

אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 3

משפט ז'ורדן, ומרחבי מכפלה פנימית

תאריך הגשה: 1.8.2024

תרגיל 1. מציאו בסיס מז'ורדן לכל אחד מהאופרטורים הבאים.

1. כאשר T_A

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$$

2. כאשר T_A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$$

ונתון כי 2 ערך עצמי יחיד.

3.

$$T: \text{Mat}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_3(\mathbb{C}) \\ A \mapsto J_3(0) A$$

4.

$$T: \mathbb{C}_3[x] \rightarrow \mathbb{C}_3[x] \\ T(p)(x) = p(x+1)$$

תרגיל 2. 1. מצאו את צורת ז'ורדן של $J_n(\lambda)^{-1}$ עבור $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ועבור $n \in \mathbb{N}_+$.

2. תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ הפיכה. מצאו את צורת ז'ורדן של A^{-1} .

3. מצאו תנאי הכרחי ומספיק על $A \in M_n(\mathbb{C})$ כך שיתקיים $A \sim A^{-1}$.

תרגיל 3. ראינו בתרגול שאם $A = PJP^{-1}$ אז $A^k = PJ^kP^{-1}$ לכל $k \in \mathbb{N}$. לכן, כדי לחשב חזקות של מטריצה די למצוא בסיס ז'ורדן של ההעתקה המתאימה ולדעת לחשב חזקות של צורת ז'ורדן.

1. יהיו $n, k \in \mathbb{N}_+$. חשבו את $J_n(0)^k$.

2. מתקיים $J_n(\lambda) = J_n(0) + \lambda I_n$. היעזרו בכך ובסעיף הקודם כדי למצוא נוסחא כללית עבור $J_n(\lambda)^n$ לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ ולכל $n, j \in \mathbb{N}_+$.

תרגיל 4. בתרגיל זה נראה כיצד צורת ז'ורדן עוזרת בחישוב בעיות המצריכות חזקות של מטריצות.

1. תהיינה $A, B, P \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ כאשר P הפיכה וגם $A = P^{-1}BP$. הראו כי $A^r = P^{-1}B^rP$ לכל $r \in \mathbb{N}$.

2. בשמורת הטבע ליד הטכניון סין יש היום 2 דרקונים, 600 פנדות ו-20000 במבוקים.

כל שנה הדרקונים, הפנדות והבמבוקים מתרבים ומספרם גדל פי 2.

לאחר מכן, כל פנדה אוכלת במבוק אחד וכל דרקון אוכל שתי פנדות.

אז, רשות הטבע והגנים הסינית משחררת לטבע 4 דרקונים ו-10 פנדות, אם עדיין יש פנדות בשמורה.

לבסוף, אם לא נשאר במבוק בסוף השנה, כל הפנדות מתות.

(א) מציאו מטריצה $A \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$ וערכים d, p, b עבורם מספרי הדרקונים, הפנדות והבמבוקים בסוף השנה ה- t

$$A^t \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ p \\ b \end{pmatrix} \text{ לכל } t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ הם מקדמים בוקטור}$$

(ב) נשיא הטכניון מתכנן לבקר בסין עוד 30 שנה. האם יהיו פנדות בשמורה בזמן הביקור שלו?

(ג) הטכניון החליט להעביר את הלימודים מסין למאדים עוד 230 שנה. האם ישארו עד אז פנדות בשמורת הטבע?

תרגיל 5. עבור ההעתקות הבאות f_i , קיבעו האם f_i מכפלה פנימית.

1.

$$f_1: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \mapsto ax + by + az$$

2.

$$f_2: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \mapsto ax + by + cz + xz$$

3.

$$f_3: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \times \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ (A, B) \mapsto \text{tr}(B^t A)$$

4.

$$f_4: \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto f(0)g(0) + \dots + f(n)g(n)$$

5.

$$f_5: \mathbb{C}_n[x] \times \mathbb{C}_n[x] \rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) \mapsto f(0)g(0) + \dots + f(n)g(n)$$

תרגיל 6. היעזרו באי-שוויון קושי-שוורץ כדי להראות שמתקיים

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+: x + y + z \leq 2 \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \right)$$

רמז: חישבו כיצד לפרש את אגף ימין בעזרת נורמה.