אלגברה ב' - תרגילי חזרה למבחן

תאריך הגשה: 7.9.2024

תרגיל 1. נגיד כי וקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3[x]$ עם מקדמים שלמים הינו וקטור פיתגורי אם (a,b,c) שלשה פיתגורית, כלומר a,b,c שלמים חיוביים ומתקיים

$$a^2+b^2=c^2.$$

תהי

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

ויהי

$$v_0=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. הראו כי v_0 וקטור פיתגורי וכי אם $v \in \mathbb{R}^3$ וקטור פיתגורי אז Av וקטור פיתגורי.
2. הסיקו כי $A^k v_0$ וקטור פיתגורי לכל k.
3. חשבו את $A^k v_0$ לכל $k \in \mathbb{N}$, ומצאו וקטור פיתגורי $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ עבורו $a=2025$.

תרגיל 2. תהי

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C}).$$

מיצאו מטריצה $P \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ עבורה

$$P^tAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

תרגיל 3. תהי

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

1. הראו כי

$$\forall v \in \mathbb{R}^3:\ \sqrt{2}\,\|v\| \le \|Av\| \le \sqrt{6}\,\|v\|.$$

2. עבור $\alpha \in [0,1]$ חשבו את $\left\| A \begin{pmatrix} \alpha \\ \sqrt{1-\alpha^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$.

3. מצאו וקטור $v \in \mathbb{R}^3$ עבורו $\|v\| = 1$ וגם $\|Av\| = 2$.

תרגיל 4. יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle p, q \rangle = p(-1)\,q(-1) + p(0)\,q(0) + p(1)\,q(1),$$

ותהי

$$T \colon V \to V$$
$$ax^2 + bx + c \mapsto bx^2 + ax + 2c.$$

1. מיצאו בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]^B$ אלכסונית.

2. מיצאו $p \in \mathbb{R}_2[x]$ עבורו $\|p\| = 1$ וגם $\|T(p)\| = \frac{4}{3}$.

רמז: חפשו p מהצורה $\alpha u + \sqrt{1-\alpha^2} v$ עבור u, v וקטורים עצמיים מהבסיס B שמצאתן.

תרגיל 5. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T \colon V \to V$.

1. הראו כי $\ker(T^*) = \operatorname{Im}(T)^{\perp}$.

2. הראו כי $\operatorname{Im}(T^*) = \ker(T)^{\perp}$.

3. נניח כי $T^2 = T$. הראו כי T הטלה אורתוגונלית אם ורק אם T הרמיטית.