5 אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית אופרטורים על מרחבי מכפלה פנימית

16.1.2023 :תאריך הגשה

עם המכפלה $B\in V$ ותהי , $\langle X,Y
angle=\mathrm{tr}\,(Y^tX)$ עם המכפלה הפנימית ע $V=\mathrm{Mat}_n\,(\mathbb{R})$ ותהי .1 תרגיל

$$\Phi_B \colon V \to V$$

$$A \mapsto BA$$

- $.\Phi_{R}^{st}$ את חשבו .1
- ?ינורמלי: Φ_B נורמלי: B מטריצות מטריצות עבור אילו
- ?אמוד לעצמו Φ_B צמוד לעצמו מטריצות B מטריצות 3
- אורתוגונלי? אורתוגונלי מטריצות Φ_B אורתוגונליי מטריצות B

תרגיל 2. יהי על דר המנימית $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V
ight)$ ויהי , $\langle X,Y
angle=\mathrm{tr}\left(Y^{t}X
ight)$ המוגדר על ידי $V=\mathrm{Mat}_{2}\left(\mathbb{R}
ight)$ יהי על ידי

$$.T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16a & 4b - 6c \\ -6b + 13c & 16d \end{pmatrix}$$

 $S^2=T$ צמוד לעצמו עבורו צמיט אופרטור אופרטור אופרטור אלכסונית, דורו עבורו עבורו עבורו אלכסונית, אופרטור אופרטור עבורו איכסונית איכסונית, מיצאו צייט אורתונורמלי

 $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V
ight)$ יהי עצמיים עצמיים כפלה פנימית מרוכב ממימד סופי, יהי ונניח כי $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V
ight)$ יהי חרגיל $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V
ight)$ וגם $T\in \mathbb{C}$ ווגם $T\in \mathbb{C}$ ווגם $T\in \mathbb{C}$ ווגם עצמיים של ווגם $T\in \mathbb{C}$ ווגם עצמיים של ווגם בישר שיש עצמיים של ווגם בישר ווגם ב

|a|
eq 1 עבורו $a \in \mathbb{C}$ ויהי $T \in \mathrm{End}_\mathbb{C} (V)$ יהי סופי, יהי מרוכב ממימד פנימית מרוכב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי, יהי

- T=0 אז $T^*=a$ או כי אם .1
- . $\ker\left(T\right)=\ker\left(S\right)$ כי הוכיחו הוכיחו $S=T-aT^*$ נניח כי נורמלי, ויהי.

תרגיל 1. הייו $\lambda\in\mathbb{C}$ ויהי הייו $T\in\mathrm{End}_\mathbb{C}\left(V
ight)$ ווניח ממימד מרחב מכפלה פנימית מרחב מרחב ממימד סופי, ויהי $\|v\|=1$ ווגם עבור $v\in V$

$$\|Tv - \lambda v\| < \varepsilon$$

 $|\lambda-\lambda'|<arepsilon$ עבורו $\lambda'\in\mathbb{C}$ עבור עצמי Tהראו כי יש ל-

תרגיל 6. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{3}(\mathbb{C})$$

- $A=U\Sigma V^*$ אלכסונית, עבורן $\Sigma\in\mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{C}
 ight)$ אוניטריות, ומטריצה $U,V\in\mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{C}
 ight)$ מיצאו מטריצות.
 - 2. מיצאו את

$$\cdot \max \left\{ \|Av\| \mid \substack{v \in \mathbb{C}^3 \\ \|v\| = 1} \right\}$$