

אלגברה ב' – גיליון תרגילי בית 11

תבניות בילינאריות וחוק האינרציה של סילבסטר

תאריך הגשה: 23.1.2026

תרגיל 1. תהי $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ סימטרית ויהי m סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים החיוביים של A .

1. הראו כי יש תת־מרחב $W \leq \mathbb{R}^n$ ממימד m עבורו $\langle Aw, w \rangle > 0$ לכל $w \in W \setminus \{0\}$.

2. יהי $W' \leq \mathbb{R}^n$ תת־מרחב נוסף עבורו מתקיים $\langle Aw, w \rangle > 0$ לכל $w \in W' \setminus \{0\}$. הראו כי $\dim W' \leq m$.

תרגיל 2. יהי $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$.

1. מיצאו מכפלה פנימית f על V כך ש־

$$B = (E_{1,1} + E_{1,2}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,1} + E_{2,2}, E_{2,2})$$

הוא בסיס אורתונורמלי לפי f .

2. תהי

$$g(A, B) = \text{tr}(AB)$$

תבנית בילינארית סימטרית על V . מיצאו בסיס C של V ומטריצה $S = \text{diag}(I_{n_+}, I_{n_-}, 0_{n_0})$ עבורם $[g]_C = S$.

3. מיצאו בסיס D של V עבורו $[f]_D, [g]_D$ מטריצות אלכסוניות.

תרגיל 3. יהי

$$V = \left\{ p \in \mathbb{R}_{\leq n}[x] \mid \begin{matrix} p^{(0)}=p^{(1)} \\ p'(0)=p'(1) \end{matrix} \right\}$$

ותהי

$$\rho: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x) g''(x) dx$$

1. הראו כי ρ תבנית בילינארית סימטרית על V .

רמז: היעזרו באינטגרציה בחלקים.

2. עבור $n = 4$, מיצאו בסיס B של V עבורו $[\rho]_B$ מטריצה מהצורה

$$\text{diag}(I_{n_+}, -I_{n_-}, 0_{n_0})$$