אלגברה ב׳ - גיליון תרגילי בית 4
מרחבי מכפלה פנימית

תאריך הגשה: 28.12.2022

תרגיל 1. יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ ותהיינה

$$\langle f,g\rangle_1=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\langle f,g\rangle_2=f(-1)\,g(-1)+f(0)\,g(0)+f(1)\,g(1)$$

שתי מכפלות פנימיות על V. יהי

$$W=\{f\in V\mid f(x)=f(-x)\}\leq V.$$

1. מיצאו בסיס $B=(w_1,\ldots,w_m)$ של W והשלימו אותו לבסיס C של V. בצעו את תהליך גרם־שמידט על C לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות כדי לקבל בסיסים אורתונורמליים לפיהן.
2. היעזרו בבסיסים שמצאתן בסעיף הקודם כדי למצוא את $W^{\perp}$ לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.
3. מיצאו את ההטלה האורתוגונלית P_W על W לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.
4. יהי $f(x)=1+x$. מיצאו את המרחק של f מ־W לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

תרגיל 2. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי, ויהי $P\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ המקיים $P^2=P$.
נניח כי $\|P(v)\|\leq\|v\|$ לכל $v\in V$. הראו כי $\mathrm{Im}(P)\perp\ker(P)$ והסיקו כי P הטלה אורתוגונלית.
רמז: ראינו תרגיל שקישר בין אי־שוויון בין נורמות לבין ניצבות.

תרגיל 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$, ויהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. הראו כי קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו $[T]_B$ משולשת עליונה.
רמז: היעזרו במשפטי ז׳ורדן וגרם־שמידט.

תרגיל 4. יהי $V=M_2(\mathbb{R})$ עם הבסיס

$$B=\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

מיצאו מכפלה פנימית על V לפיה B בסיס אורתונורמלי.
רמז: עבור בסיס C של V הגדרנו מכפלה פנימית על ידי

$$\langle u,v\rangle_C=\langle [u]_C,[v]_C\rangle_{\mathrm{Std}},$$

וראינו שכל המכפלות הפנימיות על V הן מהצורה הזאת.

תרגיל 5. יהי $V=\mathbb{C}_4[x]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\sum_{i\in[4]} f(i)\,\bar{g}(i).$$

מיצאו $g\in V$ עבורו $\langle f,g\rangle=f(-1)$ לכל $f\in V$.