אלגברה ב' (01040168) - אביב 2026
תרגילים על לכסון
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־12 בנובמבר 2025

1 ערכים עצמיים ולכסון

הגדרה 1.1 (ערך עצמי, ווקטור עצמי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. ערך $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו קיים $v \in V \setminus \{0\}$ כך ש־$T(v) = \lambda v$ נקרא ערך עצמי של T, ווקטור v המקיים שוויון זה נקרא וקטור עצמי של T עבור הערך העצמי λ.

הגדרה 1.2 (גרעין של אופרטור לינארי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. נגדיר את הגרעין של T בתור

$$\ker(T) \coloneqq \{v \in V \mid T(v) = 0\} .$$

טענה 1.3. התנאים הבאים שקולים.

1. $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T.
2. האופרטור $T - \lambda \operatorname{Id}_V$ אינו הפיך.
3. $\ker(T - \lambda \operatorname{Id}_V) \neq \{0\}$.

הגדרה 1.4 (מרחב עצמי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$. המרחב העצמי של T עם ערך עצמי λ הוא $\ker(T - \lambda \operatorname{Id}_V)$.

הגדרה 1.5 (ריבוי גיאומטרי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$. נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של λ בערך עצמי של T בתור

$$r_g^T(\lambda) = \dim_{\mathbb{F}}(\ker(T - \lambda \operatorname{Id}_V)) .$$

כאשר האופרטור T ברור מההקשר, נסמן לעתים $r_g(\lambda)$ במקום $r_g^T(\lambda)$.

טענה 1.6. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. אז:

1. $r_g^T(\lambda_i) \geq 1$ לכל $i \in [k]$.
2. $$\sum_{i \in [k]} r_g^T(\lambda_i) \leq \dim_{\mathbb{F}}(V) .$$

תרגיל 1. יהי $V = \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$. מיצאו את הערכים העצמיים של

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ A &\mapsto A^t \end{aligned} .$$

לכל ערך עצמי, מיצאו את המרחב העצמי המתאים ואת הריבוי הגיאומטרי.

פתרון. מתקיים

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

אם $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T, נקבל כי קיימים $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ לא כולם 0 עבורם

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{1}$$

אם $\lambda = 1$ זה שקול לכך ש־$b = c$, ולכן $\lambda = 1$ ערך עצמי של T עם מרחב עצמי

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, d \in \mathbb{F} \right\} = \operatorname{Span}\left(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2}\right),$$

וריבוי גיאומטרי $r_g(1) = 3$. אם $\lambda \neq 1$, חייב להתקיים $a = d = 0$ עבור השוויון (1), ולכן חייב להתקיים $c = \lambda b$ וגם $b = \lambda c$. הצבה של השוויון האחרון נותנת לנו כי $c = \lambda^2 c$, וכיוון ש־$\lambda \neq 1$ נקבל כי $\lambda = -1$. אז -1 ערך עצמי של T עם מרחב עצמי

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{F} \right\} = \operatorname{Span}\left(E_{1,2} - E_{2,1}\right),$$

וריבוי גיאומטרי $r_g(-1) = 1$.
קיבלנו כי $r_g(1) = 3$ וכי $r_g(-1) = 1$, כאשר $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$, ולכן לפי טענה 3.6 אין ערכים עצמיים נוספים.

הגדרה 1.7 (אופרטור לכסין, מטריצה אלכסונית, ובסיס מלכסן). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. האופרטור T נקרא לכסין אם קיים בסיס B של V וקיימות $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ עבורם

$$[T]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

מטריצה מהצורה $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ נקראת מטריצה אלכסונית, ובסיס B כנ"ל נקרא בסיס מלכסן עבור T.

תרגיל 2. מיצאו מרחב וקטורי V סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$, ואופרטור $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כך שסכום הריבויים הגיאומטריים של הערכים העצמיים של T קטן מ־$\dim_{\mathbb{F}}(V)$.

פתרון. נרצה למשל אופרטור בעל ערך עצמי יחיד 0 אך שהריבוי הגיאומטרי שלו שווה 1.
ניקח את האופרטור $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$ על $\mathbb{R}^2$.
כעת, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ אם ורק אם $\lambda x = y$ וגם $\lambda y = 0$, וכאשר $\lambda \neq 0$ זה גורר בהכרח $x = y = 0$. לכן לא יתכנו ערכים עצמיים שונים מאפס.
מתקיים $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ואם ורק אם $y = 0$, לכן המרחב העצמי של 0 כערך עצמי של T הוא $\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$,
ולכן הריבוי הגיאומטרי הוא 1, ולא $\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$.

הגדרה 1.8 (מטריצה לכסינה). מטריצה $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ נקראת לכסינה אם האופרטור

$$\begin{aligned} L_A \colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

הינו לכסין.

תרגיל 3. מיצאו מטריצה $A\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ שאינה לכסינה, אך כך שהמטריצה $A^{\mathbb{C}}\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ המרוכבת בעלת אותם מקדמים כמו A הינה לכסינה.

פתרון. נחפש מטריצה מרוכבת עם מקדמים ממשיים כך שיש לה ערכים עצמיים שאינם ממשיים. ידוע כי מכפלת הערכים העצמיים של מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ היא $ad-bc$.
לכן ניקח למשל את המטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),$$

שמכפלת הערכים העצמיים שלה היא 1 אך סכומם 0, מה שלא יתכן עבור שני מספרים ממשיים.
מתקיים

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

נחפש ערכים עצמיים $\lambda\in\mathbb{C}$, כלומר ערכים עבורם

$$\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

שוויון זה שקול למערכת המשוואות

$$\lambda x=y$$
$$\lambda y=-x$$

והצבה של השוויון הראשון בשני נותנת את השוויון $\lambda^2x=-x$. אז $\lambda^2=-1$, ולכן אם λ ערך עצמי של A מתקיים בהכרח כי $\lambda\in\{\pm i\}$. לכן למטריצה A אין ערכים עצמיים, ולכן היא אינה לכסינה.
נראה בעת כי המטריצה

$$A^{\mathbb{C}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

אכן לכסינה.
מתקיים

$$A^{\mathbb{C}}-i\,\mathrm{Id}_V=\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

וכאן השורה השנייה שווה לשורה הראשונה כפול $-i$. לכן,

$$\left(A^{\mathbb{C}}-(-i)\,\mathrm{Id}_V\right)(e_1+ie_2)=0$$

ואז e_1+ie_2 וקטור עצמי של A עבור הערך העצמי i.
כמו כן,

$$A^{\mathbb{C}}-(-i)\,\mathrm{Id}_V=\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

ובעת השורה השנייה שווה לראשונה כפול i, ואז e_1-ie_2 וקטור עצמי של A עבור הערך העצמי $-i$.
נקבל כי $B=(e_1+ie_2,e_1-ie_2)$ בסיס עבורו

$$L_{A^{\mathbb{C}}}(e_1+ie_2)=i(e_1+ie_2)$$
$$L_{A^{\mathbb{C}}}(e_1-ie_2)=-i(e_1-ie_2),$$

ולכן

$$[L_A]_B=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסונית.