אלגברה ב' – הצעה לפתרון בוחן אמצע
סמסטר חורף 2025-2026

תרגיל 1. (א) הראו שהנוסחה

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1\overline{y_1} + (x_1 + x_2)\,\overline{(y_1 + y_2)} + x_3\overline{y_3}$$

נותנת מכפלה פנימית על המרחב הוקטורי המרוכב $\mathbb{C}^3$.

(ב) מיצאו בסיס אורתונורמלי למרחב המכפלה הפנימית שמתקבל.

(ג) נתון האופרטור $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ המוגדר על ידי

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}.$$

הראו ש־T איננו אופרטור נורמלי (ביחס למכפלה הפנימית מהסעיפים הקודמים).

פתרון. (א) נראה כי ההעתקה הנתונה הינה מכפלה פנימית על ידי כך שנראה שהיא בי־סמי־לינארית, הרמיטית, וחיובית.

חיובית: חיוביות אומרת כי $\langle x, x\rangle \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{C}^3$ וגם כי $x = 0$ אם $\langle x, x\rangle = 0$.

יהי $x = \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{C}^3$. מתקיים

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1\overline{x_1} + (x_1 + x_2)\,\overline{(x_1 + x_2)} + x_3\overline{x_3} \\ &= |x_1|^2 + |x_1 + x_2|^2 + |x_3|^2\end{aligned}$$

וביוון שמתקיים $|z| \geq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$ נקבל כי $\langle x, x\rangle \geq 0$.

אם $\langle x, x\rangle = 0$, נקבל כי

$$|x_1|^2 + |x_1 + x_2|^2 + |x_3|^2 = 0,$$

וכיוון שכל אחד מהגורמים הינו אי־שלילי, נקבל כי

$$\begin{aligned}|x_1|^2 &= 0 \\ |x_1 + x_2|^2 &= 0 \\ |x_3|^2 &= 0\end{aligned}$$

ואז גם

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0.\end{aligned}$$

מהצבה של $x_1 = 0$ במשוואה השנייה נקבל כי $x_2 = 0$, ולכן $x = 0$.

הרמיטיות: הרמיטיות משמעותה שלכל $x, y \in \mathbb{C}^3$ מתקיים $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.

יהיו $x,y\in\mathbb{C}^3$. מתקיים

$$\begin{aligned}\langle y,x\rangle &= \overline{\overline{\langle y,x\rangle}}\\ &= \overline{\overline{y_1\overline{x_1}+(y_1+y_2)\overline{x_1+x_2}+y_3\overline{x_3}}}\\ &= \overline{\overline{y_1}\overline{\overline{x_1}}+\overline{(y_1+y_2)}\overline{\overline{(x_1+x_2)}}+\overline{y_3}\overline{\overline{x_3}}}\\ &= \overline{\overline{y_1}x_1+\overline{(y_1+y_2)}\,(x_1+x_2)+\overline{y_3}x_3}\\ &= \overline{\langle x,y\rangle}\end{aligned}$$

כאשר בשוויון השני השתמשנו בכך שלכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ מתקיים $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ ובשלישי בכך שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $\overline{\overline{z}}=z$.

בי־סמי־לינאריות : בי־סמי־לינאריות משמעותה לינאריות ברכיב הראשון וסמי־לינאריות ברכיב השני.
נראה ראשית לינאריות ברכיב הראשון. יהי $\alpha\in\mathbb{C}$ ויהיו $x,y,z\in\mathbb{C}^3$. מתקיים

$$\begin{aligned}\langle\alpha x+z,y\rangle &= (\alpha x_1+z_1)\,\overline{y_1}+(\alpha x_1+z_1+\alpha x_2+z_2)\,\overline{(y_1+y_2)}+(\alpha x_3+z_3)\,\overline{y_3}\\ &= \alpha x_1\overline{y_1}+z_1\overline{y_1}+\alpha\,(x_1+x_2)\,\overline{(y_1+y_2)}+(z_1+z_2)\,\overline{(y_1+y_2)}+\alpha x_3\overline{y_3}+z_3\overline{y_3}\\ &= \alpha\left(x_1\overline{y_1}+(x_1+x_2)\,\overline{(y_1+y_2)}+x_3\overline{y_3}\right)+\left(z_1\overline{y_1}+(z_1+z_2)\,\overline{(y_1+y_2)}+z_3\overline{y_3}\right)\\ &= \alpha\,\langle x,y\rangle+\langle z,y\rangle\end{aligned}$$

כנדרש.
נראה כעת סמי־לינאריות ברכיב השני. יהי $\alpha\in\mathbb{C}$ ויהיו $x,y,z\in\mathbb{C}$. יש להראות כי

$$.\ \langle x,\alpha y+z\rangle=\bar{\alpha}\,\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$$

אכן,

$$\begin{aligned}\langle x,\alpha y+z\rangle &= \overline{\langle\alpha y+z,x\rangle}\\ &= \overline{\alpha\,\langle y,x\rangle+\langle z,x\rangle}\\ &= \overline{\alpha}\overline{\langle y,x\rangle}+\overline{\langle z,x\rangle}\\ &= \overline{\alpha}\,\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle\end{aligned}$$

כאשר בשוויון הראשון והאחרון השתמשנו בהרמיטיות של $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (שהוכחנו קודם), וכאשר בשוויון השני השתמשנו בלינאריות ברכיב הראשון (שגם הוכחנו קודם).

(ב) יהי $\mathrm{St}=(e_1,e_2,e_3)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^3$. נבצע את תהליך גרם־שמידט על St, שייתן לנו בסיס B אורתונורמלי.

נסמן בכל שלב ב־w_i את הוקטור המתקבל מ־e_i לאחר חיסור ההטלה על המרחב הנפרש על ידי הוקטורים שכבר בנינו, וב־v_i את הנרמול שלו, שיהיה הוקטור ה־i בבסיס B.

תחילה, יש לנרמל את הוקטור הראשון, $v_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}$. מתקיים

$$\|e_1\|^2=\langle e_1,e_1\rangle=1\cdot1+(1+0)\,(1+0)+0\cdot0=2$$

ולכן $\|e_1\|=\sqrt{2}$ ונקבל כי $v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}e_1$.
בעת,

$$\begin{aligned}w_2 &= e_2-\langle e_2,v_1\rangle\,v_1\\ &= e_2-\left\langle e_2,\frac{1}{\sqrt{2}}e_1\right\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e_1\\ &= e_2-\frac{1}{2}\,\langle e_2,e_1\rangle\,e_1\\ &= e_2-\frac{1}{2}\,(0+1+0)\,e_1\\ &= e_2-\frac{1}{2}e_1\end{aligned}$$

ואז

$$\|w_2\|^2=\langle w_2,w_2\rangle=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0=\frac{1}{2}$$

ולכן

$$.v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \sqrt{2}\left(e_2 - \frac{1}{2}e_1\right)$$

לבסוף,

$$w_3 = e_3 - \langle e_3, v_2\rangle v_2 - \langle e_3, v_1\rangle v_1 = e_3$$

כיוון שמתקיים

$$\langle e_3, v_2\rangle = \sqrt{2}\left(0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot 1 + 1\cdot 0\right) = 0$$
$$.\ \langle e_3, v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0) = 0$$

אז

$$\|w_3\|^2 = \langle w_3, w_3\rangle = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$$

ונקבל

$$.v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = w_3 = e_3$$

בסך הכל, נקבל בסיס אורתונורמלי

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \sqrt{2}\left(e_2 - \frac{1}{2}e_1\right), e_3\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{2}}{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

(ג) נציע שתי דרכי פתרון.

דרך 1: ראינו כי עבור אופרטור נורמלי מעל $\mathbb{C}$, וקטורים עצמיים של ערכים עצמיים שונים הינם ניצבים זה לזה. נשים לב כי $T(e_1) = e_1$ וכי $T(e_2) = 2e_2$, לכן e_1, e_2 וקטורים עצמיים של ערכים עצמיים שונים. אך מתקיים

$$,\ \langle e_1, e_2\rangle = 1\cdot 0 + ((1+0)\cdot(0+1)) + 0\cdot 0 = 1 \neq 0$$

ולכן הם אינם ניצבים. לכן לא יתכן כי T נורמלי.

דרך 2: ממשפט, עבור אופרטור S על מרחב מכפלה פנימית עם בסיס אורתונורמלי C, מתקיים

$$.\ [S^*]_C = [S]_C^*$$

לכן, כאשר B הבסיס שמצאנו בסעיף הקודם, מתקיים

$$.\ [T^*]_B = [T]_B^*$$

מתקיים תמיד $[S_1S_2]_C = [S_1]_C[S_2]_C$ ולכן

$$[T^*T]_B = [T]_B^*[T]_B$$
$$.\ [TT^*]_B = [T]_B[T]_B^*$$

לכן, אם נראה כי $[T]_B^*, [T]_B$ אינן מתחלפות, נקבל כי $T^*T \neq TT^*$, ולכן T אינה נורמלית.
נחשב את $[T]_B$ לפי הגדרת מטריצה מייצגת,

$$.\ [T]_B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(v_1)]_B & [T(v_2)]_B & [T(v_3)]_B \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

מתקיים

$$
\begin{aligned}
T\left(v_1\right) &= T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}T\left(e_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 = v_1 \\
T\left(v_2\right) &= T\left(\sqrt{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \sqrt{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2v_2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2v_2 + v_1 \\
T\left(v_3\right) &= T\left(e_3\right) = 3e_3 = 3v_3,
\end{aligned}
$$

ולכן

$$
[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
$$

אז

$$
[T]_B^* = \overline{[T]_B}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

ומתקיים

$$
[T]_B\,[T]_B^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = [T]_B^*\,[T]_B,
$$

כנדרש.

תרגיל 2. נתון מרחב מכפלה פנימית V, ונתון אופרטור הטלה (לא בהכרח אורתוגונלית) $P\colon V\to V$.
נסמן את התת־מרחב $W:=\mathrm{Im}\left(P\right)$ של V, וב־$P_W\colon V\to V$ את אופרטור ההטלה האורתוגונלית על W.
הראו שמתקיים $P=P_W$ אם ורק אם מתקיים $P=P^*$.

פתרון. נראה גרירה דו־כיוונית.

- נניח כי $P=P_W$.

  יהיו
  $$B_W:=\left(w_1,\ldots,w_m\right)$$
  וגם
  $$B_{W^\perp}:=\left(u_1,\ldots,u_k\right)$$
  בסיסים אורתונורמליים W ושל $W^\perp$ בהתאמה. קיימים בסיסים כאלו כיוון שלכל מרחב מכפלה פנימית קיים בסיס אורתונורמלי.

  ראינו בהרצאה כי לכל $U\le V$, מתקיים $V=U\oplus U^\perp$. לכן $V=W\oplus W^\perp$. ראינו בתרגול שעבור בסיסים B_1,B_2 של $U_1,U_2\le V$ כך ש־$V=U_1\oplus U_2$, מתקיים כי B_1*B_2 בסיס של V. לכן $B:=B_W*B_{W^\perp}$ בסיס של V. הוא גם אורתונורמלי, כיוון שכל הוקטורים בו מאורך 1, וכולם ניצבים שכן

  $$\begin{aligned}\left\langle w_i,w_j\right\rangle&=\delta_{i,j}\\ \left\langle u_i,u_j\right\rangle&=\delta_{i,j}\\ \left\langle w_i,u_j\right\rangle&=0\end{aligned}$$

  כאשר שני השוויונות הראשונים מתקיימים כי $B_W,B_{W^\perp}$ בסיסים אורתונורמליים, והשוויון השלישי כי כל וקטור ב־$W^\perp$ ניצב לכל וקטור ב־W.

  ההטלה האורתוגונלית על W היא ההטלה על W במקביל ל־$W^\perp$, ולכן

  $$\left[P\right]_B=\begin{pmatrix}I_m&0\\0&0_k\end{pmatrix}.$$

  ראינו שכאשר C בסיס אורתונורמלי, ו־T אופרטור על V, מתקיים $\left[T^*\right]_C=\left[T\right]_C^*$, לכן נקבל כי

  $$\left[P^*\right]_B=\left[P\right]_B^*=\overline{\begin{pmatrix}I_m&0\\0&0_k\end{pmatrix}}^t=\begin{pmatrix}I_m&0\\0&0_k\end{pmatrix}=\left[P\right]_B$$

  ולכן $P^*=P$.

- נניח כי $P=P^*$. האופרטור P_W הינו ההטלה על $W=\mathrm{Im}\left(P\right)$ במקביל ל־$\mathrm{Im}\left(P\right)^\perp$, והאופרטור P הינו ההטלה על $\mathrm{Im}\left(P\right)$ במקביל ל־$\ker\left(P\right)$, לכן יש להראות בעצם שמתקיים

  $$\ker\left(P\right)=\mathrm{Im}\left(P\right)^\perp.$$

  נכתוב שתי דרכים להראות זאת.

  דרך 1: נראה תחילה כי
  $$\ker\left(P\right)\subseteq\mathrm{Im}\left(P\right)^\perp.$$
  יהי $v\in\ker\left(P\right)=\ker\left(P^*\right)$, ויהי $w\in\mathrm{Im}\left(P\right)$. אם נראה שמתקיים $\left\langle v,w\right\rangle=0$ נקבל כי $v\in W^\perp=\mathrm{Im}\left(P\right)^\perp$ ולכן את ההכלה. כיוון ש־$w\in\mathrm{Im}\left(P\right)$, קיים $u\in V$ עבורו $w=P\left(u\right)$. אכן
  $$\left\langle v,w\right\rangle=\left\langle v,P\left(u\right)\right\rangle=\left\langle P^*\left(v\right),u\right\rangle=\left\langle 0,u\right\rangle=0.$$

  מצד שני, ראינו בהרצאה שלכל תת־מרחב $W'\le V$ מתקיים
  $$V=W'\oplus\left(W'\right)^\perp,$$
  ולכן מתקיים
  $$V=W\oplus W^\perp$$
  ואז
  $$\dim\left(V\right)=\dim\left(W\right)\oplus\dim\left(W^\perp\right)$$

כיוון שהמימד של סכום ישר של מרחבים וקטוריים הוא סכום המימדים. לכן

$$\dim\left(\operatorname{Im}\left(P\right)^{\perp}\right)=\dim\left(V\right)-\dim\left(\operatorname{Im}\left(P\right)\right)=\dim\left(\ker\left(P\right)\right),$$

כאשר השוויון האחרון מתקיים לפי משפט המימדים עבור גרעין ותמונה.

קיבלנו כי

$$\ker\left(P\right)\subseteq\operatorname{Im}\left(P\right)^{\perp},$$

וכי למרחבים $\ker\left(P\right)$ ו-$\operatorname{Im}\left(P\right)^{\perp}$ אותו מימד, ולכן יש שוויון, כנדרש.

דרך 2: כיוון ש-$P=P^{*}$, לפי משפט הפירוק הספקטרלי, קיים בסיס אורתונורמלי B המלכסן את P (מעל $\mathbb{R}$, השוויון $P=P^{*}$ הוא בדיוק התנאי לכך, ומעל $\mathbb{C}$, מתקיים $P^{*}P=PP=PP^{*}$ כיוון ש-$P=P^{*}$, וזה התנאי לכך). כיוון ש-P הטלה, הערכים העצמיים היחידים האפשריים עבורה הם $0,1$. לכן, ניתן לכתוב

$$\left[P\right]_{B}=\begin{pmatrix}I_{m} & 0_{m\times k}\\ 0_{k\times m} & 0_{k\times k}\end{pmatrix}$$

כאשר יתכן כי m או k שווים לאפס.

נסמן

$$B=\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$$

ואז

$$P\left(v_{i}\right)=\begin{cases}v_{i} & i\le m\\ 0 & i>m\end{cases}.$$

נקבל כי

$$\begin{aligned}\operatorname{Span}\left(v_{1},\ldots,v_{m}\right)&=\operatorname{Im}\left(P\right)\\ \operatorname{Span}\left(v_{m+1},\ldots,v_{n}\right)&=\ker\left(P\right).\end{aligned}$$

אבל, B אורתונורמלי ולכן

$$\operatorname{Span}\left(v_{m+1},\ldots,v_{n}\right)=\operatorname{Span}\left(v_{1},\ldots,v_{m}\right)^{\perp},$$

ונקבל בסך הכל כי

$$\ker\left(P\right)=\operatorname{Im}\left(P\right)^{\perp},$$

כנדרש.

תרגיל 3. נתון מרחב מכפלה פנימית **ממשי** V, ונתונה העתקה אורתוגונלית $T\colon V\to V$ שהיא לכסינה. (לא נתון ש־T לכסינה אורתוגונלית!)

(א) הראו שהערכים העצמיים האפשריים היחידים של T הם 1 ו־-1.

(ב) הראו ש־T בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

פתרון. (א) ראינו בתרגול כי העתקה אורתוגונלית שומרת על הנורמה. כלומר, אצלנו, $\|v\|=\|T(v)\|$ לכל $v\in V$. לכן, אם λ ערך עצמי עם וקטור עצמי v מתקיים

$$\|v\|=\|T(v)\|=\|\lambda v\|=|\lambda|\,\|v\|\,.$$

כיוון שוקטור עצמי בהכרח שונה מאפס, וכיוון שהנורמה של וקטור שונה מאפס הינה חיובית, נוכל לחלק את שני האגפים ב־$\|v\|$ ולקבל כי $|\lambda|=1$, ולכן $\lambda\in\{\pm1\}$.

(ב) כיוון שנתון כי T לכסינה, וכיוון שהראנו שהערכים העצמיים של T נמצאים בקבוצה $\{\pm1\}$, קיים בסיס B עבורו

$$[T]_B=\begin{pmatrix}I_m & 0_{m\times k}\\ 0_{k\times m} & -I_k\end{pmatrix},$$

כאשר יתכן כי m או k שווים לאפס. אז

$$\begin{aligned}\left[T^{-1}\right]_B&=[T]_B^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}I_m & 0_{m\times k}\\ 0_{k\times m} & -I_k\end{pmatrix}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}I_m & 0_{m\times k}\\ 0_{k\times m} & -I_k\end{pmatrix}\\ &=[T]_B\end{aligned}$$

ולכן $T^{-1}=T$. מצד שני, נתון כי T אורתוגונלית, מה שאומר לפי ההגדרה כי $T^{-1}=T^{*}$.

נקבל כי $T^{*}=T$, ומשפט הפירוק הספקטרלי מעל $\mathbb{R}$ אומר בדיוק שזה שקול לכך ש־T לכסינה אורתוגונלית.