x^4 + 8x^3 \\
\hline
 & x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 \\
 & -x^5 + 6x^4 - 12x^3 + 8x^2 \\
\hline
 & x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x \\
 & -x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x \\
\hline
 & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\
 & -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

לכן

$$p_A\left(x\right) = \left(x-2\right)^3\left(x^3+x^2+x+1\right)$$

וניתן לראות כי -1 שורש של x^3+x^2+x+1 (הוא שורש של כל פולינום ממעלה אי־זוגית שבל מקדמיו 1)ץ נבצע חילוק פולינומים נוסף

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 1 \\
\hline
x + 1 & x^3 + x^2 + x + 1 \\
 & -x^3 - x^2 \\
\hline
 & x + 1 \\
 & -x - 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

ולכן

$$p_A\left(x\right) = \left(x-2\right)^3\left(x+1\right)\left(x^2+1\right) = \left(x-2\right)^3\left(x+1\right)\left(x+i\right)\left(x-i\right)$$

ונקבל כי הערכים העצמיים הם 2 מריבוי אלגברי 3, ו־$-1, i, -i$ כל אחד מריבוי אלגברי 1.

כיוון שהריבוי הגיאומטרי תמיד גדול או שווה ל־1 וקטן או שווה לריבוי האלגברי, נקבל כי $r_g\left(-1\right) = r_g\left(i\right) = r_g\left(-i\right) = 1$ ולכן נותר למצוא את הריבוי הגיאומטרי של 2, ששווה לדרגת המטריצה $A - 2I$. נחשב דרגה זאת.

$$A-2I=\begin{pmatrix}-5 & -4 & -6 & -3 & -3 & 0\\ -2 & -5 & -4 & -3 & -3 & 0\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_5\mapsto C_5-C_4}\begin{pmatrix}-5 & -4 & -6 & -3 & 0 & 0\\ -2 & -5 & -4 & -3 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{C_1\mapsto C_1-C_4\\ C_2\mapsto C_2-C_4\\ C_3\mapsto C_3-C_4}}\begin{pmatrix}-2 & -1 & -3 & -3 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3\mapsto C_3-C_1-C_2}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

וניתן לראות מכאן כי $\operatorname{rank}(A-2I)=3$, לכן $r_g(2)=3$.

עבור התרגול על מרחבים שמורים בו יואב החליף אותי, ראו את הרשימות של יואב בקובץ הרלוונטי שבדף הקורס.

פרק 5

צורת ז'ורדן

כדי לבצע חישובים על אופרטורים לינאריים, בדרך כלל יש לקחת בסיס ולערוך את החישובים על המטריצות המייצגות. נרצה לקחת בסיס שיתן לנו מטריצה שתאפשר חישובים פשוטים ככל הניתן: מטריצה אלכסונית. אין לכל אופרטור צורה אלכסונית, אבל, מעל שדה סגור אלגברית יש צורה "כמעט אלכסונית" שנקראת צורת ז'ורדן.

הגדרה 5.0.1. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל m עם ערך עצמי λ בתור

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{F}).$$

הגדרה 5.0.2 (מטריצת ז'ורדן). מטריצה $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ נקראת מטריצת ז'ורדן אם היא מטריצה אלכסונית בלוקים שכל הבלוקים בה הם בלוקי ז'ורדן.

הגדרה 5.0.3 (בסיס ז'ורדן). יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. בסיס ז'ורדן עבור T הוא בסיס B של V עבורו $[T]_B$ מטריצת ז'ורדן.

הגדרה 5.0.4 (שדה סגור אלגברית). שדה $\mathbb{F}$ נקרא סגור אלגברית אם לכל פולינום $p \in \mathbb{F}[x]$ שאינו קבוע יש שורש.

משפט 5.0.5 (משפט ז'ורדן). יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית, יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. קיים בסיס ז'ורדן עבור T, וצורת ז'ורדן של T יחידה עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

בהוכחת משפט ז'ורדן בהרצאה, הסתכלנו קודם כל על אופרטורים שעבורם הערך העצמי היחיד הוא 0, שהינם אופרטורים נילפוטנטיים. נדון תחילה במשפט ז'ורדן עבור אופרטורים אלו.

5.1 אופרטורים נילפוטנטיים

עבור בלוק ז'ורדן $A = J_n(0)$ מתקיים $A^n = 0$, ולכן גם $T_A^n = 0$. נוכל באופן דומה לדבר על אופרטורים כלליים עם תכונה זאת.

הגדרה 5.1.1 (אופרטור נילפוטנטי). אופרטור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא נילפוטנטי אם קיים $i \in \mathbb{N}_+$ עבורו $T^i = 0$.
הערך k המינימלי עבורו $T^k = 0$ נקרא אינדקס הנילפוטנטיות של T.

התרגיל הבא מראה שאלו בדיוק האופרטורים שמעניינים אותנו כאשר אנו רוצות להתייחס רק לערך עצמי 0.

תרגיל 5.1. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה סגור אלגברית $\mathbb{F}$, ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. אז T נילפוטנטי אם ורק אם 0 הוא הערך העצמי היחיד של T.

פתרון. נניח כי T נילפוטנטי מאינדקס k, ויהי λ ערך עצמי של T עם וקטור עצמי v. אז $0 = T^k(v) = \lambda^k v$ וביוון ש־$v \neq 0$ נקבל $\lambda^k = 0$ ואז $\lambda = 0$.

בכיוון השני, נניח כי 0 הוא הערך העצמי היחיד. ממשפט ז'ורדן, קיים בסיס B של V עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}.$$

לכל $i \in [k]$ מתקיים $J_{m_i}(0)^{m_i} = 0$, ולכן אם ניקח $m = \max_{i\in[k]} m_i$ נקבל כי

$$[T]_B^m = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0)^m & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(0)^m \end{pmatrix} = 0$$

ואז $T^m = 0$.

תרגיל 5.2. תהי T נילפוטנטית מאינדס k. הראו שהעתקות $(\mathrm{Id}_V \pm T)$ הפיכות ומצאו את ההופכיות שלהן.

פתרון. אנו יודעות כי

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} r^k = \frac{1}{1-r}$$

עבור $r < 0$. נרצה אם כן שההופכית של $\mathrm{Id}_V - T$ תהיה $\mathrm{Id}_V + T + \ldots + T^{k-1}$. אכן,

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_V - T)\left(\mathrm{Id}_V + T + \ldots + T^{k-1}\right) &= \sum_{i=0}^{k-1} T^i - \sum_{i=1}^{k} T) \\ &= \mathrm{Id}_V - T^k \\ &= \mathrm{Id}_V - 0 \\ &= \mathrm{Id}_V \end{aligned}.$$

בעת, אם T נילפוטנטית מאינדקס k גם $-T$ נילפוטנטית מאינדקס k, לכן ההופכית של $\mathrm{Id}_V + T = \mathrm{Id}_V - (-T)$ היא

$$\mathrm{Id}_V - T + T^2 - T^3 + \ldots + (-1)^{k-1} T^{k-1}.$$

5.1.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור אופרטורים נילפוטנטיים

הגדרה 5.1.2 (אופרטור הזזה). יהי V מרחב וקטורי עם בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נגיד כי T אופרטור הזזה ביחס לבסיס B אם מתקיים

$$T(v_i) = \begin{cases} v_{i-1} & i > 1 \\ 0 & i = 1 \end{cases},$$

או באופן שקול אם $[T]_B = J_n(0)$.

בדי למצוא בסיס ז'ורדן עבור אופרטור הזזה, נרצה למצוא וקטור $v \in V$ עבורו $T^n(v) = 0$ אבל $T^{n-1}(v) \neq 0$, ואז $\left(T^{n-1}(v), T^{n-2}(v), \ldots, T(v), v\right)$ יהיה בסיס ז'ורדן.

תרגיל 5.3. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$$

ויהי $T = T_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^3\right)$. מיצאו בסיס ז'ורדן עבור T.

פתרון. מתקיים

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 0$$

ולכן A נילפוטנטית מסדר $3 = \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^3\right)$. מתקיים $\ker\left(T^2\right) = \mathrm{Span}\left(e_1 - e_2, e_1 - e_3\right)$ כי שני הוקטורים נמצאים בגרעין וכי $\dim\ker\left(T^2\right) = 3 - \mathrm{rank}\left(A^2\right) = 2$. ניקח $v \in \ker\left(T^3\right) \backslash \ker\left(T^2\right)$ ואז יתקיים $T^3\left(v\right) = 0$ וגם $T^2\left(v\right) \neq 0$. למשל, ניקח $v = e_1$, ואת הבסיס

$$\left(T^2\left(e_1\right), T\left(e_1\right), e_1\right) = \left(e_1 - e_3, e_2 - e_3, e_1\right).$$

כעת, יתכנו אופרטורים נילפוטנטיים שאינם אופרטורי הזזה. באופן כללי, עבור אופרטורים כאלה, נשלים בסיס של $\ker\left(T^{k-1}\right)$ לבסיס של $\ker\left(T^k\right)$ ונסתכל על השרשראות $\left(T^{k-1}\left(v\right), \ldots, T\left(v\right), v\right)$ שמתקבלות מהוקטורים המתאימים. אם שרשור השרשראות מאורך ששווה למימד של V, נקבל בסיס ז'ורדן

$$\left(T^{k-1}\left(v_1\right), \ldots, T\left(v_1\right), v_1, T^{k-1}\left(v_2\right), \ldots, T\left(v_2\right), v_2, \ldots, T^{k-1}\left(v_k\right), \ldots, T\left(v_k\right), v_k\right).$$

אבל, יתכן שזה לא המצב. במקרה זה, נחפש שרשראות קצרות יותר, שיתחילו בוקטורים באיזשהו $v \in \ker\left(T^i\right) \setminus \ker\left(T^{i-1}\right)$ ויהיו מהצורה

$$\left(T^{i-1}\left(v\right), \ldots, T\left(v\right), v\right).$$

נראה בהמשך נוסחא לחישוב מספר בלוקי ז'ורדן מכל גודל, וכיוון שכל שרשרת כזאת תתאים לבלוק ז'ורדן, נוכל לדעת בדיוק אילו ערכי i לבדוק.

הערה 5.1.3. בכל שרשרת ז'ורדן עבור T יש וקטור עצמי יחיד. לכן עבור אופרטור נילפוטנטי T הריבוי הגיאומטרי של 0 הוא מספר בלוקי הז'ורדן של T.

הערה 5.1.4. עבור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ עם צורת ז'ורדן, עבור $n = \dim V$ ועבור $i \in [n]$, ההפרש

$$\dim\ker\left(T^i\right) - \dim\ker\left(T^{i-1}\right)$$

הוא מספר הוקטורים v בבסיס ז'ורדן של T עבורם $T^i\left(v\right) = 0$ אבל $T^{i-1}\left(v\right) \neq 0$, כלומר מספר שרשראות הז'ורדן מאורך לפחות i בבסיס ז'ורדן.
לכן

$$\dim\ker\left(T^i\right) - \dim\ker\left(T^{i-1}\right)$$

הוא בדיוק מספר הבלוקים מגודל לפחות i בצורת ז'ורדן של T.
אז, מספר הבלוקים מגודל בדיוק i הוא מספר הבלוקים מגודל לפחות i פחות מספר הבלוקים מגודל לפחות $i+1$, שהוא

$$\dim\ker\left(T^i\right) - \dim\ker\left(T^{i-1}\right) - \left(\dim\ker\left(T^{i+1}\right) - \dim\ker\left(T^i\right)\right) = 2\dim\ker\left(T^i\right) - \dim\ker\left(T^{i+1}\right) - \dim\ker\left(T^{i-1}\right).$$

תרגיל 5.4. מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}\left(n\right).$$

פתרון. A_n משולשת עליונה, לכן הערכים העצמיים שלה הם על האלכסון. לכן 0 ערך עצמי מריבוי אלגברי n. מתקיים $r\left(A\right) = n - 1$ כי השורות בלתי־תלויות לינארית, ולכן הריבוי הגיאומטרי של A הוא 1. נקבל כי בצורת ז'ורדן של A יש בלוק יחיד, כלומר $A \sim J_n\left(0\right)$.

תרגיל 5.5. יהי $V = \mathbb{C}^7$, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V\right)$ אופרטור הזזה ביחס לבסיס הסטנדרטי, ויהי $S = T^3$. מיצאו בסיס ז'ורדן עבור S.

פתרון. נשים לב ראשית שמתקיים

$$S\left(e_i\right) = \begin{cases} e_{i-3} & i > 3 \\ 0 & i \leq 3 \end{cases}.$$

מתקיים אם כן $S^2\left(e_7\right) = e_{7-2\cdot3} = e_1 \neq 0$ וגם $S^3 = 0$ ולכן S נילפוטנטי מאינדקס 3. מתקיים $\ker\left(S^2\right) = \mathrm{Span}\left(e_1, \ldots, e_6\right)$. ניקח $e_7 \in \ker\left(S^3\right) \backslash \ker\left(S^2\right)$ שיתאים לשרשרת ז'ורדן $\left(S^2\left(e_7\right), S\left(e_7\right), e_7\right) = \left(e_1, e_4, e_7\right)$.
אורך השרשרת הוא 3 ואילו $\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^7\right) = 7$, ולכן יש למצוא עוד שרשראות ז'ורדן.
מתקיים $\dim\ker\left(S^2\right) - \dim\ker\left(S\right) = 6 - 3 = 3$, וכפי שראינו זה מספר בלוקי הז'ורדן מגודל לפחות 2 לכן נחפש עוד שני וקטורים כאן, שיפתחו שרשראות נוספות. מתקיים $e_5, e_6 \in \ker\left(S^2\right) \setminus \ker\left(S\right)$ ושני

וקטורים אלו יחד בלתי תלויים בשרשרת (e_1,e_4,e_7) שמצאנו. נשרשר את השרשרת שמצאנו עם השרשראות $(S(e_6),e_6),(S(e_5),e_5)$ ונקבל בסיס ז'ורדן

$$B=(e_1,e_4,e_7,e_2,e_5,e_3,e_6)$$

שעבורו

$$[T]_B=\begin{pmatrix} J_3(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(0)\end{pmatrix}.$$

נשים לב שהבלוק מגודל 3 מופיע ראשון בדיוק כי השרשרת מאורך 3 היא זאת שכתבנו ראשונה. אם היינו משנות את סדר השרשראות, היה משתנה סדר הבלוקים.

תרגיל 5.6. 1. הראו כי $J_n(\lambda)^t\cong J_n(\lambda)$, מעל $\mathbb{C}$.

2. הסיקו כי $A\cong A^t$ לכל $A\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

פתרון. 1. נכתוב $T=T_{J_n(\lambda)^t}$ ונרצה למצוא בסיס B עבורו $[T]_B=J_n(\lambda)$. נניח תחילה כי $\lambda=0$ כשבמקרה זה מתקיים

$$T(e_i)=\begin{cases}e_{i+1} & i<n\\ 0 & i=n\end{cases}.$$

אז הבסיס $B=(e_n,e_{n-1},\dots,e_2,e_1)$ מקיים את הנדרש.

באופן כללי,

$$T=T_{J_n(0)^t+\lambda I}=T_{J_n(0)^t}+\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$$

ולכן

$$[T]_B=\left[T_{J_n(0)^t}\right]_B+\lambda\left[\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\right]_B=J_n(0)+\lambda I=J_n(\lambda)$$

ולכן הבסיס B עדיין עובד.

2. ממשפט ז'ורדן, קיימת מטריצה הפיכה $P\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ עבורה $P^{-1}AP=\mathrm{diag}\,J_{m_1}(\lambda_1),\dots,J_{m_k}(\lambda_k)$ מטריצה אלכסונית בלוקים עם בלוקים $J_{m_i}(\lambda_i)$. אז

$$P^tA^t\left(P^t\right)^{-1}=\mathrm{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1)^t,\dots,J_{m_k}(\lambda_k)^t\right).$$

בעת, $J_{m_1}(\lambda_1)^t\cong J_{m_1}(\lambda_1)$ ולכן קיימות מטריצות $Q_i\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ הפיכות עבורן $Q_i^{-1}J_{m_i}(\lambda_i)^tQ_i=J_{m_i}(\lambda_i)$. ולכן אם נסמן $Q:=\mathrm{diag}(Q_1,\dots,Q_n)$ נקבל כי

$$\begin{aligned}Q^{-1}\left(P^tA^t\left(P^t\right)^{-1}\right)Q&=Q^{-1}\,\mathrm{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1)^t,\dots,J_{m_k}(\lambda_k)^t\right)Q\\&=\mathrm{diag}\left(Q_1^{-1}J_{m_1}(\lambda_1)^tQ_1,\dots,Q_k^tJ_{m_k}(\lambda_k)^tQ_k\right)\\&=\mathrm{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1),\dots,J_{m_k}(\lambda_k)\right)\\&=P^{-1}AP\end{aligned}$$

בלומר

$$A=\left(PQ^{-1}P^t\right)A^t\left(\left(P^t\right)^{-1}QP^{-1}\right)=\left(PQ^{-1}P^t\right)A^t\left(PQ^{-1}P^t\right)^{-1}$$

ולכן $A\cong A^t$.

5.2 משפט ז'ורדן הכללי

לאחר שהבנו כיצד למצוא בסיס ז'ורדן עבור אופרטורים נילפוטנטיים, נוכל לדבר על אופרטורים כלליים. אם $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, נוכל לכתוב

$$V=V'_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus V'_{\lambda_k}$$

כאשר V'_{λ_i} מרחבים עצמיים מוכללים, שהינם T־שמורים. כדי למצוא את הבלוקים עם ערך עצמי λ_i נסתכל על $T|_{V'_{\lambda_i}}-\mathrm{Id}_{V'_{\lambda_i}}$ שהינו אופרטור נילפוטנטי על V'_{λ_i}, וניעזר באלגוריתם למציאת בסיס ז'ורדן למקרה הנילפוטנטי.

הגדרה 5.2.1 (מרחב עצמי מוכלל). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נסמן $n:=\dim_{\mathbb{F}}(V)$. המרחב העצמי המוכלל של T עבור $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא

$$V'_\lambda:=\ker\left(\left(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V\right)^n\right).$$

משפט 5.2.2 (פירוק למרחבים עצמיים מוכללים). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה סגור אלגברית, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ הערבים העצמיים השונים של T. אז V'_{λ_i} הינו T־שמור לבל $i \in [k]$, וגם

$$V = \bigoplus V'_{\lambda_i}.$$

לפני שנתאר את האלגוריתם הבללי, נזביר תבונות שראינו בהרצאה.

טענה 5.2.3. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה סגור אלגברית, ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

1. מספר הבלוקים עם ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ בצורת ז'ורדן של T הוא $r_g(\lambda)$, וסבום גדלי הבלוקים עם ערך עצמי λ הוא $r_a(\lambda)$.
2. הבלוק המקסימלי עם ערך עצמי λ בצורת ז'ורדן של T שווה לאינדקס הנילפוטנטיות של $T|_{V'_\lambda} - \mathrm{Id}_{V'_\lambda}$ באשר V'_λ המרחב העצמי המובלל של λ עבור T.
3. מספר הבלוקים עם ערך עצמי λ שהינם מגודל לפחות r הוא

$$\dim\ker\left(\left(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V\right)^r\right) - \dim\ker\left(\left(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V\right)^{r-1}\right).$$

4. מספר הבלוקים עם ערך עצמי λ מגודל בדיוק r הוא

$$2\dim\ker\left(\left(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V\right)^r\right) - \dim\ker\left(\left(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V\right)^{r+1}\right) - \dim\ker\left(\left(T-\lambda\,\mathrm{Id}_V\right)^{r-1}\right).$$

5.2.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור אופרטור בללי

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי n מעל שדה סגור אלגברית $\mathbb{F}$, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הערבים העצמיים השונים של T. בדי למצוא בסיס ז'ורדן עבור T נסתבל על בל ערך עצמי בנפרד. לבל ערך עצמי λ האופרטור $T|_{V'_\lambda} - \mathrm{Id}_{V'_\lambda}$ נילפוטנטי ולבן מהאלגוריתם במקרה הנילפונטי נובל לקבל בסיס ז'ורדן B_λ עבורו. נשרשר את בל הבסיסים הללו ונקבל בסיס ז'ורדן $B = B_{\lambda_1} \cup \ldots \cup B_{\lambda_k}$ עבור T.

תרגיל 5.7. ידוע בי בל הערבים העצמיים של

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_6(\mathbb{C})$$

רציונליים. מצאו צורת ובסיס ז'ורדן עבור A.

פתרון. נסמן $V = \mathbb{C}^6$.
חישוב ישיר נותן

$$p_A(x) = \det(xI - A) = x^6 - 15x^5 + 93x^4 - 305x^3 + 558x^2 - 540x + 216.$$

ממשפט ניחוש השורש הרציונלי אפשר למצוא את השורשים ולקבל

$$p_A(x) = (x-2)^3(x-3)^3.$$

נסתבל על הערבים העצמיים $2, 3$ בנפרד.

$\lambda = 3$: מתקיים

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ומרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הוא

$$.\ker\left(T_A - 3\,\mathrm{Id}_V\right) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

חישוב ישיר נותן כי

$$\ker\left(\left(T_A - 3\,\mathrm{Id}_V\right)^2\right) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, e_3\right\}$$

וגם

$$.\ker\left(\left(T_A - 3\,\mathrm{Id}_V\right)^3\right) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, e_3, e_4\right\}$$

אז, e_4 פותח שרשרת ז'ורדן

$$.B_3 = \left((A-3I)^2 e_4, (A-3I)\,e_4, e_4\right) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_3, e_4\right)$$

$\lambda = 2$: מתקיים

$$\ker\left(T_A - 2\,\mathrm{Id}_V\right) = \mathrm{Span}\left\{e_6, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן יש ל־2 ריבוי גיאומטרי 2. אז יש שני בלוקי ז'ורדן עבור הערך העצמי 2, ולכן השרשרת המקסימלית מגודל 2. אפשר לראות כי סכום העמודות של

$$A - 2I = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

שווה 0, ולכן $e_1 \in \ker\left(\left(T_A - \mathrm{Id}_V\right)^2\right)$ ונקבל

$$\ker\left(\left(T_A - \mathrm{Id}_V\right)^2\right) = \mathrm{Span}\left\{e_6, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, e_1\right\}.$$

אז e_1 מתחיל שרשרת ז'ורדן

$$\left(\left(A-2I\right)e_1, e_1\right) = \left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_1\right).$$

חסרה שרשרת ז'ורדן מאורך 1 עבור $\lambda = 2$. היא וקטור עצמי של 2 שאינו תלוי ב־$\left(\left(A-2I\right)e_1, e_1\right)$. למשל, e_6 הוא כזה וקטור עצמי.

נקבל בסיס ז'ורדן

$$B_2 \coloneqq \left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_1, e_6\right)$$

של $T|_{V_2'}$.

סיכום: נסדר את השרשראות השונות בבסיס ונקבל בסיס ז'ורדן

$$B = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_3, e_4, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, e_1, e_6\right)$$

לפיו

$$\left[T_A\right]_B = \mathrm{diag}\left(J_3\left(3\right), J_2\left(2\right), J_1\left(2\right)\right).$$

תרגיל 5.8. הראו כי

$$J_n\left(\lambda\right)^r = \begin{pmatrix}\lambda^r & \binom{r}{1}\lambda^{r-1} & \binom{r}{2}\lambda^{r-2} & \cdots & \\ & \lambda^r & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \binom{r}{2}\lambda^{r-2} \\ & & & \lambda^r & \binom{r}{1}\lambda^{r-1} \\ & & & & \lambda^r\end{pmatrix}.$$

פתרון. מתקיים

$$J_n(\lambda)^r = (J_n(0) + \lambda I)^r$$

כאשר λI , $J_n(0)$ מתחלפות כי λI סקלרית. נקבל מהבינום של ניוטון כי

$$J_n(\lambda)^r = \lambda^r I + \binom{r}{1}\lambda^{r-1}J_n(0) + \binom{r}{2}\lambda^{r-2}J_n(0)^2 + \dots$$

כאשר $J_n(0)^k$ היא מטריצה עם אפסים פרט ל־1 באלכסון ה־k מעל האלכסון הראשי. לכן

$$J_n(\lambda)^r = \begin{pmatrix} \lambda^r & \binom{r}{1}\lambda^{r-1} & \binom{r}{2}\lambda^{r-2} & \cdots & \\ & \lambda^r & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \binom{r}{2}\lambda^{r-2} \\ & & & \lambda^r & \binom{r}{1}\lambda^{r-1} \\ & & & & \lambda^r \end{pmatrix},$$

כנדרש.

תרגיל 5.9. תהי

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}).$$

חשבו את A^{2025}.

פתרון. נסמן $V = \mathbb{C}^3$ ונמצא בסיס ז'ורדן B עבור A. אז נקבל $P \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ עבורה $J := PAP^{-1}$ מטריצת ז'ורדן, ואז

$$A^{2025} = \left(P^{-1}JP\right)^{2025} = P^{-1}J^{2025}P$$

כאשר מהחישוב הנ"ל נדע לחשב את J^{2025}.

ערכים עצמיים: ניתן לראות כי 9 ערך עצמי של A כי $Ae_3 = 9e_3$. נסמן ב־λ_1, λ_2 את הערכים העצמיים הנוספים ונקבל

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 9 = \mathrm{tr}(A) = 9$$
$$9\lambda_1\lambda_2 = \det(A) = 9(-4+4) = 0$$

לכן $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

נקבל כי 9 ערך עצמי מריבוי אלגברי 1 וכי 0 ערך עצמי מריבוי אלגברי 2. בפרט, (e_3) שרשרת ז'ורדן עבור הערך העצמי 9.

שרשרת ז'ורדן עבור $\lambda = 0$: ניתן לראות כי $r(A) = 2$ ולכן $\dim\ker(T_A) = 1$. נשים לב כי

$$2e_1 - e_2 - e_3 \in \ker(L_A)$$

ולכן

$$\ker(T_A) = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 - e_3).$$

מתקיים

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 81 & 81 & 81 \end{pmatrix}$$

לכן נוכל להשלים את $(2e_1 - e_2 - e_3)$ לבסיס

$$(2e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3)$$

של $\ker\left(T_A^2\right)$. מתקיים

$$A\left(e_1 - e_3\right) = 2e_1 - e_2 - e_3$$

לכן נקבל שרשרת ז'ורדן

$$\left(A\left(e_1 - e_3\right), e_1 - e_3\right) = \left(2e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3\right).$$

מסקנה: קיבלנו

$$B \coloneqq \left(2e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3, e_3\right)$$

עבורו

$$[T_A]_B = J \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$A = [T_A]_E = [\mathrm{Id}_V]_E^B [T_A]_B [\mathrm{Id}_V]_B^E.$$

נסמן

$$P \coloneqq [\mathrm{Id}_V]_E^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

שעמודותיה הן וקטורי הבסיס B, ונקבל

$$A = PJP^{-1}.$$

אז

$$\begin{aligned} A^{2025} &= PJ^{2025}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9^{2025} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9^{2025} & 9^{2025} & 9^{2025} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

חלק II

חלק שני – מרחבי מכפלה פנימית ואלגברה מולטי־לינארית

פרק 6

מרחבי מכפלה פנימית

6.1 מוטיבציה

נסתכל תחילה על המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^n$. כיוון שנוכל לחשוב על וקטורים ב־$\mathbb{R}^n$ בתור נקודות במרחב, נוכל לחשוב על המרחק בין שני וקטורים $u, v \in \mathbb{R}^n$, שנסמנו $d(u, v)$.
כדי לחשב מרחק כזה, נסתכל על האורך של הקטע המחבר בין u, v, וזה אותו אורך כמו של הקטע המחבר בין $0, u - v$. לכן, $d(u, v) = d(0, u - v)$. נקרא למרחק $d(0, u - v)$ האורך של $u - v$, כיוון שזה האורך של הקו המחבר בין $0, u - v$, ונסמנו $\|u - v\|$ בדומה לסימון $|z|$ של ערך מוחלט ב־$\mathbb{C}$. נוכל להשתמש במשפט פיתגורס כדי לקבל כי

$$\left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$$

ולמשל מתקיים $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + ib|$.

בשמדובר על גיאומטריה אוקלידית, מושג חשוב בנוסף למרחק ואורך הוא זה של זווית. נסתכל על שני וקטורים u, v באורך 1 ועל הישרים ℓ_u, ℓ_v שעוברים דרכם. הקוסינוס $\cos(\alpha)$ של הזווית מ־ℓ_u ל־ℓ_v שווה לאורך של הוקטור שהקצה שלו הוא החיתוך בין ℓ_u לאנך מ־v ל־ℓ_u. נסמן וקטור זה $\langle v, u\rangle u$, כיוון שהוא אכן כפולה של u מהיותו על ℓ_u. במקרה זה נקרא לו ההטלה של v על u. אז יתקיים

$$\cos(\alpha) = \langle v, u\rangle$$

ולכן

$$\alpha = \arccos(\langle v, u\rangle).$$

כדי להכליל את המושג של זווית, נכליל את הביטוי $\langle v, u\rangle$ באמצעות ההגדרה הבאה, של מכפלה פנימית.

6.2 הגדרות

הגדרה 6.2.1 (מכפלה פנימית). יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

המקיימת את התכונות הבאות.

חיוביות: לכל $v \in V \setminus \{0\}$ מתקיים $\langle v, v\rangle \geq 0$.

סימטריות (הרמיטיות): לכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$.

לינאריות ברכיב הראשון: לכל $u, v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$\langle \alpha u + v, w\rangle = \alpha \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle.$$

מרחב וקטורי V יחד עם מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ נקרא מרחב מכפלה פנימית.

הערה 6.2.2. בודגמא מהמרחב האוקלידי, ניתן לראות שנובע מהדרישה הגיאומטרית שלנו כי

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i\in[n]} u_i v_i$$

עבור $u, v \in \mathbb{R}^n$ מאורך 1. נוכל בעצם להגדיר זאת עבור וקטור כללי, ונשים לב כי הדבר אכן מקיים את שלוש התכונות הדרושות, ולכן הינו מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$.
מכפלה פנימית זאת נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$ ולעתים נסמן אותה $u \cdot v := \langle u, v\rangle_{\mathrm{std}}$.

תרגיל 6.1. קיבעו אלו מההעתקות הבאות הן מכפלות פנימיות.

.1

$$\begin{aligned} f_1 \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}\right) \mapsto ax + by + (cz)^2\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} f_2 \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z\end{pmatrix}\right) \mapsto ax + by + cz\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned} f_3 \colon \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C} \\ \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}\right) \mapsto ax + by + cz\end{aligned}$$

.4

$$\begin{aligned} f_4 \colon \ \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto \mathrm{tr}\left(B^t A\right)\end{aligned}$$

.5

$$\begin{aligned} f_5 \colon \ \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ (A, B) \mapsto \mathrm{tr}\left(B^t A\right)\end{aligned}$$

פתרון. אף אחת מההעתקות אינה מכפלה פנימית.

1. ההעתקה f_1 אינה לינארית ברכיב הראשון, כי

$$f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right) = 1$$

ואילו

$$f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right) = 2^2 = 4 \neq 2 = 2f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right).$$

2. ההעתקה f_2 אינה חיובית, כי
$$f_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=0\leq 0.$$

3. ההעתקה f_3 אינה הרמיטית, כי
$$f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right)=i$$
ואילו
$$\overline{f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right)}=\bar{i}=-i\neq i=f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

ההעתקה f_4 היא אכן מכפלה פנימית. מתקיים כי
$$f_4\left(A,B\right)=\sum_{i,j\in[n]}a_{i,j}b_{i,j}.$$

אז f סימטרית כי
$$\sum_{i,j\in[n]}a_{i,j}b_{i,j}=\sum_{i,j\in[n]}b_{i,j}a_{i,j},$$

חיובית כי
$$\sum_{i,j\in[n]}a_{i,j}^2=0$$

גורר כי $a_{i,j}=0$ לכל $i,j\in[n]$, ולכן $A=0$, ולינארית ברכיב הראשון כי עבור מטריצות $A_1,A_2,B\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{R}\right)$ וסקלר $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים
$$\begin{aligned}f\left(\alpha A_1+A_2,B\right)&=\sum_{i,j\in[n]}\left(\alpha\left(A_1\right)_{i,j}+\left(A_2\right)_{i,j}\right)b_{i,j}\\&=\alpha\sum_{i,j\in[n]}\left(A_1\right)_{i,j}+\sum_{i,j\in[n]}\left(A_2\right)_{i,j}b_{i,j}\\&=\alpha f\left(A_1,B\right)+f\left(A_2,B\right)\end{aligned}$$

ההעתקה f_5 אינה הרמיטית, כי $f_4\left(I_n,iI_n\right)=\mathrm{tr}\left(iI_n\right)=in$ ואילו
$$f_4\left(iI_n,I_n\right)=\mathrm{tr}\left(iI_n\right)=in\neq\overline{in}=\overline{f_4\left(I_n,iI_n\right)}.$$

6.3 תבונות של מכפלות פנימיות, ונורמות

במרחב האוקלידי, כאשר $\|u\|=\|v\|=1$, אמרנו שהערך $|\langle u,v\rangle|$ שווה לאורך של ההטלה של v על u (או להיפך, כי המכפלה הפנימית סימטרית). בפרט, אורך זה יכול להיות לכל היותר 1, והינו שווה 1 אם ורק אם $u=v$, כי אחרת ההטלה תהיה קצרה יותר.
ניעזר בלינאריות של המכפלה הפנימית ונקבל כי לוקטורים $u,v\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ כלליים מתקיים
$$\begin{aligned}|\langle u,v\rangle|&=\left\langle\|u\|\frac{u}{\|u\|},\|v\|\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\\&=\|u\|\,\|v\|\left|\left\langle\frac{u}{\|u\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right|\\&\leq\|u\|\,\|v\|\end{aligned}$$

כאשר $\left|\left\langle\frac{u}{\|u\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right|\leq 1$ כי הוקטורים $\frac{u}{\|u\|},\frac{v}{\|v\|}$ הינם מאורך 1.
אי־שוויון כזה מתקבל גם במרחב מכפלה פנימית כללי, כפי שקובע אי־שוויון קושי־שוורץ, אך לשם כך עלינו להגדיר מושג של אורך בהגדרה הבאה.

הגדרה 6.3.1 (נורמה). יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. נורמה על V היא פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות הבאות.

חיוביות: לכל $v \in V \setminus \{0\}$ מתקיים $\|v\| > 0$.

הומוגניות: לכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

אי־שוויון המשולש: לכל $u, v \in V$ מתקיים $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

מרחב וקטורי עם נורמה נקרא מרחב נורמי.

משפט 6.3.2 (נורמה המושרית ממכפלה פנימית). יהי V מרחב מכפלה פנימית. הפונקציה $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ היא נורמה על V. נקרא לה הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

משפט 6.3.3 (אי־שוויון קושי־שוורץ). יהי V מרחב מכפלה פנימית. אז לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם u, v תלויים לינארית.

תרגיל 6.2. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in V$. הראו שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2}.$$

פתרון. נרצה לפרש את אגף שמאל בתור מכפלה פנימית. כיוון שהוא מזכיר את המכפלה הפנימית על $\mathbb{R}^n$, רק עם וקטורים מ־V במקום מספרים ב־$\mathbb{R}$, נרצה להגדיר מכפלה זאת על המרחב

$$V^n \coloneqq \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i \in V\}.$$

זה אכן מרחב וקטורי עם חיבור וכפל בסקלר לפי כל קואורדינטה בנפרד, ונגדיר עליו מכפלה פנימית לפי

$$\langle (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)\rangle \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle.$$

אם $v \coloneqq (v_1, \ldots, v_n) \neq (0, \ldots, 0)$, יש $v_j \neq 0$ ולכן

$$\langle v, v\rangle \geq \langle v_j, v_j\rangle > 0,$$

לכון מתקיימת חיוביות. סימטריה ולינאריות ברכיב הראשון מתקיימות בכל רכיב בנפרד, ולכן גם בסך הכל.
בעת, אי־שוויון קושי־שוורץ על V^n אומר לנו כי

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle\right| \\
&= |\langle u, v\rangle| \\
&\leq \|u\| \|v\| \\
&= \sqrt{\langle u, u\rangle} \cdot \sqrt{v, v} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, u_i\rangle} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle v_i, v_i\rangle} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2},
\end{aligned}$$

כנדרש.

ראינו שממכפלה פנימית ניתן לקבל נורמה המושרית ממנה. שאלה הגיונית לשאול היא האם כל נורמה מגיעה ממכפלה פנימית באופן זה. הטענה הבאה מתארת איך למצוא מכפלה פנימית כזאת, אם היא קיימת.

טענה 6.3.4 (זהות הפולריזציה). יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, לבל $u,v\in V$ מתקיים

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right).$$

2. אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, לבל $u,v\in V$ מתקיים

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2\right).$$

תרגיל 6.3. יהי $V=\mathbb{R}^n$ עם הנורמה $\|v\|_\infty=\max_{i\in[n]}|v_i|$. הראו כי נורמה זאת אינה מושרית ממכפלה פנימית.

פתרון. אם הנורמה מושרית ממכפלה פנימית, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, מתקיים מזהות הפולריזציה כי

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\left(\max_{i\in[n]}|u_i+v_i|\right)^2-\left(\max_{i\in[n]}|u_i-v_i|\right)^2\right).$$

אבל זאת לא מכפלה פנימית, למשל כי אינה לינארית. מתקיים

$$\langle e_1,e_2\rangle=\frac{1}{4}\left(1^2-1^2\right)=0$$
$$\langle e_2,e_2\rangle=\frac{1}{4}\left(2^2-0^2\right)=1$$

ואילו

$$\langle e_1+e_2,e_2\rangle=\frac{1}{4}\left(2^2+1^2\right)=\frac{5}{4}\neq 1+0.$$

יש לנו דרך נוספת לבדוק האם נורמה מושרית ממכפלה פנימית.

משפט 6.3.5 (זהות המקבילית). יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי. הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם לבל u,v מתקיים

$$2\|u\|^2+2\|v\|^2=\|u+v\|^2+\|u-v\|^2.$$

תרגיל 6.4. הראו שהנורמה

$$\|p\|=|p(0)|+|p(1)|+|p(2)|$$

על $\mathbb{R}_2[x]$ אינה מושרית ממכפלה פנימית.

פתרון. נראה שלא מתקיימת זהות המקבילית. נסתכל על הפולינומים $p(x)=x, q(x)=x^2-1$. אז

$$\|p\|=0+1+2=3$$
$$\|q\|=1+0+3=4$$
$$\|p+q\|=1+1+5=7$$
$$\|p-q\|=1+1+1=3$$

ולכן

$$2\left(\|p\|^2+\|q\|^2\right)=2(9+16)=50$$
$$\|p-q\|^2+\|p-q\|^2=49+9=58$$

ערכים שונים.

6.4 מטריקות וניצבות

ראינו שבמרחבי מכפלה פנימית יש מושג של אורך—נורמה. על מרחב נורמי יש גם מושג של מרחק.

הגדרה 6.4.1 (מטריקה). תהי X קבוצה. מטריקה על X היא פונקציה $d\colon X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימת את התכונות הבאות.

חיוביות: $d(x,y)\geq 0$ וגם $d(x,y)=0$ אם ורק אם $x=y$.

סימטריה: $d(x,y)=d(y,x)$.

אי־שוויון המשולש: $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

קבוצה עם מטריקה נקראת מרחב מטרי.

הגדרה 6.4.2 (מטריקה המושרית מנורמה). יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. המטריקה המושרית על V היא $d(x,y) = \|x-y\|$.

כעת, את המרחק בין שני שני וקטורים קל בדרך כלל לחשב כאשר יש לנו נורמה נתונה. מעט מסובך יותר לחשב את המרחב מוקטור לקבוצה.

הגדרה 6.4.3 (מרחק מקבוצה). יהי (X,d) מרחב מטרי, יהי $x \in X$ ותהי $S \subseteq X$. נגדיר את המרחק של x מ־S להיות

$$d(x,S) \coloneqq \inf\{d(x,s) \mid s \in S\}.$$

תת־קבוצות של מרחב וקטורי שמעניינות אותנו הן בדרך כלל תת־מרחבים. במקרה האוקלידי, אנו יודעות כיצד לחשב את המרחק מתת־מרחב. כדי לחשב את $d(x,W)$ עבור $W \le \mathbb{R}^n$, נעביר אנך מ־x ל־W ונחשב את המרחק בין x ונקודת החיתוך בין W לאנך.
כדי לעשות דבר דומה במרחבי מכפלה פנימית כלליים, נצטרך לדבר קודם כל על ניצבות.

הגדרה 6.4.4 (זווית במרחב מכפלה פנימית). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u,v \in V$. נגדיר את הזווית בין u,v בתור

$$\angle(u,v) = \arccos\left(\frac{\Re(\langle u,v\rangle)}{\|u\|\,\|v\|}\right).$$

הגדרה 6.4.5 (וקטורים ניצבים). יהי V מרחב מכפלה פנימית. וקטורים $u,v \in V$ נקראים ניצבים אם $\langle u,v\rangle = 0$. במקרה זה נסמן $u \perp v$.

הערה 6.4.6. מעל $\mathbb{R}$, וקטורים ניצבים בדיוק כאשר הזווית בינם היא $\frac{\pi}{2}$.

הגדרה 6.4.7. קבוצה $S \subseteq V$ במרחב מכפלה פנימית נקראת אורתוגונלית אם $s_1 \perp s_2$ לכל $s_1, s_2 \in S$ שונים.

משפט 6.4.8 (פיתגורס). תהי $(v_1, \ldots, v_n)$ סדרה של וקטורים אורתוגונליים במרחב מכפלה פנימית V. אז

$$\|v_1 + \ldots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2 .$$

תרגיל 6.5. יהי V מרחב מכפלה פנימית.

1. הוכיחו כי אם $\langle v,w\rangle = 0$ לכל $w \in V$ אז $v = 0$.
2. הוכיחו כי אם $\langle v,w\rangle = \langle u,w\rangle$ לכל $w \in V$ אז $v = u$.
3. הוכיחו כי אם $T,S \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ו־$\langle Tu,v\rangle = \langle Su,v\rangle$ לכל $u,v \in V$ אז $T = S$.

פתרון.

1. ניקח $w = v$ ונקבל
$$\langle v,v\rangle = 0 .$$
ולכן $v = 0$.

2. נעביר אגף ונקבל
$$\langle v-u,w\rangle = 0$$
לכל $w \in V$. אז מהסעיף הקודם $v - u = 0$ ולכן $v = u$.

3. נעביר אגף ונקבל
$$\langle (T-S)(u), v\rangle = 0 .$$
לכל $u,v \in V$. אז עבור כל $u \in V$ מתקיים $(T-S)(u) = 0$, ולכן $T(u) = S(u)$.

6.5 בסיסים אורתונורמליים והמרחב הניצב

בעת, כדי לדבר על המרחק של וקטור $v \in V$ מתת־מרחב $W \leq V$, נרצה לכתוב את v בתור סכום של שני וקטורים, כאשר אחד מהם מ־W והשני ניצב ל־W. ראינו כי $V = W \oplus W^{\perp}$ עבור $W^{\perp}$ תת־המרחב של הוקטורים הניצבים ל־W ולכן זה אפשרי. ככה, ושהמרחק יצא, כמו במקרה האוקלידי, האורך של החלק הניצב ל־W.

הגדרה 6.5.1 (מרחב ניצב). יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $S \subseteq V$. המרחב הניצב ל־S הוא

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \forall s \in S \colon v \perp s\}.$$

טענה 6.5.2. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. מתקיים $V = W \oplus W^{\perp}$.

תרגיל 6.6. יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהיינה $S, T \subseteq V$.

1. נניח כי $S \subseteq T$. הראו כי $T^{\perp} \subseteq S^{\perp}$.
   התאמה בזאת, כמו $S \mapsto S^{\perp}$, שהופכת יחס הכלה, נקראת התאמת גלואה.
2. נסמן $W = \operatorname{Span}(S)$. הראו כי $S^{\perp} = W^{\perp}$.
3. הראו כי $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{Span}(S)$.

פתרון.
1. יהי $v \in T^{\perp}$ ויהי $s \in S$. אז $s \in T$ כי $S \subseteq T$, ולכן $v \perp s$, כי v ניצב לכל וקטור ב־T. לכן $v \in S^{\perp}$.
2. מתקיים $S \subseteq W$ ולכן $W^{\perp} \subseteq S^{\perp}$. יהי $v \in S^{\perp}$ ויהי $w \in W$. כיוון ש־$W = \operatorname{Span}(S)$, יש איברים $s_1, \ldots, s_k$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ עבורם $w = \sum_{i \in [k]} \alpha_i s_i$. אז

$$\langle v, w \rangle = \left\langle v, \sum_{i \in [k]} \alpha_i s_i \right\rangle = \sum_{i \in [k]} \alpha_i \cancelto{0}{\langle v_i, s_i \rangle} = 0$$

   ולכן $v \in W^{\perp}$.
3. ראינו כי $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$ עבור $W \leq V$. ניקח $W = \operatorname{Span}(S)$. מתקיים $S \subseteq W$ ולכן $W^{\perp} \subseteq S^{\perp}$ ואז $W = \left(W^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. כמו כן, $S^{\perp} = W^{\perp}$ תת־מרחב וקטורי ומכיוון ש־$V = S^{\perp} \oplus \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$, נקבל כי

$$\dim\left(\left(S^{\perp}\right)^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim\left(S^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim\left(W^{\perp}\right) = \dim(W)$$

   ולכן יש שוויון $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = W = \operatorname{Span}(S)$.

הערה 6.5.3. לא יכולנו בתרגיל האחרון להניח כי S אינסופית. באופן כללי,

$$\operatorname{Span}(S) = \left\{ \sum_{i \in [k]} \alpha_i s_i \;\middle|\; \substack{\alpha_i \in \mathbb{F} \\ s_i \in S} \right\}$$

גם כאשר S אינסופית.

תרגיל 6.7. מצאו את $W^{\perp}$ עבור

$$W \coloneqq \operatorname{Span}(e_1 + e_2) \leq \mathbb{R}^2.$$

פתרון. ראינו כי מתקיים $v \in \operatorname{Span}(e_1 + e_2)^{\perp}$ אם ורק אם $v \perp e_1 + e_2$. זה מתקיים אם ורק אם $v_1 + v_2 = 0$ אם ורק אם $v_2 = -v_1$. לכן

$$W^{\perp} = \operatorname{Span}(e_1 - e_2).$$

הגדרה 6.5.4 (בסיס אורתונורמלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית. בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ של V נקרא אורתוגונלי אם $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ לכל $i \neq j$, ואורתונורמלי אם $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} \coloneqq \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$.

הגדרה 6.5.5 (הטלה אורתוגונלית). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. ההטלה האורתוגונלית על W היא ההטלה על W ביחס לסכום הישר $V = W \oplus W^{\perp}$.

טענה 6.5.6. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. יהי $B = (w_1, \ldots, w_m)$ בסיס **אורתונורמלי** של W ויהי $v \in V$. תהי P_W ההטלה האורתוגונלית על W. אז

$$P_W(w) = \sum_{i \in [m]} \langle v, w_i \rangle w_i.$$

תרגיל 6.8. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, v \in V$. הראו כי $u \perp v$ אם ורק אם

$$\|u\| \leq \|u + av\|$$

לכל $a \in \mathbb{F}$.

פתרון. אם $u \perp v$ ו־$a \in \mathbb{F}$, נקבל מפיתגורס

$$\|u + av\|^2 = \|u\|^2 + |a|^2 \|v\|^2 \geq \|u\|^2$$

ולכן $\|u\| \leq \|u + av\|$.
נניח כי $\langle u, v \rangle \neq 0$ ונניח תחילה כי $\|v\| = 1$. אז

$$\langle \langle u, v \rangle v, v \rangle = \langle u, v \rangle \langle v, v \rangle = \langle u, v \rangle \|v\|^2 = \langle u, v \rangle \neq 0$$

וגם

$$\langle u - \langle u, v \rangle v, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle \langle u, v \rangle v, v \rangle = 0 \,.$$

אז, ממשפט פיתגורס

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|u - \langle u, v \rangle v + \langle u, v \rangle v\|^2 \\ &= \|u - \langle u, v \rangle v\|^2 + \|\langle u, v \rangle v\|^2 \\ &> \|u - \langle u, v \rangle v\|^2 \end{aligned}$$

כאשר האי־שוויון חזק כי $\langle u, v \rangle v \neq 0$ מההנחה $\langle u, v \rangle \neq 0$. לכן, עבור $a = \langle u, v \rangle$ לא מתקיים $\|u\| \leq \|u + av\|$.
בעת, אם v כללי, הוקטור $\frac{v}{\|v\|}$ הינו מאורך 1 ולכן יש $a' \in \mathbb{F}$ עבורו $\left\| u + a' \frac{v}{\|v\|} \right\| < \|u\|$. אז ניקח $a = \frac{a'}{\|v\|}$ ונקבל כי $\|u\| > \|u + av\|$.

כדי למצוא בסיסים אורתונורמליים ומשלימים ישרים, ניעזר בתהליך שלוקח בסיס כלשהו ומחזיר בסיס אורתונורמלי.

משפט 6.5.7 (גרם־שמידט). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $B = (u_1, \ldots, u_n)$ בסיס של V. קיים בסיס אורתונורמלי $C = (v_1, \ldots, v_n)$ של V עבורו

$$\operatorname{Span}(u_1, \ldots, u_i) = \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_i)$$

לכל $i \in [n]$.

ניסוח זה של המשפט לא מתאר לנו איך למצוא את C, אבל ההוכחה שלו קונסטרוקטיבית ומתארת את האלגוריתם הבא.

1. עבור $i = 1$ ניקח $v_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$.
2. עבור כל i לאחר מכן, לפי הסדר, ניקח

$$w_i = u_i - \sum_{j \in [i-1]} \langle u_i, v_j \rangle$$

ואז $v_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$.

מסקנה 6.5.8. יהי $W \leq V$ תת־מרחב במרחב מכפלה פנימית. כדי למצוא אורתונורמלי של W ושל $W^\perp$ ניקח בסיס B_W של W ונשלים אותו לבסיס $B = B_W \cup B'_W$ של V. נבצע את תהליך גרם־שמידט על B ונקבל בסיס $C = C_W \cup C_W^\perp$ כך ש־$\operatorname{Span}(C_W) = \operatorname{Span}(B_W) = W$. כל הוקטורים ב־$C_W^\perp$ ניצבים ל־W כי C אורתונורמלי, ולכן $W' := \operatorname{Span}\left(C_W^\perp\right) \subseteq W^\perp$. במו כן,

$$\dim(W') = \dim(V) - \dim(W) = \dim\left(W^\perp\right)$$

כי $V = W \oplus W' = W \oplus W^\perp$, ולכן יש שוויון $W' = W^\perp$.

משפט 6.5.9 (מרחק של וקטור מתת־מרחב). יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהי $W \leq V$, תהי P_W ההטלה האורתוגונלית על W ויהי $v \in V$. מתקיים

$$d(v, W) = d(v, p_W(v)).$$

תרגיל 6.9. יהי $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\left(B^t A\right)$$

ויהי $W \leq V$ התת־מרחב של המטריצות הסימטריות.

1. מיצאו בסיס אורתונורמלי עבור W ועבור $W^\perp$.
2. הראו כי $P_W(A) = \frac{A+A^t}{2}$ בשתי דרכים שונות.
3. חשבו את המרחק של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ מ־W.

פתרון. 1. ניקח בסיס $B_W = (E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2})$ של W ונשלים אותו לבסיס

$$B = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2}, E_{1,2})$$

של V. נבצע את תהליך גרם־שמידט כדי לקבל בסיס אורתונורמלי (v_1, v_2, v_3, v_4) עבורו $W = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$ וגם $W^\perp = \mathrm{Span}(v_4)$.

נחשב

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\|E_{1,1}\|} E_{1,1} = E_{1,1} \\
w_2 &= u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = E_{1,2} + E_{2,1} - 0 = E_{1,2} + E_{2,1} \\
v_2 &= \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2} + E_{2,1}) \\
w_3 &= u_3 - \langle u_3, v_2\rangle v_2 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 = u_3 = E_{2,2} \\
v_3 &= \frac{1}{\|w_3\|} w_3 = E_{2,2} \\
w_4 &= u_4 - \langle u_4, v_3\rangle v_3 - \langle u_4, v_2\rangle v_2 - \langle u_4, v_1\rangle v_1 \\
&= E_{1,2} - \left\langle E_{1,2}, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2} + E_{2,1})\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2} + E_{2,1})\right) \\
&= E_{1,2} - \frac{1}{2}(E_{1,2} + E_{2,1}) \\
&= \frac{1}{2}(E_{1,2} - E_{2,1}) \\
v_4 &= \frac{w_4}{\|w_4\|} = \frac{1}{\|E_{1,2} - E_{2,1}\|}(E_{1,2} - E_{2,1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2} - E_{2,1})
\end{aligned}$$

ונקבל כי

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(E_{1,1}, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2} + E_{2,1}), E_{2,2}\right)$$

בסיס אורתונורמלי של W וכי $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2} - E_{2,1})$ בסיס אורתונורמלי של $W^\perp$. אז, $W^\perp$ מרחב המטריצות האנטיסימטריות.

2. בדרך אחת, זכור לנו מאלגברה א' כי

$$A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$$

כאשר $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ו־$\frac{A-A^t}{2}$ אנטי־סימטרית. אז $\frac{A+A^t}{2} \in W$ וכיוון ש־$W^\perp$ מרחב המטריצות האנטיסימטריות, נקבל גם $\frac{A-A^t}{2} \in W^\perp$. לכן $P_W(A) = \frac{A+A^t}{2}$.

אבל, במקרה הכללי, לא נדע מראש איך לכתוב וקטור $v \in V$ בתור סכום של וקטור ב־$W \leq V$ ווקטור ב־$W^\perp$. כדי לחשב את ההטלה $P_W(A)$ נוכל לקחת בסיס אורתונורמלי של W ולהשתמש בנוסחא עבור ההטלה האורתוגונלית לפי בסיס בזה.

אכן,

$$\begin{aligned} P_W(A) &= \sum_{i\in[3]} \langle A, v_i\rangle v_i \\ &= \langle A, E_{1,1}\rangle E_{1,1} + \left\langle A, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1})\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1}) + \langle A, E_{2,2}\rangle , E_{2,2} \\ &= a_{1,1}E_{1,1} + \frac{1}{2}(a_{1,2}+a_{2,1})(E_{1,2}+E_{2,1}) + a_{2,2}E_{2,2} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} \\ \frac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{A+A^t}{2} \end{aligned}.$$

3. נכתוב את A בתור סכום של מטריצה סימטרית ואנטי־סימטרית. ראינו כי

$$A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$$

כאשר $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ו־$\frac{A-A^t}{2}$ אנטי־סימטרית. אז $d_W(A) = \frac{A+A^t}{2}$ ונקבל כי המרחק של A מ־W הוא

$$d\left(A, \frac{A+A^t}{2}\right) = \left\| A - \frac{A+A^t}{2} \right\|.$$

מתקיים

$$\begin{aligned} \left\| A - \frac{A+A^t}{2}\right\| &= \left\| \frac{A-A^t}{2}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ולכן $d(A,W) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

פרק 7

אופרטורים על מרחבי מכפלה פנימית

7.1 המרחב הדואלי, ומשפט ההצגה של ריס

הגדרה 7.1.1 (המרחב הדואלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$. המרחב הדואלי של V הוא

$$.V^* \coloneqq \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V, \mathbb{F}\right)$$

איבריו נקראים פונקציונלים לינאריים.

משפט 7.1.2 (משפט ההצגה של ריס). יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $\varphi \in V^*$ פונקציונל לינארי על V. קיים וקטור $w \in V$ יחיד עבורו $\varphi\left(v\right) = \left\langle v, w\right\rangle$ לכל $v \in V$.
בנוסף, אם $B = \left(v_1, \ldots, v_n\right)$ בסיס אורתונורמלי של V, מתקיים

$$.w = \sum_{i \in [n]} \left\langle w, v_i\right\rangle v_i = \sum_{i \in [n]} \overline{\varphi\left(v_i\right)} v_i$$

תרגיל 7.1. יהי $V = \operatorname{Mat}_n\left(\mathbb{C}\right)$ ותהי $\operatorname{tr} \colon V \to \mathbb{C}$ העתקת העקבה. מיצאו מטריצה B עבורה $\operatorname{tr}\left(A\right) = \left\langle A, B\right\rangle$ לכל $A \in V$.

פתרון. נסתכל על הבסיס האורתונורמלי $\left(E_{i,j}\right)_{i,j \in [n]}$ של V וניעזר בנוסחא. נקבל

$$.B = \sum_{i,j \in [n]} \overline{\operatorname{tr}\left(E_{i,j}\right)} E_{i,j} = \sum_{i \in [n]} E_{i,i} = I_n$$

תרגיל 7.2.

1. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $C > 0$ כך שלכל $p \in \mathbb{R}_n\left[x\right]$ מתקיים

$$.\left|p\left(0\right)\right| \le C \left(\int_{-1}^{1} p\left(x\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. חשבו את C המינימלי עבור $n = 2$.

פתרון.

1. נשים לב כי

$$\left\langle f, g\right\rangle = \int_{-1}^{1} f\left(x\right) g\left(x\right) \mathrm{d}x$$

מכפלה פנימית. אז

$$.\left(\int_{-1}^{1} p\left(x\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left\langle p, p\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|p\right\|$$

בלומר, עלינו להוכיח

$$.\left|p\left(0\right)\right| \le C \left\|p\right\|$$

ההצבה

$$\begin{aligned} \operatorname{ev}_0 \colon \mathbb{R}_n\left[x\right] &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f\left(0\right) \end{aligned}$$

היא פונקציונל לינארי, ולכן ממשפט ריס יש $g \in \mathbb{R}_n[x]$ עבורו

$$p(0) = \mathrm{ev}_0(p) = \langle p, g \rangle.$$

עכשיו, מקושי־שוורץ

$$|p(0)| = |\langle p, g \rangle| \leq \|p\| \|g\|.$$

לכן ניקח $C = \|g\|$.

2. נסמן $g(x) = ax^2 + bx + c$. נשים לב כי כאשר $p = g$ יש שוויון בקושי־שוורץ ואז

$$|p(0)| = \|p\| \|g\| \leq C \|p\|.$$

גורר $C \geq \|g\|$. ראינו כי $C = \|g\|$ מקיים את הנדרש, ולכן נותר למצוא את $\|g\|$.

כדי לא להצטרך בסיס אורתונורמלי, שיהיה פחות יפה במקרה הזה, נשים לב שמספיק לחשב את המכפלות הפנימיות בין g לאיברי בסיס כלשהו. לפי בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ מתקיים

$$g = \sum_{i \in [n]} \langle g, v_i \rangle v_i.$$

אם $C = (u_1, \ldots, u_n)$ בסיס נוסף, נוכל לכתוב

$$v_i = \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j$$

ואז

$$g = \sum_{i \in [n]} \langle g, v_i \rangle v_i = \sum_{i,j \in [n]} \bar{\alpha}_{i,j} \langle g, u_j \rangle,$$

ונקבל שמהכפלות הפנימיות $\langle g, u_i \rangle$ נותנות מספיק אינפורמציה כדי למצוא את g.

כעת, נחשב את המכפלות הפנימיות של g עם איברי הבסיס הסטנדרטי ונפתור מערכת משוואות שיהיה לה פתרון יחיד שהוא מקדמי g.

$$\begin{aligned}
1 = 1(0) = \langle g(x), 1 \rangle &= \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\bigg|_{x=-1}^{1} = \frac{2a}{3} + 2c \\
0 = x(0) = \langle g(x), x \rangle &= \int_{-1}^{1} g(x)\,x\,\mathrm{d}x = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\bigg|_{x=-1}^{1} = \frac{2b}{3} \\
0 = x^2(0) = \left\langle g(x), x^2 \right\rangle &= \int_{-1}^{1} g(x)\,x^2\,\mathrm{d}x = \frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3}\bigg|_{x=-1}^{1} = \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3}.
\end{aligned}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $b = 0$. מהמשוואה הראשונה פחות 3 פעמים השנייה נקבל

$$1 = \frac{2a}{3} - 3 \cdot \frac{2a}{5} + 0 = \frac{10a - 18a}{15}$$

ולכן $a = -\frac{15}{8}$. אז מהמשוואה השלישית נקבל

$$c = -\frac{3a}{5} = -\frac{9}{8}$$

ולכן

$$g(x) = -\frac{15}{8}x^2 - \frac{9}{8}.$$

אז

$$C = \|g\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(-\frac{15}{8}x^2 - \frac{9}{8}\right)^2 \mathrm{d}x} = \frac{27}{4}.$$

7.2 ההעתקה הצמודה

משפט 7.2.1 (ההעתקה הצמודה). יהיו V,W מרחבי מכפלה פנימית סוף־מימדיים ותהי $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$. קיימת העתקה יחידה $T^{*}\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}\left(W,V\right)$ עבורה

$$\left\langle T\left(v\right),w\right\rangle _{W}=\left\langle v,T^{*}\left(w\right)\right\rangle _{V}$$

לכל $v\in V$ ולכל $w\in W$.
היא נקראת ההעתקה הצמודה של T.

משפט 7.2.2. יהיו $\left(V,\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle _{V}\right),\left(W,\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle _{W}\right)$ מרחבי מכפלה פנימית סוף מימדיים עם בסיסים אורתונורמליים B,C בהתאמה, ותהי $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$. אז $\left[T^{*}\right]_{B}^{C}=\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)^{*}$.

בעת, אם $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$, יש לנו דרכים שונות לחשב את T^{*}. נוכל לנחש איזה אופרטור יקיים $\left\langle Tv,w\right\rangle =\left\langle v,T^{*}w\right\rangle$ לכל $v,w\in V$, על ידי מניפולציות של הצגת המכפלה הפנימית. נוכל גם לכתוב את T^{*} בצורה כללית ולפתור מערכת משוואות. לבסוף, נוכל לקחת בסיס אורתונורמלי B, כדי שיתקיים $\left[T^{*}\right]_{B}=\overline{\left[T\right]_{B}}^{t}$, ואז לשחזר את T^{*} מהמטריצה המייצגת. נראה דוגמאות לחישוב בכל אחת מהדרכים.

תרגיל 7.3. יהי $V=\mathbb{R}_{2}\left[x\right]$ עם המכפלה הפנימית

$$\left\langle f,g\right\rangle =\int_{-1}^{1}f\left(x\right)\bar{g}\left(x\right)\mathrm{d}x\ .$$

יהי $D\in\operatorname{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ אופרטור הגזירה. מיצאו את D^{*}.

פתרון. כדי להראות $D^{*}=S$ די להראות כי $\left\langle Df,g\right\rangle =\left\langle f,Dg\right\rangle$ עבור f,g בבסיס נתון, מלינאריות. נחשב מה צריך להיות D^{*} לפי הבסיס $\left(1,x,x^{2}\right)$. יהי $g\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$. נחשב את מכפלת $D\left(g\right)$ עם 1

$$\begin{aligned}0 & =\left\langle 0,g\right\rangle \\
 & =\left\langle D\left(1\right),g\right\rangle \\
 & =\left\langle 1,D^{*}\left(g\right)\right\rangle \\
 & =\int_{-1}^{1}D^{*}\left(g\right)\left(x\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

עם x

$$\begin{aligned}\frac{2a}{3}+2c & =\frac{ax^{3}}{3}+\frac{bx^{2}}{2}+cx\Big|_{-1}^{1}\\
 & =\int_{-1}^{1}ax^{2}+bx+c\,\mathrm{d}x\\
 & =\left\langle 1,g\right\rangle \\
 & =\left\langle D\left(x\right),g\right\rangle \\
 & =\left\langle x,D^{*}\left(g\right)\right\rangle \\
 & =\int_{-1}^{1}xD^{*}\left(g\right)\left(x\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

ועם x^{2}

$$\begin{aligned}\frac{4b}{3} & =\frac{2ax^{4}}{4}+\frac{2bx^{3}}{3}+\frac{2cx^{2}}{2}\Big|_{-1}^{1}\\
 & =2\int_{-1}^{1}ax^{3}+bx^{2}+cx\,\mathrm{d}x\\
 & =\left\langle 2x,g\right\rangle \\
 & =\left\langle D\left(x^{2}\right),g\right\rangle \\
 & =\left\langle x^{2},D^{*}\left(g\right)\right\rangle \\
 & =\int_{-1}^{1}x^{2}D^{*}\left(g\right)\left(x\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

נכתוב $D^*(g) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^{1} \alpha x^2 + \beta x + \gamma \, \mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{3} + 2\gamma \\ \frac{2a}{3} + c &= \int_{-1}^{1} \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x \, \mathrm{d}x = \frac{2\beta}{3} \\ \frac{4b}{3} &= \int_{-1}^{1} \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\alpha x^5}{5} + \frac{\beta x^4}{4} + \frac{\gamma x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{2\alpha}{5} + \frac{2\gamma}{3} \end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה, $\gamma = -\frac{\alpha}{3}$. אז מהמשוואה השלישית, $\frac{4b}{3} = \frac{2\alpha}{5} - \frac{2\alpha}{9}$ כלומר

$$4b = \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{3}\right)\alpha = \left(\frac{18}{15} - \frac{10}{15}\right)\alpha = \frac{8\alpha}{15}$$

כלומר $b = \frac{2\alpha}{15}$ כלומר $\alpha = \frac{15}{2}b$. נקבל כי $\gamma = -\frac{5}{2}$ ומהמשוואה השנייה כי $\beta = a + \frac{3c}{2}$. לכן

$$.D^*\left(ax^2 + bx + c\right) = \frac{15}{2}bx^2 + \left(a + \frac{3c}{2}\right)x - \frac{5}{2}$$

תרגיל 7.4. יהי $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^*, A)$, ויהי

$$\begin{aligned} \Phi \colon V &\to V \\ . \quad A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

חשבו את Φ^*.

פתרון. נוכל לחשב ישירות,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(A), B\rangle &= \left\langle A^t, B\right\rangle \\ &= \mathrm{tr}\left(B^* A^t\right) \\ &= \overline{\mathrm{tr}\left(\overline{B^* A^t}\right)} \\ &= \overline{\mathrm{tr}\left(B^t A^*\right)} \\ &= \overline{\mathrm{tr}\left(A^* B^t\right)} \\ &= \overline{\left\langle B^t, A\right\rangle} \\ &= \left\langle A, B^t\right\rangle \\ &= \langle A, \Phi(B)\rangle \end{aligned}$$

ולכן $\Phi^* = \Phi$.

נוכל לחשב זאת גם בעזרת מטריצה מייצגת בבסיס אורתונורמלי. נסמן ב־$E_{i,j}$ מטריצה עבורה $(E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$. כלומר, זאת מטריצה עם 0 בכל המקדמים חוץ מזה בשורה ה־i והעמודה ה־j. אז בבסיס

$$B \coloneqq (E_{1,1}, \ldots, E_{n,n}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{1,3}, E_{3,1} \ldots, E_{n-1,n} E_{n,n-1})$$

נקבל כי

$$. \left[\Phi\right]_B = I_n \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כיוון ש־B בסיס אורתונורמלי נקבל כי $\left[\Phi^*\right]_B = \overline{\left[\Phi\right]_B}^t$. אך $[\Phi]_B$ מטריצה ממשית סימטרית, ולכן $[\Phi^*]_B = [\Phi]_B$ ואז $\Phi^* = \Phi$.

7.3 אופרטורים נורמליים וצמודים לעצמם, ומשפט הפירוק הספקטרלי

ראינו בתרגיל קודם דוגמא לאופרטור T עבורו $T^* = T$. אופרטור כזה נקרא צמוד לעצמו מעל $\mathbb{R}$ או הרמיטי מעל $\mathbb{C}$. אופרטורים צמודים לעצמם מאופיינים על ידי המשפט הבא.

משפט 7.3.1 (משפט הפירוק הספקטרלי לאופרטורים צמודים לעצמם). יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי סוף־מימדי, ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. אז T צמוד לעצמו אם ורק אם יש בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.

מעל $\mathbb{C}$, אופרטורים בעלי אפיון דומה אינם אופרטורים הרמיטיים, אלא אופרטורים נורמליים.

הגדרה 7.3.2 (אופרטור נורמלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נגיד כי T נורמלי אם $T^*T = TT^*$.

משפט 7.3.3 (משפט הפירוק הספקטרלי לאופרטורים נורמליים). יהי V מרחב מכפלה פנימית מרובב סוף־מימדי, ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. אז T נורמלי אם ורק אם יש בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.

הגדרה 7.3.4. מטריצה $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ נקראת נורמלית אם $A^*A = AA^*$ כאשר $A^* := \bar{A}^t$.

הערה 7.3.5. תהי A מטריצה סימטרית (נורמלית) מעל $\mathbb{R}$ (מעל $\mathbb{C}$). אז T_A אופרטור צמוד לעצמו (נורמלי) ולכן ממשפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו $[T_A]_B$ מטריצה אלכסונית.
אז
$$A = [T_A]_E = \left(M_B^E\right)^{-1} [T_A]_B \, M_B^E.$$
המטריצה $P := \left(M_B^E\right)^{-1} = M_E^B$ היא מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי, ולכן הינה אורתוגונלית (אוניטרית). אז מתקיים כי $P^{-1}AP = D$ עבור מטריצה אורתוגונלית (אוניטרית) P ומטריצה אלכסונית D.

משפט 7.3.6 (משפט הפירוק הספקטרלי למטריצות). תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$). אז A סימטרית (נורמלית) אם ורק אם קיימת מטריצה אורתוגונלית (אוניטרית) $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבורה $P^{-1}AP$ אלכסונית.

תרגיל 7.5. תהי
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$
מצאו מטריצה אורתוגונלית $P \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ עבורה $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.

פתרון. ראשית נמצא ערכים עצמיים. מתקיים
$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$
$$\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$
לכן אם λ_1, λ_2 הערכים העצמיים נקבל $\lambda_1\lambda_2 = 3$ וגם $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$, לכן הערכים העצמיים של A הם 3 מריבוי אלגברי 2 ו־1 מריבוי אלגברי 1.
המרחב העצמי של 3 הוא $\mathrm{Span}(e_1, e_2 + e_3)$. נחפש את המרחב העצמי של 1. נדרג
$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ואז המרחב העצמי הוא $\mathrm{Span}(e_2 - e_3)$.
כדי לקבל בסיס אורתונורמלי נוכל לבצע את תהליך גרם־שמידט על בסיס של כל מרחב עצמי בנפרד, או על הבסיס כולו. אם אנו יודעים שהמטריצה נורמלית, המרחבים העצמיים השונים שלה ניצבים, ולכן שתי הדרכים שקולות. באופן כללי, יש להראות שקיבלנו בסיס מלכסן, או אורתונורמלי, תלוי בשיטה שבחרנו.
נבצע את תהליך גרם־שמידט על $(e_1, e_2 + e_3)$. נקבל בסיס $\left(e_1, \frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}}\right)$. על $(e_2 - e_3)$ נקבל בסיס $\left(\frac{e_2-e_3}{\sqrt{2}}\right)$.
נרצה להראות כי
$$B = \left(\frac{e_2-e_3}{\sqrt{2}}, e_1, \frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}}\right)$$
בסיס מלכסן של A.
אכן, כל הוקטורים ב־B הם וקטורים עצמיים של A. לכן אם ניקח $P := [\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3}]_E^B$ נקבל כי $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית, וכי P אורתוגונלית, שכן עמודותיה הן בסיס אורתונורמלי.

תרגיל 7.6. יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. הראו כי T נורמלי אם ורק אם קיים פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $T^* = p(T)$. היעזרו במשפט הבא.

משפט 7.3.7 (אינטרפולציית לגרנג'). תהיינה $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. קיים $p \in \mathbb{C}_{n+1}[x]$ עבורו $p(x_i) = y_i$ לכל $i \in [n]$.

פתרון. נניח כי קיים פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $T^* = p(T)$. כיוון ש־T מתחלף עם כל פולינום ב־T, נקבל

$$T^*T = p(T)T = Tp(T) = TT^*$$

ולכן T נורמלי.
בכיוון השני, נניח כי T נורמלי. ממשפט הפירוק הספקטלי קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ אלכסונית. אז

$$[T^*]_B = [T]_B^* = \mathrm{diag}\left(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n\right).$$

מאינטרפולציית לגרנג', קיים פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $p(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ לכל $i \in [n]$. אז

$$[T^*]_B = \mathrm{diag}(p(\lambda)_1, \ldots, p(\lambda_n)) = p(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = p([T]_B) = [p(T)]_B$$

ונקבל כי $T^* = p(T)$, כנדרש.

תרגיל 7.7. יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי. הראו כי T הרמיטי אם ורק אם כל הערכים העצמיים של T ממשיים.

פתרון. ממשפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ אלכסונית.
בעת T הרמיטי אם ורק אם $T^* = T$ אם ורק אם $[T^*]_B = [T]_B$. כיוון ש־B אורתונורמלי, מתקיים $[T^*]_B = \overline{[T]_B}^t = \mathrm{diag}\left(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n\right)$. לכן השוויון הנ"ל מתקיים אם ורק אם $\bar{\lambda}_i = \lambda_i$ לכל $i \in [n]$, כלומר אם ורק אם כל הערכים העצמיים ממשיים.

תרגיל 7.8. יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי. הראו כי T אוניטרי אם ורק אם הערכים העצמיים של T הינם על מעגל היחידה.

פתרון. ממשפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ אלכסונית.
אז

$$[T]_B^* = \overline{[T]_B}^t = \mathrm{diag}\left(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n\right).$$

בעת,

$$[T^*T]_B = [T^*]_B [T]_B = \mathrm{diag}\left(\bar{\lambda}_1\lambda_1 \ldots, \bar{\lambda}_n\lambda_n\right) = \mathrm{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|).$$

T אוניטרי אם ורק אם $T^*T = \mathrm{Id}$ אם ורק אם $[T^*T] = I_n$, אבל מהחישוב הנ"ל זה מתקיים בדיוק כאשר הערכים העצמיים של T על מעגל היחידה (כלומר, עם ערך מוחלט 1).

תרגיל 7.9. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

1. יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הפיך. הוכיחו כי $\left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.
2. נסמן ב־$\mathcal{M}$ את קבוצת כל ההעתקות $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ההרמיטיות, ונסמן ב־$\mathcal{N}$ את קבוצת כל ההעתקות $U \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ האוניטריות ש־1 אינו ערך עצמי שלהן. יהי

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathcal{M} &\to V \\ T &\mapsto (T + i\,\mathrm{Id}_V)(T - i\,\mathrm{Id}_V)^{-1} \end{aligned}.$$

הראו כי Φ מוגדר היטב וכי $\mathrm{Im}(\Phi) \subseteq \mathcal{N}$.

3. הוכיחו כי Φ חד־חד ערכית וכי $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathcal{N}$.

פתרון. 1. נראה כי $\left(T^{-1}\right)^* \circ T^* = \mathrm{Id}_V$. אכן, ידוע $(S_1 \circ S_2)^* = S_2^* \circ S_1^*$ ולכן

$$\left(T^{-1}\right)^* \circ T^* = \left(T \circ T^{-1}\right)^* = \mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_V,$$

כנדרש.

2. ראשית, יש להראות כי $T - i\,\mathrm{Id}_V$ אכן הפיך לכל $T \in \mathcal{M}$. ראינו כי אופרטורים אוניטריים הינם עם ערכים עצמיים ממשיים, לכן i אינו ערך עצמי של T ולכן זה אכן המקרה.

בעת נראה כי $\Phi(T) \in \mathcal{N}$ לכל $T \in \mathcal{M}$. ראינו כי אופרטור נורמלי הינו אוניטרי אם ורק אם הערכים העצמיים שלו על מעגל היחידה, לכן יש להראות כי $\Phi(T)$ נורמלי, כי הערכים העצמיים שלו על מעגל היחיד, וכי הם שונים מאחת.

T הרמטיטי ולכן נורמלי, וממשפט פירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו T לכסין. אז

$$[\Phi(T)]_B = \left([T]_B + iI_n\right)\left([T]_B - iI_n\right)^{-1}$$

גם מטריצה אלכסונית. כיוון שהבסיס B אורתונורמלי, נקבל שוב ממשפט הפירוק הספקטרלי כי $\Phi(T)$ נורמלי.

בעת, ערך עצמי של $\Phi(T)$ יהיה מהצורה $\mu = \frac{\lambda+i}{\lambda-i}$ עבור λ ערך עצמי של T. כיוון ש־T הרמיטי, λ כזה הינו ממשי. נשים לב כי $\mu \neq 1$ כי המונה והמכנה שונים, ונותר לנו להראות כי $|\mu| = 1$. אכן,

$$\mu = \frac{(\lambda+i)^2}{(\lambda+i)(\lambda-i)}$$

ואז

$$\begin{aligned}
|\mu| &= \mu\bar{\mu} \\
&= \frac{(\lambda+i)^2\,\overline{(\lambda+i)}^2}{(\lambda+i)^2(\lambda-i)^2} \\
&= \frac{(\lambda+i)^2(\lambda-i)^2}{(\lambda+i)^2(\lambda-i)^2} \\
&= 1 \quad ,
\end{aligned}$$

כנדרש.

3. ננסה למצוא את λ בחזרה מתוך μ. נבודד אותו במשוואה $\mu = \frac{\lambda+i}{\lambda-i}$. נתחיל בכפל במכנה.

$$\mu\lambda - i\mu = \lambda + i$$

נעביר אגפים ונקבל

$$(\mu-1)\lambda = (\mu+1)i$$

ולכן

$$.\lambda = i \cdot \frac{\mu+1}{\mu-1}$$

בהשראת זאת, נגדיר

$$\begin{aligned}
\Psi \colon \mathcal{N} &\to V \\
U &\mapsto i\left(U + \mathrm{Id}_V\right)\left(U - \mathrm{Id}_V\right)^{-1}
\end{aligned}$$

ונראה שמתקיים $\mathrm{Im}(\Psi) = \mathcal{M}$ וגם $\Psi = \Phi^{-1}$.

ראשית, יהי $U \in \mathcal{N}$ ונראה כי $\Phi(U) \in \mathcal{M}$. כיוון ש־U אוניטרי, הוא נורמלי וממשפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו $[U]_B = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ מטריצה אלכסונית. ראינו גם שבמקרה זה הערכים העצמיים הינם על מעגל היחידה, ומהגדרת $\mathcal{N}$ הם אינם כוללים את 1. בעת

$$,\ [\Psi(U)]_B = \mathrm{diag}\left(i \cdot \frac{\mu_1+1}{\mu_1-1}, \ldots, i \cdot \frac{\mu_n+1}{\mu_n-1}\right)$$

ומהחישוב למעלה נקבל כי איברי האלכסון ממשיים. ראינו שאופרטור הינו הרמיטי אם ורק אם הוא לכסין בבסיס אורתונורמלי וגם איברי האלכסון שלו ממשיים, ולכן $\Phi(U) \in \mathcal{M}$.

מהחישוב למעלה נקבל גם כי

$$\begin{aligned}
[\Phi(\Psi(U))]_B &= \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = [U]_B \\
,\ [\Psi(\Phi(T))]_C &= \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = [T]_C
\end{aligned}$$

עבור U כזה ועבור $T \in \mathcal{M}$ לכסין בבסיס אורתונורמלי C. לכן אם נסתכל על Φ, Ψ בתור העתקות

$$\begin{aligned}
\Phi \colon \mathcal{M} &\to \mathcal{N} \\
\Psi \colon \mathcal{N} &\to \mathcal{M}
\end{aligned}$$

על ידי צמצום הטווח, נקבל כי Φ, Ψ העתקות הופכיות, ובפרט חד־חד ערכיות ועל.

7.4 פירוק לערכים סינגולריים ופירוק פולארי

יהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ עבור V מרחב מכפלה פנימית. ראינו כי T נורמלי אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי של V שמלכסן את T. ראינו כי אופרטורים כלליים מקיימים תכונה דומה.

משפט 7.4.1 (פירוק לערכים סינגולריים). יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי, ותהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$. קיימים בסיסים אורתונורמליים B,C של V עבורם $\left[T\right]_{C}^{B}$ אלכסונית.
בנוסף, הערכים $\sigma_{i}=\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)_{i,i}$ שנקראים הערכים הסינגולריים של T הינם ממשיים אי־שליליים ונקבעים ביחידות תחת הדרישה

$$\sigma_{1}\geq\sigma_{2}\geq\ldots\geq\sigma_{n}.$$

מסקנה 7.4.2 (פירוק לערכים סינגולריים של מטריצה). תהי $A\in\mathrm{Mat}_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ עבור $\mathbb{F}\in\left\{\mathbb{R},\mathbb{C}\right\}$. מהמשפט, קיימים בסיסים אורתונורמליים B,C עבורם $\Sigma:=\left[T_{A}\right]_{C}^{B}$ אלכסונית מלבנית. אז

$$A=\left[T_{A}\right]_{E}=M_{E}^{C}\left[T_{A}\right]_{C}^{B}M_{B}^{E}=\left[T_{A}\right]_{E}=M_{E}^{C}\Sigma M_{B}^{E}.$$

המטריצות $U:=M_{E}^{C},V:=M_{E}^{B}$ הינן אורתוגונליות (אוניטריות) כיוון שהן שולחות בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. אכן, אם $B=\left(b_{1},\ldots,b_{n}\right)$ נקבל

$$M_{E}^{B}e_{i}=M_{E}^{B}\left[b_{i}\right]_{B}=b_{i}.$$

בפרט, $M_{B}^{E}=V^{-1}=V^{*}$ ונקבל כי $A=U\Sigma V^{*}$.

הגדרה 7.4.3 (אופרטור מוגדר אי־שלילית). אופרטור $T\in\mathrm{End}\left(V\right)$ על מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי נקרא מוגדר אי־שלילית אם הוא צמוד לעצמו (הרמיטי) וגם $\left\langle Tv,v\right\rangle \geq0$ לכל $v\in V$.

הערה 7.4.4. באופן דומה נגדיר אופרטור מוגדר חיובית/אי־חיובית/שלילית.

טענה 7.4.5. אופרטור צמוד לעצמו (נורמלי) הינו מוגדר אי־שלילית אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלו (ממשיים) אי־שליליים.

טענה 7.4.6. האופרטור $T^{*}T$ הינו מוגדר חיובית, והערכים הסינגולריים $\sigma_{1},\ldots,\sigma_{n}$ של העתקה לינארית $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$ הם הערכים העצמיים של האופרטור $\sqrt{T^{*}T}\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$.

נתאר כעת איך למצוא בסיסים B,C כנ"ל. נסמן $n:=\dim\left(V\right)$.

1. כעת נמצא את הערכים העצמיים λ_{i} של $T^{*}T$. נסמן $\sigma_{i}=\sqrt{\lambda_{i}}$ ונסדר אותם מהגדול לקטן $\sigma_{1}\geq\sigma_{2}\geq\ldots\geq\sigma_{n}$.
2. ניקח $B=\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$ בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים מתאימים של $T^{*}T$ (שקיים לפי פירוק ספקטרלי).
   יהי $k\in\left[n\right]$ המקסימלי עבורו $\lambda_{k}>0$. נגדיר $C'=\left(\frac{1}{\sigma_{1}}T\left(v_{1}\right),\ldots,\frac{1}{\sigma_{k}}T\left(v_{k}\right)\right)$.
   אז אכן מתקיים $T\left(v_{i}\right)=\sigma_{i}u_{i}$ וגם
$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sigma_{i}}T\left(v_{i}\right),\frac{1}{\sigma_{j}}T\left(v_{j}\right)\right\rangle & =\frac{1}{\sigma_{i}\sigma_{j}}\left\langle T\left(v_{i}\right),T\left(v_{j}\right)\right\rangle \\
 & =\frac{1}{\sigma_{i}\sigma_{j}}\left\langle T^{*}T\left(v_{i}\right),v_{j}\right\rangle \\
 & =\frac{\lambda_{i}}{\sigma_{i}\sigma_{j}}\left\langle v_{i},v_{j}\right\rangle \\
 & =\frac{\lambda_{i}}{\sigma_{i}\sigma_{j}}\delta_{i,j}\\
 & =\frac{\lambda_{i}}{\sigma_{i}^{2}}\delta_{i,j}\\
 & =\delta_{i,j}
\end{aligned}.$$
3. נשלים את C' לבסיס אורתונורמלי C של V.
   לכל $i>k$ מתקיים
$$\left\Vert T\left(v_{i}\right)\right\Vert ^{2}=\left\langle Tv_{i},Tv_{i}\right\rangle =\left\langle T^{*}Tv_{i},v_{i}\right\rangle =0.$$
   לכן $T\left(v_{i}\right)=0$ ולא משנה באיזו דרך נשלים לבסיס אורתונורמלי.

הערה 7.4.7. בדי למצוא את הפירוק $A=U\Sigma V^*$ של מטריצה $A\in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$, נמצא את הפירוק לערכים סינגולריים של $T_A\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$ ונעבוד לפי התיאור במסקנה 7.4.2.

תרגיל 7.10. מצאו פירוק לערכים סינגולריים עבור המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\2&2\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

פתרון. 1. נמצא את הערכים סינגולריים.

מתקיים

$$A^*=A^t=\begin{pmatrix}2&2\\-1&2\end{pmatrix}$$

ואז

$$A^*A=\begin{pmatrix}8&2\\2&5\end{pmatrix}.$$

אם λ_1,λ_2 הערכים העצמיים של A^*A נקבל כי

$$\lambda_1+\lambda_2=\mathrm{tr}(A^*A)=8+5=13$$
$$\lambda_1\cdot\lambda_2=\det(A^*A)=40-4=36$$

ולכן הערכים העצמיים של A^*A הם $4,9$. ולכן הערכים הסינגולריים של A הם $\sigma_1=\sqrt{9}=3,\sigma_2=\sqrt{4}=2$.

2. נמצא בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של A^*A.

נתחיל במציאת וקטור עצמי עבור הערך העצמי 9. מתקיים

$$A^*A-9I=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}$$

ונשים לב כי העמודה השנייה היא -2 כפול העמודה הראשונה. אז $A^*A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=0$ ולכן $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ וקטור עצמי עם ערך עצמי 9.

עבור הערך העצמי 4, נחשב

$$A^*A-4I=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$$

ונשים לב כי העמודה הראשונה שווה לפעמיים העמודה השנייה. לכן $A^*A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=0$ ולכן $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ וקטור עצמי עבור הערך העצמי 4.

נקבל בסיס $\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$ של וקטורים עצמיים של A^*A. ננרמל את הוקטורים כדי לקבל בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של A^*A,

$$B=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right).$$

וניקח גם

$$\begin{aligned}C&=\left(\frac{1}{\sigma_1}A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right),\frac{1}{\sigma_2}A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)\right)\\&=\left(\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix},\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\right)\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

שהינו בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$.

3. C כבר הינו בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$ כי לא היה לנו 0 בתור ערך סינגולרי של A.
נקבל בסך הכל כי

$$A=U\Sigma V^*$$

עבור

$$V=M_E^B=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$$

$$U=M_E^C=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1&0\\0&\sigma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

תרגיל 7.11. מה יקרה אם נחשב בעזרת האלגוריתם פירוק לערכים סינגולריים עבור אופרטור נורמלי? באילו מקרים האלגוריתם יתן $B=C$?

פתרון. ניקח בסיס $B=(v_1,\ldots,v_n)$ עבורו $[T]_B=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, ואז

$$[T^*T]_B=\operatorname{diag}\left(\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_n\right)\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\operatorname{diag}\left(|\lambda_1|^2,\ldots,|\lambda_n|^2\right),$$

ובכן $\sqrt{[T^*T]_B}=\operatorname{diag}(|\lambda_1|,\ldots,|\lambda_n|)$. אז החישוב שלנו מראה

$$C:=(u_1,\ldots,u_n)=\left(\frac{1}{|\lambda_1|}T(v_1),\ldots,\frac{1}{|\lambda_n|}T(v_n)\right).$$

בעת, $T(v_i)=\lambda_i v_i$ ונקבל כי $u_i=\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}v_i$. אז $u_i=v_i$ אם ורק אם λ_i ממשי אי־שלילי.
לכן האלגוריתם יתן $B=C$ אם ורק אם כל הערכים העצמיים של T הינם ממשיים אי־שליליים. כלומר, אם ורק אם T מוגדר אי־שלילית.

תרגיל 7.12. הוכיחו או הפריכו: הערכים הסינגולריים של T^2 הם ריבועי הערכים הסינגולריים של T.

פתרון. הטענה איננה נכונה, למשל עבור $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. אכן, הערכים הסינגוליים של A^2 הם $(0,0)$ כי $A^2=0$, אבל הערכים הסינגולריים של A הם $(0,1)$ כי $A^tA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

תרגיל 7.13. יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ עם ערכים סינגולריים $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$. הראו כי $\|T(v)\|\leq\|v\|\cdot\max_{i\in[n]}\{\sigma_i\}$ לכל $v\in V$.

תרגיל 7.14. תהיינה $A,B,U\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור U אורתוגונלית (אוניטרית) המקיימת $B=U^*AU$, ונניח כי A מוגדרת אי־שלילית. הראו כי B מוגדרת אי־שלילית.

פתרון. ראשית, B אורתוגונלית (אוניטרית) כמכפלה של כאלה. בעת, לכל $v\in V$ מתקיים $\langle Bv,v\rangle=\langle U^*AUv,v\rangle=\langle A(Uv),Uv\rangle$ כאשר ביטוי זה הינו אי־שלילי כי A מוגדרת אי־שלילית.

הערה 7.4.8. באותו אופן, מטריצה הדומה אורתוגונלית (אוניטרית) למטריצה מוגדרת חיובית/אי־חיובית/שלילית הינה חיובית/אי־חיובית/שלילית.

נעבור כעת למשפט פירוק נוסף שנובע מהפירוק לערכים סינגולריים.

משפט 7.4.9 (פירוק פולארי לאופרטורים). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור על מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי. יש אופרטור אורתוגונלי (אוניטרי) $U \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ואופרטור מוגדר אי־שלילית $R \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורם $T = UR$.
בנוסף, אם T הפיך, האופרטור R מוגדר חיובית.

משפט 7.4.10 (פירוק פולארי למטריצות). תהי $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$. יש מטריצה $U \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ אורתוגונלית (אוניטרית) ומטריצה $R \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ מוגדרת אי־שלילית עבורן $A = UR$.
בנוסף, אם A הפיכה, המטריצה R מוגדרת חיובית.

7.5 אופרטורים אוניטריים ואורתוגונליים

תכונה אינטואיטיבית גיאומטרית של אופרטורים על מרחבי מכפלה פנימית היא שמירה של המכפלה הפנימית. אופרטור $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורו $\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, w\rangle$ לכל $v, w \in V$ מקיים $\langle T^*Tv, w\rangle = \langle v, w\rangle$ ולכן $T^*T = \operatorname{Id}$ כלומר $T^* = T^{-1}$. נקרא לאופרטור כזה אורתוגונלי אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, או אוניטרי, אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

הגדרה 7.5.1 (אופרטור אורתוגונלי (אוניטרי)). אופרטור $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ מעל $\mathbb{R}$ (מעל $\mathbb{C}$) נקרא אורתוגונלי (אוניטרי) אם $T^* = T^{-1}$.

הגדרה 7.5.2 (מטריצה אורתונוגלית (אוניטרית)). מטריצה $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (עבור $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) נקראת אורתוגונלית (אוניטרית) אם $A^t = A^{-1}$.

תרגיל 7.15. הראו כי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}[V]$ אורתוגונלי (אוניטרי) אם ורק אם $\|Tv\| = \|v\|$ לכל $v \in V$.

פתרון. אם $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור אורתוגונלי (אוניטרי), מתקיים

$$\|Tv\| = \sqrt{\langle Tv, Tv\rangle} = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \|v\|$$

לכל $v \in V$.
להיפך, אם $\|Tv\| = \|v\|$ לכל $v \in V$, נקבל מזהות הפולריזציה כי $\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, w\rangle$ לכל $v, w \in W$.

הערה 7.5.3. קיבלנו כי אופרטורים אורתוגונליים (או אוניטריים) הם בדיוק אלו השומרים על הנורמה, ולכן הם גם אלו השומרים על מרחקים.
העתקות השומרות על מרחקים נקראות איזומטריות ולכן אופרטור אורתוגונלי נקרא גם איזומטריה לינארית. כיוון שבקורס נדבר רק על העתקות לינאריות, נתייחס לפעמים לאופרטור לינארי בתור איזומטריה.

טענה 7.5.4. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי ממימד n, ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$. התנאים הבאים שקולים.

1. T אורתוגונלי.
2. קיים בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \ldots, v_n)$, כך שהבסיס $(Tv_1, \ldots, Tv_n)$ אורתונורמלי.
3. לכל בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \ldots, v_n)$, הבסיס $(Tv_1, \ldots, Tv_n)$ אורתונורמלי.

תרגיל 7.16. יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהי

$$\begin{aligned} R \colon V &\to V \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שיקוף דרך ציר ה־x.
הראו כי R איזומטריה.

פתרון. מתקיים $[R]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ וזאת מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי של V. לכן R שולח בסיס אורתונורמלי (הסטנדרטי) לבסיס אורתונורמלי, ולכן הינו איזומטריה.

תרגיל 7.17. הראו כי $\rho_\theta := A_\theta$ עבור

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

הינו איזומטריה.

פתרון. מתקיים כי $\rho_\theta(e_i) = A_\theta e_i$ העמודה ה־i של A_θ. נראה שעמודות A_θ מהוות בסיס אורתונורמלי ונקבל כי ρ_θ שולחת בסיס אורתונורמלי (הסטנדרטי) לבסיס אורתונורמלי. ראינו שזה תנאי שקול לאורתוגונליות ולכן נקבל את הנדרש.
אכן, מתקיים

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle = -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\theta \end{pmatrix} \right\rangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle = (-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

כנדרש.

תרגיל 7.18. הראו כי כל איזומטריה של $\mathbb{R}^2$ היא מהצורה ρ_θ או $\rho_\theta R$ עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

פתרון. תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ איזומטריה. מהתנאים השקולים, הבסיס $\left(T(e_1), T(e_2)\right)$ הינו אורתונורמלי. בפרט, $v := T(e_1)$ הינו מנורמה 1.
נראה שניתן לכתוב $v = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$. נכתוב $v = \left(v_1, v_2\right)$ ונקבל כי $v_1^2 + v_2^2 = 1$. בפרט, $v_1 \in [-1, 1]$ ולכן יש $\theta \in \mathbb{R}$ עבורה $v_1 = \cos\theta$. נקבל כי $v_2^2 = 1 - (\cos\theta)^2 = (\sin\theta)^2$ ולכן $v_2 \in \{\pm\sin\theta\}$. אם $v_2 = \sin\theta$, סיימנו. אחרת, ניתן לכתוב

$$v_1 = \cos(-\theta)$$
$$v_2 = \sin(-\theta)$$

ואז הזווית המתאימה היא $-\theta$.
נקבל כי $v = \rho_\theta(e_1)$ ולכן

$$\rho_{-\theta}(v) = \rho_{-\theta} \circ T(e_1) = e_1.$$

הרכבת איזומטריות הינה איזומטריה, ולכן נקבל כי $\rho_{-\theta} \circ T$ היא איזומטריה שמקבעת את e_1. מהתנאים השקולים, היא מעבירה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי, לכן $(e_1, u) := (e_1, \rho_{-\theta} \circ T(e_2))$ אורתונורמלי. אבל אז $u \in \{\pm e_2\}$ כי $u \in \{e_1\}^{\perp} = \mathrm{Span}(e_2)$ מנורמה 1. אם $u = e_2$ נקבל כי $\rho_{-\theta} \circ T = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ כלומר $T = \rho_\theta$. אחרת, $\rho_{-\theta} \circ T = R$ ואז $T = \rho_\theta \circ R$.

פרק 8

תבניות בילינאריות וריבועיות

8.1 תבניות בילינאריות

הגדרה 8.1.1 (תבנית בילינארית). יהי V מרחב וקטורי. תבנית בילינארית f על V היא העתקה $f\colon V\to V$ שהינה לינארית בשני הרכיבים.

הערה 8.1.2. מעל $\mathbb{C}$ עוסקות לעתים בתבניות ססקווילינאריות ("אחת־וחצי לינאריות") במקום בתבניות בילינאריות. נדבר על אלו בהמשך.

הגדרה 8.1.3 (מטריצה מייצגת של תבנית בילינארית). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיס $B=(v_1,\dots,v_n)$, ותהי f תבנית בילינארית על V. המטריצה המייצגת של f לפי B היא

$$[f]_B=\begin{pmatrix}f(v_1,v_1)&\cdots&f(v_1,v_n)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ f(v_n,v_1)&\cdots&f(v_n,v_n)\end{pmatrix}.$$

טענה 8.1.4. לכל $u,v\in V$ מתקיים

$$[u]_B^t[f]_B[v]_B=f(u,v).$$

בנוסף, אם $[u]_B^tA[v]_B=f(u,v)$ לכל $u,v\in V$, אז $A=[f]_B$.

הוכחה. נכתוב

$$u=\sum_{i\in[n]}\alpha_iv_i$$
$$v=\sum_{j\in[n]}\beta v_j$$

ואז

$$\begin{aligned}[u]_B^t[f]_B[v]_B&=\sum_{i,j\in[n]}\alpha_i\beta_j[v_i]_B^t[f]_B[v_j]_B\\&=\sum_{i,j\in[n]}\alpha_i\beta_je_i^t[f]_Be_j\\&=\sum_{i,j\in[n]}\alpha_i\beta_jf(v_i,v_j)\\&=f\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_iv_i,\sum_{j\in[n]}\beta_jv_j\right)\\&=f(u,v)\end{aligned}.$$

לבסוף, ניתן לקחת $u=v_i,v=v_j$ ואז $[u]_B^tA[v]_B=a_{i,j}$. לכן אם $[u]_B^tA[v]_B=f(u,v)$ לכל $u,v\in V$ נקבל כי $A=[f]_B$. ■

מסקנה 8.1.5. יהיו B,C שני בסיסים של אותו מרחב וקטורי סוף־מימדי V, ותהי f תבנית בילינארית על V. אז

$$[f]_B = \left(M_C^B\right)^t [f]_C \, M_C^B \,.$$

הוכחה. לכל $u,v \in V$ מתקיים

$$\begin{aligned}[u]_B^t \left(M_C^B\right)^t [f]_C \, M_C^B \, [v]_B &= \left(M_C^B \, [u]_B\right)^t [f]_C \, M_C^B \, [v]_B \\ &= [u]_C^t \, [f]_C \, [v]_C \\ &= f\left(u,v\right)\end{aligned}$$

לכן מהטענה נקבל שוויון. ■

במקרה של אופרטור T על V הקשר בין $[T]_B\,, [T]_C$ הוא דימיון. המסקנה מראה קשר אחר במקרה של תבניות בילינאריות, שמוביל להגדרה הבאה.

הגדרה 8.1.6 (מטריצות חופפות). מטריצות $A,B \in \mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$ נקראות חופפות אם קיימת $P \in \mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$ **הפיכה** עבורה $B = P^tAP$.

מסקנה 8.1.7. המטריצות $[f]_B\,, [f]_C$ המייצגות תבנית בילינארית לפי בסיסים שונים, הינן חופפות.

הערה 8.1.8. ניתן לשחזר את תבנית הבילינארית ממטריצה מייצגת שלה, ולמעשה ההעתקה $f \mapsto [f]_B$ הינה איזומורפיזם בין מרחב התבניות הבילינאריות והמרחב $\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$.

הגדרה 8.1.9 (תבנית בילינארית סימטרית). יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי f תבנית בילינארית על V. נגיד כי f סימטרית אם $f\left(u,v\right) = f\left(v,u\right)$ לכל $u,v \in V$.

הגדרה 8.1.10. יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי f תבנית בילינארית על V. נגיד כי f מוגדרת חיובית לחלוטין אם $f\left(u,u\right) > 0$ לכל $u \in V$.
נגדיר באופן דומה תבנית מוגדרת שלילית לחלוטין/אי־שלילית/אי־חיובית.

תרגיל 8.1. תהיינה $A,B,P \in \mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{R}\right)$ כאשר P הפיכה ומתקיים $B = P^tAP$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

1. $\det\left(A\right) = \det\left(B\right)$.
2. ל־A,B יש אותם ערכים עצמיים.
3. $\mathrm{rank}\left(A\right) = \mathrm{rank}\left(B\right)$.
4. A הפיכה אם ורק אם B הפיכה, וכאשר זה מתקיים A^{-1}, B^{-1} חופפות.

פתרון.

1. מתקיים
$$\det\left(B\right) = \det\left(P^tAP\right) = \det\left(P^t\right)\det\left(A\right)\det\left(P\right)$$
ולכן יש שוויון אם ורק אם $\det\left(P^t\right)\det\left(P\right) = 1$. אבל, $\det\left(P^t\right) = \det\left(P\right)$ ולכן זה מתקיים אם ורק אם $\det\left(P\right) \in \{\pm 1\}$. זה לא חייב להיות המצב. למשל, נוכל לקחת $A = I_n, B = 4I_n, P = 2I_n$.
2. הדוגמא הקודמת מראה שהערכים העצמיים לא נשמרים.
3. הדרגה נשמרת כי P^t, P הפיכות.
4. נניח כי A הפיכה. אז B הפיכה כי הדרגות שלהן שוות. נשים לב כי
$$B^{-1} = \left(P^tAP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}\left(P^t\right)^{-1}$$
ועבור $\tilde{P} = \left(P^t\right)^{-1}$ נקבל $B^{-1} = \tilde{P}^t A^{-1} \tilde{P}$.

תרגיל 8.2.

1. תהי
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right).$$
מיצאו מטריצה $P \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)$ הפיכה עבורה P^tAP אלכסונית.

2. האם יכולנו לקחת מטריצה P' אחרת שתיתן תשובה מתאימה?

3. האם יש מטריצה $Q \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ הפיכה עבורה $Q^t A Q = I_3$?

4. האם יש מטריצה $Q \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}/5)$ הפיכה עבורה $Q^t B Q = I_3$ כאשר $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

פתרון. 1. ניזכר שמטריצה הפיכה P הינה כפל של מטריצות אלמנטריות. כפל משמאל במטריצה אלמנטרית E מתאים לפעולת דירוג על השורות, וכפל ב-E^t מתאים לפעולת דירוג זהה על העמודות.

לכן, ננסה לדרג את A למטריצה אלכסונית כאשר בכל שלב נבצע פעולת דירוג שורה ולאחריה פעולת דירוג עמודה מתאימה.

נעשה זאת.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \mapsto C_2 + 2C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \mapsto C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל כי

$$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מקיימת את הנדרש, ולכן ניקח

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. כן. למשל, יכולנו קודם להחליף את השורות הראשונה והשלישית, ולקבל

$$(P')^t = P^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq P^t$$

ואז $P' \neq P$.

3. קיבלנו $P^t A P = \mathrm{diag}(2,4,0)$ וזאת אינה מטריצה מדרגה מלאה. דרגה נשמרת תחת חפיפת מטריצות, ולכן לא יתכן שיש Q כנדרש.

4. ננסה דירוג לפי שורה ועמודה.

$$B=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\mapsto R_3-R_1}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&0\\0&4&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3\mapsto C_3-C_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&4\\0&4&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\mapsto R_2+2R_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&4\\0&4&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2\mapsto C_2+2C_1}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&4&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\mapsto R_3+2R_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3\mapsto C_3+2C_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

כעת, נוכל לחלק איברים על האלכסון רק בריבוע, כיוון שיש לכפול גם את השורה וגם את העמודה באותו מספר. כיוון ש־3 אינו ריבוע ב־$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ לא נוכל לקבל ככה את מטריצת היחידה. גם, הדטרמיננטה של המטריצה שקיבלנו היא $2\equiv 2\cdot 3\cdot 2$. הדטרמיננטה של מטריצות חופפות נבדלת בכפל בריבוע, אך לא יתכן $2=a^2\det(I_3)=a^2$ כי 2 אינו ריבוע.

השיטה הזאת לא עובדת תמיד. יתכן מצב בו מטריצה אינה חופפת ליחידה אך כן בעלת דטרמיננטה שהינה ריבוע. למשל, המטריצה $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ כזאת.

תרגיל 8.3. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{R}$. תהי g מכפלה פנימית על V ותהי h תבנית בילינארית סימטרית על V. הוכיחו שקיים בסיס B של V עבורו $[g]_B,[h]_B$ שתיהן אלכסוניות.

פתרון. נסמן $n:=\dim_{\mathbb{R}}(V)$. יהי E בסיס אורתונורמלי של V ביחס ל־g, שקיים לפי גרם־שמידט. אז $[g]_E=I_n$. כעת, $[h]_E$ סימטרית כי h סימטרית, ולכן יש ממשפט הפירוק הספקטרלי מטריצה $Q\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית עבורה $Q^t[h]_EQ$ אלכסונית. נרצה שיתקיים $Q=P_E^B$ עבור בסיס B, ולכן נגדיר $B:=\left(Q^{-1}v_1,\ldots,Q^{-1}v_n\right)$ כאשר $E=(v_1,\ldots,v_n)$. אז

$$[g]_B=\left(P_E^B\right)^t[g]_EP_E^B=Q^t[g]_EQ=Q^tI_nQ=Q^tQ=I_n$$

$$[h]_B=\left(P_E^B\right)^t[h]_EP_E^B=Q^t[h]_EQ$$

שתיהן אלכסוניות, כנדרש.

8.2 חוק האינרציה של סילבסטר

8.2.1 חזרה

משפט 8.2.1 (סילבסטר). תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ סימטרית.
מספר הערכים החיוביים\שליליים על האלכסון של מטריצה אלכסונית החופפת ל-A אינו תלוי בבחירה של אותה מטריצה.

מסקנה 8.2.2. תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ סימטרית. A חופפת למטריצה יחידה מהצורה $\begin{pmatrix} I_{(n_+)} & & \\ & -I_{(n_-)} & \\ & & 0_{(n_0)} \end{pmatrix}$.
מטריצה זאת נקראת צורת סילבסטר הקנונית של A. n_+ ו-n_- נקראים אינדקס האינרציה החיובי והשלילי של A, בהתאמה. ההפרש $n_+ - n_-$ נקרא הסיגנטורה של A.

הערה 8.2.3. משפט סילבסטר אומר באופן שקול שלכל תבנית בילינארית סימטרית g קיים בסיס C עבורו $[g]_C$ בצורת סילבסטר.

עובדה 8.2.4. המספר n_+ הוא סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים החיוביים של A, המספר n_- הוא סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים השליליים, והמספר n_0 הוא מימד הגרעין.

8.2.2 תרגילים

תרגיל 8.4. תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ סימטרית.

1. הוכיחו כי A, A^3 חופפות.
2. הוכיחו כי אם A הפיכה, היא חופפת ל-A^{-1}.
3. תהי $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ סימטרית ונניח כי

$$p_A(x) = x^2 - 2$$
$$.p_B(x) = x^2 + 2x - 3$$

האם A, B בהכרח חופפות?

פתרון. 1. ל-A, A^3 יש אותם אינדקסיי אינרציה כי הערכים העצמיים של A^3 הם λ^3 עבור λ ערך עצמי של A. לכן ל-A, A^3 אותה צורת סילבסטר, ולכן הן חופפות.

2. כמו מקודם, באשר הערכים העצמיים של A^{-1} הם $\frac{1}{\lambda}$ עבור λ ערך עצמי של A.

3. נמצא שורשים של הפולינומים.

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$
$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 3x - (x+3) = (x-1)(x+3)$$

לכן לכל אחד מהפולינומים ערך עצמי אחד חיובי ואחד שלילי. לכן צורות סילבסטר של A, B שתיהן $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ולכן הן חופפות.

תרגיל 8.5. מצאו את צורת סילבסטר של

$$.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

פתרון. כדי למצוא את צורת סילבסטר, נחפש ערכים עצמיים. נשים לב כי 1 ערך עצמי מריבוי $n-1$. אז הערך העצמי הנוסף הוא $\mathrm{tr}(A) - (n-1)\cdot 1 = -n+1$. אם $n=1$ מתקיים $A = (0)$. אחרת צורת סילבסטר היא $\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & -1 \end{pmatrix}$.

אלגוריתם 8.2.5. כדי למצוא בסיס C עבורו $[g]_C$ בצורת סילבסטר נבצע את השלבים הבאים.

1. נמצא בסיס $\tilde{C}=(v_1,\ldots,v_n)$ של V עבורו $[g]_{\tilde{C}}$ אלכסונית, בעזרת לכסון אורתוגונלי.
2. נגדיר
$$u_i=\begin{cases}\frac{v_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \lambda_i\neq 0\\ v_i & \lambda_i=0\end{cases}.$$
3. על ידי בחירת סדר מתאים של ה־u_i נקבל בסיס C המקיים את הנדרש.

תרגיל 8.6. תהי $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. מצאו מטריצה $P\in\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ עבורה P^tAP בצורת סילבסטר.

פתרון. נתחיל במציאת ערכים עצמיים של A. נשים לב כי 1 ערך עצמי של A מריבוי 2. הערך העצמי הנוסף הוא $\mathrm{tr}(A)-2\cdot 1=4$. בסיס מתאים הוא $B=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.
נבצע את תהליך גרם־שמידט על כל אחד מהמרחבים העצמיים, כדי לקבל בסיס אורתונורמלי
$$\tilde{C}:=(v_1,v_2,v_3)=\left(\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/3\\-\sqrt{6}/6\end{pmatrix}\right).$$
נחלק את הוקטורים העצמיים ב־$\sqrt{\lambda_i}$ ונקבל בסיס
$$C:=\left(\begin{pmatrix}1/2\sqrt{3}\\1/2\sqrt{3}\\1/2\sqrt{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/3\\-\sqrt{6}/6\end{pmatrix}\right).$$
תהי
$$P=\begin{pmatrix}1/2\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&-\sqrt{6}/6\\1/2\sqrt{3}&0&\sqrt{6}/3\\1/2\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&-\sqrt{6}/6\end{pmatrix}$$
ונקבל כי
$$P^tAP=I_3$$
בצורת סילבסטר.

הערה 8.2.6. לפעמים חישוב הערכים העצמיים יכול להיות מסובך. נוכל בעצם למצוא את צורת סילבסטר ואת הבסיס המתאים לה בלי מציאת המרחבים העצמיים. לשם כך, נשים לב כי אם E מטריצה אלמנטרית, הכפל $A\mapsto AE^t$ נקבע על פי אותן פעולות על עמודות A כמו פעולות E על השורות. נוכל אם כן לדרג את A לפי שורה ועמודה במקביל, באשר בכל שלב נבצע את אותה פעולה על השורות ואז על העמודות (או להיפך). נקבל מטריצה P כמכפלת המטריצות האלמנטריות, שעבורה PAP^t תהיה בצורת סילבסטר.

פרק 9

תרגילים ממבחנים

תרגיל 9.1. נתונה המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1&-3\\0&2&10&4\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_4\left(\mathbb{C}\right).$$

1. מצאו את הפולינום האופייני $p_A\left(x\right)$ של A, את הפולינום המינימלי $m_A\left(x\right)$ של A, צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P בך ש־$P^{-1}AP=J$.
2. האם קיימת $B\in\mathrm{Mat}_4\left(\mathbb{C}\right)$ כך ש־$B^2+2I=A$? נמקו.

פתרון. 1. A משולשת עליונה, לכן הערכים העצמיים שלה על האלכסון. לכן 2 ערך עצמי יחיד מריבוי אלגברי 4. הריבוי האלגברי של ערך עצמי הוא הריבוי שלו כשורש של הפולינום האופייני, לכן נקבל כי

$$p_A\left(x\right)=\left(x-2\right)^4.$$

מתקיים

$$\mathrm{rank}\left(A-2I\right)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0&0&1&-3\\0&0&10&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=2$$

לכן הריבוי הגיאומטרי של 2 כערך עצמי של A הוא $4-\mathrm{rank}\left(A-2I\right)=2$. ראינו כי הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי λ הוא מספר הבלוקים עם ערך עצמי λ בצורת ז'ורדן. לכן צורת ז'ורדן של A היא $\mathrm{diag}\left(J_3\left(2\right),2\right)$ או $\mathrm{diag}\left(J_2\left(2\right),J_2\left(2\right)\right)$. מתקיים

$$\left(A-2I\right)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $\dim\ker\left(A-2I\right)=4$. ידוע כי מספר הבלוקים מגודל לפחות i עם ערך עצמי λ הוא

$$\dim\ker\left(\left(A-\lambda I\right)^i\right)-\dim\ker\left(\left(A-2I\right)^{i-1}\right),$$

ולכן מספר הבלוקים מגודל לפחות 2 עם ערך עצמי 2 הוא

$$\dim\ker\left(\left(A-2I\right)^2\right)-\dim\ker\left(A\right)=4-2=2.$$

נקבל כי צורת ז'ורדן של A היא

$$J=\mathrm{diag}\left(J_2\left(2\right),J_2\left(2\right)\right).$$

ידוע כי הריבוי של λ כשורש של הפולינום המינימלי הוא גודל הבלוק המקסימלי עם ערך עצמי λ בצורת ז'ורדן של A, לכן

$$.m_A(x) = (x-2)^2$$

נותר למצוא P הפיכה עבורה $P^{-1}AP = J$. לשם כך נמצא בסיס ז'ורדן של T_A. ראינו כי $\ker(A-2I) = \mathrm{Span}(e_1,e_2)$ וכי $\ker\left((A-2I)^2\right) = \mathrm{Span}(e_1,e_2,e_3,e_4)$. ניקח בסיס שמורכב משרשראות ז'ורדן שנפתחות ע"י הוקטורים שהוספנו לבסיס של הגרעין. כלומר,

$$.B = ((A-2I)e_3, e_3, (A-2I)e_4, e_4) = \left(\begin{pmatrix}1\\10\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

אז B בסיס ז'ורדן של T_A ולכן

$$P = M_E^B = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 0\\ 10 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

עונה על הנדרש, שכן

$$.P^{-1}AP = M_B^E [T_A]_E M_E^B = [T_A]_B = J$$

2. קיימת B בזאת אם ורק אם קיימת B עבורה מתקיים

$$.P^{-1}\left(B^2+2I\right)P = P^{-1}AP$$

אבל, אגף שמאל שווה $\left(P^{-1}BP\right)^2 + I$ ואגף ימין שווה J. נסיק מכך שקיימת B כנ"ל אם ורק אם קיימת $\hat{B}$ עבורה $\hat{B}^2 + 2I = J$. אכן, אם קיימת B כנ"ל, ניקח $\hat{B} = P^{-1}BP$ שתקיים את הנדרש, ואם קיימת $\hat{B}$ עבורה $\hat{B}^2 + 2I = J$, ניקח $B = P\hat{B}P^{-1}$ ואז $\hat{B} = P^{-1}BP$ ונקבל כי

$$P^{-1}\left(B^2+2I\right)P = \left(P^{-1}BP\right)^2 + I = J = P^{-1}AP$$

ולאחר צמצום $B^2 + I = A$.

לכן, די לבדוק אם קיימת $\hat{B}$ עבורה $\hat{B}^2 + 2I = J$. אם נמצא $\tilde{B} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ עבורה $\tilde{B}^2 + 2I \sim J$ נקבל כי יש $Q \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ עבורה

$$\left(Q^{-1}\tilde{B}Q\right)^2 + 2I = Q^{-1}\left(\tilde{B}^2+2I\right)Q = J$$

ואז נוכל לקחת $\hat{B} = Q^{-1}\tilde{B}Q$. לכן, כדי להוכיח שהטענה נכונה, די למצוא $\tilde{B}$ עבורה $\tilde{B}^2 + 2I \sim J$, כלומר מטריצה $\tilde{B} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ עבורה צורת ז'ורדן של $\tilde{B}^2 + 2I$ היא $\mathrm{diag}(J_2(2), J_2(2))$. אבל $\tilde{B}^2 + 2I \sim J$ שקול ל-$\tilde{B}^2 \sim J - 2I$ לכן הנ"ל שקול לכך שצורת ז'ורדן של $\tilde{B}^2$ היא $\mathrm{diag}\,\mathrm{J}_2(0), J_2(0)$.

ניקח $\tilde{B} = J_4(0)$. אז

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

מטריצה מדרגה 2. לכן, בצורת ז'ורדן של $\tilde{B}^2$ יש $r_g(0) = 4 - \mathrm{rank}\left(B^2\right) = 2$ בלוקים. מתקיים $\left(\tilde{B}^2\right)^2 = J_4(0)^4 = 0$, לכן בצורת ז'ורדן של $\tilde{B}^2$ מספר הבלוקים מגודל לפחות 2 בצורת ז'ורדן של $\tilde{B}^2$ הוא

$$.\dim\ker\left(\left(\tilde{B}^2\right)^2\right) - \dim\ker\left(\tilde{B}^2\right) = 4 - 2 = 2$$

לכן צורת ז'ורדן של $\tilde{B}^2$ היא $\mathrm{diag}(J_2(0), J_2(0))$, כנדרש.

תרגיל 9.2. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי ותהיינה $S,T\in\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ אוניטריות. הוכיחו או מצאו דוגמא נגדית עבור כל אחד מהסעיפים הבאים.

1. $S+T$ נורמלית.
2. $S\circ T$ נורמלית.
3. אם S,T מתחלפות אז $S+T$ נורמלית.

פתרון. 1. מתקיים

$$\begin{aligned}(S+T)^*\circ(S+T) &= (S^*+T^*)\circ(S+T)\\ &= S^*\circ S+S^*\circ T+T^*\circ S+T^*\circ T\\ &= 2\operatorname{Id}_V+S^*\circ T+T^*\circ S\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}(S+T)\circ(S+T)^* &= (S+T)\circ(S^*+T^*)\\ &= S\circ S^*+S\circ T^*+T\circ S^*+T\circ T^*\\ &= 2\operatorname{Id}_V+S\circ T^*+T\circ S^*\end{aligned}$$

לכן נרצה לדעת האם בהכרח

$$.S^*\circ T+T^*\circ S=S\circ T^*+T\circ S^*$$

בדי למצוא דוגמא נגדית, נצטרך שלפחות אחת מבין S,T לא תהיה צמודה לעצמה. ניקח

$$\begin{aligned}S\colon \mathbb{C}^2&\to\mathbb{C}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&\mapsto\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ובן

$$\begin{aligned}T\colon \mathbb{C}^2&\to\mathbb{C}^2\\ .\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&\mapsto\begin{pmatrix}\frac{x-y}{\sqrt{2}}\\ \frac{x+y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

E בסיס אורתונורמלי ולכן

$$[S^*]_E=[S]_E^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=[S]_E$$

וגם

$$.\,[T^*]_E=[T]_E^t=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\neq[T]_E$$

בעת

$$\begin{aligned}[S^*\circ T+T^*\circ S]_E &= [S^*]_E[T]_E+[T^*]_E[S]_E\\ &= \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\ \sqrt{2}&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

אבל

$$\begin{aligned}\left(S\circ T^{*}+T\circ S^{*}\right)_{E}&=[S]_{E}\,[T^{*}]_{E}+[T]_{E}\,[S^{*}]_{E}\\&=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&\sqrt{2}\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ואלו מטריצות שונות.

2. מתקיים

$$\begin{aligned}(S\circ T)^{*}\circ(S\circ T)&=T^{*}\circ S^{*}\circ S\circ T\\&=T^{*}\circ S\circ S^{*}\circ T\\&=T^{*}\circ T\\&=\mathrm{Id}_{V}\end{aligned}$$

לכן $S\circ T$ אוניטרית ובפרט נורמלית.

הערה 9.0.1. ראיתם בתרגול שהרכבה של העתקות אוניטריות היא אוניטרית, ולכן אין צורך בפירוט מעבר לכך כפי שהתרגיל מנוסח.

3. כמו מקודם, מתקיים

$$\begin{aligned}(S+T)^{*}\circ(S+T)&=(S^{*}+T^{*})\circ(S+T)\\&=S^{*}\circ S+S^{*}\circ T+T^{*}\circ S+T^{*}\circ T\\&=2\,\mathrm{Id}_{V}+S^{*}\circ T+T^{*}\circ S\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}(S+T)\circ(S+T)^{*}&=(S+T)\circ(S^{*}+T^{*})\\&=S\circ S^{*}+S\circ T^{*}+T\circ S^{*}+T\circ T^{*}\\&=2\,\mathrm{Id}_{V}+S\circ T^{*}+T\circ S^{*}\end{aligned}$$

כעת, S,T מתחלפות, לכן גם S^{*},T מתחלפות וגם S,T^{*} מתחלפות, ונקבל שוויון.

תרגיל 9.3. יהיו $v_1,\ldots,v_n\in\mathbb{R}^n$. הראו כי $B:=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של $\mathbb{R}^n$ אם ורק אם למטריצת Gram של B

$$\mathrm{Gr}\,(B):=\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle&\cdots&\langle v_1,v_n\rangle\\\vdots&\ddots&\vdots\\\langle v_n,v_1\rangle&\cdots&\langle v_n,v_n\rangle\end{pmatrix}=\left(\langle v_i,v_j\rangle\right)_{i,j\in[n]}$$

יש דטרמיננטה חיובית.

פתרון. נניח כי B בסיס. אז $\mathrm{Gr}\,(B)$ המטריצה המייצגת של המכפלה הפנימית הסטנדרטית לפי B. לכן קיים $a\in\mathbb{R}$ עבורו

$$\det\left(\mathrm{Gr}\,(B)\right)=a^{2}\det\left(I_n\right)=a^{2}$$

(כי $\mathrm{Gr}\,(B)=P^{t}I_nP$ וכי הדטרמיננטה כפלית). כיוון ש־$\mathrm{Gr}\,(B)$ הפיכה, לא יתכן $a=0$ ולכן $\det\left(\mathrm{Gr}\,(B)\right)=a^{2}>0$.

בכיוון השני, נניח ש־B אינו בסיס. אז יש סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{R}$ עבורם

$$v_n=\sum_{i\in[n-1]}\alpha_i v_i.$$

נקבל

$$(\mathrm{Gr}(B)) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \left\langle v_1, \sum_{i\in[n-1]} \alpha_i v_i\right\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \cdots & \left\langle v_i, \sum_{i\in[n-1]} \alpha_i v_i\right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \sum_{i\in[n-1]} \alpha_i \langle v_1, v_i\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \cdots & \sum_{i\in[n-1]} \alpha_i \langle v_i, v_i\rangle \end{pmatrix}.$$

לכן, העמודה הימנית של $\mathrm{Gr}(B)$ היא צירוף לינארי של שאר העמודות, ולכן $\det(\mathrm{Gr}(B)) = 0$.

תרגיל 9.4. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד $n \in \mathbb{N}$ מעל $\mathbb{R}$. יהיו $U, W \leq V$ עבורם $V = U \oplus W$. עבור $v = u + w$ כאשר $u \in U, w \in W$ נגדיר $T(v) = u - w$. הניחו כי T לינארית והראו כי T צמודה לעצמה אם ורק אם $U \perp W$.

פתרון. נניח כי $U \perp W$. יהי B בסיס אורתונורמלי ל־U ויהי C בסיס אורתונורמלי ל־W. אז $D \coloneqq B \uplus C$ בסיס אורתונורמלי ל־V. נקבל כי בבסיס זה

$$[T]_D = \begin{pmatrix} [T|_U]_B & 0 \\ 0 & [T|_W]_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_\ell \end{pmatrix}$$

עבור $k \coloneqq \dim U, \ell \coloneqq \dim W$. כיוון ש־$D$ אורתונורמלי, מתקיים

$$[T^*]_D = [T]_D^t = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_\ell \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_\ell \end{pmatrix} = [T]_D.$$

לכן, $T^* = T$, כנדרש.
נניח בעת כי $T^* = T$ ויהיו $u \in U$ ו־$w \in W$. מתקיים

$$\begin{aligned} \langle u, w\rangle &= \langle Tu, w\rangle \\ &= \langle u, T^* w\rangle \\ &= \langle u, Tw\rangle \\ &= \langle u, -w\rangle \\ &= -\langle u, w\rangle \end{aligned}$$

לכן $\langle u, w\rangle = 0$ ולכן $u \perp w$. נקבל כי $U \perp W$.