

אלגברה ב' – גילוון תרגילי בית 6

גרם-شمידט ואופרטורים צמודים

15.12.2025

תרגיל 1. יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ ותהינה

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle_1 &= \int_0^1 f(x)g(x)dx \\ \langle f, g \rangle_2 &= f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)\end{aligned}$$

שתי מכפלות פנימיות על V . יהי

$$W = \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\} \leq V$$

1. מיצאו בסיס (w_1, \dots, w_m) של W והשלימו אותו לבסיס C של V . בצעו את תהליך גרם-شمידט על C לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות כדי לקבל בסיסים אורתוגונורמליים לפיהם.

2. היעזרו בבסיסים שמצאתן בערך הקודם כדי למצוא את W^\perp לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

3. מיצאו את ההטלה האורתוגונלית P_W על W לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

4. יהי $x \in V$. מיצאו את המרחק של f מ- W לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

תרגיל 2. יהי $V = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(Y^t X)$, ותהי $B \in V$. נגידיר אופרטור

$$\begin{aligned}\Phi_B: V &\rightarrow V \\ A &\mapsto BA\end{aligned}$$

1. חשבו את Φ_B^* .

2. עברו אילו מטריצות B מתקיים $\Phi_B \circ \Phi_B^* = \Phi_B^* \circ \Phi_B$.

3. עברו אילו מטריצות B מתקיים $\Phi_B^* = \Phi_B$.

4. עברו אילו מטריצות B האופרטור Φ_B אורתוגונלי?

תרגיל 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית סופי-מידדי, יהי $W \leq V$ תת-מרחב של V , ותהי P_W ההטלה האורתוגונלית על W . הראו כי P_W אורתוגונלית אם ורק אם $V = W$.