אלגברה ב׳ - גיליון תרגילי בית 4
גרם־שמידט ואופרטורים צמודים

תאריך הגשה: 9.8.2024

תרגיל 1. יהי $V=\mathbb{R}_2\left[x\right]$ ותהיינה

$$\left\langle f,g\right\rangle_1=\int_0^1 f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x$$
$$\left\langle f,g\right\rangle_2=f\left(-1\right)g\left(-1\right)+f\left(0\right)g\left(0\right)+f\left(1\right)g\left(1\right)$$

שתי מכפלות פנימיות על V. יהי

$$W=\left\{f\in V\mid f\left(x\right)=f\left(-x\right)\right\}\leq V.$$

1. מיצאו בסיס $B=\left(w_1,\ldots,w_m\right)$ של W והשלימו אותו לבסיס C של V. בצעו את תהליך גרם־שמידט על C לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות כדי לקבל בסיסים אורתונורמליים לפיהן.
2. היעזרו בבסיסים שמצאתן בסעיף הקודם כדי למצוא את $W^{\perp}$ לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.
3. מיצאו את ההטלה האורתוגונלית P_W על W לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.
4. יהי $f\left(x\right)=1+x$. מיצאו את המרחק של f מ־W לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

תרגיל 2. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$, ויהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{C}}\left(V\right)$. הראו כי קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו $\left[T\right]_B$ משולשת עליונה.
רמז: היעזרו במשפטי ז׳ורדן וגרם־שמידט.

תרגיל 3. יהי $V=M_2\left(\mathbb{R}\right)$ עם הבסיס

$$B=\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

מיצאו מכפלה פנימית על V לפיה B בסיס אורתונורמלי.
רמז: כל המכפלות פנימיות על V הן מהצורה

$$\left\langle u,v\right\rangle_C\coloneqq\left\langle\left[u\right]_C,\left[v\right]_C\right\rangle_{\mathrm{std}},$$

עבור C בסיס של V.

תרגיל 4. יהי $V=\operatorname{Mat}_n\left(\mathbb{R}\right)$ עם המכפלה הפנימית $\left\langle X,Y\right\rangle=\operatorname{tr}\left(Y^tX\right)$, ותהי $B\in V$. נגדיר אופרטור

$$\begin{aligned}\Phi_B\colon V&\to V\\A&\mapsto BA\end{aligned}.$$

1. חשבו את Φ_B^*.
2. עבור אילו מטריצות B האופרטור Φ_B נורמלי?
3. עבור אילו מטריצות B האופרטור Φ_B צמוד לעצמו?
4. עבור אילו מטריצות B האופרטור Φ_B אורתוגונלי?

תרגיל 5. יהי $V=\mathrm{Mat}_2\left(\mathbb{R}\right)$ עם המכפלה הפנימית $\langle X,Y\rangle=\mathrm{tr}\left(Y^tX\right)$, ויהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ המוגדר על ידי

$$T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16a & 4b-6c\\ -6b+13c & 16d\end{pmatrix}.$$

מיצאו בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B$ אלכסונית, ומיצאו אופרטור $S\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ צמוד לעצמו עבורו $S^2=T$.

תרגיל 6. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי, יהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V\right)$ נורמלי, ונניח כי $3,4$ ערכים עצמיים של T. הראו שיש $v\in V$ עבורו $\|v\|=\sqrt{2}$ וגם $\|Tv\|=5$.

תרגיל 7. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי, יהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V\right)$ ויהי $a\in\mathbb{C}$ עבורו $|a|\neq 1$.

1. הראו כי אם $T^*=aT$ אז $T=0$.
2. נניח כי T נורמלי, ויהי $S=T-aT^*$. הוכיחו כי $\ker\left(T\right)=\ker\left(S\right)$.