

אלגברה ב' – גילוון תרגילי בית 3

מרחבים שמורים וסבומיים ישרים

20.11.2025

תרגיל 1. יהיו V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , יהיו $P, T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ באשר P איזומורפיزم. יהיו $W \leq V$ מרחב וקטורי מעלה P , והוא כפוף ל- T . הינו $P^{-1} \circ T \circ P$ שומר.

תרגיל 2. יהיו V מרחב וקטורי סופי-מימדי, יהיו $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו $V_1, \dots, V_k \leq V$ כולם T -শמורים ובן-הראוי $V = \bigoplus_{i \in [k]} V_i$.

1. הראו כי

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \bigoplus_{i \in [k]} \ker(T|_{V_i}) \\ \text{Im}(T) &= \bigoplus_{i \in [k]} \text{Im}(T|_{V_i}) \end{aligned}$$

2. הראו כי

$$\ker(T - \lambda \text{Id}_V) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker(T|_{V_i} - \lambda \text{Id}_{V_i})$$

לכל $\lambda \in \mathbb{F}$. הסיקו שהערכים העצמיים של T הם אלו של כל $T|_{V_i}$ והראו כי

$$\begin{aligned} r_{T,a}(\lambda) &= \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},a}(\lambda) \\ r_{T,g}(\lambda) &= \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},g}(\lambda) \end{aligned}$$

לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ ובאשר $r_{S,a}(\lambda), r_{S,g}(\lambda)$ הריבויים האלגברי והגיאומטרי של λ בערך עצמי של $S \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

תרגיל 3. יהיו V מרחב וקטורי סופי-מימדי מעל שדה \mathbb{F} ויהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הינו

$$\{0\} \neq W_1 < \dots < W_m \leq V$$

תתי-מרחבים T -শמורים של V כך ש- W_i תחת-מרחב ממש של W_{i+1} לכל $i \in [m-1]$, $W_1 \neq 0$ וגם $W_m \neq V$. נסמן $k_i := \dim_{\mathbb{F}}(W_i)$ ויהי B בסיס של V כך ש- k_i הוקטורים הראשוניים של V מהווים בסיס ל- W_i לכל $i \in [m]$. הראו כי $[T]_B$ מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{pmatrix}$$

עבור מטריצות $A_i \in \text{Mat}_{k_i}(\mathbb{F})$. רמז: היזכרו בمسקנה מהכיתה לגבי מציאת בסיס B עבורו $[T]_B$ מטריצה משולשת עליונה.