אלגברה ב' (01040168) – חורף 2026
תרגול 3 – מרחבים שמורים והטלות
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־7 בדצמבר 2025

1 סכומים ישרים של העתקות

תרגיל 1. יהיו V_1, V_2, W_1, W_2 מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$, עם בסיסים B_1, B_2, C_1, C_2 בהתאמה.
תהיינה $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$ ו־$S \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(W_1, w_2)$.
הראו שמתקיים

$$[T \oplus S]_{B_2 * C_2}^{B_1 * C_1} = \begin{pmatrix} [T]_{B_2}^{B_1} & 0 \\ 0 & [S]_{C_2}^{C_1} \end{pmatrix}.$$

פתרון. נסמן

$$B_1 = (u_1, \ldots, u_n)$$
$$C_1 = (w_1, \ldots, w_m).$$

ניזכר בהגדרת מטריצה מייצגת ונראה כי $[T \oplus S]_{B_2 * C_2}^{B_1 * C_1}$ שווה למטריצה

$$\begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ [(T \oplus S)(u_1, 0)]_{B_2 * C_2} & \cdots & [(T \oplus S)(u_n, 0)]_{B_2 * C_2} & [(T \oplus S)(0, w_1)]_{B_2 * C_2} & \cdots & [(T \oplus S)(0, w_m)]_{B_2 * C_2} \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ [(T(u_1), 0)]_{B_2 * C_2} & \cdots & [(T(u_n), 0)]_{B_2 * C_2} & [(0, S(w_1))]_{B_2 * C_2} & \cdots & [(0, S(w_m))]_{B_2 * C_2} \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}.$$

אבל,

$$[(v, 0)]_{B_2 * C_2} = \begin{pmatrix} [v]_{B_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכל $v \in V_2$, כי

$$(v, 0) = \alpha_1 (v_1, 0) + \ldots + \alpha_\ell (v_\ell, 0)$$

באשר

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_\ell v_\ell,$$

ובאותו אופן

$$[(0, w)]_{B_2 * C_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ [w]_{C_2} \end{pmatrix}.$$

2 מרחבים שמורים

כאשר יש לנו אופרטור T על מרחב וקטורי V, יכול להיות נוח לנסות להבין את T לפי איך שהוא פועל על תת־מרחבים קטנים יותר. אבל, ניתן לצמצם את T לאופרטור על תת־מרחב, רק אם התת־מרחב הינו T־שמור.

הגדרה 2.1 (מרחב שמור). יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$.
תת־מרחב $W \leq V$ נקרא T־שמור אם

$$T(W) \coloneqq \{T(w) \mid w \in W\} \subseteq W.$$

הגדרה 2.2 (צמצום למרחב שמור). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $W \leq V$ תת־מרחב T־שמור.
הצמצום של T ל־W הוא

$$\begin{aligned} T|_W \colon W &\to W \\ w &\mapsto T(w) \end{aligned}.$$

הערה 2.3. שימו לב שהסימון הוא אותו סימון כמו הצמצום של המקור, אך במסגרת הקורס צמצום אופרטורים יתייחס לזה שבהגדרה אלא אם כן יצוין מפורשות אחרת.

תרגיל 2. יהי $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי ממשי ויהי

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned}.$$

מצאו את התת־מרחבים ה־T־שמורים של $\mathbb{C}$ והסיקו כי T אינו לכסין מעל $\mathbb{R}$.

פתרון. $\mathbb{C}, \{0\}$ תת־מרחבים T־שמורים.
נניח כי $W \leq \mathbb{C}$ מרחב T־שמור נוסף. אז $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$ ולכן יש

$$z_0 \in \mathbb{C}^{\times} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

עבורו $W = \operatorname{Span}\{z_0\}$. נקבל $T(z_0) \in W$ לכן $T(z_0) = cz_0$ עבור $c \in \mathbb{R}$. אבל $cz_0 = iz_0$ גורר $c = i$ בסתירה.
תת־מרחבים T־שמורים 1־מימדיים של $\mathbb{C}$ הם $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור v וקטור עצמי של T. לכן אין ל־T וקטורים עצמיים, ולכן הוא אינו לכסין מעל $\mathbb{R}$.

תרגיל 3. ניזכר כי כל מטריצה דומה למטריצה משולשת עליונה, וכי הערכים העצמיים של מטריצה משולשת עליונה מופיעים על האלכסון.
תהיינה $A_1, \ldots, A_k$ מטריצות כך ש־$A_i \in \operatorname{Mat}_{m_i}(\mathbb{F})$ לכל $i \in [k]$. הראו כי הערכים העצמיים של המטריצה

$$\operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k) \coloneqq \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

הם הערכים העצמיים של המטריצות $A_1, \ldots, A_k$, וכי הריבוי האלגברי של ערך עצמי λ של A הוא סכום הריבויים האלגבריים שלו בערך עצמי של $A_1, \ldots, A_k$.

פתרון. לכל $i \in [k]$, קיימת $P_i \in \operatorname{Mat}_{m_i}(\mathbb{F})$ עבורה $U_i \coloneqq P_i^{-1} A P$ מטריצה משולשת עליונה.
אז

$$\begin{aligned} \operatorname{diag}\left(P_1^{-1}, \ldots, P_k^{-1}\right) \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k) \operatorname{diag}(P_1, \ldots, P_k) &= \operatorname{diag}\left(P_1^{-1} A_1 P_1, \ldots, P_k^{-1} A_k P_k\right) \\ &= \operatorname{diag}(U_1, \ldots, U_k) \end{aligned}$$

מטריצה משולשת עליונה, ומספר הפעמים שערך λ מופיע על האלכסון שלה הוא סכום מספרי הפעמים שהוא מופיע על אלכסוני המטריצות $U_1, \ldots, U_k$.

3 הטלות

הגדרה 3.1 (הטלה). יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. אופרטור $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא הטלה אם קיימים תת־מרחבים וקטוריים $U, W \leq V$ עבורם $V = U \oplus W$ וגם

$$\forall u \in U, w \in W : T(u+w) = u.$$

במקרה זה הוא נקרא ההטלה על U במקביל ל־W ומסומן $P_{U,W}$.

טענה 3.2. אופרטור T הינו הטלה אם ורק אם $T^2 = T$.

תרגיל 4. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$.

1. תהי $P \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי $V = \ker(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$.
2. הראו כי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה אם ורק אם קיים בסיס B של V עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

פתרון. 1. כיוון ש־P הטלה, קיימים תת־מרחבים $U, W \leq V$ עבורם $V = U \oplus W$ וגם $P(u+w) = u$ לכל $u \in U, w \in W$.

אז $\mathrm{Im}(P) = U$ כי התמונה מוכלת ב־U וכי לכל $u \in U$ מתקיים $P(u) = u$.

בנוסף, $W \subseteq \ker(P)$ כי לכל $w \in W$ מתקיים $P(w) = P(0+w) = 0$. ממשפט המימדים, מתקיים כי

$$\dim_{\mathbb{F}}(\ker(P)) = \dim_{\mathbb{F}}(V) - \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(P))$$

אך גם כיוון ש־$V = U \oplus W$, מתקיים כי

$$\dim_{\mathbb{F}}(W) = \dim_{\mathbb{F}}(V) - \dim_{\mathbb{F}}(U) = \dim_{\mathbb{F}}(V) - \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(P)).$$

נקבל כי W תת־מרחב של $\ker(P)$ מאותו מימד כמו $\ker(P)$, ולכן יש שוויון.

בסה"כ קיבלנו כי $V = U \oplus W$ וכי

$$U = \mathrm{Im}(P),$$
$$W = \ker(P),$$

ולכן

$$V = \mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P),$$

כנדרש.

2. נניח כי T הטלה. במקרה זה $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$. עבור בסיסים

$$C = (c_1, \ldots, c_m)$$
$$D = (d_{m+1}, \ldots, d_\ell)$$

של $\ker(T), \mathrm{Im}(T)$ בהתאמה, נקבל כי $C * D$ בסיס של V. לכל $c_i \in C$ מתקיים $T(c_i) = 0$, לכן $\dim(\ker(T))$ העמודות הראשונות של $[T]_{C*D}$ הן עמודות אפסים. לכל $d_i \in D$ יש $u_i \in V$ עבורו

$$d_i = T(u_i) = T^2(u_i) = T(T(u_i)) = T(d_i),$$

לכן

$$[T(d_i)]_{C*D} = [d_i]_{C*D} = e_i$$

ולכן העמודה ה־i עבור $i \geq m$ היא e_i, ונקבל את הנדרש.

להיפך, נניח שקיים בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ כנ"ל. אז $\left[T^2\right]_B = [T]_B^2 = [T]_B$ ולכן $T^2 = T$ ונקבל כי T הטלה.

תרגיל 5 (לא נעשה בתרגול). הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

1. סכום של הטלות שונות הוא הטלה.
2. כפל בסקלר של הטלה הוא הטלה.
3. הרכבה של הטלות היא הטלה.

פתרון. 1. הטענה לא נכונה. יהי $V=\mathbb{R}^3$ עם הבסיס הסטנדרטי $\mathrm{St}=(e_1,e_2,e_3)$, ויהיו

$$\begin{aligned}U_1&=\mathrm{Span}\,(e_1,e_2)\\ W_1&=\mathrm{Span}\,(e_3)\\ U_2&=\mathrm{Span}\,(e_1)\\ W_2&=\mathrm{Span}\,(e_2,e_3)\,.\end{aligned}$$

אז $V=U_1\oplus W_2=U_2\oplus W_2$ כי $(e_1,e_2)*(e_3),(e_1)*(e_2,e_3)$ בסיסים של V.
אבל,

$$\left(P_{U_1,W_1}+P_{U_2,W_2}\right)(e_1)=e_1+e_1=2e_1$$

ולכן 2 ערך עצמי של $P_{U_1,W_1}+P_{U_2,W_2}$, בעוד להטלה יתכנו רק ערכים עצמיים 0 או 1.

2. הטענה לא נכונה. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל שדה $\mathbb{F}$. אז הזהות $\mathrm{Id}_V=P_{V,\{0\}}$ הינה הטלה, אך להעתקה $2\,\mathrm{Id}_V$ ערך עצמי 2 ולכן היא אינה הטלה.

3. הטענה לא נכונה.
יהי $V=\mathbb{R}^2$ ונסתכל על ההטלות

$$\begin{aligned}P_1&=P_{\mathrm{Span}(e_1),\mathrm{Span}(e_2)}\\ P_2&=P_{\mathrm{Span}(e_1+e_2),\mathrm{Span}(e_1-e_2)}\,.\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}(P_1\circ P_2)(e_1)&=(P_1\circ P_2)\left(\frac{e_1+e_2}{2}+\frac{e_1-e_2}{2}\right)\\ &=P_1\left(\frac{e_1+e_2}{2}\right)\\ &=\frac{e_1}{2}\end{aligned}$$

ולכן $\frac{1}{2}$ ערך עצמי של $P_1\circ P_2$, ולכן היא אינה הטלה.
נשים לב כי אם P_1,P_2 הטלות מתחלפות, מתקיים

$$(P_1\circ P_2)^2=P_1^2\circ P_2^2=P_1\circ P_2$$

ואז $P_1\circ P_2$ בן הטלה.

הגדרה 3.3 (דחיסה של העתקה). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, יהיו $U,W\leq V$ ויהיו B,C בסיסים של U,W בהתאמה.
נגדיר את הדחיסה של T ל־U במקביל ל־W בתור

$$\begin{aligned}T_{U,W}&:U\to U\\ u&\mapsto P_{U,W}\circ T\end{aligned}\,.$$

תרגיל 6 (לא נעשה בתרגול). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי, יהיו $U,W\leq V$ עם בסיסים B,C בהתאמה, ויהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.
הראו כי

$$[T]_{B*C}=\begin{pmatrix}[T|_U]_B & *\\ 0 & [T_{W,U}]_C\end{pmatrix}$$

כאשר U הינו T־שמור, וכי

$$[T]_{B*C}=\begin{pmatrix}[T_{U,W}]_B & 0\\ * & [T|_W]_C\end{pmatrix}$$

כאשר W הינו T־שמור.

פתרון. נסמן

$$B=(u_1,\ldots,u_m)$$
$$.C=(w_1,\ldots,w_\ell)$$

נניח כי U הינו T־שמור. המקרה בו W שמור הינו אנלוגי ומושאר כתרגיל.
לפי הגדרת מטריצה מייצגת, m העמודות הראשונות של $[T]_{B*C}$ הן וקטורי הקואורדינטות של $T(u_1),\ldots,T(u_m)$ לפי $B*C$. אך כיוון ש־U הינו T־שמור, מתקיים

$$T(u_i)=T|_U(u_i)\in U$$

לכל $i\in[m]$, ולכן $[T(u_i)]_{B*C}$ הינו הוקטור שמתקבל לאחר הוספת ℓ אפסים בסוף הוקטור $[T|_U(u_i)]_B$. לכן, מטריצת m העמודות הראשונות של $[T]_{B*C}$ היא

$$.\begin{pmatrix}[T|_U]_B\\ 0\end{pmatrix}$$

כמו כן, לכל $i\in[\ell]$ מתקיים כי

$$\begin{aligned}T(w_i)&=P_{U,W}(T(w_i))+P_{W,U}(T(w_i))\\&=P_{U,W}(T(w_i))+T_{W,U}(w_i)\end{aligned}$$

כאשר הגורם הראשון שייך ל־U, ולכן ℓ המקדמים האחרונים בוקטור $[T(w_i)]_{B*C}$ הם בדיוק מקדמי הוקטור $[T_{W,U}(w_i)]$. לכן, מטריצת ℓ העמודות האחרונות של $[T]_{B*C}$ היא מהצורה

$$,\begin{pmatrix}*\\ [T_{W,U}(w_i)]\end{pmatrix}$$

כנדרש.

תרגיל 7. יהי $V=\mathbb{R}^2$ עם הבסיס הסטנדרטי $\mathrm{St}=(e_1,e_2)$.
נסמן $V^*:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R})$ וגם

$$\mathrm{St}^*:=(e_1^*,e_2^*)$$

כאשר

$$e_1^*\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=x$$
$$e_2^*\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=y$$

ההטלות על $\mathrm{Span}\,e_1$ במקביל ל־$\mathrm{Span}(e_2)$, ועל $\mathrm{Span}(e_2)$ במקביל ל־$\mathrm{Span}(e_1)$.
תהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&\mapsto\begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix}\end{aligned}\quad.$$

1. חשבו את $[T]_{\mathrm{St}}$.
2. נגדיר

$$\begin{aligned}T^*\colon V^*&\to V^*\\ \varphi&\mapsto\varphi\circ T\end{aligned}\quad.$$

חשבו את $[T^*]_{\mathrm{St}}$.

פתרון. 1. לפי הגדרת מטריצה מייצגת,

$$[T]_{\mathrm{St}}=\begin{pmatrix}| & |\\ [T(e_1)]_{\mathrm{St}} & [T(e_2)]_{\mathrm{St}}\\ | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. לפי הגדרת מטריצה מייצגת,

$$[T^*]_{\mathrm{St}^*}=\begin{pmatrix}| & |\\ [T^*(e_1^*)]_{\mathrm{St}^*} & [T^*(e_2^*)]_{\mathrm{St}^*}\\ | & |\end{pmatrix}.$$

בעת,

$$\begin{aligned}(T^*(e_1^*))\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}&=e_1^*\left(T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\\&=e_1^*\begin{pmatrix}x+y\\ y\end{pmatrix}\\&=x+y\end{aligned}$$

וכן

$$\begin{aligned}(T^*(e_2^*))\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}&=e_2^*\left(T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\\&=e_2^*\begin{pmatrix}x+y\\ y\end{pmatrix}\\&=y\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}T^*(e_1^*)&=e_1^*+e_2^*\\ T^*(e_2^*)&=e_2^*,\end{aligned}$$

ונקבל כי

$$[T^*]_{\mathrm{St}^*}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=[T]_{\mathrm{St}}^t.$$