אלגברה ב' (01040168) – חורף 2026
תרגול 2 – סכומים ישרים והטלות
אלן סורני
הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־7 בדצמבר 2025

1 סכומים ישרים פנימיים

הגדרה 1.1 (סכום ישר פנימי). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $V_1, \ldots, V_k \leq V$ תת־מרחבים. נזכיר כי

$$V_1 + \ldots + V_k \coloneqq \{v_1 + \ldots + v_k \mid \forall i \in [k] \colon v_i \in V_i\}.$$

נגיד שהסכום הזה הוא סכום ישר אם כל $v \in V_1 + \ldots + V_k$ ניתן לכתיבה $v = v_1 + \ldots + v_k$ בצורה יחידה עבור $v_i \in V_i$. במקרה זה נסמן את הסכום $\bigoplus_{i\in[k]} V_i = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.

הערה 1.2. באופן שקול, הסכום $V_1 + \ldots + V_k$ ישר אם ורק אם $v_1 + \ldots + v_k = 0$ עבור $v_i \in V_i$ גורר $v_i = 0$ לכל $i \in [k]$.

טענה 1.3. הסכום $\sum_{i\in[k]} V_i \coloneqq V_1 + \ldots + V_k$ ישר אם ורק אם

$$V_i \cap \left(\sum_{j\in[k]\setminus i} V_j \right) = \{0\}$$

לכל $i \in [k]$.

הגדרה 1.4 (שרשור קבוצות סדורות). תהיינה

$$\begin{aligned} A_1 &= (v_{1,1}, \ldots, v_{1,\ell_1}) \\ A_2 &= (v_{2,1}, \ldots, v_{2,\ell_2}) \\ &\vdots \\ A_k &= (v_{k,1}, \ldots, v_{k,\ell_k}) \end{aligned}$$

קבוצות סדורות. נגדיר את השרשור שלהן

$$A_1 * \ldots * A_k \coloneqq (v_{1,1}, \ldots, v_{1,\ell_1}, v_{2,1}, \ldots, v_{2,\ell_2}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,\ell_k}).$$

זאת הקבוצה הסדורה שהיא שרשור איברי הקבוצות הסדורות $A_1, \ldots, A_k$ לפי הסדר.

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $V_1, V_2 \le V$ עבורם $V = V_1 \oplus V_2$. הראו כי $\dim_{\mathbb{F}}(V) = \dim_{\mathbb{F}}(V_1) + \dim_{\mathbb{F}}(V_2)$.
הסיקו כי אם $V_1, \ldots, V_k \le V$ מקיימים כי $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ אז $\dim_{\mathbb{F}}(V) = \sum_{i\in[k]} \dim_{\mathbb{F}}(V_i)$.

פתרון. לפי ההגדרה, אם $V = V_1 \oplus V_2$ אז $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
לכן, לפי משפט המימדים,

$$\dim_{\mathbb{F}}(V) = \dim_{\mathbb{F}}(V_1) + \dim_{\mathbb{F}}(V_2) - \dim_{\mathbb{F}}(V_1 \cap V_2) = \dim_{\mathbb{F}}(V_1) + \dim_{\mathbb{F}}(V_2) .$$

נוכיח את המקרה בו $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ באינדוקציה. הראנו את מקרה הבסיס $k = 2$. נניח כי הטענה מתקיימת עבור $k = m$ ונראה כי היא מתקיימת עבור $k = m+1$. יהיו $V_1, \ldots, V_{m+1} \le V$ עבורם $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_{m+1}$. אז

$$V = (V_1 \oplus \ldots \oplus V_m) \oplus V_{m+1} .$$

מהנחת האינדוקציה נקבל כי

$$\dim_{\mathbb{F}}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_m) = \sum_{i\in[m]} \dim_{\mathbb{F}}(V_i) ,$$

וממקרה הבסיס נקבל כי

$$\dim_{\mathbb{F}}(V) = \dim_{\mathbb{F}}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_m) + \dim_{\mathbb{F}}(V_{m+1}) .$$

נציב את השוויון הנ"ל עבור הגורם הראשון, ונקבל את הנדרש.

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהיו $V_1, \ldots, V_k$ תת־מרחבים של V. התנאים הבאים שקולים.

1. $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.
2. לכל בחירת בסיסים B_i של V_i הקבוצה הסדורה $B_1 * \ldots * B_k$ היא בסיס של V.
3. קיימים בסיסים B_i של V_i כך שהקבוצה הסדורה $B_1 * \ldots * B_k$ היא בסיס של V.
4. $V = \sum_{i\in[k]} V_i$ וגם
$$\dim V = \sum_{i\in[k]} \dim(V_i) .$$

פתרון. נראה גרירות בין התנאים השונים כדי להראות שהם שקולים זה לזה.

$1 \implies 2$: נניח כי $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, ויהיו $B_1, \ldots, B_k$ בסיסים של $V_1, \ldots, V_k$ בהתאמה. נרצה להראות כי $B := B_1 * \ldots * B_k$ הינו בסיס של V.

יהי $v \in V$. מההנחה, ניתן לכתוב

$$v = v_1 + \ldots + v_k$$

עבור $v_i \in V_i$ לכל $i \in [k]$. כיוון ש־B_i בסיס של V_i לכל $i \in [k]$, מתקיים $v_i \in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(B_i)$. לכן

$$\begin{aligned} v &= v_1 + \ldots + v_k \\ &\in \mathrm{Span}(B_1) + \ldots + \mathrm{Span}(B_k) \\ &\subseteq \mathrm{Span}(B) \end{aligned}$$

כלומר B פורש את V.

בעת,

$$\dim_{\mathbb{F}}(V) = \sum_{i\in[k]} \dim_{\mathbb{F}}(V_i) ,$$

וגם

$$|B| = \sum_{i\in[k]} |B_i| = \sum_{i\in[k]} \dim_{\mathbb{F}}(V_i) ,$$

לכן B קבוצה פורשת של V מגודל $\dim_{\mathbb{F}} V$, ולכן בסיס של V.

$2 \implies 3$: מיידי.

$4 \implies 3$: המימד של V שווה לגודל של בסיס של V, והגודל של B הוא בדיוק הסכום באגף ימין של 4. נסמן

$$B_i \coloneqq \left(v_1^{(i)}, \ldots, v_{m_i}^{(i)}\right)$$

לכל $i \in [k]$, ויהי $v \in V$. אז קיימים $\alpha_j^{(i)} \in \mathbb{F}$ עבורם ניתן לכתוב

$$v = \sum_{i\in[k]} \sum_{j\in[m_i]} \alpha_j^{(i)} v_j^{(i)}.$$

אבל, B_i בסיס של V_i ולכן

$$v_i \coloneqq \sum_{j\in[m_i]} \alpha_j^{(i)} v_j^{(i)} \in V_i$$

וקטור ב־V_i. קיבלנו כי v סכום של וקטורים $v_i \in V_i$, לכל $v \in V$, ולכן $V = \sum_{i\in[k]} V_i$.

$1 \implies 4$: נראה כי

$$V_i \cap \left(\sum_{j\in[k]\setminus i} V_j\right) = \{0\}$$

לכל $i \in [k]$, ונקבל את הנדרש לפי טענה 1.3.

יהי $i \in [k]$. לפי משפט המימדים, מתקיים

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}}(V) &= \dim_{\mathbb{F}}\left(\sum_{j\in[k]} V_j\right)\\ &= \dim_{\mathbb{F}}\left(V_i + \sum_{j\in[k]\setminus\{i\}} V_j\right)\\ &= \dim_{\mathbb{F}}(V_i) + \dim_{\mathbb{F}}\left(\sum_{j\in[k]\setminus\{i\}} V_j\right) - \dim_{\mathbb{F}}\left(V_i \cap \left(\sum_{j\in[k]\setminus i} V_j\right)\right).\end{aligned}$$

אבל, לפי ההנחה

$$\dim_{\mathbb{F}}(V) = \sum_{j\in[k]} \dim_{\mathbb{F}}(V_j).$$

לכן, אם נראה שמתקיים

$$\dim_{\mathbb{F}}\left(\sum_{j\in[k]\setminus i} V_j\right) = \sum_{j\in[k]\setminus\{i\}} \dim_{\mathbb{F}}(V_j)$$

נקבל את הנדרש.

ממשפט המימדים נקבל כי

$$\dim_{\mathbb{F}}\left(\sum_{j\in[k]\setminus i} V_j\right) \le \sum_{j\in[k]\setminus\{i\}} \dim_{\mathbb{F}}(V_j),$$

לכן נותר להראות שאגף שמאל אינו קטן ממש מאגף ימין. נניח בדרך השלילה שהוא כן. אז

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}}(V) &< \dim_{\mathbb{F}}(V_i) + \sum_{j\in[k]\setminus\{i\}} \dim_{\mathbb{F}}(V_j) - \dim_{\mathbb{F}}\left(V_i \cap \left(\sum_{j\in[k]\setminus i} V_j\right)\right)\\ &\le \sum_{j\in[k]} \dim_{\mathbb{F}} V_j\\ &= \dim_{\mathbb{F}}(V),\end{aligned}$$

בסתירה.

הגדרה 1.5 (משלים ישר). יהי V מרחב וקטורי ויהי $U \leq V$ תת־מרחב. משלים ישר W של U הוא תת־מרחב של V עבורו $V = U \oplus W$.

תרגיל 3. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $U \leq V$ תת־מרחב עם בסיס B. יהי C בסיס של V.

1. הראו שניתן להשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ־C.
2. הסיקו שקיים משלים ישר W של U עם בסיס של וקטורים מ־C.

פתרון. 1. נסמן $n := \dim_{\mathbb{F}}(V)$ ונוכיח את הטענה באינדוקציה על $m = n - |B|$.

עבור $m = 0$ מתקיים $|B| = n$ ולכן $U = V$. נניח שהטענה נכונה לכל $k < m$ ונוכיח אותה עבור m.

אם $C \subseteq U$, מתקיים

$$V = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(C) \subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(U) = U$$

ולכן $U = V$ בסתירה לכך שהמימדים שונים. לכן, קיים $c \in C \setminus U$. אז $B * (c)$ קבוצה בלתי־תלויה לינארית, כי c אינו צירוף לינארי של הוקטורים הקודמים. נגדיר $U' = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(B * (c))$. אז

$$n - \dim(U') = n - |B| - 1 = m - 1 < m$$

ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה ולקבל שניתן להשלים את $B * (c)$ לבסיס $(B * (c)) * (c_2, \ldots, c_m)$ של V, כאשר $c_i \in C$. אז $c, c_2, \ldots, c_m \in C$ משלימים את B לבסיס של V.

2. בסימונים של הסעיף הקודם, $B * (c, \ldots, c_m)$ בסיס של V. נסמן $D = (c, c_2, \ldots, c_m)$ וגם $W = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(D)$. אז $B * D$ בסיס של V ולכן

$$V = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(B) \oplus \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(D) = U \oplus W,$$

כנדרש.

תרגיל 4. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ ותהיינה

$$B = \left(1 + x, x + x^2\right)$$
$$C = \left(1, x, x^2, x^3\right)$$

קבוצות סדורות של וקטורים מ־V. יהי $U = \mathrm{Span}(B)$.

1. מיצאו משלים ישר W של U ובסיס עבור W שמורכב מוקטורים ב־C.
2. האם W שמצאתם יחיד? הוכיחו או הפריכו.

פתרון. 1. נשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ־C. נוסיף את $1 \notin U$ בכדי לקבל $B' = \left(1 + x, x + x^2, 1\right)$ ואז את $x^3 \notin \mathrm{Span}(B')$ בכדי לקבל בסיס $B'' = \left(1 + x, x + x^2, 1, x^3\right)$ של V.

נסמן $D = \left(1, x^3\right)$ וניקח $W = \mathrm{Span}(D)$. אז $B'' = B * D$ בסיס, ולכן $V = U \oplus W$, כנדרש.

2. לא. למשל, יכולנו לקחת $B' = \left(1 + x, x + x^2, x^2\right)$ ואז $B'' = \left(1 + x, x + x^2, x^2, x^3\right)$. במקרה זה היינו מקבלות משלים ישר $\mathrm{Span}\left(x^2, x^3\right)$, ששונה מ־$W$.

2 סכומים ישרים חיצוניים

לפעמים נרצה לדבר על סכומים ישרים של מרחבים וקטורים שאינם תת־מרחבים של אותו מרחב וקטורי. לכן נגדיר סכום ישר חיצוני. נסמן אותו באותו אופן, אך הסכום הישר החיצוני של תת־מרחבים $V_1, \ldots, V_k \leq V$ איזומורפי לסכום הישר הפנימי שלהם.

הגדרה 2.1 (סכום ישר חיצוני). יהיו $V_1, \ldots, V_k$ מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. נגדיר את הסכום הישר החיצוני של $V_1, \ldots, V_k$ בתור המרחב הוקטורי

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_k := \{(v_1, \ldots, v_k) \mid v_i \in V_i\}$$

עם חיבור וכפל בסקלר איבר־איבר.

הערה 2.2. ניתן לחשוב על סכום ישר חיצוני בתור סכום ישר פנימי. אם $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ סכום ישר חיצוני, נחשוב על התת־מרחב

$$\tilde{V}_i \coloneqq \left\{ (v_1, \ldots, v_k) \;\middle|\; {}^{v_j \in V_j}_{\forall j \neq i : v_j = 0} \right\}$$

בתור עותק של V_i בתוך V, וניתן לכתוב את V בתור הסכום הישר הפנימי

$$V = \tilde{V}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{V}_k.$$

ההעתקה $i_j \colon V_j \to \tilde{V}_j$ ששולחת וקטור v לוקטור $(0, \ldots, 0, v, 0, \ldots, 0)$ נקראת השיבון של V_j בסכום הישר V והיא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 2.3 (שרשור בסיסים עבור סכום ישר חיצוני). יהיו $V_1, \ldots, V_k$ מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$, עם בסיסים $B_1, \ldots, B_k$ בהתאמה.
כאשר נתייחס לשרשור הבסיסים $B_1 * \ldots * B_k$ כבסיס של הסכום החיצוני $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, נתכוון לביטוי

$$B_1 * \ldots * B_k \coloneqq i_1(B_1) * \ldots * i_k(B_k)$$

כאשר הביטוי בצד ימין הוא שרשור הבסיסים שהגדרנו בעבר.

הגדרה 2.4 (סכום ישר של העתקות לינאריות). יהיו $V_1, \ldots, V_k, W_1, \ldots, W_k$ מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $T_i \in \operatorname{Hom}\mathbb{F}(V_i, W_i)$ לכל $i \in [k]$.
הסכום הישר של ההעתקות T_i הוא

$$\begin{aligned} T_1 \oplus \ldots \oplus T_k \colon V_1 \oplus \ldots \oplus V_k &\to W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \\ (v_1, \ldots, v_k) &\mapsto (T_1(v_1), \ldots, T_k(v_k)) \end{aligned}.$$