

אלגברה ב' – גיליון תרגילי בית 5

מכפלות פנימיות וניצבות

5.12.2025

תרגיל 1. עבור ההעתקות הבאות f_i , קיבעו האם f_i מכפלה פנימית.

1.

$$f_1: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \mapsto ax + by + az$$

2.

$$f_2: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \mapsto ax + by + cz + xz$$

3.

$$f_3: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \times \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$
$$(A, B) \mapsto \text{tr}(B^t A)$$

4.

$$f_4: \mathbb{R}_{\leq n}[x] \times \mathbb{R}_{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \dots + f(n)g(n)$$

5.

$$f_5: \mathbb{C}_{\leq n}[x] \times \mathbb{C}_{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{C}$$
$$(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \dots + f(n)g(n)$$

תרגיל 2. היעזרו באי־שוויון קושי־שוורץ כדי להראות שמתקיים

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+: x + y + z \leq 2 \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \right)$$

רמז: חישובו כיצד לפרש את אגף ימין בעזרת נורמה.

תרגיל 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית עם בסיס אורתונורמלי (v_1, \dots, v_n) , ויהיו $u_1, \dots, u_n \in V$ עבורם

$$\forall i \in [n]: \|v_i - u_i\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

הוכיחו כי (u_1, \dots, u_n) בסיס של V .