# אלגברה ב' (01040168) - חורף 2026
# תרגול 12 - קריטריון סילבסטר, ותבניות ריבועיות
# אלן סורני
# הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־22 בינואר 2026

## 1 קריטריון סילבסטר

**משפט 1.1 (סילבסטר).** תהי $f \in \operatorname{Bil}(V)$ תבנית בילינארית סימטרית על מרחב מכפלה פנימית $V$, עם סימן $(r,s,t)$. יהי $B$ בסיס של $V$ ותהי $A = [f]_B$. נסמן ב־$\gamma_k := \det\left(\left(a_{i,j}\right)_{i,j\in[k]}\right)$ את המינורים הראשיים של $A$ ונניח כי $\gamma_k \neq 0$ לכל $k \in [n]$. אז $t = 0$, מספר הערכים החיוביים בקבוצה הסדורה $\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\right)$ הוא $r$, ומספר הערכים השליליים בה הוא $s$.

**תרגיל 1.** תהי $f \in \operatorname{Bil}(V)$, יהי $B$ בסיס של $V$ ותהי $A = [f]_B$.
הראו כי $f$ מכפלה פנימית אם ורק אם המינורים הראשיים של $A$ חיוביים.

**פתרון.** נניח כי כל המינורים הראשיים חיוביים. נקבל כי כל האיברים בקבוצה הסדורה $\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\right)$ חיוביים, ולכן ממשפט סילבסטר הסימן של $f$ הוא $(n,0,0)$. תבנית בילינארית סימטרית הינה מכפלה פנימית אם הסימן שלה כזה, לכן $f$ מכפלה פנימית.
נניח כי $f$ מכפלה פנימית. אז $\gamma_k = \det\left(\left(a_{i,j}\right)_{i,j\in[k]}\right)$ כאשר $\left(a_{i,j}\right)_{i,j\in[k]}$ מטריצה מייצגת של $f|_{\operatorname{Span}(b_1,\ldots,b_k)}$. צמצום של מכפלה פנימית הוא מכפלה פנימית, והדטרמיננטה של מטריצה מוגדרת חיובית לחלוטין היא חיובית, לכן כל המינורים הראשיים חיוביים.

**תרגיל 2.** תהי $f \in \operatorname{Bil}(V)$ ויהי $B$ בסיס של $V$. מיצאו תנאי הכרחי ומספיק על המינורים $\gamma_i\left([f]_B\right)$ לכך ש־$f$ מוגדרת שלילית (לחלוטין).

**פתרון.** ניעזר בתרגיל הקודם, ונשים לב כי $f$ מוגדרת שלילית אם ורק אם $-f$ מוגדרת חיובית לחלוטין. אכן, מתקיים $f(v,v) < 0$ לכל $v \in V$ אם ורק אם $-f(v,v) > 0$ לכל $v \in V$.
כעת, $-f$ מוגדרת חיובית אם ורק אם המינורים הראשיים של $-A := [-f]_B$ חיוביים. כעת,

$$\gamma_k(A) = \det\left(\left(a_{i,j}\right)_{i,j\in[k]}\right) = (-1)^k \det\left(\left(-a_{i,j}\right)_{i,j\in[k]}\right) = (-1)^k \gamma_k(-A)$$

לכן זה מתקיים אם ורק אם $\operatorname{sgn}(\gamma_k(A)) = (-1)^k$ לכל $k \in [n]$.

**תרגיל 3.** תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_5(\mathbb{R}).$$

מיצאו את הסימן של $A$.

**פתרון.** ניעזר בקריטריון סילבסטר. מתקיים

$$\det\left(1\right)=1$$
$$\det\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\right)=2$$
$$\det\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&3\\1&3&7\end{pmatrix}\right)=1\det\begin{pmatrix}2&3\\3&7\end{pmatrix}+1\det\begin{pmatrix}0&2\\1&3\end{pmatrix}=-23-2=-25$$
$$\det\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&3&1\\1&3&-7&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}=-25-\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&3&1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&1\\1&-7&1\end{pmatrix}=-25-(-1)+(10+1)=-13$$
$$.\det A=\ldots=13$$

נקבל כי המינורים הראשיים לא מתאפסים, וכי הסימן שלהם מתחיל חיובי ומתחלף פעמיים. מקריטריון סילבסטר נקבל כי הסימן של $A$ הוא $(3,2,0)$.

**תרגיל 4.** הראו כי

$$A\coloneqq\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\1&-3&0&0\\0&0&-1&-1\\1&0&-1&-3\end{pmatrix}$$

מוגדרת שלילית.

**פתרון.** נחשב את המינורים הראשיים. מתקיים

$$\det\left(-1\right)=-1<0$$
$$\det\begin{pmatrix}-1&1\\1&-3\end{pmatrix}=3-1=2>0$$
$$\det\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-1\cdot\det\begin{pmatrix}-1&1\\1&-3\end{pmatrix}=-2<0$$
$$\begin{aligned}\det A&=-3\cdot\det\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+1\cdot\det\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}-1\cdot\det\begin{pmatrix}1&0&1\\-3&0&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\\&=6-(3-1)-(-3)\left(-1\right)\left(1\right)=6-2-3=1>0\end{aligned}$$

ולכן מהתרגיל הקודם $A$ מוגדרת שלילית.

## 2 תבניות ריבועיות

**הגדרה 2.1 (תבנית ריבועית).** תבנית ריבועית על $\mathbb{F}^n$ (עבור $\mathbb{F}$ כללי, שאינו בהכרח $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$) היא העתקה מהצורה

$$\begin{aligned}q\colon\mathbb{F}^n&\to\mathbb{F}\\\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}&\mapsto\sum_{\substack{i,j\in[n]\\i\le j}}c_{i,j}x_ix_j\end{aligned}$$

עבור $c_{i,j}\in\mathbb{F}$.

**הערה 2.2.** מטריצה סימטרית $A$ מגדירה תבנית ריבועית על ידי $q\left(\vec{x}\right)=\vec{x}^{t}Ax$. להיפך, אם $q$ תבנית ריבועית נוכל לכתוב

$$q\left(x\right)=\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in[n]}a_{i,j}x_{i}x_{j}$$

כאשר $a_{i,j}=a_{j,i}$. אז נגדיר $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ עם

$$.A_{i,j}=a_{i,j}$$

היא מקיימת $q\left(\vec{x}\right)=\vec{x}^{t}Ax$. זה מגדיר איזומורפיזם בין מרחבי המטריצות הסימטריות והתבניות הריבועיות. למשל, במקום להגדיר $g\left(\begin{pmatrix}x_{1}\\x_{2}\end{pmatrix}\right)=x_{1}^{2}+x_{2}^{2}$, נכתוב לפעמים את $g$ בתור פולינום $g\left(x_{1},x_{2}\right)=x_{1}^{1}+x_{2}^{2}\in\mathbb{F}\left[x_{1},x_{2}\right]$ בשני משתנים.

**סימון 2.3.** עבור $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ סימטרית נסמן ב־$g_{A}$ את התבנית הריבועית

$$.g_{A}\left(\vec{x}\right)=\vec{x}^{t}A\vec{x}$$

**תרגיל 5.** יהי $\mathbb{F}:=\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$ השדה בן $5$ האיברים. יתכן כי ראיתם את הסימון $\mathbb{Z}_{5}$ במקום זאת. תהי

$$g\left(x_{1},x_{2},x_{3},x_{4}\right)=2x_{1}x_{2}+2x_{2}x_{3}+2x_{3}x_{4}\in\mathbb{F}\left[x_{1},x_{2},x_{3},x_{4}\right]$$

תבנית ריבועית מעל $\mathbb{F}$.

1. מצאו מטריצה $A\in M_{4}\left(\mathbb{F}\right)$ אלכסונית עבורה $g=g_{A}$.
2. מצאו $P\in M_{4}\left(\mathbb{F}\right)$ עבורה $PAP^{t}$ אלכסונית.
3. האם יש $P\in M_{4}\left(\mathbb{F}\right)$ עבורה $PAP^{t}$ אלכסונית עם $\pm1,0$ על האלכסון?
4. האם כל $A\in M_{4}\left(\mathbb{F}\right)$ חופפת למטריצה עם $\pm1,0$ על האלכסון?

**פתרון.** 1. לא מופיע ביטוי $x_{i}^{2}$. לכן נסתכל רק על המקדם של $x_{i}x_{j}$ עבור $i\neq j$. כדי שיתקיים $a_{i,j}=a_{j,i}$ ניקח את חצי המקדם של $x_{i}x_{j}$ כפי שהוא כתוב (כי לא מופיע גם $x_{j}x_{i}$). נקבל

$$.A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

2. נלכסן לפי שורה ועמודה כדי להביא את המטריצה לצורה אלכסונית. כאשר יש $0$ על כל האלכסון, נוסיף כפולה של שורה או עמודה אחרת, כדי שיופיע מספר שונה מאפס במקום ה־$(1,1)$. נקבל

$$.A\mapsto\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

כעת, נשתמש באיבר על האלכסון כדי לאפס את שאר האיברים, ונמשיך הלאה.

$$
\begin{aligned}
A &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ניקח את $P$ להיות המכפלה של 5 המטריצות האלמנטריות שמתאימות לפעולות הדירוג.

3. כן. נוכל בדירוג להוסיף $3$ פעמים את השורה/עמודה הרלוונטית כדי לקבל $3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 5$ על האלכסון.

$$\begin{aligned} A &\mapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. לא. למשל $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ כי $\det(A) = 3$ אבל אם $\det(A) = 0$ נקבל $3 = \det(A) = a^2 \cdot 0 = 0$ בסתירה, ואם $\det(A) \in \{\pm 1\}$ נקבל $3 = \det(A) = \pm a^2$. לא יתכן $3 = a^2$ כי 3 אינו ריבוע ב־$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, ולא יתכן $3 = -a^2$ כי אז $2 = -3 = a^2$ ואילו גם 2 אינו ריבוע ב־$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

**תרגיל 6.** תהי

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 - ix_3^2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3].$$

1. מצאו מטריצה $A$ עבורה $g = g_A$.
2. הראו כי $g$ אינה מנוונת.
3. מצאו בסיס $B$ של $\mathbb{C}^3$ עבורו $[g]_B = I_3$.

**פתרון.** 1. כמו מקודם, נכתוב

$$.A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&0\\1&0&-i\end{pmatrix}$$

2. מתקיים

$$.\begin{pmatrix}a,b,c\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a,b,c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y+z\\x-y\\x-iz\end{pmatrix}=a\left(y+z\right)+b\left(x-y\right)+c\left(x-iz\right)$$

**נניח כי** $\begin{pmatrix}a,b,c\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$ **לכל** $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3$ **ונראה כי** $.\begin{pmatrix}a,b,c\end{pmatrix}=(0,0,0)$

**אם ניקח** $\begin{pmatrix}1\\1\\-i\end{pmatrix}=(xyz)$ **נקבל**

$$0=a\left(1-i\right)+b\left(1-1\right)+c\left(1+i^2\right)=a\left(1-i\right)$$

**לכן** $a=0$. **אם ניקח** $\begin{pmatrix}-i\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ **נקבל**

$$0=b\left(-i-1\right)$$

**ולכן** $b=0$, **ואם ניקח** $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ **נקבל**

$$0=c\left(1+i\right)$$

**ולכן** $c=0$. **בסך הכל** $\begin{pmatrix}0,0,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a,b,c\end{pmatrix}$, **כנדרש.**

3. נבצע דירוג לפי שורה ועמודה על $A$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר בשני השלבים האחרונים חילקנו ב־$\sqrt{-1}$ וב־$\sqrt{-1-i}$ בהתאמה, כל אחד מהם בשורה ובעמודה. נקבל כי עבור

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{-1-i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-i-1}} & -\frac{1}{\sqrt{-i-1}} & \frac{1}{\sqrt{-i-1}} \end{pmatrix}$$

מתקיים $PAP^t = I_3$. נכתוב

$$B = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-i-1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{-i-1}} \\ \frac{1}{\sqrt{-i-1}} \end{pmatrix} \right)$$

כאשר הוקטורים ב־$B$ הם עמודות $P^t$. אז $P^t = P_E^B$ ונקבל

$.I_3 = PAP^t = \left(P_E^B\right)^t [g]_E \, P_E^B = [g]_B$