אלגברה ב׳ - תרגילי הכנה לקורס
חזרה על מטריצות מייצגות, הדטרמיננטה, ערכים עצמיים ולכסון

לא להגשה

1 מטריצות מייצגות

הגדרה 1.1 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן $B = (v_1, \ldots, v_n)$.

נסמן גם $n := \dim(V)$ ו־$m := \dim(W)$. עבור $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F}).$$

תרגיל 1. חשבו את המטריצות המייצגות של ההעתקות הבאות לפי הבסיסים הנתונים.

1. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לפי הבסיס

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

2. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}_3[x] &\to \mathbb{C}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$

לפי הבסיס הסטנדרטי

$$\left(1, x, x^2, x^3\right)$$

של מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 3 עם מקדמים מרוכבים.

3. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

לפי הבסיס

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

4. ההעתקה

$$\begin{aligned} T_A \colon \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) &\to \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ B &\mapsto AB \end{aligned}$$

עבור מטריצה $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ ולפי הבסיס הסטנדרטי

$$E = (E_{1,1}, \ldots, E_{1,n}, E_{2,1}, \ldots, E_{2,n}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{n,n})$$

כאשר $E_{i,j}$ מטריצה שמקדמיה אפסים חוץ מ־1 במיקום ה־(i,j). כלומר,

$$(E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{(i,j),(k,\ell)} \coloneqq \begin{cases} 0 & (i,j) = (k,\ell) \\ 1 & (i,j) \neq (k,\ell) \end{cases}.$$

5. ההעתקה

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ b_i &\mapsto \begin{cases} b_{i+1} & i < n \\ b_1 & i = n \end{cases} \end{aligned}$$

עבור בסיס

$$B = (b_1, \ldots, b_n),$$

לפי הבסיס B.

2 הדטרמיננטה

הגדרה 2.1 (דטרמיננטה). תהי $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. נגדיר את הדטרמיננטה $\det(A)$ של A באופן הרקורסיבי הבא.
תהי $M_{i,j}$ הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ־A לאחר הוצאת השורה ה־i והעמודה ה־j של A. נקרא למספר זה המינור ה־(i,j) של A. הדטרמיננטה של A מוגדרת על ידי

$$\det(A) \coloneqq \sum_{i,j\in[n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}.$$

משפט 2.2. תהיינה $A, B, C \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי C הפיכה. מתקיימות התכונות הבאות.

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
2. $\det\left(C^{-1}\right) = (\det(C))^{-1}$

תרגיל 2. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

3.

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$$

עבור סקלרים $a, b, c, d \in \mathbb{F}$.

4.

$$D=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{3\times 3}\left(\mathbb{C}\right)$$

5.

$$E=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{3\times 3}\left(\mathbb{C}\right)$$

6.

$$F=\begin{pmatrix}A&0_{2\times 2}\\0_{2\times 2}&B\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{4\times 4}\left(\mathbb{F}\right)$$

עבור $A,B\in \mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{F}\right)$.

טענה 2.3 (מעבר בסיס). תהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית ויהיו B,C שני בסיסים של V. נסמן $M_C^B=\left[\mathrm{Id}_V\right]_C^B$ ונקרא לה מטריצת מעבר בין הבסיסים B,C. מתקיים

1.

$$M_B^C=\left(M_C^B\right)^{-1}$$

2.

$$\left[T\right]_B=\left(M_C^B\right)^{-1}\left[T\right]_C M_C^B$$

הערה 2.4. המטריצה M_C^B מקיימת $M_C^B\left[v\right]_B=\left[v\right]_C$ לכל וקטור $v\in V$. בכל זאת, יש שקוראים לה "מטריצת מעבר מ־C ל־B". לכן לא נקרא לה "מטריצת מעבר מבסיס אחד לאחר" אלא רק מטריצת מעבר בין שני הבסיסים.

תרגיל 3. תהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית, ויהי B בסיס של V. נגדיר את הדטרמיננטה של T על ידי

$$\det\left(T\right):=\det\left(\left[T\right]_B\right).$$

הראו שהדטרמיננטה של T מוגדרת היטב. כלומר, הראו שאם B' בסיס נוסף של V מתקיים

$$\det\left(\left[T\right]_B\right)=\det\left(\left[T\right]_{B'}\right).$$

3 ערכים ווקטורים עצמיים

הגדרה 3.1 (ערכים ווקטורים עצמיים). תהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית מעל שדה $\mathbb{F}$. סקלר $\lambda\in\mathbb{F}$ נקרא ערך עצמי של T אם קיים $v\in V$ עבורו $T\left(v\right)=\lambda v$. וקטור $v\in V$ כזה נקרא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ.
תהי $A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ונסמן

$$\begin{aligned}T_A\colon \mathbb{F}^n&\to\mathbb{F}^n\\ v&\mapsto Av\end{aligned}.$$

ערך/וקטור עצמי של A הוא ערך/וקטור עצמי של T_A.

תרגיל 4. מצאו את הערכים העצמיים של ההעתקות הבאות.

1. ההעתקה

$$\begin{aligned}T\colon \mathbb{R}^3&\to\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&\mapsto\begin{pmatrix}x\\x+y\\x+y+z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}_3\left[x\right] &\to \mathbb{C}_3\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p\left(x+1\right) \end{aligned}$$

5. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{F}_n\left[x\right] &\to \mathbb{F}_n\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p'\left(x\right) \end{aligned}$$

כאשר $p'\left(x\right)$ הנגזרת הפורמלית של $p\left(x\right)$.

6. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon\ \mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) &\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

7. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ b_i &\mapsto \begin{cases} b_{i+1} & i<n \\ b_1 & i=n \end{cases} \end{aligned}$$

עבור בסיס

$$B=\left(b_1,\ldots,b_n\right),$$

כאשר V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

משפט 3.2. תהי $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$.

1. הערכים העצמיים של A הם שורשי הפולינום המתוקן $p_A\left(x\right):=\det\left(xI_{n\times n}-A\right)$.

2. אם ל-p_A יש n שורשים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ כולל ריבויים, העקבה של A היא סכום השורשים והדטרמיננטה של A היא מכפלת השורשים. כלומר,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(A\right) &= \sum_{i\in[n]}\lambda_i \\ \det\left(A\right) &= \prod_{i\in[n]}\lambda_i \,. \end{aligned}$$

תרגיל 5. מצאו את הערכים העצמיים של המטריצות הבאות. עבור כל אחת מהמטריצות A עד F שיש לה מספר ערכים עצמיים ששווה לגודל המטריצה, וודאו שמכפלת הערכים העצמיים שווה לדטרמיננטה שחישבתם בתרגיל **??**.

1.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right)$$

.2

$$B=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

עבור $\theta\in\mathbb{R}$.

.3

$$B'=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

עבור $\theta\in\mathbb{R}$.

.4

$$C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$$

עבור סקלרים $a,b,c,d\in\mathbb{F}$.

.5

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

.6

$$E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

.7

$$F=\begin{pmatrix}A & 0_{2\times 2}\\ 0_{2\times 2} & B\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{F})$$

עבור $A,B\in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{F})$.

4 לכסון

הגדרה 4.1 (לכסינות). העתקה לינארית $T\colon V\to V$ נקראת לכסינה אם קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית. בסיס B כזה נקרא בסיס מלכסן.
מטריצה $A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ נקראת לכסינה אם T_A לכסינה.

תרגיל 6. הראו כי $T\colon V\to V$ לכסינה אם ורק אם קיים בסיס B של V שאיבריו עם וקטורים עצמיים של T. הראו כי במקרה זה הערכים העצמיים של T הם הערכים על האלכסון של $[T]_B$.

תרגיל 7. הראו כי $A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ לכסינה אם ורק אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ עבורה $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.
רמז: העזרו בטענה **??**.

תרגיל 8. עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבעו האם ההעתקה לכסינה ואם כן מצאו בסיס מלכסן. הוכיחו את טענותיכן.

1. ההעתקה

$$T\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\ x+y\\ x+y+z\end{pmatrix}$$

2. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}_3[x] &\to \mathbb{C}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$

5. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{F}_n[x] &\to \mathbb{F}_n[x] \\ p(x) &\mapsto p'(x) \end{aligned}$$

כאשר $p'(x)$ הנגזרת הפורמלית של $p(x)$.

6. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

7. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ b_i &\mapsto \begin{cases} b_{i+1} & i<n \\ b_1 & i=n \end{cases} \end{aligned}$$

עבור בסיס

$$B=(b_1,\dots,b_n),$$

כאשר V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

תרגיל 9. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות X קבעו האם המטריצה לכסינה ואם כן מצאו מטריצה P עבורה $P^{-1}XP$ מטריצה אלכסונית. הוכיחו את טענותיכן.

1.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

2.

$$B=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

עבור $\theta\in\mathbb{R}$.

3.

$$B'=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

עבור $\theta\in\mathbb{R}$.

.4

$$D=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3\times 3}\left(\mathbb{C}\right)$$

.5

$$E=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3\times 3}\left(\mathbb{C}\right)$$

.6

$$F=\begin{pmatrix}A&0_{2\times 2}\\0_{2\times 2}&B\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{4\times 4}\left(\mathbb{F}\right)$$

עבור $A,B\in\mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{F}\right)$. הפרידו למקרים כתלות במטריצות A,B.

.7

$$J\left(\lambda\right)=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{C}\right)$$

עבור $\lambda\in\mathbb{C}$.

.8

$$K=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{C}\right)$$

תרגיל 10. תהיינה $A,B\in\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ לכסינות. הפריכו את הטענות הבאות.

1. $A+B$ לכסינה.
2. AB לכסינה.

רמז: היעזרו במטריצות $J\left(0\right),J\left(1\right),K$ מהסעיף הקודם.

תרגיל 11. הוכיחו שאם למטריצה יש ערך עצמי יחיד, היא לכסינה אם ורק אם היא סקלרית, כלומר אם ורק אם היא מהצורה $\lambda I_{n\times n}$.