אלגברה ב' (01040168) - חורף 2026
תרגול 5 - עוד הטלות, גרם שמידט, וההעתקה הצמודה
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־7 בדצמבר 2025

1 הטלות אורתוגונליות וגרם שמידט

הגדרה 1.1 (הטלה אורתוגונלית). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. ההטלה האורתוגונלית על W היא ההטלה על W ביחס לסכום הישר $V = W \oplus W^{\perp}$.

טענה 1.2. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. יהי $B = (w_1, \ldots, w_m)$ בסיס **אורתונורמלי** של W ויהי $v \in V$. תהי P_W ההטלה האורתוגונלית על W. אז

$$P_W(w) = \sum_{i \in [m]} \langle v, w_i \rangle w_i.$$

תרגיל 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, v \in V$. הראו כי $u \perp v$ אם ורק אם

$$\|u\| \leq \|u + av\|$$

לכל $a \in \mathbb{F}$.

פתרון. אם $u \perp v$ ו־$a \in \mathbb{F}$, נקבל מפיתגורס

$$\|u + av\|^2 = \|u\|^2 + |a|^2 \|v\|^2 \geq \|u\|^2$$

ולכן $\|u\| \leq \|u + av\|$.
נניח כי $\langle u, v \rangle \neq 0$ ונניח תחילה כי $\|v\| = 1$. אז

$$\langle \langle u, v \rangle v, v \rangle = \langle u, v \rangle \langle v, v \rangle = \langle u, v \rangle \|v\|^2 = \langle u, v \rangle \neq 0$$

וגם

$$\langle u - \langle u, v \rangle v, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle \langle u, v \rangle v, v \rangle = 0 \,.$$

אז, ממשפט פיתגורס

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|u - \langle u, v \rangle v + \langle u, v \rangle v\|^2 \\ &= \|u - \langle u, v \rangle v\|^2 + \|\langle u, v \rangle v\|^2 \\ &> \|u - \langle u, v \rangle v\|^2 \end{aligned}$$

כאשר האי־שוויון חזק כי $v \neq 0$ מההנחה $\langle u, v \rangle \neq 0$. לכן, עבור $a = \langle u, v \rangle$ לא מתקיים $\|u\| \leq \|u + av\|$.
בעת, אם v כללי, הוקטור $\frac{v}{\|v\|}$ הינו מאורך 1 ולכן יש $a' \in \mathbb{F}$ עבורו $\left\| u + a' \frac{v}{\|v\|} \right\| < \|u\|$. אז ניקח $a = \frac{a'}{\|v\|}$ ונקבל כי $\|u + av\| < \|u\|$.

בדי למצוא בסיסים אורתונורמליים ומשלימים ישרים, ניעזר בתהליך שלוקח בסיס כלשהו ומחזיר בסיס אורתונורמלי.

משפט 1.3 (גרם־שמידט). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $B = (u_1, \ldots, u_n)$ בסיס של V. קיים בסיס אורתונורמלי $C = (v_1, \ldots, v_n)$ של V עבורו

$$\operatorname{Span}(u_1, \ldots, u_i) = \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_i)$$

לכל $i \in [n]$.

ניסוח זה של המשפט לא מתאר לנו איך למצוא את C, אבל ההוכחה שלו קונסטרוקטיבית ומתארת את האלגוריתם הבא.

1. עבור $i=1$ ניקח $v_i=\frac{u_i}{\|u_i\|}$.
2. עבור כל i לאחר מכן, לפי הסדר, ניקח
$$w_i=u_i-\sum_{j\in[i-1]}\langle u_i,v_j\rangle$$
ואז $v_i=\frac{w_i}{\|w_i\|}$.

מסקנה 1.4. יהי $V \le W$ תת־מרחב במרחב מכפלה פנימית. בדי למצוא אורתונורמלי של W ושל $W^{\perp}$ ניקח בסיס B_W של W ונשלים אותו לבסיס $B=B_W\cup B_W'$ של V. נבצע את תהליך גרם־שמידט על B ונקבל בסיס $C=C_W\cup C_W^{\perp}$ כך ש־$\operatorname{Span}(C_W)=\operatorname{Span}(B_W)=W$. בל הוקטורים ב־$C_W^{\perp}$ ניצבים ל־W בי C אורתונורמלי, ולכן $W':=\operatorname{Span}\left(C_W^{\perp}\right)\subseteq W^{\perp}$. במו בן,
$$\dim\left(W'\right)=\dim\left(V\right)-\dim\left(W\right)=\dim\left(W^{\perp}\right)$$
בי $V=W\oplus W'=W\oplus W^{\perp}$, ולכן יש שוויון $W'=W^{\perp}$.

משפט 1.5 (מרחק של וקטור מתת־מרחב). יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהי $W\le V$, תהי P_W ההטלה האורתוגונלית על W ויהי $v\in V$. מתקיים
$$d\left(v,W\right)=d\left(v,p_W\left(v\right)\right).$$

תרגיל 2. יהי $V=\operatorname{Mat}_2\left(\mathbb{R}\right)$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית
$$\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}\left(B^tA\right)$$
ויהי $W\le V$ התת־מרחב של המטריצות הסימטריות.

1. מיצאו בסיס אורתונורמלי עבור W ועבור $W^{\perp}$.
2. הראו בי $P_W\left(A\right)=\frac{A+A^t}{2}$ בשתי דרכים שונות.
3. חשבו את המרחק של $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ מ־W.

פתרון. 1. ניקח בסיס $B_W=\left(E_{1,1},E_{1,2}+E_{2,1},E_{2,2}\right)$ של W ונשלים אותו לבסיס
$$B=\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right)=\left(E_{1,1},E_{1,2}+E_{2,1},E_{2,2},E_{1,2}\right)$$
של V. נבצע את תהליך גרם־שמידט בדי לקבל בסיס אורתונורמלי $\left(v_1,v_2,v_3,v_4\right)$ עבורו $W=\operatorname{Span}\left(v_1,v_2,v_3\right)$ וגם $W^{\perp}=\operatorname{Span}\left(v_4\right)$.

נחשב
$$\begin{aligned}
v_1&=\frac{1}{\|E_{1,1}\|}E_{1,1}=E_{1,1}\\
w_2&=u_2-\langle u_2,v_1\rangle v_1=E_{1,2}+E_{2,1}-0=E_{1,2}+E_{2,1}\\
v_2&=\frac{1}{\|w_2\|}w_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2}+E_{2,1}\right)\\
w_3&=u_3-\langle u_3,v_2\rangle v_2-\langle u_3,v_1\rangle v_1=u_3=E_{2,2}\\
v_3&=\frac{1}{\|w_3\|}w_3=E_{2,2}\\
w_4&=u_4-\langle u_4,v_3\rangle v_3-\langle u_4,v_2\rangle v_2-\langle u_4,v_1\rangle v_1\\
&=E_{1,2}-\left\langle E_{1,2},\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2}+E_{2,1}\right)\right\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2}+E_{2,1}\right)\right)\\
&=E_{1,2}-\frac{1}{2}\left(E_{1,2}+E_{2,1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(E_{1,2}-E_{2,1}\right)\\
v_4&=\frac{w_4}{\|w_4\|}=\frac{1}{\|E_{1,2}-E_{2,1}\|}\left(E_{1,2}-E_{2,1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2}-E_{2,1}\right)
\end{aligned}$$

ונקבל כי

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(E_{1,1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2}+E_{2,1}\right), E_{2,2}\right)$$

בסיס אורתונורמלי של W וכי $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2}-E_{2,1}\right)$ בסיס אורתונורמלי של $W^{\perp}$. אז, $W^{\perp}$ מרחב המטריצות האנטיסימטריות.

2. בדרך אחת, זכור לנו מאלגברה א' כי

$$A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$$

כאשר $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ו־$\frac{A-A^t}{2}$ אנטי־סימטרית. אז $\frac{A+A^t}{2} \in W$ וכיוון ש־$W^{\perp}$ מרחב המטריצות האנטיסימטריות, נקבל גם $\frac{A-A^t}{2} \in W^{\perp}$. לכן $P_W\left(A\right) = \frac{A+A^t}{2}$.

אבל, במקרה הכללי, לא נדע מראש איך לכתוב וקטור $v \in V$ בתור סכום של וקטור ב־$W \le V$ ווקטור ב־$W^{\perp}$. כדי לחשב את ההטלה $P_W\left(A\right)$ נוכל לקחת בסיס אורתונורמלי של W ולהשתמש בנוסחא עבור ההטלה האורתוגונלית לפי בסיס בזה.

אכן,

$$\begin{aligned} P_W\left(A\right) &= \sum_{i\in[3]} \left\langle A, v_i\right\rangle v_i \\ &= \left\langle A, E_{1,1}\right\rangle E_{1,1} + \left\langle A, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2}+E_{2,1}\right)\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{1,2}+E_{2,1}\right) + \left\langle A, E_{2,2}\right\rangle, E_{2,2} \\ &= a_{1,1}E_{1,1} + \frac{1}{2}\left(a_{1,2}+a_{2,1}\right)\left(E_{1,2}+E_{2,1}\right) + a_{2,2}E_{2,2} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} \\ \frac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{A+A^t}{2} \end{aligned} \quad .$$

3. נכתוב את A בתור סכום של מטריצה סימטרית ואנטי־סימטרית. ראינו כי

$$A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$$

כאשר $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ו־$\frac{A-A^t}{2}$ אנטי־סימטרית. אז $d_W\left(A\right) = \frac{A+A^t}{2}$ ונקבל כי המרחק של A מ־W הוא

$$d\left(A, \frac{A+A^t}{2}\right) = \left\|A - \frac{A+A^t}{2}\right\|.$$

מתקיים

$$\begin{aligned} \left\|A - \frac{A+A^t}{2}\right\| &= \left\|\frac{A-A^t}{2}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ולכן $d\left(A, W\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2 עוד מכפלות פנימיות

הגדרה 2.1 (מכפלה פנימית לפי בסיס). יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ויהי B בסיס של V.

נגדיר מכפלה פנימית $\left\langle \cdot, \cdot \right\rangle_B$ לפי

$$\left[u, v\right]_B \coloneqq \left\langle \left[u\right]_B, \left[v\right]_B \right\rangle_{\text{Std}} .$$

כאשר $\left\langle \cdot, \cdot \right\rangle_{\text{Std}}$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{F}^n$.

תרגיל 3. יהי $V=M_2(\mathbb{R})$ עם הבסיס

$$.B=\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

מיצאו מכפלה פנימית על V לפיה B בסיס אורתונורמלי.

פתרון. ניזכר כי כל מכפלה פנימית על V היא מהצורה $\langle\cdot,\cdot\rangle_C$ עבור בסיס C של V. לפי ההגדרה, נקבל כי אם

$$B=(v_1,v_2,v_3,v_4)$$

אז

$$,\langle v_i,v_j\rangle_B=\left[[v_i]_B,[v_j]_B\right]_{\text{Std}}=\langle e_i,e_j\rangle_{\text{Std}}=\delta_{i,j}$$

ולכן B אורתונורמלי לפי המכפלה הפנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$. נרצה אם כן לחשב את $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$.

יהי $V \ni \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=v$. נחפש $\alpha_i\in\mathbb{R}$ עבורם $v=\sum_{i\in[4]}\alpha_i$, כלומר כאלו עבורם

$$.\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4\\\alpha_3&\alpha_4\end{pmatrix}$$

נקבל מערכת משוואות בה $\alpha_3=c,\alpha_4=d$ ובן

$$a=\alpha_1+\alpha_2+c$$
$$.b=\alpha_1+2\alpha_2+d$$

נקבל מהשורה הראשונה כי

$$\alpha_2=a-\alpha_1-c$$

ואז מהשורה השנייה כי

$$b=2a-2c-\alpha_1+d$$

ולכן

$$.\alpha_1=2a-b-2c+d$$

נציב זאת במשוואה עבור α_2 ונקבל כי

$$.\alpha_2=-a+b+c-d$$

בסך הכל, נקבל כי

$$,\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(2a-b-2c+d)\,v_1+(-a+b+c-d)\,v_2+cv_3+dv_4$$

ובאותו האופן נקבל כי

$$.\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=(2\alpha-\beta-2\gamma+\delta)\,v_1+(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\,v_2+\gamma v_3+\delta v_4$$

לכן

$$\left\langle\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\right\rangle_B=\left\langle\begin{pmatrix}2a-b-2c+d\\-a+b+c-d\\c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\alpha-\beta-2\gamma+\delta\\-\alpha+\beta+\gamma-\delta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}\right\rangle_{\text{Std}}$$
$$=(2a-b-2c+d)\,(2\alpha-\beta-2\gamma+\delta)+(-a+b+c-d)\,(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)+c\gamma+d\delta$$

כנדרש.

3 ההעתקה הצמודה

משפט 3.1 (ההעתקה הצמודה). יהיו V,W מרחבי מכפלה פנימית סוף־מימדיים ותהי $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$. קיימת העתקה יחידה $T^{*}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(W,V\right)$ עבורה

$$\left\langle T\left(v\right),w\right\rangle _{W}=\left\langle v,T^{*}\left(w\right)\right\rangle _{V}$$

לכל $v\in V$ ולכל $w\in W$.
היא נקראת ההעתקה הצמודה של T.

משפט 3.2. יהיו $\left(V,\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle _{V}\right),\left(W,\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle _{W}\right)$ מרחבי מכפלה פנימית סוף מימדיים עם בסיסים אורתונורמליים B,C בהתאמה, ותהי $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,W\right)$. אז $\left[T^{*}\right]_{B}^{C}=\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)^{*}$.

בעת, אם $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$, יש לנו דרכים שונות לחשב את T^{*}. נוכל לנחש איזה אופרטור יקיים $\left\langle Tv,w\right\rangle =\left\langle v,T^{*}w\right\rangle$ לכל $v,w\in V$, על ידי מניפולציות של הצגת המכפלה הפנימית. נוכל גם לכתוב את T^{*} בצורה כללית ולפתור מערכת משוואות. לבסוף, נוכל לקחת בסיס אורתונורמלי B, כדי שיתקיים $\left[T^{*}\right]_{B}=\overline{\left[T\right]_{B}}^{t}$, ואז לשחזר את T^{*} מהמטריצה המייצגת. נראה דוגמאות לחישוב בכל אחת מהדרכים.

תרגיל 4. יהי $V=\mathbb{R}_{2}\left[x\right]$ עם המכפלה הפנימית

$$.\left\langle f,g\right\rangle =\int_{-1}^{1}f\left(x\right)\bar{g}\left(x\right)\mathrm{d}x$$

יהי $D\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ אופרטור הגזירה. מיצאו את D^{*}.

פתרון. כדי להראות $D^{*}=S$ די להראות כי $\left\langle Df,g\right\rangle =\left\langle f,Dg\right\rangle$ עבור f,g בבסיס נתון, מלינאריות. נחשב מה צריך להיות D^{*} לפי הבסיס $\left(1,x,x^{2}\right)$. יהי $g\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$. נחשב את מכפלת $D\left(g\right)$ עם 1

$$\begin{aligned}0 & =\left\langle 0,g\right\rangle \\
 & =\left\langle D\left(1\right),g\right\rangle \\
 & =\left\langle 1,D^{*}\left(g\right)\right\rangle \\
 & =\int_{-1}^{1}D^{*}\left(g\right)\left(x\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

עם x

$$\begin{aligned}\frac{2a}{3}+2c & =\frac{ax^{3}}{3}+\frac{bx^{2}}{2}+cx\Big|_{-1}^{1}\\
 & =\int_{-1}^{1}ax^{2}+bx+c\,\mathrm{d}x\\
 & =\left\langle 1,g\right\rangle \\
 & =\left\langle D\left(x\right),g\right\rangle \\
 & =\left\langle x,D^{*}\left(g\right)\right\rangle \\
 & =\int_{-1}^{1}xD^{*}\left(g\right)\left(x\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

ועם x^{2}

$$\begin{aligned}\frac{4b}{3} & =\frac{2ax^{4}}{4}+\frac{2bx^{3}}{3}+\frac{2cx^{2}}{2}\Big|_{-1}^{1}\\
 & =2\int_{-1}^{1}ax^{3}+bx^{2}+cx\,\mathrm{d}x\\
 & =\left\langle 2x,g\right\rangle \\
 & =\left\langle D\left(x^{2}\right),g\right\rangle \\
 & =\left\langle x^{2},D^{*}\left(g\right)\right\rangle \\
 & =\int_{-1}^{1}x^{2}D^{*}\left(g\right)\left(x\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

נכתוב $D^*(g)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ונקבל

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^{1}\alpha x^2+\beta x+\gamma\,\mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{3}+2\gamma\\
\frac{2a}{3}+c &= \int_{-1}^{1}\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x\,\mathrm{d}x = \frac{2\beta}{3}\\
\frac{4b}{3} &= \int_{-1}^{1}\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha x^5}{5}+\frac{\beta x^4}{4}+\frac{\gamma x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\alpha}{5}+\frac{2\gamma}{3}
\end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה, $\gamma=-\frac{\alpha}{3}$. אז מהמשוואה השלישית, $\frac{4b}{3}=\frac{2\alpha}{5}-\frac{2\alpha}{9}$ כלומר

$$4b=\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{3}\right)\alpha=\left(\frac{18}{15}-\frac{10}{15}\right)\alpha=\frac{8\alpha}{15}$$

כלומר $b=\frac{2\alpha}{15}$ כלומר $\alpha=\frac{15}{2}b$. נקבל כי $\gamma=-\frac{5}{2}b$ ומהמשוואה השנייה כי $\beta=a+\frac{3c}{2}$. לכן

$$D^*\left(ax^2+bx+c\right)=\frac{15}{2}bx^2+\left(a+\frac{3c}{2}\right)x-\frac{5}{2}b.$$