

אלגברה ב' – גיליון תרגילי בית 3

מרחבים שמורים וסכומים ישרים

20.11.2025

תרגיל 1. יהיו V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , יהיו $P, T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כאשר P איזומורפיזם. יהי $W \leq V$. הראו כי W הינו T -שמור אם ורק אם $P^{-1}(W)$ הינו $P^{-1} \circ T \circ P$ -שמור.

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי, יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו $V_1, \dots, V_k \leq V$ כולם T -שמורים וכך שמתקיים $V = \bigoplus_{i \in [k]} V_i$.

1. הראו כי

$$\ker(T) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker(T|_{V_i})$$

$$\text{Im}(T) = \bigoplus_{i \in [k]} \text{Im}(T|_{V_i})$$

2. הראו כי

$$\ker(T - \lambda \text{Id}_V) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker(T|_{V_i} - \lambda \text{Id}_{V_i})$$

לכל $\lambda \in \mathbb{F}$. הסיקו שהערכים העצמיים של T הם אלו של כל ה- $T|_{V_i}$ והראו כי

$$r_{T,a}(\lambda) = \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},a}(\lambda)$$

$$r_{T,g}(\lambda) = \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},g}(\lambda)$$

לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ וכאשר $r_{S,a}(\lambda), r_{S,g}(\lambda)$ הריבויים האלגברי והגיאומטרי של λ כערך עצמי של $S \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

תרגיל 3. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יהיו

$$\{0\} \neq W_1 < \dots < W_m \leq V$$

תת-מרחבים T -שמורים של V כך ש- W_i תת-מרחב ממש של W_{i+1} לכל $i \in [m-1]$, וגם $W_1 \neq 0$. נסמן $k_i := \dim_{\mathbb{F}}(W_i)$, ויהי B בסיס של V כך ש- k_i הוקטורים הראשונים של V מהווים בסיס ל- W_i , לכל $i \in [m]$. הראו כי $[T]_B$ מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{pmatrix}$$

עבור מטריצות $A_i \in \text{Mat}_{k_i}(\mathbb{F})$.

רמז: היזכרו במסקנה מהכיתה לגבי מציאת בסיס B עבורו $[T]_B$ מטריצה משולשת עליונה.