אלגברה ב' - תרגילי הכנה לקורס
חזרה על מטריצות מייצגות, הדטרמיננטה, ערכים עצמיים ולכסון

לא להגשה

סימונים

- נסמן ב־$[n] := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ את אוסף המספרים הטבעיים החיוביים עד n.
- משמעות הסימון $\sum_{i\in[n]} a_i$ היא סכום האיברים $a_1, \ldots, a_n$.
- משמעות הסימון $\prod_{i\in[n]} a_i$ היא מכפלת האיברים $a_1, \ldots, a_n$.
- עבור פולינום
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{F}[x],$$
הנגזרת הפורמלית $p'(x)$ היא
$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(i+1)x^i \in \mathbb{F}[x].$$
אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ זאת אותה נגזרת מהקורס אינפי 1.
- עבור כל שני ביטויים מתמטיים x, y נסמן
$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}.$$
סימון זה נקרא הדלתא של קרונקר.
- נסמן ב־$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ את מרחב המטריצות עם m שורות ו־n עמודות עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. נסמן לעתים $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
- עבור מרחבים וקטוריים V, W מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ נסמן ב־$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ את אוסף ההעתקות הלינאריות מ־V ל־W. נסמן גם $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$.

1 מטריצות מייצגות

הגדרה 1.1 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן
$$B = (v_1, \ldots, v_n).$$
נסמן גם $n := \dim(V)$ ו־$m := \dim(W)$. עבור $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר
$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F}).$$

תרגיל 1. חשבו את המטריצות המייצגות של ההעתקות הבאות לפי הבסיסים הנתונים.

1. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לפי הבסיס

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

2. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}_3\left[x\right] &\to \mathbb{C}_3\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p\left(x+1\right) \end{aligned}$$

לפי הבסיס הסטנדרטי

$$\left(1, x, x^2, x^3\right)$$

של מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 3 עם מקדמים מרוכבים.

3. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) &\to \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

לפי הבסיס

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

4. ההעתקה

$$\begin{aligned} T_A\colon \operatorname{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right) &\to \operatorname{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right) \\ B &\mapsto AB \end{aligned}$$

עבור מטריצה $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ ולפי הבסיס הסטנדרטי

$$E = \left(E_{1,1}, \ldots, E_{1,n}, E_{2,1}, \ldots, E_{2,n}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{n,n}\right)$$

כאשר $E_{i,j}$ מטריצה שמקדמיה אפסים חוץ מ־1 במיקום ה־(i,j). כלומר,

$$\left(E_{i,j}\right)_{k,\ell} = \delta_{(i,j),(k,\ell)} := \begin{cases} 0 & (i,j) = (k,\ell) \\ 1 & (i,j) \neq (k,\ell) \end{cases}.$$

5. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ b_i &\mapsto \begin{cases} b_{i+1} & i < n \\ b_1 & i = n \end{cases} \end{aligned}$$

עבור בסיס

$$B = \left(b_1, \ldots, b_n\right),$$

לפי הבסיס B.

תרגיל 2. בכל אחד מהסעיפים הבאים, מיצאו העתקה לינארית $T\colon V \to V$ עבורה $[T]_B = A$.

.1

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^3 \\ B &= (e_2, e_3, e_1) \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}_2[x] \\ B &= \left(1, x, x^2\right) \\ A &= J_3(1) \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \\ B &= (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.4 V מרחב הפונקציות $[4] \to \mathbb{R}$. הבסיס B הוא $(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$ כאשר $\chi_i(j) = \delta_{i,j}$. המטריצה A היא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

תרגיל 3. הוכיחו/הפריכו את הטענה הבאה: תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית ויהיו שני בסיסים B, C של V עבורם $[T]_B = [T]_C$. אז $B = C$.

2 הדטרמיננטה

הגדרה 2.1 (דטרמיננטה). תהי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. נגדיר את הדטרמיננטה $\det(A)$ של A באופן הרקורסיבי הבא.
תהי $M_{i,j}$ הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ־A לאחר הוצאת השורה ה־i והעמודה ה־j של A. נקרא למספר זה המינור ה־(i,j) של A. הדטרמיננטה של A מוגדרת על ידי

$$\det(A) \coloneqq \sum_{i,j\in[n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}.$$

משפט 2.2. תהיינה $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי C הפיכה. מתקיימות התכונות הבאות.

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
2. $\det\left(C^{-1}\right) = (\det(C))^{-1}$

תרגיל 4. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות.

.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

.2

$$B=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C})$$

עבור $\theta\in\mathbb{R}$.

.3

$$C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$$

עבור סקלרים $a,b,c,d\in\mathbb{F}$.

.4

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$$

.5

$$E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$$

.6

$$F=\begin{pmatrix}A & 0_{2\times2}\\ 0_{2\times2} & B\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{F})$$

עבור $A,B\in\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{F})$.

טענה 2.3 (מעבר בסיס). תהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית ויהיו B,C שני בסיסים של V. נסמן $M_C^B=[\mathrm{Id}_V]_C^B$ ונקרא לה מטריצת מעבר בין הבסיסים B,C. מתקיים

.1

$$M_B^C=\left(M_C^B\right)^{-1}$$

.2

$$[T]_B=\left(M_C^B\right)^{-1}[T]_C\,M_C^B$$

הערה 2.4. המטריצה M_C^B מקיימת $M_C^B[v]_B=[v]_C$ לכל וקטור $v\in V$. בכל זאת, יש שקוראים לה "מטריצת מעבר מ-C ל-B". לכן לא נקרא לה "מטריצת מעבר מבסיס אחד לאחר" אלא רק מטריצת מעבר בין שני הבסיסים.

תרגיל 5. תהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית, ויהי B בסיס של V. נגדיר את הדטרמיננטה של T על ידי

$$\det(T)\coloneqq\det([T]_B)\,.$$

הראו שהדטרמיננטה של T מוגדרת היטב. כלומר, הראו שאם B' בסיס נוסף של V מתקיים

$$\det([T]_B)=\det([T]_{B'})\,.$$

3 ערכים ווקטורים עצמיים

הגדרה 3.1 (ערכים ווקטורים עצמיים). תהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית מעל שדה $\mathbb{F}$. סקלר $\lambda\in\mathbb{F}$ נקרא ערך עצמי של T אם קיים $v\in V$ עבורו $T(v)=\lambda v$. וקטור $v\in V$ כזה נקרא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ.
תהי $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ונסמן

$$\begin{aligned}T_A\colon \mathbb{F}^n&\to\mathbb{F}^n\\ v&\mapsto Av\end{aligned}\,.$$

ערך/וקטור עצמי של A הוא ערך/וקטור עצמי של T_A.

תרגיל 6. מצאו את הערכים העצמיים של ההעתקות הבאות.

1. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}_3\left[x\right] &\to \mathbb{C}_3\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p\left(x+1\right) \end{aligned}$$

5. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{F}_n\left[x\right] &\to \mathbb{F}_n\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p'\left(x\right) \end{aligned}$$

כאשר $p'\left(x\right)$ הנגזרת הפורמלית של $p\left(x\right)$.

6. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) &\to \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

7. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ b_i &\mapsto \begin{cases} b_{i+1} & i<n \\ b_1 & i=n \end{cases} \end{aligned}$$

עבור בסיס

$$B=\left(b_1,\ldots,b_n\right),$$

כאשר V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

משפט 3.2. תהי $A\in \operatorname{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$.

1. הערכים העצמיים של A הם שורשי הפולינום המתוקן $p_A\left(x\right) \coloneqq \det\left(xI_{n\times n}-A\right)$.

2. אם ל־p_A יש n שורשים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ כולל ריבויים, העכבה של A היא סכום השורשים והדטרמיננטה של A היא מכפלת השורשים. כלומה,

$$\operatorname{tr}\left(A\right)=\sum_{i\in[n]}\lambda_i$$

$$\det\left(A\right)=\prod_{i\in[n]}\lambda_i .$$

תרגיל 7. מצאו את הערכים העצמיים של המטריצות הבאות. עבור כל אחת מהמטריצות A עד F שיש לה מספר ערכים עצמיים ששווה לגודל המטריצה, וודאו שמכפלת הערכים העצמיים שווה לדטרמיננטה שחישבתם בתרגיל 4.

.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

.2

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

.3

$$B' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

.4

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$$

עבור סקלרים $a, b, c, d \in \mathbb{F}$.

.5

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

.6

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

.7

$$F = \begin{pmatrix} A & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{F})$$

עבור $A, B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{F})$.

4 לכסון

הגדרה 4.1 (לכסינות). העתקה לינארית $T\colon V \to V$ נקראת לכסינה אם קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.
בסיס B כזה נקרא בסיס מלכסן.
מטריצה $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ נקראת לכסינה אם T_A לכסינה.

תרגיל 8. הראו כי $T\colon V \to V$ לכסינה אם ורק אם קיים בסיס B של V שאיבריו עם וקטורים עצמיים של T. הראו כי במקרה זה הערכים העצמיים של T הם הערכים על האלכסון של $[T]_B$.

תרגיל 9. הראו כי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ לכסינה אם ורק אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ עבורה $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.
רמז: העזרו בטענה 2.3.

תרגיל 10. עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבעו האם ההעתקה לכסינה ואם כן מצאו בסיס מלכסן. הוכיחו את טענותיכן.

1. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}_3\left[x\right] &\to \mathbb{C}_3\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p\left(x+1\right) \end{aligned}$$

5. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{F}_n\left[x\right] &\to \mathbb{F}_n\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p'\left(x\right) \end{aligned}$$

כאשר $p'\left(x\right)$ הנגזרת הפורמלית של $p\left(x\right)$.

6. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) &\to \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

7. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ b_i &\mapsto \begin{cases} b_{i+1} & i<n \\ b_1 & i=n \end{cases} \end{aligned}$$

עבור בסיס

$$B=\left(b_1,\ldots,b_n\right),$$

כאשר V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

תרגיל 11. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות X קבעו האם המטריצה לכסינה ואם כן מצאו מטריצה P עבורה $P^{-1}XP$ מטריצה אלכסונית. הוכיחו את טענותיכן.

1.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right)$$

.2

$$B=\begin{pmatrix}\cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right)\\ \sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{C}\right)$$

עבור $\theta\in\mathbb{R}$.

.3

$$B'=\begin{pmatrix}\cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right)\\ \sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{R}\right)$$

עבור $\theta\in\mathbb{R}$.

.4

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3\times3}\left(\mathbb{C}\right)$$

.5

$$E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3\times3}\left(\mathbb{C}\right)$$

.6

$$F=\begin{pmatrix}A & 0_{2\times2}\\ 0_{2\times2} & B\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{4\times4}\left(\mathbb{F}\right)$$

עבור $A,B\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{F}\right)$. הפרידו למקרים כתלות במטריצות A,B.

.7

$$J\left(\lambda\right)=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{C}\right)$$

עבור $\lambda\in\mathbb{C}$.

.8

$$K=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{C}\right)$$

תרגיל 12. תהיינה $A,B\in\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ לכסינות. הפריכו את הטענות הבאות.

1. $A+B$ לכסינה.
2. AB לכסינה.

רמז: היעזרו במטריצות $J\left(0\right),J\left(1\right),K$ מהסעיף הקודם.

תרגיל 13. הוכיחו שאם למטריצה יש ערך עצמי יחיד, היא לכסינה אם ורק אם היא סקלרית, כלומר אם ורק אם היא מהצורה $\lambda I_{n\times n}$.