

אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 5

SVD ופירוק פולארי

תאריך הגשה: 25.8.2024

תרגיל 1. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. חשבו את הפירוק לערכים סינגולריים של A .

2. מוצאו מטריצה $U \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ אורתוגונלית ומטריצה $R \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ מוגדרת אי־שלילית עבור $A = UR$.

תרגיל 2. יהי $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$, ותהי

$$T: V \rightarrow V$$
$$A \mapsto \frac{A + A^t}{2}$$

1. מוצאו את T^* . שימו לב כי $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$ עבור העתקות $T_i: V \rightarrow V$ עבורן אנו יודעות מי הן T_i^* .

2. מוצאו בסיסים אורתונורמליים B, C של V עבורם $[T]_C^B = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ כאשר $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

תרגיל 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב מממד סופי, ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי. יהיו $\lambda \in \mathbb{C}$ ו- $\varepsilon > 0$ ונניח שעבור $v \in V$ מתקיים $\|v\| = 1$ וגם

$$\|Tv - \lambda v\| < \varepsilon$$

הראו כי יש ל- T ערך עצמי $\lambda' \in \mathbb{C}$ עבורו $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$.

תרגיל 4. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$$

1. מוצאו מטריצות $U, V \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$ אוניטריות, ומטריצה $\Sigma \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$ אלכסונית, עבורן $A = U\Sigma V^*$.

2. מוצאו את

$$\max \left\{ \|Av\| \mid \begin{matrix} v \in \mathbb{C}^3 \\ \|v\|=1 \end{matrix} \right\}$$