אלגברה ב' - תרגילי הכנה לקורס
חזרה על מטריצות מייצגות, כפל מטריצות, הדטרמיננטה, ערכים עצמיים ולכסון

לא להגשה

סימונים

- נסמן ב־$[n] \coloneqq \{1,2,3,\ldots,n\}$ את אוסף המספרים הטבעיים החיוביים עד n.
- משמעות הסימון $\sum_{i\in[n]} a_i$ היא סכום האיברים $a_1,\ldots,a_n$.
- משמעות הסימון $\prod_{i\in[n]} a_i$ היא מכפלת האיברים $a_1,\ldots,a_n$.
- עבור פולינום
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{F}[x],$$
הנגזרת הפורמלית $p'(x)$ היא
$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(i+1)x^i \in \mathbb{F}[x].$$
אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ זאת אותה נגזרת מהקורס אינפי 1.
- עבור כל שני ביטויים מתמטיים x,y נסמן
$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x=y \\ 0 & x\neq y \end{cases}.$$
סימון זה נקרא הדלתא של קרונקר.
- נסמן ב־$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ את מרחב המטריצות עם m שורות ו־n עמודות עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. נסמן לעתים $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
- עבור מרחבים וקטוריים V,W מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ נסמן ב־$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ את אוסף ההעתקות הלינאריות מ־V ל־W. נסמן גם $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,V)$.

1 מטריצות מייצגות

הגדרה 1.1 (מטריצה מייצגת). יהיו V,W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B,C בהתאמה, ונסמן
$$B=(v_1,\ldots,v_n).$$
נסמן גם $n \coloneqq \dim(V)$ ו־$m \coloneqq \dim(W)$. עבור $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ נגדיר
$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F}).$$

תרגיל 1. חשבו את המטריצות המייצגות של ההעתקות הבאות לפי הבסיסים הנתונים.

1. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לפי הבסיס

$$.B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

2. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}_3\left[x\right] &\to \mathbb{C}_3\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p\left(x+1\right) \end{aligned}$$

לפי הבסיס הסטנדרטי

$$\left(1, x, x^2, x^3\right)$$

של מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 3 עם מקדמים מרוכבים.

3. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) &\to \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

לפי הבסיס

$$.B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

4. ההעתקה

$$\begin{aligned} T_A\colon \operatorname{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right) &\to \operatorname{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right) \\ B &\mapsto AB \end{aligned}$$

עבור מטריצה $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ ולפי הבסיס הסטנדרטי

$$E = \left(E_{1,1}, \ldots, E_{1,n}, E_{2,1}, \ldots, E_{2,n}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{n,n}\right)$$

כאשר $E_{i,j}$ מטריצה שמקדמיה אפסים חוץ מ־1 במיקום ה־(i,j). כלומר,

$$.\left(E_{i,j}\right)_{k,\ell} = \delta_{(i,j),(k,\ell)} \coloneqq \begin{cases} 0 & (i,j) = (k,\ell) \\ 1 & (i,j) \neq (k,\ell) \end{cases}$$

5. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ b_i &\mapsto \begin{cases} b_{i+1} & i < n \\ b_1 & i = n \end{cases} \end{aligned}$$

עבור בסיס

$$,B = \left(b_1, \ldots, b_n\right)$$

לפי הבסיס B.

תרגיל 2. בכל אחד מהסעיפים הבאים, מיצאו העתקה לינארית $T\colon V \to V$ עבורה $[T]_B = A$.

.1

$$V=\mathbb{R}^3$$
$$B=(e_2,e_3,e_1)$$
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

.2

$$V=\mathbb{R}_2[x]$$
$$B=\left(1,x,x^2\right)$$
$$A=J_3(1)\coloneqq\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

.3

$$V=\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$
$$B=(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2})$$
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

4. V מרחב הפונקציות $[4]\to\mathbb{R}$. הבסיס B הוא $(\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4)$ כאשר $\chi_i(j)=\delta_{i,j}$. המטריצה A היא

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

תרגיל 3. הוכיחו/הפריכו את הטענה הבאה: תהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית ויהיו שני בסיסים B,C של V עבורם $[T]_B=[T]_C$. אז $B=C$.

2 בפל מטריצות

תהי

$$A=(a_{i,j})_{i,j\in[n]}\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}),$$

ויהי $v=\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$. לפי הגדרת כפל מטריצות, מתקיים

$$Av=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1,j}v_j\\\vdots\\\sum_{j=1}^n a_{n,j}v_j\end{pmatrix}. \tag{1}$$

אם ניקח $v=e_k$ נקבל כי

$$Ae_k=\begin{pmatrix}a_{1,k}\\a_{2,k}\\\vdots\\a_{n-1,k}\\a_{n,j}\end{pmatrix},$$

וזאת בדיוק העמודה ה־k של A.
אם נסמן ב־$A_{(k)}$ את העמודה ה־k של A נקבל כי

$$Av=A\left(v_1e_1+\ldots+v_ne_n\right)=v_1Ae_1+\ldots+v_nAe_n=v_1A_{(1)}+\ldots+v_nA_{(n)}.$$

תרגיל 4. חשבו את הוקטורים הבאים.

.1

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

.2

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

.3

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&3&3\\1&1&2&2&3&3\\1&1&2&2&3&3\\1&1&2&2&3&3\\1&1&2&2&3&3\\1&1&2&2&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

.4

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

תהי

$$B=\left(b_{i,j}\right)_{i,j\in[n]}\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{F}\right).$$

לפי הגדרת כפל מטריצות, מתקיים

$$[AB]_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}.$$

בפרט, העמודה ה־j של AB היא

$$\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1,k}b_{k,j}\\\vdots\\\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}b_{k,j}\end{pmatrix}.$$

נשים לב כי $\begin{pmatrix}b_{1,j}\\\vdots\\b_{n,j}\end{pmatrix}$ היא העמודה ה־j של B, שנסמנה $B_{(j)}$, ניזכר במשוואה (1), ונקבל כי העמודה ה־j של AB היא בדיוק $AB_{(j)}$.

תרגיל 5. חשבו את המטריצות הבאות.

1.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}^2$$

3.

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2$$

4.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2$$

3 הדטרמיננטה

הגדרה 3.1 (דטרמיננטה). תהי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. נגדיר את הדטרמיננטה $\det(A)$ של A באופן הרקורסיבי הבא.
תהי $M_{i,j}$ הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ־A לאחר הוצאת השורה ה־i והעמודה ה־j של A. נקרא למספר זה המינור ה־(i,j) של A. הדטרמיננטה של A מוגדרת על ידי

$$\det(A) \coloneqq \sum_{i,j\in[n]} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j} .$$

משפט 3.2. תהיינה $A,B,C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי C הפיכה. מתקיימות התכונות הבאות.

1. $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$
2. $\det\left(C^{-1}\right) = (\det(C))^{-1}$

תרגיל 6. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות.

1.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

2.

$$B = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

.3

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$$

עבור סקלרים $a,b,c,d \in \mathbb{F}$.

.4

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

.5

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

.6

$$F = \begin{pmatrix} A & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{F})$$

עבור $A, B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{F})$.

טענה 3.3 (מעבר בסיס). תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית ויהיו B,C שני בסיסים של V. נסמן $M_C^B = [\mathrm{Id}_V]_C^B$ ונקרא לה מטריצת מעבר בין הבסיסים B,C. מתקיים

.1

$$M_B^C = \left(M_C^B\right)^{-1}$$

.2

$$[T]_B = \left(M_C^B\right)^{-1}[T]_C\, M_C^B$$

הערה 3.4. המטריצה M_C^B מקיימת $M_C^B\,[v]_B = [v]_C$ לכל וקטור $v \in V$. בכל זאת, יש שקוראים לה "מטריצת מעבר מ־C ל־B". לכן לא נקרא לה "מטריצת מעבר מבסיס אחד לאחר" אלא רק מטריצת מעבר בין שני הבסיסים.

תרגיל 7. תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית, ויהי B בסיס של V. נגדיר את הדטרמיננטה של T על ידי

$$\det(T) \coloneqq \det([T]_B)\,.$$

הראו שהדטרמיננטה של T מוגדרת היטב. כלומר, הראו שאם B' בסיס נוסף של V מתקיים

$$\det([T]_B) = \det([T]_{B'})\,.$$

4 ערכים ווקטורים עצמיים

הגדרה 4.1 (ערכים ווקטורים עצמיים). תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית מעל שדה $\mathbb{F}$. סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ נקרא ערך עצמי של T אם קיים $v \in V$ עבורו $T(v) = \lambda v$. וקטור $v \in V$ כזה נקרא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ.

תהי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ונסמן

$$\begin{aligned} T_A\colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}\,.$$

ערך/וקטור עצמי של A הוא ערך/וקטור עצמי של T_A.

תרגיל 8. מצאו את הערכים העצמיים של ההעתקות הבאות.

1. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}_3\left[x\right] &\to \mathbb{C}_3\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p\left(x+1\right) \end{aligned}$$

5. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{F}_n\left[x\right] &\to \mathbb{F}_n\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p'\left(x\right) \end{aligned}$$

כאשר $p'\left(x\right)$ הנגזרת הפורמלית של $p\left(x\right)$.

6. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) &\to \operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

7. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ b_i &\mapsto \begin{cases} b_{i+1} & i<n \\ b_1 & i=n \end{cases} \end{aligned}$$

עבור בסיס

$$B=\left(b_1,\ldots,b_n\right),$$

כאשר V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

משפט 4.2. תהי $A\in\operatorname{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$.

1. הערכים העצמיים של A הם שורשי הפולינום המתוקן $p_A\left(x\right)\coloneqq\det\left(xI_{n\times n}-A\right)$.
2. אם ל־p_A יש n שורשים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ בולל ריבויים, העקבה של A היא סכום השורשים והדטרמיננטה של A היא מכפלת השורשים. בלומר,

$$\operatorname{tr}\left(A\right)=\sum_{i\in[n]}\lambda_i$$

$$\det\left(A\right)=\prod_{i\in[n]}\lambda_i\ .$$

תרגיל 9. מצאו את הערכים העצמיים של המטריצות הבאות. עבור כל אחת מהמטריצות A עד F שיש לה מספר ערכים עצמיים ששווה לגודל המטריצה, וודאו שמכפלת הערכים העצמיים שווה לדטרמיננטה שחישבתם בתרגיל 6.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

3.

$$B' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

4.

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$$

עבור סקלרים $a, b, c, d \in \mathbb{F}$.

5.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

6.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

7.

$$F = \begin{pmatrix} A & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{F})$$

עבור $A, B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{F})$.

5 לבסון

הגדרה 5.1 (לכסינות). העתקה לינארית $T\colon V \to V$ נקראת לבסינה אם קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית. בסיס B בזה נקרא בסיס מלבסן.
מטריצה $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ נקראת לבסינה אם T_A לבסינה.

תרגיל 10. הראו בי $T\colon V \to V$ לבסינה אם ורק אם קיים בסיס B של V שאיבריו עם וקטורים עצמיים של T.
הראו בי במקרה זה הערכים העצמיים של T הם הערכים על האלכסון של $[T]_B$.

תרגיל 11. הראו בי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ לבסינה אם ורק אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ עבורה $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.
רמז: העזרו בטענה 3.3.

תרגיל 12. עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבעו האם ההעתקה לכסינה ואם כן מצאו בסיס מלכסן. הוכיחו את טענותיכן.

1. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C}_3\left[x\right] &\to \mathbb{C}_3\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p\left(x+1\right) \end{aligned}$$

5. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{F}_n\left[x\right] &\to \mathbb{F}_n\left[x\right] \\ p\left(x\right) &\mapsto p'\left(x\right) \end{aligned}$$

כאשר $p'\left(x\right)$ הנגזרת הפורמלית של $p\left(x\right)$.

6. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon\ \mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) &\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

7. ההעתקה

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ b_i &\mapsto \begin{cases} b_{i+1} & i<n \\ b_1 & i=n \end{cases} \end{aligned}$$

עבור בסיס

$B=\left(b_1,\dots,b_n\right)$,

כאשר V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

תרגיל 13. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות X קבעו האם המטריצה לכסינה ואם כן מצאו מטריצה P עבורה $P^{-1}XP$ מטריצה אלכסונית. הוכיחו את טענותיכן.

1.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right)$$

.2

$$B=\begin{pmatrix}\cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right)\\ \sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{C}\right)$$

עבור $\theta\in\mathbb{R}$.

.3

$$B'=\begin{pmatrix}\cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right)\\ \sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{R}\right)$$

עבור $\theta\in\mathbb{R}$.

.4

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3\times3}\left(\mathbb{C}\right)$$

.5

$$E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3\times3}\left(\mathbb{C}\right)$$

.6

$$F=\begin{pmatrix}A & 0_{2\times2}\\ 0_{2\times2} & B\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{4\times4}\left(\mathbb{F}\right)$$

עבור $A,B\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{F}\right)$. הפרידו למקרים כתלות במטריצות A,B.

.7

$$J\left(\lambda\right)=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{C}\right)$$

עבור $\lambda\in\mathbb{C}$.

.8

$$K=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{C}\right)$$

תרגיל 14. תהיינה $A,B\in\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ לכסינות. הפריכו את הטענות הבאות.

1. $A+B$ לכסינה.
2. AB לכסינה.

רמז: היעזרו במטריצות $J\left(0\right),J\left(1\right),K$ מהסעיף הקודם.

תרגיל 15. הוכיחו שאם למטריצה יש ערך עצמי יחיד, היא לכסינה אם ורק אם היא סקלרית, כלומר אם ורק אם היא מהצורה $\lambda I_{n\times n}$.