

# אלגברה ב' – גיליון תרגילי בית 9

## משפט ז'ורדן

תאריך הגשה: 8.1.2026

**תרגיל 1.** 1. מצאו את צורת ז'ורדן של  $J_n(\lambda)^{-1}$  עבור  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ועבור  $n \in \mathbb{N}_+$ .

2. תהי  $A \in M_n(\mathbb{C})$  הפיכה. מצאו את צורת ז'ורדן של  $A^{-1}$ .

3. מצאו תנאי הכרחי ומספיק על צורת ז'ורדן של  $A \in M_n(\mathbb{C})$  כך שיתקיים  $A \sim A^{-1}$ .

**תרגיל 2.** בשמורת הטבע ליד הטכניון סין יש היום 2 דרקונים, 600 פנדות ו-20000 במבוקים. כל שנה הדרקונים, הפנדות והבמבוקים מתרבים ומספרם גדל פי 2. לאחר מכן, כל פנדה אוכלת במבוק אחד וכל דרקון אוכל שתי פנדות. אז, רשות הטבע והגנים הסינית משחררת לטבע 4 דרקונים ו-10 פנדות, אם עדיין יש פנדות בשמורה. לבסוף, אם לא נשאר במבוק בסוף השנה, כל הפנדות מתות.

1. מיצאו מטריצה  $A \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$  וערכים  $d, p, b$  עבורם מספרי הדרקונים, הפנדות והבמבוקים בסוף השנה

$$\text{ה-}t \text{ הם מקדמים בוקטור } A^t \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ p \\ b \end{pmatrix} \text{ לכל } t \in \mathbb{N}.$$

2. נשיא הטכניון מתכנן לבקר בסין עוד 30 שנה. האם יהיו פנדות בשמורה בזמן הביקור שלו?

3. הטכניון החליט להעביר את הלימודים מסין למאדים עוד 230 שנה. האם ישארו עד אז פנדות בשמורת הטבע?

**תרגיל 3.** תהיינה

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ מטריצות ב-} \text{Mat}_3(\mathbb{R}), \text{ ויהי}$$

נגיד כי וקטור  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  הוא שלשה פיתגורית אם

$$f(v) := a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

וכי וקטור כזה הוא שלשה פיתגורית פרימיטיבית אם בנוסף המחלק המשותף המקסימלי של  $a, b, c$  שווה 1.

1. מתקיים כי אם  $v \in \mathbb{R}^3$  שלשה פיתגורית, גם  $A_i v$  שלשה פיתגורית, וגם כי אם  $v \in \mathbb{R}^3$  פרימיטיבית, גם  $A_i v$  פרימיטיבית. הראו זאת עבור  $i = 1$ .

**רמז:** עבור פרימיטיביות, היעזרו במטריצה  $A_1^{-1}$ .

2. הסיקו כי  $A_1^k v_0$  שלשה פיתגורית פרימיטיבית לכל  $k \in \mathbb{N}$ .

3. ידוע כי 1 ערך עצמי של  $A_1$  ושל  $A_3$ , וכי  $-1$  ערך עצמי של  $A_2$ .

הראו כי  $A_2, A_3$  לכסינות, ומיצאו מטריצה  $P \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$  הפיכה, ומטריצת ז'ורדן  $J \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$  כך שמתקיים  $PA_1P = J$ .

4. נסמן  $A := A_1$ . חשבו את  $A^k$  לכל  $k \in \mathbb{N}$ , ומצאו שלשה פיתגורית פרימיטיבית מהצורה  $\begin{pmatrix} a \\ 2025 \\ c \end{pmatrix}$ . האם

יש בקבוצה  $\{A^k v_0 \mid k \in \mathbb{N}\}$  וקטור מהצורה  $\begin{pmatrix} a \\ 2026 \\ c \end{pmatrix}$ ?