# אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 2
# מטריצות מייצגות

13.11.2025

**תרגיל 1.** יהי $V=\mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ p(x)&\mapsto p(x+1)\end{aligned},$$

יהי $\mathrm{St}=\left(1,x,x^2,x^3\right)$ הבסיס הסטנדרטי של $V$ ותהי $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס $C$ של $V$ עבורו $A=[T]_C^{\mathrm{St}}$.

**תרגיל 2.** יהי $V=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\right)$ עם הבסיס הסטנדרטי $\mathrm{St}=(e_1,e_2)$, ויהי $D\coloneqq(T_{1,1},T_{1,2},T_{2,1},T_{2,2})$ כאשר $T_{i,j}$ מוגדרים על ידי

$$T_{i,j}(e_k)=\begin{cases}e_j & k=i\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}.$$

יהי

$$\begin{aligned}R\colon\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&\mapsto\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

שיקוף דרך ציר ה־$x$, ויהי

$$\begin{aligned}\varphi\colon V&\to V\\ T&\mapsto R^{-1}\circ T\circ R\end{aligned}.$$

מיצאו את המטריצה המייצגת $[\varphi]_D$.

**תרגיל 3.** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. נזכיר כי שני אופרטורים $T,S\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הינם דומים אם קיים אופרטור הפיך $P\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורו $T=P^{-1}\circ S\circ P$.

1. הראו כי דמיון הינו יחס שקילות.
2. הראו כי אם $\sim$ הינו יחס שקילות על קבוצה $X$, ו־$Y\subset X$, אז $\sim_Y$ המוגדר על ידי

$$y_1\sim_Y y_2\iff y_1\sim y_2$$

הינו יחס שקילות על $Y$.

3. יהי $V=\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ ותהי $S\subseteq V$ קבוצת כל המטריצות ב־$V$ ש־$1$ הינו הערך העצמי היחיד שלהן.

מחלקת דמיון של מטריצה בקבוצה $X$, היא קבוצת כל המטריצות ב־$X$ הדומות לה, וידוע כי ב־$S$ יש שתי מחלקות דמיון. כיתבו את שתיהן מפורשות.