אלגברה ב' (01040168) – חורף 2026
תרגול 10 – פולינומים אופייני ומינימלי, והדטרמיננטה
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־6 בינואר 2026

1 פולינומים אופייני ומינימלי

הגדרה 1.1 (פולינום אופייני). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ כאשר הערך העצמי λ_i מריבוי אלגברי $r_i \coloneqq r_a(\lambda_i)$ וכאשר

$$\sum_{i \in [k]} r_i = \dim(V).$$

הפולינום האופייני של T הוא

$$p_T(x) \coloneqq \prod_{i \in [k]} (x - \lambda_i)^{r_i}.$$

הגדרה 1.2 (פולינום מינימלי). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הפולינום המינימלי של T הוא הפולינום $p \in \mathbb{F}[x]$ המתוקן מהמעלה המינימלית עבורו $p(T) = 0$. נסמנו $m_i(x)$.

טענה 1.3. נניח כי $\mathbb{F}$ סגור אלגברית. אז ל־T בנ"ל יש פולינום מינימלי, והחזקה של $(x - \lambda_i)$ בפולינום המינימלי היא אינדקס הנילפוטנטיות של $T - \lambda_i \mathrm{Id}_V|_{V'_{\lambda_i}}$, שהוא גודל בלוק ז'ורדן המקסימלי עם ערך עצמי λ_i בצורת ז'ורדן של T.

טענה 1.4. יהי T בנ"ל ויהי $f \in \mathbb{F}[x]$ עבורו $f(T) = 0$. אז $m_T \mid f$. בלומר, קיים פולינום $g \in \mathbb{F}[x]$ עבורו $m_T(x) = f(x)g(x)$.

מסקנה 1.5 (משפט קיילי־המילטון). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$. לכל $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ מתקיים $p_T(T) = 0$.

הערה 1.6. עבור מטריצה ריבועית A, נגדיר

$$p_A \coloneqq p_{L_A},$$
$$m_A \coloneqq m_{L_A},$$

ובאותו אופן אם $f(A) = 0$ אז $m_A \mid f$, ומתקיים $p_A(A) = 0$.

תרגיל 1. יהי $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יהי $m \in \mathbb{N}_+$ עבורו $T^m = \mathrm{Id}_V$. הראו כי T לכסין.

פתרון. בדי להראות ש־T לכסין מספיק להראות שכל שורשי m_T הינם מריבוי 1. מההנחה, מתקיים $m_T \mid (x^m - 1)$ ולכן די להראות שכל שורשי $x^m - 1$ הם מריבוי 1. אכן, יש לפולינום זה m שורשים שונים

$$\left\{ e^{\frac{2\pi i k}{m}} \;\middle|\; k \in [m] \right\} = \left\{ \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \;\middle|\; k \in [m] \right\}.$$

תרגיל 2. 1. תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_6(\mathbb{C})$ המקיימות

(i) $p_A = p_B$.

(ii) $m_A = m_B$ וזהו פולינום ממעלה 5.

הראו כי $A \sim B$.

2. מצאו $A,B\in\mathrm{Mat}_6\left(\mathbb{C}\right)$ שאינן דומות וכך שמתקיים

(i) $p_A=p_B$.

(ii) $m_A=m_B$ וזהו פולינום ממעלה 4.

פתרון. 1. נתון $\deg m_A=5$, וזהו סכום גדלי הבלוקים המקסימליים של הערכים העצמיים השונים של A. לכן יש ערך עצמי λ מריבוי גיאומטרי 2 ובלוק מגודל 1, וכל ערך עצמי אחר הוא מריבוי גיאומטרי 1. אז

$$A\sim\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & & 0\\ 0 & J_m\left(\lambda_1\right) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & & \ddots & 0\\ 0 & & \cdots & 0 & J_{m_r}\left(\lambda_r\right)\end{pmatrix}.$$

נתון $m_A=m_B$ לכן באותו אופן

$$B\sim\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & & 0\\ 0 & J_m\left(\lambda_1\right) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & & \ddots & 0\\ 0 & & \cdots & 0 & J_{m_r}\left(\lambda_r\right)\end{pmatrix}$$

ונסיק כי $A\sim B$.

2. נסתכל על

$$A\coloneqq\begin{pmatrix}J_1\left(0\right) & & \\ & J_1\left(0\right) & \\ & & J_4\left(0\right)\end{pmatrix}$$
$$B\coloneqq\begin{pmatrix}J_2\left(0\right) & \\ & J_4\left(0\right)\end{pmatrix}$$

ונקבל $m_A=m_B=x^4$ אבל $A\not\sim B$ כי יש להן צורת ז'ורדן שונה.

2 הדטרמיננטה

הגדרה 2.1 (תמורה). תהי X קבוצה. תמורה על X היא העתקה הפיכה $\sigma\colon X\to X$.

סימון 2.2. נסמן ב־$\mathrm{Sym}\left(n\right)$ את התמורות על הקבוצה $[n]$.

הגדרה 2.3 (סימן של תמורה). תהי $\sigma\in\mathrm{Sym}\left(n\right)$. הסימן של σ הוא

$$\mathrm{sgn}\left(\sigma\right)\coloneqq\left(-1\right)^k$$

באשר

$$k\coloneqq\left|\left\{\left(i,j\right)\in[n]^2\;\middle|\;{\scriptstyle i<j \atop \sigma(i)>\sigma(j)}\right\}\right|.$$

הגדרה 2.4 (הדטרמיננטה). תהי $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j\in[n]}\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$. הדטרמיננטה של A היא

$$\det\left(A\right)\coloneqq\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)}\mathrm{sgn}\left(\sigma\right)\prod_{i\in[k]}a_{i,\sigma(i)}.$$

הגדרה 2.5 (תבנית k־לינארית). יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תבנית k־לינארית על V היא העתקה

$$f(\cdot,\ldots,\cdot): V^k \to \mathbb{F}$$

שהינה לינארית בכל רכיב.

הגדרה 2.6 (תבנית מתחלפת). תהי f תבנית k־לינארית על מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$. נגיד כי f תבנית מתחלפת אם לכל $\sigma \in \mathrm{Sym}(k)$ ולכל $v_1,\ldots,v_k \in V$ מתקיים

$$.f\left(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)}\right) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_1,\ldots,v_k)$$

תרגיל 3. נוכל לחשוב על הדטרמיננטה בעל העתקה

$$(\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$$

שלוקחת וקטורים $v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{F}^n$ לדטרמיננטה של

$$.\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$$

1. הראו שהעתקה זאת לינארית בכל רכיב.
2. הראו שמתקיים

$$\det(v_1,\ldots,v_i,v_{i+1},\ldots,v_n) = -\det(v_1,\ldots,v_{i+1},v_i,\ldots,v_n)$$

והסבירו איך נובע ש־$\det$ תבנית n־לינארית מתחלפת. היעזרו בכך שמתקיים

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$$

לכל זוג תמורות $\sigma,\tau \in \mathrm{Sym}(k)$.

פתרון. 1. יהיו $v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1}v_n,u,w \in \mathbb{F}^n$ ותהי $\alpha \in \mathbb{F}$. נסמן $v_i = \alpha u + w$. נראה שמתקיים

$$.\det(v_1,\ldots,v_{i-1},\alpha u+w,v_{i+1},\ldots,v_n) = \alpha\det v_1,\ldots,v_{i-1},u,v_{i+1},\ldots,v_n + \det v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_n$$

אכן,

$$\begin{aligned}
\det(v_1,\ldots,v_{i-1},\alpha u+w,v_{i+1},\ldots,v_n) &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)}\prod_{j\in[k]}\mathrm{sgn}(\sigma)\,(v_i)_{\sigma^{-1}(i)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{\substack{j\in[n]\\ \sigma(j)\neq i}}\left(v_{\sigma(j)}\right)_j\right)\cdot(v_i)_{\sigma^{-1}(i)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{\substack{j\in[n]\\ \sigma(j)\neq i}}\left(v_{\sigma(j)}\right)_j\right)\cdot\left(\alpha u_{\sigma^{-1}(i)} + w_{\sigma^{-1}(i)}\right) \\
&= \alpha\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{\substack{j\in[n]\\ \sigma(j)\neq i}}\left(v_{\sigma(j)}\right)_j\right)\cdot u_{\sigma^{-1}(i)} \\
&+ \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{\substack{j\in[n]\\ \sigma(j)\neq i}}\left(v_{\sigma(j)}\right)_j\right)\cdot w_{\sigma^{-1}(i)} \\
&= \alpha\det(v_1,\ldots,v_{i-1},u,v_{i+1},\ldots,v_n) + \det(v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_n)
\end{aligned}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך ש־u,w העמודות ה־i במטריצות שעמודותיהן $(v_1,\ldots,v_{i-1},u,v_{i+1},\ldots,v_n)$ ו־$(v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_n)$ בהתאמה.

2. תהי $\sigma \in \mathrm{Sym}(k)$. בחישוב הדטרמיננטה באגף שמאל יופיע הגורם

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j\in[k]} \left(v_{\sigma(j)}\right)_j,$$

ואילו בחישוב הדטרמיננטה של אגף ימין יופיע הגורם

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{\substack{j\in[k] \\ \sigma(j)\notin\{i,i+1\}}} \left(v_{\sigma(j)}\right)_j \right) \cdot (v_i)_{\sigma^{-1}(i+1)} \cdot (v_{i+1})_{\sigma^{-1}(i)}.$$

נסתכל על התמורה $\tau = (i, i+1)$ ועל התמורה $\tilde{\sigma} := \sigma \circ \tau$. אז המכפלה שבגורם הראשון תופיע בגורם

$$\operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) \prod_{j\in[k]} \left(v_{\tilde{\sigma}}(j)\right)_j$$

בחישוב הדטרמיננטה שבאגף ימין. אבל, $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$ ולכן $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$, ולכן

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j\in[k]} \left(v_{\sigma(j)}\right)_j = -\operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) \prod_{j\in[k]} \left(v_{\tilde{\sigma}}(j)\right)_j$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned} \det(v_1,\dots,v_n) &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j\in[k]} \left(v_{\sigma(j)}\right)_j \\ &= -\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)} \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) \prod_{j\in[k]} \left(v_{\tilde{\sigma}}(j)\right)_j \\ &= -\sum_{\sigma'\in\mathrm{Sym}(n)} \operatorname{sgn}(\sigma') \prod_{j\in[k]} \left(v_{\sigma'}(j)\right)_j \\ -\det(v_1,\dots,v_{i+1},v_i,\dots,v_n) \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שהעתקה $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ הפיכה (היא ההופכית של עצמה).

כיוון שכל תמורה ניתן לכתוב בהרכבת חילופים, וכיוון שהסימן הוא כפלי, נקבל מכך את הנדרש. אם $\sigma = \tau_1 \circ \dots \tau_m$ עבור חילופים τ_i, נקבל כי הדטרמיננטה $\det\left(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}\right)$ היא $(-1)^m$, וגם כי $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^m$.

טענה 2.7. $\det(A) = \det(A^t)$.

מסקנה 2.8. תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ־A לאחר

1. הוספת בפולה של שורה או עמודה לשורה או עמודה (בהתאם) אחרת היא $\det(A)$.
2. החלפת שורות או עמודות של A היא $(-1)\det(A)$.
3. בפל של שורה או עמודה בסקלר α היא $\alpha\det(A)$.

בנוסף, אם $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$, מתקיים $\det(AB) = \det(BA)$, ואם A הפיכה מתקיים $\det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$.

תרגיל 4. עבור פולינום מתוקן $p \in \mathbb{F}[x]$ נכתוב

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

כאשר $c_n = 1$, ונגדיר את המטריצה המלווה של p על ידי

$$C(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

יהי $p \in \mathbb{F}[x]$ ממעלה n. מצאו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של $C(p)$.

פתרון. • מתקיים

$$.p_{C(p)}=\det\left(I-xC\left(p\right)\right)=\det\begin{pmatrix}x & 0 & \cdots & 0 & c_{0}\\ -1 & x & \cdots & 0 & c_{1}\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & -c_{2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & -1 & x+c_{n-1}\end{pmatrix}$$

ניעזר בכך שהטרמיננטה אינווריאנטית תחת הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת. נוסיף את השורה האחרונה כפול x לזאת שלפניה. לאחר מכן נוסיף את השורה ה־$n-1$ כפול x לזאת שלפניה ונמשיך כך עד שנקבל מטריצה

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & y\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & *\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & -1 & *\end{pmatrix}$$

כאשר

$$.y=a_{0}+x\left(a_{1}+x\left(a_{2}+x\left(\ldots\left(a_{n-2}+x\left(a_{n-1}+x\right)\right)\ldots\right)\right)\right)=\sum_{i=0}^{n}c_{i}x^{i}=f$$

אז

$$.p_{C(p)}=\left(-1\right)^{n-1}\det\begin{pmatrix}-1 & x & \cdots & 0\\ 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}=\left(-1\right)^{n-1}\left(-1\right)^{n-1}f=f$$

• יהי $g\in\mathbb{F}_{n-1}\left[x\right]$ ונכתוב

$$.g\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n-1}b_{i}x^{i}$$

אז

$$\begin{aligned}g\left(C\left(p\right)\right)\left(e_{1}\right) & =\sum_{i=0}^{n-1}b_{i}C\left(p\right)^{i}e_{1}\\ & =\sum_{i=0}^{n-1}b_{i}e_{1+i}\end{aligned}$$

וביטוי זה שונה מאפס כאשר $g\neq0$ כי אז יש $b_{i}\neq0$ עבור i בלשהו.

לכן $\deg\left(m_{C(p)}\right)\geq n$ ולכן $m_{C(p)}=p_{C(p)}$.

תרגיל 5. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_{+}$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$. נגדיר

$$\det\left(T\right)\coloneqq\det\left(\left[T\right]_{B}\right)$$

כאשר B בסיס של V.

הראו שהדטרמיננטה הזאת מוגדרת היטב.

פתרון. יהיו B,C שני בסיסים של V. עלינו להראות כי $\det\left(\left[T\right]_{B}\right)=\det\left(\left[T\right]_{C}\right)$. ניזכר כי מתקיים

$$.\left[T\right]_{B}=\left(M_{C}^{B}\right)^{-1}\left[T\right]_{C}M_{C}^{B}$$

אז, מכפליות הדטרמיננטה,

$$\begin{aligned}\det\left([T]_B\right) &= \det\left(\left(M_C^B\right)^{-1}[T]_C\, M_C^B\right)\\ &= \det\left(\left(M_C^B\right)^{-1}\right)\det\left([T]_C\right)\det\left(M_C^B\right)\\ &= \det\left(\left(M_C^B\right)\right)^{-1}\det\left([T]_C\right)\det\left(M_C^B\right)\\ &= \det\left([T]_C\right)\end{aligned}.$$

כאשר בשוויון השלישי השתמשנו בכך שאם A הפיכה מתקיים $\det\left(A^{-1}\right)=\det\left(A\right)^{-1}$.