

# אלגברה ב' – גיליון תרגילי בית 9

## משפט ד'ורדן

תאריך הגשה: 8.1.2026

**תרגיל 1.** 1. מצאו את צורת ד'ורדן של  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  עבור  $n \in \mathbb{N}_+$ .

2. תהי  $A \in M_n(\mathbb{C})$  הפיכה. מצאו את צורת ד'ורדן של  $A^{-1}$ .

3. מצאו תנאי הכרחי ומספיק על צורת ד'ורדן של  $A \in M_n(\mathbb{C})$  כך שיתקיים  $A \sim A^{-1}$ .

**תרגיל 2.** בשמורת הטבע ליד הטכניון סין יש היום 2 דרכונים, 500 פנדות ו-50002 במובקים.

כל שנה הדרכנים, הפנדות והםבווקים מתרבים ומספרם גדל פי 2.

לאחר מכון, כל פנדה אוכלת במובק אחד ובכל דרפון אוכל שתי פנדות.

אז, רשות הטבע והגנים הסינית משחררת לטבע 4 דרכונים ו-150 פנדות, אם עדיין יש פנדות בשמורה. לבסוף, אם לא נשאר במובק בסוף השנה, כל הפנדות מתות.

1. מצאו מטריצה  $A \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$  וערבים  $d, p, b$  עבורם מספרי הדרכנים, הפנדות והםבווקים בסוף השנה

$$A^t \in \mathbb{N}^d \quad \text{ה-}t \text{ הם מקדים בוקטור} \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ p \\ b \end{pmatrix}$$

2. נשייא הטכניון מתבנן לבקר בסין עוד 30 שנה. האם יהיו פנדות בשמורה בזמן הביקור שלו?

3. הטכניון החליט להעביר את הלימודים מסין למדים עוד 230 שנה. האם ישארו עד אז פנדות בשמורה הטבע?

**תרגיל 3.** תהיינה

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } \text{מטריצות ב-} \text{Mat}_3(\mathbb{R})$$

$$\text{נגיד כי וקטור } v \in \mathbb{R}^3 \text{ הוא שלשה פיתגורית אם וקטור } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ שולב ביחס ל-} v.$$

$$f(v) := a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

ובו וקטור זה הוא שלשה פיתגורית פרימיטיבית אם בנוספ' המשולך המשותף המקסימלי של  $a, b, c$  שווה 1.

1. מתקיים כי אם  $v \in \mathbb{R}^3$  הוא שלשה פיתגורית, גם  $A_i v$  הוא שלשה פיתגורית, וגם כי אם  $v \in \mathbb{R}^3$  פרימיטיבית, גם  $A_i v$  פרימיטיבית. הראו זאת עבור  $i = 1$ .

**רמז:** עבור פרימיטיבות, היעזרו במטריצה  $A_1^{-1}$ .

2. הסיקו כי  $A_1^k v_0$  שלשה פיתגורית פרימיטיבית לכל  $k \in \mathbb{N}$ .

3. ידוע כי 1 ערך עצמי של  $A_1$  ושל  $A_3$ , וכי  $-1$  – ערך עצמי של  $A_2$ .

הראו כי  $A_2, A_3$  לבסיניות, ומיצאו מטריצה  $P \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$  הפיכה, ומטריצה ד'ורדן  $J \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$  כך  $PA_1P = J$ . **ש망קימים**

4. נסמן  $A := A_1$ . חשבו את  $A^k$  לכל  $k \in \mathbb{N}$ , ומצאו שלשה פיתגורית פרימיטיבית מהצורה  $\begin{pmatrix} a \\ 2025 \\ c \end{pmatrix}$ . האם

יש בקבוצה  $\{A^k v_0 \mid k \in \mathbb{N}\}$  וקטור מהצורה  $\begin{pmatrix} a \\ 2026 \\ c \end{pmatrix}$ ?