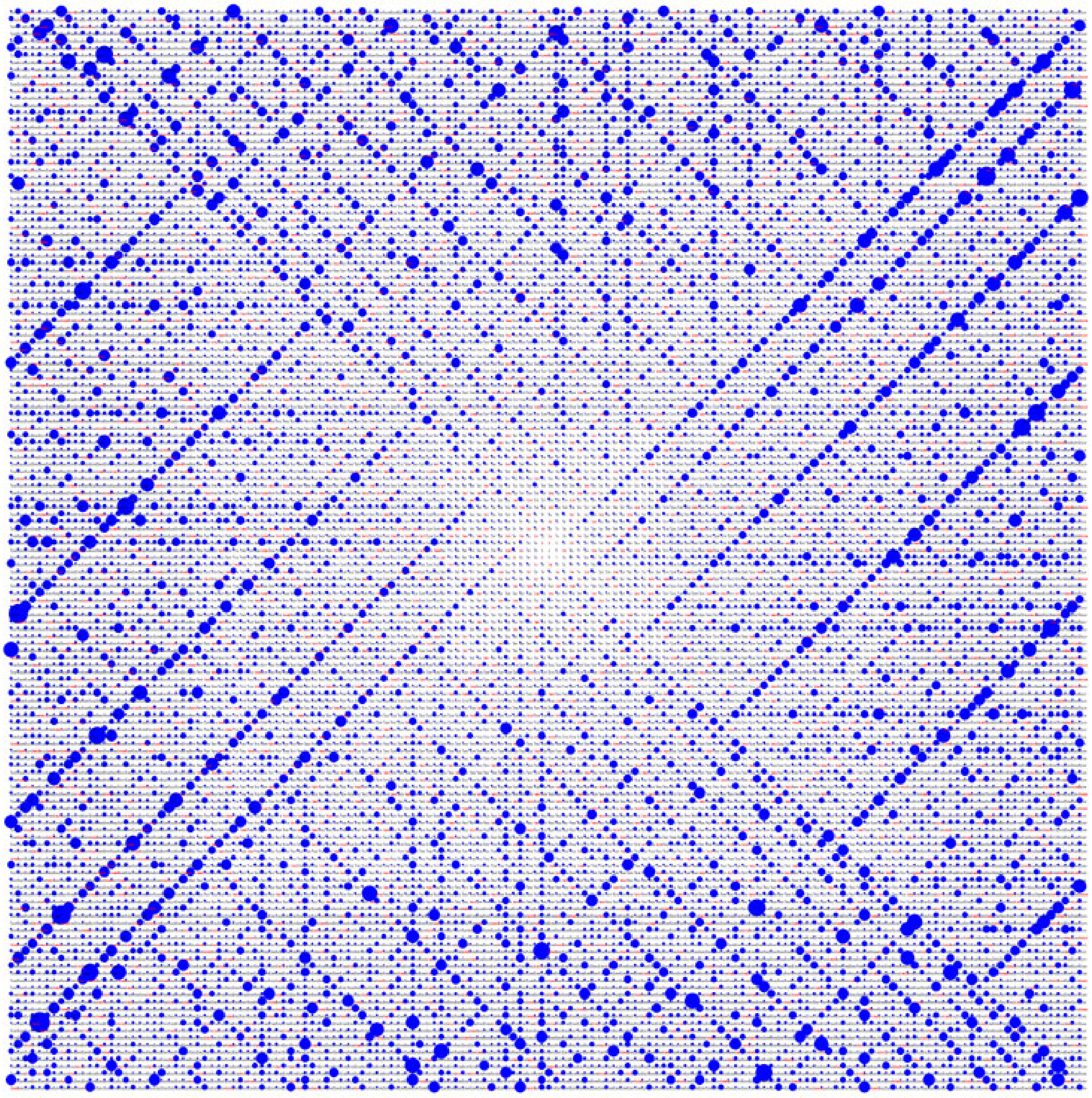

מבוא לתורת המספרים (104157)
אביב 2024
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־23 ביוני 2024

תוכן העניינים

סימונים

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ אוסף המספרים הטבעיים.
- $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ אוסף המספרים הטבעיים החיוביים (כלומר, לא כולל אפס).
- $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
- $\lfloor x \rfloor$ המספר הכי גדול שקטן או שווה ל-$x \in \mathbb{R}$.
- $\lceil x \rceil$ המספר הכי קטן שגדול או שווה ל-x.
-

$$\gcd(a_1, \ldots, a_n)$$
$$\operatorname{lcm}(a_1, \ldots, a_n)$$

בהתאמה, המחלק המשותף הגדול ביותר של המספרים $a_1, \ldots, a_n$, והכפולה המשותפת המינימלית שלהם.

פרק 1

תרגול 3 - שימושים בפריקות יחידה

1.1 תזכורת

הגדרה 1.1.1. יהי $n \in \mathbb{N}_+$. נגדיר

1. $\nu(n) := \sum_{d|n} 1$. זה מספר המחלקים של n.
2. $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$. זה סכום המחלקים של n.
3. $$\varphi(n) := \sum_{\substack{\gcd(d,n)=1 \\ 1<d<n}} 1.$$
זה מספר המספרים הטבעיים שקטנים מ-n וזרים לו. זאת נקראת **פונקציית אוילר** (**Euer totient function**).
4. $\pi(n)$ מספר האיברים הראשוניים הקטנים או שווים ל-n. זאת נקראת **פונקציית המספרים הראשוניים** (**prime-counting function**).
5. $$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\ell} & \forall p \text{ prime} : p^2 \nmid n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
כאשר ℓ מספר הראשוניים שמחלקים את n. זאת נקראת **פונקציית מביוס** (**Möbius function**).

1.2 תרגילים

תרגיל 1.1 (פרק 2, תרגיל 7). הסיקו מתרגיל 6 כי
$$\operatorname{ord}_p(n!) \leq \frac{n}{p-1}$$
וכי
$$\sqrt[n]{n!} \leq \prod_{p|n!} p^{1/(p-1)}.$$

תרגיל 1.2 (פרק 2, תרגיל 8). השתמשו בתוצאת התרגיל הקודם כדי להראות שיש אינסוף ראשוניים.
רמז: הראו קודם שמתקיים $(n!)^2 \geq n^n$ לכל $n \in \mathbb{N}_+$.

תרגיל 1.3 (פרק 2, תרגיל 15). הראו כי

(א) לכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים
$$\sum_{d|n} \mu(n/d)\,\sigma(d) = n.$$

(ב) לכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים
$$\sum_{d|n} \mu(n/d)\,\sigma(d) = n.$$

תרגיל 1.4 (פרק 2, תרגיל 18). הראו כי

$$\forall m,n\in\mathbb{N}_+:\varphi\left(n\right)\varphi\left(m\right)=\varphi\left(\gcd\left(n,m\right)\right)\varphi\left(\operatorname{lcm}\left(n,m\right)\right).$$

תרגיל 1.5 (פרק 2, תרגיל 19). הראו כי

$$\forall m,n\in\mathbb{N}_+:\varphi\left(mn\right)\varphi\left(\gcd\left(m,n\right)\right)=\gcd\left(m,n\right)\varphi\left(m\right)\varphi\left(n\right).$$

תרגיל 1.6 (פרק 2, תרגיל 20). הראו כי

$$\prod_{d|n}d=n^{\nu(n)/2}.$$

תרגיל 1.7 (פרק 2, תרגיל 23). יהי $f\in\mathbb{Z}\left[x\right]$ ויהי $\psi\left(n\right)$ מספר הערכים $f\left(j\right)$ עבור $j\in\left[n\right]$ כך ש-$\gcd\left(f\left(j\right),n\right)=1$.

(א) הראו כי $\psi\left(n\right)$ פונקציה כפלית וכי $\psi\left(p^t\right)=p^{t-1}\psi\left(p\right)$ לכל ראשוני $p\in\mathbb{N}_+$.

(ב) הסיקו כי

$$\psi\left(n\right)=n\prod_{p|n}\frac{\psi\left(p\right)}{p}.$$