שתי דרכים לחישוב סימן של פרמוטציה

לצורך כל זה, נסמן פרמוטציה $\sigma \in S_n$ באופן הבא:

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)).$$

למשל,

$$Id_{[n]} = (1, 2, \dots, n).$$

חילוף בין שני מספרים x,y נסמן גם בתור $(x\ y)$.

למשל, ב־S_4, $(2\ 4) = (1, 4, 3, 2)$.

כעת, נציג שתי דרכים לחישוב הסימן של פרמוטציה $\sigma \in S_n$.

<u>דרך 1</u>: ניקח את הפרמוטציה, ובכל שלב נבצע חילוף בין המספר הכי קטן שלא במקום המתאים לו בפרמוטציית הזהות, לבין המספר שבמקום שלו. (-1) בחזקת מס' החילופים שביצענו שווה לסימן.

למשל:

$$(3,4,2,1) \xrightarrow{1\leftrightarrow 4} (1,4,2,3) \xrightarrow{2\leftrightarrow 3} (1,2,4,3) \xrightarrow{3\leftrightarrow 4} (1,2,3,4)$$

לכן $sgn((3,4,2,1)) = (-1)^3 = -1$. וגם, אם נכתוב את החילופים שביצענו מימין לשמאל נקבל כתיבה של הפרמוטציה בתור הרכבת חילופים:

$$(3,4,2,1) = (3\ 4)(2\ 3)(1\ 4)$$

נעיר מכיוון שהחילופים שביצענו מראים כי

$$(3\ 4)(2\ 3)(1\ 4)(3,4,2,1)=Id_{[n]}$$

ולאחר נכפל ב- $(3\,4)(2\,3)(1\,4)$ משמאל

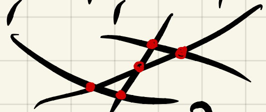
נקבל כי

$$(3,4,2,1)=(3\ 4)(2\ 3)(1\ 4).$$

<u>דרך ב׳</u>: ישנה דרך גיאומטרית — לחישוב הסימן של התמורה. נכתוב את התמורה ומתחתיה את התמורה הזהות, ונחבר כל מספר לעצמו.

למשל:

$$\sigma=(3,4,2,1)$$



$$(1,2,3,4)$$

$sgn(\sigma)=(-1)^5=-1$

נסמן ב- $int(\sigma)$ את מס׳ החיתוכים בין הקווים המסומנים, כאשר נצייר את הקווים כך שאין חיתוך בין שלושה קווים באותה נקודה (הקווים אינם חייבים להיות ישרים).

<u>ולכן</u>:

$$sgn(\sigma)=(-1)^{int(\sigma)}$$

<u>הוכחה</u>: נספור את מס׳ החיתוכים. הקו שיוצא מ-i חותך את זה שיוצא מ-j בדיוק כאשר $j<i$ וגם $\sigma(j)>\sigma(i)$ או כאשר $j>i$ וגם $\sigma(j)<\sigma(i)$. כיוון שלא נרצה לספור את החיתוך פעמיים, די לספור את החיתוכים בזוגות $j<i$ נקבל כי:

$$\mathrm{int}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \#\{j>i \mid \sigma(j)<\sigma(i)\}$$

כעת נסתכל מה יקרה אם "נגרור" את המספר הכי קטן i שאינו מקיים $\sigma(i)=i$ שמאלה ע"י כפל משמאל בפרמוטציה

$$\tau := (i+1\ \ i)\cdots(\sigma(i)-1\ \ \sigma(i)-2)(\sigma(i)\ \ \sigma(i)-1)$$

נסמן את הפרמוטציה המתקבלת בתור $\tilde{\sigma} := \tau\circ\sigma$.

לא הוספנו שום חילופים, כיוון שהסדר בין שאר המספרים פרט ל-i בפרמוטציה נשמר, אך ב-$\tilde{\sigma}$ אין חילופים בין הקטנים שווים מ-i לבין אף אחד אחר.

מבחירת i, לכל $k<i$ מתקיים $\sigma(k)=k$ לכן לכל $i\le l<\sigma(i)$ המקור של l תחת σ בהכרח גדול מ-i. לכן

$$\#\{j>i \mid \sigma(j)<\sigma(i)\} = \sigma(i)-i$$

לכן

$$\mathrm{int}(\tilde{\sigma}) = \mathrm{int}(\sigma)-\sigma(i)+i$$

ולכן

$$(\mathrm{I})\quad (-1)^{\mathrm{int}(\tilde{\sigma})} = (-1)^{\sigma(i)-i}(-1)^{\mathrm{int}(\sigma)}$$

מצד שני, τ הרכבה של $\sigma(i)-i$ חילופים, ולכן

$$(\mathrm{II})\quad \mathrm{sgn}(\tilde{\sigma}) = (-1)^{\sigma(i)-i}\,\mathrm{sgn}(\sigma).$$

נקבל מ- (I) ו- (II) ע"י צמצום איברים

כי $(-1)^{int(\sigma)} = sgn(\sigma)$

אם ורק אם $(-1)^{int(\tilde{\sigma})} = sgn(\tilde{\sigma})$.

נמשיך באינדוקציה על המס' i המינימלי
עבורו $\sigma(i) \neq i$, ונציין שנקבל בסוף את
$Id_{[n]}$ עבורה.

$$sgn(Id_{[n]}) = 1 = (-1)^0 = (-1)^{int(Id_{[n]})}$$

נקבל כי

$$(-1)^{int(\sigma)} = sgn(\sigma),$$

כנדרש. $\boxed{\times}$