

# אלגברה ב' – גיליון תרגילי בית 5

## מכפלות פנימיות וນיצבות

5.12.2025

**תרגיל 1.** עבור הפעולות הבאות  $f_i$ , קיבעו האם  $f_i$  מכפלה פנימית.

.1

$$f_1: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \mapsto ax + by + az$$

.2

$$f_2: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \mapsto ax + by + cz + xz$$

.3

$$f_3: \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(B^t A)$$

.4

$$f_4: \mathbb{R}_{\leq n}[x] \times \mathbb{R}_{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \dots + f(n)g(n)$$

.5

$$f_5: \mathbb{C}_{\leq n}[x] \times \mathbb{C}_{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \dots + f(n)g(n)$$

**תרגיל 2.** היעזרו באידשוון קושישורץ כדי להראות שמתקיים

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+: x + y + z \leq 2 \left( \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \right)$$

רמז: חישבו כיצד לפרש את אגף ימין בעדרת נורמה.

**תרגיל 3.** יהיו  $V$  מרחב מכפלה פנימית עם בסיס אורthonormal  $(v_1, \dots, v_n)$ , ויהיו  $u_1, \dots, u_n \in V$  עבורם

$$\forall i \in [n]: \|v_i - u_i\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

הוכיחו כי  $(u_1, \dots, u_n)$  בסיס של  $V$ .