אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 7
אופרטורים צמודים ופירוק פולארי

25.12.2025

תרגיל 1. יהי $V = \mathrm{Mat}_2\left(\mathbb{R}\right)$ עם המכפלה הפנימית $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}\left(Y^t X\right)$, ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ המוגדר על ידי

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16a & 4b-6c \\ -6b+13c & 16d \end{pmatrix}.$$

מיצאו בסיס אורתונורמלי B של V עבורו $[T]_B$ אלכסונית, ומיצאו אופרטור $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ צמוד לעצמו עבורו $S^2 = T$.

תרגיל 2. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V\right)$ נורמלי, ונניח כי $3, 4$ ערכים עצמיים של T. הראו שיש $v \in V$ עבורו $\|v\| = \sqrt{2}$ וגם $\|Tv\| = 5$.

תרגיל 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V\right)$ ויהי $a \in \mathbb{C}$ עבורו $|a| \neq 1$.

1. הראו כי אם $T^* = aT$ אז $T = 0$.
2. נניח כי T נורמלי, ויהי $S = T - aT^*$. הוכיחו כי $\ker\left(T\right) = \ker\left(S\right)$.

תרגיל 4. יהי $V = \mathrm{Mat}_2\left(\mathbb{R}\right)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\left(B^t A\right)$, ותהי

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ A &\mapsto \frac{A + A^t}{2} \end{aligned}.$$

1. מיצאו את T^*. שימו לב כי $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$ עבור העתקות $T_i\colon V \to V$ עבורן אנו יודעות מי הן T_i^*.
2. מיצאו בסיסים אורתונורמליים B, C של V עבורם $[T]_C^B = \mathrm{diag}\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right)$ כאשר $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$.
3. מיצאו העתקה אוניטרית $U \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ והעתקה מוגדרת חיובית לחלוטין $P \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ עבורן $T = UP$.