אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 11
פירוק לערכים סינגולריים, פירוק פולארי, ותבניות בילינאריות

תאריך הגשה: 16.7.2026

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$ ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.
הוכיחו שקיימת איזומטריה $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ עבורה

$$T = \sqrt{T^*T}S.$$

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$ ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. יהיו s ו־S הערכים הסינגולריים הכי קטן והכי גדול של T, בהתאמה.

1. הראו כי
$$\forall v \in V : s\|v\| \leq \|T(v)\| \leq S\|S\|.$$
2. הראו כי $s \leq |\lambda| \leq S$ לכל ערך עצמי λ של T.

תרגיל 3 (שימוש של פירוק לערכים סינגולריים). עבור מטריצה אלכסונית $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ נגדיר

$$D^\dagger := \mathrm{diag}(\lambda_1', \ldots, \lambda_n')$$

כאשר

$$\lambda_i' = \begin{cases} \lambda_i^{-1} & \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \lambda_i = 0 \end{cases}.$$

עבור $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ נגדיר

$$A^\dagger := V\Sigma^\dagger U^*$$

כאשר

$$A = U\Sigma V^*$$

הפירוק של A לערכים סינגולריים.
המטריצה $A^\dagger$ נקראת הופכית מור-פנרוז של A ויש לה שימושים בפתרון מערכות משוואות. נראה שבמספר מובנים היא מתנהגת באופן הדומה להופכית של A.

1. הוכיחו כי $\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$.
2. הוכיחו כי $AA^\dagger A = A$.
3. הוכיחו כי $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$.
4. הוכיחו כי $AA^\dagger, A^\dagger A$ שתיהן מטריצות חיוביות. כלומר, ש־$T_{AA^\dagger}, T_{A^\dagger A}$ אופרטורים חיוביים.
5. הוכיחו כי כאשר A הפיכה מתקיים $A^\dagger = A^{-1}$.

שימו לב שיש תרגיל נוסף בעמוד הבא.

תרגיל 4. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי מעל $\mathbb{R}$, ותהי f תבנית בילינארית על V.

1. יהי $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ויהי $\mathcal{B}^* := (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ בסיס של V^* כאשר

$$v_j^* \left(\sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right) = \alpha_j v_j.$$

הוכיחו כי

$$\forall u, v \in V : f(u, v) = \sum_{i,j \in [n]} f(v_i, v_j) \, v_i^*(u) \, v_j^*(v).$$

2. הסיקו כי כל תבנית בילינארית f על V היא מהצורה

$$f(u, v) = \sum_{i \in [j]} \varphi_i(u) \, \psi_i(v)$$

עבור $\varphi_i, \psi_i \in V^*$.