

# אלגברה ב' - גילון תרגילי בית 11

## tabniot bilinearot vohok haenatzia shel silbster

תאריך הגשה: 23.1.2026

**תרגיל 1.** תהי  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  סימטרית ויהי  $m$  סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים החשובים של  $A$ .

1. הראו כי יש תת-מרחב  $W \leq \mathbb{R}^n$  ממימד  $m$  שבו  $\langle Aw, w \rangle > 0$  לכל  $w \in W \setminus \{0\}$ .
2. יהיו  $W' \leq \mathbb{R}^n$  תת-מרחב נוסף שבו מתקיים  $\langle Aw, w \rangle > 0$  לכל  $w \in W' \setminus \{0\}$ . הראו כי  $m \leq \dim W'$ .

**תרגיל 2.** יהיו  $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$

1. מצאו מכפלה פנימית  $f$  על  $V$  כך ש-

$$B = (E_{1,1} + E_{1,2}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,1} + E_{2,2}, E_{2,2})$$

הוא בסיס אורתונורמלי לפי  $f$ .

2. תהי

$$g(A, B) = \text{tr}(AB)$$

tabniot bilinearit simetria ul V. Mizao basis C shel V metricha S uborom tabniot bilinearit simetria ul V. Mizao basis C shel V metricha S uborom  $[g]_C = S$ .

3. יהיו

$$\tilde{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

ותהי  $\tilde{f}$  tabniot bilinearit ubora I.

Mizao basis D shel V uboro  $\tilde{f}$ ,  $[g]_D$  metriicot alcsoniot.

**תרגיל 3.** יהיו

$$V = \left\{ p \in \mathbb{R}_{\leq n}[x] \mid \begin{array}{l} p(0) = p(1) \\ p'(0) = p'(1) \end{array} \right\}$$

ותהי

$$\rho: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x) g''(x) dx$$

1. הראו כי  $\rho$  tabniot bilinearit simetria ul V.

רמז: העזרו באינטגרציה בחלוקת.

2. עבור  $n=4$ , מצאו basis B shel V uboro  $[\rho]_B$  metriica mahzora.

$$\text{diag}(I_{n_+}, -I_{n_-}, 0_{n_0})$$