אלגברה ב' (01040168) - חורף 2026
תרגול 8 - נילפוטנטיות ומרחבים עצמיים מוכללים
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־30 בדצמבר 2025

1 נילפוטנטיות

הגדרה 1.1 (העתקה נילפוטנטית). העתקה $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקראת נילפוטנטית אם יש $k \in \mathbb{N}_+$ עבורו $T^k = 0$. ה־k המינימלי הזה נקרא אינדקס הנילפוטנטיות של T.

הערה 1.2. נניח לאורך התרגול כי V מרחב וקטורי סוף־מימדי.

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ ותהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נילפוטנטית מאינדקס k. הראו כי $k \le n$.

פתרון. **דרך 1:** ראינו כי $\ker\left(T^k\right) \le \ker\left(T^n\right)$, לכן אם $T^k = 0$ נקבל $\ker\left(T^k\right) = V \le \ker\left(T^n\right)$ כלומר $\ker\left(T^n\right) = V$ כלומר $T^n = 0$. ממינימליות k נקבל $k \le n$.

דרך 2: ראינו כי

$$\ker(T) \le \ker\left(T^2\right) \le \ldots \le \ker\left(T^k\right) = V\,.$$

אם נראה שמתקיים $\ker\left(T^i\right) \neq \ker\left(T^{i+1}\right)$ לכל $i \le k$ נקבל כי $\dim\ker\left(T^{i+1}\right) > \dim\ker\left(T^i\right)$ וכיוון ש־$\dim\ker(T) \ge 1$ נקבל באינדוקציה כי $\dim\ker\left(T^i\right) \ge i$ לכל $i \le k$ ובפרט $\dim\ker\left(T^k\right) \ge k$. אבל $\dim\ker\left(T^k\right) = \dim(V) = n$, לכן $n \ge k$, כנדרש.

תרגיל 2. יהי $\mathbb{F}$ סגור אלגברית ותהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו ש־$T$ נילפוטנטית אם ורק אם הערך העצמי היחיד שלה הוא 0. מצאו דוגמא נגדית כאשר $\mathbb{F}$ אינו סגור אלגברית.

פתרון. נניח כי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נילפוטנטית. יש $k \in \mathbb{N}_+$ עבורו $T^k = 0$. יהי $v \in V$ וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ. אז $T^k v = \lambda^k v = 0$ לכן $\lambda = 0$.
נניח כי $S \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עם ערך עצמי יחיד 0. כיוון ש־$\mathbb{F}$ סגור־אלגברית, יש בסיס B כך ש־$[S]_B$ משולשת עליונה, ונקבל שיש על האלכסון שלה אפסים כי 0 ערך עצמי יחיד של S. נכתוב $B = (v_1, \ldots, v_n)$ וגם $V_i := \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_i)$ לכל $i \in [n]$. נסיק כי $SV_i \subseteq V_{i-1}$ לכל $i \in [n]$, וגם $SV_1 = 0$. אז

$$S^n V = S^n V_n = S^{n-1} V_{n-1} = \ldots = SV_1 = 0$$

כלומר $S^n = 0$.
עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ניקח את $T = L_A$ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שהערך העצמי הממשי היחיד שלה הוא 0 (כי $\pm i \notin \mathbb{R}$) אבל $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכן $T^4 = e_1 = e_1$. כלומר $T^4 \neq 0$ ולכן T אינה נילפוטנטית.

דוגמאות. **העתקות נילפוטנטיות:** ההעתקה L_A נילפוטנטית עבור כל אחת מהמטריצות הבאות.

- $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
- כל A משולשת עליונה עם 0 על כל האלכסון הראשי, כפי שראינו בתרגיל האחרון.
- $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

העתקות שאינן נילפוטנטיות: עבור המטריצות הבאות, L_A אינה נילפוטנטית.

- $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. מתקיים $Ae_1=e_1$ ולכן 1 ערך עצמי ולא יתכן כי L_A נילפוטנטית.
- $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. מתקיים $A\left(e_1+e_2+e_3\right)=3\left(e_1+e_2+e_3\right)$ לכן 3 ערך עצמי, ולא יתכן כי L_A נילפוטנטית.
- $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in M_3\left(\mathbb{R}\right)$. מתקיים $0\neq A^4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ לכן $L_A^4\neq 0$ וראינו שאינדקס הנילפוטנטיות חייב להיות לכל היותר 3 במקרה זה. לכן L_A אינה נילפוטנטית.

תרגיל 3. הראו כי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ נילפוטנטית אם ורק אם לכל $v\in V$ יש $k\in\mathbb{N}_+$ עבורו $T^kv=0$.

פתרון. נניח כי T נילפוטנטית מאינדקס k. אז $T^kv=0v=0$ לכל $v\in V$.
נניח להיפך כי לכל $v\in V$ יש $k\in\mathbb{N}_+$ עבורו $T^kv=0$. אז $v\in\ker\left(T^k\right)$. אבל, ראינו כי

$$\ker\left(T\right)\leq\ker\left(T^2\right)\leq\ker\left(T^3\right)\leq\ldots$$

מתייצבת, לכן יש $m\in\mathbb{N}_+$ עבורו $\ker\left(T^k\right)\subseteq\ker\left(T^m\right)$ לכל $k\in\mathbb{N}_+$. נקבל $v\in\ker\left(T^m\right)$ לכל $v\in V$, לכן $T^m=0$.

תרגיל 4. הראו שצירוף לינארי של העתקות נילפוטנטיות מתחלפות הוא נילפוטנטי. מצאו דוגמה נגדית עבור העתקות נילפוטנטיות שאינן מתחלפות.

פתרון. יהיו $T_1.T_2\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ נילפוטנטיות מאינדקסים k_1,k_2 בהתאמה וכך שמתקיים $T_1T_2=T_2T_1$. יהי $\alpha\in\mathbb{F}$.
מתקיים

$$\left(\alpha T_1\right)^{k_1}=\alpha^{k_1}T_1^{k_1}=\alpha^{k_1}0=0$$

לכן αT_1 נילפוטנטית מאינדקס קטן או שווה ל־k. בעת

$$\left(T_1+T_2\right)^{k_1+k_2+1}=\sum_{i=0}^{k_1+k_2}\binom{k_1+k_2}{i}T_1^iT_2^{k_1+k_2-i}\,.$$

כאשר $i\geq k_1$ מתקיים $T_1^i=0$ וכאשר $i<k_1$ מתקיים $k_1+k_2-i\geq k_2$ לכן $T_2^{k_1+k_2-i}=0$. נקבל בסך הכל כי T_1+T_2 נילפוטנטית מאינדקס קטן או שווה k_1+k_2.
בלי ההנחה שההעתקות מתחלפות, אפשר לקחת

$$T_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

$$T_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

כאשר שתיהן נילפוטנטיות מאינדקס 2, אבל

$$T_1 + T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

הפיכה ולכן אינה נילפוטנטית (אין לה ערך עצמי 0).

תרגיל 5 (לא עשינו בתרגול). תהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נילפוטנטית. הראו כי $\det(T) = \operatorname{tr}(T) = 0$.

פתרון. ראינו בהרצאה שיש בסיס B של V כך ש-$[T]_B$ משולשת עליונה. כיוון שכל הערכים העצמיים של T שווים לאפס, נקבל שיש 0 על האלכסון. אז $\det(T) = \det([T]_B) = 0$ כמכפלת איברי האלכסון וגם $\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}([T]_B) = 0$ כסכום איברי האלכסון.

תרגיל 6. תהי T נילפוטנטית מאינדס k. הראו שהעתקות $(\operatorname{Id}_V \pm T)$ הפיכות ומצאו את ההופכיות שלהן.

פתרון. אנו יודעים כי

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} r^k = \frac{1}{1-r}$$

עבור $r < 0$. נרצה אם כן שההופכית של $\operatorname{Id}_V - T$ תהיה $\operatorname{Id}_V + T + \ldots + T^{k-1}$. אכן,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Id}_V - T)\left(\operatorname{Id}_V + T + \ldots + T^{k-1}\right) &= \sum_{i=0}^{k-1} T^i - \sum_{i=1}^{k} T) \\
&= \operatorname{Id}_V - T^k \\
&= \operatorname{Id}_V - 0 \\
&= \operatorname{Id}_V
\end{aligned}.$$

בעת, אם T נילפוטנטית מאינדקס k גם $-T$ נילפוטנטית מאינדקס k, לכן ההופכית של $\operatorname{Id}_V + T = \operatorname{Id}_V - (-T)$ היא

$$\operatorname{Id}_V - T + T^2 - T^3 + \ldots + (-1)^{k-1} T^{k-1}.$$

תרגיל 7 (לא עשינו בתרגול). הראו כי

$$\begin{aligned}
D \colon \mathbb{F}_n[x] &\to \mathbb{F}_n[x] \\
p &\mapsto p'
\end{aligned}$$

נילפוטנטית.

פתרון. לכל $p \in \mathbb{F}_n[x]$ מתקיים $\deg_{\mathbb{F}}(p) \leq n$ לכן $D^{n-1}(p)$ פולינום קבוע, ולכן $D^n p = 0$.

תרגיל 8 (לא עשינו בתרגול). הראו כי

$$\begin{aligned}
D \colon \mathbb{F}[x] &\to \mathbb{F}[x] \\
p &\mapsto p'
\end{aligned}$$

אינה נילפוטנטית.

פתרון. נניח בשלילה כי D נילפוטנטית מאינדקס k. אז $D^k x^{k+1} = 0$, אבל

$$\begin{aligned}
D^k x^{k+1} &= (k+1) D^{k-1} x^k \\
&= \ldots \\
&= (k+1)! \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

בסתירה.

תרגיל 9 (לא עשינו בתרגול). יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ ותהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נילפוטנטית מאינדקס k. לכל $i \in [k]$ נסמן $n_i := \dim \ker\left(T^i\right)$. הראו שמתקיים

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < n_k = n.$$

פתרון. מתקיים $V = \ker(0) = \ker\left(T^k\right)$ לכן $n_k = \dim(V) = n$. אם $n_1 = 0$ נקבל $\dim\ker(T) = 0$ לכן T חד־חד ערכית ולכן הפיכה, בסתירה לנילפוטנטיות.
אם $n_i = n_{i+1}$ עבור $i \in [k-1]$ נקבל $\ker\left(T^i\right) = \ker\left(T^{i+1}\right)$. אבל, ראינו שבמקרה זה $\ker\left(T^i\right) = \ker\left(T^j\right)$ לכל $j \geq i$. בפרט $\ker\left(T^i\right) = \ker\left(T^k\right) = V$, כלומר $i = k$ בסתירה להנחה $i \in [k-1]$.

תרגיל 10. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ עם בסיס $B\left(v_1, \ldots, v_n\right)$. תהי

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ v_1 &\mapsto 0 \\ \forall i > 1 : v_i &\mapsto v_{i-1}. \end{aligned}$$

הראו כי T נילפוטנטית מאינדקס n וכיתבו את $[T]_B$.

פתרון. מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וזאת משולשת עליונה עם 0 על האלכסון, לכן כפי שתיארנו מקודם $T^n = 0$. מאידך, $T^{n-1}v_n = v_1 \neq 0$ לכן האינדקס של T שווה n.

2 מרחבים עצמיים מוכללים

הגדרה 2.1 (בלוק ז'ורדן). עבור $\lambda \in \mathbb{F}$ ועבור $m \in \mathbb{N}_+$ נסמן

$$J_m\left(\lambda\right) \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

נסמן גם $J_m \coloneqq J_m\left(0\right)$.

הגדרה 2.2 (מטריצת ז'ורדן). מטריצה מהצורה

$$\operatorname{diag}\left(J_{m_1}\left(\lambda_1\right), \ldots, J_{m_k}\left(\lambda_k\right)\right)$$

נקראת מטריצת ז'ורדן.

הגדרה 2.3 (בסיס ז'ורדן). בסיס B עבורו $[T]_B$ מטריצת ז'ורדן נקרא בסיס ז'ורדן עבור T.

משפט 2.4 (משפט ז'ורדן). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה סגור אלגברית $\mathbb{F}$ ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$.
קיים בסיס ז'ורדן עבור T.
בנוסף, $[T]_B$ יחידה במטריצת ז'ורדן מייצגת של T, עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

הערה 2.5. כדי לדבר על בסיסי ז'ורדן, נשים לב כי אם B בסיס ז'ורדן כנ"ל, נוכל לכתוב

$$\begin{aligned} B &= \left(v_{1,1}, \ldots, v_{1,m_1}, v_{2,1}, \ldots, v_{2,m_2}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,m_k}\right) \\ &= \left(v_{1,1}, \ldots, v_{1,m_1}\right) * \left(v_{2,1}, \ldots, v_{2,m_2}\right) * \ldots * \left(v_{k,1}, \ldots, v_{k,m_k}\right) \end{aligned}$$

כאשר לכל $i \in [k]$ ולכל $j \in [m_i]$ מתקיים

$$\left(T - \lambda \operatorname{Id}_V\right)\left(v_{i,j}\right) = \begin{cases} v_{i,j-1} & j > 1 \\ 0 & j = 1 \end{cases}.$$

הגדרה 2.6 (שרשרת ז'ורדן). יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$.
שרשרת ז'ורדן של T עם ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ היא קבוצה סדורה $C \coloneqq \left(v_1, \ldots, v_m\right) \subseteq V$ כך שמתקיים

$$\left(T - \lambda \operatorname{Id}_V\right)\left(v_j\right) = \begin{cases} v_{j-1} & j > 1 \\ 0 & j = 1 \end{cases}.$$

באופן שקול, מתקיים

$$C = \left(\left(T - \lambda \operatorname{Id}_V\right)^{m-1}\left(v_m\right), \left(T - \lambda \operatorname{Id}_V\right)^{m-2}\left(v_m\right), \ldots, v_m\right)$$

וגם $\left(T - \lambda \operatorname{Id}_V\right)^m\left(v_m\right) = 0$.

הערה 2.7. משפט ז'ורדן אומר שאם T אופרטור על מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה סגור אלגברית $\mathbb{F}$ אז קיים בסיס של B המורכב משרשראות ז'ורדן של T.

הגדרה 2.8 (מרחב עצמי מוכלל). יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ממימד $n \in \mathbb{N}_+$, ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$.
המרחב העצמי המוכלל של T עבור ערך $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא

$$V'_{\lambda,T} \coloneqq \left\{v \in V \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N} : \left(T - \lambda\right)^k\left(v\right) = 0\right\}.$$

תרגיל 11. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה סגור אלגברית $\mathbb{F}$, ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$. יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. אז

$$V'_{\lambda-\mu,T} = V'_{\lambda,T+\mu \operatorname{Id}_V}.$$

פתרון. יהי $v \in V'_{\lambda-\mu,T}$. לפי ההגדרה, קיים $k \in \mathbb{N}_+$ עבורו
$$\left(T-(\lambda-\mu)\operatorname{Id}_V\right)^k(v)=0 \,.$$
אז
$$\begin{aligned} 0 &= \left(T-\lambda\operatorname{Id}_V+\mu\operatorname{Id}_V\right)^k(v) \\ &= \left((T+\mu\operatorname{Id}_V)-\lambda\operatorname{Id}_V\right)^k(v) \end{aligned}$$
ושוב לפי ההגדרה נקבל כי
$$v \in V'_{\lambda,T+\mu\operatorname{Id}_V}.$$
לכן
$$V'_{\lambda-\mu,T} \subseteq V'_{\lambda,T+\mu\operatorname{Id}_V}.$$
עבור ההכלה השנייה, נסמן
$$\begin{aligned} \lambda' &\coloneqq \lambda-\mu \\ \mu' &\coloneqq -\mu \\ T' &\coloneqq T+\mu \end{aligned}$$
ואז $\lambda=\lambda'+\mu=\lambda'-\mu'$ וגם $T=T'-\mu=T'+\mu'$ ונקבל מהכיוון הראשון כי
$$V'_{\lambda,T+\mu\operatorname{Id}_V}=V'_{\lambda'-\mu',T'} \subseteq V'_{\lambda',T'+\mu'\operatorname{Id}_V}=V'_{\lambda-\mu,T},$$
כנדרש.

תרגיל 12. יהי T אופרטור על מרחב וקטורי V ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל שדה סגור אלגברית $\mathbb{F}$, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T. אז
$$\left(T-\lambda\operatorname{Id}_V\right)^{r_a^T(\lambda)}=\left(T-\lambda\operatorname{Id}_V\right)^n \,.$$