אלגברה ב' (01040168) - חורף 2026
תרגול 13 - שאלות ממבחנים
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־22 בינואר 2026

1 תרגילים ממבחנים

תרגיל 1. 1. הראו כי ל־$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ אין צורת ז'ורדן ב־$M_2(\mathbb{Z}_2)$.

2. הראו כי כל מטריצה אחרת ב־$M_2(\mathbb{Z}_2)$ דומה למטריצת ז'ורדן.

פתרון. 1. מתקיים

$$\det(A), \det(B) = -1 = 1$$
$$\operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(B) = 1 \text{ .}$$

מהשוויון הראשון הערך העצמי היחיד של A, B הוא 1. אז אם יש צורת ז'ורדן היא $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, אך בשני המקרים האלו העקבה היא $2 = 0$, בסתירה.

2. תהי $C \in M_2(\mathbb{Z}_2) \setminus \{A, B\}$. אם $\operatorname{tr}(C) = 1$ נקבל

$$C \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

אז

(א) אם $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ נכתוב $B = \left(e_1 + e_2, e_2\right)$ ואז

$$C(e_1 + e_2) = Ce_1 + Ce_2 = e_2 + e_2 = 0$$
$$Ce_2 = e_2$$

לכן B בסיס ז'ורדן של C וצורת ז'ורדן לפיו היא $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ב) אם $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ היא המטריצה המשוחלפת של המטריצה הקודמת, ולכן לפי תרגיל משיעורי הבית יש לה צורת ז'ורדן והיא זהה לזאת הקודמת.

(ג) אם $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ נכתוב $B := \left(e_1 + e_2, e_1\right)$ ואז B בסיס ז'ורדן כמו במקרה הראשון.

(ד) אם $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא המטריצה המשוחלפת של המטריצה הקודמת, ולכן לפי תרגיל משיעורי הבית יש לה צורת ז'ורדן והיא זהה לזאת הקודמת.

(ה) שאר המטריצות כבר בצורת ז'ורדן.

אם $\operatorname{tr}(C)=0$ נקבל

$$C\in\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

אז

(א) אם $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ נכתוב $B:=(e_1+e_2,e_1)$ ואז

$$\begin{aligned}C(e_1+e_2)&=Ce_1+Ce_2=e_2+e_1=e_1+e_2\\Ce_1&=e_2=e_1+e_2-e_1=(e_1+e_2)+e_1\end{aligned}$$

ולכן B בסיס ז'ורדן וצורת ז'ורדן היא $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

(ב) אם $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ נכתוב $B=\left(e_1+e_2,e_1\right)$ ואז

$$\begin{aligned}C(e_1+e_2)&=2(e_1+e_2)=0\\Ce_1&=e_1+e_2\end{aligned}$$

ולכן B בסיס ז'ורדן וצורת ז'ורדן היא $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

(ג) אם $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ או $C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ היא מטריצה משוכלפת של מטריצה ז'ורדן ולכן יש לה צורת ז'ורדן עם בסיס $B=\left(e_2,e_1\right)$.

(ד) שאר האופציות כבר בצורת ז'ורדן.

תרגיל 2. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי ותהיינה $S,T\in\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ אוניטריות. הוכיחו או מצאו דוגמא נגדית עבור כל אחד מהסעיפים הבאים.

1. $S+T$ נורמלית.
2. $S\circ T$ נורמלית.
3. אם S,T מתחלפות אז $S+T$ נורמלית.

פתרון. 1. מתקיים

$$\begin{aligned}(S+T)^*\circ(S+T)&=(S^*+T^*)\circ(S+T)\\&=S^*\circ S+S^*\circ T+T^*\circ S+T^*\circ T\\&=2\operatorname{Id}_V+S^*\circ T+T^*\circ S\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}(S+T)\circ(S+T)^*&=(S+T)\circ(S^*+T^*)\\&=S\circ S^*+S\circ T^*+T\circ S^*+T\circ T^*\\&=2\operatorname{Id}_V+S\circ T^*+T\circ S^*\end{aligned}$$

לכן נרצה לדעת האם בהכרח

$$S^*\circ T+T^*\circ S=S\circ T^*+T\circ S^*.$$

כדי למצוא דוגמא נגדית, נצטרך שלפחות אחת מבין S,T לא תהיה צמודה לעצמה. ניקח

$$\begin{aligned} S\colon \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וכן

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x-y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

E בסיס אורתונורמלי ולכן

$$[S^*]_E = [S]_E^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [S]_E$$

וגם

$$[T^*]_E = [T]_E^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

כעת

$$\begin{aligned} [S^* \circ T + T^* \circ S]_E &= [S^*]_E [T]_E + [T^*]_E [S]_E \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אבל

$$\begin{aligned} \Big(S \circ T^* + T \circ S^*\Big)_E &= [S]_E [T^*]_E + [T]_E [S^*]_E \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ואלו מטריצות שונות.

2. מתקיים

$$\begin{aligned} (S \circ T)^* \circ (S \circ T) &= T^* \circ S^* \circ S \circ T \\ &= T^* \circ S \circ S^* \circ T \\ &= T^* \circ T \\ &= \mathrm{Id}_V \end{aligned}$$

לכן $S \circ T$ אוניטרית ובפרט נורמלית.

הערה 1.1. ראיתם בתרגול שהרכבה של העתקות אוניטריות היא אוניטרית, ולכן אין צורך בפירוט מעבר לכך כפי שהתרגיל מנוסח.

3. כמו מקודם, מתקיים

$$\begin{aligned} (S+T)^* \circ (S+T) &= (S^* + T^*) \circ (S+T) \\ &= S^* \circ S + S^* \circ T + T^* \circ S + T^* \circ T \\ &= 2\,\mathrm{Id}_V + S^* \circ T + T^* \circ S \end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}(S+T)\circ(S+T)^* &= (S+T)\circ(S^*+T^*)\\ &= S\circ S^*+S\circ T^*+T\circ S^*+T\circ T^*\\ &= 2\operatorname{Id}_V+S\circ T^*+T\circ S^*\end{aligned}$$

כעת, S,T מתחלפות, לכן גם S^*,T מתחלפות וגם S,T^* מתחלפות, ונקבל שוויון.

תרגיל 3. יהיו $v_1,\dots,v_n\in\mathbb{R}^n$. הראו כי $B:=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של $\mathbb{R}^n$ אם ורק אם למטריצת Gram של B

$$\operatorname{Gr}(B):=\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n,v_1\rangle & \cdots & \langle v_n,v_n\rangle\end{pmatrix}=\left(\langle v_i,v_j\rangle\right)_{i,j\in[n]}$$

יש דטרמיננטה חיובית.

פתרון. נניח כי B בסיס. אז $\operatorname{Gr}(B)$ המטריצה המייצגת של המכפלה הפנימית הסטנדרטית לפי B. לכן קיים $a\in\mathbb{R}$ עבורו

$$\det(\operatorname{Gr}(B))=a^2\det(I_n)=a^2$$

(כי $\operatorname{Gr}(B)=P^tI_nP$ וכי הדטרמיננטה כפלית). כיוון ש־$\operatorname{Gr}(B)$ הפיכה, לא יתכן $a=0$ ולכן $\det(\operatorname{Gr}(B))=a^2>0$.
בכיוון השני, נניח ש־B אינו בסיס. אז יש סקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{R}$ עבורם

$$v_n=\sum_{i\in[n-1]}\alpha_iv_i.$$

נקבל

$$(\operatorname{Gr}(B))=\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \left\langle v_1,\sum_{i\in[n-1]}\alpha_iv_i\right\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n,v_1\rangle & \cdots & \left\langle v_i,\sum_{i\in[n-1]}\alpha_iv_i\right\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \sum_{i\in[n-1]}\alpha_i\langle v_1,v_i\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n,v_1\rangle & \cdots & \sum_{i\in[n-1]}\alpha_i\langle v_i,v_i\rangle\end{pmatrix}.$$

לכן, העמודה הימנית של $\operatorname{Gr}(B)$ היא צירוף לינארי של שאר העמודות, ולכן $\det(\operatorname{Gr}(B))=0$.

תרגיל 4. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{R}$. תהי g מכפלה פנימית על V ותהי h תבנית בילינארית סימטרית על V. הוכיחו שקיים בסיס B של V עבורו $[g]_B,[h]_B$ שתיהן אלכסוניות.

פתרון. נסמן $n:=\dim_{\mathbb{R}}(V)$. יהי E בסיס אורתונורמלי של V ביחס ל־g. אז $[g]_E=I_n$. כעת, $[h]_E$ סימטרית כי h סימטרית, ולכן יש מטריצה $Q\in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית עבורה $Q^t[h]_EQ$ אלכסונית. נרצה $Q=P_E^B$ ולכן נגדיר $B:=\left(Q^{-1}v_1,\dots,Q^{-1}v_n\right)$ עבור $E:=(v_1,\dots,v_n)$. אז

$$\begin{aligned}[g]_B&=\left(P_E^B\right)^t[g]_EP_E^B=Q^t[g]_EQ=Q^tI_nQ=Q^tQ=I_n\\ [h]_B&=\left(P_E^B\right)^t[h]_EP_E^B=Q^t[h]_EQ\end{aligned}$$

שתיהן אלכסוניות, כנדרש.

תרגיל 5. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד $n\in\mathbb{N}$ מעל $\mathbb{R}$. יהיו $U,W\le V$ עבורם $V=U\oplus W$. עבור $v=u+w$ כאשר $u\in U,w\in W$ נגדיר $T(v)=u-w$. הניחו כי T לינארית והראו כי T צמודה לעצמה אם ורק אם $U\perp W$.

פתרון. נניח כי $U\perp W$. יהי B בסיס אורתונורמלי ל־U ויהי C בסיס אורתונורמלי ל־W. אז $D:=B*C$ בסיס אורתונורמלי ל־V. נקבל כי בבסיס זה

$$[T]_D=\begin{pmatrix}[T|_U]_B & 0\\ 0 & [T|_W]_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & -I_\ell\end{pmatrix}$$

עבור $k:=\dim U,\ell:=\dim W$. כיוון ש־D אורתונורמלי, מתקיים

$$[T^*]_D=[T]_D^t=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & -I_\ell\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & -I_\ell\end{pmatrix}=[T]_D.$$

לכן, $T^* = T$, כנדרש.
נניח כעת כי $T^* = T$ ויהיו $u \in U$ ו־$w \in W$. מתקיים

$$\begin{aligned}\langle u, w\rangle &= \langle Tu, w\rangle \\ &= \langle u, T^* w\rangle \\ &= \langle u, Tw\rangle \\ &= \langle u, -w\rangle \\ &= -\langle u, w\rangle\end{aligned}$$

לכן $\langle u, w\rangle = 0$ ולכן $u \perp w$. נקבל כי $U \perp W$.

תרגיל 6. תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ בעלת פולינום מינימלי

$$m_A(x) = x^8\left(x^2+1\right).$$

1. מיצאו את הפולינום המינימלי של A^3.
2. הוכיחו או הפריכו את כל אחת מהטענות הבאות:
   (א) קיימת חזקה של A שלכסינה מעל $\mathbb{R}$.
   (ב) קיימת חזקה של A שלכסינה מעל $\mathbb{C}$.

פתרון. 1. הערכים העצמיים של מטריצה הם שורשי הפולינום המינימלי, לכן ל־A יש ערכים עצמיים $0, \pm i$. החזקה של $x-\lambda$ בפולינום המינימלי היא הגודל המקסימלי של בלוק ז'ורדן עם ערך עצמי λ בצורת ז'ורדן של A. לכן, צורת ז'ורדן של A היא

$$J := \mathrm{diag}\left(J_8(0), N, iI_{r_{a,A}(i)}, -iI_{r_{a,A}(-i)}\right)$$

עבור מטריצת ז'ורדן N עם ערך עצמי יחיד 0 ובלוקים מגודל לכל היותר 0. נקבל כי

$$J^3 = \mathrm{diag}\left(J_8(0), N^3, -iI_{r_{a,A}(i)}, iI_{r_{a,A}(-i)}\right).$$

אז $\pm i$ ערך עצמי מריבוי אלגברי וגיאומטרי $r_{a,A}(\mp i)$. כיוון שהריבוי הגיאומטרי שווה למספר בלוקי ז'ורדן בצורת ז'ורדן, והריבוי האלגברי שווה לסכום הגדלים שלהם, נקבל כי יש $r_{a,A}(\pm)$ בלוקים מגודל 1 עם ערך עצמי $\mp i$.

עבור הערך העצמי 0, ניזכר כי צורת ז'ורדן של $J_8(0)^3$ היא

$$\mathrm{diag}\left(J_3(0), J_3(0), J_2(0)\right)$$

ושבאותו אופן צורת ז'ורדן של $J_m(0)^3$ מורכבת מבלוקים בגדלים בקבוצה

$$\left\{\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil, \left\lfloor\frac{m}{3}\right\rfloor\right\}.$$

לכן, גודל הבלוק המקסימלי עם ערך עצמי 0 בצורת ז'ורדן של J^3 הוא 3. אך, אם $P^{-1}AP = J$ נקבל כי

$$P^{-1}A^3P = \left(P^{-1}AP\right)^3 = J^3$$

ולכן זה גם הגודל של הבלוק המקסימלי עם ערך עצמי 0 בצורת ז'ורדן של A^3. נקבל כי

$$m_{A^3}(x) = x^3\left(x^2+1\right).$$

2. ניזכר כי הערכים העצמיים של A^8 הם λ^8 עבור λ ערך עצמי של A. לכן הערכים העצמיים של A^8 הם $\left\{0, (\pm i)^8\right\} = \{0, 1\}$.

אם נתייחס ל־A כמטריצה ממשית, נקבל כי סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים שלה הוא n, ולכן יש לה צורת ז'ורדן.

צורת ז'ורדן של A^8 היא צורת ז'ורדן של

$$\begin{aligned}J^8 &= \mathrm{diag}\left(J_8(0)^8, N^8, i^8 I_{r_{a,A}(i)}, (-i)^8 I_{r_{a,A}(-i)}\right), \\ &= \mathrm{diag}\left(0_{r_{a,A}(0)}, I_{r_{a,A}(i)+r_{a,A}(-i)}\right)\end{aligned}$$

שהיא כבר מטריצה אלכסונית, לכן A^8 לכסינה גם מעל $\mathbb{R}$ וגם מעל $\mathbb{C}$.

תרגיל 7. נתונה $T\in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{n-1}\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2\\ a_3\\ \vdots\\ a_n\\ a_1\end{pmatrix}.$$

1. האם T איזומטריה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$?
2. האם T צמודה לעצמה? אורתוגונלית?
3. מיצאו את צורת ז'ורדן של T מעל $\mathbb{R}$ או הוכיחו שאינה קיימת.

פתרון. 1. יהי $\operatorname{St}=\left(e_1,\ldots,e_n\right)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$. אז

$$T\left(e_i\right)=\begin{cases} e_{i-1} & i>1\\ e_n & i=1\end{cases},$$

ולכן T שולחת בסיס אורתונורמלי St לבסיס אורתונורמלי $\left(e_n,e_1,\ldots,e_{n-1}\right)$. ראינו בכיתה שהעתקה ששולחת בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי היא אורתוגונלית, ושהעתקה אורתוגונלית היא איזומטריה, ולכן T איזומטריצה.

2. הראינו בסעיף הקודם ש־T אורתוגונלית. לכן $T^*=T^{-1}$. נשים לב כי $T\neq T^{-1}$ כי $T^2\neq \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$ (למשל, כי $T^2\left(e_3\right)=T\left(e_2\right)=e1\neq e_3$) ולכן $T^*=T^{-1}\neq T$ ונקבל כי T אינה צמודה לעצמה.

3. יהי St הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$. אז $T=L_A$ עבור

$$A:=[T]_{\operatorname{St}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

יהי $\xi=\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, ואז

$$A\begin{pmatrix} \xi^n\\ \xi^{n-1}\\ \vdots\\ \xi^2\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi^{n-1}\\ \xi^{n-2}\\ \vdots\\ \xi\\ \xi^n\end{pmatrix}$$

כאשר $\xi^n=\operatorname{cis}\left(2\pi\right)=1$. נקבל שהוקטור $\begin{pmatrix} \xi^n\\ \xi^{n-1}\\ \vdots\\ \xi^2\\ \xi\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי ξ^{-1}, שאינו ממשי, ולכן אין ל־T צורת ז'ורדן מעל $\mathbb{R}$.