

אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 4

מרחבי מכפלה פנימית

תאריך הגשה: 28.12.2022

תרגיל 1. יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ ותהיינה

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

$$\langle f, g \rangle_2 = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

שתי מכפלות פנימיות על V . יהי

$$W = \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\} \leq V$$

1. מוצאו בסיס $B = (w_1, \dots, w_m)$ של W והשלימו אותו לבסיס C של V . בצעו את תהליך גרס-שמידט על C לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות כדי לקבל בסיסים אורתונורמליים לפיהן.

2. היעזרו בבסיסים שמצאתן בסעיף הקודם כדי למצוא את W^\perp לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

3. מוצאו את ההטלה האורתוגונלית P_W על W לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

4. יהי $f(x) = 1 + x$. מוצאו את המרחק של f מ- W לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

תרגיל 2. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף-מימדי, ויהי $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ המקיים $P^2 = P$. נניח כי $\|P(v)\| \leq \|v\|$ לכל $v \in V$. הראו כי $\text{Im}(P) \perp \ker(P)$ והסיקו כי P הטלה אורתוגונלית. רמז: ראינו תרגיל שקישר בין אי-שוויון בין נורמות לבין ניצבות.

תרגיל 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף-מימדי מעל \mathbb{C} , ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. הראו כי קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו $[T]_B$ משולשת עליונה. רמז: היעזרו במשפטי ז'ורדן וגרס-שמידט.

תרגיל 4. יהי $V = M_2(\mathbb{R})$ עם הבסיס

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

מוצאו מכפלה פנימית על V לפיה B בסיס אורתונורמלי. רמז: עבור בסיס C של V הגדרנו מכפלה פנימית על ידי

$$\langle u, v \rangle_C = \langle [u]_C, [v]_C \rangle_{\text{Std}}$$

וראינו שכל המכפלות הפנימיות על V הן מהצורה הזאת.

תרגיל 5. יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^3 f(i) \bar{g}(i)$$

מוצאו $g \in V$ עבורו $\langle f, g \rangle = f(-1)$ לכל $f \in V$.