אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 6
חוק האינרציה של סילבסטר, וקריטריון סילבסטר

תאריך הגשה: 26.1.2023

תרגיל 1. תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ סימטרית ויהי m סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים החיוביים של A.

1. הראו כי יש תת־מרחב $W \leq \mathbb{R}^n$ ממימד m עבורו $\langle Aw, w\rangle > 0$ לכל $w \in W \setminus \{0\}$.
2. יהי $W' \leq \mathbb{R}^n$ תת־מרחב נוסף עבורו מתקיים $\langle Aw, w\rangle > 0$ לכל $w \in W' \setminus \{0\}$. הראו כי $\dim W' \leq m$.

תרגיל 2. יהי $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

1. מיצאו מכפלה פנימית f על V כך ש־

$$B = \left(E_{1,1} + E_{1,2}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,1} + E_{2,2}, E_{2,2}\right)$$

הוא בסיס אורתונורמלי לפי f.

2. תהי

$$g(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$$

תבנית בילינארית סימטרית על V. מיצאו בסיס C של V ומטריצה $S = \mathrm{diag}\left(I_{n_+}, I_{n_-}, 0_{n_0}\right)$ עבורם $[g]_C = S$.

3. מיצאו בסיס D של V עבורו $[f]_D, [g]_D$ מטריצות אלכסוניות.

תרגיל 3. קיבעו אילו מהמטריצות הממשיות הבאות מוגדרות חיובית לחלוטין ואילו מוגדרות שלילית לחלוטין.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4 (רשות). יהי $V=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}\right)$ ועבור כל $a\in\mathbb{R}$ תהי

$$g_a\left(\varphi\right)=\varphi\left(e_1\right)^2+a\varphi\left(e_1\right)\varphi\left(e_2\right)+2\varphi\left(e_1\right)\varphi\left(e_3\right)+2\varphi\left(e_2\right)^2+2\varphi\left(e_2\right)\varphi\left(e_3\right)+\varphi\left(e_3\right)^2+2\varphi\left(e_3\right)\varphi\left(e_4\right)$$

תבנית ריבועית על V.

1. לכל $a\in\mathbb{R}$, מיצאו תבנית ריבועית f_a על V עבורה $g_a\left(\varphi\right)=f_a\left(\varphi,\varphi\right)$.
2. מיצאו את כל ערכי $a\in\mathbb{R}$ עבורם g_a מוגדרת חיובית לחלוטין.
3. נניח כעת כי $a=2$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[g]_B$ מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix}I_{n_+} & 0 & 0\\ 0 & -I_{n_-} & 0\\ 0 & 0 & 0_{n_0}\end{pmatrix}$.

תרגיל 5 (רשות). תהי

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\in M_3\left(\mathbb{R}\right)$$

ותהי

$$g_A\left(v\right)=v^tAv$$

תבנית ריבועית על $\mathbb{R}^3$.

1. מיצאו את הסימן של התבנית g_A.
2. מיצאו וקטורים $v_1,v_2\in\mathbb{R}^3$ מנורמה 1 עבורם $g_A\left(v_1\right)$ מינימלי ו־$g_A\left(v_2\right)$ מקסימלי.