אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 1
מטריצות מייצגות

תאריך הגשה: 5.11.2025

תרגיל 1. יהי $\mathrm{St}=(e_1,\dots,e_n)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$, ונזכיר כי עבור בסיס B של מרחב וקטורי סוף־מימדי V מעל $\mathbb{F}$ קיים איזומורפיזם

$$\begin{aligned}\rho_B : V &\to \mathbb{F}^n\\ v &\mapsto [v]_B\end{aligned}.$$

הראו כי $\rho_{\mathrm{St}} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ הינה העתקת הזהות.

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו B,C שני בסיסים של V. יהי $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור לינארי על V. נסמן $B=(v_1,\dots,v_n)$.
נראה בהרצאה כי

$$\forall i\in[n] : [T]_C^B [v_i]_B = [T(v_i)]_C.$$

הסיקו מכך כי

$$\forall v\in V : [T]_C^B [v]_B = [T(v)]_C.$$

תרגיל 3. יהי $B=(v_i)_{i\in[n]}$ בסיס למרחב וקטורי V. נתונה $T\colon V\to V$ הפיכה המקיימת

$$T(v_1+2v_2)=\sum_{i\in[n]} v_i.$$

מצאו את סכום כל מקדמי המטריצה $\left[T^{-1}\right]_B$.
למשל, אם $\left[T^{-1}\right]_B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, הסכום הוא $1+2+3+4=10$.

שימו לב לתרגילים הנוספים שבעמוד הבא.

עבור שני התרגילים הבאים, נזכיר את ההגדרה עבור מטריצות מעבר בסיס, ושתי תכונות שלהן.

הגדרה 1.1. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו B, C שני בסיסים של V. תהי

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_V \colon V &\to V\\ v &\mapsto v\end{aligned}$$

העתקת הזהות על V, כלומר ההעתקה המקיימת $\mathrm{Id}_V(v) = v$ לכל $v \in V$.
נגדיר את מטריצת המעבר M_C^B בתור

$$M_C^B = [\mathrm{Id}_V]_C^B.$$

שימו לב: למטריצה M_C^B לא נקרא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס C או להיפך. ראו הערה 1.3 שבעמוד הבא עבור הסבר בנושא.

טענה 1.2. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו B, C, D שלושה בסיסים של V.
אז:

1. M_C^B מטריצה הפיכה, ומתקיים $\left(M_C^B\right)^{-1} = M_B^C$.
2. $M_C^B = M_C^D M_D^B$.

תרגיל 4. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ העתקה לינארית חד־חד ערכית.
יהיו

$$\begin{aligned}B &= (v_1, \ldots, v_n)\\ C &= (u_1, \ldots, u_n)\end{aligned}$$

בסיסים של V ויהיו

$$\begin{aligned}B' &= (T(v_1), \ldots, T(v_n))\\ C' &= (T(u_1), \ldots, T(u_n)).\end{aligned}$$

1. הראו כי $\dim V = \dim \mathrm{Im}\, T$.
2. הראו כי B', C' קבוצות בלתי תלויות לינאריות, והסיקו כי הן בסיסים של $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$.
3. הראו כי $M_C^B = M_{C'}^{B'}$.

רמז: כיתבו את $M_C^B e_i$ ואת $M_{C'}^{B'} e_i$ כוקטורי קואורדינטות לפי הבסיסים C ו־C' בהתאמה, והראו שמתקיים שוויון.

תרגיל 5. תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. יהי St הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס B של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_{\mathrm{St}}^B$.
2. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^{\mathrm{St}}$.
3. יהי B בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^B$.

רמז: היעזרו בבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ ובאחת התכונות של מטריצות מעבר בסיס כדי לקבל שוויון הדומה לזה שבאחד הסעיפים הקודמים.

4. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ איזומורפיזם ויהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V. מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B = A$.

רמז: היעזרו בכך ש־$[T]_C^B = M_C^B [T]_B$ ובתרגיל הקודם יחד עם האופרטור

$$\begin{aligned}\rho_B \colon V &\to \mathbb{F}^n\\ v &\mapsto [v]_B\end{aligned}$$

ששולח וקטור $v \in V$ לוקטור $[v]_B \in \mathbb{F}^n$, כדי להפוך את הבעיה לזאת של מציאת בסיס $\hat{C}$ של $\mathbb{F}^n$ עבורו $M_{\hat{C}}^{\mathrm{St}} = A\left([T]_B\right)^{-1}$. כיתבו את C בעזרת הבסיס $\hat{C}$.

הערה 1.3. למטריצה M_C^B לא נקרא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס C או להיפך.
מצד אחד, היא מקיימת

$$\forall v \in V : M_C^B \left[v\right]_B = \left[v\right]_C,$$

ולכן יש הקוראים לה מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס C.
מצד שני, אם $V = \mathbb{F}^n$,

$$\mathrm{St} = (e_1, \ldots, e_n)$$

הבסיס הסטנדרטי של V, ונכתוב

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{St} \\ C &= (c_1, \ldots, c_n), \end{aligned}$$

נקבל כי

$$\begin{aligned} M_C^B c_i &= M_C^{\mathrm{St}} \left[c_i\right]_{\mathrm{St}} \\ &= \left[c_i\right]_C \\ &= e_i \end{aligned}$$

בלומר

$$\left(M_C^B c_1, \ldots, M_C^B c_n\right) = B \, .$$

לכן, יש הקוראים למטריצה M_C^B מטריצת מעבר מהבסיס C לבסיס B.
בדי למנוע בלבול, במקום להתייחס למטריצה בזאת במטריצת מעבר מבסיס זה או אחר, נכתוב מפורשות M_C^B.