

אלגברה ב' – גיליון תרגילי בית 6

גרס־שמידט ואופרטורים צמודים

15.12.2025

תרגיל 1. יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ ותהינה

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$
$$\langle f, g \rangle_2 = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

שתי מכפלות פנימיות על V . יהי

$$W = \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\} \leq V$$

1. מיצאו בסיס $B = (w_1, \dots, w_m)$ של W והשלימו אותו לבסיס C של V . בצעו את תהליך גרס־שמידט על C לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות כדי לקבל בסיסים אורתונורמליים לפיהן.

2. היעזרו בבסיסים שמצאתן בסעיף הקודם כדי למצוא את W^\perp לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

3. מיצאו את ההטלה האורתוגונלית P_W על W לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

4. יהי $f(x) = 1 + x$. מיצאו את המרחק של f מ- W לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

תרגיל 2. יהי $V = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(Y^t X)$, ותהי $B \in V$. נגדיר אופרטור

$$\Phi_B: V \rightarrow V$$
$$A \mapsto BA.$$

1. חשבו את Φ_B^* .

2. עבור אילו מטריצות B מתקיים $\Phi_B \circ \Phi_B^* = \Phi_B^* \circ \Phi_B$?

3. עבור אילו מטריצות B מתקיים $\Phi_B^* = \Phi_B$?

4. עבור אילו מטריצות B האופרטור Φ_B אורתוגונלי?

תרגיל 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי, יהי $W \leq V$ תת־מרחב של V , ותהי P_W ההטלה האורתוגונלית על W . הראו כי P_W אורתוגונלית אם ורק אם $W = V$.