אלגברה ב' (01040168) - חורף 2026
תרגול 1 - מטריצות מייצגות, ומרחבי העתקות לינאריות
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־7 בדצמבר 2025

סימונים

- $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ קבוצת השלמים האי־שליליים.
- $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ קבוצה השלמים החיוביים.
- $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i \in [n]} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- $\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ הוא מרחב המטריצות עם m שורות ו־n עמודות, עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$.
- $\mathbb{F}^n = \mathrm{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{F})$
- $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ הוא מרחב ההעתקות הלינאריות $V \to W$ כאשר V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.
- $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$

1 וקטורי קואורדינטות ומטריצות מייצגות

הגדרה 1.1 (וקטור קואורדינטות לפי בסיס). יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}$ מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V. כל $v \in V$ ניתן לכתוב בצורה יחידה בתור

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

עבור $\alpha_i \in \mathbb{F}$. נגדיר את וקטור הקואורדינטות של v בזה לפי הבסיס B בתור

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

הגדרה 1.2 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטוריים ממימדים $n, m \in \mathbb{N}$ בהתאמה מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ העתקה לינארית מ־V ל־W. יהיו

$$B = (v_1, \ldots, v_n)$$

ו־C בסיסים של V ו־W בהתאמה.
נגדיר את המטריצה המייצגת $[T]_C^B$ בתור

$$[T]_C^B \coloneqq \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

אם $V = W$ ובן $B = C$, נסמן

$$[T]_B \coloneqq [T]_B^B.$$

טענה 1.3. יהיו U,V,W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$, עם בסיסים B,C,D בהתאמה, ותהיינה $S\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$ ו־$T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$.
אז

$$[T\circ S]_D^B=[T]_D^C\,[S]_C^B\,.$$

הגדרה 1.4 (מטריצת מעבר בסיס). יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}$, עם בסיסים B,C, ותהי Id_V העתקת הזהות על V. נגדיר

$$M_C^B=[\mathrm{Id}_V]_C^B.$$

טענה 1.5. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו B,C,D שלושה בסיסים של V.
אז:

1. M_C^B מטריצה הפיכה, ומתקיים $\left(M_C^B\right)^{-1}=M_B^C$.
2. $M_C^B=M_C^D\,M_D^B$.

הערה 1.6. למטריצה M_C^B לא נקרא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס C או להיפך.
מצד אחד, היא מקיימת

$$\forall v\in V:\ M_C^B\,[v]_B=[v]_C,$$

ולכן יש הקוראים לה מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס C.
מצד שני, אם $V=\mathbb{F}^n$,

$$\mathrm{St}=(e_1,\dots,e_n)$$

הבסיס הסטנדרטי של V, ונכתוב

$$\begin{aligned}B&=\mathrm{St}\\ ,C&=(c_1,\dots,c_n)\end{aligned}$$

נקבל כי

$$\begin{aligned}M_C^B c_i&=M_C^{\mathrm{St}}\,[c_i]_{\mathrm{St}}\\ &=[c_i]_C\\ &=e_i\end{aligned}$$

כלומר

$$\left(M_C^B c_1,\dots,M_C^B c_n\right)=B\,.$$

לכן, יש הקוראים למטריצה M_C^B מטריצת מעבר מהבסיס C לבסיס B.
כדי למנוע בלבול, במקום להתייחס למטריצה כזאת כמטריצת מעבר מבסיס זה או אחר, נכתוב מפורשות M_C^B.

תרגיל 1. יהי $V=\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ עם הבסיס

$$\mathrm{St}_V:=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

בסיס זה נקרא הבסיס הסטנדרטי של $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

1. יהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ A&\mapsto A^t\end{aligned}\quad.$$

חשבו את $[T]_{\mathrm{St}_V}$.

2. יהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ A&\mapsto A^2\end{aligned}\quad.$$

חשבו את $[T]_{\mathrm{St}_V}$.

3. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

מצאו אופרטור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ עבורו $[T]_{\mathrm{St}_2} = A$.

פתרון. 1. נחשב את $[T]_{\mathrm{St}_V}$ לפי ההגדרה ונקבל:

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathrm{St}_V} &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \left[T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathrm{St}_V} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. נחשב את $[T]_{\mathrm{St}_V}$ לפי ההגדרה ונקבל:

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathrm{St}_V} &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \left[T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathrm{St}_V} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. לפי הגדרת מטריצה מייצגת, עבור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ מתקיים

$$[T]_{\mathrm{St}_V} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \left[T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} & \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}.$$

זה שווה ל־A אם ורק אם יש שוויון בין כל העמודות בין המטריצות:

$$\left[T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\right]_{\mathrm{St}_V}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

לפי הגדרת וקטורי קואורדינטות זה שקול לכך שמתקיימים השוויונות הבאים:

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\\
T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\\
T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\\
T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}
\end{aligned}\tag{1}$$

מלינאריות של העתקות ליניאריות נקבל כי במקרה זה

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)&=aT\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)+bT\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)+cT\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)+dT\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\\
&=\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b&b\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\d&d\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

לכל $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. להיפך, אופרטור T המקיים

$$\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}:T\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix}$$

מקיים בפרט את השוויונים ב־(1). לכן, האופרטור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ היחיד עבורו $[T]_{\mathrm{St}_V} = A$ הוא

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

תרגיל 2. יהי $V = \mathbb{C}_{\geq 2}[x]$ מרחב הפולינומים ממעל לכל היותר 2 עם מקדמים מרוכבים, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, ויהיו

$$\begin{aligned} B &:= \left(1+x, x+x^2, 1+x^2\right) \\ C &:= \left(x^2, x, 1\right) \end{aligned}$$

שני בסיסים של V.
ידוע כי

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

חשבו את $[T]_C$.

פתרון. ניעזר בטענה 1.3 כדי לקבל כי

$$[T]_C = M_C^B\,[T]_B^C = M_C^B\,[T]_B\,M_B^C.$$

כעת

$$M_C^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [1+x]_C & [x+x^2]_C & [1+x^2]_C \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

לפי טענה 1.5 מתקיים $M_B^C = \left(M_C^B\right)^{-1}$. נהפוך את המטריצה M_C^B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

לכן

$$,M_B^C = \left(M_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned} [T]_C &= M_C^B\,[T]_B\,M_B^C \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad , \end{aligned}$$

כנדרש.

2 מרחבי העתקות לינאריות

הגדרה 2.1 (מרחב העתקות לינאריות). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$.
נסמן את מרחב ההעתקות הלינאריות מ־V ל־W בתור $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. זהו מרחב וקטורי.
איברי $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נקראים גם הומומורפיזמים ליניאריים.

הגדרה 2.2 (מרחב אופרטורים ליניאריים). יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.
נגדיר את מרחב האופרטורים הליניאריים על V בתור

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V).$$

איבריו נקראים אופרטורים ליניאריים או אנדומורפיזמים ליניאריים.

תרגיל 3. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $B \coloneqq (v_1, \ldots, v_n)$ ו־$C \coloneqq (w_1, \ldots, w_m)$ בסיסים של V ו־W בהתאמה, ולכל $i \in [n]$ ו־$j \in [m]$ נגדיר

$$T_{i,j} \colon V \to W$$

על ידי

$$T_{i,j}(v_k) = \begin{cases} w_j & k = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

יהי

$$D \coloneqq (T_{1,1}, \ldots, T_{1,m}, T_{2,1}, \ldots, T_{2,m}, \ldots, T_{n,1}, \ldots, T_{n,m}).$$

1. הראו ש־D בסיס של $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ והסיקו כי

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)) = \dim_{\mathbb{F}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{F}}(W).$$

2. נגדיר

$$\begin{aligned} \rho_C^B \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) &\to \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}) \\ T &\mapsto [T]_C^B \end{aligned}.$$

הראו כי $\rho_C^B(T_{i,j}) = E_{j,i}$ לכל $i \in [n]$ ולכל $j \in [m]$, כאשר $E_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$ מטריצה המקיימת

$$(E_{i,j})_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & i = k \wedge j = \ell \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

הסיקו כי ρ_C^B הינו איזומורפיזם.

פתרון. 1. אם D בסיס של $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$, נקבל כי

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) = |D| = n \cdot m = \dim_{\mathbb{F}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{F}}(W),$$

כנדרש. לכן, נותר להראות כי D אכן בסיס.

נרצה להראות כי D בסיס של $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$, על ידי כך שנראה שכל $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ ניתן לכתיבה בצורה יחידה כצירוף לינארי של איברי D.

נסמן ב־$(v, v_i)_B$ את המקדם של v_i בכתיבה של $v \in V$ כצירוף לינארי של איברי B, וב־$(w, w_i)_C$ את המקדם של w_i בכתיבה של $w \in W$ כצירוף לינארי של איברי C.

כדי לכתוב את T כצירוף לינארי של איברי D, נרצה לדעת איך איברי D פועלים על וקטור כללי ב־V.
נקבל כי

$$\begin{aligned} T_{i,j}(v) &= T_{i,j}\left(\sum_{k \in [n]} (v, v_k)_B \, v_k\right) \\ &= \sum_{k \in [n]} (v, v_k)_B \, T_{i,j}(v_k) \\ &= (v, v_i)_B \, w_j \end{aligned} \tag{2}$$

יהי $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$. אז, לכל $v \in V$ מתקיים

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{i\in[n]} (v,v_i)_B\, v_i\right) \\ &= \sum_{i\in[n]} (v,v_i)_B\, T(v_i) \end{aligned}$$

ולאחר הצבה של

$$T(v_i) = \sum_{j\in[m]} (T(v_i), w_j)_C\, w_j$$

נקבל כי

$$\begin{aligned} T(v) &= \sum_{i\in[n]} (v,v_i)_B \sum_{j\in[m]} (T(v_i), w_j)_C\, w_j \\ &= \sum_{\substack{i\in[n]\\ j\in[m]}} (v,v_i)_B\, (T(v_i), w_j)_C\, w_j \\ &= \sum_{\substack{i\in[n]\\ j\in[m]}} (T(v_i), w_j)_C\, ((v,v_i)_B\, w_j) \\ &= \sum_{\substack{i\in[n]\\ j\in[m]}} (T(v_i), w_j)_C\, T_{i,j}(v) \end{aligned} \quad ,$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו ב־(2). בסך הכל, נקבל כי

$$T = \sum_{\substack{i\in[n]\\ j\in[m]}} (T(v_i), w_j)_C\, T_{i,j},$$

ולכן כל איבר ב־$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ ניתן לכתיבה כצירוף של איברי D.

נותר להראות כי כתיבה זאת יחידה. נניח כי $(\alpha_{i,j})_{\substack{i\in[n]\\ j\in[m]}} \subseteq \mathbb{F}$ ו־$(\beta_{i,j})_{\substack{i\in[n]\\ j\in[m]}} \subseteq \mathbb{F}$ מקיימים ש־

$$\sum_{\substack{i\in[n]\\ j\in[m]}} \alpha_{i,j} T_{i,j} = \sum_{\substack{i\in[n]\\ j\in[m]}} \beta_{i,j} T_{i,j}\ .$$

בפרט, מתקיים שוויון לאחר הצבה של v_k בשני האגפים, עבור $k \in [n]$. נקבל מהגדרת $T_{i,j}$ כי

$$\forall k \in [n] : \sum_{j\in[m]} \alpha_{k,j} w_j = \sum_{j\in[m]} \beta_{k,j} w_j.$$

אבל, $(w_1,\dots,w_m)$ בסיס של W, ולכן $\alpha_{k,j} = \beta_{k,j}$ לכל $j \in [m]$. כיוון שזה נכון לכל $k \in [n]$, נקבל כי $\alpha_{i,j} = \beta_{i,j}$ לכל $i \in [n]$ ולכל $k \in [m]$, כנדרש.

2. יהיו $i \in [n]$ ו־$j \in [m]$. לפי הגדרת מטריצה מייצגת, $[T_{i,j}]_C^B$ מטריצה שלכל $\ell \in [n]$, העמודה ה־ℓ שלה היא $[T_{i,j}(v_\ell)]_C$. לפי הגדרת $T_{i,j}$ נקבל כי עמודה זאת שווה לאפס כאשר $\ell \neq i$ ושווה ל־$[w_j]_C$ אחרת. אך $[w_j]_C$ וקטור שמקדמיו אפסים פרט ל־1 במקום ה־j. נקבל כי $[T_{i,j}]_C^B$ מטריצה שמקדמיה שווים לאפס פרט ל־1 במיקום ה־(j,i), ולכן זאת המטריצה $E_{j,i}$.

כיוון ש־

$$(E_{1,1},\dots,E_{1,m},E_{2,1},\dots,E_{2,m},\dots,E_{n,1},\dots,E_{n,m})$$

בסיס של $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$, נקבל כי ρ_C^B שולחת בסיס של $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ לבסיס של $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$, ולכן הינה איזומורפיזם.