

אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 1

מטריצות מייצגות ודטרמיננטה

תאריך הגשה: 24.06.2024

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} ותהי $T: V \rightarrow V$ לינארית המקיימת $T^2 = -5 \text{Id}_V$.

1. הוכיחו כי לכל $v \in V \setminus \{0\}$ הקבוצה $\{v, Tv\}$ בלתי-תלויה לינארית.

2. נתון גם כי $\dim V = 2$. הוכיחו כי קיים בסיס בו T מיוצגת על ידי $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

תרגיל 2. יהי $B = (v_i)_{i \in [n]}$ בסיס למרחב וקטורי V . נתונה $T: V \rightarrow V$ הפיכה המקיימת

$$T(v_1 + 2v_2) = \sum_{i \in [n]} v_i$$

מצאו את סכום איברי $[T^{-1}]_B$.

תרגיל 3. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות המרוכבות הבאות.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -5 & 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & 5 & 15 & -9 \\ -6 & 0 & 5 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4. יהי $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ פולינום מתוקן (כלומר, $a_n = 1$). ותהי

$$C(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$$

הראו כי

$$\det(xI - C(p)) = p(x)$$

תרגיל 5. תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית ויהיו B בסיס של V . ראינו בתרגול שאפשר להגדיר

$$\det T := \det([T]_B)$$

ושההגדרה אינה תלויה בבחירת הבסיס.

יהי $V = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ ותהי

$$T: V \rightarrow V$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

חשבו את $\det(T)$.

תרגיל 6. תהי $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ בלי ערכים עצמיים ממשיים. הראו כי $\det(A) > 0$.