

אלגברה ב' - תרגילי חזרה למבחן

תאריך הגשה: 7.9.2024

תרגיל 1. נגיד כי וקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3[x]$ עם מקדמים שלמים הינו וקטור פיתגורי אם (a, b, c) שלשה פיתגורית, כלומר a, b, c

שלמים חיוביים ומתקיים

$$a^2 + b^2 = c^2$$

תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$$

ויהי

$$v_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

1. הראו כי וקטור פיתגורי וכי אם $v \in \mathbb{R}^3$ וקטור פיתגורי אז Av וקטור פיתגורי.

2. הסיקו כי וקטור פיתגורי לכל k .

3. חשבו את $A^k v_0$ לכל $k \in \mathbb{N}$, ומצאו וקטור פיתגורי $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ עבורו $a = 2025$.

תרגיל 2. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$$

מיצאו מטריצה $P \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$ עבורה

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$$

1. הראו כי

$$\forall v \in \mathbb{R}^3: \sqrt{2} \|v\| \leq \|Av\| \leq \sqrt{6} \|v\|$$

2. עבור $\alpha \in [0, 1]$ חשבו את $\left\| A \begin{pmatrix} \alpha \\ \sqrt{1-\alpha^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$.

3. מצאו וקטור $v \in \mathbb{R}^3$ עבורו $\|v\| = 1$ וגם $\|Av\| = 2$.

תרגיל 4. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף-מימדי מעל \mathbb{C} ותהי $T: V \rightarrow V$.

1. הראו כי $\ker(T^*) = \text{Im}(T)^\perp$.

2. הראו כי $\text{Im}(T^*) = \ker(T)^\perp$.

3. נניח כי $T^2 = T$. הראו כי T הטלה אורתוגונלית אם ורק אם T הרמיטית.