



אלגברה ב' (104168)
חורף 2022-2023
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה-27 בדצמבר 2022

תוכן העניינים

1	I חלק ראשון - מרחבים שמורים
2	1 מטריצות מייצגות
2	1.1 הגדרות בסיסיות
8	1.2 גרעין ותמונה
12	2 סכומים ישירים ולכסינות
12	2.1 סכומים ישירים
14	2.2 לכסינות
15	2.3 מרחבים שמורים
19	3 צורת ז'ורדן
19	3.1 אופרטורים נילפוטנטיים
20	3.1.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור אופרטורים נילפוטנטיים
22	3.2 משפט ז'ורדן הכללי
23	3.2.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור אופרטור כללי
27	3.3 הפולינום המינימלי ופירוק פרימרי
30	4 תרגילי חזרה
34	II חלק שני - מרחבי מכפלה פנימית ואלגברה מולטי-לינארית
35	5 מרחבי מכפלה פנימית
35	5.1 מוטיבציה
35	5.2 הגדרות
37	5.3 תכונות של מכפלות פנימיות, ונורמות
39	5.4 מטריקות וניצבות
40	5.5 בסיסים אורתונורמליים והמרחב הניצב
44	6 אופרטורים על מרחבי מכפלה פנימית
44	6.1 המרחב הדואלי, ומשפט ההצגה של ריס
46	6.2 ההעתקה הצמודה
47	6.3 אופרטורים אוניטריים ואורתוגונליים
49	6.4 אופרטורים נורמליים וצמודים לעצמם, ומשפט הפירוק הספקטרלי

חלק I

חלק ראשון - מרחבים שמורים

פרק 1

מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} , יהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V ויהי

$$v \in V \text{ וקטור קואורדינטות של } v \text{ לפי הבסיס } B \text{ הוא הוקטור } [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ כאשר } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \text{ היחידים עבורם}$$
$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i := \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\rho_B: V \rightarrow \mathbb{F}^n$$
$$v \mapsto [v]_B$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל אותו שדה \mathbb{F} עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

נסמן גם $n := \dim(V)$ ו- $m := \dim(W)$. עבור $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E = (e_1, \dots, e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{F}^m . אז:

(i) לכל $i \in [m]$ מתקיים כי Ae_i העמודה ה- i של A .

$$(ii) \text{ לכל } A, B \in \text{Mat}_{n \times \ell}(\mathbb{F}) \text{ או } B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_\ell \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ אז } AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell \\ | & & | \end{pmatrix}$$

תרגיל 1.1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\eta_C^B: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$$
$$T \mapsto [T]_C^B$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ ויהיו $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V ו- C בסיס של W . אז

$$[T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$$

לכל $v \in V$.

הוכחה. עבור $v = v_i$ מתקיים $[T]_C^B e_i = [T]_C^B [v_i]_B = [T]_C^B e_i$ וזאת העמודה ה- i של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה. אם $v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i$ נקבל מלינאריות של T ושל ρ_B כי

$$\begin{aligned} [T(v)]_C &= \left[T \left(\sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right) \right]_C \\ &= \left[\sum_{i \in [n]} \alpha_i T(v_i) \right]_C \\ &= \sum_{i \in [n]} \alpha_i [T(v_i)]_C \\ &= \sum_{i \in [n]} \alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\ &= [T]_C^B \left(\sum_{i \in [n]} \alpha_i [v_i]_B \right) \\ &= [T]_C^B \left[\sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right]_B \\ &= [T]_C^B [v]_B \end{aligned}$$

כנדרש. ■

סימון 1.1.7. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף-מימדי V ואם $T \in \text{End}(V)$ נסמן $[T]_B^B := [T]_B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B .

סימון 1.1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי עם בסיסים B, C . נסמן $M_C^B := [\text{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.9. אם $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ נסמן

$$\begin{aligned} T_A: \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

תרגיל 1.2. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$

ויהי $B = (1, x, x^2, x^3)$ בסיס של V . כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $[T(x^i)]_B$ עבור $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(x) &= x+1 = 1+x \\ T(x^2) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 \\ T(x^3) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T(1)]_B &= e_1 \\ [T(x)]_B &= e_1 + e_2 \\ [T(x^2)]_B &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\ [T(x^3)]_B &= e_1 + 3e_2 + 3e_3 + e_4 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 1.3. יהי $V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, תהי

$$T: V \rightarrow V$$

$$A \mapsto \frac{1}{2}(A - A^t)$$

ויהי

$$E = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V . כיתבו את $[T]_E$.

הוכחה. כמו מקודם, נחשב את $[T(E_{i,j})]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$T(E_{1,1}) = \frac{1}{2}(E_{1,1} - E_{1,1}) = 0$$

$$T(E_{1,2}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}E_{1,2} - \frac{1}{2}E_{2,1}$$

$$T(E_{2,1}) = \frac{1}{2}(E_{2,1} - E_{1,2}) = \frac{1}{2}E_{2,1} - \frac{1}{2}E_{1,2}, T(E_{2,2}) = \frac{1}{2}(E_{2,2} - E_{2,2}) = 0$$

לכן

$$[T(E_{1,1})]_E = 0$$

$$[T(E_{1,2})]_E = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$$

$$[T(E_{2,1})]_E = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3$$

$$[T(E_{2,2})]_E = 0$$

ואז

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

כנדרש.

תרגיל 1.4. יהי $V = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ עם הבסיס $B = (f_1, f_2)$ כאשר

$$f_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x$$

$$f_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = y$$

ותהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

מיצאו $[T]_B = A$ עבור $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$.

פתרון. מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$\begin{aligned} [T(f_1)]_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \cdot [T(f_2)]_B &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} T(f_1) &= f_1 + 2f_2 \\ T(f_2) &= 3f_1 + 4f_2 \end{aligned}$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned} (T(f)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (f_1 + 2f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta (3f_1 + 4f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (x + 2y) + \beta (3x + 4y) \end{aligned}$$

טענה 1.1.10. תהייה $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$ או $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A - B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה- i של $A - B$, שהינה $(A - B)e_i$, שווה ל-0. לכן $A - B = 0$. ■

טענה 1.1.11. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה \mathbb{F} עם בסיסים B, C, D בהתאמה, ותהייה

$$\begin{aligned} S &\in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \\ T &\in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \end{aligned}$$

אז

$$\cdot [T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned} [T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B \end{aligned}$$

לכן

$$\cdot, [T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B$$

■

כנדרש.

טענה 1.1.12. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה \mathbb{F} ותהי $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ חד-חד ערכית. יהיו

$$\begin{aligned} B &= (v_1, \dots, v_n) \\ C &= (u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

בסיסים של V ויהיו

$$\begin{aligned} B' &= (T(v_1), \dots, T(v_n)) \\ C' &= (T(u_1), \dots, T(u_n)) \end{aligned}$$

או B', C' בסיסים של $\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ וגם $M_C^B = M_{C'}^{B'}$.

פתרון. כיוון ש- T חד-חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T: V \xrightarrow{\sim} \text{Im}(T)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן B', C' בסיסים. כעת, לכל $i \in [n]$ נכתוב

$$v_i = \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j$$

ואז

$$M_C^B e_i = [v_i]_C = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} T(v_i) &= T\left(\sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j\right) \\ &= \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} T(u_j) \end{aligned}$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'} e_i = [T(v_i)]_{C'} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

תרגיל 1.5. תהי $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{F}^n . מיצאו בסיס B של \mathbb{F}^n עבורו $A = M_E^B$.

2. מיצאו בסיס C של \mathbb{F}^n עבורו $A = M_C^E$.

3. יהי B בסיס של \mathbb{F}^n . מיצאו בסיס C של \mathbb{F}^n עבורו $A = M_C^B$.

4. יהי V מרחב וקטורי מממד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל \mathbb{F} , יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ איזומורפיזם ויהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V . מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B = A$.

פתרון. 1. אם $B = (v_1, \dots, v_n)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

לכן ניקח את (v_1, \dots, v_n) להיות עמודות A , לפי הסדר.

2. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן $M_C^E = (M_E^C)^{-1}$. אם ניקח $C = (u_1, \dots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה- i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_C^E = A^{-1}$ ולכן $M_C^E = (A^{-1})^{-1} = A$. כלומר ניקח, $u_i = A^{-1} e_i$.

3. מתקיים $M_C^B = M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $M_C^E M_E^B = A$ או במילים אחרות $M_C^B = A (M_E^B)^{-1}$. מהסעיף הקודם, נרצה $C = (u_1, \dots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה- i של $(AM_E^B)^{-1} = M_E^B A^{-1}$, כלומר

$$u_i = M_E^B A^{-1} e_i$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]_{C'}^B = M_{C'}^B [T]_B^B$ לכן נרצה $M_C^B [T]_B^B = A$. כיוון ש- T איזומורפיזם, המטריצה $[T]_B^B$ הפיכה, ולכן נרצה $M_C^B = A \left([T]_B^B\right)^{-1}$. כעת, אם $C = (v_1, \dots, v_n)$ נקבל כי $M_C^B = M_{\hat{C}}^E$ כאשר $\hat{C} = ([v_1]_B, \dots, [v_n]_B)$. כלומר, נחפש \hat{C} עבורו $M_{\hat{C}}^E = A [T]_B^{-1}$. לפי הסעיף השני, נרצה $\hat{C} = (u_1, \dots, u_n)$ עבור

$$u_i = \left(A [T]_B^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i$$

לכן

$$v_i = \rho_B^{-1} ([T]_B A^{-1} e_i)$$

תרגיל 1.6. יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$T: V \rightarrow V, \quad p(x) \mapsto p(x+1)$$

יהי $E = (1, x, x^2, x^3)$ הבסיס הסטנדרטי ותהי $A =$ כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו

$$A = [T]_C^E$$

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C} = (u_1, \dots, u_4)$ כאשר $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$. חישבנו ב-1.2 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2 = I$ כלומר $A^{-1} = A$. נשים לב כי

$$Ae_1 = e_2$$

$$Ae_2 = e_1$$

$$Ae_3 = e_4$$

$$Ae_4 = e_3$$

ואז נקבל

$$\begin{aligned} u_1 &= [T]_E A^{-1} e_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_2 &= [T]_E A^{-1} e_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_3 &= [T]_E A^{-1} e_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_4 &= [T]_E A^{-1} e_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר

$$\hat{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ולבסוף

$$C = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (1+x, 1, 1+3x+3x^2+x^3, 1+2x+x^2)$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן A . מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 = v_2 \\ T(x) &= x+1 = v_1 \\ T(x^2) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 = v_4 \\ T(x^3) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 = v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T]_C^E &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_C & [T(x)]_C & [T(x^2)]_C & [T(x^3)]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

כנדרש.

1.2 גרעין ותמונה

הגדרה 1.2.1 (גרעין של העתקה לינארית). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי $T \in \text{Hom}(V, W)$. הגרעין של T הוא

$$\ker(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

הגדרה 1.2.2 (תמונה של העתקה לינארית). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי $T \in \text{Hom}(V, W)$. התמונה של T היא

$$\text{Im}(T) := \{T(v) \mid v \in V\}$$

הגדרה 1.2.3 (דרגה של אופרטור לינארי). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי $T \in \text{Hom}(V, W)$. הדרגה של T היא

$$\text{rank}(T) := \dim(\text{Im}(T))$$

הערה 1.2.4. אם V, W סוף-מימדיים עם בסיסים B, C בהתאמה, אז

$$\text{rank}(T) = \text{rank}([T]_C^B)$$

משפט 1.2.5 (משפט המימדים). יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי $T \in \text{End}(V)$. אז

$$\dim V = \dim \text{Im}(T) + \dim \ker(T)$$

תרגיל 1.7. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי $v \in V$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את (v) לבסיס $B_0 = (v_1, \dots, v_n)$ של V כאשר $v_1 = v$. תהי

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B = (u_1, \dots, u_n)$ של V עבורו $M_B^{B_0} = A$. נקבל

$$\begin{aligned} [v]_B &= [\text{Id}_V v]_B \\ &= [\text{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת

$$u_i = \rho_{B_0}^{-1}([\text{Id}]_B A^{-1} e_i) = \rho_{B_0}^{-1}(A^{-1} e_i)$$

תרגיל 1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} , ותהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $\text{rank } T = 1$ אם ורק אם יש בסיסים B, C ל- V כך שכל מקדמי $[T]_C^B$ הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים B, C כמתואר. אז $\text{rank } T = \text{rank } [T]_C^B = 1$. מכיוון השני, נניח כי $\text{rank } T = 1$. כלומר, $\dim \text{Im } T = 1$. משפט המימדים מתקיים $\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im } T$, לכן

$$\dim \ker T = \dim V - \dim \text{Im } T = \dim V - 1$$

יהי $n := \dim V$ ויהי

$$\tilde{B} := (u_1, \dots, u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי w וקטור פורש של $\text{Im } T$ ויהי C בסיס של V כך שמתקיים $[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי

$B := T^{-1}(w)$, ואז (v, u_1, \dots, u_{n-1}) בלתי-תלויים לינארית, כי $v \notin \ker T$. לכן זה בסיס של V . אז גם $B := (v, v + u_1, \dots, v + u_{n-1})$ בסיס של V כי המטריצה

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [v]_{\tilde{B}} & \dots & [v + u_{n-1}]_{\tilde{B}} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפיכה.

נסמן $C = (w_1, \dots, w_m)$ מתקיים

$$T(v) = w = w_1 + \dots + w_m$$

ולכל $i \in [n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned} T(v + u_i) &= T(v) + T(u_i) \\ &= T(v) + 0 \\ &= T(v) \\ &= w_1 + \dots + w_m \end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

תרגיל 1.9. תהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(-1) \end{aligned}$$

מיצאו בסיסים B, C של $\mathbb{R}_3[x]$ עבורם

$$[T]_C^B = A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון. ניקח בסיס $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3) := (x+1, x^2-1, x^3+1)$ של $\ker(T)$, כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי-תלויה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי $T \neq 0$). מתקיים $-1 = T(x) = w$ ואז

$$\text{Im}(T) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(w) \quad \text{נחשב בסיס } C \text{ עבורו } [w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ נשלים את } (v) \text{ לבסיס}$$

$$C_0 = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (-1, x, x^2, x^3)$$

המטריצה

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ כפי שראינו, ניתן לחשב הפיכה ולכן קיים בסיס } C = (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ עבורו } M_C^{C_0} = X \text{ כשראינו שאז}$$

את C לפי $u_i = \rho_{C_0}^{-1}(X^{-1}e_i)$ מתקיים

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = -1 - x - x^2 - x^3 \\
 u_2 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x \\
 u_3 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x^2 \\
 u_4 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x^3
 \end{aligned}$$

כלומר, $C = (-1 - x - x^2 - x^3, x, x^2, x^3)$
 ניקח $T(v) = -1 = w$ כך שיתקיים $v = x \in V$ ואז

$$B = (v, v + b_1, v + b_2, v + b_3) = (x, 2x + 1, x^2 + x - 1, x^3 + x + 1)$$

כמו בתרגיל הקודם.
 אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}
 T(x) &= -1 \\
 T(2x + 1) &= -2 + 1 = -1 \\
 T(x^2 + x - 1) &= (-1)^2 - 1 - 1 = 1 - 2 = -1 \\
 T(x^3 + x + 1) &= (-1)^3 - 1 + 1 = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{וגם } [-1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ , לכן}$$

$$, [T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כפי שרצינו.

פרק 2

סכומים ישרים ולכסינות

2.1 סכומים ישרים

הגדרה 2.1.1 (סכום ישר). יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל \mathbb{F} ויהיו $V_1, \dots, V_k \leq V$ תת-מרחבים. נזכיר כי

$$V_1 + \dots + V_k := \{v_1 + \dots + v_k \mid \forall i \in [k]: v_i \in V_i\}$$

נגיד שהסכום הזה הוא סכום ישר אם כל $v \in V_1 + \dots + V_k$ ניתן לכתיבה $v = v_1 + \dots + v_k$ בצורה יחידה עבור $v_i \in V_i$. במקרה זה נסמן את הסכום $\bigoplus_{i \in [k]} V_i = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

הערה 2.1.2. באופן שקול, הסכום $V_1 + \dots + V_k$ ישר אם ורק אם $v_1 + \dots + v_k = 0$ עבור $v_i \in V_i$ גורר $v_i = 0$ לכל $i \in [k]$.

טענה 2.1.3. הסכום $\sum_{i \in [k]} V_i := V_1 + \dots + V_k$ ישר אם ורק אם

$$V_i \cap \left(\sum_{j \neq i} V_j \right) = \{0\}$$

לכל $i \in [k]$.
את המקרה $k = 2$ ראינו בהרצאה, והטענה הכללית נובעת באינדוקציה.

הגדרה 2.1.4 (שרשרות סדורות). תהיינה

$$\begin{aligned} A_1 &= (v_{1,1}, \dots, v_{1,\ell_1}) \\ A_2 &= (v_{2,1}, \dots, v_{2,\ell_2}) \\ &\vdots \\ A_k &= (v_{k,1}, \dots, v_{k,\ell_k}) \end{aligned}$$

קבוצות סדורות. נגדיר את השרשרות שלהן

$$A_1 \cup \dots \cup A_k := (v_{1,1}, \dots, v_{1,\ell_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,\ell_2}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,\ell_k})$$

זאת הקבוצה הסדורה שהיא שרשרת איברי הקבוצות הסדורות A_1, \dots, A_k לפי הסדר.

טענה 2.1.5. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהיו V_1, \dots, V_k תת-מרחבים של V . התנאים הבאים שקולים.

1. $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

2. לכל בחירת בסיסים B_i של V_i הקבוצה הסדורה $B_1 \cup \dots \cup B_k$ היא בסיס של V .

3. קיימים בסיסים B_i של V_i כך שהקבוצה הסדורה $B_1 \cup \dots \cup B_k$ היא בסיס של V .

4. $\dim V = \sum_{i \in [k]} \dim V_i$ וגם

$$\dim V = \sum_{i \in [k]} \dim(V_i)$$

תרגיל 2.1. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} , ונזכיר כי $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקראת הטלה אם $P^2 = P$.

1. תהי $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי $V = \ker(P) \oplus \text{Im}(P)$.

2. הראו כי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה אם ורק אם קיים בסיס B של V עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון. 1. יהי $v \in V$. מתקיים $v = (v - P(v)) + P(v)$ כאשר $P(v) \in \text{Im}(P)$. כמו כן,

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$$

ולכן $v - P(v) \in \ker(P)$ ונקבל כי $V = \ker(P) + \text{Im}(P)$.

כעת, אם $v \in \ker(P) \cap \text{Im}(P)$ בפרט $v \in \text{Im}(P)$ ולכן יש $u \in V$ עבורו $P(u) = v$. אז

$$v = P(u) = P^2(u) = P(P(u)) = P(v) = 0$$

ולכן $\ker(P) \cap \text{Im}(P) = 0$ ונקבל כי הסכום ישר.

2. נניח כי T הטלה. במקרה זה $V = \ker(T) \oplus \text{Im}(T)$. עבור בסיסים

$$C = (c_1, \dots, c_m) \\ D = (d_{m+1}, \dots, d_\ell)$$

של $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$ בהתאמה, נקבל כי $C \cup D$ בסיס של V . לכל $c_i \in C$ מתקיים $T(c_i) = 0$, לכן $\dim(\ker(T))$ העמודות הראשונות של $[T]_{C \cup D}$ הן עמודות אפסים. לכל $d_i \in D$ יש $u_i \in V$ עבורו

$$d_i = T(u_i) = T^2(u_i) = T(T(u_i)) = T(d_i)$$

לכן

$$[T(d_i)]_{C \cup D} = [d_i]_{C \cup D} = e_i$$

ולכן העמודה ה- i עבור $i \geq m$ היא e_i , ונקבל את הנדרש.

להיפך, נניח שקיים בסיס $B = (v_1, \dots, v_n)$ כנ"ל. אז $[T]_B^2 = [T]_B^2 = [T]_B$ ולכן $T^2 = T$ ונקבל כי T הטלה.

הגדרה 2.1.6 (משלים ישר). יהי V מרחב וקטורי ויהי $U \leq V$ תת-מרחב. משלים ישר W של U הוא תת-מרחב של V עבורו $V = U \oplus W$.

תרגיל 2.2. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} ויהי $U \leq V$ תת-מרחב עם בסיס B . יהי C בסיס של V .

1. הראו שניתן להשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ- C .

2. הסיקו שקיים משלים ישר W של U עם בסיס של וקטורים מ- C .

פתרון. 1. נסמן $n := \dim_{\mathbb{F}}(V)$ ונזכיר את הטענה באינדוקציה על $|B|$. $m = n - |B|$.

עבור $m = 0$ מתקיים $|B| = n$ ולכן $U = V$. נניח שהטענה נכונה לכל $k < m$ ונזכיר אותה עבור m .

אם $C \subseteq U$, מתקיים

$$V = \text{Span}_{\mathbb{F}}(C) \subseteq \text{Span}_{\mathbb{F}}(U) = U$$

ולכן $V = U$ בסתירה לכך שהמימדים שונים. לכן, קיים $c \in C \setminus U$. אז $B \cup (c)$ קבוצה בלתי-תלויה לינארית, כי c אינו צירוף לינארי של הווקטורים הקודמים. נגדיר $U' = \text{Span}_{\mathbb{F}}(B \cup (c))$. אז

$$n - \dim(U') = n - |B| - 1 = m - 1 < m$$

ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה ולקבל שניתן להשלים את $B \cup (c)$ לבסיס $(B \cup (c)) \cup (c_2, \dots, c_m)$ של V , כאשר $c_i \in C$. אז $c, c_2, \dots, c_m \in C$ משלימים את B לבסיס של V .

2. בסימונים של הסעיף הקודם, $B \cup (c, \dots, c_m)$ בסיס של V . נסמן $D = (c, c_2, \dots, c_m)$ וגם $W = \text{Span}_{\mathbb{F}}(D)$. אז $B \cup D$ בסיס של V ולכן

$$V = \text{Span}_{\mathbb{F}}(B) \oplus \text{Span}_{\mathbb{F}}(D) = U \oplus W$$

כנדרש.

תרגיל 2.3. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ ותהינה

$$B = (1 + x, x + x^2) \\ C = (1, x, x^2, x^3)$$

קבוצות סדורות של וקטורים מ- V . יהי $U = \text{Span}(B)$.

1. מיצאו משלים ישר W של U ובסיס עבור W שמורכב מוקטורים ב- C .

2. האם W שמצאתם יחיד? הוכיחו או הפריכו.

פתרון. 1. נשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ- C . נוסיף את $1 \notin U$ כדי לקבל $B' = (1 + x, x + x^2, 1)$.

ואז את $x^3 \notin \text{Span}(B')$ כדי לקבל בסיס $B'' = (1 + x, x + x^2, 1, x^3)$ של V .

נסמן $D = (1, x^3)$ וניקח $W = \text{Span}(D)$. אז $B'' = B \cup D$ בסיס, ולכן $V = U \oplus W$, כנדרש.

2. לא. למשל, יכולנו לקחת $B' = (1 + x, x + x^2, x^2)$ ואז $B'' = (1 + x, x + x^2, x^2, x^3)$. במקרה זה היינו מקבלות משלים ישר $\text{Span}(x^2, x^3)$, ששונה מ- W .

2.2 לכסינות

הגדרה 2.2.1 (אופרטור לכסין). אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא לכסין אם קיים בסיס B של V וקיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ עבורם

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

בסיס B כזה נקרא בסיס מלכסן עבור T , והמטריצה $[T]_B$ נקראת מטריצה אלכסונית.

הגדרה 2.2.2. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. וקטור $v \in V \setminus \{0\}$ נקרא וקטור עצמי של T אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \lambda v$. במקרה זה λ נקרא ערך עצמי של T .

הערה 2.2.3. וקטור עצמי של T אם ורק אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \lambda v$. מתקיים $\text{Span}_{\mathbb{F}}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ ולכן באופן שקול $T(v) \in \text{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ ובאופן שקול $T(\alpha v) = \alpha T(v) \in \text{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}$. לכן, וקטור עצמי של T אם ורק אם $\text{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ הינו T -שבור.

הערה 2.2.4. אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הינו לכסין אם ורק אם קיים בסיס של V שמורכב מוקטורים עצמיים של T .

הגדרה 2.2.5 (מרחב עצמי). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי λ ערך עצמי של T . המרחב העצמי של T עם הערך λ הוא

$$V_{\lambda} := \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \text{Id}_V - T)$$

הגדרה 2.2.6 (פולינום אופייני). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הפולינום האופייני של T הוא

$$p_T(x) := \det(x \text{Id}_V - T)$$

הערה 2.2.7. בפועל, נסתכל בדרך כלל על פולינום אופייני של מטריצה, כיוון שצריך לבחור בסיס כדי לחשב את הדטרמיננטה. ראינו כי הדטרמיננטה לא תלויה בבחירת הבסיס, ולכן $p_T(x) = p_{[T]_B}(x)$ לכל בסיס B של V , כאשר $p_A(x) = \det(xI - A)$.

מסקנה 2.2.8. איבר $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\ker(\lambda \text{Id}_V - T) \neq 0$, אם ורק אם $p_T(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_V - T) = 0$.

כלומר, הערכים העצמיים של T הם השורשים של p_T .

הערה 2.2.9. כיוון שלכל פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ יש שורש, לכל $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ יש ערך עצמי.

הגדרה 2.2.10 (ריבוי אלגברי). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי האלגברי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא הריבוי שלו כשורש של p_T . נסמן $r_a(\lambda)$.

הגדרה 2.2.11 (ריבוי גיאומטרי). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא $r_g(\lambda) := \dim V_{\lambda}$.

הערה 2.2.12. מתקיים תמיד $r_a(\lambda) \leq r_g(\lambda)$.

הגדרה 2.2.13. תהי $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ ויהי $T = T_A$ אופרטור כפל ב- A (כלומר, $T(v) = Av$). אם T לכסין, קיים בסיס B עבורו $D := [T]_B$ אלכסונית. אז

$$\begin{aligned} A &= [T]_E \\ &= [\text{Id} \circ T \circ \text{Id}]_E \\ &= M_E^B [T]_B M_B^E \\ &= M_E^B D (M_E^B)^{-1} \end{aligned}$$

ואם נסמן $P = M_E^B$ נקבל כי זאת מטריצה הפיכה עבורה $P^{-1}AP = D$.
לכן, נגיד שמטריצה $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה אם קיימת $P \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $P^{-1}AP$ אלכסונית.

2.3 מרחבים שמורים

נרצה להבין אופרטורים לינאריים דרך הבנה של צמצום שלהם לתת-מרחבים קטנים יותר. אם $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, נוכל תמיד לצמצם את המקור כדי לקבל העתקה לינארית $T|_W : W \rightarrow V$, אבל לא נוכל ללמוד מספיק כאשר הצמצום אינו אופרטור. לכן נרצה לצמצם גם את הטווח, מה שמוביל להגדרה הבאה.

הגדרה 2.3.1 (מרחב שמור). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $U \leq V$. נגיד כי U הינו T -שמור (או T -אינווריאנטי אם $T(U) \subseteq U$).

הגדרה 2.3.2. במקרה ש- W מרחב T -שמור, נוכל להסתכל על הצמצום $T|_W : W \rightarrow W$ שמוגדר על ידי $T|_W(w) = T(w)$.

הערה 2.3.3. שימו לב שהסימון הוא אותו סימון כמו הצמצום של המקור, אך במסגרת הקורס צמצום אופרטורים יתייחס לזה שבהגדרה אלא אם כן יצוין מפורשות אחרת.

תרגיל 2.4. יהיו V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , יהיו $P, T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כאשר P איזומורפיזם. יהי $W \leq V$. הראו כי W הינו T -שמור אם ורק אם $P^{-1}(W)$ הינו $P^{-1} \circ T \circ P$ -שמור.

פתרון. נניח כי W הינו T -שמור ויהי $v \in P^{-1}(W)$. נרצה להראות כי $P^{-1} \circ T \circ P(v) \in P^{-1}(W)$. יהי $w \in W$ עבורו $v = P^{-1}(w)$ אז

$$\begin{aligned} P^{-1} \circ T \circ P(v) &= P^{-1} \circ T \circ P \circ P^{-1}(w) \\ &= P^{-1} \circ T(w) \end{aligned}$$

כאשר $T(w) \in W$ הוא T -שמור. נקבל כי $P^{-1} \circ T \circ P(v) \in P^{-1}(W)$.
בכיוון השני, נניח כי $U := P^{-1}(W)$ הינו $P^{-1} \circ T \circ P$ -שמור. נגדיר $S = P^{-1} \circ T \circ P$, וגם $Q = P^{-1}$. אז $T = Q^{-1} \circ T \circ Q$ וגם $T = Q^{-1}(U) = P(U) = P(P^{-1}(W)) = W$. מהכיוון הראשון, נקבל כי W הינו T -שמור, כלומר $(Q^{-1} \circ T \circ Q)$ -שמור.

תרגיל 2.5. יהי \mathbb{C} כמרחב וקטורי ממשי ויהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned}$$

מצאו את התת-מרחבים ה- T -שמורים של \mathbb{C} והסיקו כי T אינו לכסין מעל \mathbb{R} .

פתרון. $\mathbb{C}, \{0\}$ תת-מרחבים T -שמורים.

נניח כי $W \leq \mathbb{C}$ מרחב T -שמור נוסף. אז $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$ ולכן יש

$$z_0 \in \mathbb{C}^{\times} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

עבורו $W = \text{Span}\{z_0\}$. נקבל $T(z_0) \in W$ לכן $T(z_0) = cz_0$ עבור $c \in \mathbb{R}$. אבל $cz_0 = iz_0$ גורר $c = i$ בסתירה.
תת-מרחבים T -שמורים 1-מימדיים של \mathbb{C} הם $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור v וקטור עצמי של T . לכן אין ל- T וקטורים עצמיים, ולכן הוא אינו לכסין מעל \mathbb{R} .

סימון 2.3.4. עבור מטריצות ריבועיות A_1, \dots, A_k נסמן

$$A_1 \oplus \dots \oplus A_k = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$$

תרגיל 2.6. יהי $V = \mathbb{C}^n$ ותהי

$$T: V \rightarrow V$$

עם

$$[T]_E = \lambda_1 I_{m_1} \oplus \dots \oplus \lambda_k I_{m_k}$$

עבור $\lambda_i \neq \lambda_j$ לכל $i \neq j$. נסמן $n_i = m_1 + \dots + m_{i-1} + 1$. מצאו את כל התת-מרחבים ה- T -שמורים של V .

פתרון. ראשית, אם $W \leq V_i := \text{Span}(e_{n_i}, \dots, e_{n_i+m_i-1})$, נקבל כי $T(w) = \lambda_i w \in W$ לכל $w \in W$. לכן כל תת-מרחב כזה הינו T -שמור. גם סכום של תת-מרחבים כאלה יהיה T -שמור כי אם $v_i \in W_i := W \cap V_i$ לכל $i \in [k]$ אז

$$T(v_1 + \dots + v_k) = T(v_1) + \dots + T(v_k)$$

כאשר $T(v_i) \in W$ וגם $T(v_i) = \lambda_i v_i \in V_i$. כלומר $T(v_i) \in W_i$. נראה שאלו כל האפשרויות לתת-מרחבים שמורים. ראינו בהרצאה כי אם W הינו T -שמור, אז $T|_W$ הינו לכסי. לכן, סכום ישר של המרחבים העצמיים של $T|_W$. לכל ערך עצמי λ , המרחב העצמי W_λ של $T|_W$ הוא החיתוך $V_\lambda \cap W$ כאשר V_λ המרחב העצמי של T . כיוון שעבור אופרטור לכסין המרחב שווה לסכום ישר של המרחבים העצמיים, נקבל כי

$$W = \bigoplus_{i \in [k]} W_{\lambda_i} = \bigoplus_{i \in [k]} W \cap V_{\lambda_i}$$

כנדרש.

הגדרה 2.3.5 (בלוק ז'ורדן). יהי $\lambda \in \mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל m עם ערך עצמי λ בתור

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_m(\mathbb{F})$$

הגדרה 2.3.6 (אופרטור אי-פריד). אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא אי-פריד אם לכל $U, W \leq V$ שהינם T -שמורים ועבורם $U \oplus W = V$, בהכרח $U = \{0\}$, $W = V$ או $U = V$, $W = \{0\}$.

תרגיל 2.7. 1. יהי $T = T_{J_n(0)} \in \text{End}(\mathbb{F}^n)$. מיצאו את המרחבים ה- T שמורים של \mathbb{F}^n .

2. יהי $N \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. הראו שהמרחבים ה- S שמורים של V הם המרחבים ה- $(N + \lambda \text{Id}_V)$ שמורים של V .

3. יהי $S = T_{J_n(\lambda)} \in \text{End}_{\mathbb{F}^n}$. הסיקו מה המרחבים ה- S שמורים של \mathbb{F}^n .

4. הראו כי S הינו אי-פריד.

פתרון. 1. נשים לב כי

$$\begin{aligned} \{0\} \\ \ker(T) &= \text{Span}(e_1) \\ \text{Im}(T) &= \text{Span}(e_1, \dots, e_{n-1}) \\ V &= \text{Span}(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

כולם T -שמורים, כיוון שמרחב האפס, הגרעין, התמונה, והמרחב כולו תמיד T -שמורים. גם, מתקיים

$$\begin{aligned} \forall i > 1: T(e_i) &= e_{i-1} \in \text{Span}(e_1, \dots, e_i) \\ T(e_1) &= 0 \end{aligned}$$

ולכן כל מרחב מהצורה $\text{Span}(e_1, \dots, e_i)$ עבור $i \in \{0, \dots, n\}$ הינו T -שמור. נרצה להראות שהמרחבים ה- T שמורים הם בדיוק אלו מהצורה הזאת.

יהי $W \leq \mathbb{F}^n$ מרחב T -שמור, ויהי $k \in \{0, \dots, n\}$ המקסימלי עבורו $\text{Span}(e_1, \dots, e_k) \subseteq W$ (יש כזה k כיוון שעבור $k=0$ נקבל $\{0\} \subseteq W$). נרצה להראות כי $W = \text{Span}(e_1, \dots, e_k)$.
אחרת, קיים וקטור $v = \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i e_i \in W$ עם $\ell > k$ וגם $\alpha_\ell \neq 0$. אם $\ell = k+1$ נקבל כי $\alpha_i e_i \in W$ לכל $i < \ell$

$$\alpha_\ell e_\ell = v - \sum_{i \in [\ell-1]} \alpha_i e_i \in W$$

וכיוון ש- $\alpha_\ell \neq 0$ אז $e_{k+1} = e_\ell \in W$. במקרה זה $e_1, \dots, e_{k+1} \in W$ ולכן $\text{Span}(e_1, \dots, e_{k+1}) \subseteq W$ בסתירה להנחה.

באופן כללי, מתקיים $T^i(v) \in W$ לכל i . כדי שיתקיים $T^i(e_\ell) = e_{k+1}$ צריך לקחת $\ell - i = k+1$ כלומר $i = \ell - (k+1)$ אז

$$\begin{aligned} T^{\ell-(k+1)}(v) &= \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i T^{\ell-(k+1)}(e_i) \\ &= \sum_{i=\ell-k}^{\ell} \alpha_i e_{i-\ell+k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_{j+\ell-k-1} e_j \in W \end{aligned}$$

ונקבל את הנדרש מהמקרה הקודם $\ell = k+1$.

2. יהי $W \leq V$ תת-מרחב N -שמור. לכל $w \in W$ מתקיים

$$(N + \lambda \text{Id}_V)(w) = N(w) + \lambda w \in W$$

כיוון ש- $N(w), \lambda w \in W$ לכן W הינו $N + \lambda \text{Id}_V$ -שמור.

אם $W \leq V$ תת-מרחב $(N + \lambda \text{Id}_V)$ -שמור, נקבל מהכיוון הראשון שהוא $(N + \lambda \text{Id}_V) + (-\lambda) \text{Id}_V$ -שמור, כלומר N -שמור.

3. מהסעיף הקודם, נקבל כי המרחבים ה- S שמורים הם המרחבים ה- T -שמורים, שהינם אלו מהצורה $\text{Span}_{\mathbb{F}}(e_1, \dots, e_i)$ עבור $i \in \{0, \dots, n\}$.

4. נניח כי יש תת-מרחבים S -שמורים W_1, W_2 עבורם $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$. מהסעיף הקודם, יש $i, j \in \{0, \dots, n\}$ עבורם

$$\begin{aligned} W_1 &= \text{Span}(e_1, \dots, e_i) \\ W_2 &= \text{Span}(e_1, \dots, e_j) \end{aligned}$$

כיוון ש- $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$, בהכרח $e_n \in W_1 + W_2$ ולכן $i = n$ או $j = n$. במקרה הראשון, $W_1 = \mathbb{F}^n, W_2 = \{0\}$ ובמקרה השני $W_1 = \{0\}, W_2 = \mathbb{F}^n$, ובכל מקרה הפירוק הינו טריוויאלי.

דוגמה 2.3.7. יהי $V = \mathbb{C}^4$, ויהי $T = T_{J_4(0)} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. נניח כי $W \leq V$ מכיל

תרגיל 2.8. 1. תהי $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. הוכיחו כי אם ל- T_A אין תת-מרחב שמור מממד 1, יש לו תת-מרחב שמור מממד 2.

2. נניח כי $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ מטריצה שכל מקדמיה ממשיים. הוכיחו כי אם λ ערך עצמי של T_A אז $\bar{\lambda}$ גם ערך עצמי של T_A .

פתרון. עבור מטריצה $A = (a_{i,j}) \in \text{Mat}_{n,m}$ נגדיר

$$\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})$$

את המטריצה שמקדמיה הם המספרים הצמודים לאלו ב- A . נשים לב כי עבור שתי מטריצות $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ ו- $B \in \text{Mat}_{n,\ell}(\mathbb{C})$ מתקיים

$$\begin{aligned} (\overline{AB})_{i,j} &= \overline{\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}} \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k} b_{k,j}} \\ &= (\overline{|A| |B|})_{i,j} \end{aligned}$$

ולכן $\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}$

1. תת-מרחב T_A -שמור מממד 1 הוא מהצורה $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור וקטור עצמי v של T_A . לכן מההנחה, אין ל- T_A וקטורים עצמיים.

אבל, אפשר לחשוב על A כעל מטריצה ב- $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ שנסמנה \tilde{A} . אז ל- $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ יש וקטור עצמי כאופרטור מעל \mathbb{C} . יהי $v \in \mathbb{C}^n$ וקטור עצמי של $T_{\tilde{A}}$ עם ערך עצמי $\lambda = \alpha + i\beta$, ונכתוב

$$v = \begin{pmatrix} u_1 + iw_1 \\ \vdots \\ u_n + iw_n \end{pmatrix} = u + iw$$

כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ וקטורים עם מקדמים ממשיים. נוכל לחשוב עליהם כחיים ב- \mathbb{R}^n . אז

$$\begin{aligned} Au + iAw &= A(u + iw) \\ &= Av \\ &= \lambda v \\ &= (\alpha + i\beta)(u + iw) \\ &= \alpha u + \alpha iw + \beta iu - \beta w \\ &= (\alpha u - \beta w) + i(\alpha w + \beta u) \end{aligned}$$

כאשר $Au, Aw \in \mathbb{R}^n$. אז, נוכל להשוות מקדמים ולקבל

$$\begin{aligned} T_A(u) &= Au = \alpha u - \beta w \in \text{Span}(u, w) \\ T_A(w) &= Aw = \alpha w + \beta u \in \text{Span}(u, w) \end{aligned}$$

לכן $\text{Span}(u, w)$ הינו תת-מרחב L_A -שמור של \mathbb{R}^n .

2. אם λ ממשי אין מה להוכיח כי $\lambda = \bar{\lambda}$. נניח אם כן כי $\lambda = \alpha + i\beta$ עבור $\beta \neq 0$. נסמן ב- $v = u + iw$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ , כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ עם מקדמים ממשיים. אז

$$\bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

ולכן \bar{v} וקטור עצמי של A עם ערך עצמי $\bar{\lambda}$, כנדרש.

פרק 3

צורת ז'ורדן

כדי לבצע חישובים על אופרטורים לינאריים, בדרך כלל יש לקחת בסיס ולערוך את החישובים על המטריצות המייצגות. נרצה לקחת בסיס שיתן לנו מטריצה שתאפשר חישובים פשוטים ככל הניתן: מטריצה אלכסונית. אין לכל אופרטור צורה אלכסונית, אבל, מעל שדה סגור אלגברית יש צורה "כמעט אלכסונית" שנקראת צורת ז'ורדן.

הגדרה 3.0.1. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל m עם ערך עצמי λ בתור

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_m(\mathbb{F})$$

הגדרה 3.0.2 (מטריצת ז'ורדן). מטריצה $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ נקראת מטריצת ז'ורדן אם היא מטריצה אלכסונית בלוקים שכל הבלוקים בה הם בלוקי ז'ורדן.

הגדרה 3.0.3 (בסיס ז'ורדן). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. בסיס ז'ורדן עבור T הוא בסיס B של V עבורו $[T]_B$ מטריצת ז'ורדן.

הגדרה 3.0.4 (שדה סגור אלגברית). שדה \mathbb{F} נקרא סגור אלגברית אם לכל פולינום $p \in \mathbb{F}[x]$ שאינו קבוע יש שורש.

משפט 3.0.5 (משפט ז'ורדן). יהי \mathbb{F} שדה סגור אלגברית, יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל \mathbb{F} ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. קיים בסיס ז'ורדן עבור T , וצורת ז'ורדן של T יחידה עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

בהוכחת משפט ז'ורדן בהרצאה, הסתכלנו קודם כל על אופרטורים שעבורם הערך העצמי היחיד הוא 0, שהינם אופרטורים נילפוטנטיים. נדון תחילה במשפט ז'ורדן עבור אופרטורים אלו.

3.1 אופרטורים נילפוטנטיים

עבור בלוק ז'ורדן $A = J_n(0)$ מתקיים $A^n = 0$, ולכן גם $T_A^n = 0$. נוכל באופן דומה לדבר על אופרטורים כלליים עם תכונה זאת.

הגדרה 3.1.1 (אופרטור נילפוטנטי). אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא נילפוטנטי אם קיים $i \in \mathbb{N}_+$ עבורו $T^i = 0$. הערך k המינימלי עבורו $T^k = 0$ נקרא אינדקס הנילפוטנטיות של T .

התרגיל הבא מראה שאלו בדיוק האופרטורים שמעניינים אותנו כאשר אנו רוצות להתייחס רק לערך עצמי 0.

תרגיל 3.1. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה סגור אלגברית \mathbb{F} , ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. אז T נילפוטנטי אם ורק אם 0 הוא הערך העצמי היחיד של T .

פתרון. נניח כי T נילפוטנטי מאינדקס k , ויהי λ ערך עצמי של T עם וקטור עצמי v . אז $0 = T^k(v) = \lambda^k v$ או $\lambda^k = 0$ ואז $\lambda = 0$. ש- $v \neq 0$ נקבל $\lambda^k = 0$ ואז $\lambda = 0$.

בכיוון השני, נניח כי 0 הוא הערך העצמי היחיד. ממשפט ז'ורדן, קיים בסיס B של V עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}$$

לכל $i \in [k]$ מתקיים $J_{m_i}(0)^{m_i} = 0$ ולכן אם ניקח $m = \max_{i \in [k]} m_i$ נקבל כי

$$[T]_B^m = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0)^m & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(0)^m \end{pmatrix} = 0$$

ואז $T^m = 0$

תרגיל 3.2. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נילפוטנטי מאינדקס k ונסמן $n_i := \dim \ker(T^i)$ לכל $i \in \mathbb{N}$. הראו כי

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k = n$$

פתרון. לכל $v \in \ker(T^i)$ מתקיים $T^{i+1}(v) = 0$ ולכן $\ker(T) \subseteq \ker(T^2) \subseteq \dots \subseteq \ker(T^k) = V$. אם $\ker(T^i) = \ker(T^{i+1})$ נראה כי $T^i = 0$. אחרת, יש $j > i$ עבורו $\ker(T^j) \supsetneq \ker(T^i)$. ניקח j מינימלי כזה וניקח $v \in \ker(T^j) \setminus \ker(T^i)$. נכתוב $j = i + r$.

$$\begin{aligned} T^{i+1}(T^{r-1}(v)) &= T^{i+r}(v) = T^j(v) = 0 \\ T^i(T^{r-1}(v)) &= T^{i+r-1}(v) = T^{j-1}(v) \neq 0 \end{aligned}$$

כאשר $T^0 = \text{Id}_V$ וכאשר $T^{j-1}(v) \neq 0$ כי $T^{j-1}(v) \notin \ker(T^i) = \ker(T^{j-1})$.

תרגיל 3.3. תהי T נילפוטנטית מאינדקס k . הראו שהעתקות $(\text{Id}_V \pm T)$ הפיכות ומצאו את ההופכיות שלהן.

פתרון. אנו יודעים כי

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} r^k = \frac{1}{1-r}$$

עבור $r < 1$. נרצה אם כן שההופכית של $\text{Id}_V - T$ תהיה $\text{Id}_V + T + \dots + T^{k-1}$. אכן,

$$\begin{aligned} (\text{Id}_V - T)(\text{Id}_V + T + \dots + T^{k-1}) &= \sum_{i=0}^{k-1} T^i - \sum_{i=1}^k T^i \\ &= \text{Id}_V - T^k \\ &= \text{Id}_V - 0 \\ &= \text{Id}_V \end{aligned}$$

כעת, אם T נילפוטנטית מאינדקס k גם $-T$ נילפוטנטית מאינדקס k , לכן ההופכית של $\text{Id}_V - (-T)$ היא

$$\text{Id}_V - T + T^2 - T^3 + \dots + (-1)^{k-1} T^{k-1}$$

3.1.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור אופרטורים נילפוטנטיים

הגדרה 3.1.2 (אופרטור הוזה). יהי V מרחב וקטורי עם בסיס $B = (v_1, \dots, v_n)$ ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נגיד כי T אופרטור הוזה ביחס לבסיס B אם מתקיים

$$T(v_i) = \begin{cases} v_{i-1} & i > 1 \\ 0 & i = 1 \end{cases}$$

או באופן שקול אם $[T]_B = J_n(0)$.

כדי למצוא בסיס ז'ורדן עבור אופרטור הוזה, נרצה למצוא וקטור $v \in V$ עבורו $T^n(v) = 0$ אבל $T^{n-1}(v) \neq 0$ ואז $(T^{n-1}(v), T^{n-2}(v), \dots, T(v), v)$ יהיה בסיס ז'ורדן.

תרגיל 3.4. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$$

ויהי $T = T_A \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$ מציאו בסיס ז'ורדן עבור T .

פתרון. מתקיים

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 0$$

ולכן A נילפוטנטית מסדר $3 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$. מתקיים $\ker(T^2) = \text{Span}(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$ כי שני הוקטורים נמצאים בגרעין וכי $\dim \ker(T^2) = 3 - \text{rank}(A^2) = 2$. ניקח $v \in \ker(T^3) \setminus \ker(T^2)$ ואז יתקיים $T^3(v) = 0$ וגם $T^2(v) \neq 0$. למשל, ניקח $v = e_1$, ואת הבסיס

$$(T^2(e_1), T(e_1), e_1) = (e_1 - e_3, e_2 - e_3, e_1)$$

כעת, יתכנו אופרטורים נילפוטנטיים שאינם אופרטורי הזזה. באופן כללי, עבור אופרטורים כאלה, נשלים בסיס של $\ker(T^{k-1})$ לבסיס של $\ker(T^k)$ ונסתכל על השרשראות $(T^{k-1}(v), \dots, T(v), v)$ שמתקבלות מהוקטורים המתאימים. אם שרשור השרשראות מאורך שווה למימד של V , נקבל בסיס ז'ורדן

$$(T^{k-1}(v_1), \dots, T(v_1), v_1, T^{k-1}(v_2), \dots, T(v_2), v_2, \dots, T^{k-1}(v_k), \dots, T(v_k), v_k)$$

אבל, יתכן שזה לא המצב. במקרה זה, נחפש שרשראות קצרות יותר, שיתחילו בוקטורים באיזשהו $v \in \ker(T^i) \setminus \ker(T^{i-1})$ ויהיו מהצורה

$$(T^{i-1}(v), \dots, T(v), v)$$

נראה בהמשך נוסחא לחישוב מספר בלוקי ז'ורדן מכל גודל, וכיוון שכל שרשרת כזאת תתאים לבלוק ז'ורדן, נוכל לדעת בדיוק אילו ערכי i לבדוק.

תרגיל 3.5. יהי $V = \mathbb{C}^7$, יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ אופרטור הזזה ביחס לבסיס הסטנדרטי, ויהי $S = T^3$. מיצאו בסיס ז'ורדן עבור S .

פתרון. נשים לב ראשית שמתקיים

$$S(e_i) = \begin{cases} e_{i-3} & i > 3 \\ 0 & i \leq 3 \end{cases}$$

מתקיים אם כן $S^2(e_7) = e_{7-2 \cdot 3} = e_1 \neq 0$ וגם $S^3 = 0$ ולכן S נילפוטנטי מאינדקס 3. מתקיים $\ker(S^2) = \text{Span}(e_1, \dots, e_6)$. ניקח $e_7 \in \ker(S^3) \setminus \ker(S^2)$ שיתאים לשרשרת ז'ורדן $(S^2(e_7), S(e_7), e_7) = (e_1, e_4, e_7)$. אורך השרשרת הוא 3 ואילו $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^7) = 7$, ולכן יש למצוא עוד שרשראות ז'ורדן. מתקיים $\dim \ker(S^2) - \dim \ker(S) = 6 - 3 = 3$, ואילו השרשרת שמצאנו "תורמת" וקטור יחיד ל- $\ker(S^2) \setminus \ker(S)$, לכן נחפש עוד שני וקטורים כאן, שיפתחו שרשראות נוספות. מתקיים $e_5, e_6 \in \ker(S^2) \setminus \ker(S)$ ושני וקטורים אלו יחד בלתי תלויים בשרשרת (e_1, e_4, e_7) שמצאנו. נשרשור את השרשרת שמצאנו עם השרשראות $(S(e_5), e_5), (S(e_6), e_6)$ ונקבל בסיס ז'ורדן

$$B = (e_1, e_4, e_7, e_2, e_5, e_3, e_6)$$

שעבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_3(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix}$$

נשים לב שהבלוק מגודל 3 מופיע ראשון בדיוק כי השרשרת מאורך 3 היא זאת שכתבנו ראשונה. אם היינו משנות את סדר השרשראות, היה משתנה סדר הבלוקים.

תרגיל 3.6. 1. הראו כי $J_n(\lambda)^t \cong J_n(\lambda)$ מעל \mathbb{C} .

2. הסיקו כי $A \cong A^t$ לכל $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$.

פתרון. 1. נכתוב $T = T_{J_n(\lambda)^t}$ ונרצה למצוא בסיס B עבורו $[T]_B = J_n(\lambda)$. נניח תחילה כי $\lambda = 0$ כשבמקרה זה מתקיים

$$T(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & i < n \\ 0 & i = n \end{cases}$$

אז הבסיס $B = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_2, e_1)$ מקיים את הנדרש.

באופן כללי,

$$T = T_{J_n(0)^t + \lambda I} = T_{J_n(0)^t} + \lambda \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$$

ולכן

$$[T]_B = [T_{J_n(0)^t}]_B + \lambda [\text{Id}_{\mathbb{C}^n}]_B = J_n(0) + \lambda I = J_n(\lambda)$$

ולכן הבסיס B עדיין עובד.

2. ממשפט ז'ורדן, קיימת מטריצה הפיכה $P \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ עבורה $P^{-1}AP = \text{diag } J_{m_1}(\lambda_1), \dots, J_{m_k}(\lambda_k)$ מטריצה אלכסונית בלוקים עם בלוקים $J_{m_i}(\lambda_i)$ או

$$P^t A^t (P^t)^{-1} = \text{diag} \left(J_{m_1}(\lambda_1)^t, \dots, J_{m_k}(\lambda_k)^t \right)$$

כעת, $J_{m_1}(\lambda_1)^t \cong J_{m_1}(\lambda_1)$ ולכן קיימות מטריצות $Q_i \in \text{Mat}_{m_i}(\mathbb{C})$ הפיכות עבורן $Q_i^{-1} J_{m_i}(\lambda_i)^t Q_i = J_{m_i}(\lambda_i)$ ולכן אם נסמן $Q := \text{diag}(Q_1, \dots, Q_n)$ נקבל כי

$$\begin{aligned} Q^{-1} \left(P^t A^t (P^t)^{-1} \right) Q &= Q^{-1} \text{diag} \left(J_{m_1}(\lambda_1)^t, \dots, J_{m_k}(\lambda_k)^t \right) Q \\ &= \text{diag} \left(Q_1^{-1} J_{m_1}(\lambda_1)^t Q_1, \dots, Q_k^{-1} J_{m_k}(\lambda_k)^t Q_k \right) \\ &= \text{diag} \left(J_{m_1}(\lambda_1), \dots, J_{m_k}(\lambda_k) \right) \\ &= P^{-1}AP \end{aligned}$$

כלומר

$$A = (PQ^{-1}P^t) A^t \left((P^t)^{-1} Q P^{-1} \right) = (PQ^{-1}P^t) A^t (PQ^{-1}P^t)^{-1}$$

ולכן $A \cong A^t$

3.2 משפט ז'ורדן הכללי

לאחר שהבנו כיצד למצוא בסיס ז'ורדן עבור אופרטורים נילפוטנטיים, נוכל לדבר על אופרטורים כלליים. אם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, נוכל לכתוב

$$V = V'_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V'_{\lambda_k}$$

כאשר V'_{λ_i} מרחבים עצמיים מוכללים, שהינם T -שמורים. כדי למצוא את הבלוקים עם ערך עצמי λ_i נסתכל על $T|_{V'_{\lambda_i}} - \text{Id}_{V'_{\lambda_i}}$ שהינו אופרטור נילפוטנטי על V'_{λ_i} , וניעזר באלגוריתם למציאת בסיס ז'ורדן למקרה הנילפוטנטי.

הגדרה 3.2.1 (מרחב עצמי מוכלל). יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נסמן $n := \dim_{\mathbb{F}}(V)$. המרחב העצמי המוכלל של $\lambda \in \mathbb{F}$ עבור T הוא

$$V'_\lambda := \ker((T - \lambda \text{Id}_V)^n)$$

משפט 3.2.2 (פירוק למרחבים עצמיים מוכללים). יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה סגור אלגברית, יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ הערכים העצמיים השונים של T . אז V'_λ הינו T -שמור לכל $i \in [k]$, וגם

$$V = \bigoplus V'_{\lambda_i}$$

לפני שנתאר את האלגוריתם הכללי, נזכיר תכונות שראינו בהרצאה.

טענה 3.2.3. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה סגור אלגברית, ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

1. מספר הבלוקים עם ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ בצורת ז'ורדן של T הוא $r_g(\lambda)$, וסכום גדלי הבלוקים עם ערך עצמי λ הוא $r_a(\lambda)$.

2. הבלוק המקסימלי עם ערך עצמי λ בצורת ז'ורדן של T שווה לאינדקס הנילפוטנטיות של $T|_{V'_\lambda} - \text{Id}_{V'_\lambda}$ כאשר V'_λ המרחב העצמי המוכלל של λ עבור T .

3. מספר הבלוקים עם ערך עצמי λ שהינם מגודל לפחות r הוא

$$\dim \ker((T - \lambda \text{Id}_V)^r) - \dim \ker((T - \lambda \text{Id}_V)^{r-1})$$

4. מספר הבלוקים עם ערך עצמי λ מגודל בדיוק r הוא

$$2 \dim \ker((T - \lambda \text{Id}_V)^r) - \dim \ker((T - \lambda \text{Id}_V)^{r+1}) - \dim \ker((T - \lambda \text{Id}_V)^{r-1})$$

3.2.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור אופרטור כללי

יהי V מרחב וקטורי מממד סופי n מעל שדה סגור אלגברית \mathbb{F} , יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, ויהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של T . כדי למצוא בסיס ז'ורדן עבור T נסתכל על כל ערך עצמי בנפרד. לכל ערך עצמי λ האופרטור $T|_{V_\lambda} - \text{Id}_{V_\lambda}$ נילפוטנטי ולכן מהאלגוריתם במקרה הנילפוטנטי נוכל לקבל בסיס ז'ורדן B_λ עבורו. נשרשר את כל הבסיסים הללו ונקבל בסיס ז'ורדן $B = B_{\lambda_1} \cup \dots \cup B_{\lambda_k}$ עבור T .

תרגיל 3.7. ידוע כי כל הערכים העצמיים של

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{C})$$

רציונליים. מצאו צורת ובסיס ז'ורדן עבור A .

פתרון. נסמן $V = \mathbb{C}^6$
חישבו ישיר נותן

$$p_A(x) = \det(xI - A) = x^6 - 15x^5 + 93x^4 - 305x^3 + 558x^2 - 540x + 216$$

ממשפט ניחוש השורש הרציונלי אפשר למצוא את השורשים ולקבל

$$p_A(x) = (x-2)^3(x-3)^3$$

נסתכל על הערכים העצמיים 2, 3 בנפרד.

$\lambda = 3$: מתקיים

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ומרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הוא

$$\ker(T_A - 3\text{Id}_V) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

חישבו ישיר נותן כי

$$\ker((T_A - 3\text{Id}_V)^2) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 \right\}$$

וגם

$$\ker \left((T_A - 3 \text{Id}_V)^3 \right) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3, e_4 \right\}$$

אז, e_4 פותח שרשרת ז'ורדן

$$.B_3 = \left((A - 3I)^2 e_4, (A - 3I) e_4, e_4 \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3, e_4 \right)$$

 $\lambda = 2$: מתקיים

$$\ker (T_A - 2 \text{Id}_V) = \text{Span} \left\{ e_6, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן יש ל-2 ריבוי גיאומטרי 2. אז יש שני בלוקי ז'ורדן עבור העצמי 2, ולכן השרשרת המקסימלית מגודל 2. אפשר לראות כי סכום העמודות של

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

שווה 0, ולכן $e_1 \in \ker \left((T_A - \text{Id}_V)^2 \right)$ ונקבל

$$\ker \left((T_A - \text{Id}_V)^2 \right) = \text{Span} \left\{ e_6, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 \right\}$$

אז e_1 מתחיל שרשרת ז'ורדן

$$.((A - 2I) e_1, e_1) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_1 \right)$$

חסרה שרשרת ז'ורדן מאורך 1 עבור $\lambda = 2$. היא וקטור עצמי של 2 שאינו תלוי ב- $((A - 2I)e_1, e_1)$. למשל, e_6 הוא כזה וקטור עצמי. נקבל בסיס ז'ורדן

$$B_2 := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_1, e_6 \right)$$

של $T|_{V_2}$.

סיכום: נסדר את השרשראות השונות בבסיס ונקבל בסיס ז'ורדן

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3, e_4, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_1, e_6 \right)$$

לפיו

$$[T_A]_B = \text{diag}(J_3(3), J_2(2), J_1(2))$$

נוכיר כי ראינו כיצד לחשב חזקות של בלוק ז'ורדן. המטריצה $J_n(0)^r$ היא מטריצה עם 0 מחוץ לאלכסון ה- r מעל האלכסון הראשי, ו-1 על אלכסון זה (או מטריצת האפס, אם $r \geq n$). כמו כן,

$$J_n(\lambda)^r = \begin{pmatrix} \lambda^r & \binom{r}{1} \lambda^{r-1} & \binom{r}{2} \lambda^{r-2} & \dots & & \\ & \lambda^r & \ddots & & \vdots & \\ & & \ddots & \ddots & \binom{r}{2} \lambda^{r-2} & \\ & & & \ddots & \lambda^r \binom{r}{1} \lambda^{r-1} & \\ & & & & \lambda^r & \end{pmatrix}$$

לכן, חישוב חזקות של מטריצות ז'ורדן הינו פשוט למדי. נוכל להיעזר בו כדי לחשב חזקות של מטריצות כלליות.

תרגיל 3.8. תהי

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

חשבו את A^{2022} .

פתרון. נסמן $V = \mathbb{C}^3$ ונמצא בסיס ז'ורדן B עבור A . אז נקבל $P \in M_3(\mathbb{C})$ עבורה $J := PAP^{-1}$ מטריצת ז'ורדן, ואז

$$A^{2022} = (P^{-1}JP)^{2022} = P^{-1}J^{2022}P$$

כאשר מהחישוב הנ"ל נדע לחשב את J^{2022} .

ערכים עצמיים: ניתן לראות כי 9 ערך עצמי של A כי $Ae_3 = 9e_3$. נסמן ב- λ_1, λ_2 את הערכים העצמיים הנוספים ונקבל

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 9 &= \text{tr}(A) = 9 \\ 9\lambda_1\lambda_2 &= \det(A) = 9(-4 + 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ לכן}$$

נקבל כי 9 ערך עצמי מריבוי אלגברי 1 וכי 0 ערך עצמי מריבוי אלגברי 2. בפרט, (e_3) שרשרת ז'ורדן עבור הערך העצמי 0.

שרשרת ז'ורדן עבור $\lambda = 0$: ניתן לראות כי $r(A) = 2$ ולכן $\dim \ker(T_A) = 1$. נשים לב כי

$$2e_1 - e_2 - e_3 \in \ker(L_A)$$

ולכן

$$\ker(T_A) = \text{Span}(2e_1 - e_2 - e_3)$$

מתקיים

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 81 & 81 & 81 \end{pmatrix}$$

לכן נוכל להשלים את $(2e_1 - e_2 - e_3)$ לבסיס

$$(2e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3)$$

של $\ker(T_A^2)$. מתקיים

$$A(e_1 - e_3) = 2e_1 - e_2 - e_3$$

לכן נקבל שרשרת ז'ורדן

$$(A(e_1 - e_3), e_1 - e_3) = (2e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3)$$

מסקנה: קיבלנו

$$B := (2e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3, e_3)$$

עבור

$$[T_A]_B = J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$A = [T_A]_E = [\text{Id}_V]_E^B [T_A]_B [\text{Id}_V]_B^E$$

נסמן

$$P := [\text{Id}_V]_E^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

שעמודותיה הן וקטורי הבסיס B , ונקבל

$$A = PJP^{-1}$$

אז

$$\begin{aligned} A^{2022} &= PJ^{2022}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9^{2022} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9^{2022} & 9^{2022} & 9^{2022} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.3 הפולינום המינימלי ופירוק פרימרי

כאשר V מרחב וקטורי מעל שדה סגור אלגברית \mathbb{F} , ו- $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, ראינו כי V הינו סכום ישר של המרחבים העצמיים המוכללים של T .

$$V = V'_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V'_{\lambda_k}$$

כאן

$$V'_{\lambda} = \ker((T - \lambda \text{Id}_V)^{r_i})$$

עבור ערכים שלמים r_i . נקבל כי עבור $p(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{r_k}$ מתקיים $p(T) = 0$, וכי כל פולינום q עבורו $q(T) = 0$ הוא כפולה של p .

הגדרה 3.3.1 (פולינום מינימלי). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הפולינום המינימלי של T הוא הפולינום $m_T \in \mathbb{F}[x]$ המתוקן מהמעלה המינימלית עבורו $m_T(T) = 0$.

טענה 3.3.2. הפולינום המינימלי קיים, ואם $q(T) = 0$ אז $q \mid m_T$.

דוגמה 3.3.3. במקרה שיש ל- T צורת ז'ורדן (למשל, אם השדה סגור אלגברית), הפולינום המינימלי יהיה בדיוק

$$m_T(x) = \prod_{i \in [k]} (x - \lambda_i)^{r_i}$$

כאשר λ_i הערכים העצמיים, ו- r_i גודל הבלוק המקסימלי עם ערך עצמי λ_i . אכן, אם $J_{m_i}(\lambda_i)$ בלוק בצורת ז'ורדן של T , נקבל $m_T(J_{m_i}(\lambda_i)) = 0$ כי אחד הגורמים בכפל הזה הוא

$$(J_{m_i}(\lambda_i) - \lambda_i I_{m_i})^{r_i} = J_{m_i}(0)^{r_i} = 0$$

אם היה איזהשהו $r_j < m_j$ היה מתקבל

$$m_T(J_{m_j}(\lambda_j)) = \prod_{i \in [k]} (J_{m_j}(\lambda_j) - \lambda_i I_{m_j})^{r_i}$$

כאשר $J_{m_j}(\lambda_j) - \lambda_i I_{m_j}$ הפיכה לכל $i \neq j$ ונילפוטנטית מאינדקס m_i שגדול מ- r_i כאשר $j = i$. לכן במקרה זה היה מתקבל $m_T(J_{m_j}(\lambda_j)) \neq 0$ ולכן לא יתכן ש- $J_{m_j}(\lambda_j)$ בלוק בצורת ז'ורדן של T , בסתירה.

דוגמה 3.3.4. נניח כי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם פולינום אופייני $p_T(x) = x(x-1)$ או $m_T \mid p_T$ כי $p_T(T) = 0$ ממשפט קיילי-המילטון. מההנחה על הפולינום האופייני, יש וקטורים עצמיים v_0, v_1 עם ערכים עצמיים 0, 1 בהתאמה. אם $m_T(x) = x$ נקבל

$$0 = m_T(T)(v_1) = T(v_1) = v_1$$

בסתירה. אם $m_T(x) = x - 1$ נקבל

$$0 = m_T(T)(v_0) = (T - \text{Id}_V)(v_0) = T(v_0) - v_0 = -v_0$$

בסתירה. לכן $m_T(x) = x(x-1)$

באופן כללי, יותר, אם

$$p_T(x) = \prod_{i \in [k]} g_i^{r_i}$$

פירוק לגורמים אי-פריקים זרים, נקבל כי

$$m_T(x) = \prod_{i \in [k]} g_i^{s_i}$$

עבור $s_i \in [r_i]$. בפרט, כאשר הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינארים נקבל כי $m_T(x) = p_T(x)$.

תרגיל 3.9. יהי $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ותהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יהי $m \in \mathbb{N}_+$ עבורו $T^m = \text{Id}_V$. הראו כי T לכסין.

פתרון. כדי להראות ש- T לכסין מספיק להראות שכל שורשי m_T הינם מריבוי 1. מההנחה, מתקיים $m_T \mid (x^m - 1)$ ולכן די להראות שכל שורשי $x^m - 1$ הם מריבוי 1. אכן, יש לפולינום זה m שורשים שונים

$$\left\{ e^{\frac{2\pi i k}{m}} \mid k \in [m] \right\} = \left\{ \text{cis} \left(\frac{2\pi k}{m} \right) \mid k \in [m] \right\}$$

תרגיל 3.10. 1. יהיו $A, B \in M_6(\mathbb{C})$ המקיימות

$$p_A = p_B \quad (\text{i})$$

(ii) $m_A = m_B$ וזהו פולינום ממעלה 5.

הראו כי $A \sim B$.

2. מצאו $A, B \in M_6(\mathbb{C})$ שאינן דומות וכך שמתקיים

$$p_A = p_B \quad (\text{i})$$

(ii) $m_A = m_B$ וזהו פולינום ממעלה 4.

פתרון. 1. נתון $\deg m_A = 5$, וזהו סכום גדלי הבלוקים המקסימליים של הערכים העצמיים השונים של A . לכן יש ערך עצמי λ מריבוי גיאומטרי 2 ובלוק מגודל 1, וכל ערך עצמי אחר הוא מריבוי גיאומטרי 1. אז

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_m(\lambda_1) & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & J_{m_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

נתון $m_A = m_B$ לכן באותו אופן

$$B \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_m(\lambda_1) & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & J_{m_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

ונסיק כי $A \sim B$.

2. נסתכל על

$$A := \begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_4(0) \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & & \\ & & J_4(0) \end{pmatrix}$$

ונקבל $m_A = m_B = x^4$ אבל $A \not\sim B$ כי יש להן צורת ז'ורדן שונה.

מעל שדה כללי, יתכן שלא תהיה צורת ז'ורדן. במקרה זה, במקום פירוק למרחבים עצמיים מוכללים, נקבל פירוק כללי היותר הנקרא פירוק פרימרי.

משפט 3.3.5 (פירוק פרימרי). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$

$$m_T = \prod_{i \in [k]} p_i^{r_i}$$

פירוק של הפולינום המינימלי m_T של T לגורמים אי-פריקים (כלומר, אם $p_i = f \cdot g$, לפחות אחד מבין f, g קבוע). לכל $i \in [k]$ יהי $V_i := \ker(p_i^{r_i}(T))$ מתקיים

$$V = \bigoplus_{i \in [k]} V_i$$

וההטלות על V_i נתונות על ידי פולינומים ב- T .

הרבה תרגילים מעניינים על פירוק פרימרי מצריכים שימוש בפולינום מינימלי ביחס לוקטור, לכן נגדיר זאת לפני שנעבור לתרגיל.

הגדרה 3.3.6 (פולינום מינימלי ביחס לוקטור). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $v \in V$. הפולינום המינימלי של T ביחס לוקטור v , שסומן $m_{T,v}$, הוא הפולינום המתוקן מהמעלה המינימלית עבורו $m_{T,v}(T)(v) = 0$.

עובדה 3.3.7. בדומה לתכונה של m_T , אם $p(T)(v) = 0$ או $p \mid m_{T,v}$.

מסקנה 3.3.8. תמיד מתקיים $m_T(T)(v) = 0$ כי $m_T(T) = 0$, לכן $m_{T,v} \mid m_T$.

תרגיל 3.11. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} , ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם פולינום מינימלי $g_i^{r_i}$ $i \in [k]$. $m_T = \prod_{i \in [k]} g_i^{r_i}$ עבור אי-פריקים זרים. יהי

$$V = \bigoplus_{i \in [k]} W_i = \bigoplus_{i \in [k]} \ker(g_i(T))^{r_i}$$

הפירוק הפרימרי של V שמתאים ל- T ויהי $W \leq V$ תת-מרחב T -שמור. הראו שמתקיים

$$W = \bigoplus_{i \in [k]} (W \cap W_i)$$

פתרון. מתקיים

$$m_T(T|_W) = m_T(T)|_W = 0$$

ולכן $m_{T|_W} \mid m_T$. נקבל כי

$$m_{T|_W} = \prod_{i \in [k]} g_i^{s_i}$$

עבור שלמים אי-שליליים s_1, \dots, s_k . הפולינומים g_i זרים ולכן זהו פירוק לגורמים אי-פריקים של $m_{T|_W}$. ממשפט הפירוק הפרימרי נקבל כי

$$W = \bigoplus_{i \in [k]} \ker(p_i(T|_W)^{s_i})$$

נראה כי $\ker(p_i(T|_W)^{s_i}) = W \cap W_i$ כי $\ker(p_i(T|_W)^{s_i}) = W \cap W_i$ את הנדרש.

- יהי $v \in \ker(g_i(T|_W)^{s_i})$ או $v \in W$ ומתקיים

$$g_i(T)^{r_i}(v) = g_i(T)^{r_i-s_i} \underbrace{g_i(T)^{s_i}(v)}_{=0} = 0$$

לכן גם $v \in \ker(g_i(T)^{r_i}) = W_i$ ולכן $v \in W \cap W_i$.

- יהי $v \in W \cap W_i$. אז $g_i(T)^{r_i}(v) = 0$. מתקיים תמיד $m_{T|_W, v} \mid m_{T|_W}$ ומהנ"ל $g_i^{r_i} \mid m_{T|_W, v}$. לכן, $m_{T|_W} \mid g_i^{s_i}(T|_W)v$ כי זאת החזקה הכי גדולה של g_i ב- $m_{T|_W}$. לכן $0 = g_i(T|_W)^{s_i}(v)$ כלומר $v \in \ker(g_i(T|_W)^{s_i})$.

מסקנה 3.3.9. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם צורת ז'ורדן $[T]_B = \text{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), \dots, J_{m_k}(\lambda_k))$ עבור λ_i שונים. אם $W \leq V$ הינו T -שמור נקבל כי

$$W = \bigoplus_{i \in [k]} (W \cap V'_{\lambda_i})$$

לאופרטור $T|_{V'_{\lambda_i}}$ יש ערך עצמי יחיד λ_i וצורת ז'ורדן $J_{m_i}(\lambda_i)$ לפי החלק המתאים בבסיס. אם נכתוב

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_k$$

כאשר

$$B_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,r_i}) = ((T - \lambda_i)^{r_i-1}(v_i), \dots, (T - \lambda_i)(v_i), v_i)$$

בסיס של V'_{λ_i} נקבל מתרגיל שראינו (או נראה בגיליון התרגילים) כי המרחבים השמורים של $T|_{V'_{\lambda_i}}$ הם אלו מהצורה $\text{Span}(b_{i,1}, \dots, b_{i,m})$

עבור $m \in \{0, \dots, r_i\}$. כיוון ש- $\bigoplus_{i \in [k]} (W \cap W_i)$ הינו T -שמור אם ורק אם כל אחד מהגורמים הינו $T|_{V'_{\lambda_i}}$ -שמור, נקבל כי המרחבים השמורים הם אלו מהצורה

$$\text{Span}(b_{1,1}, \dots, b_{1,m_1}, b_{2,1}, \dots, b_{2,m_2}, \dots, b_{k,1}, \dots, b_{k,m_k})$$

עבור ערכים $m_i \in \{0, \dots, r_i\}$.

פרק 4

תרגילי חזרה

תרגיל 4.1. יהי $V = \mathbb{C}_n[x]$ ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ המוגדר על ידי $T(p)(x) = p(x+1)$.

1. מיצאו את צורת ז'ורדן של T .

2. נניח כי $n = 3$. מיצאו בסיס מז'ורדן עבור T .

3. נניח עדיין כי $n = 3$. מיצאו את כל התת-מרחבים ה- T -שמורים של V .

פתרון. 1. כדי למצוא את צורת ז'ורדן נצטרך קודם כל למצוא ערכים עצמיים. נתחיל בחיפוש מטריצה מייצגת. יהי $E = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ הבסיס הסטנדרטי של V . העמודה ה- i של $[T]_E$ היא $[T(x^{i-1})]_E$. לפי הבינום של ניוטון מתקיים

$$T(x^i) = (x+1)^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x^j$$

זה וקטור מהצורה $x^i + v$ עבור $v \in \text{Span}(1, x, \dots, x^{i-1})$. לכן, המטריצה $[T]_E$ הינה משולשת עליונה עם 1 על האלכסון. כיוון שהערכים העצמיים של מטריצה משולשת עליונה הם ערכי האלכסון, נקבל כי 1 ערך עצמי יחיד מריבוי n . אלגברי n .

כעת, המקדם $\binom{i}{j}$ תמיד שונה מאפס בסכום הנ"ל ולכן כל האיברים מעל האלכסון במטריצה $[T]_E$ שונים מאפס. נקבל כי $\text{rank}([T]_E - 1 \cdot I_n) = n - 1$ ולכן $\text{rank}([T]_E - I_n) = 1$ וראינו כי מספר הבלוקים בצורת ז'ורדן עם ערך עצמי λ שווה לריבוי הגיאומטרי של λ , ולכן אצלנו יש בלוק יחיד $J_n(1)$ בצורת ז'ורדן של T .

2. מצאנו כי בצורת ז'ורדן של T יש בלוק יחיד עם ערך עצמי 1. לכן $T - \text{Id}_V$ אופרטור הווה, ונחפש וקטור $v \in V$ שיתן בסיס ז'ורדן $((T - \text{Id}_V)^3(v), (T - \text{Id}_V)^2(v), (T - \text{Id}_V)(v), v)$. כדי למצוא וקטור כזה, נשלים בסיס של $\ker(T - \text{Id}_V)^3$ של V . מתקיים

$$[T - \text{Id}_V]_E = \begin{pmatrix} 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} \\ 0 & 0 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T - \text{Id}_V]_E^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון המערכת ההומוגנית $[T - \text{Id}_V]_E^3 \vec{b} = 0$ הוא $\text{Span}(e_1, e_2, e_3)$ ולכן

$$\ker(T - \text{Id}_V) = \rho_B^{-1}(\text{Span}(e_1, e_2, e_3)) = \text{Span}(1, x, x^2)$$

נשלים את הבסיס $(1, x, x^2)$ של גרעין זה לבסיס E של V על ידי הוספת x^3 , ונקבל בסיס ז'ורדן

$$((T - \text{Id}_V)^3(x^3), (T - \text{Id}_V)^2(x^3), (T - \text{Id}_V)(x^3), x^3)$$

נחשב את כל הוקטורים בבסיס:

$$\begin{aligned}(T - \text{Id}_V)(x^3) &= (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \\ (T - \text{Id}_V)^2(x^3) &= (T - \text{Id}_V)(3x^2 + 3x + 1) \\ &= 6x + 6 \\ (T - \text{Id}_V)^3(x^3) &= (T - \text{Id}_V)(6x + 6) = 6\end{aligned}$$

3. קיבלנו כי $[T]_B = J_4(1)$. ראינו בסעיף 3 של תרגיל 2.7 שבמקרה זה המרחבים ה- T -שמורים הם מהצורה $B = (b_1, \dots, b_4)$ עבור $i \in \{0, \dots, 4\}$ וכאשר $B = (b_1, \dots, b_4)$.
אצלנו נקבל כי המרחבים ה- T -שמורים הם

$$\begin{aligned}\{0\} \\ \text{Span}(6) &= \text{Span}(1) \\ \text{Span}(6, 6x + 6) &= \text{Span}(1, x) \\ \text{Span}(6, 6x, 3x^2 + 3x + 1) &= \text{Span}(1, x, x^2) \\ \text{Span}(6, 6x, 3x^2 + 3x + 1, x^3) &= V\end{aligned}$$

תרגיל 4.2. 1. מיצאו את צורת ז'ורדן של האופרטור

$$\begin{aligned}T: \mathbb{C}_n[x] &\mapsto \mathbb{C}_n[x] \\ p(x) &\mapsto p(x) + p''(x)\end{aligned}$$

2. נניח כעת כי $n = 5$, נסמן $V = \mathbb{C}_5[x]$ ויהי

$$\begin{aligned}S: V &\rightarrow V \\ p(x) &\mapsto p(x) + p''(x) + p'''(x)\end{aligned}$$

האם קיים אופרטור $M \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הפיך עבורו $M^{-1}SM = T$? הוכיחו את תשובתכן.

פתרון. 1. נתחיל בחיפוש ערכים עצמיים. נסמן ראשית $V = \mathbb{C}_n[x]$ ונשים לב כי $(T - \text{Id}_V)(p) = p''$. זה אופרטור נילפוטנטי כי הנגזרת ה- $n+1$ מתאפסת.

אז $(T - \text{Id}_V)^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} = 0$ אבל $(T - \text{Id}_V)^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil - 1} \neq 0$ כי הנגזרת ה- n לא מתאפסת, למשל $\frac{d}{dx}x^n = n! \neq 0$.
לכן $T - \text{Id}_V$ נילפוטנטי מאינדקס $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

כיוון שאינדקס הנילפוטנטיות שווה לגודל הבלוק המקסימלי בצורת ז'ורדן, נקבל שיש בלוק מגודל $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. כעת, $\ker(T - \text{Id}_V) = \text{Span}(1, x)$ תת-מרחב דו-מימדי. מספר הבלוקים בצורת ז'ורדן של T עם ערך עצמי λ שווה $r_g(\lambda)$, ולכן יש במקרה שלנו בדיוק שני בלוקים. לכן יש בלוק נוסף מגודל $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = n+1 - \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ ובסך הכל

$$\text{צורת ז'ורדן של } T \text{ היא } \begin{pmatrix} J_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}(1) & \\ & J_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(1) \end{pmatrix}$$

2. כמו מקודם, גם $S - \text{Id}_V$ אופרטור נילפוטנטי, ולכן 1 ערך עצמי יחיד של S . אם $D(p) = p'$ מתקיים

$$(S - \text{Id}_V)^2 = (D^2 + D^3)^2 = D^4 + 2D^5 + D^6$$

זוה שונה מאפס למשל כי

$$(D^4 + 2D^5)(x^5) = 5!(x+2) \neq 0$$

אבל,

$$(S - \text{Id}_V)^3 = (D^2 + D^3)^3 = (D^4 + 2D^5)(D^2 + D^3) = D^6 + D^7 + 2(D^7 + D^8) = 0$$

כי $D^6 = 0$. לכן $S - \text{Id}_V$ נילפוטנטי מאינדקס 3 ולכן גודל הבלוק המקסימלי הוא 3 כי זה שווה לאינדקס הנילפוטנטיות. כמו מקודם, $\ker(S - \text{Id}_V) = \text{Span}(1, x)$, ולכן יש בסך הכל שני בלוקים, ונקבל כי צורת ז'ורדן

$$\text{של } S \text{ היא } \begin{pmatrix} J_3(1) & \\ & J_3(1) \end{pmatrix}$$

זאת בדיוק אותה צורת ז'ורדן כמו של T , ונסמנה J . יהיו בסיסים B, C של V עבורם $[T]_B = [S]_C = J$. מתקיים

$$\begin{aligned}J &= [T]_B = (M_E^B)^{-1} [T]_E M_E^B \\ J &= [S]_C = (M_E^C)^{-1} [S]_E M_E^C\end{aligned}$$

ולכן מהשוואת האגפים הימנים מתקיים

$$[T]_E = (M_E^B) (M_E^C)^{-1} [S]_E M_E^C (M_E^B)^{-1}$$

ידוע כי $(M_E^B)^{-1} = M_B^E$ ולכן

$$\begin{aligned} [T]_E &= (M_B^E)^{-1} (M_E^C)^{-1} [S]_E M_E^C M_B^E \\ &= (M_E^C M_B^E)^{-1} [S]_E (M_E^C M_B^E) \end{aligned}$$

נסמן $P = M_E^C M_B^E$ ויהי $M \in \text{End}(V)$ אופרטור עבורו $[P]_E = M$. אז הפיך כי P הפיכה. מתקיים

$$[M^{-1}SM]_E = [M^{-1}]_E [S]_E [M]_E = P^{-1} [S]_E P = [T]_E$$

ולכן גם $M^{-1}SM = T$.

תרגיל 4.3. תהי $N \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ נילפוטנטית מאינדקס k . הראו כי $I - N, I + N$ שניהן הפיכות, ומצאו את ההופכית של כל אחת מהן.

רמז: המטריצות ההופכיות הינן פולינומים ב- N .

פתרון. נסתכל תחילה על $I - N$. כדי לנחש פולינום ב- N שיהיה המטריצה ההופכית, נזכר שעבור $|r| < 1$ מתקיים $(I - N)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} r^i$ (זה טור גיאומטרי). כיוון שאצלנו $N^i = 0$ לכל $i \geq k$, ננחש כי $(I - N)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} N^i$. אכן,

$$\begin{aligned} (I - N) \left(\sum_{i=0}^{k-1} N^i \right) &= \sum_{i=0}^{k-1} N^i - N \cdot \sum_{i=0}^{k-1} N^i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} N^i - \sum_{i=0}^{k-1} N^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} N^i - \sum_{j=1}^k N^j \\ &= N^0 - N^k \\ &= N^0 \\ &= I \end{aligned}$$

כעת, $-N$ גם היא נילפוטנטית מאינדקס k . לכן נוכל להחליף את N ב- $-N$ בביטוי של המטריצה ההופכית, כדי לקבל את ההופכית של $I + N = I - (-N)$. נקבל כי

$$(I + N)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i$$

תרגיל 4.4. תהיינה $A, B \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ מטריצות שכל הערכים העצמיים שלהן חיוביים. לכל $t \in [0, 1]$ נסתכל על המטריצה $X_t := (1 - t)A + tB$. תהי

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \det(X_t) \end{aligned}$$

יהיו $a, b \in [0, 1]$ עבורם

$$\begin{aligned} a &< b \\ f(a) &< 0 \\ f(b) &> 0 \end{aligned}$$

הראו כי $f(c) \geq 0$ לכל $c > b$.

פתרון. כיוון שהדטרמיננטה של מטריצה שווה למכפלת הערכים העצמיים שלה, מתקיים $\det(A) = \det(B) > 0$. לכן $f(0) = f(1) > 0$.

כעת, הדטרמיננטה של מטריצה $n \times n$ היא ביטוי פולינומיאלי ממעלה n במקדמים, לכן $f(x) = \det((1 - x)A + xB)$ פולינום ממעלה לכל היותר 3. ממשפט ערך הביניים, יש $t_1 \in [0, a]$ עבורו $f(t_1) = 0$ ויש $t_2 \in [a, b]$ עבורו $f(t_2) = 0$. נניח בדרך השלילה שיש $c \in (b, 1]$ עבורו $f(c) < 0$. מערך הביניים, יש $t_3 \in (b, c)$ וגם $t_4 \in (c, 1]$ עבורם $f(t_3) = f(t_4) = 0$. אז ל- f יש ארבעה שורשים שונים, אך זהו פולינום ממעלה 3 ולכן $f(t) \equiv 0$ בסתירה להנחה $f(a) < 0$.

תרגיל 4.5. תהיינה $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ עבורן $AB = BA = 0$, וגם

$$\begin{aligned}\det(2A^2 + B^2) &= 2 \\ \det(A^2 - B^2) &= 3 \\ \det(2A^3 - B^3) &= 6.\end{aligned}$$

חשבו את $\det(A + B)$.

פתרון. ננסה להיעזר בתכונה $\det(XY) = \det(X)\det(Y)$. מתקיים $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ וגם $2A^2 + B^2 = (A + B)(2A + B)$. נקבל כי $\det(A + B)\det(A - B) = 2$ וגם $\det(A + B)\det(2A + B) = 3$, ולכן $\det(A - B) = \frac{2}{3}\det(2A + B)$. כלומר $\frac{\det(A - B)}{\det(2A + B)} = \frac{2}{3}$. כעת, $2A^3 - B^3 = (A + B)(A - B)(2A + B)$. נציב את הנ"ל ונקבל

$$\begin{aligned}6 &= \det(2A^3 - B^3) \\ &= \det(A + B)\det(A - B)\det(2A + B) \\ &= \frac{2}{3}\det(A + B)\det(2A + B)^2\end{aligned}$$

לכן

$$\det(A + B)\det(2A + B)^2 = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$$

אבל אז

$$9 = \det(A + B)\det(2A + B)^2 = 3 \cdot \det(2A + B)$$

כי $\det(A + B)\det(2A + B) = 3$. מחלוקת שני האגפים נקבל כי $\det(2A + B) = 3$ ומהצבת זאת בשוויון הקודם נקבל $\det(A + B) = \frac{3}{3} = 1$.

תרגיל 4.6. יהי V מרחב וקטורי מממד $n > 0$ ותהי

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k = n$$

סדרת מספרים.

1. נניח כי $n_i - n_{i-1}$ מונוטונית יורדת (לאו דווקא ממש). הראו שיש העתקה $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה

$$n_i = \dim \ker(T^i)$$

לכל $i \in [k]$.

2. נניח כי יש $i \in [k]$ עבורו $n_{i+1} - n_i > n_i - n_{i-1}$. הראו שאין העתקה $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה

$$n_i = \dim \ker(T^i)$$

לכל $i \in [k]$.

פתרון. 1. יהי B בסיס של V . נגדיר אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורו $[T]_B$ היא מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית בה מספר הבלוקים מגודל לפחות i הוא $n_i - n_{i-1}$, כאשר נסמן $n_0 = 0$. זה אפשרי כי מכך שזאת סדרה מונוטונית יורדת. ראינו שמספר הבלוקים מגודל לפחות i בצורת ז'ורדן של T הוא $\dim \ker(T^i) - \dim \ker(T^{i-1})$. כעת ניתן להוכיח את הטענה באינדוקציה. מספר הבלוקים מגודל לפחות 1 הוא $n_1 = \dim \ker(T^1)$. אם הראנו $\dim \ker(T^j) = n_j$ לכל $j < k$ נכתוב

$$\dim \ker(T^k) - \dim \ker(T^{k-1}) = n_k - n_{k-1}$$

כאשר מההנחה $\dim \ker(T^{k-1}) = n_{k-1}$ ולכן מצמצום המשוואה נקבל $\dim \ker(T^k) = n_k$, כנדרש.

2. מספר הבלוקים מגודל לפחות i בצורת ז'ורדן של T הוא $\dim \ker(T^i) - \dim \ker(T^{i-1})$. נניח בדרך השלילה שיש עבורם $n_j = \dim \ker(T^j)$ ושיש $i \in [k]$ עבורו $n_{i+1} - n_i > n_i - n_{i-1}$. נקבל כי

$$\dim \ker(T^{i+1}) - \dim \ker(T^i) > \dim \ker(T^i) - \dim \ker(T^{i-1})$$

כלומר, מספר הבלוקים מגודל לפחות $i + 1$ גדול ממספר הבלוקים מגודל לפחות i . אבל, זה לא יתכן, כי בלוק מגודל לפחות $i + 1$ הוא גם מגודל לפחות i , לכן קיבלנו סתירה.

חלק II

**חלק שני - מרחבי מכפלה פנימית ואלגברה
מולטי-לינארית**

פרק 5

מרחבי מכפלה פנימית

5.1 מוטיבציה

נסתכל תחילה על המרחב הוקטורי \mathbb{R}^n . כיוון שנוכל לחשוב על וקטורים ב- \mathbb{R}^n בתור נקודות במרחב, נוכל לחשוב על המרחק בין שני וקטורים $u, v \in \mathbb{R}^n$ שנסמנו $d(u, v)$. כדי לחשב מרחק כזה, נסתכל על האורך של הקטע המחבר בין u, v , וזה אותו אורך כמו של הקטע המחבר בין $0, u - v$. לכן, $d(u, v) = d(0, u - v)$. נקרא למרחק $d(0, u - v)$ האורך של $u - v$, כיוון שזה האורך של הקו המחבר בין $0, u - v$ ונסמנו $\|u - v\|$ בדומה לסימון $|z|$ של ערך מוחלט ב- \mathbb{C} . נוכל להשתמש במשפט פיתגורס כדי לקבל כי

$$\left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + ib|$$
 ולמשל מתקיים

כשמדובר על גיאומטריה אוקלידית, מושג חשוב בנוסף למרחק ואורך הוא זה של זווית. נסתכל על שני וקטורים u, v באורך 1 ועל הישרים ℓ_u, ℓ_v שעוברים דרכם. הקוסינוס $\cos(\alpha)$ של הזווית מ- ℓ_u ל- ℓ_v שווה לאורך של הוקטור שהקצה שלו הוא החיתוך בין ℓ_u לאנך מ- v ל- ℓ_u . נסמן וקטור זה $\langle v, u \rangle$, כיוון שהוא אכן כפולה של u מהיותו על ℓ_u . במקרה זה נקרא לו ההטלה של v על u . אז יתקיים

$$\cos(\alpha) = \langle v, u \rangle$$

ולכן

$$\alpha = \arccos(\langle v, u \rangle)$$

כדי להכליל את המושג של זווית, נכליל את הביטוי $\langle v, u \rangle$ באמצעות ההגדרה הבאה, של מכפלה פנימית.

5.2 הגדרות

הגדרה 5.2.1 (מכפלה פנימית). יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

המקיימת את התכונות הבאות.

$$\text{חיוביות: לכל } v \in V \setminus \{0\} \text{ מתקיים } \langle v, v \rangle \geq 0.$$

$$\text{סימטריות (הרמיטיות): לכל } u, v \in V \text{ מתקיים } \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}.$$

$$\text{לינאריות ברכיב הראשון: לכל } u, v \in V \text{ ולכל } \alpha \in \mathbb{F} \text{ מתקיים}$$

$$\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

מרחב וקטורי V יחד עם מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ נקרא מרחב מכפלה פנימית.

הערה 5.2.2. בודגמא מהמרחב האוקלידי, ניתן לראות שנובע מהדרישה הגיאומטרית שלנו כי

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i \in [n]} u_i v_i$$

עבור $u, v \in \mathbb{R}^n$ מאורך 1. נוכל בעצם להגדיר זאת עבור וקטור כללי, ונשים לב כי הדבר אכן מקיים את שלוש התכונות הדרושות, ולכן הינו מכפלה פנימית על \mathbb{R}^n .

מכפלה פנימית זאת נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית על \mathbb{R}^n ולעתים נסמן אותה $u \cdot v := \langle u, v \rangle_{\text{std}}$.

תרגיל 5.1. קיבעו אלו מההעסקות הבאות הן מכפלות פנימיות.

1.

$$f_1: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \mapsto ax + by + (cz)^2$$

2.

$$f_2: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \mapsto ax + by + cz$$

3.

$$f_3: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \mapsto ax + by + cz$$

4.

$$f_4: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \times \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(A, B) \mapsto \text{tr}(B^t A)$$

פתרון. אף אחת מההעסקות אינה מכפלה פנימית.

1. ההעסקה f_1 אינה לינארית ברכיב הראשון, כי

$$f_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1$$

ואילו

$$f_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 2^2 = 4 \neq 2 = 2f_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. ההעסקה f_2 אינה חיובית, כי

$$f_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \leq 0$$

3. ההעתקה f_3 אינה הרמיטית, כי

$$f_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right) = i$$

ואילו

$$f_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = i \neq -i = \bar{i} = \overline{f_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right)}$$

ההעתקה f_4 אינה הרמיטית, כי $f_4(I_n, iI_n) = \text{tr}(iI_n) = in$ ואילו

$$f_4(iI_n, I_n) = \text{tr}(iI_n) = in \neq \bar{in} = \overline{f_4(I_n, iI_n)}$$

5.3 תכונות של מכפלות פנימיות, ונורמות

במרחב האוקלידי, כאשר $\|u\| = \|v\| = 1$, אמרנו שהערך $|\langle u, v \rangle|$ שווה לאורך של ההטלה של v על u (או להיפך, כי המכפלה הפנימית סימטרית). בפרט, אורך זה יכול להיות לכל היותר 1, והינו שווה 1 אם ורק אם $u = v$, כי אחרת ההטלה תהיה קצרה יותר.

ניעזר בלינאריות של המכפלה הפנימית ונקבל כי לוקטורים $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ כלליים מתקיים

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle| &= \left\langle \|u\| \frac{u}{\|u\|}, \|v\| \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \\ &= \|u\| \|v\| \left| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right| \\ &\leq \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

כאשר $\left| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right| \leq 1$ כי הוקטורים $\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}$ הינם מאורך 1.

איישוויון כזה מתקבל גם במרחב מכפלה פנימית כללי, כפי שקובע אישוויון קושי-שוורץ, אך לשם כך עלינו להגדיר מושג של אורך בהגדרה הבאה.

הגדרה 5.3.1 (נורמה). יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. נורמה על V היא פונקציה $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות הבאות.

חיוביות: לכל $v \in V \setminus \{0\}$ מתקיים $\|v\| > 0$.

הומוגניות: לכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

איישוויון המשולש: לכל $u, v \in V$ מתקיים $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

מרחב וקטורי עם נורמה נקרא מרחב נורמי.

משפט 5.3.2 (נורמה המושרית ממכפלה פנימית). יהי V מרחב מכפלה פנימית. הפונקציה $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ היא נורמה על V . נקרא לה הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

משפט 5.3.3 (איישוויון קושי-שוורץ). יהי V מרחב מכפלה פנימית. אז לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם u, v תלויים לינארית.

תרגיל 5.2. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in V$. הראו שמתקיים

$$\sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i \rangle \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|v_i\|^2}$$

פתרון. נרצה לפרש את אגף שמאל בתור מכפלה פנימית. כיוון שהוא מזכיר את המכפלה הפנימית על \mathbb{R}^n , רק עם וקטורים מ- V במקום מספרים ב- \mathbb{R} , נרצה להגדיר מכפלה זאת על המרחב

$$V^n := \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in V\}$$

זה אכן מרחב וקטורי עם חיבור וכפל בסקלר לפי כל קואורדינטה בנפרד, ונגדיר עליו מכפלה פנימית לפי

$$\langle (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \rangle := \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i \rangle$$

אם $v := (v_1, \dots, v_n) \neq (0, \dots, 0)$ יש $v_j \neq 0$ ולכן

$$\langle v, v \rangle \geq \langle v_j, v_j \rangle > 0$$

לכן מתקיימת חיוביות. סימטריה ולינאריות ברכיב הראשון מתקיימות בכל רכיב בנפרד, ולכן גם בסך הכל. כעת, אי־שוויון קושי־שוורץ על V^n אומר לנו כי

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i \rangle &\leq \left| \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i \rangle \right| \\ &= |\langle u, v \rangle| \\ &\leq \|u\| \|v\| \\ &= \sqrt{\langle u, u \rangle} \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle u_i, u_i \rangle} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i \rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|v_i\|^2} \end{aligned}$$

כנדרש.

ראינו שמכפלה פנימית ניתן לקבל נורמה המושרית ממנה. שאלה הגיונית לשאול היא האם כל נורמה מגיעה ממכפלה פנימית באופן זה. הטענה הבאה מתארת איך למצוא מכפלה פנימית כזאת, אם היא קיימת.

טענה 5.3.4 (זהות הפולריזציה). יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$$

2. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2)$$

תרגיל 5.3. יהי $V = \mathbb{R}^n$ עם הנורמה $\|v\|_\infty = \max_{i \in [n]} |v_i|$. הראו כי נורמה זאת אינה מושרית ממכפלה פנימית.

פתרון. אם הנורמה מושרית ממכפלה פנימית, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, מתקיים מזהות הפולריזציה כי

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left(\left(\max_{i \in [n]} |u_i + v_i| \right)^2 - \left(\max_{i \in [n]} |u_i - v_i| \right)^2 \right)$$

אבל זאת לא מכפלה פנימית, למשל כי אינה לינארית. מתקיים

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{4} (1^2 - 1^2) = 0$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle = \frac{1}{4} (2^2 - 0^2) = 1$$

ואילו

$$\langle e_1 + e_2, e_2 \rangle = \frac{1}{4} (2^2 + 1^2) = \frac{5}{4} \neq 1 + 0$$

יש לנו דרך נוספת לבדוק האם נורמה מושרית ממכפלה פנימית.

משפט 5.3.5 (זהות המקבילית). יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם לכל u, v מתקיים

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2$$

תרגיל 5.4. הראו שהנורמה

$$\|p\| = |p(0)| + |p(1)| + |p(2)|$$

על $\mathbb{R}_2[x]$ אינה מושרית ממכפלה פנימית.

פתרון. נראה שלא מתקיימת זהות המקבילית. נסתכל על הפולינומים $p(x) = x$, $q(x) = x^2 - 1$ אז

$$\|p\| = 0 + 1 + 2 = 3$$

$$\|q\| = 1 + 0 + 3 = 4$$

$$\|p+q\| = 1 + 1 + 5 = 7$$

$$\|p-q\| = 1 + 1 + 1 = 3$$

ולכן

$$2(\|p\|^2 + \|q\|^2) = 2(9 + 16) = 50$$

$$\|p+q\|^2 + \|p-q\|^2 = 49 + 9 = 58$$

ערכים שונים.

5.4 מטריקות וניצבות

ראינו שבמרחבי מכפלה פנימית יש מושג של אורך-נורמה. על מרחב נורמי יש גם מושג של מרחק.

הגדרה 5.4.1 (מטריקה). תהי X קבוצה. מטריקה על X היא פונקציה $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימת את התכונות הבאות.

חיוביות: $d(x, y) \geq 0$ וגם $d(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$.

סימטריה: $d(x, y) = d(y, x)$.

אי-שוויון המשולש: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

קבוצה עם מטריקה נקראת מרחב מטרי.

הגדרה 5.4.2 (מטריקה המושרית מנורמה). יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. המטריקה המושרית על V היא $d(x, y) = \|x - y\|$.

כעת, את המרחק בין שני שני וקטורים קל בדרך כלל לחשב כאשר יש לנו נורמה נתונה. מעט מסובך יותר לחשב את המרחב מוקטור לקבוצה.

הגדרה 5.4.3 (מרחק מקבוצה). יהי (X, d) מרחב מטרי, יהי $x \in X$ ותהי $S \subseteq X$. נגדיר את המרחק של x מ- S להיות

$$d(x, S) := \inf \{d(x, s) \mid s \in S\}$$

תת-קבוצות של מרחב וקטורי שמעניינות אותנו הן בדרך כלל תת-מרחבים. במקרה האוקלידי, אנו יודעות כיצד לחשב את המרחק מתת-מרחב. כדי לחשב את $d(x, W)$ עבור $W \leq \mathbb{R}^n$, נעביר אנך מ- x ל- W ונחשב את המרחק בין x ונקודת החיתוך בין W לאנך.

כדי לעשות דבר דומה במרחבי מכפלה פנימית כלליים, נצטרך לדבר קודם כל על ניצבות.

הגדרה 5.4.4 (זווית במרחב מכפלה פנימית). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, v \in V$. נגדיר את הזווית בין u, v בתור

$$\angle(u, v) = \arccos \left(\frac{\Re(\langle u, v \rangle)}{\|u\| \|v\|} \right)$$

הגדרה 5.4.5 (וקטורים ניצבים). יהי V מרחב מכפלה פנימית. וקטורים $u, v \in V$ נקראים ניצבים אם $\langle u, v \rangle = 0$. במקרה זה נסמן $u \perp v$.

הערה 5.4.6. מעל \mathbb{R} , וקטורים ניצבים בדיוק כאשר הזווית בינם היא $\frac{\pi}{2}$.

הגדרה 5.4.7. קבוצה $S \subseteq V$ במרחב מכפלה פנימית נקראת אורתוגונלית אם $s_1 \perp s_2$ לכל $s_1, s_2 \in S$ שונים.

משפט 5.4.8 (פיתגורס). תהי סדרה של וקטורים אורתונורמליים במרחב מכפלה פנימית V . אז

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2$$

תרגיל 5.5. יהי V מרחב מכפלה פנימית.

1. הוכיחו כי אם $\langle v, w \rangle = 0$ לכל $w \in V$ אז $v = 0$.
2. הוכיחו כי אם $\langle v, w \rangle = \langle u, w \rangle$ לכל $w \in V$ אז $v = u$.
3. הוכיחו כי אם $T, S \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ו- $\langle Tu, v \rangle = \langle Su, v \rangle$ לכל $u, v \in V$ אז $T = S$.

פתרון. 1. ניקח $w = v$ ונקבל

$$\langle v, v \rangle = 0$$

ולכן $v = 0$.

2. נעביר אגף ונקבל

$$\langle v - u, w \rangle = 0$$

לכל $w \in V$. אז מהסעיף הקודם $v - u = 0$ ולכן $v = u$.

3. נעביר אגף ונקבל

$$\langle (T - S)(u), v \rangle = 0$$

לכל $u, v \in V$. אז עבור כל $u \in V$ מתקיים $(T - S)(u) = 0$, ולכן $T(u) = S(u)$.

5.5 בסיסים אורתונורמליים והמרחב הניצב

כעת, כדי לדבר על המרחק של וקטור $v \in V$ מתת־מרחב $W \leq V$, נרצה לכתוב את v בתור סכום של שני וקטורים, כאשר אחד מהם מ- W והשני ניצב ל- W . ראינו כי $V = W \oplus W^\perp$ עבור $W \leq V$ תת־מרחב של הוקטורים הניצבים ל- W ולכן זה אפשרי. ככה, ושהמרחק יצא, כמו במקרה האוקלידי, האורך של החלק הניצב ל- W .

הגדרה 5.5.1 (מרחב ניצב). יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $S \subseteq V$. המרחב הניצב ל- S הוא

$$S^\perp = \{v \in V \mid \forall s \in S: v \perp s\}$$

טענה 5.5.2. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. מתקיים $V = W \oplus W^\perp$.

תרגיל 5.6. יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהינה $S, T \subseteq V$.

1. נניח כי $S \subseteq T$. הראו כי $T^\perp \subseteq S^\perp$.
התאמה כזאת, כמו $S \mapsto S^\perp$, שהופכת יחס הכלה, נקראת התאמת גלואה.

2. נסמן $W = \text{Span}(S)$. הראו כי $W^\perp = S^\perp$.

3. הראו כי $(S^\perp)^\perp = \text{Span}(S)$.

- פתרון. 1. יהי $v \in T^\perp$ ויהי $s \in S$. אז $s \in T$ ולכן $v \perp s$, וכן $v \in S^\perp$.
2. מתקיים $S \subseteq W$ ולכן $W^\perp \subseteq S^\perp$. יהי $v \in S^\perp$ ויהי $w \in W$. כיוון ש- $W = \text{Span}(S)$, יש איברים s_1, \dots, s_k וסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ עבורם $w = \sum_{i \in [k]} \alpha_i s_i$ אז

$$\langle v, w \rangle = \left\langle v, \sum_{i \in [k]} \alpha_i s_i \right\rangle = \sum_{i \in [k]} \alpha_i \langle v, s_i \rangle \stackrel{0}{=} 0$$

ולכן $v \in W^\perp$.

3. ראינו כי $(W^\perp)^\perp = W$ עבור $W \leq V$. ניקח $W = \text{Span}(S)$. מתקיים $S \subseteq W$ ולכן $W^\perp \subseteq S^\perp$ ואז $(S^\perp)^\perp \subseteq (W^\perp)^\perp = W$. כמו כן, $S^\perp = W^\perp$ תת־מרחב וקטורי ומכיוון ש- $S^\perp = W^\perp \oplus (S^\perp)^\perp$, נקבל כי

$$\dim((S^\perp)^\perp) = \dim(V) - \dim(S^\perp) = \dim(V) - \dim(W^\perp) = \dim(W)$$

ולכן יש שוויון $(S^\perp)^\perp = W = \text{Span}(S)$.

הערה 5.5.3. לא יכולנו בתרגיל האחרון להניח כי S אינסופית. באופן כללי,

$$\text{Span}(S) = \left\{ \sum_{i \in [k]} \alpha_i s_i \mid \begin{array}{l} \alpha_i \in \mathbb{F} \\ s_i \in S \end{array} \right\}$$

גם כאשר S אינסופית.

תרגיל 5.7. מצאו את W^\perp עבור

$$W := \text{Span}(e_1 + e_2) \leq \mathbb{R}^2$$

פתרון. ראינו כי מתקיים $v \in \text{Span}(e_1 + e_2)^\perp$ אם ורק אם $v \perp e_1 + e_2$. זה מתקיים אם ורק אם $v_1 + v_2 = 0$ אם ורק אם $v_2 = -v_1$. לכן

$$W^\perp = \text{Span}(e_1 - e_2)$$

הגדרה 5.5.4 (בסיס אורתונורמלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית. בסיס $B = (v_1, \dots, v_n)$ של V נקרא אורתונורמלי אם

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \text{אורתונורמלי אם } i \neq j, \text{ ואורתונורמלי אם } i = j$$

הגדרה 5.5.5 (הטלה אורתוגונלית). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. ההטלה האורתוגונלית על W היא ההטלה על W ביחס לסכום הישר $V = W \oplus W^\perp$.

טענה 5.5.6. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. יהי $B = (w_1, \dots, w_m)$ בסיס אורתונורמלי של W ויהי $v \in V$. תהי P_W ההטלה האורתוגונלית על W . אז

$$P_W(w) = \sum_{i \in [m]} \langle v, w_i \rangle w_i$$

תרגיל 5.8. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, v \in V$. הראו כי $u \perp v$ אם ורק אם

$$\|u\| \leq \|u + av\|$$

לכל $a \in \mathbb{F}$.

פתרון. אם $u \perp v$ ו- $a \in \mathbb{F}$, נקבל מפיתגורס

$$\|u + av\|^2 = \|u\|^2 + |a|^2 \|v\|^2 \geq \|u\|^2$$

ולכן $\|u\| \leq \|u + av\|$.

נניח כי $\langle u, v \rangle \neq 0$ ונניח תחילה כי $\|v\| = 1$. אז

$$\langle \langle u, v \rangle v, v \rangle = \langle u, v \rangle \langle v, v \rangle = \langle u, v \rangle \|v\|^2 = \langle u, v \rangle \neq 0$$

וגם

$$\langle u - \langle u, v \rangle v, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle \langle u, v \rangle v, v \rangle = 0$$

אז, ממשפט פיתגורס

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|u - \langle u, v \rangle v + \langle u, v \rangle v\|^2 \\ &= \|u - \langle u, v \rangle v\|^2 + \|\langle u, v \rangle v\|^2 \\ &> \|u - \langle u, v \rangle v\|^2 \end{aligned}$$

כאשר האי-שוויון חזק כי $\langle u, v \rangle v \neq 0$ מההנחה $\langle u, v \rangle \neq 0$. לכן, עבור $a = \langle u, v \rangle$ לא מתקיים $\|u\| \leq \|u + av\|$. כעת, אם v כללי, הוקטור $\frac{v}{\|v\|}$ הינו מאורך 1 ולכן יש $a' \in \mathbb{F}$ עבורו $\|u + a' \frac{v}{\|v\|}\| > \|u\|$. אז ניקח $a = \frac{a'}{\|v\|}$ ונקבל כי $\|u\| > \|u + av\|$.

כדי למצוא בסיסים אורתונורמליים ומשלימים ישרים, ניעזר בתהליך שלוקח בסיס כלשהו ומחזיר בסיס אורתונורמלי.

משפט 5.5.7 (גרס'שמידט). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $B = (u_1, \dots, u_n)$ בסיס של V . קיים בסיס אורתונורמלי $C = (v_1, \dots, v_n)$ של V עבורו

$$\text{Span}(u_1, \dots, u_i) = \text{Span}(v_1, \dots, v_i)$$

לכל $i \in [n]$.

ניסוח זה של המשפט לא מתאר לנו איך למצוא את C , אבל ההוכחה שלו קונסטרוקטיבית ומתארת את האלגוריתם הבא.

$$1. \text{ עבור } i = 1 \text{ ניקח } v_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$$

2. עבור כל i לאחר מכן, לפי הסדר, ניקח

$$w_i = u_i - \sum_{j \in [i-1]} \langle u_i, v_j \rangle v_j$$

$$\text{ואז } v_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$$

מסקנה 5.5.8. יהי $W \leq V$ תת-מרחב במרחב מכפלה פנימית. כדי למצוא אורתונורמלי של W ושל W^\perp ניקח בסיס B_W של W ונשלים אותו לבסיס $B = B_W \cup B'_W$ של V . נבצע את תהליך גרס-שמידט על B ונקבל בסיס $C = C_W \cup C_W^\perp$ כך $\text{Span}(C_W) = \text{Span}(B_W) = W$. כל הוקטורים ב- C_W^\perp ניצבים ל- W כי C אורתונורמלי, ולכן $W' := \text{Span}(C_W^\perp) \subseteq W^\perp$ כמו כן,

$$\dim(W') = \dim(V) - \dim(W) = \dim(W^\perp)$$

כי $W' = W^\perp$ ולכן יש שוויון $V = W \oplus W' = W \oplus W^\perp$

משפט 5.5.9 (מרחק של וקטור מתת-מרחב). יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהי $W \leq V$, תהי P_W ההטלה האורתוגונלית על W ויהי $v \in V$ מתקיים

$$d(v, W) = d(v, P_W(v))$$

תרגיל 5.9. יהי $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$$

ויהי $W \leq V$ התת-מרחב של המטריצות הסימטריות.

1. מציאו בסיס אורתונורמלי עבור W ועבור W^\perp .

2. הראו כי $P_W(A) = \frac{A+A^t}{2}$ בשתי דרכים שונות.

3. חשבו את המרחק של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ מ- W .

פתרון. 1. ניקח בסיס $B_W = (E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2})$ של W ונשלים אותו לבסיס

$$B = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2}, E_{1,2})$$

של V . נבצע את תהליך גרס-שמידט כדי לקבל בסיס אורתונורמלי (v_1, v_2, v_3, v_4) עבורו $W = \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ וגם $W^\perp = \text{Span}(v_4)$.

נחשב

$$v_1 = \frac{1}{\|E_{1,1}\|} E_{1,1} = E_{1,1}$$

$$w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = E_{1,2} + E_{2,1} - 0 = E_{1,2} + E_{2,1}$$

$$v_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{1,2} + E_{2,1})$$

$$w_3 = u_3 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 = u_3 = E_{2,2}$$

$$v_3 = \frac{1}{\|w_3\|} w_3 = E_{2,2}$$

$$\begin{aligned} w_4 &= u_4 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 \\ &= E_{1,2} - \left\langle E_{1,2}, \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{1,2} + E_{2,1}) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (E_{1,2} + E_{2,1}) \right) \end{aligned}$$

$$= E_{1,2} - \frac{1}{2} (E_{1,2} + E_{2,1})$$

$$= \frac{1}{2} (E_{1,2} - E_{2,1})$$

$$v_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \frac{1}{\|E_{1,2} - E_{2,1}\|} (E_{1,2} - E_{2,1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{1,2} - E_{2,1})$$

ונקבל כי

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(E_{1,1}, \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{1,2} + E_{2,1}), E_{2,2} \right)$$

בסיס אורתונורמלי של W וכי $\frac{1}{\sqrt{2}} (E_{1,2} - E_{2,1})$ בסיס אורתונורמלי של W^\perp . אז, W^\perp מרחב המטריצות האנטיסימטריות.

2. בדרך אחת, זכור לנו מאלגברה א' כי

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

כאשר $\frac{A + A^t}{2}$ סימטרית ו- $\frac{A - A^t}{2}$ אנטיסימטרית. אז $\frac{A + A^t}{2} \in W$ וכיוון ש- W^\perp מרחב המטריצות האנטיסימטריות, נקבל גם $\frac{A - A^t}{2} \in W^\perp$. לכן $P_W(A) = \frac{A + A^t}{2}$.

אבל, במקרה הכללי, לא נדע מראש איך לכתוב וקטור $v \in V$ בתור סכום של וקטור ב- W ווקטור ב- W^\perp . כדי לחשב את ההטלה $P_W(A)$ נוכל לקחת בסיס אורתונורמלי של W ולהשתמש בנוסחא עבור ההטלה האורתוגונלית לפי בסיס כזה.

אכן,

$$\begin{aligned} P_W(A) &= \sum_{i \in [3]} \langle A, v_i \rangle v_i \\ &= \langle A, E_{1,1} \rangle E_{1,1} + \left\langle A, \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{1,2} + E_{2,1}) \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{1,2} + E_{2,1}) + \langle A, E_{2,2} \rangle E_{2,2} \\ &= a_{1,1} E_{1,1} + \frac{1}{2} (a_{1,2} + a_{2,1}) (E_{1,2} + E_{2,1}) + a_{2,2} E_{2,2} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{a_{1,2} + a_{2,1}}{2} \\ \frac{a_{1,2} + a_{2,1}}{2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{A + A^t}{2} \end{aligned}$$

3. נכתוב את A בתור סכום של מטריצה סימטרית ואנטיסימטרית. ראינו כי

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

כאשר $\frac{A + A^t}{2}$ סימטרית ו- $\frac{A - A^t}{2}$ אנטיסימטרית. אז $d_W(A) = \frac{A + A^t}{2}$ ונקבל כי המרחק של A מ- W הוא

$$d\left(A, \frac{A + A^t}{2}\right) = \left\| A - \frac{A + A^t}{2} \right\|$$

מתקיים

$$\begin{aligned} \left\| A - \frac{A + A^t}{2} \right\| &= \left\| \frac{A - A^t}{2} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ולכן $d(A, W) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

פרק 6

אופרטורים על מרחבי מכפלה פנימית

6.1 המרחב הדואלי, ומשפט ההצגה של ריס

הגדרה 6.1.1 (המרחב הדואלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה \mathbb{F} . המרחב הדואלי של V הוא

$$V^* := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$$

איבריו נקראים פונקציונלים לינאריים.

משפט 6.1.2 (משפט ההצגה של ריס). יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} , ויהי $\varphi \in V^*$ פונקציונל לינארי על V . קיים וקטור $w \in V$ יחיד עבורו $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$. בנוסף, אם $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס אורתונורמלי של V , מתקיים

$$w = \sum_{i \in [n]} \langle w, v_i \rangle v_i = \sum_{i \in [n]} \overline{\varphi(v_i)} v_i$$

תרגיל 6.1. יהי $V = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ותהי $\text{tr}: V \rightarrow \mathbb{C}$ העתקת העקבה. מיצאו מטריצה B עבורה $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A)$ לכל $A \in V$.

פתרון. נסתכל על הבסיס האורתונורמלי $(E_{i,j})_{i,j \in [n]}$ של V וניעזר בנוסחה. נקבל

$$B = \sum_{i,j \in [n]} \overline{\text{tr}(E_{i,j})} E_{i,j} = \sum_{i \in [n]} E_{i,i} = I_n$$

תרגיל 6.2. 1. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $C > 0$ כך שלכל $p \in \mathbb{R}_n[x]$ מתקיים

$$|p(0)| \leq C \left(\int_{-1}^1 p(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. חשבו את C המינימלי עבור $n = 2$.

פתרון. 1. נשים לב כי

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

מכפלה פנימית. אז

$$\left(\int_{-1}^1 p(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (\langle p, p \rangle)^{\frac{1}{2}} = \|p\|$$

כלומר, עלינו להוכיח

$$|p(0)| \leq C \|p\|$$

ההצבה

$$\begin{aligned} \text{ev}_0: \mathbb{R}_n[x] &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

היא פונקציונל לינארי, ולכן ממשפט ריס יש $g \in \mathbb{R}_n[x]$ עבורו

$$p(0) = \text{ev}_0(p) = \langle p, g \rangle$$

עכשיו, מקושי-שוורץ

$$|p(0)| = |\langle p, g \rangle| \leq \|p\| \|g\|$$

לכן ניקח $C = \|g\|$

2. נסמן $g(x) = ax^2 + bx + c$. נשים לב כי כאשר $p = g$ יש שוויון בקושי-שוורץ ואז

$$|p(0)| = \|p\| \|g\| \leq C \|p\|$$

גורר $C \geq \|g\|$. ראינו כי $C = \|g\|$ מקיים את הנדרש, ולכן נותר למצוא את $\|g\|$.

כדי לא להצטרך בסיס אורתונורמלי, שיהיה פחות יפה במקרה הזה, נשים לב שמספיק לחשב את המכפלות הפנימיות בין g לאיברי בסיס כלשהו. לפי בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \dots, v_n)$ מתקיים

$$g = \sum_{i \in [n]} \langle g, v_i \rangle v_i$$

אם $C = (u_1, \dots, u_n)$ בסיס נוסף, נוכל לכתוב

$$v_i = \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j$$

ואז

$$g = \sum_{i \in [n]} \langle g, v_i \rangle v_i = \sum_{i,j \in [n]} \bar{\alpha}_{i,j} \langle g, u_j \rangle$$

ונקבל שמהכפלות הפנימיות $\langle g, u_i \rangle$ נותנות מספיק אינפורמציה כדי למצוא את g .

כעת, נחשב את המכפלות הפנימיות של g עם איברי הבסיס הסטנדרטי ונפתור מערכת משוואות שיהיה לה פתרון יחיד שהוא מקדמי g .

$$1 = 1(0) = \langle g(x), 1 \rangle = \int_{-1}^1 g(x) dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \Big|_{x=-1}^1 = \frac{2a}{3} + 2c$$

$$0 = x(0) = \langle g(x), x \rangle = \int_{-1}^1 g(x) x dx = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} \Big|_{x=-1}^1 = \frac{2b}{3}$$

$$0 = x^2(0) = \langle g(x), x^2 \rangle = \int_{-1}^1 g(x) x^2 dx = \frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3} \Big|_{x=-1}^1 = \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $b = 0$. מהמשוואה הראשונה פחות 3 פעמים השנייה נקבל

$$1 = \frac{2a}{3} - 3 \cdot \frac{2a}{5} + 0 = \frac{10a - 18a}{15}$$

ולכן $a = -\frac{15}{8}$. אז מהמשוואה השלישית נקבל

$$c = -\frac{3a}{5} = -\frac{9}{8}$$

ולכן

$$g(x) = -\frac{15}{8}x^2 - \frac{9}{8}$$

אז

$$C = \|g\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(-\frac{15}{8}x^2 - \frac{9}{8}\right)^2 dx} = \frac{27}{4}$$

6.2 ההעתקה הצמודה

משפט 6.2.1 (ההעתקה הצמודה). יהיו V, W מרחבי מכפלה פנימית סוף-מימדיים ותהי $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. קיימת העתקה יחידה $T^* \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V)$ עבורה

$$\langle T(v), w \rangle_W = \langle v, T^*(w) \rangle_V$$

לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$.
היא נקראת ההעתקה הצמודה של T .

משפט 6.2.2 יהיו $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V), (W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ מרחבי מכפלה פנימית סוף מימדיים עם בסיסים אורתונורמליים B, C בהתאמה, ותהי $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ או $[T^*]_B^C = ([T]_C^B)^*$.

כעת, אם $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ יש לנו דרכים שונות לחשב את T^* . נוכל לנחש איזה אופרטור יקיים $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$ לכל $v, w \in V$, על ידי מניפולציות של הצגת המכפלה הפנימית. נוכל גם לכתוב את T^* בצורה כללית ולפתור מערכת משוואות. לבסוף, נוכל לקחת בסיס אורתונורמלי B , כדי שיתקיים $[T^*]_B = \overline{[T]_B}^t$, ואז לשחזר את T^* מהמטריצה המייצגת. נראה דוגמאות לחישוב בכל אחת מהדרכים.

תרגיל 6.3 יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \bar{g}(x) dx$$

יהי $D \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ אופרטור הגזירה. מיצאו את D^* .

פתרון. כדי להראות כי $D^* = S$ די להראות כי $\langle Df, g \rangle = \langle f, Dg \rangle$ עבור f, g בבסיס נתון, מלינאריות. נחשב מה צריך להיות D^* לפי הבסיס $(1, x, x^2)$. יהי $g(x) = ax^2 + bx + c$. נחשב את מכפלת $D(g)$ עם 1

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, g \rangle \\ &= \langle D(1), g \rangle \\ &= \langle 1, D^*(g) \rangle \\ &= \int_{-1}^1 D^*(g)(x) dx \end{aligned}$$

עם x

$$\begin{aligned} \frac{2a}{3} + 2c &= \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \Big|_{-1}^1 \\ &= \int_{-1}^1 ax^2 + bx + c dx \\ &= \langle 1, g \rangle \\ &= \langle D(x), g \rangle \\ &= \langle x, D^*(g) \rangle \\ &= \int_{-1}^1 x D^*(g)(x) dx \end{aligned}$$

ועם x^2

$$\begin{aligned} \frac{4b}{3} &= \frac{2ax^4}{4} + \frac{2bx^3}{3} + \frac{2cx^2}{2} \Big|_{-1}^1 \\ &= 2 \int_{-1}^1 ax^3 + bx^2 + cx dx \\ &= \langle 2x, g \rangle \\ &= \langle D(x^2), g \rangle \\ &= \langle x^2, D^*(g) \rangle \\ &= \int_{-1}^1 x^2 D^*(g)(x) dx \end{aligned}$$

נכתוב $D^*(g) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 \alpha x^2 + \beta x + \gamma \, dx = \frac{2\alpha}{3} + 2\gamma \\ \frac{2a}{3} + c &= \int_{-1}^1 \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x \, dx = \frac{2\beta}{3} \\ \frac{4b}{3} &= \int_{-1}^1 \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 \, dx = \frac{\alpha x^5}{5} + \frac{\beta x^4}{4} + \frac{\gamma x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2\alpha}{5} + \frac{2\gamma}{3} \end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה, $\gamma = -\frac{\alpha}{3}$. אז מהמשוואה השלישית, $\frac{4b}{3} = \frac{2\alpha}{5} - \frac{2\alpha}{9}$ כלומר

$$4b = \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{3}\right)\alpha = \left(\frac{18}{15} - \frac{10}{15}\right)\alpha = \frac{8\alpha}{15}$$

כלומר $b = \frac{2\alpha}{15}$ כלומר $\alpha = \frac{15}{2}b$. נקבל כי $\gamma = -\frac{5}{2}$ ומהמשוואה השנייה כי $\beta = a + \frac{3c}{2}$. לכן

$$D^*(ax^2 + bx + c) = \frac{15}{2}bx^2 + \left(a + \frac{3c}{2}\right)x - \frac{5}{2}$$

תרגיל 6.4. יהי $V = M_n(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^*, A)$ ויהי

$$\begin{aligned} \Phi: V &\rightarrow V \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

חשבו את Φ^* .

פתרון. נוכל לחשב ישירות,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(A), B \rangle &= \langle A^t, B \rangle \\ &= \text{tr}(B^* A^t) \\ &= \overline{\text{tr}(B^* A^t)} \\ &= \overline{\text{tr}(B^t A^*)} \\ &= \overline{\text{tr}(A^* B^t)} \\ &= \overline{\langle B^t, A \rangle} \\ &= \langle A, B^t \rangle \\ &= \langle A, \Phi(B) \rangle \end{aligned}$$

ולכן $\Phi^* = \Phi$.

נוכל לחשב זאת גם בעזרת מטריצה מייצגת בבסיס אורתונורמלי. נסמן ב- $E_{i,j}$ מטריצה עבורה $(E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$. כלומר, זאת מטריצה עם 0 בכל המקדמים חוץ מזה בשורה ה- i והעמודה ה- j . אז בבסיס

$$B := (E_{1,1}, \dots, E_{n,n}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{1,3}, E_{3,1}, \dots, E_{n-1,n}, E_{n,n-1})$$

נקבל כי

$$[\Phi]_B = I_n \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כיוון ש- B בסיס אורתונורמלי נקבל כי $[\Phi^*]_B = \overline{[\Phi]_B}^t$. אך $[\Phi]_B$ מטריצה ממטית סימטרית, ולכן $[\Phi^*]_B = [\Phi]_B$ ואז $\Phi^* = \Phi$.

6.3 אופרטורים אוניטריים ואורתוגונליים

תכונה אינטואיטיבית גיאומטרית של אופרטורים על מרחבי מכפלה פנימית היא שמירה של המכפלה הפנימית. אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורו $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ לכל $v, w \in V$ מקיים $\langle T^*Tv, w \rangle = \langle v, w \rangle$ ולכן $T^*T = \text{Id}$ כלומר $T^* = T^{-1}$. נקרא לאופרטור כזה אורתוגונלי אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, או אוניטרי, אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

הגדרה 6.3.1 (אופרטור אורתוגונלי (אוניטרי)). אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ מעל \mathbb{R} (מעל \mathbb{C} נקרא אורתוגונלי (אוניטרי) אם $T^* = T^{-1}$).

הגדרה 6.3.2 (מטריצה אורתוגונלית (אוניטרית)). מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (עבור $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) נקראת אורתוגונלית (אוניטרית) אם $A^t = A^{-1}$.

תרגיל 6.5. הראו כי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}[V]$ אורתוגונלי (אוניטרי) אם ורק אם $\|Tv\| = \|v\|$ לכל $v \in V$.

פתרון. אם $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור אורתוגונלי (אוניטרי), מתקיים

$$\|Tv\| = \sqrt{\langle Tv, Tv \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|$$

לכל $v \in V$.

להיפך, אם $\|Tv\| = \|v\|$ לכל $v \in V$, נקבל מזהות הפולריזציה כי $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ לכל $v, w \in W$.

הערה 6.3.3. קיבלנו כי אופרטורים אורתוגונליים (או אוניטריים) הם בדיוק אלו השומרים על הנורמה, ולכן הם גם אלו השומרים על מרחקים.

העתקות השומרות על מרחקים נקראות איזומטריות ולכן אופרטור אורתוגונלי נקרא גם איזומטריה לינארית. כיוון שבקורס נדבר רק על העתקות לינאריות, נתיחס לפעמים לאופרטור לינארי בתור איזומטריה.

טענה 6.3.4. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי ממימד n , ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ התנאים הבאים שקולים.

1. T אורתוגונלי.

2. קיים בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \dots, v_n)$, כך שהבסיס (Tv_1, \dots, Tv_n) אורתונורמלי.

3. לכל בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \dots, v_n)$, הבסיס (Tv_1, \dots, Tv_n) אורתונורמלי.

תרגיל 6.6. יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהי

$$R: V \rightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

שיקוף דרך ציר ה- x .
הראו כי R איזומטריה.

פתרון. מתקיים $[R]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ וזאת מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי של V . לכן R שולח בסיס אורתונורמלי (הסטנדרטי) לבסיס אורתונורמלי, ולכן הינו איזומטריה.

תרגיל 6.7. הראו כי $A_{\theta} := \rho_{\theta}$ עבור

$$A_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

הינו איזומטריה.

פתרון. מתקיים כי $\rho_{\theta}(e_i) = A_{\theta}e_i$ העמודה ה- i של A_{θ} . נראה שעמודות A_{θ} מהוות בסיס אורתונורמלי ונקבל כי ρ_{θ} שולחת בסיס אורתונורמלי (הסטנדרטי) לבסיס אורתונורמלי. ראינו שזה תנאי שקול לאורתוגונליות ולכן נקבל את הנדרש. אכן, מתקיים

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle = -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle = (-\sin \theta)^2 + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

כנדרש.

תרגיל 6.8. הראו כי כל איזומטריה של \mathbb{R}^2 היא מהצורה $\rho_\theta R$ או $\rho_\theta R$ עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

פתרון. תהי $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ איזומטריה. מהתנאים השקולים, הבסיס $(T(e_1), T(e_2))$ הינו אורתונורמלי. בפרט, $v := T(e_1)$ הינו מנורמה 1.

נראה שניתן לכתוב $v = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$. נכתוב $v = (v_1, v_2)$ ונקבל כי $v_1^2 + v_2^2 = 1$. בפרט, $v_1 \in [-1, 1]$ ולכן יש $\theta \in \mathbb{R}$ עבורה $v_1 = \cos \theta$. נקבל כי $v_2^2 = 1 - (\cos \theta)^2 = (\sin \theta)^2$ ולכן $v_2 \in \{\pm \sin \theta\}$. אם $v_2 = \sin \theta$, סיימנו. אחרת, ניתן לכתוב

$$\begin{aligned} v_1 &= \cos(-\theta) \\ v_2 &= \sin(-\theta) \end{aligned}$$

ואז הזווית המתאימה היא $-\theta$.
נקבל כי $v = \rho_\theta(e_1)$ ולכן

$$\rho_{-\theta}(v) = \rho_{-\theta} \circ T(e_1) = e_1$$

הרכבת איזומטריות הינה איזומטריה, ולכן נקבל כי $\rho_{-\theta} \circ T$ היא איזומטריה שמקבעת את e_1 . מהתנאים השקולים, היא מעבירה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי, לכן $(e_1, u) := (e_1, \rho_{-\theta} \circ T(e_2))$ אבל אז $u \in \{\pm e_2\}$ כי $u \in \{e_1\}^\perp = \text{Span}(e_2)$ מנורמה 1. אם $u = e_2$ נקבל כי $\rho_{-\theta} \circ T = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ כלומר $\rho_{-\theta} \circ T = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$. אחרת, $T = \rho_\theta$. ואז $T = \rho_\theta \circ R$.

6.4 אופרטורים נורמליים וצמודים לעצמם, ומשפט הפירוק הספקטרלי

ראינו בתרגיל קודם דוגמא לאופרטור T עבורו $T^* = T$. אופרטור כזה נקרא צמוד לעצמו מעל \mathbb{R} או הרמיטי מעל \mathbb{C} . אופרטורים צמודים לעצמם מאופיינים על ידי המשפט הבא.

משפט 6.4.1 (משפט הפירוק הספקטרלי לאופרטורים צמודים לעצמם). יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי סוף-מימד, ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$. אז צמוד לעצמו אם ורק אם יש בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.

מעל \mathbb{C} , אופרטורים בעלי אפיון דומה אינם אופרטורים הרמיטיים, אלא אופרטורים נורמליים.

הגדרה 6.4.2 (אופרטור נורמלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נגיד כי T נורמלי אם $T^*T = TT^*$.

משפט 6.4.3 (משפט הפירוק הספקטרלי לאופרטורים נורמליים). יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב סוף-מימד, ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. אז T נורמלי אם ורק אם יש בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.

הגדרה 6.4.4. מטריצה $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ נקראת נורמלית אם $A^*A = AA^*$ כאשר $A^* := \bar{A}^t$.

הערה 6.4.5. תהי A מטריצה סימטרית (נורמלית) מעל \mathbb{R} (מעל \mathbb{C}). אז T_A אופרטור צמוד לעצמו (נורמלי) ולכן ממשפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו $[T_A]_B$ מטריצה אלכסונית. אז

$$A = [T_A]_E = (M_B^E)^{-1} [T_A]_B M_B^E$$

המטריצה $P := (M_B^E)^{-1} = M_E^B$ היא מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי, ולכן הינה אורתוגונלית (אוניטרית). אז מתקיים כי $P^{-1}AP = D$ עבור מטריצה אורתוגונלית (אוניטרית) P ומטריצה אלכסונית D .

משפט 6.4.6 (משפט הפירוק הספקטרלי למטריצות). תהי $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או \mathbb{C} . אז סימטרית (נורמלית) אם ורק אם קיימת מטריצה אורתוגונלית (אוניטרית) $P \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבורה $P^{-1}AP$ אלכסונית.

תרגיל 6.9. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

מצאו מטריצה אורתוגונלית $P \in M_3(\mathbb{R})$ עבורה $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.

פתרון. ראשית נמצא ערכים עצמיים. מתקיים

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= 3 \\ \text{tr} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= 4 \end{aligned}$$

לכן אם λ_1, λ_2 הערכים העצמיים נקבל $\lambda_1 \lambda_2 = 3$ וגם $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$, לכן הערכים העצמיים של A הם 3 מריבוי אלגברי 2 ו-1 מריבוי אלגברי 1.

המרחב העצמי של 3 הוא $\text{Span}(e_1, e_2 + e_3)$. נחפש את המרחב העצמי של 1. נדרג

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז המרחב העצמי הוא $\text{Span}(e_2 - e_3)$.

כדי לקבל בסיס אורתונורמלי נוכל לבצע את תהליך גרס-שמידט על בסיס של כל מרחב עצמי בנפרד, או על הבסיס כולו. אם אנו יודעים שהמטריצה נורמלית, המרחבים העצמיים השונים שלה ניצבים, ולכן שתי הדרכים שקולות. באופן כללי, יש להראות שקיבלנו בסיס מלכסן, או אורתונורמלי, תלוי בשיטה שבחרנו.

נבצע את תהליך גרס-שמידט על $(e_1, e_2 + e_3)$. נקבל בסיס $(e_1, \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}})$. על $(e_2 - e_3)$ נקבל בסיס $(\frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}})$. נרצה להראות כי

$$B = \left(\frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}}, e_1, \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}} \right)$$

בסיס מלכסן של A .

אכן, כל הוקטורים ב- B הם וקטורים עצמיים של A . לכן אם ניקח $P := [\text{Id}_{\mathbb{C}^3}]_B^B$ נקבל כי $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית, וכי P אורתוגונלית, שכן עמודותיה הן בסיס אורתונורמלי.

תרגיל 6.10. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. הראו כי T נורמלי אם ורק אם קיים פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $T^* = p(T)$. היעזרו במשפט הבא.

משפט 6.4.7 (אינטרפולציה לגרנג'). תהייה $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. קיים $p \in \mathbb{C}_{n+1}[x]$ עבורו $p(x_i) = y_i$ לכל $i \in [n]$.

פתרון. נניח כי קיים פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $T^* = p(T)$. כיוון ש- T מתחלף עם כל פולינום ב- T , נקבל

$$T^*T = p(T)T = Tp(T) = TT^*$$

ולכן T נורמלי.

בכיוון השני, נניח כי T נורמלי. ממשפט הפירוק הספקטלי קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ אלכסונית. אז

$$[T^*]_B = [T]_B^* = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$$

מאינטרפולציה לגרנג', קיים פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $p(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ לכל $i \in [n]$. אז

$$[T^*]_B = \text{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)) = p(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = p([T]_B) = [p(T)]_B$$

ונקבל כי $T^* = p(T)$. כנדרש.

תרגיל 6.11. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי. הראו כי T הרמיטי אם ורק אם כל הערכים העצמיים של T ממשיים.

פתרון. ממשפט הפירוק הספקטרי קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ אלכסונית. כעת T הרמיטי אם ורק אם $T^* = T$ אם ורק אם $[T^*]_B = [T]_B$. כיוון ש- B אורתונורמלי, מתקיים $[T^*]_B = \overline{[T]_B}^t$. לכן השוויון הנ"ל מתקיים אם ורק אם $\bar{\lambda}_i = \lambda_i$ לכל $i \in [n]$, כלומר אם ורק אם כל הערכים העצמיים ממשיים.

תרגיל 6.12. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי. הראו כי T אוניטרי אם ורק אם הערכים העצמיים של T הינם על מעגל היחידה.

פתרון. ממשפט הפירוק הספקטרי קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ אלכסונית. אז

$$[T]_B^* = \overline{[T]_B}^t = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$$

כעת,

$$[T^*T]_B = [T^*]_B [T]_B = \text{diag}(\bar{\lambda}_1 \lambda_1, \dots, \bar{\lambda}_n \lambda_n) = \text{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$$

T אוניטרי אם ורק אם $T^*T = \text{Id}$ אם ורק אם $[T^*T]_B = I_n$, אבל מהחישוב הנ"ל זה מתקיים בדיוק כאשר הערכים העצמיים של T על מעגל היחידה (כלומר, עם ערך מוחלט 1).

תרגיל 6.13. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממידם סופי מעל \mathbb{C} .

1. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הפיך. הוכיחו כי $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

2. נסמן ב- \mathcal{M} את קבוצת כל ההעתקות $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ההרמיטיות, ונסמן ב- \mathcal{N} את קבוצת כל ההעתקות $U \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ האוניטריות ש- 1 אינו ערך עצמי שלהן. יהי

$$\Phi: \mathcal{M} \rightarrow V$$

$$T \mapsto (T + i \text{Id}_V)(T - i \text{Id}_V)^{-1}$$

הראו כי Φ מוגדר היטב וכי $\text{Im}(\Phi) \subseteq \mathcal{N}$.

3. הוכיחו כי Φ חד-חד ערכית וכי $\text{Im}(\Phi) = \mathcal{N}$.

פתרון. 1. נראה כי $(T^{-1})^* \circ T^* = \text{Id}_V$. אכן, ידוע $(S_1 \circ S_2)^* = S_2^* \circ S_1^*$ ולכן

$$(T^{-1})^* \circ T^* = (T \circ T^{-1})^* = \text{Id}_V^* = \text{Id}_V$$

כנדרש.

2. ראשית, יש להראות כי $T - i \text{Id}_V$ אכן הפיך לכל $T \in \mathcal{M}$. ראינו כי אופרטורים אוניטריים הינם עם ערכים עצמיים ממשיים, לכן i אינו ערך עצמי של T ולכן זה אכן המקרה.

כעת נראה כי $\Phi(T) \in \mathcal{N}$ לכל $T \in \mathcal{M}$. ראינו כי אופרטור נורמלי הינו אוניטרי אם ורק אם הערכים העצמיים שלו על מעגל היחידה, לכן יש להראות כי $\Phi(T)$ נורמלי, כי הערכים העצמיים שלו על מעגל היחידה, וכי הם שונים מאחת.

T הרמטיטי ולכן נורמלי, וממשפט פירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B עבור T לכסין. אז

$$[\Phi(T)]_B = ([T]_B + iI_n)([T]_B - iI_n)^{-1}$$

גם מטריצה אלכסונית. כיוון שהבסיס B אורתונורמלי, נקבל שוב ממשפט הפירוק הספקטרלי כי $\Phi(T)$ נורמלי.

כעת, ערך עצמי של $\Phi(T)$ יהיה מהצורה $\mu = \frac{\lambda+i}{\lambda-i}$ עבור λ ערך עצמי של T . כיוון ש- T הרמיטי, λ כזה הינו ממשי. נשים לב כי $\mu \neq 1$ כי המונה והמכנה שונים, ונותר לנו להראות כי $|\mu| = 1$. אכן,

$$\mu = \frac{(\lambda+i)^2}{(\lambda+i)(\lambda-i)}$$

ואז

$$\begin{aligned} |\mu| &= \mu \bar{\mu} \\ &= \frac{(\lambda+i)^2 \overline{(\lambda+i)^2}}{(\lambda+i)^2 (\lambda-i)^2} \\ &= \frac{(\lambda+i)^2 (\lambda-i)^2}{(\lambda+i)^2 (\lambda-i)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

כנדרש.

3. ננסה למצוא את λ בחזרה מתוך μ . נבודד אותו במשוואה $\mu = \frac{\lambda+i}{\lambda-i}$. נתחיל בכפל במכנה.

$$\mu\lambda - i\mu = \lambda + i$$

נעביר אגפים ונקבל

$$(\mu - 1)\lambda = (\mu + 1)i$$

ולכן

$$\lambda = i \cdot \frac{\mu + 1}{\mu - 1}$$

בהשראת זאת, נגדיר

$$\Psi: \mathcal{N} \rightarrow V$$

$$U \mapsto i(U + \text{Id}_V)(U - \text{Id}_V)^{-1}$$

ונראה שמתקיים $\text{Im}(\Psi) = \mathcal{M}$ וגם $\Psi = \Phi^{-1}$.

ראשית, יהי $U \in \mathcal{N}$ ונראה כי $\Phi(U) \in \mathcal{M}$. כיוון ש- U אוניטרי, הוא נורמלי וממשפט הפירוק הספקטרי קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו $[U]_B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ מטריצה אלכסונית. ראינו גם שבמקרה זה הערכים העצמיים הינם על מעגל היחידה, ומהגדרת \mathcal{N} הם אינם כוללים את 1. כעת

$$[\Psi(U)]_B = \text{diag}\left(i \cdot \frac{\mu_1 + 1}{\mu_1 - 1}, \dots, i \cdot \frac{\mu_n + 1}{\mu_n - 1}\right)$$

ומהחישוב למעלה נקבל כי איברי האלכסון ממשיים. ראינו שאופרטור הינו הרמיטי אם ורק אם הוא לכסין בבסיס אורתונורמלי וגם איברי האלכסון שלו ממשיים, ולכן $\Phi(U) \in \mathcal{M}$.

מהחישוב למעלה נקבל גם כי

$$\begin{aligned} [\Phi(\Psi(U))]_B &= \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = [U]_B \\ [\Psi(\Phi(T))]_C &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [T]_C \end{aligned}$$

עבור U כזה ועבור $T \in \mathcal{M}$ לכסין בבסיס אורתונורמלי C . לכן אם נסתכל על Φ, Ψ בתור העתקות

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{N} \\ \Psi: \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{M} \end{aligned}$$

על ידי צמצום הטווח, נקבל כי Φ, Ψ העתקות הופכיות, ובפרט חדיד ערכיות ועל.

תרגיל 6.14. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הרמיטי ונניח שלכל ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{C}$ מתקיים $\lambda \geq 0$. הראו כי קיים אופרטור יחיד $S \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ שכל הערכים העצמיים שלו אי-שליליים וכך שמתקיים $S^2 = T$.

פתרון. T הרמיטי ולכן נורמלי. ממשפט הפירוק הספקטרי, קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו $[T]_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ מההנחה, $\lambda_i \geq 0$ לכל $i \in [n]$. אז קיים שורש חיובי $\sqrt{\lambda_i}$ וניקח $(\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}))^{-1} (\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})) = S$ להיות האופרטור עבורו $[S]_B = (\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}))$. אז $[S]_B = [T]_B$ ולכן $S^2 = T$.

תרגיל 6.15. נראה בתרגיל זה כי כל אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ניתן לכתיבה כצירוף לינארי של ארבעה אופרטורים אוניטריים.

1. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. הראו שניתן לכתוב את T כצירוף לינארי של שני אופרטורים הרמיטיים.

2. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הרמיטי. הראו שניתן לכתוב את T כצירוף לינארי של שני אופרטורים אוניטריים.

פתרון. 1. נכתוב

$$T = \frac{T + T^*}{2} + \frac{T - T^*}{2} = \frac{T + T^*}{2} + i \left(\frac{T - T^*}{2i} \right)$$

ואכן

$$\begin{aligned} \left(\frac{T + T^*}{2} \right)^* &= \frac{1}{2} (T^* + T^{**}) = \frac{1}{2} (T + T^*) \\ \left(\frac{T - T^*}{2i} \right)^* &= \frac{1}{2i} (T^* - T^{**}) = -\frac{1}{2i} (T^* - T) = \frac{1}{2} (T - T^*) \end{aligned}$$

לכן שני האופרטורים הרמיטיים.

2. רעיון: נרצה, באנלוגיה למקרה הקודם, לכתוב

$$T = \frac{T + iS}{2} + \frac{T - iS}{2}$$

כיוון ש- T הרמיטי ונרצה לכתוב את S בתור ביטוי ב- T , נרצה לחפש S הרמיטי שמתחלף עם T . אז, כדי ש- $T + iS$ יהיה אוניטרי צריך להתקיים

$$\text{Id}_V = (T + iS)(T + iS)^* = (T + iS)(T^* - iS^*) = (T + iS)(T - iS) = T^2 - S^2$$

ולכן $S^2 = \text{Id}_V - T^2$.

יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הרמיטי. עבור אופרטורים אוניטריים, הערכים העצמיים על מעגל היחידה. אז, הערכים העצמיים של סכום של אופרטורים אוניטריים לא יוכלו להיות גדולים מדי. לשם כך, נתחיל בנרמול של T .

נסמן ב- $\sigma(T)$ את אוסף הערכים העצמיים של T , ונגדיר

$$c(T) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$$

וגם $\tilde{T} = \frac{1}{c(T)}T$. נראה כי $\tilde{T} = \frac{F+G}{2}$ צירוף של שני אופרטורים אוניטריים ונקבל כי $\tilde{T} = \frac{c(T)}{2}F + \frac{c(T)}{2}G$ צירוף לינארי של שני אופרטורים אוניטריים.

נשים לב כי הערכים העצמיים של \tilde{T} מערך מוחלט לכל היותר 1. אכן, אם $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי עם וקטור עצמי v , נקבל

$$T(v) = c(T)\tilde{T}(v) = c(T)\lambda v$$

ולכן v וקטור עצמי של T עם ערך עצמי $\lambda c(T)$. אבל, מהגדרת $c(T)$ נקבל

$$c(T) \geq |c(T)\lambda| = c(T)|\lambda|$$

ולכן $|\lambda| \leq 1$.

כעת, \tilde{T} הרמיטי כי T הרמיטי. לכן הוא נורמלי, ולכן קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. נקבל כי הערכים העצמיים של $\text{Id}_V - T^2$, שהינם מהצורה $1 - \lambda^2$ עבור λ ערך עצמי של \tilde{T} , הינם אי-שליליים. לכן, קיים שורש $\sqrt{\text{Id}_V - \tilde{T}^2}$.

יהיו

$$\begin{aligned} F &= \tilde{T} + i\sqrt{\text{Id}_V - \tilde{T}^2} \\ G &= \tilde{T} - i\sqrt{\text{Id}_V - \tilde{T}^2} \end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{F+G}{2} \\ F^*F &= \left(\tilde{T} + i\sqrt{\text{Id}_V - \tilde{T}^2}\right) * \left(\tilde{T} + i\sqrt{\text{Id}_V - \tilde{T}^2}\right) \\ &= \left(\tilde{T} - i\sqrt{\text{Id}_V - \tilde{T}^2}\right) \left(\tilde{T} + i\sqrt{\text{Id}_V - \tilde{T}^2}\right) \\ &= \tilde{T}^2 - (\text{Id}_V \tilde{T}^2) \\ &= \text{Id}_V \end{aligned}$$

ובאותו אופן $G^*G = \text{Id}_V$ (אפשר גם לשים לב כי $F^* = G$ ולכן $G^*G = FF^* = \text{Id}_V$).