

אלגברה ב' – גילוון תרגילי בית 8

אופרטורים נילפוטנטיים, ומרחבים עצמיים מוכללים

1.1.2026

תרגיל 1. יהי T אופרטור נילפוטנטי מאינדקס k .

1. הראו כי מתקיים

$$\{0\} = \text{Im}(T^k) \subset \text{Im}(T^{k-1}) \subset \dots \subset \text{Im}(T)$$

בasher כל ההכלות הינה הכלות ממש.

2. הסיקו כי $1 + T^{\dim \text{Im}(T)+1} = 0$. ובי k .

תרגיל 2. יהי $(\mathbb{C}^5)^*$ עבורו $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^5)$ נילפוטנטי מאינדקס 5 וקיימים בסיס B עבורו

$$[T]_B = J_5 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3. יהי V מרחב וקטורי סופי-מימדי מעל \mathbb{C} ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. הראו שלכל $(0) \leq i \leq r_a$ מתקיים

$$\dim \ker(T^i) = \dim \ker(T^{r_a(0)})$$

בasher r_a הוא הריבוי האלגברי של 0 בערך עצמי של T .

תרגיל 4. יהי V מרחב וקטורי מימדי $n \in \mathbb{N}_+$ מעל \mathbb{C} עם k ערבים עצמיים שונים.

1. הראו כי

$$V = \ker(T^{n-(k-1)}) \oplus \text{Im}(T^{n-(k-1)})$$

2. הראו בעזרת דוגמה נגדית שלא מתקיים תמיד

$$V = \ker(T^{n-k}) \oplus \text{Im}(T^{n-k})$$