אלגברה ב' (01040168) - חורף 2026
תרגול 4 - מרחבי מכפלה פנימית, וניצבות
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־7 בדצמבר 2025

1 מוטיבציה

נסתכל תחילה על המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^n$. כיוון שנוכל לחשוב על וקטורים ב־$\mathbb{R}^n$ בתור נקודות במרחב, נוכל לחשוב על המרחק בין שני וקטורים $u,v\in\mathbb{R}^n$, שנסמנו $d\left(u,v\right)$.
כדי לחשב מרחק בזה, נסתכל על האורך של הקטע המחבר בין u,v, וזה אותו אורך כמו של הקטע המחבר בין $0,u-v$. לכן, $d\left(u,v\right)=d\left(0,u-v\right)$. נקרא למרחק $d\left(0,u-v\right)$ האורך של $u-v$, כיוון שזה האורך של הקו המחבר בין $0,u-v$, ונסמנו $\left\Vert u-v\right\Vert$ בדומה לסימון $\left|z\right|$ של ערך מוחלט ב־$\mathbb{C}$. נוכל להשתמש במשפט פיתגורס כדי לקבל כי

$$\left\Vert \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\right\Vert =\sqrt{v_1^2+\ldots+v_n^2}$$

ולמשל מתקיים $\left|a+ib\right|=\sqrt{a^2+b^2}=\left\Vert \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right\Vert$.
כשמדובר על גיאומטריה אוקלידית, מושג חשוב בנוסף למרחק ואורך הוא זה של זווית. נסתכל על שני וקטורים u,v באורך 1 ועל הישרים ℓ_u,ℓ_v שעוברים דרכם. הקוסינוס $\cos\left(\alpha\right)$ של הזווית מ־ℓ_u ל־ℓ_v שווה לאורך של הוקטור שהקצה שלו הוא החיתוך בין ℓ_u לאנך מ־v ל־ℓ_u. נסמן וקטור זה $u\left\langle v,u\right\rangle$, כיוון שהוא אכן כפולה של u מהיותו על ℓ_u. במקרה זה נקרא לו ההטלה של v על u. אז יתקיים

$$\cos\left(\alpha\right)=\left\langle v,u\right\rangle$$

ולכן

$$\alpha=\arccos\left(\left\langle v,u\right\rangle\right).$$

כדי להכליל את המושג של זווית, נכליל את הביטוי $\left\langle v,u\right\rangle$ באמצעות ההגדרה הבאה, של מכפלה פנימית.

2 מכפלות פנימיות

הגדרה 2.1 (מכפלה פנימית). יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}\in\left\{\mathbb{R},\mathbb{C}\right\}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה

$$\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle :V\times V\to\mathbb{F}$$

המקיימת את התבונות הבאות.

חיוביות: לכל $v\in V\setminus\left\{0\right\}$ מתקיים $\left\langle v,v\right\rangle \geq0$.

סימטריות (הרמיטיות): לכל $u,v\in V$ מתקיים $\left\langle u,v\right\rangle =\overline{\left\langle v,u\right\rangle}$.

לינאריות ברכיב הראשון: לכל $u,v\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$\left\langle \alpha u+v,w\right\rangle =\alpha\left\langle u,w\right\rangle +\left\langle v,w\right\rangle .$$

מרחב וקטורי V יחד עם מכפלה פנימית $\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle$ נקרא מרחב מכפלה פנימית.

הערה 2.2. בודגמא מהמרחב האוקלידי, ניתן לראות שנובע מהדרישה הגיאומטרית שלנו כי

$$\langle u,v\rangle=\sum_{i\in[n]}u_iv_i$$

עבור $u,v\in\mathbb{R}^n$ מאורך 1. נוכל בעצם להגדיר זאת עבור וקטור כללי, ונשים לב כי הדבר אכן מקיים את שלוש התכונות הדרושות, ולכן הינו מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$.
מכפלה פנימית זאת נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$ ולעתים נסמן אותה $u\cdot v:=\langle u,v\rangle_{\text{std}}$.

תרגיל 1. קיבעו אלו מההעתקות הבאות הן מכפלות פנימיות.

.1

$$f_1\colon\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\mapsto ax+by+(cz)^2$$

.2

$$f_2\colon\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\mapsto ax+by+cz$$

.3

$$f_3\colon\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}$$
$$\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\mapsto ax+by+cz$$

.4

$$f_4\colon\ \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\times\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$$
$$(A,B)\mapsto\mathrm{tr}\left(B^tA\right)$$

פתרון. אף אחת מההעתקות אינה מכפלה פנימית.

1. ההעתקה f_1 אינה לינארית ברכיב הראשון, כי

$$f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=1$$

ואילו

$$f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=2^2=4\neq 2=2f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

2. ההעתקה f_2 אינה חיובית, כי

$$f_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=0\leq 0.$$

3. ההעתקה f_3 אינה הרמיטית, כי

$$f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right)=i$$

ואילו

$$f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=i\neq-i=\overline{i}=\overline{f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right)}.$$

ההעתקה f_4 אינה הרמיטית, כי $f_4\left(I_n,iI_n\right)=\operatorname{tr}\left(iI_n\right)=in$ ואילו

$$f_4\left(iI_n,I_n\right)=\operatorname{tr}\left(iI_n\right)=in\neq\overline{in}=\overline{f_4\left(I_n,iI_n\right)}.$$

3 תבונות של מכפלות פנימיות, ונורמות

במרחב האוקלידי, כאשר $\|u\|=\|v\|=1$, אמרנו שהערך $|\langle u,v\rangle|$ שווה לאורך של ההטלה של v על u (או להיפך, כי המכפלה הפנימית סימטרית). בפרט, אורך זה יכול להיות לכל היותר 1, והינו שווה 1 אם ורק אם $u=v$, כי אחרת ההטלה תהיה קצרה יותר.
ניעזר בלינאריות של המכפלה הפנימית ונקבל כי לוקטורים $u,v\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ כלליים מתקיים

$$\begin{aligned}|\langle u,v\rangle|&=\left\langle\|u\|\frac{u}{\|u\|},\|v\|\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\\&=\|u\|\|v\|\left|\left\langle\frac{u}{\|u\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right|\\&\leq\|u\|\|v\|\end{aligned}$$

כאשר $\left|\left\langle\frac{u}{\|u\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right|\leq1$ כי הוקטורים $\frac{u}{\|u\|},\frac{v}{\|v\|}$ הינם מאורך 1.
אי־שוויון כזה מתקבל גם במרחב מכפלה פנימית כללי, כפי שקובע אי־שוויון קושי־שוורץ, אך לשם כך עלינו להגדיר מושג של אורך בהגדרה הבאה.

הגדרה 3.1 (נורמה). יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. נורמה על V היא פונקציה $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ המקיימת את התבונות הבאות.

חיוביות: לכל $v\in V\setminus\{0\}$ מתקיים $\|v\|>0$.

הומוגניות: לכל $v\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\|\alpha v\|=|\alpha|\|v\|$.

אי־שוויון המשולש: לכל $u,v\in V$ מתקיים $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$.

מרחב וקטורי עם נורמה נקרא מרחב נורמי.

משפט 3.2 (אי־שוויון קושי־שוורץ). יהי V מרחב מכפלה פנימית. אז לכל $u,v\in V$ מתקיים

$$|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם u,v תלויים לינארית.

תרגיל 2. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n\in V$. הראו שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{n}\langle u_i,v_i\rangle\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|v_i\|^2}.$$

פתרון. נרצה לפרש את אגף שמאל בתור מכפלה פנימית. כיוון שהוא מזכיר את המכפלה הפנימית על $\mathbb{R}^n$, רק עם וקטורים מ־V במקום מספרים ב־$\mathbb{R}$, נרצה להגדיר מכפלה זאת על המרחב

$$V^n:=\{(v_1,\ldots,v_n)\mid v_i\in V\}.$$

זה אכן מרחב וקטורי עם חיבור וכפל בסקלר לפי כל קואורדינטה בנפרד, ונגדיר עליו מכפלה פנימית לפי

$$\langle(u_1,\ldots,u_n),(v_1,\ldots,v_n)\rangle:=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i,v_i\rangle.$$

אם $v:=(v_1,\ldots,v_n)\neq(0,\ldots,0)$, יש $v_j\neq 0$ ולכן

$$\langle v,v\rangle\geq\langle v_j,v_j\rangle>0\text{ ,}$$

לכון מתקיימת חיוביות. סימטריה ולינאריות ברכיב הראשון מתקיימות בכל רכיב בנפרד, ולכן גם בסך הכל.
בעת, אי־שוויון קושי־שוורץ על V^n אומר לנו כי

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle u_i,v_i\rangle&\leq\left|\sum_{i=1}^{n}\langle u_i,v_i\rangle\right|\\&=|\langle u,v\rangle|\\&\leq\|u\|\,\|v\|\\&=\sqrt{\langle u,u\rangle}\cdot\sqrt{v,v}\\&=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\langle u_i,u_i\rangle}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\langle v_i,v_i\rangle}\\&=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|v_i\|^2}\text{ ,}\end{aligned}$$

כנדרש.

4 בסיסים אורתונורמליים והמרחב הניצב

הגדרה 4.1 (מטריקה המושרית מנורמה). יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי. המטריקה המושרית על V היא $d(x,y)=\|x-y\|$.

בעת, את המרחק בין שני וקטורים קל בדרך כלל לחשב כאשר יש לנו נורמה נתונה. מעט מסובך יותר לחשב את המרחב מוקטור לקבוצה.

הגדרה 4.2 (מרחק מקבוצה). יהי (X,d) מרחב מטרי, יהי $x\in X$ ותהי $S\subseteq X$. נגדיר את המרחק של x מ־S להיות

$$d(x,S):=\inf\{d(x,s)\mid s\in S\}.$$

תת־קבוצות של מרחב וקטורי שמעניינות אותנו הן בדרך כלל תת־מרחבים. במקרה האוקלידי, אנו יודעות כיצד לחשב את המרחק מתת־מרחב. כדי לחשב את $d(x,W)$ עבור $W\leq\mathbb{R}^n$, נעביר אנך מ־x ל־W ונחשב את המרחק בין x ונקודת החיתוך בין W לאנך.
כדי לעשות דבר דומה במרחבי מכפלה פנימית כלליים, נצטרך לדבר קודם כל על ניצבות.

הגדרה 4.3 (זווית במרחב מכפלה פנימית). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u,v\in V$. נגדיר את הזווית בין u,v בתור

$$\angle(u,v)=\arccos\left(\frac{\Re(\langle u,v\rangle)}{\|u\|\,\|v\|}\right).$$

הגדרה 4.4 (וקטורים ניצבים). יהי V מרחב מכפלה פנימית. וקטורים $u,v\in V$ נקראים ניצבים אם $\langle u,v\rangle=0$. במקרה זה נסמן $u\perp v$.

הערה 4.5. מעל $\mathbb{R}$, וקטורים ניצבים בדיוק כאשר הזווית בינם היא $\frac{\pi}{2}$.

הגדרה 4.6. קבוצה $S\subseteq V$ במרחב מכפלה פנימית נקראת אורתוגונלית אם $s_1\perp s_2$ לכל $s_1,s_2\in S$ שונים.

משפט 4.7 (פיתגורס). תהי $(v_1,\ldots,v_n)$ סדרה של וקטורים אורתוגונליים במרחב מכפלה פנימית V. אז

$$\|v_1+\ldots+v_n\|^2=\|v_1\|^2+\ldots+\|v_n\|^2\text{ .}$$

כדי לדבר על המרחק של וקטור $v\in V$ מתת־מרחב $W\leq V$, נרצה לכתוב את v בתור סכום של שני וקטורים, כאשר אחד מהם מ־W והשני ניצב ל־W. ראינו כי $V=W\oplus W^{\perp}$ עבור $W^{\perp}$ תת־המרחב של הוקטורים הניצבים ל־W ולכן זה אפשרי. ככה, ושהמרחק יצא, כמו במקרה האוקלידי, האורך של החלק הניצב ל־W.

הגדרה 4.8 (מרחב ניצב). יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $S \subseteq V$. המרחב הניצב ל־S הוא

$$S^{\perp}=\{v\in V \mid \forall s\in S\colon v\perp s\}.$$

טענה 4.9. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \leq V$. מתקיים $V=W\oplus W^{\perp}$.

תרגיל 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי ותהיינה $S,T\subseteq V$.

1. נניח כי $S\subseteq T$. הראו כי $T^{\perp}\subseteq S^{\perp}$.
   התאמה בזאת, במו $S\mapsto S^{\perp}$, שהופכת יחס הבלה, נקראת התאמת גלואה.
2. נסמן $W=\operatorname{Span}(S)$. הראו כי $S^{\perp}=W^{\perp}$.
3. הראו כי $\left(S^{\perp}\right)^{\perp}=\operatorname{Span}(S)$.

פתרון. 1. יהי $v\in T^{\perp}$ ויהי $s\in S$. אז $s\in T$ כי $S\subseteq T$, ולכן $v \perp s$, כי v ניצב לכל וקטור ב־T. לכן $v\in S^{\perp}$.

2. מתקיים $S\subseteq W$ ולכן $W^{\perp}\subseteq S^{\perp}$. יהי $v\in S^{\perp}$ ויהי $w\in W$. כיוון ש־$W=\operatorname{Span}(S)$, יש איברים $s_1,\ldots,s_k$ וסקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ עבורם $w=\sum_{i\in[k]}\alpha_i s_i$. אז

$$\langle v,w\rangle=\left\langle v,\sum_{i\in[k]}\alpha_i s_i\right\rangle=\sum_{i\in[k]}\alpha_i\overbrace{\langle v_i,s_i\rangle}^{0}=0$$

ולכן $v\in W^{\perp}$.

3. ראינו כי $W=\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$ עבור $W\leq V$. ניקח $W=\operatorname{Span}(S)$. מתקיים $S\subseteq W$ ולכן $W^{\perp}\subseteq S^{\perp}$ ואז $\left(S^{\perp}\right)^{\perp}\subseteq\left(W^{\perp}\right)^{\perp}=W$. כמו כן, $S^{\perp}=W^{\perp}$ תת־מרחב וקטורי ומכיוון ש־$V=S^{\perp}\oplus\left(S^{\perp}\right)^{\perp}$, נקבל כי

$$\dim\left(\left(S^{\perp}\right)^{\perp}\right)=\dim(V)-\dim\left(S^{\perp}\right)=\dim(V)-\dim\left(W^{\perp}\right)=\dim(W)$$

ולכן יש שוויון $\left(S^{\perp}\right)^{\perp}=W=\operatorname{Span}(S)$.

הערה 4.10. לא יכולנו בתרגיל האחרון להניח כי S אינסופית. באופן כללי,

$$\operatorname{Span}(S)=\left\{\sum_{i\in[k]}\alpha_i s_i \;\middle|\; \substack{\alpha_i\in\mathbb{F}\\ s_i\in S}\right\}$$

גם כאשר S אינסופית.

תרגיל 4. מצאו את $W^{\perp}$ עבור

$$W\coloneqq\operatorname{Span}(e_1+e_2)\leq\mathbb{R}^2.$$

פתרון. ראינו כי מתקיים $v\in\operatorname{Span}(e_1+e_2)^{\perp}$ אם ורק אם $v\perp e_1+e_2$. זה מתקיים אם ורק אם $v_1+v_2=0$ אם ורק אם $v_2=-v_1$. לכן

$$W^{\perp}=\operatorname{Span}(e_1-e_2).$$

הגדרה 4.11 (בסיס אורתונורמלי). יהי V מרחב מכפלה פנימית. בסיס $B=(v_1,\ldots,v_n)$ של V נקרא אורתוגונלי אם $\langle v_i,v_j\rangle=0$ לכל $i\neq j$, ואורתונורמלי אם $\langle v_i,v_j\rangle=\delta_{i,j}\coloneqq\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$.

הגדרה 4.12 (הטלה אורתוגונלית). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W\leq V$. ההטלה האורתוגונלית על W היא ההטלה על W ביחס לסכום הישר $V=W\oplus W^{\perp}$.

טענה 4.13. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W\leq V$. יהי $B=(w_1,\ldots,w_m)$ בסיס **אורתונורמלי** של W ויהי $v\in V$. תהי P_W ההטלה האורתוגונלית על W. אז

$$P_W(w)=\sum_{i\in[m]}\langle v,w_i\rangle w_i.$$

תרגיל 5. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u,v\in V$. הראו כי $u\perp v$ אם ורק אם

$$\|u\|\leq\|u+av\|$$

לכל $a\in\mathbb{F}$.

פתרון. אם $u \perp v$ ו־$a \in \mathbb{F}$, נקבל מפיתגורס

$$\|u+av\|^2 = \|u\|^2 + |a|^2 \|v\|^2 \geq \|u\|^2$$

ולכן $\|u\| \leq \|u+av\|$.
נניח כי $\langle u,v\rangle \neq 0$ ונניח תחילה כי $\|v\| = 1$. אז

$$\langle \langle u,v\rangle v, v\rangle = \langle u,v\rangle \langle v,v\rangle = \langle u,v\rangle \|v\|^2 = \langle u,v\rangle \neq 0$$

וגם

$$\langle u - \langle u,v\rangle v, v\rangle = \langle u,v\rangle - \langle \langle u,v\rangle v, v\rangle = 0 \, .$$

אז, ממשפט פיתגורס

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \|u - \langle u,v\rangle v + \langle u,v\rangle v\|^2 \\ &= \|u - \langle u,v\rangle v\|^2 + \|\langle u,v\rangle v\|^2 \\ &> \|u - \langle u,v\rangle v\|^2\end{aligned}$$

כאשר האי־שוויון חזק כי $\langle u,v\rangle v \neq 0$ מההנחה $\langle u,v\rangle \neq 0$. לכן, עבור $a = \langle u,v\rangle$ **לא** מתקיים $\|u\| \leq \|u+av\|$.
בעת, אם v כללי, הוקטור $\frac{v}{\|v\|}$ הינו מאורך 1 ולכן יש $a' \in \mathbb{F}$ עבורו $\left\|u + a'\frac{v}{\|v\|}\right\| < \|u\|$. אז ניקח $a = \frac{a'}{\|v\|}$ ונקבל כי $\|u+av\| < \|u\|$.

כדי למצוא בסיסים אורתונורמליים ומשלימים ישרים, ניעזר בתהליך שלוקח בסיס כלשהו ומחזיר בסיס אורתונורמלי.

משפט 4.14 (גרם־שמידט). יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $B = (u_1, \ldots, u_n)$ בסיס של V. קיים בסיס אורתונורמלי $C = (v_1, \ldots, v_n)$ של V עבורו

$$\operatorname{Span}(u_1, \ldots, u_i) = \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_i)$$

לכל $i \in [n]$.

ניסוח זה של המשפט לא מתאר לנו איך למצוא את C, אבל ההוכחה שלו קונסטרוקטיבית ומתארת את האלגוריתם הבא.

1. עבור $i = 1$ ניקח $v_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$.
2. עבור כל i לאחר מכן, לפי הסדר, ניקח

$$w_i = u_i - \sum_{j \in [i-1]} \langle u_i, v_j\rangle$$

ואז $v_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$.

מסקנה 4.15. יהי $W \leq V$ תת־מרחב במרחב מכפלה פנימית. בדי למצוא אורתונורמלי של W ושל $W^\perp$ ניקח בסיס B_W של W ונשלים אותו לבסיס $B = B_W \cup B'_W$ של V. נבצע את תהליך גרם־שמידט על B ונקבל בסיס $C = C_W \cup C_W^\perp$ כך ש־$\operatorname{Span}(C_W) = \operatorname{Span}(B_W) = W$. כל הוקטורים ב־$C_W^\perp$ ניצבים ל־W כי C אורתונורמלי, ולכן $W' := \operatorname{Span}\left(C_W^\perp\right) \subseteq W^\perp$. במו כן,

$$\dim(W') = \dim(V) - \dim(W) = \dim\left(W^\perp\right)$$

כי $V = W \oplus W' = W \oplus W^\perp$, ולכן יש שוויון $W' = W^\perp$.

משפט 4.16 (מרחק של וקטור מתת־מרחב). יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהי $W \leq V$, תהי P_W ההטלה האורתוגונלית על W ויהי $v \in V$. מתקיים

$$d(v, W) = d(v, p_W(v)) \, .$$

תרגיל 6. יהי $V = \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(B^t A\right)$$

ויהי $W \leq V$ התת־מרחב של המטריצות הסימטריות.

1. מיצאו בסיס אורתונורמלי עבור W ועבור $W^\perp$.

2. הראו כי $P_W(A) = \frac{A+A^t}{2}$ בשתי דרכים שונות.

3. חשבו את המרחק של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ מ־W.

פתרון. 1. ניקח בסיס $B_W = (E_{1,1}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{2,2})$ של W ונשלים אותו לבסיס

$$B = (u_1,u_2,u_3,u_4) = (E_{1,1}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{2,2}, E_{1,2})$$

של V. נבצע את תהליך גרם־שמידט כדי לקבל בסיס אורתונורמלי (v_1,v_2,v_3,v_4) עבורו $W = \mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)$ וגם $W^\perp = \mathrm{Span}(v_4)$.

נחשב

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\|E_{1,1}\|}E_{1,1} = E_{1,1} \\
w_2 &= u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = E_{1,2}+E_{2,1} - 0 = E_{1,2}+E_{2,1} \\
v_2 &= \frac{1}{\|w_2\|}w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1}) \\
w_3 &= u_3 - \langle u_3,v_2\rangle v_2 - \langle u_3,v_1\rangle v_1 = u_3 = E_{2,2} \\
v_3 &= \frac{1}{\|w_3\|}w_3 = E_{2,2} \\
w_4 &= u_4 - \langle u_4,v_3\rangle v_3 - \langle u_4,v_2\rangle v_2 - \langle u_4,v_1\rangle v_1 \\
&= E_{1,2} - \left\langle E_{1,2}, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1})\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1})\right) \\
&= E_{1,2} - \frac{1}{2}(E_{1,2}+E_{2,1}) \\
&= \frac{1}{2}(E_{1,2}-E_{2,1}) \\
v_4 &= \frac{w_4}{\|w_4\|} = \frac{1}{\|E_{1,2}-E_{2,1}\|}(E_{1,2}-E_{2,1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}-E_{2,1})
\end{aligned}$$

ונקבל כי

$$(v_1,v_2,v_3) = \left(E_{1,1}, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1}), E_{2,2}\right)$$

בסיס אורתונורמלי של W וכי $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}-E_{2,1})$ בסיס אורתונורמלי של $W^\perp$. אז, $W^\perp$ מרחב המטריצות האנטיסימטריות.

2. בדרך אחת, זכור לנו מאלגברה א' כי

$$A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$$

כאשר $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ו־$\frac{A-A^t}{2}$ אנטי־סימטרית. אז $\frac{A+A^t}{2} \in W$ וכיוון ש־$W^\perp$ מרחב המטריצות האנטיסימטריות, נקבל גם $\frac{A-A^t}{2} \in W^\perp$. לכן $P_W(A) = \frac{A+A^t}{2}$.

אבל, במקרה הכללי, לא נדע מראש איך לכתוב וקטור $v \in V$ בתור סכום של וקטור ב־$W \le V$ ווקטור ב־$W^\perp$. כדי לחשב את ההטלה $P_W(A)$ נוכל לקחת בסיס אורתונורמלי של W ולהשתמש בנוסחא עבור ההטלה האורתוגונלית לפי בסיס בזה.

אכן,

$$\begin{aligned}
P_W(A) &= \sum_{i\in[3]} \langle A, v_i\rangle v_i \\
&= \langle A, E_{1,1}\rangle E_{1,1} + \left\langle A, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1})\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1}) + \langle A, E_{2,2}\rangle, E_{2,2} \\
&= a_{1,1}E_{1,1} + \frac{1}{2}(a_{1,2}+a_{2,1})(E_{1,2}+E_{2,1}) + a_{2,2}E_{2,2} \\
&= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} \\ \frac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{A+A^t}{2}
\end{aligned}$$

.

3. נכתוב את A בתור סכום של מטריצה סימטרית ואנטי־סימטרית. ראינו כי

$$A=\frac{A+A^{t}}{2}+\frac{A-A^{t}}{2}$$

כאשר $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ו־$\frac{A-A^t}{2}$ אנטי־סימטרית. אז $d_W\left(A\right)=\frac{A+A^t}{2}$ ונקבל כי המרחק של A מ־W הוא

$$d\left(A,\frac{A+A^{t}}{2}\right)=\left\Vert A-\frac{A+A^{t}}{2}\right\Vert .$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\left\Vert A-\frac{A+A^{t}}{2}\right\Vert & =\left\Vert \frac{A-A^{t}}{2}\right\Vert \\
 & =\frac{1}{2}\left\Vert \begin{pmatrix}0 & -1\\
 & 1 & 0
\end{pmatrix}\right\Vert \\
 & =\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\\
 & =\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

ולכן $d\left(A,W\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.