אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 12
עוד תבניות בילינאריות

תאריך הגשה: 23.7.2026

הגדרה 1.1 (מטריצה חיובית לחלוטין). מטריצה $A \in \mathbb{F}^n$ עבור $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ נקראת חיובית לחלוטין אם $A = \bar{A}^t$ וגם $\langle Av, v\rangle > 0$ לכל $v \in V$.

תרגיל 1. יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. הראו כי $B := (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של $\mathbb{R}^n$ אם ורק אם למטריצת Gram של B

$$\mathrm{Gr}(B) := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} = \left(\langle v_i, v_j\rangle\right)_{i,j\in[n]}$$

יש דטרמיננטה חיובית.

תרגיל 2. הוכיחו כי עבור $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ המקיימות

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : u^t A v = u^t B v$$

מתקיים $A = B$.

תרגיל 3. יהי $V = \mathbb{R}^n$ ותהי $f \in \mathbf{B}(V)$ תבנית בילינארית על V. נזכיר כי ראינו בהרצאה שקיימת מטריצה $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ עבורה

$$\forall u, v \in V : f(u, v) = u^t A v.$$

1. הוכיחו כי f סימטרית אם ורק אם A סימטרית.
2. הוכיחו כי $A^t = -A$ אם ורק אם $f(v, v) = 0$ לכל $v \in V$.
3. הוכיחו כי A הפיכה אם ורק אם לכל $u \in V \setminus \{0\}$ קיים $v \in V$ עבורו $f(u, v) \neq 0$.
4. הוכיחו כי A חיובית לחלוטין אם ורק אם f מכפלה פנימית.

תרגיל 4. יהי $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ותהי

$$\begin{aligned} f \colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \mathrm{tr}(AB) \end{aligned} .$$

1. הוכיחו כי f תבנית בילינארית סימטרית על V.
2. עבור $n = 2$, מיצאו בסיס $\mathcal{B}$ של V עבורו $[f]_{\mathcal{B}}$ אלכסונית.
3. על ידי שינוי סדר האיברים בבסיס $\mathcal{B}$ שמצאתן בסעיף הקודם, וכפל של כל אחד מהם בקבוע, מיצאו בסיס $\mathcal{C}$ וקבועים $n_+, n_-, n_0 \in \mathbb{N}$ (אצלנו $0 \in \mathbb{N}$) של V עבורם

$$[f]_{\mathcal{C}} = \mathrm{diag}\left(I_{n_+}, -I_{n_-}, 0_{n_0}\right).$$

תרגיל 5. תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ הפיכה וסימטרית. הוכיחו ש־A חופפת ל־I_n.