



אלגברה ב' (104168)

אביב 2024

רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־21 במאי 2024

תוכן העניינים

1	I חלק ראשון - מרחבים שמורים
2	1 מטריצות מייצגות
2	1.1 הגדרות בסיסיות
8	1.2 גרעין ותמונה

חלק I

חלק ראשון - מרחבים שמורים

פרק 1

מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} , יהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V ויהי

$v \in V$. וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B הוא הוקטור $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i := \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\begin{aligned} \rho_B: V &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל אותו שדה \mathbb{F} עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

נסמן גם $n := \dim(V)$ ו- $m := \dim(W)$. עבור $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E = (e_1, \dots, e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{F}^m . אז:

(i) לכל $i \in [m]$ מתקיים כי Ae_i העמודה ה- i של A .

$$(ii) \text{ לכל } B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_\ell \\ | & & | \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times \ell}(\mathbb{F}) \text{ מתקיים } AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell \\ | & & | \end{pmatrix}$$

תרגיל 1.1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\begin{aligned} \eta_C^B: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) &\rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}) \\ T &\mapsto [T]_C^B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ ויהיו $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V ו- C בסיס של W . אז

$$[T]_C^B [v]_B = [T(v)]_C$$

לכל $v \in V$.

הוכחה. עבור $v = v_i$ מתקיים $[T]_C^B e_i = [T]_C^B [v_i]_B = [T]_C^B e_i$ וזאת העמודה ה- i של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה. אם $v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i$ נקבל מלינאריות של T ושל ρ_B כי

$$\begin{aligned} [T(v)]_C &= \left[T \left(\sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right) \right]_C \\ &= \left[\sum_{i \in [n]} \alpha_i T(v_i) \right]_C \\ &= \sum_{i \in [n]} \alpha_i [T(v_i)]_C \\ &= \sum_{i \in [n]} \alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\ &= [T]_C^B \left(\sum_{i \in [n]} \alpha_i [v_i]_B \right) \\ &= [T]_C^B \left[\sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right]_B \\ &= [T]_C^B [v]_B \end{aligned}$$

כנדרש. ■

סימון 1.1.7. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף-מימדי V ואם $T \in \text{End}(V)$ נסמן $[T]_B^B := [T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B .

סימון 1.1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי עם בסיסים B, C . נסמן $M_C^B := [\text{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.9. אם $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ נסמן

$$\begin{aligned} T_A: \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

תרגיל 1.2. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$

ויהי $B = (1, x, x^2, x^3)$ בסיס של V . כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $[T(x^i)]_B$ עבור $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(x) &= x+1 = 1+x \\ T(x^2) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 \\ T(x^3) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T(1)]_B &= e_1 \\ [T(x)]_B &= e_1 + e_2 \\ [T(x^2)]_B &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\ [T(x^3)]_B &= e_1 + 3e_2 + 3e_3 + e_4 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 1.3. יהי $V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ תהי

$$T: V \rightarrow V$$

$$A \mapsto \frac{1}{2}(A - A^t)$$

ויהי

$$E = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V . כיתבו את $[T]_E$.

הוכחה. כמו מקודם, נחשב את $[T(E_{i,j})]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$T(E_{1,1}) = \frac{1}{2}(E_{1,1} - E_{1,1}) = 0$$

$$T(E_{1,2}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}E_{1,2} - \frac{1}{2}E_{2,1}$$

$$T(E_{2,1}) = \frac{1}{2}(E_{2,1} - E_{1,2}) = \frac{1}{2}E_{2,1} - \frac{1}{2}E_{1,2}, T(E_{2,2}) = \frac{1}{2}(E_{2,2} - E_{2,2}) = 0$$

לכן

$$[T(E_{1,1})]_E = 0$$

$$[T(E_{1,2})]_E = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$$

$$[T(E_{2,1})]_E = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3$$

$$[T(E_{2,2})]_E = 0$$

ואז

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כנדרש. ■

תרגיל 1.4. יהי $V = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ עם הבסיס $B = (f_1, f_2)$ כאשר

$$f_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x$$

$$f_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = y$$

ותהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

מיצאו $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ עבורו $[T]_B = A$.

פתרון. עבור $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$\begin{aligned} [T(f_1)]_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \cdot [T(f_2)]_B &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} T(f_1) &= f_1 + 2f_2 \\ T(f_2) &= 3f_1 + 4f_2 \end{aligned}$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned} (T(f)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (f_1 + 2f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta (3f_1 + 4f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (x + 2y) + \beta (3x + 4y) \end{aligned}$$

טענה 1.1.10. תהייה $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$ או $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A - B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה- i של $A - B$, שהינה $(A - B)e_i$, שווה ל-0. לכן $A - B = 0$. ■

טענה 1.1.11. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה \mathbb{F} עם בסיסים B, C, D בהתאמה, ותהייה

$$\begin{aligned} S &\in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \\ T &\in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \end{aligned}$$

אז

$$\cdot [T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned} [T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B \end{aligned}$$

לכן

$$\cdot, [T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B$$

■

כנדרש.

טענה 1.1.12. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה \mathbb{F} ותהי $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ חד-חד ערכית. יהיו

$$\begin{aligned} B &= (v_1, \dots, v_n) \\ C &= (u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

בסיסים של V ויהיו

$$\begin{aligned} B' &= (T(v_1), \dots, T(v_n)) \\ C' &= (T(u_1), \dots, T(u_n)) \end{aligned}$$

או B', C' בסיסים של $\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ וגם $M_C^B = M_{C'}^{B'}$.

פתרון. כיוון ש- T חד-חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T: V \xrightarrow{\sim} \text{Im}(T)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן B', C' בסיסים. כעת, לכל $i \in [n]$ נכתוב

$$v_i = \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j$$

ואז

$$M_C^B e_i = [v_i]_C = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} T(v_i) &= T\left(\sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j\right) \\ &= \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} T(u_j) \end{aligned}$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'} e_i = [T(v_i)]_{C'} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

תרגיל 1.5. תהי $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{F}^n . מיצאו בסיס B של \mathbb{F}^n עבורו $A = M_E^B$.

2. מיצאו בסיס C של \mathbb{F}^n עבורו $A = M_C^E$.

3. יהי B בסיס של \mathbb{F}^n . מיצאו בסיס C של \mathbb{F}^n עבורו $A = M_C^B$.

4. יהי V מרחב וקטורי מממד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל \mathbb{F} , יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ איזומורפיזם ויהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V . מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B = A$.

פתרון. 1. אם $B = (v_1, \dots, v_n)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

לכן ניקח את (v_1, \dots, v_n) להיות עמודות A , לפי הסדר.

2. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן $M_C^E = (M_E^C)^{-1}$. אם ניקח $C = (u_1, \dots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה- i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_C^E = A^{-1}$ ולכן $M_C^E = (A^{-1})^{-1} = A$. כלומר ניקח, $u_i = A^{-1} e_i$.

3. מתקיים $M_C^B = M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $M_C^E M_E^B = A$ או במילים אחרות $M_C^E = A (M_E^B)^{-1} = A M_B^E$. מהסעיף הקודם, נרצה $C = (u_1, \dots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה- i של $(A M_B^E)^{-1} = M_B^E A^{-1}$, כלומר

$$u_i = M_E^B A^{-1} e_i$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]_{C'}^B = M_{C'}^B [T]_B^B = A$ לכן נרצה $M_C^B [T]_B^B = A$. כיוון ש- T איזומורפיזם, המטריצה $[T]_B^B$ הפיכה, ולכן נרצה $M_C^B = A \left([T]_B^B\right)^{-1}$. כעת, אם $C = (v_1, \dots, v_n)$ נקבל לפי 1.1.12 עבור האיזומורפיזם ρ_B כי $M_C^B = M_{\hat{C}}^B$ כאשר $\hat{C} = ([v_1]_B, \dots, [v_n]_B)$. לכן נחפש \hat{C} עבורו $M_{\hat{C}}^B = A [T]_B^{-1}$. לפי הסעיף השני, נרצה $\hat{C} = (u_1, \dots, u_n)$ עבור

$$u_i = \left(A [T]_B^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i$$

לכן

$$v_i = \rho_B^{-1}([T]_B A^{-1} e_i)$$

תרגיל 1.6. יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$T: V \rightarrow V$$

$$, \quad p(x) \mapsto p(x+1)$$

יהי $E = (1, x, x^2, x^3)$, הבסיס הסטנדרטי ותהי $A =$ כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = [T]_C^E$$

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C} = (u_1, \dots, u_4)$ כאשר $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$. חישבנו ב-1.2 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2 = I$ כלומר $A^{-1} = A$. נשים לב כי

$$Ae_1 = e_2$$

$$Ae_2 = e_1$$

$$Ae_3 = e_4$$

$$Ae_4 = e_3$$

ואז נקבל

$$u_1 = [T]_E A^{-1} e_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [T]_E A^{-1} e_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = [T]_E A^{-1} e_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = [T]_E A^{-1} e_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\hat{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ולבסוף

$$C = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (1+x, 1, 1+3x+3x^2+x^3, 1+2x+x^2)$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן A . מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 = v_2 \\ T(x) &= x+1 = v_1 \\ T(x^2) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 = v_4 \\ T(x^3) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 = v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T]_C^E &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_C & [T(x)]_C & [T(x^2)]_C & [T(x^3)]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

כנדרש.

1.2 גרעין ותמונה

הגדרה 1.2.1 (גרעין של העתקה ליניארית). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי $T \in \text{Hom}(V, W)$. הגרעין של T הוא

$$\ker(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

הגדרה 1.2.2 (תמונה של העתקה ליניארית). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי $T \in \text{Hom}(V, W)$. התמונה של T היא

$$\text{Im}(T) := \{T(v) \mid v \in V\}$$

הגדרה 1.2.3 (דרגה של אופרטור ליניארי). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי $T \in \text{Hom}(V, W)$. הדרגה של T היא

$$\text{rank}(T) := \dim(\text{Im}(T))$$

הערה 1.2.4. אם V, W סוף-מימדיים עם בסיסים B, C בהתאמה, אז

$$\text{rank}(T) = \text{rank}([T]_C^B)$$

משפט 1.2.5 (משפט המימדים). יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי $T \in \text{End}(V)$. אז

$$\dim V = \dim \text{Im}(T) + \dim \ker(T)$$

תרגיל 1.7. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי $v \in V$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את (v) לבסיס $B_0 = (v_1, \dots, v_n)$ של V כאשר $v_1 = v$. תהי

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B = (u_1, \dots, u_n)$ של V עבורו $M_B^{B_0} = A$. נקבל

$$\begin{aligned} [v]_B &= [\text{Id}_V v]_B \\ &= [\text{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת

$$u_i = \rho_{B_0}^{-1}([\text{Id}]_B A^{-1} e_i) = \rho_{B_0}^{-1}(A^{-1} e_i)$$

תרגיל 1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} , ותהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $\text{rank } T = 1$ אם ורק אם יש בסיסים B, C ל- V כך שכל מקדמי $[T]_C^B$ הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים B, C כמתואר. אז $\text{rank } T = \text{rank } [T]_C^B = 1$. מכיוון השני, נניח כי $\text{rank } T = 1$. כלומר, $\dim \text{Im } T = 1$. משפט המימדים מתקיים $\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im } T$, לכן

$$\dim \ker T = \dim V - \dim \text{Im } T = \dim V - 1$$

יהי $n := \dim V$ ויהי

$$\tilde{B} := (u_1, \dots, u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי w וקטור פורש של $\text{Im } T$ ויהי C בסיס של V כך שמתקיים $[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי

$B := T^{-1}(w)$, ואז (v, u_1, \dots, u_{n-1}) בלתי-תלויים לינארית, כי $v \notin \ker T$. לכן זה בסיס של V . אז גם B בסיס של V כי המטריצה

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [v]_{\tilde{B}} & \dots & [v + u_{n-1}]_{\tilde{B}} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפיכה.

נסמן $C = (w_1, \dots, w_m)$ מתקיים

$$T(v) = w = w_1 + \dots + w_m$$

ולכל $i \in [n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned} T(v + u_i) &= T(v) + T(u_i) \\ &= T(v) + 0 \\ &= T(v) \\ &= w_1 + \dots + w_m \end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

תרגיל 1.9. תהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(-1) \end{aligned}$$

מיצאו בסיסים B, C של $\mathbb{R}_3[x]$ עבורם

$$[T]_C^B = A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון. ניקח בסיס $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3) := (x+1, x^2-1, x^3+1)$ של $\ker(T)$, כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי-תלויה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי $T \neq 0$). מתקיים $-1 = T(x) = w$ ואז

$$\text{Im}(T) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(w) \quad \text{נחשב בסיס } C \text{ עבורו } [w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נשלים את } (v) \text{ לבסיס}$$

$$C_0 = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (-1, x, x^2, x^3)$$

המטריצה

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ כפי שראינו, ניתן לחשב הפיכה ולכן קיים בסיס } C = (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ עבורו } M_C^{C_0} = X \text{ כשראינו שאז}$$

את C לפי $u_i = \rho_{C_0}^{-1}(X^{-1}e_i)$ מתקיים

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = -1 - x - x^2 - x^3 \\
 u_2 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x \\
 u_3 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x^2 \\
 u_4 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x^3
 \end{aligned}$$

כלומר, $C = (-1 - x - x^2 - x^3, x, x^2, x^3)$
 ניקח $T(v) = -1 = w$ כך שיתקיים $v = x \in V$ ואז

$$B = (v, v + b_1, v + b_2, v + b_3) = (x, 2x + 1, x^2 + x - 1, x^3 + x + 1)$$

כמו בתרגיל הקודם.
 אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}
 T(x) &= -1 \\
 T(2x + 1) &= -2 + 1 = -1 \\
 T(x^2 + x - 1) &= (-1)^2 - 1 - 1 = 1 - 2 = -1 \\
 T(x^3 + x + 1) &= (-1)^3 - 1 + 1 = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{וגם } [-1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ , לכן}$$

$$, [T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כפי שרצינו.