אלגברה ב' (01040168) - חורף 2026
תרגול 11 - תבניות בילינאריות וחוק האינרציה של סילבסטר
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־19 בינואר 2026

1 תבניות בילינאריות

הגדרה 1.1 (תבנית בילינארית). יהי V מרחב וקטורי. תבנית בילינארית f על V היא העתקה $f\colon V\to V$ שהינה לינארית בשני הרכיבים.

הערה 1.2. מעל $\mathbb{C}$ עוסקות לעתים בתבניות ססקווילינאריות ("אחת־וחצי לינאריות") במקום בתבניות בילינאריות. נדבר על אלו בהמשך.

הגדרה 1.3 (מטריצה מייצגת של תבנית בילינארית). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיס $B=(v_1,\ldots,v_n)$, ותהי f תבנית בילינארית על V. המטריצה המייצגת של f לפי B היא

$$[f]_B=\begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & \cdots & f(v_1,v_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f(v_n,v_1) & \cdots & f(v_n,v_n)\end{pmatrix}.$$

טענה 1.4. לכל $u,v\in V$ מתקיים

$$[u]_B^t[f]_B[v]_B=f(u,v).$$

בנוסף, אם $[u]_B^tA[v]_B=f(u,v)$ לכל $u,v\in V$, אז $A=[f]_B$.

הוכחה. נכתוב

$$u=\sum_{i\in[n]}\alpha_iv_i$$
$$v=\sum_{j\in[n]}\beta v_j$$

ואז

$$\begin{aligned}[u]_B^t[f]_B[v]_B&=\sum_{i,j\in[n]}\alpha_i\beta_j[v_i]_B^t[f]_B[v_j]_B\\ &=\sum_{i,j\in[n]}\alpha_i\beta_je_i^t[f]_Be_j\\ &=\sum_{i,j\in[n]}\alpha_i\beta_jf(v_i,v_j)\\ &=f\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_iv_i,\sum_{j\in[n]}\beta_jv_j\right)\\ &=f(u,v)\end{aligned}.$$

לבסוף, ניתן לקחת $u=v_i,v=v_j$ ואז $[u]_B^tA[v]_B=a_{i,j}$. לכן אם $[u]_B^tA[v]_B=f(u,v)$ לכל $u,v\in V$ נקבל כי $A=[f]_B$. ■

מסקנה 1.5. יהיו B,C שני בסיסים של אותו מרחב וקטורי סוף־מימדי V, ותהי f תבנית בילינארית על V. אז

$$[f]_B=\left(M_C^B\right)^t[f]_C\,M_C^B\ .$$

במקרה של אופרטור T על V הקשר בין $[T]_B\,,[T]_C$ הוא דימיון. המסקנה מראה קשר אחר במקרה של תבניות בילינאריות, שמוביל להגדרה הבאה.

הגדרה 1.6 (מטריצות חופפות). מטריצות $A,B\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$ נקראות חופפות אם קיימת **הפיכה** $P\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$ עבורה $B=P^tAP$.

מסקנה 1.7. המטריצות $[f]_B\,,[f]_C$ המייצגות תבנית בילינארית לפי בסיסים שונים, הינן חופפות.

הערה 1.8. ניתן לשחזר את תבנית הבילינארית ממטריצה מייצגת שלה, ולמעשה ההעתקה $[f]_B\mapsto f$ הינה איזומורפיזם בין מרחב התבניות הבילינאריות והמרחב $\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$.

הגדרה 1.9 (תבנית בילינארית סימטרית). יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי f תבנית בילינארית על V. נגיד כי f סימטרית אם $f\left(u,v\right)=f\left(v,u\right)$ לכל $u,v\in V$.

תרגיל 1. תהיינה $A,B,P\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{R}\right)$ כאשר P הפיכה ומתקיים $B=P^tAP$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

1. $\det\left(A\right)=\det\left(B\right)$.
2. ל־A,B יש אותם ערכים עצמיים.
3. $\mathrm{rank}\left(A\right)=\mathrm{rank}\left(B\right)$.
4. A הפיכה אם ורק אם B הפיכה, וכאשר זה מתקיים A^{-1},B^{-1} חופפות.

פתרון.
1. מתקיים

$$\det\left(B\right)=\det\left(P^tAP\right)=\det\left(P^t\right)\det\left(A\right)\det\left(P\right)$$

ולכן יש שוויון אם ורק אם $\det\left(P^t\right)\det\left(P\right)=1$. אבל, $\det\left(P^t\right)=\det\left(P\right)$ ולכן זה מתקיים אם ורק אם $\det\left(P\right)\in\{\pm1\}$. זה לא חייב להיות המצב. למשל, נוכל לקחת $A=I_n,B=4I_n,P=2I_n$.

2. הדוגמא הקודמת מראה שהערכים העצמיים לא נשמרים.
3. הדרגה נשמרת כי P^t,P הפיכות.
4. נניח כי A הפיכה. אז B הפיכה כי הדרגות שלהן שוות. נשים לב כי

$$B^{-1}=\left(P^tAP\right)^{-1}=P^{-1}A^{-1}\left(P^t\right)^{-1}$$

ועבור $\tilde{P}=\left(P^t\right)^{-1}$ נקבל $B^{-1}=\tilde{P}^tA^{-1}\tilde{P}$.

אלגוריתם 1.10 (דירוג סימולטני של מטריצות). ניזכר שמטריצה הפיכה P הינה כפל של מטריצות אלמנטריות. כפל משמאל במטריצה אלמנטרית E מתאים לפעולת דירוג על השורות, וכפל ב־E^t מתאים לפעולת דירוג זהה על העמודות (החלק השני נכון כי מתקיים $AE^t=\left(EA^t\right)^t$).
נתאר איך להיעזר בכך כדי לקבל שכל מטריצה $A\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$ סימטרית עבור $\mathbb{F}$ ממציין $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)\neq2$ (כלומר, $1+1\neq0$), חופפת למטריצה אלכסונית.

1. יהי $i=1$.
2. אם $\left(A\right)_{i,i}=0$, נחלק לשני מקרים.
   2.1 אם $\left(A\right)_{i,j}=0$ לכל $j\in[n]$, המטריצה מהצורה

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0_{1\times(n-1)}\\ 0_{(n-1)\times1} & X\end{pmatrix}$$

ואז די לבצע פעולות שידרגו את X למטריצה אלכסונית.
נעבור לשלב 4.

2.2 אם קיים $j \in [n]$ עבורו $(A_{i,j}) \neq 0$, נוסיף את השורה ה־j לשורה ה־i, ולאחר מכן את העמודה ה־j לעמודה ה־i.

למשל, אם התחלנו אם המטריצה $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, נדרג

$$A \xrightarrow{R_1 \mapsto R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1 \mapsto C_1 + C_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ונזכור כי פעולת הדירוג התקבלה על ידי הצמדה EAE^t כאשר

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

במטריצה החדשה שנסמנה A במקום המטריצה הקודמת, המקדם ה־(i,i) שונה מאפס.

שימו לב שהמטריצה שהתקבלה אינה המטריצה A שהתחלנו איתה, אך לצורך תיאור האלגוריתם, נתייחס אליה בתור A לאורכו.

3. לכל $i < j$, אם $(A)_{j,i} \neq 0$, (או באופן שקול $(A)_{i,j} \neq 0$), נוסיף כפולה של השורה ה־i לשורה ה־j שתאפס את המקדם $(A)_{j,i}$, ולאחר מכן נוסיף את אותה כפולה של העמודה ה־i לעמודה ה־j (שתאפס את המקדם $(A)_{i,j}$). למשל, אם התחלנו עם

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור $i = 1$, נדרג תחילה

$$A \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - \frac{1}{2} R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \mapsto C_2 - \frac{1}{2} C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ונזכור כי פעולת הדירוג מתקבלת על ידי הצמדה EAE^t כאשר

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

לאחר מכן, נעשה אותה דבר כדי לאפס את $(A)_{1,3}, (A)_{3,1}$.

4. אם $i < n$, נגדיל את i ב־1, ונחזור לשלב 2.

5. נסמן את המטריצות האלמנטריות שמצאנו במהלך החישוב בתור $E_1, \ldots, E_k$ לפי הסדר. אז, אם A_0 המטריצה שהתחלנו איתה, ו־D המטריצה שקיבלנו בסוף, מתקיים

$$D = E_k \cdot \ldots \cdot E_1 A_0 E_1^t \cdot \ldots \cdot E_k^t.$$

נסמן

$$P := (E_k \cdot \ldots \cdot E_1)^t = E_1^t \cdot \ldots \cdot E_k^t$$

ונקבל כי

$$D = P^t A P.$$

מסקנה 1.11. יהי F שדה ממציין שונה מ־2, כלומר שדה בו $1 + 1 \neq 0$. אז, כל מטריצה סימטרית מעל $\mathbb{F}$ חופפת למטריצה אלכסונית.

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל שדה $\mathbb{F}$ עם מציין $\mathrm{char}\left(F\right) \neq 2$, ותהי $f \in \mathrm{Bil}\left(V\right)$ תבנית בילינארית סימטרית על V.

הראו כי קיים בסיס C עבורו $\left[f\right]_C$ אלכסונית.

פתרון. יהי B בסיס של V ותהי $A := \left[f\right]_B$. אז A סימטרית, ולפי המסקנה קיימת מטריצה $P \in \mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right)$ הפיכה עבורה $D := P^t A P$. אז

$$D = P^t A P = P^t \left[f\right]_B P.$$

לפי סעיף 3 של תרגיל 5 בגיליון תרגילים 1, קיים בסיס C עבורו $P^{-1} = M_C^B$, כיוון ש־P^{-1} הפיכה. לכן, $P = \left(M_C^B\right)^{-1} = M_B^C$ ולכן

$$D = \left(M_B^C\right)^t \left[f\right]_B M_B^C = \left[f\right]_C,$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו במסקנה 1.5 לגבי מעבר בסיס.

תרגיל 3. 1. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right).$$

מיצאו מטריצה $P \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)$ הפיכה עבורה $P^t A P$ אלכסונית.

2. האם יכולנו לקחת מטריצה P' אחרת שתיתן תשובה מתאימה?

3. האם יש מטריצה $Q \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)$ הפיכה עבורה $Q^t A Q = I_3$?

4. האם יש מטריצה $Q \in \mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{Z}/5\right)$ הפיכה עבורה $Q^t B Q = I_3$ כאשר $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

פתרון. 1. נדרג את A למטריצה אלכסונית כאשר בכל שלב נבצע פעולת דירוג שורה ולאחריה פעולת דירוג עמודה מתאימה.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\mapsto R_2+2R_1}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&4&0\\2&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2\mapsto C_2+2C_1}\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\mapsto R_3-R_1}\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3\mapsto C_3-C_1}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נקבל כי

$$P^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

מקיימת את הנדרש, ולכן ניקח

$$.P=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2. כן. למשל, יכולנו קודם להחליף את השורות הראשונה והשלישית, ולקבל

$$(P')^t=P^t\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\neq P^t$$

ואז $P'\neq P$.

3. קיבלנו $P^tAP=\operatorname{diag}(2,4,0)$ וזאת אינה מטריצה מדרגה מלאה. דרגה נשמרת תחת חפיפת מטריצות, ולכן לא יתכן שיש Q כנדרש.

4. ננסה דירוג לפי שורה ועמודה.

$$
\begin{aligned}
B=&\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{R_3\mapsto R_3-R_1}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&0\\0&4&4\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{C_3\mapsto C_3-C_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&4\\0&4&4\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{R_2\mapsto R_2+2R_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&4\\0&4&4\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{C_2\mapsto C_2+2C_1}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&4&4\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{R_3\mapsto R_3+2R_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&0&2\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{C_3\mapsto C_3+2C_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

כעת, נוכל לחלק איברים על האלכסון רק בריבוע, כיוון שיש לכפול גם את השורה וגם את העמודה באותו מספר. כיוון ש־3 אינו ריבוע ב־$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ לא נוכל לקבל ככה את מטריצת היחידה. גם, הדטרמיננטה של המטריצה שקיבלנו היא $2\equiv 2\cdot 3\cdot 2$. הדטרמיננטה של מטריצות חופפות נבדלת בכפל בריבוע, אך לא יתכן $2=a^2\det(I_3)=a^2$ כי 2 אינו ריבוע.

השיטה הזאת לא עובדת תמיד. יתכן מצב בו מטריצה אינה חופפת ליחידה אך כן בעלת דטרמיננטה שהינה ריבוע. למשל, המטריצה $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ כזאת.

תרגיל 4 (לא הספקנו בתרגול). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{R}$. תהי g מכפלה פנימית על V ותהי h תבנית בילינארית סימטרית על V. הוכיחו שקיים בסיס B של V עבורו $[g]_B, [h]_B$ שתיהן אלכסוניות.

פתרון. נסמן $n:=\dim_{\mathbb{R}}(V)$. יהי E בסיס אורתונורמלי של V ביחס ל־g, שקיים לפי גרם־שמידט. אז $[g]_E=I_n$. כעת, $[h]_E$ סימטרית כי h סימטרית, ולכן יש ממשפט הפירוק הספקטרלי מטריצה $Q\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית עבורה $Q^t[h]_EQ$ אלכסונית. נרצה שיתקיים $Q=P_E^B$ עבור בסיס B, ולכן נגדיר $B:=\left(Q^{-1}v_1,\ldots,Q^{-1}v_n\right)$ כאשר $E=(v_1,\ldots,v_n)$. אז

$$
\begin{aligned}
[g]_B&=\left(P_E^B\right)^t[g]_EP_E^B=Q^t[g]_EQ=Q^tI_nQ=Q^tQ=I_n\\
[h]_B&=\left(P_E^B\right)^t[h]_EP_E^B=Q^t[h]_EQ
\end{aligned}
$$

שתיהן אלכסוניות, כנדרש.

2 חוק האינרציה של סילבסטר

משפט 2.1 (סילבסטר). תהי $A\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ סימטרית.
מספר הערכים החיוביים\שליליים על האלכסון של מטריצה אלכסונית החופפת ל־A אינו תלוי בבחירה של אותה מטריצה.

מסקנה 2.2. תהי $A\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ סימטרית. A חופפת למטריצה יחידה מהצורה $\begin{pmatrix} I_{(n_+)} & & \\ & -I_{(n_-)} & \\ & & 0_{(n_0)} \end{pmatrix}$.
מטריצה זאת נקראת צורת סילבסטר הקנונית של A. n_+ ו-n_- נקראים אינדקס האינרציה החיובי והשלילי של A, בהתאמה. ההפרש n_+-n_- נקרא הסיגנטורה של A.

הערה 2.3. משפט סילבסטר אומר באופן שקול שלכל תבנית בילינארית סימטרית g קיים בסיס C עבורו $[g]_C$ בצורת סילבסטר.

טענה 2.4. המספר n_+ הוא סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים החיוביים של A, המספר n_- הוא סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים השליליים, והמספר n_0 הוא מימד הגרעין.

תרגיל 5. תהי $A\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ סימטרית.

1. הוכיחו כי A,A^3 חופפות.
2. הוכיחו כי אם A הפיכה, היא חופפת ל-A^{-1}.
3. תהי $B\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ סימטרית ונניח כי

$$p_A(x)=x^2-2$$
$$.p_B(x)=x^2+2x-3$$

האם A,B בהכרח חופפות?

פתרון. 1. ל-A,A^3 יש אותם אינדקסיי אינרציה כי הערכים העצמיים של A^3 הם λ^3 עבור λ ערך עצמי של A. לכן ל-A,A^3 אותה צורת סילבסטר, ולכן הן חופפות.

2. כמו מקודם, כאשר הערכים העצמיים של A^{-1} הם $\frac{1}{\lambda}$ עבור λ ערך עצמי של A.

3. נמצא שורשים של הפולינומים.

$$x^2-2=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$
$$x^2+2x-3=x^2+3x-(x+3)=(x-1)(x+3)$$

לכן לכל אחד מהפולינומים ערך עצמי אחד חיובי ואחד שלילי. לכן צורות סילבסטר של A,B שתיהן $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ולכן הן חופפות.

תרגיל 6 (לא הספקנו בתרגול). מצאו את צורת סילבסטר של

$$.A=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&-1&\cdots&-1\\1&-1&0&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&-1&-1&\cdots&0\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

פתרון. כדי למצוא את צורת סילבסטר, נחפש ערכים עצמיים. נשים לב כי 1 ערך עצמי מריבוי $n-1$. אז הערך העצמי הנוסף הוא $\mathrm{tr}(A)-(n-1)\cdot1=-n+1$. אם $n=1$ מתקיים $A=(0)$. אחרת צורת סילבסטר היא $\begin{pmatrix}I_{n-1}&\\&-1\end{pmatrix}$.

אלגוריתם 2.5 (לא הספקנו בתרגול). כדי למצוא בסיס C עבורו $[g]_C$ בצורת סילבסטר נבצע את השלבים הבאים.

1. נמצא בסיס $\tilde{C}=(v_1,\ldots,v_n)$ של V עבורו $[g]_{\tilde{C}}$ אלכסונית, בעזרת לכסון אורתוגונלי.
2. נגדיר

$$,u_i=\begin{cases}\frac{v_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \lambda_i\neq0\\ v_i & \lambda_i=0\end{cases}$$

כדי לקבל $g(u_i,u_i)\in\{0,-1,1\}$, לכל i.

3. על ידי בחירת סדר מתאים של ה־u_i נקבל בסיס C המקיים את הנדרש.

תרגיל 7 (לא הספקנו בתרגול). תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו מטריצה $P \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ עבורה $P^t AP$ בצורת סילבסטר.

פתרון. נתחיל במציאת ערכים עצמיים של A. נשים לב כי 1 ערך עצמי של A מריבוי 2. הערך העצמי הנוסף הוא $\mathrm{tr}(A) - 2 \cdot 1 = 4$. בסיס מתאים הוא $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
נבצע את תהליך גרם־שמידט על כל אחד מהמרחבים העצמיים, כדי לקבל בסיס אורתונורמלי

$$\tilde{C} := (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \right).$$

נחלק את הוקטורים העצמיים ב־$\sqrt{\lambda_i}$ ונקבל בסיס

$$C := \left(\begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \right).$$

תהי

$$P = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{6}/6 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{6}/3 \\ 1/2\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

ונקבל כי

$$P^t AP = I_3$$

בצורת סילבסטר.

הערה 2.6. לפעמים חישוב הערכים העצמיים יכול להיות מסובך. נוכל בעצם למצוא את צורת סילבסטר ואת הבסיס המתאים לה בלי מציאת המרחבים העצמיים. לשם כך, נשים לב כי אם E מטריצה אלמנטרית, הכפל $A \mapsto AE^t$ נקבע על פי אותן פעולות על עמודות A כמו פעולות E על השורות. נוכל אם כן לדרג את A לפי שורה ועמודה במקביל, כאשר בכל שלב נבצע את אותה פעולה על השורות ואז על העמודות (או להיפך). נקבל מטריצה P כמכפלת המטריצות האלמנטריות, שעבורה PAP^t תהיה בצורת סילבסטר.