

אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 5

אופרטורים על מרחבי מכפלה פנימית

תאריך הגשה: 16.1.2023

תרגיל 1. יהי $V = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(Y^t X)$, ותהי $B \in V$. נגדיר אופרטור

$$\begin{aligned} \Phi_B: V &\rightarrow V \\ A &\mapsto BA \end{aligned}$$

1. חשבו את Φ_B^* .

2. עבור אילו מטריצות B האופרטור Φ_B נורמלי?

3. עבור אילו מטריצות B האופרטור Φ_B צמוד לעצמו?

4. עבור אילו מטריצות B האופרטור Φ_B אורתוגונלי?

תרגיל 2. יהי $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(Y^t X)$, ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ המוגדר על ידי

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16a & 4b - 6c \\ -6b + 13c & 16d \end{pmatrix}$$

מיצאו בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B$ אלכסונית, ומיצאו אופרטור $S \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ צמוד לעצמו עבורו $S^2 = T$.

תרגיל 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב מממד סופי, יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי, ונניח כי 3, 4 ערכים עצמיים של T . הראו שיש $v \in V$ עבורו $\|v\| = \sqrt{2}$ וגם $\|Tv\| = 5$.

תרגיל 4. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב מממד סופי, יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ויהי $a \in \mathbb{C}$ עבורו $|a| \neq 1$.

1. הראו כי אם $T^* = aT$ אז $T = 0$.

2. נניח כי T נורמלי, ויהי $S = T - aT^*$. הוכיחו כי $\ker(T) = \ker(S)$.

תרגיל 5. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב מממד סופי, ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי. יהיו $\lambda \in \mathbb{C}$ ו- $\varepsilon > 0$ ונניח שעבור $v \in V$ מתקיים $\|v\| = 1$ וגם

$$\|Tv - \lambda v\| < \varepsilon$$

הראו כי יש ל- T ערך עצמי $\lambda' \in \mathbb{C}$ עבורו $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$.

תרגיל 6. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$$

1. מיצאו מטריצות $U, V \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$ אוניטריות, ומטריצה $\Sigma \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$ אלכסונית, עבורן $A = U\Sigma V^*$.

2. מיצאו את

$$\max \left\{ \|Av\| \mid \begin{matrix} v \in \mathbb{C}^3 \\ \|v\|=1 \end{matrix} \right\}$$