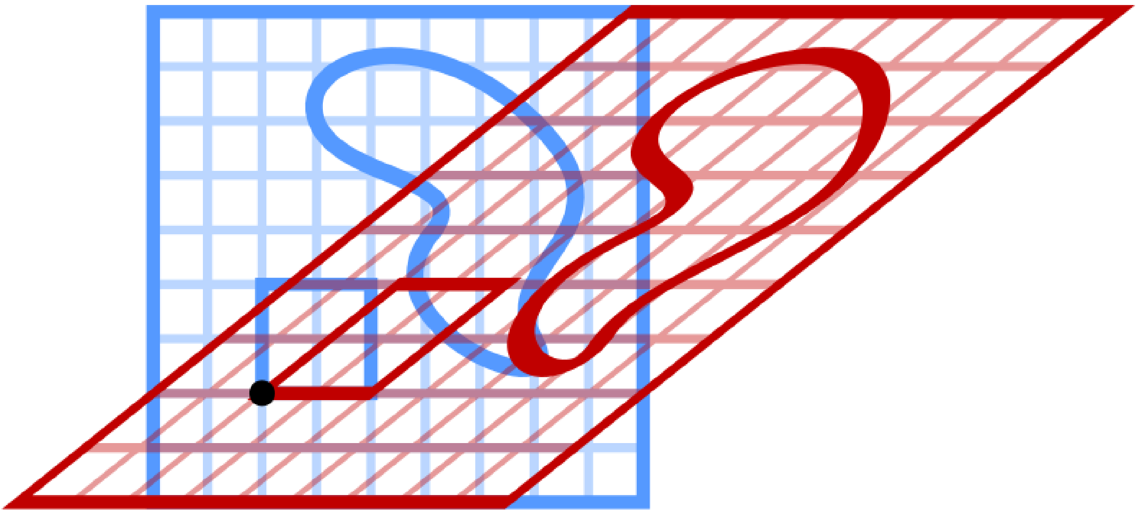

# אלגברה ב' (104168)
# אביב 2024
# רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־2 ביוני 2024

# תוכן העניינים

## סימונים

- $[n]=\{1,\ldots,n\}$.
- $\sum_{i\in[n]}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\ldots+a_n$
- $\mathrm{Mat}_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ הוא מרחב המטריצות עם $m$ שורות ו־$n$ עמודות, עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$.
- $\mathbb{F}^n=\mathrm{Mat}_{n\times 1}\left(\mathbb{F}\right)$
- $\mathrm{Mat}_{n}\left(\mathbb{F}\right)=\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$ הוא מרחב ההעתקות הלינאריות $V\to W$ כאשר $V,W$ מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.
- $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,V\right)$

# חלק I

# חלק ראשון - מרחבים שמורים

# פרק 1

# מטריצות מייצגות

## 1.1 הגדרות בסיסיות

**הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות).** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של $V$ ויהי $v\in V$. וקטור הקואורדינטות של $v$ לפי הבסיס $B$ הוא הוקטור $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$.v=\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\coloneqq \alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n$$

**הערה 1.1.2.** ההעתקה

$$\begin{aligned}\rho_B\colon V&\to\mathbb{F}^n\\ v&\mapsto [v]_B\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

**הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת).** יהיו $V,W$ מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים $B,C$ בהתאמה, ונסמן

$$.B=(v_1,\ldots,v_n)$$

נסמן גם $n\coloneqq\dim(V)$ ו־$m\coloneqq\dim(W)$. עבור $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ נגדיר

$$.[T]_C^B=\begin{pmatrix}| & & |\\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C\\ | & & |\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$$

**משפט 1.1.4 (כפל מטריצות).** תהי $A\in\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E=(e_1,\ldots,e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אז:

(i) לכל $i\in[m]$ מתקיים כי $Ae_i$ העמודה ה־$i$ של $A$.

(ii) לכל $B=\begin{pmatrix}| & & |\\ b_1 & \cdots & b_\ell\\ | & & |\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_{n\times\ell}(\mathbb{F})$ מתקיים $.AB=\begin{pmatrix}| & & |\\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell\\ | & & |\end{pmatrix}$

**תרגיל 1.1.** הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

**הערה 1.1.5.** ההעתקה

$$\begin{aligned}\eta_C^B\colon\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,B)&\to\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})\\ T&\mapsto [T]_C^B\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

**טענה 1.1.6.** תהי $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ ויהיו $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של $V$ ו־$C$ בסיס של $W$. אז

$$[T]_C^B[v]_B=[T(v)]_C$$

לכל $v\in V$.

הוכחה. עבור $v=v_i$ מתקיים $[T]_C^B[v_i]_B=[T]_C^B e_i$ וזאת העמודה ה־$i$ של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה. אם $v=\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i$ נקבל מלינאריות של $T$ ושל $\rho_B$ כי

$$\begin{aligned}
[T(v)]_C &= \left[T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right)\right]_C \\
&= \left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i T(v_i)\right]_C \\
&= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T(v_i)]_C \\
&= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\
&= [T]_C^B\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i [v_i]_B\right) \\
&= [T]_C^B\left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right]_B \\
&= [T]_C^B [v]_B ,
\end{aligned}$$

כנדרש. ■

**סימון 1.1.7.** אם $B$ בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי $V$ ואם $T\in\mathrm{End}(V)$, נסמן $[T]_B:=[T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של $T$ לפי הבסיס $B$.

**סימון 1.1.8.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים $B,C$. נסמן $M_C^B:=[\mathrm{Id}_V]_C^B$.

**סימון 1.1.9.** אם $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, נסמן

$$\begin{aligned}
T_A\colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\
v &\mapsto Av .
\end{aligned}$$

**תרגיל 1.2.** יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned}
T\colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\
p(x) &\mapsto p(x+1)
\end{aligned}$$

ויהי $B=\left(1,x,x^2,x^3\right)$ בסיס של $V$. כיתבו את $[T]_B$.

**פתרון.** לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $\left[T\left(x^i\right)\right]_B$ עבור $i\in\{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(x) &= x+1 = 1+x \\
T\left(x^2\right) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 \\
T\left(x^3\right) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
[T(1)]_B &= e_1 \\
[T(x)]_B &= e_1+e_2 \\
\left[T\left(x^2\right)\right]_B &= e_1+2e_2+e_3 \\
\left[T\left(x^3\right)\right]_B &= e_1+3e_2+3e_3+e_4
\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

**תרגיל 1.3.** יהי $V=\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{C}\right)$, תהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ A&\mapsto\frac{1}{2}\left(A-A^{t}\right)\end{aligned}$$

ויהי

$$E=\left(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}\right):=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של $V$. כיתבו את $[T]_E$.

*הוכחה.* כמו מקודם, נחשב את $\left[T\left(E_{i,j}\right)\right]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$\begin{aligned}T\left(E_{1,1}\right)&=\frac{1}{2}\left(E_{1,1}-E_{1,1}\right)=0\\ T\left(E_{1,2}\right)&=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}E_{1,2}-\frac{1}{2}E_{2,1}\\ T\left(E_{2,1}\right)&=\frac{1}{2}\left(E_{2,1}-E_{1,2}\right)=\frac{1}{2}E_{2,1}-\frac{1}{2}E_{1,2}\\ T\left(E_{2,2}\right)&=\frac{1}{2}\left(E_{2,2}-E_{2,2}\right)=0\end{aligned}$$,

לכן

$$\begin{aligned}\left[T\left(E_{1,1}\right)\right]_E&=0\\ \left[T\left(E_{1,2}\right)\right]_E&=\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_3\\ \left[T\left(E_{2,1}\right)\right]_E&=-\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3\\ \left[T\left(E_{2,2}\right)\right]_E&=0\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_E=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

כנדרש. ■

**תרגיל 1.4.** יהי $V=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B=\left(f_1,f_2\right)$ כאשר

$$\begin{aligned}f_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)&=x\\ f_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)&=y\end{aligned}$$,

ותהי

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{R}\right).$$

מיצאו $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ עבורו $[T]_B=A$.

**פתרון.** עבור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}.$$

לכן נדרוש

$$[T(f_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$[T(f_2)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

אז

$$T(f_1) = f_1 + 2f_2$$
$$T(f_2) = 3f_1 + 4f_2.$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y = \alpha f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}(T(f))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(f_1 + 2f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta(3f_1 + 4f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x + 2y) + \beta(3x + 4y)\end{aligned}.$$

**טענה 1.1.10.** תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$. אז $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A - B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־$i$ של $A - B$, שהינה $(A - B)e_i$, שווה ל־$0$. לכן $A - B = 0$. ■

**טענה 1.1.11.** יהיו $U, V, W$ מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים $B, C, D$ בהתאמה, ותהיינה

$$S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$$
$$T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W).$$

אז

$$[T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B.$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned}[T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B\end{aligned}$$

לכן

$$[T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B,$$

כנדרש. ■

**טענה 1.1.12.** יהיו $V,W$ מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$ חד־חד ערכית. יהיו

$$\begin{aligned}B&=\left(v_1,\ldots,v_n\right)\\C&=\left(u_1,\ldots,u_n\right)\end{aligned}$$

בסיסים של $V$ ויהיו

$$\begin{aligned}B'&=\left(T\left(v_1\right),\ldots,T\left(v_n\right)\right)\\C'&=\left(T\left(u_1\right),\ldots,T\left(u_n\right)\right).\end{aligned}$$

אז $B',C'$ בסיסים של $\operatorname{Im}\left(T\right)=\left\{T\left(v\right)\mid v\in V\right\}$ וגם $M_C^B=M_{C'}^{B'}$.

**פתרון.** כיוון ש־$T$ חד־חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T\colon V\xrightarrow{\sim}\operatorname{Im}\left(T\right)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן $B',C'$ בסיסים.
כעת, לכל $i\in[n]$ נכתוב

$$v_i=\sum_{j\in[n]}\alpha_{i,j}u_i$$

ואז

$$M_C^Be_i=\left[v_i\right]_C=\begin{pmatrix}\alpha_{i,1}\\\vdots\\\alpha_{i,n}\end{pmatrix}.$$

כמו כן,

$$\begin{aligned}T\left(v_i\right)&=T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_{i,j}u_j\right)\\&=\sum_{i\in[n]}\alpha_{i,j}T\left(u_j\right)\end{aligned}$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'}e_i=\left[T\left(v_i\right)\right]_{C'}=\begin{pmatrix}\alpha_{i,1}\\\vdots\\\alpha_{i,n}\end{pmatrix}.$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

**תרגיל 1.5.** תהי $A\in\operatorname{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ הפיכה.

1. יהי $E$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס $B$ של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_E^B$.
2. מיצאו בסיס $C$ של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_C^E$.
3. יהי $B$ בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס $C$ של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_C^B$.
4. יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ איזומורפיזם ויהי $B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ בסיס של $V$. מיצאו בסיס $C$ של $V$ עבורו $[T]_C^B=A$.

**פתרון.** 1. אם $B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B=\begin{pmatrix}|&&|\\\left[v_1\right]_E&\cdots&\left[v_n\right]_E\\|&&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&&|\\v_1&\cdots&v_n\\|&&|\end{pmatrix}.$$

לכן ניקח את $\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ להיות עמודות $A$, לפי הסדר.

2. לכל $v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C\left[v\right]_C = \left[v\right]_E = v$$

ולכן $M_C^E=\left(M_E^C\right)^{-1}$. אם ניקח $C=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ כאשר $u_i$ העמודה ה־$i$ של $A^{-1}$ נקבל מהסעיף הקודם כי $M_E^C=A^{-1}$ ולכן $M_C^E=\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$. כלומר ניקח, $u_i=A^{-1}e_i$.

3. מתקיים $M_C^B=M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $M_C^E M_E^B=A$ או במילים אחרות $M_C^E=A\left(M_E^B\right)^{-1}=AM_B^E$. מהסעיף הקודם, נרצה $C=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ כאשר $u_i$ העמודה ה־$i$ של $\left(AM_B^E\right)^{-1}=M_E^BA^{-1}$, כלומר

$$u_i=M_E^BA^{-1}e_i.$$

4. עבור כל בסיס $C'$ מתקיים $\left[T\right]_{C'}^B=M_{C'}^B\left[T\right]_B^B$ לכן נרצה $M_C^B\left[T\right]_B^B=A$. כיוון ש־$T$ איזומורפיזם, המטריצה $\left[T\right]_B^B$ הפיכה, ולכן נרצה $M_C^B=A\left(\left[T\right]_B^B\right)^{-1}$. כעת, אם $C=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ נקבל לפי 1.1.12 עבור האיזומורפיזם $\rho_B$ כי $M_C^B=M_{\hat{C}}^E$ כאשר $\hat{C}=\left(\left[v_1\right]_B,\ldots,\left[v_n\right]_B\right)$. לכן נחפש $\hat{C}$ עבורו $M_{\hat{C}}^E=A\left[T\right]_B^{-1}$. לפי הסעיף השני, נרצה עבור $\hat{C}=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$

$$u_i=\left(A\left[T\right]_B^{-1}\right)^{-1}e_i=\left[T\right]_BA^{-1}e_i.$$

לכן

$$v_i=\rho_B^{-1}\left(\left[T\right]_BA^{-1}e_i\right).$$

**תרגיל 1.6.** יהי $V=\mathbb{C}_3\left[x\right]$, תהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ p\left(x\right)&\mapsto p\left(x+1\right)\end{aligned},$$

יהי $E=\left(1,x,x^2,x^3\right)$, הבסיס הסטנדרטי ותהי $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס $C$ של $V$ עבורו $A=\left[T\right]_C^E$.

**פתרון.** לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C}=\left(u_1,\ldots,u_4\right)$ כאשר $u_i=\left[T\right]_EA^{-1}e_i$. חישבנו ב־1.2 כי

$$\left[T\right]_E=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2=I$ כלומר $A^{-1}=A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned}Ae_1&=e_2\\Ae_2&=e_1\\Ae_3&=e_4\\Ae_4&=e_3\end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1 = [T]_E\, A^{-1} e_1 = [T]_E\, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [T]_E\, A^{-1} e_2 = [T]_E\, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = [T]_E\, A^{-1} e_3 = [T]_E\, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = [T]_E\, A^{-1} e_4 = [T]_E\, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

כלומר

$$\hat{C} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

ולבסוף

$$C = (v_1, v_2, v_3, v_4) := \left(1 + x, 1, 1 + 3x + 3x^2 + x^3, 1 + 2x + x^2\right).$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן $A$. מתקיים

$$\begin{aligned} T\left(1\right) &= 1 = v_2 \\ T\left(x\right) &= x + 1 = v_1 \\ T\left(x^2\right) &= \left(x+1\right)^2 = 1 + 2x + x^2 = v_4 \\ T\left(x^3\right) &= \left(x+1\right)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T]_C^E &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_C & [T(x)]_C & \left[T\left(x^2\right)\right]_C & \left[T\left(x^3\right)\right]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

כנדרש.

## 1.2 גרעין ותמונה

**הגדרה 1.2.1 (גרעין של העתקה לינארית).** יהיו $V, W$ מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. הגרעין של $T$ הוא

$$\ker(T) \coloneqq \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

**הגדרה 1.2.2 (תמונה של העתקה לינארית).** יהיו $V, W$ מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. התמונה של $T$ היא

$$\operatorname{Im}(T) \coloneqq \{T(v) \mid v \in V\}.$$

**הגדרה 1.2.3 (דרגה של אופרטור לינארי).** יהיו $V, W$ מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. הדרגה של $T$ היא

$$\operatorname{rank}(T) \coloneqq \dim(\operatorname{Im}(T)).$$

**הערה 1.2.4.** אם $V, W$ סוף־מימדיים עם בסיסים $B, C$ בהתאמה, אז

$$\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}\left([T]_C^B\right).$$

**משפט 1.2.5 (משפט המימדים).** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T \in \operatorname{End}(V)$. אז

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}(T) + \dim \ker(T).$$

**תרגיל 1.7.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $v \in V$. מיצאו בסיס $B$ של $V$ עבורו $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

**פתרון.** נשלים את $(v)$ לבסיס $B_0 = (v_1, \ldots, v_n)$ של $V$ כאשר $v_1 = v$. תהי

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F}).$$

$A$ הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B = (u_1, \ldots, u_n)$ של $V$ עבורו $M_B^{B_0} = A$. נקבל

$$\begin{aligned} [v]_B &= [\operatorname{Id}_V v]_B \\ &= [\operatorname{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת

$$u_i = \rho_{B_0}^{-1}\left([\operatorname{Id}]_B A^{-1} e_i\right) = \rho_{B_0}^{-1}\left(A^{-1} e_i\right).$$

**תרגיל 1.8.** יהי $V$ מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $\operatorname{rank} T = 1$ אם ורק אם יש בסיסים $B, C$ ל־$V$ כך שכל מקדמי $[T]_C^B$ הם 1.

**פתרון.** נניח כי יש בסיסים $B,C$ כמתואר. אז $\operatorname{rank}T=\operatorname{rank}[T]_C^B=1$.
בכיוון השני, נניח כי $\operatorname{rank}T=1$. כלומר, $\dim\operatorname{Im}T=1$. ממשפט המימדים מתקיים $\dim V=\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T$, לכן

$$\dim\ker T=\dim V-\dim\operatorname{Im}T=\dim V-1\,.$$

יהי $n:=\dim V$ ויהי

$$\tilde{B}:=(u_1,\ldots,u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי $w$ וקטור פורש של $\operatorname{Im}T$ ויהי $C$ בסיס של $V$ כך שמתקיים $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי $v:=T^{-1}(w)$, ואז $(v,u_1,\ldots,u_{n-1})$ בלתי־תלויים לינארית, כי $v\notin\ker T$. לכן זה בסיס של $V$. אז גם $B:=(v,v+u_1,\ldots,v+u_{n-1})$ בסיס של $V$ כי המטריצה

$$\begin{pmatrix}| & & |\\ [v]_{\tilde{B}} & \cdots & [v+u_{n-1}]_{\tilde{B}}\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ & 0 & & 1 & 0\\ 0 & & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

הפיכה.
נסמן $C=(w_1,\ldots,w_m)$. מתקיים

$$T(v)=w=w_1+\ldots+w_m$$

ולכל $i\in[n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned}T(v+u_i)&=T(v)+T(u_i)\\&=T(v)+0\\&=T(v)\\&=w_1+\ldots+w_m\end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

**תרגיל 1.9.** תהי

$$\begin{aligned}T\colon\mathbb{R}_3[x]&\to\mathbb{R}_3[x]\\ p(x)&\mapsto p(-1).\end{aligned}$$

מיצאו בסיסים $B,C$ של $\mathbb{R}_3[x]$ עבורם

$$[T]_C^B=A:=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

**פתרון.** ניקח בסיס $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3):=\left(x+1,x^2-1,x^3+1\right)$ של $\ker(T)$, כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי־תלוייה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי $T\neq 0$). מתקיים $T(x)=-1=:w$ ואז $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(w)$. נחשב בסיס $C$ עבורו $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. נשלים את $(v)$ לבסיס

$$C_0=(v_1,v_2,v_3,v_4):=\left(-1,x,x^2,x^3\right).$$

המטריצה

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

הפיכה ולכן קיים בסיס $C=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ עבורו $M_C^{C_0}=X$, כשראינו שאז $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. כפי שראינו, ניתן לחשב את $C$ לפי $u_i=\rho_{C_0}^{-1}\left(X^{-1}e_i\right)$. מתקיים

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$u_1=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)=-1-x-x^2-x^3$$
$$u_2=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=x$$
$$u_3=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=x^2$$
$$u_4=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x^3.$$

כלומר, $C=\left(-1-x-x^2-x^3,x,x^2,x^3\right)$.
ניקח $v=x\in V$ כך שיתקיים $T(v)=-1=w$ ואז

$$B=(v,v+b_1,v+b_2,v+b_3)=\left(x,2x+1,x^2+x-1,x^3+x+1\right)$$

כמו בתרגיל הקודם.
אכן, מתקיים

$$T(x)=-1$$
$$T(2x+1)=-2+1=-1$$
$$T\left(x^2+x-1\right)=(-1)^2-1-1=1-2=-1$$
$$T\left(x^3+x+1\right)=(-1)^3-1+1=-1$$

וגם $[-1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, לכן

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

כפי שרצינו.