

אלגברה ב' – גיליון תרגילי בית 4

מרחבים שטוריים והטלות

28.11.2025

תרגיל 1. 1. יהיו V מרחב וקטורי ממימד $\aleph_+ \in n$ מעל שדה \mathbb{F} ותהיה $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יהיו $W \leq V$ תת-מרחב T -שמור ויהי $U \leq W$ משלים ישר של W ב- V . הראו כי $T|_W = T_{W,U} \circ T|_U$.

2. מצאו דוגמא עבור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, $U_1, U_2 \leq V$, כך ש- $T|_{U_1} \neq T|_{U_2}$.

תרגיל 2. יהיו V מרחב וקטורי סופי-מימדי מעל שדה \mathbb{F} ותהיינה $P, Q \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ והטלות $\ker(P) + \ker(Q) \cap \text{Im}(P) \cap \text{Im}(Q) = \{0\}$. הראו כי אם $PQ = QP$ אז PQ הטלה על $\ker(P) \oplus \ker(Q)$ במקביל ל- $\text{Im}(P) \cap \text{Im}(Q)$.

תרגיל 3. יהיו $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור לבסין שערבי העצמיים השונים הם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. הראו כי התת-מרחבים $W_i \leq V$ שטוריים של V הם אלו מהצורה $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ עבור $W_i \leq V_{\lambda_i}$.

תרגיל 4. יהיו $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור לבסין עם ערכי עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, ולכל $i \in [k]$ תהיה $p_i \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלת T במקביל ל- V_i במקביל ל- $\bigoplus_{j \in [k] \setminus \{i\}} V_j$.

1. לכל $i \in [k]$, מיצאו פולינום p_i עבורו

$$p_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. הראו כי $p_i(T) = P_i$ לכל $i \in [k]$.