

אלגברה ב' – גיליון תרגילי בית 4

מרחבים שמורים והטלות

28.11.2025

תרגיל 1. 1. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל שדה \mathbb{F} ותהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. יהי $W \leq V$ תת־מרחב T -שמור ויהי $U \leq V$ משלים ישר של W ב- V . הראו כי $T|_W = T_{W,U}$.

2. מצאו דוגמא עבור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, $W \leq V$ כלשהו עם משלימים ישרים $U_1, U_2 \leq V$, כך ש- $T_{W,U_1} \neq T_{W,U_2}$.

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה \mathbb{F} ותהיינה $P, Q \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלות. הראו כי אם $PQ = QP$ אז הטלה על $\text{Im}(P) \cap \text{Im}(Q)$ במקביל ל- $\ker(P) + \ker(Q)$.

תרגיל 3. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור לכסין שערכיו העצמיים השונים הם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. הראו כי התת־מרחבים ה- T שמורים של V הם אלו מהצורה $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ עבור $W_i \leq V_{\lambda_i}$.

תרגיל 4. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור לכסין עם ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, ולכל $i \in [k]$ תהי $P_i \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ההטלה על V_i במקביל ל- $\bigoplus_{j \in [k] \setminus \{i\}} V_j$.

1. לכל $i \in [k]$, מיצאו פולינום p_i עבורו

$$p_i(\lambda_i) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. הראו כי $p_i(T) = P_i$ לכל $i \in [k]$.