## 5 אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית אופרטורים על מרחבי מכפלה פנימית

16.1.2023 :תאריך הגשה

עם המכפלה  $B\in V$  ותהי , $\langle X,Y
angle=\mathrm{tr}\,(Y^tX)$  עם המכפלה הפנימית ע $V=\mathrm{Mat}_n\,(\mathbb{R})$  ותהי .1 תרגיל

$$\Phi_B \colon V \to V$$

$$A \mapsto BA$$

- $.\Phi_{R}^{st}$  את חשבו .1
- ?ינורמלי:  $\Phi_B$  נורמליי האופרטור מטריצות B נורמליי עבור אילו
- אמור לעצמו? צמוד אילו מטריצות Bמטריצות אילו עבור יעבור.3
- אורתוגונלי? עבור אילו מטריצות B האופרטור עבור אילו עבור  $\Phi_B$

תרגיל 2. יהי על דר המנימית אוגדר הפנימית על המכפלה הפנימית על המכפלה המכפלה אוגדר על דר אוגדר על  $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V
ight)$  ויהי  $(X,Y)=\mathrm{tr}\left(Y^{t}X
ight)$  המוגדר על ידי

$$.T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16a & 4b - 6c \\ -6b + 13c & 16d \end{pmatrix}$$

 $S^2=T$  צמוד לעצמו עבורו צמיט אופרטור אופרטור אופרטור אלכסונית, דורו עבורו עבורו עבורו אלכסונית, אופרטור אופרטור עבורו איכסונית איכסונית, מיצאו צייט אורתונורמלי

 $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V
ight)$  יהי עצמיים עצמיים עצמיים כפלה פנימית מרוכב מרחב איזי  $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V
ight)$  יהי מרוכב ממימד סופי, יהי  $\|v\|=5$  וגם  $\|v\|=5$  איז עבורו  $\|v\|=5$  בראו שיש ע

|a| 
eq 1 עבורו  $a \in \mathbb{C}$  יהי  $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$  יהי סופי, יהי מרוכב ממימד פנימית מרוכב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי,

- T=0 אז  $T^*=a$  או כי אם .1
- . $\ker\left(T\right)=\ker\left(S\right)$  כי הוכיחו הוכיחו  $S=T-aT^*$  ויהי נורמלי, ויהי 2

תרגיל 1. הייו  $\lambda\in\mathbb{C}$  ויהי הייו  $T\in\mathrm{End}_\mathbb{C}\left(V
ight)$  ווניח ממימד מרחב מכפלה פנימית מרחב מרחב ממימד סופי, ויהי  $\|v\|=1$  ווגם עבור  $v\in V$ 

$$.\left\Vert Tv-\lambda v\right\Vert <\varepsilon$$

 $|\lambda-\lambda'|<arepsilon$  עבורו  $\lambda'\in\mathbb{C}$  עבור עצמי Tהראו כי יש ל-

תרגיל 6. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{3}(\mathbb{C})$$

- $A=U\Sigma V^*$  אלכסונית, עבורן  $\Sigma\in\mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{C}
  ight)$  אוניטריות, ומטריצה  $U,V\in\mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{C}
  ight)$  מיצאו מטריצות.
  - 2. מיצאו את

$$\cdot \max \left\{ \|Av\| \mid \substack{v \in \mathbb{C}^3 \\ \|v\| = 1} \right\}$$