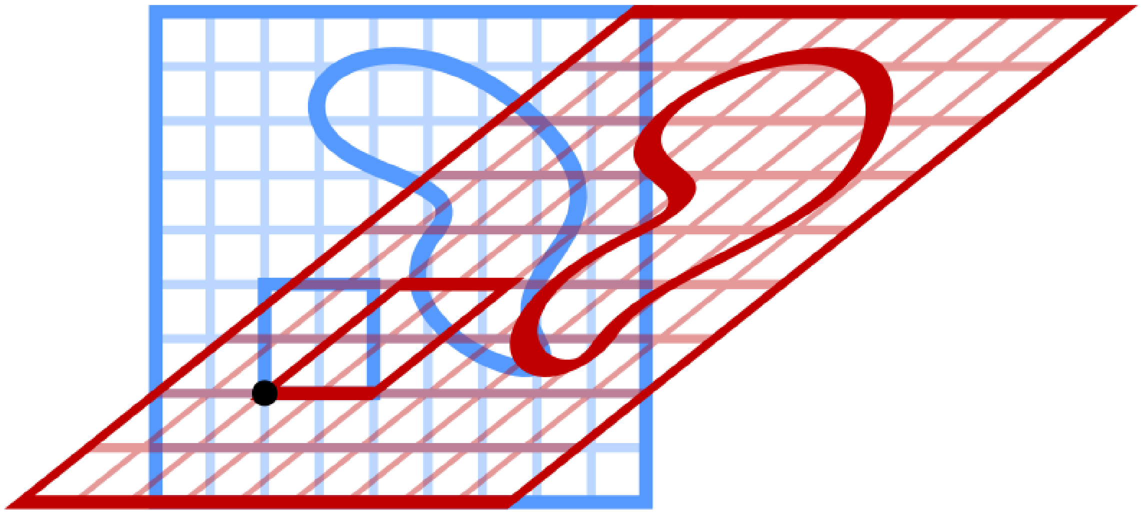

אלגברה ב׳ (104168)
אביב 2024
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־2 ביוני 2024

תוכן העניינים

סימונים

- $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
- $\sum_{i \in [n]} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- $\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ הוא מרחב המטריצות עם m שורות ו־n עמודות, עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$.
- $\mathbb{F}^n = \mathrm{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{F})$
- $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ הוא מרחב ההעתקות הלינאריות $V \to W$ כאשר V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.
- $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$

חלק I

חלק ראשון - מרחבים שמורים

פרק 1

מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ויהי $v \in V$. וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B הוא הוקטור $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i := \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\begin{aligned} \rho_B \colon V &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \ldots, v_n).$$

נסמן גם $n := \dim(V)$ ו־$m := \dim(W)$. עבור $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}).$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E = (e_1, \ldots, e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אז:

(i) לכל $i \in [m]$ מתקיים כי Ae_i העמודה ה־i של A.

(ii) לכל $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_\ell \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{n \times \ell}(\mathbb{F})$ מתקיים $AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell \\ | & & | \end{pmatrix}$.

תרגיל 1.1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\begin{aligned} \eta_C^B \colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) &\to \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}) \\ T &\mapsto [T]_C^B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ ויהיו $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ו־C בסיס של W. אז

$$[T]_C^B [v]_B = [T(v)]_C$$

לכל $v \in V$.

הוכחה. עבור $v = v_i$ מתקיים $[T]_C^B [v_i]_B = [T]_C^B e_i$ וזאת העמודה ה־i של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה. אם $v = \sum_{i\in[n]} \alpha_i v_i$ נקבל מלינאריות של T ושל ρ_B כי

$$\begin{aligned}[T(v)]_C &= \left[T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right)\right]_C \\ &= \left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i T(v_i)\right]_C \\ &= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T(v_i)]_C \\ &= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\ &= [T]_C^B \left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i [v_i]_B\right) \\ &= [T]_C^B \left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right]_B \\ &= [T]_C^B [v]_B ,\end{aligned}$$

כנדרש. ■

סימון 1.1.7. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי V ואם $T \in \mathrm{End}(V)$, נסמן $[T]_B := [T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B.

סימון 1.1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים B, C. נסמן $M_C^B := [\mathrm{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.9. אם $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, נסמן

$$\begin{aligned}T_A \colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av .\end{aligned}$$

תרגיל 1.2. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned}T \colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1)\end{aligned}$$

ויהי $B = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ בסיס של V. כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $\left[T\left(x^i\right)\right]_B$ עבור $i \in \{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned}T(1) &= 1 \\ T(x) &= x+1 = 1+x \\ T\left(x^2\right) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 \\ T\left(x^3\right) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}[T(1)]_B &= e_1 \\ [T(x)]_B &= e_1+e_2 \\ \left[T\left(x^2\right)\right]_B &= e_1+2e_2+e_3 \\ \left[T\left(x^3\right)\right]_B &= e_1+3e_2+3e_3+e_4\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix} .$$

תרגיל 1.3. יהי $V=\mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{C}\right)$, תהי

$$\begin{aligned} T\colon V&\to V\\ A&\mapsto\frac{1}{2}\left(A-A^{t}\right)\end{aligned}$$

ויהי

$$E=\left(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}\right):=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V. כיתבו את $\left[T\right]_{E}$.

הוכחה. כמו מקודם, נחשב את $\left[T\left(E_{i,j}\right)\right]_{E}$ כיוון שאלו עמודות $\left[T\right]_{E}$. מתקיים

$$\begin{aligned} T\left(E_{1,1}\right)&=\frac{1}{2}\left(E_{1,1}-E_{1,1}\right)=0\\ T\left(E_{1,2}\right)&=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}E_{1,2}-\frac{1}{2}E_{2,1}\\ T\left(E_{2,1}\right)&=\frac{1}{2}\left(E_{2,1}-E_{1,2}\right)=\frac{1}{2}E_{2,1}-\frac{1}{2}E_{1,2}\\ T\left(E_{2,2}\right)&=\frac{1}{2}\left(E_{2,2}-E_{2,2}\right)=0\end{aligned}$$,

לכן

$$\begin{aligned} \left[T\left(E_{1,1}\right)\right]_{E}&=0\\ \left[T\left(E_{1,2}\right)\right]_{E}&=\frac{1}{2}e_{2}-\frac{1}{2}e_{3}\\ \left[T\left(E_{2,1}\right)\right]_{E}&=-\frac{1}{2}e_{2}+\frac{1}{2}e_{3}\\ \left[T\left(E_{2,2}\right)\right]_{E}&=0\end{aligned}$$

ואז

$$\left[T\right]_{E}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

כנדרש. ■

תרגיל 1.4. יהי $V=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^{2},\mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B=\left(f_{1},f_{2}\right)$ כאשר

$$\begin{aligned} f_{1}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)&=x\\ f_{2}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)&=y\end{aligned}$$,

ותהי

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right).$$

מיצאו $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ עבורו $\left[T\right]_{B}=A$.

פתרון. עבור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}.$$

לכן נדרוש

$$[T(f_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$[T(f_2)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

אז

$$T(f_1) = f_1 + 2f_2$$
$$T(f_2) = 3f_1 + 4f_2.$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y = \alpha f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}(T(f))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (f_1 + 2f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta (3f_1 + 4f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (x + 2y) + \beta (3x + 4y).\end{aligned}$$

טענה 1.1.10. תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$. אז $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A - B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־i של $A - B$, שהינה $(A - B)e_i$, שווה ל־0.
לכן $A - B = 0$. ■

טענה 1.1.11. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C, D בהתאמה, ותהיינה

$$S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$$
$$T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W).$$

אז

$$[T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B.$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned}[T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B\end{aligned}$$

לכן

$$[T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B,$$

כנדרש. ■

טענה 1.1.1.12. יהיו V,W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$ חד־חד ערכית. יהיו

$$B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$$
$$C=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$$

בסיסים של V ויהיו

$$B'=\left(T\left(v_1\right),\ldots,T\left(v_n\right)\right)$$
$$C'=\left(T\left(u_1\right),\ldots,T\left(u_n\right)\right).$$

אז B',C' בסיסים של $\mathrm{Im}\left(T\right)=\left\{T\left(v\right)\mid v\in V\right\}$ וגם $M_C^B=M_{C'}^{B'}$.

פתרון. כיוון ש־T חד־חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T\colon V\xrightarrow{\sim}\mathrm{Im}\left(T\right)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן B',C' בסיסים.
כעת, לכל $i\in[n]$ נכתוב

$$v_i=\sum_{j\in[n]}\alpha_{i,j}u_i$$

ואז

$$M_C^Be_i=\left[v_i\right]_C=\begin{pmatrix}\alpha_{i,1}\\ \vdots\\ \alpha_{i,n}\end{pmatrix}.$$

כמו כן,

$$T\left(v_i\right)=T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_{i,j}u_j\right)$$
$$=\sum_{i\in[n]}\alpha_{i,j}T\left(u_j\right)$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'}e_i=\left[T\left(v_i\right)\right]_{C'}=\begin{pmatrix}\alpha_{i,1}\\ \vdots\\ \alpha_{i,n}\end{pmatrix}.$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

תרגיל 1.5. תהי $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס B של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_E^B$.
2. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_C^E$.
3. יהי B בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_C^B$.
4. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ איזומורפיזם ויהי $B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ בסיס של V. מיצאו בסיס C של V עבורו $A=\left[T\right]_C^B$.

פתרון. 1. אם $B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B=\begin{pmatrix}| & & |\\ \left[v_1\right]_E & \cdots & \left[v_n\right]_E\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \cdots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}.$$

לכן ניקח את $\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ להיות עמודות A, לפי הסדר.

2. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן $M_C^E = \left(M_E^C\right)^{-1}$. אם ניקח $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_E^C = A^{-1}$ ולכן $M_C^E = \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. כלומר ניקח, $u_i = A^{-1} e_i$.

3. מתקיים $M_C^B = M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $M_C^E M_E^B = A$ או במילים אחרות $M_C^E = A \left(M_E^B\right)^{-1} = A M_B^E$. מהסעיף הקודם, נרצה $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של $\left(A M_B^E\right)^{-1} = M_E^B A^{-1}$, כלומר

$$.u_i = M_E^B A^{-1} e_i$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]_{C'}^B = M_{C'}^B [T]_B^B$ לכן נרצה $M_C^B [T]_B^B = A$. כיוון ש־T איזומורפיזם, המטריצה $[T]_B^B$ הפיכה, ולכן נרצה $M_C^B = A \left([T]_B^B\right)^{-1}$. כעת, אם $C = (v_1, \ldots, v_n)$ נקבל לפי 1.1.12 עבור האיזומורפיזם ρ_B כי $M_C^B = M_{\hat{C}}^E$ כאשר $\hat{C} = \left([v_1]_B, \ldots, [v_n]_B\right)$. לכן נחפש $\hat{C}$ עבורו $M_{\hat{C}}^E = A [T]_B^{-1}$. לפי הסעיף השני, נרצה עבור $\hat{C} = (u_1, \ldots, u_n)$

$$.u_i = \left(A [T]_B^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i$$

לכן

$$.v_i = \rho_B^{-1} \left([T]_B A^{-1} e_i\right)$$

תרגיל 1.6. יהי $V = \mathbb{C}_3 [x]$, תהי

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned} \quad ,$$

יהי $E = \left(1, x, x^2, x^3\right)$, הבסיס הסטנדרטי ותהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו $A = [T]_C^E$.

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C} = (u_1, \ldots, u_4)$ כאשר $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$. חישבנו ב־1.2 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2 = I$ כלומר $A^{-1} = A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} Ae_1 &= e_2 \\ Ae_2 &= e_1 \\ Ae_3 &= e_4 \\ Ae_4 &= e_3 \end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1 = [T]_E A^{-1} e_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [T]_E A^{-1} e_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = [T]_E A^{-1} e_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = [T]_E A^{-1} e_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

כלומר

$$\hat{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

ולבסוף

$$C = (v_1, v_2, v_3, v_4) \coloneqq \left(1 + x, 1, 1 + 3x + 3x^2 + x^3, 1 + 2x + x^2\right).$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן A. מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 = v_2 \\ T(x) &= x + 1 = v_1 \\ T\left(x^2\right) &= (x+1)^2 = 1 + 2x + x^2 = v_4 \\ T\left(x^3\right) &= (x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T]_C^E &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_C & [T(x)]_C & \left[T\left(x^2\right)\right]_C & \left[T\left(x^3\right)\right]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

כנדרש.

1.2 גרעין ותמונה

הגדרה 1.2.1 (גרעין של העתקה לינארית). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. הגרעין של T הוא

$$\ker(T) \coloneqq \{v \in V \mid T(v) = 0\} .$$

הגדרה 1.2.2 (תמונה של העתקה לינארית). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. התמונה של T היא

$$\mathrm{Im}(T) \coloneqq \{T(v) \mid v \in V\} .$$

הגדרה 1.2.3 (דרגה של אופרטור לינארי). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. הדרגה של T היא

$$\mathrm{rank}(T) \coloneqq \dim(\mathrm{Im}(T)) .$$

הערה 1.2.4. אם V, W סוף־מימדיים עם בסיסים B, C בהתאמה, אז

$$\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}\left([T]_C^B\right) .$$

משפט 1.2.5 (משפט המימדים). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T \in \mathrm{End}(V)$. אז

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \ker(T) .$$

תרגיל 1.7. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $v \in V$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את (v) לבסיס $B_0 = (v_1, \ldots, v_n)$ של V כאשר $v_1 = v$. תהי

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}) .$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B = (u_1, \ldots, u_n)$ של V עבורו $M_B^{B_0} = A$. נקבל

$$\begin{aligned} [v]_B &= [\mathrm{Id}_V v]_B \\ &= [\mathrm{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת

$$u_i = \rho_{B_0}^{-1}\left([\mathrm{Id}]_B A^{-1} e_i\right) = \rho_{B_0}^{-1}\left(A^{-1} e_i\right) .$$

תרגיל 1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $\mathrm{rank}\, T = 1$ אם ורק אם יש בסיסים B, C ל־V כך שכל מקדמי $[T]_C^B$ הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים B,C כמתואר. אז $\operatorname{rank}T=\operatorname{rank}[T]_C^B=1$.
בכיוון השני, נניח כי $\operatorname{rank}T=1$. כלומר, $\dim\operatorname{Im}T=1$. ממשפט המימדים מתקיים $\dim V=\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T$, לכן

$$\dim\ker T=\dim V-\dim\operatorname{Im}T=\dim V-1\,.$$

יהי $n:=\dim V$ ויהי

$$\tilde{B}:=(u_1,\dots,u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי w וקטור פורש של $\operatorname{Im}T$ ויהי C בסיס של V כך שמתקיים $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי $v:=T^{-1}(w)$, ואז $(v,u_1,\dots,u_{n-1})$ בלתי־תלויים לינארית, כי $v\notin\ker T$. לכן זה בסיס של V. אז גם $B:=(v,v+u_1,\dots,v+u_{n-1})$ בסיס של V כי המטריצה

$$\begin{pmatrix}| & & |\\ [v]_{\tilde{B}} & \cdots & [v+u_{n-1}]_{\tilde{B}}\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ & 0 & & 1 & 0\\ 0 & & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

הפיכה.
נסמן $C=(w_1,\dots,w_m)$. מתקיים

$$T(v)=w=w_1+\ldots+w_m$$

ולכל $i\in[n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned}T(v+u_i)&=T(v)+T(u_i)\\&=T(v)+0\\&=T(v)\\&=w_1+\ldots+w_m\end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

תרגיל 1.9. תהי

$$\begin{aligned}T\colon\mathbb{R}_3[x]&\to\mathbb{R}_3[x]\\ p(x)&\mapsto p(-1).\end{aligned}$$

מיצאו בסיסים B,C של $\mathbb{R}_3[x]$ עבורם

$$[T]_C^B=A:=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

פתרון. ניקח בסיס $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3):=\left(x+1,x^2-1,x^3+1\right)$ של $\ker(T)$, כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי־תלוייה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי $T\neq0$). מתקיים $w:=-1=T(x)$ ואז $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(w)$. נחשב בסיס C עבורו $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. נשלים את (v) לבסיס

$$C_0=(v_1,v_2,v_3,v_4):=\left(-1,x,x^2,x^3\right).$$

המטריצה

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

הפיכה ולכן קיים בסיס $C=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ עבורו $M_C^{C_0}=X$, כשראינו שאז $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. כפי שראינו, ניתן לחשב את C לפי $u_i=\rho_{C_0}^{-1}\left(X^{-1}e_i\right)$. מתקיים

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$u_1=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)=-1-x-x^2-x^3$$

$$u_2=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=x$$

$$u_3=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=x^2$$

$$.u_4=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x^3$$

כלומר, $C=\left(-1-x-x^2-x^3,x,x^2,x^3\right)$.
ניקח $v=x\in V$ כך שיתקיים $T\left(v\right)=-1=w$ ואז

$$B=(v,v+b_1,v+b_2,v+b_3)=\left(x,2x+1,x^2+x-1,x^3+x+1\right)$$

כמו בתרגיל הקודם.
אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}T\left(x\right)&=-1\\T\left(2x+1\right)&=-2+1=-1\\T\left(x^2+x-1\right)&=\left(-1\right)^2-1-1=1-2=-1\\T\left(x^3+x+1\right)&=\left(-1\right)^3-1+1=-1\end{aligned}$$

וגם $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = [-1]_C$, לכן

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

כפי שרצינו.

פרק 2

סכומים ישרים, הדטרמיננטה ולכסינות

2.1 סכומים ישרים

הגדרה 2.1.1 (סכום ישר). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $V_1, \ldots, V_k \leq V$ תת־מרחבים. נזכיר כי

$$V_1 + \ldots + V_k \coloneqq \{v_1 + \ldots + v_k \mid \forall i \in [k] \colon v_i \in V_i\}.$$

נגיד שהסכום הזה הוא סכום ישר אם כל $v \in V_1 + \ldots + V_k$ ניתן לכתיבה $v = v_1 + \ldots + v_k$ בצורה יחידה עבור $v_i \in V_i$. במקרה זה נסמן את הסכום $\bigoplus_{i \in [k]} V_i = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.

הערה 2.1.2. באופן שקול, הסכום $V_1 + \ldots + V_k$ ישר אם ורק אם $v_1 + \ldots + v_k = 0$ עבור $v_i \in V_i$ גורר $v_i = 0$ לכל $i \in [k]$.

טענה 2.1.3. הסכום $\sum_{i \in [k]} V_i \coloneqq V_1 + \ldots + V_k$ ישר אם ורק אם

$$V_i \cap \left(\sum_{j \neq i} V_j \right) = \{0\}$$

לכל $i \in [k]$.
את המקרה $k = 2$ ראינו בהרצאה, והטענה הכללית נובעת באינדוקציה.

הגדרה 2.1.4 (שרשור קבוצות סדורות). תהיינה

$$\begin{aligned} A_1 &= (v_{1,1}, \ldots, v_{1,\ell_1}) \\ A_2 &= (v_{2,1}, \ldots, v_{2,\ell_2}) \\ &\vdots \\ A_k &= (v_{k,1}, \ldots, v_{k,\ell_k}) \end{aligned}$$

קבוצות סדורות. נגדיר את השרשור שלהן

$$A_1 \cup \ldots \cup A_k \coloneqq (v_{1,1}, \ldots, v_{1,\ell_1}, v_{2,1}, \ldots, v_{2,\ell_2}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,\ell_k}).$$

זאת הקבוצה הסדורה שהיא שרשור איברי הקבוצות הסדורות $A_1, \ldots, A_k$ לפי הסדר.

טענה 2.1.5. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהיו $V_1, \ldots, V_k$ תת־מרחבים של V. התנאים הבאים שקולים.

1. $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.
2. לכל בחירת בסיסים B_i של V_i הקבוצה הסדורה $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ היא בסיס של V.
3. קיימים בסיסים B_i של V_i כך שהקבוצה הסדורה $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ היא בסיס של V.
4. $V = \sum_{i \in [k]} V_i$ וגם
$$\dim V = \sum_{i \in [k]} \dim (V_i).$$

תרגיל 2.1. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונזכיר כי $P \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקראת הטלה אם $P^2 = P$.

1. תהי $P \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי $V = \ker(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$.
2. הראו כי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה אם ורק אם קיים בסיס B של V עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

פתרון. 1. יהי $v \in V$. מתקיים $v = (v - P(v)) + P(v)$ כאשר $P(v) \in \operatorname{Im}(P)$. כמו כן,

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$$

ולכן $v - P(v) \in \ker(P)$ ונקבל כי $V = \ker(P) + \operatorname{Im}(P)$.
כעת, אם $v \in \ker(P) \cap \operatorname{Im}(P)$ בפרט $v \in \operatorname{Im}(P)$ ולכן יש $u \in V$ עבורו $P(u) = v$. אז

$$v = P(u) = P^2(u) = P(P(u)) = P(v) = 0$$

ולכן $\ker(P) \cap \operatorname{Im}(P) = 0$ ונקבל כי הסכום ישר.

2. נניח כי T הטלה. במקרה זה $V = \ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$. עבור בסיסים

$$C = (c_1, \ldots, c_m)$$
$$D = (d_{m+1}, \ldots, d_\ell)$$

של $\ker(T), \operatorname{Im}(T)$ בהתאמה, נקבל כי $C \cup D$ בסיס של V. לכל $c_i \in C$ מתקיים $T(c_i) = 0$, לכן $\dim(\ker(T))$ העמודות הראשונות של $[T]_{C \cup D}$ הן עמודות אפסים. לכל $d_i \in D$ יש $u_i \in V$ עבורו

$$d_i = T(u_i) = T^2(u_i) = T(T(u_i)) = T(d_i),$$

לכן

$$[T(d_i)]_{C \cup D} = [d_i]_{C \cup D} = e_i$$

ולכן העמודה ה־i עבור $i \geq m$ היא e_i, ונקבל את הנדרש.
להיפך, נניח שקיים בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ כנ"ל. אז $\left[T^2\right]_B = [T]_B^2 = [T]_B$ ולכן $T^2 = T$ ונקבל כי T הטלה.

הגדרה 2.1.6 (משלים ישר). יהי V מרחב וקטורי ויהי $U \leq V$ תת־מרחב. משלים ישר W של U הוא תת־מרחב של V עבורו $V = U \oplus W$.

תרגיל 2.2. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $U \leq V$ תת־מרחב עם בסיס B. יהי C בסיס של V.

1. הראו שניתן להשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ־C.
2. הסיקו שקיים משלים ישר W של U עם בסיס של וקטורים מ־C.

פתרון. 1. נסמן $n := \dim_{\mathbb{F}}(V)$ ונוכיח את הטענה באינדוקציה על $m = n - |B|$.
עבור $m = 0$ מתקיים $|B| = n$ ולכן $U = V$. נניח שהטענה נכונה לכל $k < m$ ונוכיח אותה עבור m.
אם $C \subseteq U$, מתקיים

$$V = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(C) \subseteq \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(U) = U$$

ולכן $V = U$ בסתירה לכך שהמימדים שונים. לכן, קיים $c \in C \setminus U$. אז $B \cup (c)$ קבוצה בלתי־תלויה לינארית, כי c אינו צירוף לינארי של הוקטורים הקודמים. נגדיר $U' = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(B \cup (c))$. אז

$$n - \dim(U') = n - |B| - 1 = m - 1 < m$$

ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה ולקבל שניתן להשלים את $B \cup (c)$ לבסיס $(B \cup (c)) \cup (c_2, \ldots, c_m)$ של V, כאשר $c_i \in C$. אז $c, c_2, \ldots, c_m \in C$ משלימים את B לבסיס של V.

2. בסימונים של הסעיף הקודם, $B \cup (c, \ldots, c_m)$ בסיס של V. נסמן $D = (c, c_2, \ldots, c_m)$ וגם $W = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(D)$.
אז $B \cup D$ בסיס של V ולכן

$$V = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(B) \oplus \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(D) = U \oplus W,$$

כנדרש.

תרגיל 2.3. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ ותהיינה

$$B = \left(1 + x, x + x^2\right)$$
$$C = \left(1, x, x^2, x^3\right)$$

קבוצות סדורות של וקטורים מ־V. יהי $U = \mathrm{Span}(B)$.

1. מיצאו משלים ישר W של U ובסיס עבור W שמורכב מוקטורים ב־C.
2. האם W שמצאתם יחיד? הוכיחו או הפריכו.

פתרון. 1. נשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ־C. נוסיף את $1 \notin U$ כדי לקבל $B' = \left(1 + x, x + x^2, 1\right)$ ואז את $x^3 \notin \mathrm{Span}(B')$ כדי לקבל בסיס $B'' = \left(1 + x, x + x^2, 1, x^3\right)$ של V.
נסמן $D = \left(1, x^3\right)$ וניקח $W = \mathrm{Span}(D)$. אז $B'' = B \cup D$ בסיס, ולכן $V = U \oplus W$, כנדרש.

2. לא. למשל, יכולנו לקחת $B' = \left(1 + x, x + x^2, x^2\right)$ ואז $B'' = \left(1 + x, x + x^2, x^2, x^3\right)$. במקרה זה היינו מקבלות משלים ישר $\mathrm{Span}\left(x^2, x^3\right)$, ששונה מ־$W$.

2.2 הדטרמיננטה

הגדרה 2.2.1 (דטרמיננטה). תהי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. נגדיר את הדטרמיננטה $\det(A)$ של A באופן הרקורסיבי הבא.
תהי $M_{i,j}$ הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ־A לאחר הוצאת השורה ה־i והעמודה ה־j של A. נקרא למספר זה המינור ה־(i,j) של A. הדטרמיננטה של A שווה

$$\det(A) = \sum_{i\in[n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}$$

עבור $j \in [n]$ קבוע, ושווה

$$\det(A) = \sum_{j\in[n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}$$

עבור $i \in [n]$ קבוע.

משפט 2.2.2. תהיינה $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי C הפיכה. מתקיימות התכונות הבאות.

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
2. $\det\left(C^{-1}\right) = (\det(C))^{-1}$

משפט 2.2.3. 1. החלפת שתי שורות או עמודות במטריצה כופלת את הדטרמיננטה ב־(-1).

2. כפל שורה או עמודה במטריצה בסקלר α כופל את הדטרמיננטה ב־α.
3. הוספת כפולה שורה או עמודה לשורה או עמודה במטריצה אינה משנה את הדטרמיננטה.

תרגיל 2.4. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

.2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

פתרון. 1. נחשב לפי השורה הראשונה.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \\ &= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \\ &= -3 + 12 - 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. החלפת שורות כופלת את הדטרמיננטה ב־(-1). כיוון שניתן לקבל את המטריצה ממטריצת היחידה על ידי החלפת השורות $1,4$ והשורות $2,3$, נקבל כי הדטרמיננטה שווה לזאת של היחידה. לכן

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 .$$

3. הוספת כפולה של השורות הראשונה והשנייה ב־(-1) לשורה השלישית לא משנה את הדרמיננטה. לכן הדטמיננטה של המטריצה שווה לזאת של היחידה, ולכן

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 .$$

4. הוספת כפולה של השורות הראשונה והשנייה ב־(-1) לשורה השלישית לא משנה את הדרמיננטה. לכן הדטמיננטה של המטריצה שווה לזאת של

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

כיוון שהשורה השלישית היא שורת אפסים, אם נפתח את הדטרמיננטה לפיה נקבל שהדטרמיננטה שווה 0. זה נכון באופן כללי יותר אם השורות תלויות לינארית, כי נוכל לקבל שורת אפסים מצירוף לינארי של השורות.

תרגיל 2.5. תהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ העתקה לינארית ויהי B בסיס של V. הראו כי ניתן להגדיר $\det(T) = \det([T]_B)$. כלומר, הראו שאם C בסיס נוסף של V מתקיים $\det([T]_B) = \det([T]_C)$.

פתרון. מתקיים

$$[T]_B = \left(M_C^B\right)^{-1}[T]_C M_C^B$$

ולכן

$$\det([T]_B) = \det\left(\left(M_C^B\right)^{-1}\right)\det([T]_C)\det\left(M_C^B\right).$$

כיוון ש-$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$ לכל מטריצה A, מתקיים $\det\left(\left(M_C^B\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(M_C^B\right)}$. לכן, נקבל בסה"כ כי

$$\det([T]_B) = \det([T]_C),$$

כנדרש.

2.3 לכסינות

הגדרה 2.3.1 (אופרטור לכסין). אופרטור $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא לכסין אם קיים בסיס B של V וקיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ עבורם

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

בסיס B כזה נקרא בסיס מלכסן עבור T, והמטריצה $[T]_B$ נקראת מטריצה אלכסונית.

הגדרה 2.3.2. יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. וקטור $v \in V \setminus \{0\}$ נקרא וקטור עצמי של T אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \lambda v$. במקרה זה λ נקרא ערך עצמי של T.

הערה 2.3.3. v וקטור עצמי של T אם ורק אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \lambda v$. מתקיים $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ ולכן באופן שקול $T(v) \in \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ ובאופן שקול $T(\alpha v) = \alpha T(v) \in \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}$.
לכן, v וקטור עצמי של T אם ורק אם $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ הינו T-שמור.

הערה 2.3.4. אופרטור $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הינו לכסין אם ורק אם קיים בסיס של V שמורכב מוקטורים עצמיים של T.

הגדרה 2.3.5 (מרחב עצמי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי λ ערך עצמי של T. המרחב העצמי של T עם הערך λ הוא

$$V_\lambda \coloneqq \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \operatorname{Id}_V - T).$$

הגדרה 2.3.6 (פולינום אופייני). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הפולינום האופייני של T הוא

$$p_T(x) \coloneqq \det(x \operatorname{Id}_V - T).$$

הערה 2.3.7. בפועל, נסתכל בדרך כלל על פולינום אופייני של מטריצה, כיוון שצריך לבחור בסיס כדי לחשב את הדטרמיננטה. ראינו כי הדטרמיננטה לא תלויה בבחירת הבסיס, ולכן $p_T(x) = p_{[T]_B}(x)$ לכל בסיס B של V, כאשר $p_A(x) = \det(xI - A)$.

מסקנה 2.3.8. איבר $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\ker(\lambda \operatorname{Id}_V - T) \neq 0$, אם ורק אם $p_T(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id}_V - T) = 0$.
כלומר, הערכים העצמיים של T הם השורשים של p_T.

הערה 2.3.9. כיוון שלכל פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ יש שורש, לכל $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ יש ערך עצמי.

הגדרה 2.3.10 (ריבוי אלגברי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי האלגברי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא הריבוי שלו כשורש של p_T. נסמו $r_a(\lambda)$.

הגדרה 2.3.11 (ריבוי גיאומטרי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא $r_g(\lambda) \coloneqq \dim V_\lambda$.

הערה 2.3.12. מתקיים תמיד $r_a(\lambda) \leq r_g(\lambda)$.

הגדרה 2.3.13. תהי $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ ויהי $T = T_A$ אופרטור כפל ב־A משמאל (כלומר, $T(v) = Av$). אם T לכסין, קיים בסיס B עבורו $D := [T]_B$ אלכסונית. אז

$$\begin{aligned} A &= [T]_E \\ &= [\operatorname{Id} \circ T \circ \operatorname{Id}]_E \\ &= M_E^B [T]_B M_B^E \\ &= M_E^B D \left(M_E^B\right)^{-1} \end{aligned}$$

ואם נסמן $P = M_E^B$ נקבל כי זאת מטריצה הפיכה עבורה $P^{-1}AP = D$.
לכן, נגיד שמטריצה $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה אם קיימת $P \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $P^{-1}AP$ אלכסונית.

תרגיל 2.6. הראו כי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$$

לכסינה ומצאו $P \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$ עבורה $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.

פתרון. סכום הערכים העצמיים של A שווה לעקבה שלה $\operatorname{tr}(A) = 1$ ומכפלת הערכים העצמיים שווה $\det(A) = 0$. לכן הערכים העצמיים הם $0, 1$. כיוון שלכל אחד מהם הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי, המטריצה הינה לכסינה.
נמצא וקטורים עצמיים עבור שני הערכים העצמיים השונים. עבור 0 ניתן לראות כי e_2 ערך עצמי, כי Ae_2 היא העמודה השנייה של A, ששווה לוקטור האפס. עבור 1, נחפש וקטור $v \in \mathbb{R}^2$ עבורו $Av = v$, כלומר $(A - I)v = 0$. מתקיים $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ולכן אם $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ צריך להתקיים $v_1 - v_2 = 0$, כלומר $v_1 = v_2$. ניקח אם כך $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ ונקבל $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Av$.
אז $B = (e_2, e_1 + e_2)$ בסיס מלכסן של ההעתקה

$$\begin{aligned} T_A \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto Av \end{aligned} .$$

נקבל כי

$$D := [T_A]_B = \left(M_E^B\right)^{-1} [T_A]_E M_E^B$$

מטריצה אלכסונית, ולכן ניקח $P = M_E^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

תרגיל 2.7. יהיו $n \in \mathbb{N}_+$ ו־$\lambda \in \mathbb{C}$, ותהי

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C}).$$

מיצאו עבור אילו ערכי n, λ המטריצה $J_n(\lambda)$ לכסינה.

פתרון. הערכים העצמיים של מטריצה משולשת עליונה הינם על האלכסון. לכן λ ערך עצמי של $J_n(\lambda)$ מריבוי אלגברי n.
לכן, אם $J_n(\lambda)$ לכסינה, היא דומה למטריצה λI_n. אבל, מטריצה סקלרית דומה רק לעצמה, ולכן המטריצה $J_n(\lambda)$ לכסינה רק עבור $n = 1$, ובלי תלות ב־λ.

תרגיל 2.8. הוכיחו/הפריכו:

1. סכום של מטריצות לכסינות הוא לכסין.

2. כפל של מטריצות לכסינות הוא לכסין.

פתרון. 1. לא. מתקיים

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=J_2\left(1\right)$$

וראינו שמטריצה זאת אינה לכסינה. המטריצה $A:=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ לכסינה כי ראינו בתרגיל קודם ש־A^t לכסינה.

2. לא. מתקיים

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=J_2\left(1\right)$$

וזאת מטריצה שאינה לכסינה. אבל, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ לכסינה כי יש לה שני ערכים עצמיים שונים, ±1, כאיברי האלכסון של מטריצה משולשת עליונה.

2.4 מרחבים שמורים

נרצה להבין אופרטורים לינאריים דרך הבנה של צמצום שלהם לתת־מרחבים קטנים יותר. אם $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$, נוכל תמיד לצמצם את המקור כדי לקבל העתקה לינארית $T|_W\colon W\to V$, אבל לא נוכל ללמוד מספיק כאשר הצמצום אינו אופרטור. לכן נרצה לצמצם גם את הטווח, מה שמוביל להגדרה הבאה.

הגדרה 2.4.1 (מרחב שמור). יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ ויהי $U\le V$. נגיד כי U הינו T־שמור (או T־אינווריאנטי אם $T\left(U\right)\subseteq U$.

הגדרה 2.4.2. במקרה ש־W מרחב T־שמור, נוכל להסתכל על הצמצום $T|_W\colon W\to W$ שמוגדר על ידי $T|_W\left(w\right)=T\left(w\right)$.

הערה 2.4.3. שימו לב שהסימון הוא אותו סימון כמו הצמצום של המקור, אך במסגרת הקורס צמצום אופרטורים יתייחס לזה שבהגדרה אלא אם כן יצוין מפורשות אחרת.

תרגיל 2.9. יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהיו $P,T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ כאשר P איזומורפיזם. יהי $W\le V$.
הראו כי W הינו T־שמור אם ורק אם $P^{-1}\left(W\right)$ הינו $P^{-1}\circ T\circ P$־שמור.

פתרון. נניח כי W הינו T־שמור ויהי $v\in P^{-1}\left(W\right)$. נרצה להראות כי $P^{-1}\circ T\circ P\left(v\right)\in P^{-1}\left(W\right)$. יהי $w\in W$ עבורו $v=P^{-1}\left(w\right)$. אז

$$\begin{aligned}P^{-1}\circ T\circ P\left(v\right)&=P^{-1}\circ T\circ P\circ P^{-1}\left(W\right)\\&=P^{-1}\circ T\left(w\right)\end{aligned}$$

כאשר $T\left(w\right)\in W$ כי W הוא T־שמור. נקבל כי $P^{-1}\circ T\circ P\left(v\right)\in P^{-1}\left(W\right)$.
בכיוון השני, נניח כי $U:=P^{-1}\left(W\right)$ הינו $P^{-1}\circ T\circ P$־שמור. נגדיר $S=P^{-1}\circ T\circ P$, וגם $Q=P^{-1}$. אז $T=Q^{-1}\circ T\circ Q$ וגם $W=P\left(P^{-1}\left(W\right)\right)=P\left(U\right)=Q^{-1}\left(U\right)$. מהכיוון הראשון, נקבל כי W הינו $\left(Q^{-1}\circ T\circ Q\right)$־שמור, כלומר T־שמור.

תרגיל 2.10. יהי $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי ממשי ויהי

$$\begin{aligned}T\colon\mathbb{C}&\to\mathbb{C}\\ .\qquad z&\mapsto iz\end{aligned}$$

מצאו את התת־מרחבים ה־T־שמורים של $\mathbb{C}$ והסיקו כי T אינו לכסין מעל $\mathbb{R}$.

פתרון. $\mathbb{C},\left\{0\right\}$ תת־מרחבים T־שמורים.
נניח כי $W\le\mathbb{C}$ מרחב T־שמור נוסף. אז $\dim_{\mathbb{R}}\left(W\right)=1$ ולכן יש

$$z_0\in\mathbb{C}^{\times}:=\left\{z\in\mathbb{C}\mid z\neq0\right\}$$

עבורו $W=\operatorname{Span}\left\{z_0\right\}$. נקבל $T\left(z_0\right)\in W$ לכן $T\left(z_0\right)=cz_0$ עבור $c\in\mathbb{R}$. אבל $cz_0=iz_0$ גורר $c=i$ בסתירה.
תת־מרחבים T־שמורים 1־מימדיים של $\mathbb{C}$ הם $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left(v\right)$ עבור v וקטור עצמי של T. לכן אין ל־T וקטורים עצמיים, ולכן הוא אינו לכסין מעל $\mathbb{R}$.

סימון 2.4.4. עבור מטריצות ריבועיות $A_1,\ldots,A_k$ נסמן

$$A_1\oplus\ldots\oplus A_k=\begin{pmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_k\end{pmatrix}.$$

תרגיל 2.11. יהי $V=\mathbb{C}^n$ ותהי

$$T\colon V\to V$$

עם

$$[T]_E=\lambda_1 I_{m_1}\oplus\ldots\oplus\lambda_k I_{m_k}$$

עבור $\lambda_i\neq\lambda_j$ לכל $i\neq j$. נסמן $n_i=m_1+\ldots+m_{i-1}+1$. מצאו את כל התת־מרחבים ה־T־שמורים של V.

פתרון. ראשית, אם $W\le V_i:=\operatorname{Span}\left(e_{n_i},\ldots,e_{n_i+m_i-1}\right)$, נקבל כי $T(w)=\lambda_i w\in W$ לכל $w\in W$. לכן כל תת־מרחב כזה הינו T־שמור. גם סכום של תת־מרחבים כאלה יהיה T־שמור כי אם $v_i\in W_i:=W\cap V_i$ לכל $i\in[k]$ אז

$$T(v_1+\ldots+v_k)=T(v_1)+\ldots+T(v_k)$$

כאשר $T(v_i)\in W$ וגם $T(v_i)=\lambda_i v_i\in V_i$, כלומר $T(v_i)\in W_i$. נראה שאלו כל האפשרויות לתת־מרחבים שמורים. ראינו בהרצאה כי אם W הינו T־שמור, אז $T|_W$ הינו לכסין. לכן, W סכום ישר של המרחבים העצמיים של $T|_W$. לכל ערך עצמי λ, המרחב העצמי W_λ של $T|_W$ הוא החיתוך $W\cap V_\lambda$ כאשר V_λ המרחב העצמי של T. כיוון שעבור אופרטור לכסין המרחב שווה לסכום ישר של המרחבים העצמיים, נקבל כי

$$W=\bigoplus_{i\in[k]}W_{\lambda_i}=\bigoplus_{i\in[k]}W\cap V_{\lambda_i},$$

כנדרש.

הגדרה 2.4.5 (בלוק ז'ורדן). יהי $\lambda\in\mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל m עם ערך עצמי λ בתור

$$J_m(\lambda):=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_m(\mathbb{F}).$$

הגדרה 2.4.6 (אופרטור אי־פריד). אופרטור $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא אי־פריד אם לכל $U,W\le V$ שהינם T־שמורים ועבורם $U\oplus W=V$, בהכרח $U=V,W=\{0\}$ או $U=\{0\},W=V$.

תרגיל 2.12. 1. יהי $T=T_{J_n(0)}\in\operatorname{End}(\mathbb{F}^n)$. מיצאו את המרחבים ה־$T$ שמורים של $\mathbb{F}^n$.

2. יהי $N\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$. הראו שהמרחבים ה־S־שמורים של V הם המרחבים ה־$(N+\lambda\operatorname{Id}_V)$־שמורים של V.

3. יהי $S=T_{J_n(\lambda)}\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}^n}$. הסיקו מה המרחבים ה־$S$־שמורים של $\mathbb{F}^n$.

4. הראו כי S הינו אי־פריד.

פתרון. 1. נשים לב כי

$$\begin{aligned}&\{0\}\\\ker(T)&=\operatorname{Span}(e_1)\\\operatorname{Im}(T)&=\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_{n-1})\\V&=\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_n)\end{aligned}$$

כולם T־שמורים, כיוון שמרחב האפס, הגרעין, התמונה, והמרחב כולו תמיד T־שמורים. גם, מתקיים

$$\begin{aligned}\forall i>1\colon T(e_i)&=e_{i-1}\in\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_i)\\T(e_1)&=0\end{aligned}$$

ולכן כל מרחב מהצורה $\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_i)$ עבור $i\in\{0,\ldots,n\}$ הינו T־שמור. נרצה להראות שהמרחבים ה־T־שמורים הם בדיוק אלו מהצורה הזאת.

יהי $W \leq \mathbb{F}^n$ מרחב T־שמור, ויהי $k \in \{0, \ldots, n\}$ המקסימלי עבורו $\operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_k) \subseteq W$ (יש כזה k כיוון שעבור $k = 0$ נקבל $\{0\} \subseteq W$). נרצה להראות כי $W = \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_k)$.

אחרת, קיים וקטור $W \ni v = \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i e_i$ עם $\ell > k$ וגם $\alpha_\ell \neq 0$. אם $\ell = k+1$ נקבל כי $\alpha_i e_i \in W$ לכל $i < \ell$ ולכן

$$\alpha_\ell e_\ell = v - \sum_{i \in [\ell-1]} \in W$$

וכיוון ש־$\alpha_\ell \neq 0$ אז $e_{k+1} = e_\ell \in W$. במקרה זה $e_1, \ldots, e_{k+1} \in W$ ולכן $\operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_{k+1}) \subseteq W$ בסתירה להנחה.

באופן כללי, מתקיים $T^i(v) \in W$ לכל i. כדי שיתקיים $T^i(e_\ell) = e_{k+1}$ צריך לקחת $\ell - i = k + 1$ כלומר $i = \ell - (k+1)$. אז

$$\begin{aligned} T^{\ell-(k+1)}(v) &= \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i T^{\ell-(k+1)}(e_i) \\ &= \sum_{i=\ell-k}^{\ell} \alpha_i e_{i-\ell+k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_{j+\ell-k-1} e_j \in W \end{aligned}$$

ונקבל את הנדרש מהמקרה הקודם $\ell = k+1$.

2. יהי $W \leq V$ תת־מרחב N־שמור. לכל $w \in W$ מתקיים

$$(N + \lambda \operatorname{Id}_V)(w) = N(w) + \lambda w \in W$$

כיוון ש־$N(w), \lambda w \in W$. לכן W הינו $N + \lambda \operatorname{Id}_V$־שמור.

אם $W \leq V$ תת־מרחב $(N + \lambda \operatorname{Id}_V)$־שמור, נקבל מהכיוון הראשון שהוא $(N + \lambda \operatorname{Id}_V) + (-\lambda) \operatorname{Id}_V$־שמור, כלומר N־שמור.

3. מהסעיף הקודם, נקבל כי המרחבים ה־S שמורים הם המרחבים ה־T־שמורים, שהינם אלו מהצורה $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(e_1, \ldots, e_i)$ עבור $i \in \{0, \ldots, n\}$.

4. נניח כי יש תת־מרחבים S־שמורים W_1, W_2 עבורם $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$. מהסעיף הקודם, יש $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ עבורם

$$\begin{aligned} W_1 &= \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_i) \\ W_2 &= \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_j). \end{aligned}$$

כיוון ש־$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{F}^n$, בהכרח $e_n \in W_1 + W_2$, ולכן $i = n$ או $j = n$. במקרה הראשון, $W_1 = \mathbb{F}^n, W_2 = \{0\}$ ובמקרה השני $W_2 = \mathbb{F}^n, W_1 = \{0\}$, ובכל מקרה הפירוק הינו טריוויאלי.

דוגמה 2.4.7. יהי $V = \mathbb{C}^4$, ויהי $T = T_{J_4(0)} \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$. נניח כי $W \leq V$ מכיל

תרגיל 2.13. 1. תהי $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$. הוכיחו כי אם ל־$T_A$ אין תת־מרחב שמור ממימד 1, יש לו תת־מרחב שמור ממימד 2.

2. נניח כי $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ מטריצה שכל מקדמיה ממשיים. הוכיחו כי אם λ ערך עצמי של T_A אז $\bar{\lambda}$ גם ערך עצמי של T_A.

פתרון. עבור מטריצה $A = (a_{i,j}) \in \operatorname{Mat}_{n,m}$ נגדיר

$$\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})$$

את המטריצה שמקדמיה הם המספרים הצמודים לאלו ב־A. נשים לב כי עבור שתי מטריצות $A \in \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ ו־$B \in \operatorname{Mat}_{n,\ell}(\mathbb{C})$, מתקיים

$$\begin{aligned} \left(\overline{AB}\right)_{i,j} &= \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{i,k}}\,\overline{b_{k,j}} \\ &= (|A|\,|B|)_{i,j} \end{aligned}$$

ולכן $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$.

1. תת־מרחב T_A־שמור ממימד 1 הוא מהצורה $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור וקטור עצמי v של T_A. לכן מההנחה, אין ל־T_A וקטורים עצמיים.

אבל, אפשר לחשוב על A כעל מטריצה ב־$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ שנסמנה $\tilde{A}$. אז ל־$T_{\tilde{A}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ יש וקטור עצמי כאופרטור מעל $\mathbb{C}$. יהי $v \in \mathbb{C}^n$ וקטור עצמי של $T_{\tilde{A}}$ עם ערך עצמי $\lambda = \alpha + i\beta$, ונכתוב

$$v = \begin{pmatrix} u_1 + iw_1 \\ \vdots \\ u_n + iw_n \end{pmatrix} = u + iw$$

כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ וקטורים עם מקדמים ממשיים. נוכל לחשוב עליהם כחיים ב־$\mathbb{R}^n$. אז

$$\begin{aligned} Au + iAw &= A(u + iw) \\ &= Av \\ &= \lambda v \\ &= (\alpha + i\beta)(u + iw) \\ &= \alpha u + \alpha iw + \beta iu - \beta w \\ &= (\alpha u - \beta w) + i(\alpha w + \beta u) \end{aligned}$$

כאשר $Au, Aw \in \mathbb{R}^n$. אז, נוכל להשוות מקדמים ולקבל

$$\begin{aligned} T_A(u) &= Au = \alpha u - \beta w \in \mathrm{Span}(u, w) \\ .T_A(w) &= Aw = \alpha w + \beta u \in \mathrm{Span}(u, w) \end{aligned}$$

לכן $\mathrm{Span}(u, w)$ הינו תת־מרחב L_A־שמור של $\mathbb{R}^n$.

2. אם λ ממשי אין מה להוכיח כי $\lambda = \bar{\lambda}$. נניח אם כן כי $\lambda = \alpha + i\beta$ עבור $\beta \neq 0$. נסמן ב־$v = u + iw$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ, כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ עם מקדמים ממשיים. אז

$$\bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

ולכן $\bar{v}$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי $\bar{\lambda}$, כנדרש.