אלגברה ב' (01040168) – חורף 2026
תרגול 7 – משפט הפירוק הספקטרלי, פירוק לערכים סינגולריים ופירוק פולארי
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־16 בדצמבר 2025

1 אופרטורים נורמליים וצמודים לעצמם, ומשפט הפירוק הספקטרלי

ראינו בתרגיל קודם דוגמא לאופרטור T עבורו $T^*=T$. אופרטור כזה נקרא צמוד לעצמו מעל $\mathbb{R}$ או הרמיטי מעל $\mathbb{C}$. אופרטורים צמודים לעצמם מאופיינים על ידי המשפט הבא.

משפט 1.1 (משפט הפירוק הספקטרלי לאופרטורים צמודים לעצמם). יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי סוף־מימדי, ויהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$. אז T צמוד לעצמו אם ורק אם יש בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.

מעל $\mathbb{C}$, אופרטורים בעלי אפיון דומה אינם אופרטורים הרמיטיים, אלא אופרטורים נורמליים.

הגדרה 1.2 (אופרטור נורמלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נגיד כי T נורמלי אם $T^*T=TT^*$.

משפט 1.3 (משפט הפירוק הספקטרלי לאופרטורים נורמליים). יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב סוף־מימדי, ויהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$. אז T נורמלי אם ורק אם יש בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.

הגדרה 1.4. מטריצה $A\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ נקראת נורמלית אם $A^*A=AA^*$ כאשר $A^*:=\bar{A}^t$.

הערה 1.5. תהי A מטריצה סימטרית (נורמלית) מעל $\mathbb{R}$ (מעל $\mathbb{C}$). אז T_A אופרטור צמוד לעצמו (נורמלי) ולכן ממשפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו $[T_A]_B$ מטריצה אלכסונית.
אז

$$A=[T_A]_E=\left(M_B^E\right)^{-1}[T_A]_B\,M_B^E.$$

המטריצה $P:=\left(M_B^E\right)^{-1}=M_E^B$ היא מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי, ולכן הינה אורתוגונלית (אוניטרית). אז מתקיים כי $P^{-1}AP=D$ עבור מטריצה אורתוגונלית (אוניטרית) P ומטריצה אלכסונית D.

משפט 1.6 (משפט הפירוק הספקטרלי למטריצות). תהי $A\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ($\mathbb{F}=\mathbb{C}$). אז A סימטרית (נורמלית) אם ורק אם קיימת מטריצה אורתוגונלית (אוניטרית) $P\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבורה $P^{-1}AP$ אלכסונית.

תרגיל 1. תהי

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

מצאו מטריצה אורתוגונלית $P\in\operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$ עבורה $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.

פתרון. ראשית נמצא ערכים עצמיים. מתקיים

$$\det\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=3$$

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=4.$$

לכן אם λ_1, λ_2 הערכים העצמיים נקבל $\lambda_1\lambda_2 = 3$ וגם $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$, לכן הערכים העצמיים של A הם 3 מריבוי אלגברי 2 ו־1 מריבוי אלגברי 1.
המרחב העצמי של 3 הוא $\operatorname{Span}(e_1, e_2 + e_3)$. נחפש את המרחב העצמי של 1. נדרג

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז המרחב העצמי הוא $\operatorname{Span}(e_2 - e_3)$.
כדי לקבל בסיס אורתונורמלי נוכל לבצע את תהליך גרם־שמידט על בסיס של כל מרחב עצמי בנפרד, או על הבסיס כולו. אם אנו יודעים שהמטריצה נורמלית, המרחבים העצמיים השונים שלה ניצבים, ולכן שתי הדרכים שקולות. באופן כללי, יש להראות שקיבלנו בסיס מלכסן, או אורתונורמלי, תלוי בשיטה שבחרנו.
נבצע את תהליך גרם־שמידט על $(e_1, e_2 + e_3)$. נקבל בסיס $\left(e_1, \frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}}\right)$. על $(e_2 - e_3)$ נקבל בסיס $\left(\frac{e_2-e_3}{\sqrt{2}}\right)$.
נרצה להראות כי

$$B = \left(\frac{e_2-e_3}{\sqrt{2}}, e_1, \frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}}\right)$$

בסיס מלכסן של A.
אכן, כל הוקטורים ב־B הם וקטורים עצמיים של A. לכן אם ניקח $P := [\operatorname{Id}_{\mathbb{C}^3}]_E^B$ נקבל כי $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית, וכי P אורתוגונלית, שכן עמודותיה הן בסיס אורתונורמלי.

תרגיל 2. יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$. הראו כי T נורמלי אם ורק אם קיים פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $T^* = p(T)$.
היעזרו במשפט הבא.

משפט 1.7 (אינטרפולציית לגרנג'). תהיינה $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. קיים $p \in \mathbb{C}_{n+1}[x]$ עבורו $p(x_i) = y_i$ לכל $i \in [n]$.

פתרון. נניח כי קיים פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $T^* = p(T)$. כיוון ש־T מתחלף עם כל פולינום ב־T, נקבל

$$T^*T = p(T)T = Tp(T) = TT^*$$

ולכן T נורמלי.
בכיוון השני, נניח כי T נורמלי. ממשפט הפירוק הספקטלי קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ אלכסונית. אז

$$[T^*]_B = [T]_B^* = \operatorname{diag}\left(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n\right).$$

מאינטרפולציית לגרנג', קיים פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $p(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ לכל $i \in [n]$. אז

$$[T^*]_B = \operatorname{diag}(p(\lambda)_1, \ldots, p(\lambda_n)) = p(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = p([T]_B) = [p(T)]_B$$

ונקבל כי $T^* = p(T)$, כנדרש.

תרגיל 3. יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי. הראו כי T הרמיטי אם ורק אם כל הערכים העצמיים של T ממשיים.

פתרון. ממשפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ אלכסונית.
בעת T הרמיטי אם ורק אם $T = T^*$ אם ורק אם $[T]_B = [T^*]_B$. כיוון ש־B אורתונורמלי, מתקיים $[T^*]_B = \overline{[T]_B}^t = \operatorname{diag}\left(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n\right)$. לכן השוויון הנ"ל מתקיים אם ורק אם $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$ לכל $i \in [n]$, כלומר אם ורק אם כל הערכים העצמיים ממשיים.

תרגיל 4. יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי. הראו כי T אוניטרי אם ורק אם הערכים העצמיים של T הינם על מעגל היחידה.

פתרון. ממשפט הפירוק הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ אלכסונית.
אז

$$[T]_B^* = \overline{[T]_B}^t = \operatorname{diag}\left(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n\right).$$

בעת,

$$[T^*T]_B = [T^*]_B [T]_B = \operatorname{diag}\left(\bar{\lambda}_1\lambda_1 \ldots, \bar{\lambda}_n\lambda_n\right) = \operatorname{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|).$$

T אוניטרי אם ורק אם $T^*T = \operatorname{Id}$ אם ורק אם $[T^*T] = I_n$, אבל מהחישוב הנ"ל זה מתקיים בדיוק כאשר הערכים העצמיים של T על מעגל היחידה (כלומר, עם ערך מוחלט 1).

תרגיל 5. יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הרמיטי ונניח שלכל ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{C}$ מתקיים $\lambda \geq 0$. הראו כי קיים אופרטור $S \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ שכל הערכים העצמיים שלו אי־שליליים וכך שמתקיים $S^2 = T$.

פתרון. T הרמיטי ולכן נורמלי. ממשפט הפירוק הספקטרלי, קיים בסיס אורתונורמלי B עבורו $[T]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
מההנחה, $\lambda_i \geq 0$ לכל $i \in [n]$. אז קיים שורש חיובי $\sqrt{\lambda_i}$ וניקח $S = \left(\eta_B^B\right)^{-1}\left(\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)\right)$ להיות האופרטור עבורו $[S]_B = \left(\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)\right)$. אז $\left[S^2\right]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = [T]_B$ ולכן $S^2 = T$.

2 פירוק לערכים סינגולריים ופירוק פולארי

יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבור V מרחב מכפלה פנימית. ראינו כי T נורמלי אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי של V שמלכסן את T. ראינו כי אופרטורים כלליים מקיימים תכונה דומה.

משפט 2.1 (פירוק לערכים סינגולריים). יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי, ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. קיימים בסיסים אורתונורמליים B, C של V עבורם $[T]_C^B$ אלכסונית.
בנוסף, הערכים $\sigma_i = \left([T]_C^B\right)_{i,i}$ שנקראים הערכים הסינגולריים של T הינם ממשיים אי־שליליים ונקבעים ביחידות תחת הדרישה

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n.$$

מסקנה 2.2 (פירוק לערכים סינגולריים של מטריצה). תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. מהמשפט, קיימים בסיסים אורתונורמליים B, C עבורם $\Sigma := [T_A]_C^B$ אלכסונית מלבנית. אז

$$A = [T_A]_E = M_E^C [T_A]_C^B M_B^E = [T_A]_E = M_E^C \Sigma M_B^E.$$

המטריצות $U := M_E^C, V := M_E^B$ הינן אורתוגונליות (אוניטריות) ביוון שהן שולחות בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. אכן, אם $B = (b_1, \ldots, b_n)$ נקבל

$$M_E^B e_i = M_E^B [b_i]_B = b_i.$$

בפרט, $M_B^E = V^{-1} = V^*$ ונקבל כי $A = U \Sigma V^*$.

הגדרה 2.3 (אופרטור מוגדר אי־שלילית). אופרטור $T \in \mathrm{End}(V)$ על מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי נקרא מוגדר אי־שלילית אם הוא צמוד לעצמו (הרמיטי) וגם $\langle Tv, v \rangle \geq 0$ לכל $v \in V$.

הערה 2.4. באופן דומה נגדיר אופרטור מוגדר חיובית/אי־חיובית/שלילית.

טענה 2.5. אופרטור צמוד לעצמו (נורמלי) הינו מוגדר אי־שלילית אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלו (ממשיים) אי־שליליים.

טענה 2.6. האופרטור T^*T הינו מוגדר חיובית, והערכים הסינגולריים $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ של העתקה לינארית $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ הם הערכים העצמיים של האופרטור $\sqrt{T^*T} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

נתאר כעת איך למצוא בסיסים B, C כנ"ל. נסמן $n := \dim(V)$.

1. כעת נמצא את הערכים העצמיים λ_i של T^*T. נסמן $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ ונסדר אותם מהגדול לקטן $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$.
2. ניקח $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים מתאימים של T^*T (שקיים לפי פירוק ספקטרלי).

   יהי $k \in [n]$ המקסימלי עבורו $\lambda_k > 0$. נגדיר $C' = \left(\frac{1}{\sigma_1} T(v_1), \ldots, \frac{1}{\sigma_k} T(v_k)\right)$.

   אז אכן מתקיים $T(v_i) = \sigma_i u_i$ וגם

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sigma_i} T(v_i), \frac{1}{\sigma_j} T(v_j) \right\rangle &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle T(v_i), T(v_j) \rangle \\
&= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle T^*T(v_i), v_j \rangle \\
&= \frac{\lambda_i}{\sigma_i \sigma_j} \langle v_i, v_j \rangle \\
&= \frac{\lambda_i}{\sigma_i \sigma_j} \delta_{i,j} \\
&= \frac{\lambda_i}{\sigma_i^2} \delta_{i,j} \\
&= \delta_{i,j}
\end{aligned}.$$

3. נשלים את C' לבסיס אורתונורמלי C של V.

   לכל $i > k$ מתקיים

$$\|T(v_i)\|^2 = \langle Tv_i, Tv_i \rangle = \langle T^*Tv_i, v_i \rangle = 0.$$

   לכן $T(v_i) = 0$ ולא משנה באיזו דרך נשלים לבסיס אורתונורמלי.

הערה 2.7. כדי למצוא את הפירוק $A=U\Sigma V^*$ של מטריצה $A\in\operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$, נמצא את הפירוק לערכים סינגולריים של $T_A\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$ ונעבוד לפי התיאור במסקנה 2.2.

תרגיל 6. מצאו פירוק לערכים סינגולריים עבור המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\2&2\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

פתרון. 1. נמצא את הערכים סינגולריים.

מתקיים

$$A^*=A^t=\begin{pmatrix}2&2\\-1&2\end{pmatrix}$$

ואז

$$A^*A=\begin{pmatrix}8&2\\2&5\end{pmatrix}.$$

אם λ_1,λ_2 הערכים העצמיים של A^*A נקבל כי

$$\lambda_1+\lambda_2=\operatorname{tr}(A^*A)=8+5=13$$
$$\lambda_1\cdot\lambda_2=\det(A^*A)=40-4=36$$

ולכן הערכים העצמיים של A^*A הם $4,9$. ולכן הערכים הסינגולריים של A הם $\sigma_1=\sqrt{9}=3,\sigma_2=\sqrt{4}=2$.

2. נמצא בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של A^*A.

נתחיל במציאת וקטור עצמי עבור הערך העצמי 9. מתקיים

$$A^*A-9I=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}$$

ונשים לב כי העמודה השנייה היא -2 כפול העמודה הראשונה. אז $A^*A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=0$ ולכן $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ וקטור עצמי עם ערך עצמי 9.

עבור הערך העצמי 4, נחשב

$$A^*A-4I=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$$

ונשים לב כי העמודה הראשונה שווה לפעמיים העמודה השנייה. לכן $A^*A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=0$ ולכן $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ וקטור עצמי עבור הערך העצמי 4.

נקבל בסיס $\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$ של וקטורים עצמיים של A^*A. ננרמל את הוקטורים כדי לקבל בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של A^*A,

$$B=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right).$$

וניקח גם

$$C=\left(\frac{1}{\sigma_1}A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right),\frac{1}{\sigma_2}A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix},\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\end{pmatrix}\right)$$

שהינו בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$.

3. C כבר הינו בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$ כי לא היה לנו 0 בתור ערך סינגולרי של A.

נקבל בסך הכל כי

$$A=U\Sigma V^*$$

עבור

$$V=M_E^B=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$$
$$U=M_E^C=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$$
$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1&0\\0&\sigma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

תרגיל 7. מה יקרה אם נחשב בעזרת האלגוריתם פירוק לערכים סינגולריים עבור אופרטור נורמלי? באילו מקרים האלגוריתם יתן $B=C$?

פתרון. ניקח בסיס $B=(v_1,\ldots,v_n)$ עבורו $[T]_B=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, ואז

$$[T^*T]_B=\operatorname{diag}\left(\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_n\right)\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\operatorname{diag}\left(|\lambda_1|^2,\ldots,|\lambda_n|^2\right),$$

ובכן $\sqrt{[T^*T]_B}=\operatorname{diag}(|\lambda_1|,\ldots,|\lambda_n|)$. אז החישוב שלנו מראה

$$C:=(u_1,\ldots,u_n)=\left(\frac{1}{|\lambda_1|}T(v_1),\ldots,\frac{1}{|\lambda_n|}T(v_n)\right).$$

בעת, $T(v_i)=\lambda_i v_i$ ונקבל כי $u_i=\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}v_i$. אז $u_i=v_i$ אם ורק אם λ_i ממשי אי־שלילי.
לכן האלגוריתם יתן $B=C$ אם ורק אם כל הערכים העצמיים של T הינם ממשיים אי־שליליים. כלומר, אם ורק אם T מוגדר אי־שלילית.

תרגיל 8. הוכיחו או הפריכו: הערכים הסינגולריים של T^2 הם ריבועי הערכים הסינגולריים של T.

פתרון. הטענה איננה נכונה, למשל עבור $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. אכן, הערכים הסינגוליים של A^2 הם $(0,0)$ כי $A^2=0$, אבל הערכים הסינגולריים של A הם $(0,1)$ כי $A^tA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

תרגיל 9. תהיינה $A,B,U\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור U אורתוגונלית (אוניטרית) המקיימת $B=U^*AU$, ונניח כי A מוגדרת אי־שלילית. הראו כי B מוגדרת אי־שלילית.

פתרון. ראשית, B אורתוגונלית (אוניטרית) כמכפלה של כאלה. כעת, לכל $v\in V$ מתקיים $\langle Bv,v\rangle=\langle U^*AUv,v\rangle=\langle A(Uv),Uv\rangle$ כאשר ביטוי זה הינו אי־שלילי כי A מוגדרת אי־שלילית.

הערה 2.8. באותו אופן, מטריצה הדומה אורתוגונלית (אוניטרית) למטריצה מוגדרת חיובית/אי־חיובית/שלילית הינה חיובית/אי־חיובית/שלילית.

נעבור כעת למשפט פירוק נוסף שנובע מהפירוק לערכים סינגולריים.

משפט 2.9 (פירוק פולארי לאופרטורים). יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור על מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי. יש אופרטור אורתוגונלי (אוניטרי) $U\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ואופרטור מוגדר אי־שלילית $R\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורם $T=UR$.
בנוסף, אם T הפיך, האופרטור R מוגדר חיובית.

משפט 2.10 (פירוק פולארי למטריצות). תהי $A\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$. יש מטריצה $U\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ אורתוגונלית (אוניטרית) ומטריצה $R\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ מוגדרת אי־שלילית עבורן $A=UR$.
בנוסף, אם A הפיכה, המטריצה R מוגדרת חיובית.

2.0.1 מציאת פירוק פולארי

1. כדי למצוא פירוק פולארי עבור מטריצות, ניעזר בפירוק הפולארי $A=U\Sigma V^*$. נשים לב כי Σ הינה מוגדרת אי־שלילית, וכדי להיעזר בכך נכתוב

$$.A=UV^*V\Sigma V^*=(UV^*)(V\Sigma V^*)$$

אז UV^* אורתוגונלית (אוניטרית) כמכפלת מטריצות אורתוגונליות (אוניטריות), ו־$V\Sigma V^*$ מוגדרת אי־שלילית כי היא דומה אוניטרית למטריצה אלכסונית אי־שלילית. אם A הפיכה, גם A^*A הפיכה ולכן גם $\Sigma=\sqrt{A^*A}$. אז היא מוגדרת חיובית ולכן גם $V\Sigma V^*$ מוגדרת חיובית.

2. עבור אופרטור $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$, ניקח מייצגת לפי בסיס אורתונורמלי B ונכתוב $[T]_B=\tilde{U}\tilde{R}$ עבור $\tilde{U}$ אורתוגונלי (אוניטרי) ועבור $\tilde{R}$ מוגדר אי־שלילית. נסמן ב־$U:=\left(\eta_B^B\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right)$ ו־$R:=\left(\eta_B^B\right)^{-1}\left(\tilde{R}\right)$ את האופרטורים המיוצגים על ידי $\tilde{U},\tilde{R}$ לפי הבסיס B.

אז U אורתוגונלי (אוניטרי) כי $[U]_B=\tilde{U}$ כזה ו־R מוגדר אי־שלילית (או מוגדר חיובית, אם T הפיך) כי $[R]_B=\tilde{R}$ כזה.

תרגיל 10. מיצאו את הפירוק הפולארי עבור האופרטור הבא.

$$\begin{aligned}T\colon\mathbb{R}^3&\to\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&\mapsto\begin{pmatrix}z\\2x\\3y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

פתרון. מתקיים

$$[T]_E=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&0\\0&3&0\end{pmatrix}$$

$$[T^*]_E=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$[T^*T]_E=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן הערכים הסינגולריים של T הם $3,2,1$.
יש לנו בסיס אורתונורמלי $B=(e_2,e_1,e_3)$ של וקטורים עצמיים. כדי לקבל את הבסיס השני, נפעיל את T על וקטורי B ונחלק בערכים הסינגולריים. נקבל בסיס אורתונורמלי

$$.C=\left(\tfrac{1}{3}T(e_2),\tfrac{1}{2}T(e_1),T(e_3)\right)=(e_3,e_2,e_1)$$

אז

$$.\ [T]_E=W\Sigma V^*$$

עבור

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = M_E^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$.W = M_E^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל כי

$$[T]_E = (WV^*)\,(V\Sigma V^*)$$

כאשר

$$WV^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$.V\Sigma V^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז, כאשר

$$\begin{aligned} \rho_B^B \colon \operatorname{Hom}_R R\left(\mathbb{R}^3\right) &\to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right) \\ S &\mapsto [S]_B \end{aligned}$$

ועבור

$$\begin{aligned} U &\coloneqq \left(\rho_E^E\right)^{-1}(WV^*) = L_{WV^*} \\ R &\coloneqq \left(\rho_E^E\right)^{-1}(V\Sigma V^*) = L_{V\Sigma V^*} \end{aligned}$$

נקבל כי $T = UR$.