אלגברה ב' (01040168) - חורף 2026
תרגול 6 - עוד על ההעתקה הצמודה, משפט ההצגה של ריס, ואיזומטריות
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־7 בדצמבר 2025

1 ההעתקה הצמודה

משפט 1.1 (ההעתקה הצמודה). יהיו V, W מרחבי מכפלה פנימית סוף־מימדיים ותהי $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. קיימת העתקה יחידה $T^* \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V)$ עבורה

$$\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T^*(w)\rangle_V$$

לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$.
היא נקראת ההעתקה הצמודה של T.

משפט 1.2. יהיו $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V), (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ מרחבי מכפלה פנימית סוף מימדיים עם בסיסים אורתונורמליים B, C בהתאמה, ותהי $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. אז $[T^*]_B^C = \left([T]_C^B\right)^*$.

תרגיל 1. יהי $V = \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^*, A)$, ויהי

$$\begin{aligned} \Phi \colon V &\to V \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}.$$

חשבו את Φ^*.

פתרון. נוכל לחשב ישירות,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(A), B\rangle &= \left\langle A^t, B\right\rangle \\ &= \operatorname{tr}\left(B^* A^t\right) \\ &= \overline{\operatorname{tr}\left(\overline{B^* A^t}\right)} \\ &= \overline{\operatorname{tr}\left(B^t A^*\right)} \\ &= \overline{\operatorname{tr}\left(A^* B^t\right)} \\ &= \overline{\left\langle B^t, A\right\rangle} \\ &= \left\langle A, B^t\right\rangle \\ &= \langle A, \Phi(B)\rangle \end{aligned}$$

ולכן $\Phi^* = \Phi$.
נוכל לחשב זאת גם בעזרת מטריצה מייצגת בבסיס אורתונורמלי. נסמן ב־$E_{i,j}$ מטריצה עבורה $(E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$. כלומר, זאת מטריצה עם 0 בכל המקדמים חוץ מזה בשורה ה־i והעמודה ה־j. אז בבסיס

$$B := (E_{1,1}, \ldots, E_{n,n}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{1,3}, E_{3,1} \ldots, E_{n-1,n} E_{n,n-1})$$

נקבל כי

$$[\Phi]_B = I_n \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

כיוון ש־B בסיס אורתונורמלי נקבל כי $[\Phi^*]_B = \overline{[\Phi]_B}^t$. אך $[\Phi]_B$ מטריצה ממשית סימטרית, ולכן $[\Phi^*]_B = [\Phi]_B$ ואז $\Phi^* = \Phi$.

2 משפט ההצגה של ריס

הגדרה 2.1 (המרחב הדואלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$. המרחב הדואלי של V הוא

$$V^* := \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F}).$$

איבריו נקראים פונקציונלים לינאריים.

משפט 2.2 (משפט ההצגה של ריס). יהי V מרחב מכפלה פנימית. לכל $v \in V$ נסמן

$$\begin{aligned} h_v \colon V &\to V \\ w &\mapsto \langle w, v \rangle \end{aligned}.$$

אז ההעתקה

$$\begin{aligned} H^V \colon V &\to V^* \\ v &\mapsto h_v \end{aligned}$$

הינה איזומורפיזם לינארי.

מסקנה 2.3 (ניסוח קונרקטי למשפט ההצגה של ריס). יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $\varphi \in V^*$ פונקציונל לינארי על V. קיים וקטור $w \in V$ יחיד עבורו $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$.
בנוסף, אם $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס אורתונורמלי של V, מתקיים

$$w = \sum_{i \in [n]} \langle w, v_i \rangle v_i = \sum_{i \in [n]} \overline{\varphi(v_i)} v_i.$$

תרגיל 2. יהי $V = \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ ותהי $\operatorname{tr} \colon V \to \mathbb{C}$ העתקת העקבה. מיצאו מטריצה B עבורה $\operatorname{tr}(A) = \langle A, B \rangle$ לכל $A \in V$.

פתרון. נסתכל על הבסיס האורתונורמלי $(E_{i,j})_{i,j \in [n]}$ של V וניעזר בנוסחא. נקבל

$$B = \sum_{i,j \in [n]} \overline{\operatorname{tr}(E_{i,j})} E_{i,j} = \sum_{i \in [n]} E_{i,i} = I_n.$$

תרגיל 3.
1. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $C > 0$ כך שלכל $p \in \mathbb{R}_n[x]$ מתקיים

$$|p(0)| \le C \left(\int_{-1}^{1} p(x)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. חשבו את C המינימלי עבור $n = 2$.

פתרון.
1. נשים לב כי

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

מכפלה פנימית. אז

$$\left(\int_{-1}^{1} p(x)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \Big(\langle p, p \rangle \Big)^{\frac{1}{2}} = \|p\|.$$

כלומר, עלינו להוכיח

$$|p(0)| \le C \|p\|.$$

ההצבה

$$\begin{aligned} \operatorname{ev}_0 \colon \mathbb{R}_n[x] &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

היא פונקציונל לינארי, ולכן ממשפט ריס יש $g \in \mathbb{R}_n[x]$ עבורו

$$p(0) = \operatorname{ev}_0(p) = \langle p, g \rangle.$$

עכשיו, מקושי־שוורץ

$$|p(0)| = |\langle p, g \rangle| \le \|p\| \|g\|.$$

לכן ניקח $C = \|g\|$.

2. נסמן $g(x)=ax^2+bx+c$. נשים לב כי כאשר $p=g$ יש שוויון בקושי־שוורץ ואז

$$|p(0)|=\|p\|\|g\|\leq C\|p\|.$$

גורר $\|g\|\geq C$. ראינו כי $C=\|g\|$ מקיים את הנדרש, ולכן נותר למצוא את $\|g\|$.

כדי לא להצטרך בסיס אורתונורמלי, שיהיה פחות יפה במקרה הזה, נשים לב שמספיק לחשב את המכפלות הפנימיות בין g לאיברי בסיס כלשהו. לפי בסיס אורתונורמלי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ מתקיים

$$g=\sum_{i\in[n]}\langle g,v_i\rangle v_i.$$

אם $C=(u_1,\ldots,u_n)$ בסיס נוסף, נוכל לכתוב

$$v_i=\sum_{j\in[n]}\alpha_{i,j}u_j$$

ואז

$$g=\sum_{i\in[n]}\langle g,v_i\rangle v_i=\sum_{i,j\in[n]}\bar{\alpha}_{i,j}\langle g,u_j\rangle,$$

ונקבל שמהכפלות הפנימיות $\langle g,u_i\rangle$ נותנות מספיק אינפורמציה כדי למצוא את g.

כעת, נחשב את המכפלות הפנימיות של g עם איברי הבסיס הסטנדרטי ונפתור מערכת משוואות שיהיה לה פתרון יחיד שהוא מקדמי g.

$$\begin{aligned}
1=1(0)=\langle g(x),1\rangle&=\int_{-1}^{1}g(x)\,\mathrm{d}x=\left.\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right|_{x=-1}^{1}=\frac{2a}{3}+2c\\
0=x(0)=\langle g(x),x\rangle&=\int_{-1}^{1}g(x)\,x\,\mathrm{d}x=\left.\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}\right|_{x=-1}^{1}=\frac{2b}{3}\\
0=x^2(0)=\left\langle g(x),x^2\right\rangle&=\int_{-1}^{1}g(x)\,x^2\,\mathrm{d}x=\left.\frac{ax^5}{5}+\frac{bx^4}{4}+\frac{cx^3}{3}\right|_{x=-1}^{1}=\frac{2a}{5}+\frac{2c}{3}.
\end{aligned}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $b=0$. מהמשוואה הראשונה פחות 3 פעמים השנייה נקבל

$$1=\frac{2a}{3}-3\cdot\frac{2a}{5}+0=\frac{10a-18a}{15}$$

ולכן $a=-\frac{15}{8}$. אז מהמשוואה השלישית נקבל

$$c=-\frac{3a}{5}=-\frac{9}{8}$$

ולכן

$$g(x)=-\frac{15}{8}x^2-\frac{9}{8}.$$

אז

$$C=\|g\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(-\frac{15}{8}x^2-\frac{9}{8}\right)^2\mathrm{d}x}=\frac{27}{4}.$$

3 איזומטריות ואופרטורים אוניטריים ואורתוגונליים

3.1 איזומטריות

תבונה אינטואיטיבית גיאומטרית של אופרטורים על מרחבי מכפלה פנימית היא שמירה של המכפלה הפנימית.

הגדרה 3.1 (איזומטריה בין מרחבי מכפלה פנימית). יהיו V,W מרחבי מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$. נקרא ל־$T$ איזומטריה אם

$$\langle T(v_1),T(v_2)\rangle_W=\langle v_1,v_2\rangle_V$$

לכל v_1,v_2.

טענה 3.2 (טענה מההרצאה). T הינה איזומטריה אם ורק אם T הפיכה ומתקיים $T^*=T^{-1}$.

תרגיל 4. יהיו V,W מרחבי מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ איזומטריה. יהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס אורתונורמלי של V. אז $T(B):=\langle T(v_1),\ldots,T(v_n)\rangle$ הינו בסיס אורתונורמלי של W.

פתרון. לכל $i,j\in[n]$ מתקיים

$$\langle T(v_i),T(v_j)\rangle=\langle v_i,v_j\rangle=\delta_{i,j}$$

ולכן הבסיס $(T(v_1),\ldots,T(v_n))$ גם הוא אורתונורמלי.

הגדרה 3.3 (מרחבי מכפלה פנימית איזומטריים). יהיו V,W מרחבי מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$. נגיד כי V,W איזומטריים אם קיימת איזומטריה $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$.

תרגיל 5. יהיו V,W מרחבי מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$.
הראו כי V,W איזומטריים אם ורק אם $\dim_{\mathbb{F}}(V)=\dim_{\mathbb{F}}(W)$.

פתרון. נניח כי V,W איזומטריים, ולכן קיימת איזומטריה $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$. אך מהטענה, איזומטריה היא בפרט הפיכה, ולכן V,W איזומורפיים ולכן בעלי אותו מימד.
מצד שני, נניח כי $\dim_{\mathbb{F}}(V)=\dim_{\mathbb{F}}(W)$. לפי גרם־שמידט, קיימים בסיסים אורתונורמליים B,C של V,W בהתאמה. נסמן

$$B=(v_1,\ldots,v_n)$$
$$C=(w_1,\ldots,w_n),$$

ונגדיר $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ על ידי

$$T(v_i)=w_i.$$

אז T שולחת בסיס אורתונורמלי B לבסיס אורתונורמלי C, ולפי התרגיל הקודם נקבל כי היא איזומטריה.

3.2 אופרטורים אורתוגונליים ואוניטריים

הגדרה 3.4 (אופרטור אורתוגונלי (אוניטרי)). אופרטור $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ מעל $\mathbb{R}$ (מעל $\mathbb{C}$) נקרא אורתוגונלי (אוניטרי) אם $T^*=T^{-1}$.

הגדרה 3.5 (מטריצה אורתוגונלית (אוניטרית)). מטריצה $A\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ עבור $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (עבור $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) נקראת אורתוגונלית (אוניטרית) אם $A^*:=\overline{A^t}=A^{-1}$.

תרגיל 6. הראו כי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}[V]$ אורתוגונלי (אוניטרי) אם ורק אם $\|Tv\|=\|v\|$ לכל $v\in V$.
היעזרו בזהות הפולריזציה. מעל $\mathbb{R}$ מתקיים

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$

ומעל $\mathbb{C}$ מתקיים

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right).$$

פתרון. אם $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור אורתוגונלי (אוניטרי), מתקיים

$$\|Tv\|=\sqrt{\langle Tv,Tv\rangle}=\sqrt{\langle v,v\rangle}=\|v\|$$

לכל $v\in V$.
להיפך, אם $\|Tv\|=\|v\|$ לכל $v\in V$, נקבל מזהות הפולריזציה כי $\langle Tv,Tw\rangle=\langle v,w\rangle$ לכל $v,w\in W$.

הערה 3.6. קיבלנו כי אופרטורים אורתוגונליים (או אוניטריים) הם בדיוק אלו השומרים על הנורמה, ולכן הם גם אלו השומרים על מרחקים.
העתקות השומרות על מרחקים נקראות איזומטריות ולכן אופרטור אורתוגונלי נקרא גם איזומטריה לינארית. כיוון שבקורס נדבר רק על העתקות לינאריות, נתייחס לפעמים לאופרטור לינארי בתור איזומטריה.

תרגיל 7. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי ממימד n, ויהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$. התנאים הבאים שקולים.

1. T אורתוגונלי.
2. קיים בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \ldots, v_n)$, כך שהבסיס $(Tv_1, \ldots, Tv_n)$ אורתונורמלי.
3. לכל בסיס אורתונורמלי $B = (v_1, \ldots, v_n)$, הבסיס $(Tv_1, \ldots, Tv_n)$ אורתונורמלי.

פתרון. $3 \implies 1$: ראינו בתרגיל קודם כי איזומטריה שולחת כל בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.

$2 \implies 3$: מיידי.

$1 \implies 2$: יהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס אורתונורמלי של V עבורו

$$T(B) \coloneqq (T(v_1), \ldots, T(v_n))$$

אורתונורמלי. יהיו $u, v \in V$, ונראה כי $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, מה שיראה את הנדרש. קיימים סקלרים $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{F}$ עבור $i \in [n]$ וכך שמתקיים

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i\in[n]} \alpha_i v_i \\ v &= \sum_{i\in[n]} \beta_i v_i. \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v)\rangle &= \left\langle T\left(\sum_{i\in[n]} \alpha_i v_i\right), T\left(\sum_{i\in[n]} \beta_i v_i\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i\in[n]} \alpha_i T(v_i), \sum_{i\in[n]} \beta_i T(v_i)\right\rangle \\ &= \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle T(v_i), T(v_j)\rangle \\ &= \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]} \alpha_i \overline{\beta_j} \delta_{i,j} \\ &= \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle v_i, v_j\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i\in[n]} \alpha_i v_i, \sum_{i\in[n]} \beta_i v_i\right\rangle \\ &= \langle u, v\rangle \end{aligned},$$

כנדרש, וכאשר בשוויון השלישי והשישי השתמשנו בלינאריות של המכפלה הפנימית ברכיב הראשון, ובאנטי־לינאריות ברכיב השני.

תרגיל 8. יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהי

$$\begin{aligned} R \colon V &\to V \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שיקוף דרך ציר ה־x.
הראו כי R איזומטריה.

פתרון. מתקיים $[R]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ וזאת מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי של V. לכן R שולח בסיס אורתונורמלי (הסטנדרטי) לבסיס אורתונורמלי, ולכן הינו איזומטריה.

תרגיל 9. נזכיר שראינו בהרצאה כי $\rho_\theta := A_\theta$ עבור

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

הינו איזומטריה.
הראו כי כל איזומטריה של $\mathbb{R}^2$ היא מהצורה ρ_θ או $\rho_\theta R$ עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

פתרון. תהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ איזומטריה. מהתנאים השקולים, הבסיס $\left(T\left(e_1\right), T\left(e_2\right)\right)$ הינו אורתונורמלי. בפרט, $v := T\left(e_1\right)$ הינו מנורמה 1.
נראה שניתן לכתוב $v = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$. נכתוב $v = \begin{pmatrix} v_1, v_2 \end{pmatrix}$ ונקבל כי $v_1^2 + v_2^2 = 1$. בפרט, $v_1 \in [-1, 1]$ ולכן יש $\theta \in \mathbb{R}$ עבורה $v_1 = \cos\theta$. נקבל כי $v_2^2 = 1 - (\cos\theta)^2 = (\sin\theta)^2$ ולכן $v_2 \in \{\pm\sin\theta\}$. אם $v_2 = \sin\theta$, סיימנו. אחרת, ניתן לכתוב

$$\begin{aligned} v_1 &= \cos(-\theta) \\ v_2 &= \sin(-\theta) \end{aligned}$$

ואז הזווית המתאימה היא $-\theta$.
נקבל כי $v = \rho_\theta\left(e_1\right)$ ולכן

$$\rho_{-\theta}(v) = \rho_{-\theta} \circ T\left(e_1\right) = e_1.$$

הרכבת איזומטריות הינה איזומטריה, ולכן נקבל כי $\rho_{-\theta} \circ T$ היא איזומטריה שמקבעת את e_1. מהתנאים השקולים, היא מעבירה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי, לכן $\left(e_1, u\right) := \left(e_1, \rho_{-\theta} \circ T\left(e_2\right)\right)$ אורתונורמלי. אבל אז $u \in \{\pm e_2\}$ כי $u \in \{e_1\}^\perp = \operatorname{Span}\left(e_2\right)$ מנורמה 1. אם $u = e_2$ נקבל כי $\rho_{-\theta} \circ T = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$ כלומר $T = \rho_\theta$. אחרת, $\rho_{-\theta} \circ T = R$ ואז $T = \rho_\theta \circ R$.