

# אלגברה ב' – גיליון תרגילי בית 8

## אופרטורים נילפוטנטיים, ומרחבים עצמיים מוכללים

1.1.2026

**תרגיל 1.** יהי  $T$  אופרטור נילפוטנטי מאינדקס  $k$ .

1. הראו כי מתקיים

$$\{0\} = \operatorname{Im}(T^k) \subset \operatorname{Im}(T^{k-1}) \subset \dots \subset \operatorname{Im}(T)$$

כאשר כל ההכלות הינן הכלות ממש.

2. הסיקו כי  $k \leq \dim \operatorname{Im}(T) + 1$  ובי  $T^{\dim \operatorname{Im}(T)+1} = 0$ .

**תרגיל 2.** יהי  $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^5)$  עבורו  $\dim \ker(T^4) \neq \dim \ker(T^5)$ . הראו כי  $T$  נילפוטנטי מאינדקס 5 ושקיים בסיס  $B$  עבורו

$$[T]_B = J_5 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**תרגיל 3.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל  $\mathbb{C}$  ויהי  $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ . הראו שלכל  $i \geq r_a(0)$  מתקיים

$$\dim \ker(T^i) = \dim \ker(T^{r_a(0)})$$

כאשר  $r_a(0)$  הוא הריבוי האלגברי של 0 בערך עצמי של  $T$ .

**תרגיל 4.** יהי  $V$  מרחב וקטורי ממימד  $n \in \mathbb{N}_+$  מעל  $\mathbb{C}$  ויהי  $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$  עם  $k$  ערכים עצמיים שונים.

1. הראו כי

$$V = \ker(T^{n-(k-1)}) \oplus \operatorname{Im}(T^{n-(k-1)})$$

2. הראו בעזרת דוגמה נגדית שלא מתקיים תמיד

$$V = \ker(T^{n-k}) \oplus \operatorname{Im}(T^{n-k})$$