אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 10
פולינומים אופייני ומינימלי, והדטרמיננטה

תאריך הגשה: 16.1.2026

תרגיל 1 (חישוב פולינום מינימלי). תהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ויהי B בסיס של V עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}).$$

1. הראו כי

$$p_T(x) = x^2 - (a+d)\,x + (ad-bc),$$

והסיקו כי

$$T^2 - (a+d)\,T + (ad-bc)\,\mathrm{Id}_V = 0.$$

2. הראו כי

$$m_T(x) = \begin{cases} x-a & b=c=0 \text{ and } a=d \\ x^2-(a+d)\,x+(ad-bc) & \text{otherwise} \end{cases}.$$

תרגיל 2 (פולינום מינימלי של אופרטור הופכי). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$ ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ עם פולינום מינימלי

$$m_T(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 5x + 4.$$

הראו כי T הפיך ומיצאו את הפולינום המינימלי $m_{T^{-1}}(x)$ של T^{-1}.

תרגיל 3 (חסם עליון לדרגה של הפולינום המינימלי). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$ ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

1. הראו כי

$$\deg m_T(x) \leq \dim(\mathrm{Im}(T)) + 1.$$

2. מיצאו דוגמה לאופרטור T עבורו מתקיים שוויון.

רמז: חישבו על צורת ז'ורדן של T.

תרגיל 4 (דטרמיננטה לפי שורה או עמודה). הגדרנו בהרצאה את הדטרמיננטה של $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ בתור

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i \in [k]} (A)_{\sigma(i),i}.$$

הראו שמתקיים

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i \in [k]} (A)_{i,\sigma(i)},$$

והסיקו כי $\det(A^t) = \det(A)$.

תרגיל 5 (כלל קרמר). תהי $Ax=b$ מערכת משוואות כאשר $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ הפיכה.
לכל $i\in[n]$ תהי

$$\begin{aligned}K_{A,i}\colon\mathbb{F}^n&\to\mathbb{F}\\ y&\mapsto\frac{\det\begin{pmatrix}| & & | & | & | & & |\\ A_1 & \cdots & A_{i-1} & y & A_{i+1} & \cdots & A_n\\ | & & | & | & | & & |\end{pmatrix}}{\det\left(A\right)}\end{aligned}$$

ותהי

$$\begin{aligned}K_A\colon\mathbb{F}^n&\to\mathbb{F}^n\\ y&\mapsto\begin{pmatrix}K_{A,1}\left(y\right)\\ K_{A,2}\left(y\right)\\ \vdots\\ K_{A,n-1}\left(y\right)\\ K_{A,n}\left(y\right)\end{pmatrix}\end{aligned}.$$

נראה שהפתרון היחיד למערכת נתון על ידי $x=K_A\left(b\right)$.

1. הראו שלכל $i\in[n]$ ההעתקה $K_{A,i}$ לינארית.
2. הסיקו ש־K_A העתקה לינארית.
3. תהי

$$\begin{aligned}L_A\colon\mathbb{F}^n&\to\mathbb{F}^n\\ v&\mapsto Av\end{aligned}.$$

הראו ש־$K_A\circ L_A=\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}$ על ידי בדיקה על הבסיס הסטנדרטי, והסיקו שמתקיים $K_A=\left(L_A\right)^{-1}$.

4. הסיקו שמתקיים $\left[K_A\right]_E=A^{-1}$ כאשר E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$.
5. הסיקו שהפתרון היחיד למערכת $Ax=b$ הוא $x=K_A\left(b\right)$.

תרגיל 6 (חישוב בעזרת כלל קרמר). פיתרו את מערכת המשוואות הבאה, בעזרת כלל קרמר.

$$\begin{array}{ccccccccc}4\mathrm{x} & + & \mathrm{y} & + & \mathrm{z} & + & \mathrm{w} & = & 6\\ 3\mathrm{x} & + & 7\mathrm{y} & - & \mathrm{z} & + & \mathrm{w} & = & 1\\ 7\mathrm{x} & + & 3\mathrm{y} & - & 5\mathrm{z} & + & 8\mathrm{w} & = & -3\\ \mathrm{x} & + & \mathrm{y} & + & \mathrm{z} & + & 2\mathrm{w} & = & 3\end{array}$$