אלגברה ב' - פתרון תרגיל מגיליון 1, באינדוקציה

תרגיל 4. יהי $p=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{F}[x]$ פולינום מתוקן (כלומר, $a_n=1$). ותהי

$$C(p):=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}).$$

הראו כי

$$\det(xI-C(p))=p(x).$$

פתרון. עבור כל $f\in\mathbb{F}[x]$ מדרגה כלשהי $m\in\mathbb{N}$ נסמן $A(f):=xI_m-C(f)$.
נוכיח באינדוקציה על n כי $\det(A(f))=f(x)$ לכל פולינום $f\in\mathbb{F}[x]$ מדרגה n.

בסיס: נניח כי $n=1$ ונכתוב $f(x)=x+\alpha_0$. אז

$$C(f)=\begin{pmatrix}-\alpha_0\end{pmatrix}.$$

נקבל כי

$$\det(xI-C(f))=\det(x-(-\alpha_0))=x+\alpha_0=f(x).$$

צעד: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ ונניח כי הטענה נכונה כאשר $n<k$. נראה כי הטענה נכונה כאשר $n=k$.
יהי $f=\sum_{i=0}^{n}\alpha_ix^i\in\mathbb{F}[x]$ מדרגה $n=k$. חישוב של הדטרמיננטה $\det(A(f))$ לפי השורה הראשונה מראה כי

$$\det(A(f))=x\cdot\det\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-\alpha_1\\1&0&\cdots&0&-\alpha_2\\0&1&\cdots&0&-\alpha_3\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1&-\alpha_{n-1}\end{pmatrix}+(-1)^{n-1}\cdot\alpha_0\cdot\det(I_{n-1}).$$

נגדיר

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{i+1}x^i\in\mathbb{F}[x]$$

ונקבל כי

$$\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-\alpha_1\\1&0&\cdots&0&-\alpha_2\\0&1&\cdots&0&-\alpha_3\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1&-\alpha_{n-1}\end{pmatrix}=A(g).$$

כיוון ש־ g פולינום מדרגה קטנה מ־k, נקבל מהנחת האינדוקציה כי $\det(A(g))=g(x)$. כיוון שגם $\det(-I_{n-1})=$

נקבל כי $(-1)^{n-1}$

$$x\cdot\det\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-\alpha_1\\1&0&\cdots&0&-\alpha_2\\0&1&\cdots&0&-\alpha_3\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1&-\alpha_{n-1}\end{pmatrix}+(-1)^{n-1}\cdot\alpha_0\cdot\det(I_{n-1})=x\cdot g(x)+(-1)^{n-1}\cdot\alpha_0\cdot(-1)^{n-1}$$
$$=x\cdot g(x)+(-1)^{2(n-1)}\cdot\alpha_0$$
$$=x\cdot g(x)+\alpha_0.$$

לכן

$$\det(A(f))=x\cdot g(x)+\alpha_0.$$

מתקיים

$$\begin{aligned}x\cdot g(x)&=x\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{i+1}x^i\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{i+1}x^{i+1}\\&=\sum_{j=1}^{n}\alpha_jx^j\\&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix^i\end{aligned}$$

ולכן

$$x\cdot g(x)+\alpha_0=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix^i\right)+\alpha_0x^0=f(x).$$

קיבלנו כי $A(f(x))=f(x)$.

הראינו כי $\det(A(f))=f(x)$ לכל $f\in\mathbb{F}[x]$ מדרגה 0, וכי לכל $k\in\mathbb{N}$, אם $\det(A(f))=f(x)$ לכל $f\in\mathbb{F}[x]$ מדרגה קטנה מ־k אז גם $\det(A(f))=f(x)$ לכל $f\in\mathbb{F}[x]$ מדרגה k. לכן, $\det(A(f))=f(x)$ לכל $f\in\mathbb{F}[x]$, ובפרט $\det(A(p))=p(x)$, כנדרש.