אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 7
צורת ז'ורדן

תאריך הגשה: 18.6.2026

תרגיל 1. יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $\lambda \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}_+$.

1. הראו כי
$$m_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^n.$$
2. הסיקו כי אם $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור שהפולינום האופייני שלו מתפצל מעל $\mathbb{F}$, ושהערכים העצמיים השונים שלו הם $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, מתקיים
$$m_T(x) = \prod_{i\in[m]} (x-\lambda_i)^{k_i}$$
כאשר k_i גודל בלוק ז'ורדן המקסימלי עם ערך עצמי λ_i בצורת ז'ורדן של T.

תרגיל 2. יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ עבורן
$$p_A(x) = p_B(x)$$
$$m_A(x) = m_B(x).$$
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. עבור אלו שאינן נכונות, מיצאו דוגמה נגדית.

1. A, B דומות אם $n = 3$.
2. A, B דומות אם $n = 4$.
3. A, B דומות אם $n = 5$.

תרגיל 3.
1. מצאו את צורת ז'ורדן של $J_n(\lambda)^{-1}$ עבור $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ועבור $n \in \mathbb{N}_+$.
2. תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ הפיכה. מצאו את צורת ז'ורדן של A^{-1} כתלות בזאת של A.
3. מצאו תנאי הכרחי ומספיק על הבלוקים בצורת ז'ורדן של $A \in M_n(\mathbb{C})$ כך שיתקיים $A \sim A^{-1}$.

תרגיל 4. תהיינה
$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$
מטריצות ב־$\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, ויהי $v_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

נגיד כי וקטור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_+^3$ הוא שלשה פיתגורית אם
$$f(v) := a^2 + b^2 - c^2 = 0,$$
וכי וקטור כזה הוא שלשה פיתגורית פרימיטיבית אם בנוסף המחלק המשותף המקסימלי של a, b, c הוא 1, ו־b זוגי. (יכולנו לחלופין לדרוש כי a זוגי. בדיוק אחד מהם זוגי כי אחרת הסכום $a^2 + b^2$ הינו זוגי אך לא מתחלק ב־4 ואז אין $c \in \mathbb{N}_+$ עבורו $c^2 = a^2 + b^2$).

1. מתקיים כי אם $v \in \mathbb{R}^3$ שלשה פיתגורית, גם $A_i v$ שלשה פיתגורית, וגם כי אם $v \in \mathbb{R}^3$ פרימיטיבית, גם $A_i v$ פרימיטיבית. הראו זאת עבור $i = 1$ והסיקו כי $A_1^k v_0$ שלשה פיתגורית פרימיטיבית לכל $k \in \mathbb{N}$.

   רמז: עבור פרימיטיביות, הראו שמקדמי המטריצה A_1^{-1} שלמים (אין צורך לחשב אותה לשם כך), והיעזרו בה.

2. ידוע כי 1 ערך עצמי של A_1 ושל A_3, וכי -1 ערך עצמי של A_2.

   הראו כי A_2, A_3 לכסינות, ומיצאו מטריצה $P \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ הפיכה, ומטריצת ז'ורדן $J \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $PA_1P = J$.

3. ידוע כי כל שלשה פיתגורית פרימיטיבת מתקבלת על ידי כפל משמאל של v_0 במטריצות מבין A_1, A_2, A_3. כלומר, קבוצת השלשות הפיתרגוריות הפרימיטיביות היא

$$\left\{ \left(\prod_{j \in [k]} A_{i_j} \right) v_0 \;\middle|\; \substack{k \in \mathbb{N} \\ \forall j \in [k] : i_j \in [3]} \right\}.$$

   הראו כי הקבוצה $\left\{ A_1^k v_0 \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$ היא בדיוק קבוצת השלשות הפיתגוריות הפרימיטיביות $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ עבורן $c = b+1$,

   וחשבו את $A_1^k v_0$ כדי למצוא קבוצה זאת.

הערה 1.1. מצאנו בעצם בתרגיל את כל המשולשים הישרי־זווית עם צלעות מאורכים שלמים, כך שאורך היתר גדול ב־1 מאורך אחת הצלעות.

הערה 1.2. כדי להראות שקבוצת השלשות הפיתרוגיות הפרימיטיביות היא זאת שכתבנו, ניתן להראות כי עבור שלשה פרימיטיבית $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq v_0$, בדיוק אחד מבין הוקטורים $A_i^{-1} v$ הוא בעל מקדמים שלמים, וכי הוא מהווה שלשה פיתגורית פרימיטיבית.
ניתן להראות זאת כתרגיל. את האי־שוויון $a + b < \frac{3}{2}c$ שמופיע כחלק מכך אפשר להראות ישירות, אך גם נדע להראות אותו בקלות בהמשך בעזרת מכפלות פנימיות.