

**סיכומי הרצאות ביריעות דיפרנציאביליות**  
חורף 2018, השכניון

**הרצאותיו של מיכאל חנבסקי**  
סוכמו על ידי אלעד צורני



מפת העולם. על ידי ג'ורדן ואן שגן.

עדכון אחרון 25 בנובמבר 2018

# תוכן העניינים

iii	הקדמה	
iii	הבהרה	
iii	ספרות מומלצת	
1	תוכן הקורס	0.1
2	דרישות קדם	0.2
2	תרגילי בית	0.3
2	ציון	0.4
3	1 מבוא	
3	הגדרות	1.1
5	מבנה חלק	1.2
9	תתייריעות	1.3
11	נגזרות	1.4
14	נגזרות כיווניות	1.4.1
14	דיפרנציאלים	1.4.2
15	שיכונים	1.5
17	ערכים קריטיים ורגולריים	1.5.1
22	טרנסוורסליות	1.6
22	יריעות עם שפה	1.7
23	הומוטופיה	1.8
23	הגדרות	1.9
26	2 פיצול היחידה	
27	מטריקה רימנית	2.1
28	יריעות מרוכבות	2.2
29	3 תבניות פולינאריות	
30	מכפלות חיצוניות	3.1
31	תבניות דיפרנציאליות	3.2
31	תיאור מקומי של תבניות דיפרנציאליות	3.2.1

# הקדמה

## הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות. להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל [tzorani.elad@gmail.com](mailto:tzorani.elad@gmail.com). אלעד צורני.

## ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

**M. Spivak:** Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus

**J. Milnor:** Topology from the differentiable viewpoint

**J. Lee:** Introduction to smooth manifolds

**L. Conlon:** Differentiable manifolds: a first course

**V. Guillemin, A. Pollack:** Differential topology



# הקדמה

## 0.1 תוכן הקורס

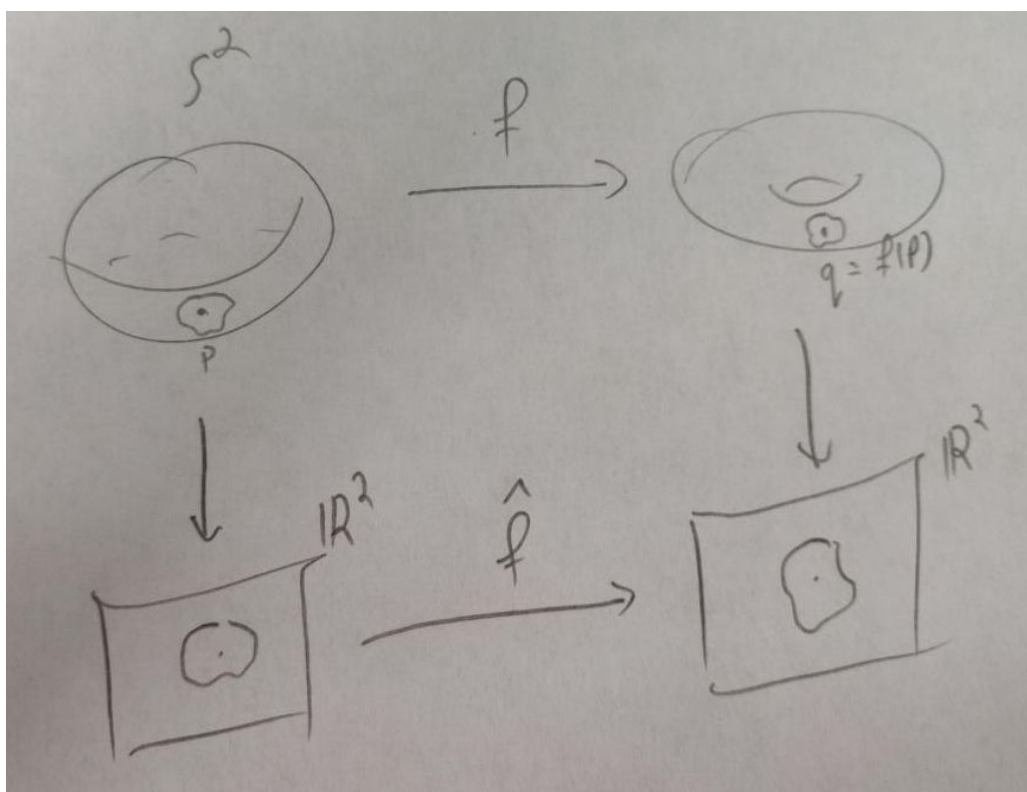
**יריעה** היא מרחב טופולוגי שלוקלית נראה כמו קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$ . דוגמאות ליריעות הן עקומות ומשטחים.

**דוגמה 0.1.1.**  $S^2$  הינה יריעה. סביבה של נקודה נראית כמו קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$ .

**דוגמה 0.1.2.**  $\mathbb{T}^2$  הינה יריעה. סביבה של נקודה גם כאן נראית כמו קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$ .

נסתכל על העתקה  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . נוכל לזהות את ההעתקה  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  באופן לוקלי עם העתקה  $\hat{f}$  שמעתיקה קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות. ראו איור 2.

איור 2: העתקה לוקלית.



בקורס נעסוק בהכללת משפטים מאנליזה ב- $\mathbb{R}^n$  למשפטים על יריעות חלקות. רוב המשפטים ניתנים להכללה ליריעות  $\mathcal{C}^k$ . למשפטים מהקורס שימושים רבים בגיאומטריה, טופולוגיה, פיזיקה, אנליזה, קומבינטוריקה ואלגברה. כדי שהתיאוריה הקשורה לקורס לא תישאר באוויר נראה חלק גדול מהקורס שימושים, בעיקר בתחום של טופולוגיה דיפרנציאלית. קיימים מספר משפטים מוכרים מאנליזה.

**דוגמאות.** 1. נוסחאת ניוטון-לייבניץ:

$$\int_{\partial[a,b]} F = \int_{[a,b]} F' dx$$

2. נוסחאת גרין:

$$\int_{\partial U} f dx + g dy = \iint_U \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

3. משפט גאוס:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \iint_{\partial\Omega} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, ds$$

4. משפט סטוקס:

$$\iint_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial\Sigma} \langle \vec{F}, \vec{\gamma} \rangle \, dt$$

כולם נובעים ממשפט סטוקס כללי יותר אותו נוכיח בקורס.

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

## 0.2 דרישות קדם

נשתמש בקורס רבות במשפט הפונקציה הסתמונה ובמשפט הפונקציה ההפוכה מ- $\mathbb{R}^n$ . רצוי להכיר את ניסוחיהם, את המשמעויות הגיאומטריות ומספר שימושים שלהם. נשתמש בהחלפות קואורדינטות מאלגברה לינאריות, במשפט פוביני, מטריצות יעקוביאן, במטריצות יעקוביאן, בכלל השרשרת ובמשפט קיום ויחידות של מד"ר.

## 0.3 תרגילי בית

בקורס יפורסמו ארבעה תרגילי בית רשמיים, רובם ברמת הבנת ההגדרות. אין חובת הגשה אך מומלץ מאוד לפתור את התרגילים כדי לוודא שאינכם הולכים לאיבוד.

## 0.4 ציון

הציון הסופי כולו יסתמך על הגשת עבודת בית.

# פרק 1

## מבוא

### 1.1 הגדרות

**הגדרה 1.1.1.** מרחב טופולוגי  $M$  נקרא **יריעה טופולוגית** (topological manifold) אם לכל  $x \in M$  יש סביבה  $U$  שהומאומורפית לקבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$  עבור  $n$  כלשהו.

**הערה 1.1.2.** לעתים יריעה טופולוגית כפי שהגדרנו אותה נקראת **מרחב אוקלידית לוקלית** (locally Euclidean space).

**עובדה 1.1.3.** עבור יריעה טופולוגית,  $n$  קבוע מקומית. אם  $M$  קשירה,  $n$  קבוע.

**הגדרה 1.1.4.** עבור יריעה  $M$  עם  $n$  קבוע, נגיד ש- $n$  הוא **המימד** של היריעה.

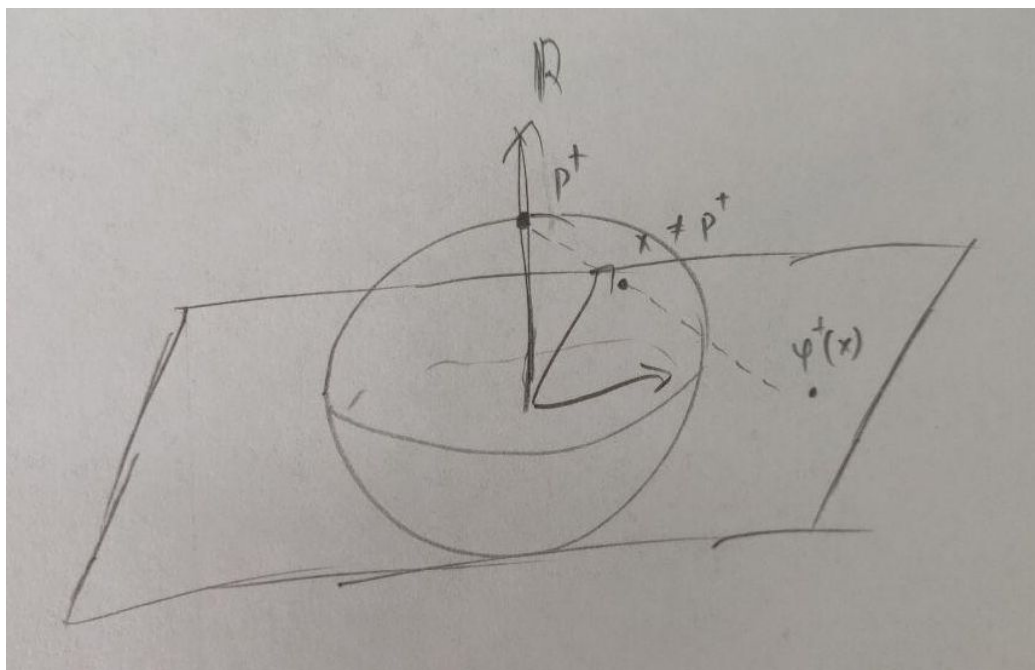
**תרגיל 1.** מצאו אילו אותיות מבין MANIFOLD הן יריעות. מצאו אילו הומאומורפיות.

**דוגמאות.** 1. עקומות

2. משטח ב- $\mathbb{R}^3$

3.  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ : נסמן  $U^+ = S^n \setminus \{p^+\}$  נתאים לנקודה  $x \in U^+$  על הספירה את הנקודה  $\varphi^+(x) \in \mathbb{R}^n$  המתקבלת על ידי הטלה סטרוגרפית. ראו איור 1.1. ניתן לראות כי  $\varphi^+$  הומאומורפיזם. אפשר באותו אופן להגדיר  $\varphi^- : U^- \rightarrow \mathbb{R}^n$ . לכל נקודה על  $S^n$  יש

איור 1.1: הטלה סטרוגרפית.



סביבה הומאומורפית לקבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$  המתקבלת מהמקור דרך  $\varphi^\pm$  של סביבה בתמונה, לכן  $S^n$  יריעה.



**תרגיל 2.** אם  $M_1, M_2$  יריעות טופולוגיות אז  $M_1 \times M_2$  עם טופולוגיית המכפלה הינה יריעה. אם המימד של  $M_1, M_2$  אחיד מתקיים גם

$$\dim(M_1 \times M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$$

**דוגמה 1.1.5.** טורוס  $n$ -מימדי הוא  $T^n := \prod_{k=1}^n S^1$ . ניתן להגדיר גם  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n / \sim$  כאשר  $x \sim y$  אם  $x - y \in \mathbb{Z}^n$ . נסמן  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$  את ההטלה הטבעית (כלומר  $\pi(x) = [x] = x + \mathbb{Z}^n$ ) ואז  $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq T^n$  פתוחה אם  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$ .

**תרגיל 3.** הראו כי  $T^n$  הומאומורפי ל- $T^n$ .

**דוגמה 1.1.6.** נגדיר מרחב פרויקטיבי הוא בשתי דרכים.

(i) נסתכל על ישרים דרך  $\vec{0}$  ב- $\mathbb{R}^{n-1}$ . עבור  $\ell$  ישר דרך 0 נסמן  $\mathcal{U}_\varepsilon(\ell)$  את אוסף הישרים  $\ell'$  דרך  $\vec{0}$  כך שמתקיים  $\deg \ell, \ell' < \varepsilon$ . אז קבוצה פתוחה היא איחוד כלשהו של  $\mathcal{U}_{\varepsilon_i}(\ell_i)$ .

(ii) נגדיר גם  $\mathbb{RP}^n = S^n / \pm 1$  כלומר  $x \sim y$  אם  $x = \pm y$ . נסמן  $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  את ההטלה  $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  ואז  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{RP}^n$  פתוחה אם  $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq S^n$  פתוחה ב- $S^n$ .

**תרגיל 4.** הראו כי  $\mathbb{RP}^n$  הומאומורפי ל- $\mathbb{RP}^n$ .

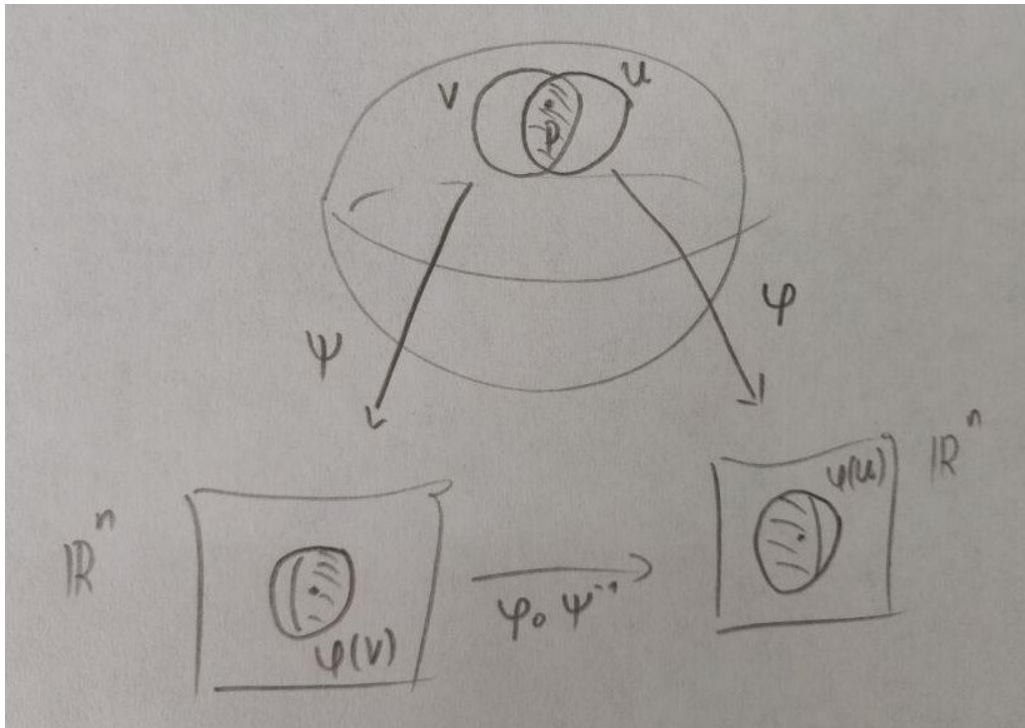
**דוגמה 1.1.7.**  $\mathbb{RP}^1$  הומאומורפי ל- $S^1$ . לאחר הזיהוי מתקבל קטע המזוהה בקצותיו, וזה הומאומורפי למעגל.

**הגדרה 1.1.8.** תהי  $M$  יריעה טופולוגית. מפה  $\text{map} / \text{coordinate chart}$  היא זוג  $(\mathcal{U}, \varphi)$  כאשר  $\mathcal{U} \subseteq M$  קבוצה פתוחה ו- $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  הומאומורפיזם, ו- $\varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה.

**דוגמה 1.1.9.** ב- $S^n$  הגדרנו שתי מפות  $(\mathcal{U}^\pm, \varphi^\pm)$ .

**הגדרה 1.1.10.** תהיינה  $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$  מפות עבור יריעה  $M$ . אז  $\psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$   $\psi \circ \varphi^{-1}$  הומאומורפיזם שנקרא **פונקציית מעבר** או **transition map** **פונקציית החלפת קואורדינטות**. ראו איור 1.2

איור 1.2: פונקציית מעבר.



**הגדרה 1.1.11.** תהי העתקה  $f: M \rightarrow N$  בין יריעות, ונניח בה"כ  $f(\mathcal{U}_1) \subseteq \mathcal{V}_1$ . אז  $\hat{f}_1: \varphi_1(\mathcal{U}_1) \rightarrow \psi_1(\mathcal{V}_1)$  **הצגה מקומית של  $f$**  (ביחס למפות  $(\varphi_1, \mathcal{U}_1)$  ו- $(\psi_1, \mathcal{V}_1)$ ). מתקיים  $\hat{f}_1 = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(\mathcal{U}_1)}$ . ראו איור 1.3.

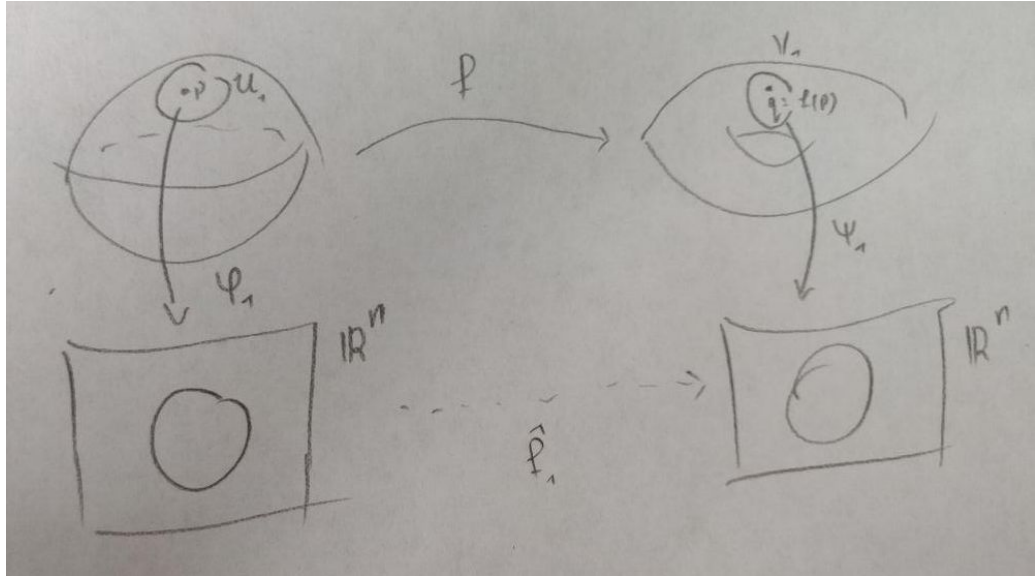
**הגדרה 1.1.12.** תהיינה  $\hat{f}_1, \hat{f}_2$  שתי הצגות מקומיות של  $f: M \rightarrow N$ . אז

$$\hat{f}_2|_{\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \hat{f}_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$$

כאן  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  פונקציית מעבר מ- $(\mathcal{U}_2, \psi_2)$  ל- $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$  ו- $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$  פונקציית מעבר מ- $(\mathcal{V}, \psi_1)$  ל- $(\mathcal{V}, \psi_2)$ . ראו איור 1.4.



איור 1.3: הצגה מקומית.



נזכיר כי  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  עבור  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  נקראת חלקה (smooth) אם לכל  $x \in \mathcal{U}$  קיימות ורציפות נגזרות חלקיות של  $f$  מסדר כלשהו.

**סימון 1.1.13.** עבור  $f$  חלקה נסמן  $f \in \mathcal{C}^\infty$ .

**הגדרה 1.1.14.** עבור  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$  דיפאומורפיזם אם  $f$  הפיכה, ו- $f^{-1}$  חלקות.

**תרגיל 5.** אם  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$  חלקה וגם  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$  אז  $m = n$ .

**דוגמאות.**

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \text{ איננה חלקה.}$$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases} \text{ חלקה (אך איננה אנליטית).}$$

נגדיר  $\mathcal{U} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $\mathcal{W} = \mathbb{R}$  אז  $\tan: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$  דיפאומורפיזם.

**תרגיל 6.** 1. אם  $F$  דיפאוי גם  $F^{-1}$  דיפאוי.

2. הרכבה של דיפאוי היא דיפאוי.

3. אם  $F_1: \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{W}_1$  ו- $F_2: \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{W}_2$  דיפאוי אז  $F_1 \times F_2: \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$  דיפאוי.

4. אם  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  ו- $-\infty \leq c \leq d \leq \infty$  אז  $(a, b)$  דיפאומורפי ל- $(c, d)$ .

5. הקבוצות במישור מאיור 1.5 דיפאומורפיות.

## 1.2 מבנה חלק

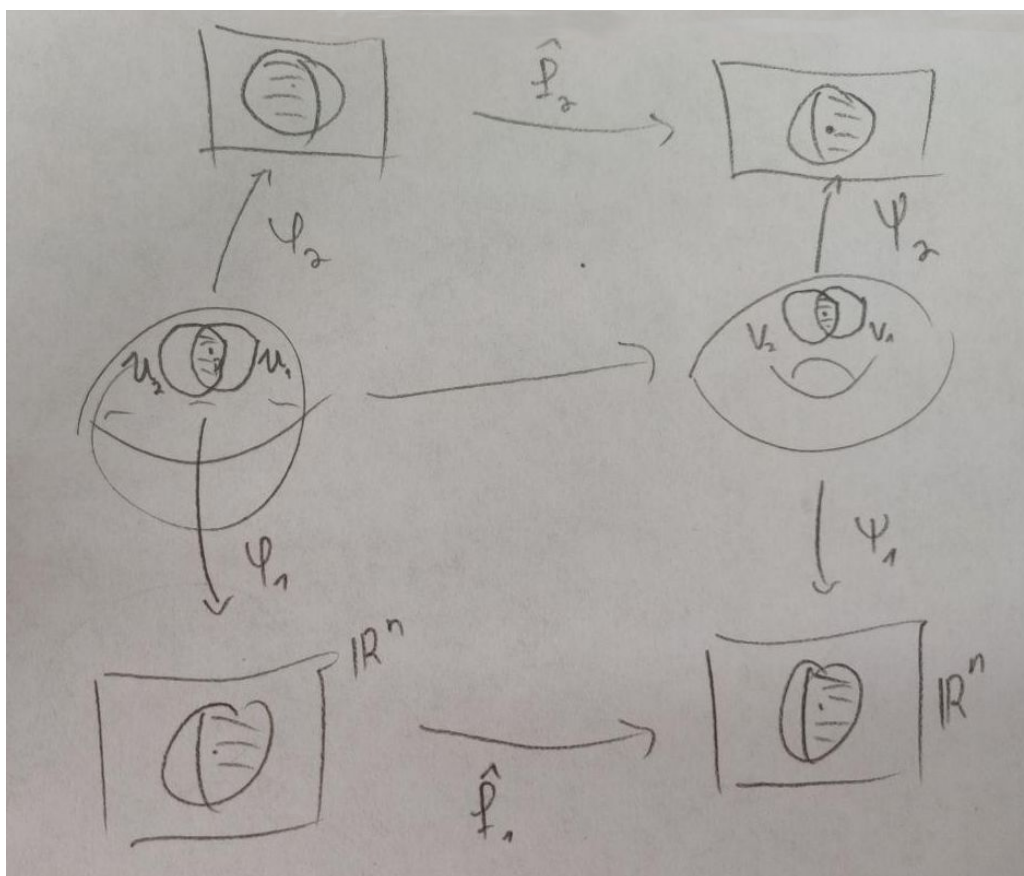
נרצה להגדיר מתי העתקה  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  הינה גזירה/חלקה בנקודה  $p$ . ננסה להגדיר גזירות של העתקה  $f$  כנ"ל.

**"הגדרה 1":**  $f$  גזירה ב- $p$  אם כל הצגה מקומית  $\hat{f}$  גזירה ב- $\varphi(p)$ . הגדרה זאת איננה טובה כי בהינתן שתי הצגות מקומיות סביב  $p$  ופונקציית מעבר  $\psi, \hat{f}_1 = \hat{f}_2 \circ \psi$  איננה בהכרח גזירה.

**"הגדרה 2":** נניח כי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה. נאמר כי  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה אם ניתן להרחיב את  $f$  לפונקציה חלקה  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  כאשר  $\mathcal{U}$  סביבה פתוחה של  $M$ .

גם בהגדרה זו יש בעיות, כפי שנראה מיד בדוגמה.

איור 1.4: פונקציית מעבר בין יריעות.



**דוגמה 1.2.1.** ניקח  $M = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ . נסתכל על שלוש מפות  $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ ,  $i \in [3]$  כאשר  $\mathcal{U}_i = \mathbb{R}$  והמפות מוגדרות על ידי

$$\varphi_1(x) = x$$

$$\varphi_2(x) = x^3$$

$$\varphi_3(x) = \sqrt[3]{x}$$

תהי  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  אז  $\hat{f}_1 = f$  ונקבל כי מה"הגדרה"  $\hat{f}_1$  חלקה אם ורק אם  $f$  חלקה במובן של אינפי. נקבל

$$\hat{f}_2(u) = f \circ \varphi_2^{-1}(u) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot u^{\frac{i}{3}}$$

לכן תנאי הכרחי עבור חלקות של  $\hat{f}_2$  הוא ש- $a_i = 0$  לכל  $i \not\equiv 0 \pmod{3}$ . נקבל באותו אופן

$$\hat{f}_3(w) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i w^{3i}$$

ונקבל פחות הצגות חלקות מאשר בהצגה המקומית הראשונה.

**דוגמה 1.2.2.** נגדיר  $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$  ו- $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$ . נגדיר העתקה  $P: M_2 \rightarrow M_1$  ע"י  $(x, |x|) \mapsto (x, 0)$ . זהו הומיאומורפיזם.

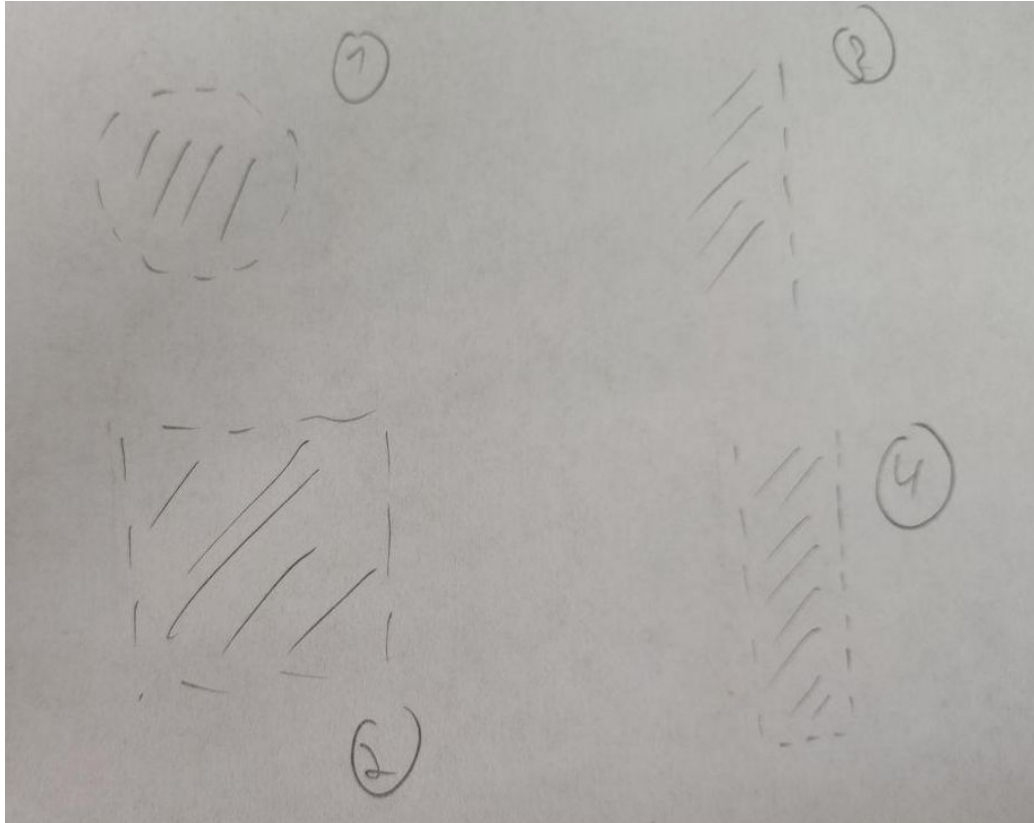
**תרגיל 7.**  $f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  ע"י  $(x, 0) \mapsto \varphi(x)$  חלקה אם ורק אם  $\varphi$  חלקה כפונקציה  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**תרגיל 8.**  $f_2(x, |x|) = |x|$  פונקצייה חלקה  $M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . רמז: ניתן להרחיב אותה לפונקציה  $f_2(x, y) = y$  כאשר  $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

כאשר נפעיל את הזהוי בין  $M_1$  ל- $M_2$  על ידי  $P$  נקבל כי  $f_2$  פונקצייה חלקה! לכן ה"הגדרה" תלויה בשיכון  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  ולא רק ביריעה עצמה.

נתקלנו בבעייה. המבנה של יריעה טופולוגית הינו חלש מידי ונראה שאין סיכוי להגדיר עליו גזורת. איך נעקוף זאת? נרצה לדרוש שההעתקות המעבר יהיו חלקות, ואז  $\hat{f}_1 = \psi \circ \hat{f}_2 \circ \varphi$  תהיה גזירה אם ורק אם  $\hat{f}_2$  גזירה, עבור  $\psi, \varphi$  העתקות מעבר.

איור 1.5: קבוצות דיפאומורפיות במישור.



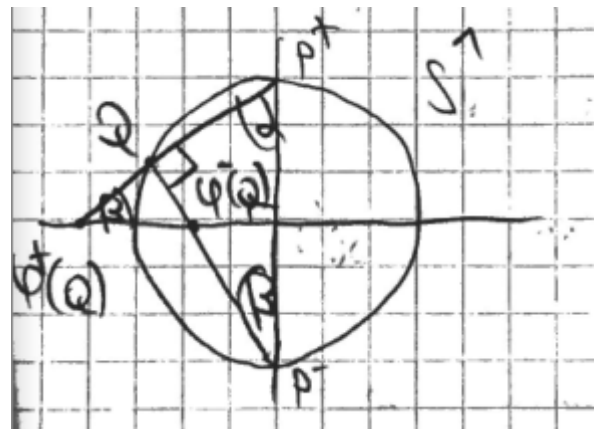
**1.2.3 הגדרה.** תהי  $M$  יריעה. מפות  $(\mathcal{U}, \varphi)$ ,  $(\mathcal{V}, \psi)$  יקראו **מתואמות** (compatible) אם  $\varphi \circ \psi^{-1}$ ,  $\psi \circ \varphi^{-1}$  חלקות (כלומר, דיפאומורפיזמים).  
**תרגיל 9.** תהי  $f: \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . אז  $f \circ \varphi^{-1}$  חלקה אם ורק אם  $f \circ \psi^{-1}$  חלקה, כאשר  $\varphi, \psi$  מתואמות.

**1.2.4 הגדרה.** תהי  $M$  יריעה. **אטלס חלק** (smooth atlas /  $\mathcal{C}^\infty$  atlas) על  $M$  הוא משפחת מפות מתואמות  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  כך שמתקיים  $M = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$ .

**1.2.5 דוגמה.** ניקח  $M = S^1$  ואז  $\{(\mathcal{U}^\pm, \varphi^\pm)\}$  שהגדרנו קודם הינו אטלס.

**1.2.6 טענה.** האטלס הנ"ל הינו חלק.

איור 1.6: the stereographic map.



הוכחה. מתקיים

$$\mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^- = S^1 \setminus \{p^+, p^-\}$$

כמובן  $\varphi^\pm(\mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^-) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . ראו איור 1.6. מתקיים  $\varphi^-(Q) = \tan(\beta)$  וגם  $\varphi^+(Q) = \frac{1}{\tan(\beta)}$ . לכן אם  $x = \varphi^+(Q)$  נקבל  $\varphi^- \circ (\varphi^+)^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ .  
 כנ"ל לפונקציית המעבר לכיוון השני, לכן האטלס חלק. ■

**הגדרה 1.2.7.** שני אטלסים חלקים נקראים **שקולים** אם האיחוד שלהם הוא אטלס חלק.

**תרגיל 10.** שקילות זאת הינה אכן יחס שקילות בין אטלסים חלקים על  $M$ .

**הגדרה 1.2.8.** **מבנה חלק** על  $M$  זו מחלקת שקילות של אטלסים.

**דוגמה 1.2.9.** ניקח  $M = \mathbb{R}$  עם  $\mathcal{U}_i = \mathbb{R}$  וההעתקות  $\varphi_1 = \text{id}, \varphi_2 = x^2, \varphi_3 = \sqrt[3]{x}$ . אז שלושת האטלסים  $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$  אטלסים לא מתואמים בזוגות ולכן מייצגים שלושה מבנים חלקים שונים.

**הגדרה 1.2.10.** תהי  $(M, \mathcal{A})$  יריעה עם אטלס חלק. נגדיר  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  **גזירה** בנקודה  $p \in M$  אם  $\hat{f}: \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ב- $\varphi(p)$  עבור  $(\mathcal{U}, \varphi)$  מפה סביבה  $p$  מהאטלס  $\mathcal{A}$ .

**תרגיל 11.** בדקו כי הנ"ל מוגדר היטב.

**הגדרה 1.2.11.** **יריעה חלקה** היא יריעה טופולוגית  $M$  עם בחירה של אטלס חלק על  $M$ .

**טענה 1.2.12.** בכל מחלקת שקילות של אטלסים קיים אטלס מקסימלי.

**מסקנה 1.2.13.** בחירת מבנה חלק שקולה לבחירת אטלס חלק מקסימלי על  $M$ .

**הגדרה 1.2.14.** תהיינה  $(M, \mathcal{A}_M), (N, \mathcal{A}_N)$  שתי יריעות חלקות ותהי  $f: M \rightarrow N$ . אז  $f$  **תיקרא גזירה** ב- $p \in M$  אם  $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  גזירה ב- $\varphi(p)$ , ההצגה המקומית ביחס למפות  $\mathcal{U} \in \mathcal{A}_M, p \in \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{A}_N, f(p) \in \mathcal{V}$ .

**תרגיל 12.** בדקו כי הנ"ל מוגדר היטב ביחס למפות מתואמות.

**הגדרה 1.2.15.** פונקציה  $f: M \rightarrow N$  **חלקה** אם כל ההצגות המקומיות של  $f$  ביחס למפות מתואמות הן פונקציות חלקות.

**הערה 1.2.16.** כדי לבדוק חלקות, די לבדוק חלקות של פונקציות מתואמות עם מפות שמכסות את היריעה.

**הגדרה 1.2.17.** פונקציה הפיכה  $f$  כאשר  $f^{-1}$  חלקות נקראת **דיפאומורפיזם**.

**תרגיל 13.** אם  $f: M \rightarrow N$  דיפאומורפיזם, אז  $\dim M = \dim N$ .

**תרגיל 14.** דיפאומורפיזמים שומרים על פונקציות חלקות. אם בדיאגרמה הבאה  $\varphi, \psi$  איזומורפיזמים, אז  $h$  חלקה אם ורק אם  $h'$  חלקה.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ M' & \xrightarrow{h'} & N' \end{array}$$

**הגדרה 1.2.18.** **יריעה דיפרנציאבילית**  $\mathcal{C}^r$  היא יריעה טופולוגית עם אטלס בו פונקציות המעבר חלקות  $\mathcal{C}^r$ .

**תרגיל 15.** תהי  $(M, \mathcal{A})$  יריעה חלקה ותהי  $(\mathcal{U}, \varphi)$  מפה מתואמת עם  $\mathcal{A}$ . אז  $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^m$  דיפאומורפיזם.

**דוגמה 1.2.19.** תהי  $M = \mathbb{R}$  עם  $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \text{id})\}$  המבנה החלק הסטנדרטי, ועם  $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$ . אז  $(M, \mathcal{A}_1), (M, \mathcal{A}_2)$  יריעות חלקות שונות, אך דיפאומורפיות. נסמן  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . אז  $\hat{f} = \text{id}_{\mathbb{R}}$  ולכן  $f$  דיפאומורפיזם. ראה איור 1.7.

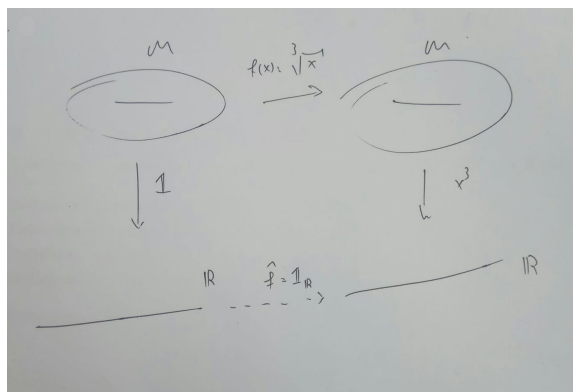
**שאלה 1.2.20.** האם קיימים מבנים שאינם דיפאומורפיים על אותה יריעה טופולוגית? עבור  $\dim M \leq 3$  התשובה נכונה. עבור  $\dim M = 1$  נסו כתרגיל. עבור  $\dim M \geq 4$  הדבר תלוי ביריעה.

**דוגמה 1.2.21.** בטבלה 1.8 מספר המבנים הדיפאומורפיים של הספירה. עבור  $n = 4$  זאת בעייה פתוחה הנקראת smooth Poincaré conjecture.

**דוגמה 1.2.22.** ב- $\mathbb{R}^n$  יש מבנה דיפאומורפי אחד לכל  $n \neq 4$ , ואינסוף עבור  $n = 4$ .

הרצאה 2  
28 באוקטובר  
2018

איור 1.7: דיפאומורפיזם.



איור 1.8: מבנים דיפאומורפיים של הספירה.

$n$	מספר מבנים חלקים שונים של $S^n$ עד כדי דיפאומורפיזם
1	1
2	1
3	1
4	?
5	1
6	1
7	28
8	2
9	8
10	6
11	992
12	1

## 1.3 תתייריעות

**הגדרה 1.3.1.** תהי  $M$  יריעה טופולוגית ממימד  $m$  ותהי  $N \subseteq M$  עם הטופולוגיה המושרית.  $N$  תיקרא **תתייריעה טופולוגית** אם לכל  $x \in N$  קיימת מפה  $(\mathcal{U}, \varphi)$  של  $M$  עם  $x \in \mathcal{U}$  וגם  $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{U} \cap N$  (כאן  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^m$ )

**דוגמאות.** •  $W \subseteq M$  קבוצה פתוחה היא תתייריעה חלקה.

• אם  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  אז הגרף של  $F$ ,

$$\text{Gr}(F) = \{(x, F(x)) \mid x \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

היא תתייריעה. אם  $F$  רציפה זאת רק תתייריעה טופולוגית, אם  $F$  חלקה זאת תתייריעה חלקה, וכו'. תהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  פתוחה. אז  $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$  פתוחה במרחב  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . נגדיר

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto (x, y - F(x)) \end{aligned}$$

ואז  $\text{Gr}(F) \cap (\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \{0\}$  המפה שנדרשת בהגדרה. אם  $F$  רציפה,  $\varphi_{\mathcal{U}}$  הומאומורפיזם ולכן זאת תתייריעה טופולוגית. אם  $F$  חלקה,  $\varphi_{\mathcal{U}}$  חלקה, כלומר מתואמת עם האטלס הסטנדרטי, וזאת תתייריעה חלקה.

**תרגיל 16.** גרף של  $|x|$  הוא תתייריעה טופולוגית אך לא חלקה.

**תרגיל 17.** תתייריעה טופולוגית היא יריעה טופולוגית.

**טענה 1.3.2.** תהי  $N^n \subseteq M^m$  (כלומר  $N$  ממימד  $n$ ,  $M$  ממימד  $m$ ) תתייריעה חלקה. אזי  $M$  משרה על  $N$  מבנה של יריעה חלקה.

הוכחה. מתרגיל 17 תתייריעה היא יריעה טופולוגית. נשאר להראות כי  $M$  משרה מבנה חלק. ניקח  $\{(U_x, \varphi_x)\}_{x \in N}$  מפות מההגדרה של תתייריעה חלקה ונגדיר

$$\mathcal{A} = \{(U_x \cap N, \varphi_x|_{U_x \cap N})\}_{x \in N}$$

אטלס שמכסה את  $N$ . נשאר להראות כי המפות מתואמות.  $(U_x, \varphi_x)$  ו- $(U_y, \varphi_y)$  מתואמות, לכן פונקציות המעבר

$$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}: \varphi_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \varphi_y(U_x \cap U_y)$$

חלקות. לכן הצמצום באטלס  $\mathcal{A}$ , שהינו

$$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}|_{\mathbb{R}^n \cap \varphi_x(U_x \cap U_y)}: \mathbb{R}^n \cap \varphi_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \mathbb{R}^n \cap \varphi_y(U_x \cap U_y)$$

גם הוא חלק.

**דוגמה 1.3.3.** נתונה מערכת משוואות

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ F_r(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

כאשר  $F_i$  חלקות. נניח שבנקודה  $\vec{x}$  כך ש- $\vec{F}(\vec{x}) = 0$  מתקיים  $\text{rank}\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}\right) = r$  (הדרגה מקסימלית). ממשפט הפונקציה הסתומה ניתן לבודד  $m - r$  קואורדינטות  $\vec{x}''$  כאשר  $\vec{x}' = (\vec{x}'', \vec{x}')$  בה"כ ואז לוקלית ליד  $\vec{x}$  קבוצת הפתרונות  $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$  נראית כמו גרף של פונקצייה

$$G: \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow \mathbb{R}^r \\ x'' \mapsto G(x'') \subseteq \mathbb{R}^r$$

**דוגמה 1.3.4.** עבור  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ , מתקיים  $\frac{\partial F}{\partial x} = (2x_1, 2x_2)$ . כאשר  $x_1, x_2 \neq 0$  ניתן להציג את  $x_1$  כפונקציה של  $x_2$  או להיפך. לוקלית, ליד  $x$ ,  $M = \{x \mid F(x) = 0\}$  היא יריעה חלקה. אם תנאי של משפט הפונקציה הסתומה מתקיים לכל  $x \in M$ , אז  $M$  יריעה חלקה (גלובלית).

**תרגיל 18.** עבור תתייריעה כמו בדוגמה, מתקיים  $\dim M = m - r$ .

**משפט 1.3.5.** נניח ש- $N \subseteq \mathbb{R}^m$  תת-קבוצה כך שלכל  $x \in N$  קיימת סביבה  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  ו- $r = m - n$  פונקציות חלקות  $F_i: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  (עם קבוע עבור  $N$ ) כך שמתקיימים התנאים הבאים.

$$N \cap \mathcal{U} = \{\vec{x} \in \mathcal{U} \mid \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}\} \\ \text{rank}\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}\right) = r$$

אז  $N \subseteq \mathbb{R}^m$  תתייריעה ממימד  $n = m - r$ .

**הערה 1.3.6.** הכיוון ההפוך איננו בהכרח נכון. אם  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{F}(\vec{x}) = 0\}$  תתייריעה של  $\mathbb{R}^m$ , ייתכן ש- $\vec{F}$  איננה מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה. המשפט הינו תנאי מספיק שאינו הכרחי.

**דוגמאות.** • קבוצת הפתרונות של

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$$

מתקיים  $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n+1})$  ולכן לכל  $\vec{x} \neq \vec{0}$  הדרגה היא 1.  $\vec{0}$  לא ביריעה, לכן זאת יריעה  $n$ -מימדית.

• **(תרגיל)** תהי  $B(x)$  תבנית ריבועית שאיננה מנונת.  $N = \{x \mid B(x) = 1\}$  תתייריעה.  $\{x \mid B(x) = 0\}$  איננה בהכרח תתייריעה, לדוגמה עבור  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$  מתקבל חרוט דו-צדדי שאינו תתייריעה.

•  $\text{SL}(n, \mathbb{R}) \subseteq M_{n \times n}(\mathbb{R})$  תתייריעה כאשר  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  מוזהה עם  $\mathbb{R}^{n^2}$  עם המבנה החלק הסנדרטי.

הוכחה. תהי

$$F: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \det A$$

ואז  $SL_n = \{A \mid FA = 1\}$ . תהינה  $(x_{i,j})_{i,j=1}^n$  קואורדינטות של  $M_{n \times n}$ . צריך להוכיח שלכל  $\vec{x} \in SL_n$  מתקיים  $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}\right) \neq \vec{0}$ , כלומר שקיים  $x_{i,j}$  כך ש- $\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}} \neq 0$ . נחשב.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}(A) &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (\det(A + t \cdot T_{i,j})) \\ &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (\det A \cdot \det(\mathbb{1} + tA^{-1}T_{i,j})) \\ &= \det A \cdot \frac{d}{dt} (\det(\mathbb{1} + tA^{-1}T_{i,j})) \\ &= \det A \cdot \text{tr}(A^{-1}T_{i,j}) \end{aligned}$$

כאשר  $(T_{i,j})_{k,l} = \delta_{k,i}\delta_{j,l}$  וכאשר  $\det(1 + \varepsilon B) = 1 + \varepsilon \text{tr} B + O(\varepsilon^2)$  נובע מפיתוח לפי תמורות. מתקיים  $A^{-1} = \left(\frac{M_{i,j}}{|A|}\right)_{i,j}$  מתקיים  $BT_{i,j}$  שווה למטריצה עם העמודה  $C_i(B)$  של  $B$  בעמודה ה- $j$ , ואפסים בשאר המקומות. לכן

$$(A^{-1}T_{i,j})_{l,k} = \frac{M_{k,l}}{|A|}$$

ולכן קיבלנו

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}(A) = \det A \cdot \frac{M_{j,i}}{|A|} = M_{i,j}$$

■ הפיכה ולכן לא כל המינורים מתאפסים ונקבל כי  $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}\right) \neq \vec{0}$ . לכן גם  $\dim SL(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$ .

• **תרגיל 19.**  $O(n) \leq M_{n \times n}$  תת יריעה.

•  $\mathbb{T}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  כאשר  $\mathbb{T}^n \cong (S^1)^n$  ו- $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$ , ניתן להצגה ע"י המשוואות  $x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2 - 1 = 0$  כאשר  $k \in [n]$ . עבור  $\mathbb{T}^2$ , ניתן לכתוב

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right)^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

• **תרגיל 20.**  $\nabla F \neq \vec{0}$  בנקודה  $x \in \mathbb{T}^2$ .

• **תרגיל 21.** ניקח  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  ונגדיר

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \varphi_1(0) + v_1 t \\ \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + v_2 t \end{cases}$$

תנועה חופשית של חלקיק ב- $\mathbb{T}^2$ . לאילו  $v_i$  המסלול הוא תתי-יריעה של  $\mathbb{T}^2$ ?

• **דוגמה 1.3.7.** תהי  $f: M \rightarrow N$  חלקה. אזי

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N$$

תתי-יריעה. האלכסון הוא  $\Delta \subseteq M \times M$  הגרף של  $\mathbb{1}_M$ . הכיוון ההפוך איננו נכון. אם  $\text{Gr} f$  תתי-יריעה, לא מובטח כי  $f$  חלקה.

• **הערה 1.3.8.** ברוב הדוגמאות, יריעות הן תתי-יריעות של  $\mathbb{R}^N$ .

• **משפט 1.3.9 (Whitney).** כל יריעה  $M^m$  ניתנת לשיכון כתתי-יריעה חלקה ב- $\mathbb{R}^N$  עבור  $N$  מסוים.

• **הערה 1.3.10.** המקרה האופטימלי הכללי הוא  $N = 2m$ . ל- $2m - 1$  אין תמיד שיכון כתתי-יריעה חלקה.  $\mathbb{R}^2, K^2, \mathbb{R}P^2$  לא ניתנים לשיכון ב- $\mathbb{R}^3$ .

• **תרגיל 22.** תהי  $N \subseteq \mathbb{R}^m$  תתי-יריעה ויהי  $x \in N$ .  $f: N \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה ליד  $x$  אם ורק אם ניתן להרחיב את  $f$  לפונקציה  $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה, כאשר  $U$  סביבה של  $x$  ב- $\mathbb{R}^m$ .

## 1.4 נגזרות

• **הגדרה 1.4.1.** תהי  $M$  יריעה חלקה. עקומה  $\gamma$  היא העתקה  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  חלקה (ביחס למבנה החלק של  $M$  והסטנדרטי ב- $\mathbb{R}$ ).



**שאלה 1.4.2.** מהי  $\dot{\gamma}(x)$ , "וקטור המהירות של חלקיק הנע לאורך  $\gamma$ "? אם  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  עם שיכון נתון נוכל להסתכל על  $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$  ואז

$$\dot{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix} \text{ לגזור וקטור שמשיק ל-} M \text{ בנקודה } \gamma(x).$$

**הערה 1.4.3.** תהי  $M$  יריעה חלקה. היינו רוצים להגדיר מרחב משיק בנקודה  $p$  להיות אוסף וקטורי המהירות של מסילות העוברות דרך  $p$ . אין לנו דרך טובה להגדיר וקטורי מהירות באופן כללי, לכן צריך לעקוף זאת.

**הגדרה 1.4.4.** תהיינה  $\gamma_i: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  מסילות עבור  $i \in [2]$  וכאשר  $\gamma_i(0) = p$  אזי  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  אם קיימת מפה  $(\mathcal{U}, \varphi)$  סביב  $p$  כך שלהצגות המקומיות  $\hat{\gamma}_i = \varphi \circ \gamma_i$  אותו וקטור מהירות  $\dot{\hat{\gamma}}_1(0) = \dot{\hat{\gamma}}_2(0)$ .

**הגדרה 1.4.5.** וקטור משיק בנקודה  $p$  הוא מחלקת שקילות של עקומות  $\bar{\gamma}$  עם  $\gamma(0) = p$ .

**תרגיל 23.** הראו כי שקילות עקומות בהגדרה הנ"ל היא אכן יחס שקילות.

**הערה 1.4.6.** יחס השקילות  $\sim$  אינו תלוי בבחירת המפה סביב  $p$ . נסתכל על שתי מפות  $\varphi, \psi$  ואז

$$\underbrace{\varphi \circ \gamma_i}_{\hat{\gamma}_i} = (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \underbrace{\psi \circ \gamma_i}_{\hat{\hat{\gamma}}_i}$$

ומכלל השרשרת

$$\dot{\hat{\gamma}}_i(0) = D(\varphi \circ \psi^{-1})|_{\varphi(p)} \cdot \dot{\hat{\hat{\gamma}}}_i(0)$$

ואז

$$\dot{\hat{\hat{\gamma}}}_1 = \dot{\hat{\hat{\gamma}}}_2 \iff \dot{\hat{\gamma}}_1 = \dot{\hat{\gamma}}_2$$

**הגדרה 1.4.7.** נגדיר

$$T_p M = \{\text{smooth paths } \gamma(0) = p\} / \sim$$

המרחב המשיק בנקודה  $p \in M$ .

**הערה 1.4.8.**  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  מגדירה העתקה

$$D\varphi_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$[\gamma(t)] \rightarrow (\varphi \circ \dot{\gamma})(0)$$

**תרגיל 24.** 1.

$$D\varphi_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

חז"ע ועל.

2. בהינתן שתי מפות  $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$  סביב  $p$ , הדיאגרמה הבאה קומוטטיבית.

$$\begin{array}{ccc} & T_p M & \\ D\varphi_p \swarrow & & \searrow D\psi_p \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

3. ל- $T_p M$  יש מבנה לינארי טבעי, ע"י משיכת המבנה הלינארי מ- $\mathbb{R}^m$ . נגדיר

$$\begin{cases} \sigma + \eta := D\varphi_p^{-1}(D\varphi_p(\sigma) + D\varphi_p(\eta)) \\ c \cdot \sigma := D\varphi_p^{-1}(c \cdot D\varphi_p(\sigma)) \end{cases}$$

ונשאיר כתרגיל בדיקה כי הדבר אינו תלוי בבחירת המפה  $\varphi$ . (זה נובע מכך שהעתקות המעבר הינן לינאריות)

**דוגמה 1.4.9.**  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תהי פתוחה וניקח את המפה  $(\mathcal{U}, 1_{\mathcal{U}})$ . אז יש איזומורפיזם

$$D1_{\mathcal{U}}: T_p \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$[\gamma] \rightarrow \dot{\gamma}(0)$$

**דוגמה 1.4.10.** תהי יריעה  $M^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  מוגדרת על ידי  $\{\vec{x} \mid F(x_1, \dots, x_n) = 0\}$  עם  $\nabla F \neq \vec{0}$ . כעת  $T_p M \subseteq T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ . מהו

$T_p M$  אחרי הזיהוי של  $T_p \mathbb{R}^n$  עם  $\mathbb{R}^n$ ? ניקח  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  עם  $\gamma(0) = p$ . נכתוב  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ . כעת  $\gamma(t) \in M$  גורר

כי לכל  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  מתקיים  $F \circ \gamma(t) = 0$ . נחשב בעזרת כלל השרשרת.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (F \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{\gamma(0)} \dot{\gamma}_i(0) \\ &= \nabla F|_{\gamma(0)} \cdot \dot{\gamma}(0) \end{aligned}$$

לכן אם  $\sigma \in T_p M$  אז  $\sigma = D\varphi_p(\sigma) \perp \nabla F(p)$ . אם נוזה את  $T_p M$  עם  $D\varphi_p(T_p M)$  אזי  $D\varphi_p(T_p M) \subseteq (\nabla F)^{\perp}$ . אלו שני מרחבים וקטוריים מממד  $n-1$ , לכן יש שיוויון  $T_p M = (\nabla F)^{\perp}$ .

**דוגמה 1.4.11.**  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  מוגדר ע"י  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$  עם  $\nabla F = (2x_1, 2x_2)$ .  $T_p M + p$  הינו ישר המאונך ל- $\nabla F(p)$ , וזהו בדיוק ישר המשיק ל- $S^1$  בנקודה  $p$ .

**הגדרה 1.4.12.** אגד משיק (tangent bundle) הינו

$$TM = \coprod_{x \in M} (x, T_x M)$$

איבר ב- $TM$  הינו זוג  $(x, \sigma)$  כאשר  $x \in M$  ו- $\sigma \in T_x M$ .

**דוגמה 1.4.13.** אגד משיק למעגל הוא  $TM = S^1 \times \mathbb{R}$ , כלומר גליל.

**הערה 1.4.14.** על  $TM$  טופולוגיה הניתנת באופן מקומי על ידי אטלסים.

**הערה 1.4.15.** קיים זיהוי קנוני בין  $T_p M, T_p \mathcal{U}$  עבור  $\mathcal{U} \subseteq M$  פתוחה.

**דוגמה 1.4.16.** תהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה. אז

$$T\mathcal{U} = \{(x, \sigma) \mid x \in \mathcal{U} \wedge \sigma \in T_x \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^n\} \cong \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^n$$

או וקטורים עם נקודת התחלה ב- $\mathcal{U}$  וחץ שהוא וקטור ב- $\mathbb{R}^n$ .

**הגדרה 1.4.17.** עבור  $M$  יריעה כללית, יהי  $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  אטלס חלק על  $M$ . נגדיר

$$\bar{\mathcal{U}}_\alpha := \coprod_{x \in \mathcal{U}_\alpha} T_x \mathcal{U}_\alpha$$

וגם

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_\alpha: \bar{\mathcal{U}}_\alpha &\rightarrow T[\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)] \cong \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n} \\ (x, \sigma) &\rightarrow (\varphi_\alpha(x), D\varphi_\alpha(x)(\sigma)) \in T_{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \end{aligned}$$

**תרגיל 25.1.**

$$TM = \bigcup_{\alpha \in I} \bar{\mathcal{U}}_\alpha$$

2.

$$\bar{\varphi}_\alpha: \bar{\mathcal{U}}_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \times \mathbb{R}^n$$

חח"ע ועל.

**הגדרה 1.4.18.** תת־קבוצה  $X \subseteq TM$  נקראת פתוחה אם ורק אם לכל  $\alpha$ ,  $\bar{\varphi}_\alpha(X \cap \bar{U}_\alpha)$  פתוחה ב- $\mathbb{R}^{2n}$ .

**תרגיל 26.** הראו בשלבים הבאים כי יש מבנה חלק על  $TM$ .

ההגדרה מגדירה טופולוגיה על  $TM$ .

**2.**  $TM$  יריעה טופולוגית.

**3.**  $\{(\bar{U}_\alpha, \bar{\varphi})\}_{\alpha \in I}$  אטלס מתואם.

**הערה 1.4.19.**  $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ , אבל  $TS^2 \not\cong S^2 \times \mathbb{R}$ .

**הערה 1.4.20.** בדרך כלל,  $TM \not\cong M \times \mathbb{R}^n$ . נראה מבנה לוקלי על האגד המשיק. קיימות ההעתקות

$$\begin{aligned}\varphi: \mathcal{U} &\rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \\ D\varphi: [\gamma] &\rightarrow \varphi \circ \gamma \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

ואז קיימת ההעתקה הבאה.

$$\begin{aligned}(\varphi, D\varphi): TU &\rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \\ (p, [\gamma]) &\rightarrow (\varphi(p), \varphi \circ \gamma)\end{aligned}$$

זאת העתקה השומרת על מבנה חלק, אך הינה תלויה בבחירת קואורדינטות  $(\mathcal{U}, \varphi)$ .

### 1.4.1 נגזרות כיווניות

היו  $M \rightarrow \mathbb{R}, p \in M$  חלקה, ו- $v \in T_p M$ . נגדיר את הנגזרת הכיוונית של  $f$  בכיוון  $v$  להיות

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \gamma$$

**תרגיל 27.** אם  $[\gamma'] = [\gamma]$  אז

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 f \circ \gamma = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f \circ \gamma'$$

כלומר, הנגזרת מוגדרת היטב.

הנגזרת הכיוונית לינארית ב- $v$ , וב- $f$ . היא גם מקיימת את כלל לייבניץ.

$$\frac{\partial}{\partial v}(f \circ g) = f \frac{\partial g}{\partial v} + g \frac{\partial f}{\partial v}$$

הוכיחו את תכונות אלו כתרגיל.

**הגדרה 1.4.21.** דרייוציה (derivation) זאת העתקה לינארית  $D: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  שמקיימת את כלל לייבניץ.

**הערה 1.4.22.** מתקבלת העתקה

$$\begin{aligned}T_p &\rightarrow \{\text{derivations}\} \\ v &\rightarrow \frac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

שהינה חח"ע ועל, ולמעשה איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

**הערה 1.4.23.** הגדרה שקולה למרחב משיק, היא ש- $T_p M$  הוא מרחב הדרייוציות בנקודה  $p$ .

### 1.4.2 דיפרנציאלים

תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  העתקה חלקה. אם  $[\gamma] = [\gamma']$  ניתן לבדוק כי מתקיים  $[f \circ \gamma] = [f \circ \gamma']$  (תרגיל). אז מתקבלת העתקה

$$\begin{aligned}D_p f: T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ [\gamma] &\rightarrow [f \circ \gamma]\end{aligned}$$

**הגדרה 1.4.24.** ההעתקה  $D_p f$  נקראת דיפרנציאל.

**סימון 1.4.25.** מסמנים את הדיפרנציאל בכמה אופנים.

$$D_p, \quad Df(p), \quad f_{*p}$$

**הערה 1.4.26.** הדיפרנציאל הוא פונקטור קווריאנטי.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ TM & \xrightarrow{Df} & TN \end{array}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} Df: TM &\rightarrow TN \\ (p, v) &\rightarrow (f(p), D_p f(v)) \end{aligned}$$

**טענה 1.4.27 (כלל השרשרת).** מתקיים  $f \circ \dot{\gamma} = DF \cdot \dot{\gamma}$  ואז

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + Df \cdot \Delta x + O(\|\Delta x\|^2)$$

$F(x_0) + Df \cdot \Delta x$  נקראת **לינאריזציה של ההעתקה  $F$** .

**תרגיל 28.** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה. נגדיר  $D\varphi: [\gamma] \rightarrow \varphi \circ \gamma \in \mathbb{R}^m$  ואז

$$D\varphi: T_p \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \quad D\psi: T_{f(p)} \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

ונקבל העתקה

$$\widehat{D_p f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

לינארית ולכן נתונה ע"י מטריצה. זאת מטריצת היעקובי של  $\hat{f}(\varphi(p))$ .

**תרגיל 29.** •  $Df: TM \rightarrow TN$  חלקה.

•  $f: M \rightarrow N$  דיפאומורפיזם. לכן  $D_x f$  הפיכה לכל  $x \in M$ .

• כלל השרשרת:

$$D_x(f \circ g) = D_{g(x)} f \circ D_x g$$

## 1.5 שיכונים

**הגדרה 1.5.1.**  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה נקראת **אימרסיה** אם לכל  $x \in M$ ,

$$D_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

חד-חד ערכית, או באופן שקול  $\ker D_x f = \{0\}$ .

**דוגמה 1.5.2.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  אימרסיה אם ורק אם  $D_x f \neq 0$  אם ורק אם  $\dot{f} \neq 0$ .  
באזור ההעתקות  $a, b$  הינן אימרסיות, אך  $c$  איננה.

**הגדרה 1.5.3.**  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה נקראת **סובמרסיה** אם לכל  $x \in M$ ,

$$D_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

על.

**דוגמה 1.5.4.**  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ההטלה הינה סובמרסיה.

**הגדרה 1.5.5.**  $f: M \rightarrow N$  נקראת **שיכון** אם אימרסיה וגם הומאומורפיזם.

**דוגמה 1.5.6.** ההעתקות באזור אינן שיכונים.

**הערה 1.5.7.** תהי  $f: M^n \rightarrow N^n$  אימריסה. אם  $\ker D_x f = \{0\}$  בכל  $x \in M$ , אז  $D_x f$  הפיכה ולכן  $f$  דיפאומורפיזם לוקאלי סביב  $x$  ו- $f(x)$ . זה משפט הפונקציה ההפוכה והוא אינו נכון גלובלית.

$$\begin{aligned} f: S^1 &\rightarrow S^1 \\ e^{i\theta} &\rightarrow e^{2i\theta} \end{aligned}$$

דיפאומורפיזם לוקאלי שאינו גלובלי.

**תרגיל 30 (קשה).** יהי  $f: M \rightarrow N$  שיכון. אז  $f(M)$  תת־יריעה של  $N$ .

**דוגמה 1.5.8 (מעגל המפלצת).** נסמן  $M = S^1 \times \{0\}$  ו- $N = S^1 \times \{1\}$ . תהי  $A \in S^1$  ונסמן  $A_1 = (A, 0)$ ,  $A_2 = (A, 1)$ . נגדיר

$$S_{\circ\circ}^1 = M \amalg N / \sim$$

כאשר  $(x, 0) \sim (x, 1)$  עבור  $x \neq A$ . קיבלנו מעגל עם "נקודה שמנה", ומרחב זה אינו האוסדורף. הטופולוגיה המושרית היא לפי:

- עבור  $x \in A_1, A_2$ , סביבה היא קשת פתוחה בטופולוגיה הרגילה.
- סביבה של  $A_2$  היא קשת סביב  $A_2$  שאינה מכילה את  $A_1$ . באותו אופן סביבה של  $A_1$ .
- $S_{\circ\circ}^1$  כן יריעה, אך לא ניתנת לשיכון ב- $\mathbb{R}^N$  (אם כן,  $f(S_{\circ\circ}^1)$  תת־יריעה של  $\mathbb{R}^N$  ולכן האוסדורף, בסתירה).
- נניח מעתה כי כל היריעות הינן האוסדורף ובנות מנייה שנייה (כלומר, קיים בסיס בן־מנייה).

**תרגיל 31.** יהי  $X$  טופולוגי האוסדורף ובן מנייה שנייה. מתקיימות התכונות הבאות.

1.  $X$  ספרבילי.
2. קומפקטיות שקולה לקומפקטיות סדרתית.
3. אם  $X$  הוא  $T_3$  אז  $X$  מטריזבילי.<sup>1</sup>
4.  $X$  לינדלוף.

**תרגיל 32.** יהיו  $X, Y$  טופולוגיים,  $X$  קומפקטי ו- $Y$  האוסדורף.

1. אם  $f: X \rightarrow Y$  חז"ע, על ורציפה, אז  $f^{-1}$  רציפה ולכן  $f$  הומאומורפיזם.
2.  $K \subseteq Y$  קומפקטית היא סגורה.

**משפט 1.5.9 (Whitney, גרסה חלשה).** תהי  $M$  יריעה קומפקטית. אזי קיים שיכון  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  עם  $N$  גדול מספיק.

**הערה 1.5.10.** הבנייה בהוכחת המשפט תיתן  $N$  גדול. נראה אחר־כך איך להקטין את  $N$  ל- $2 \dim(M) + 1$ .

**הערה 1.5.11.** משפט Whitney נכון גם עבור יריעות שאינן קומפקטיות.

**סימון 1.5.12.**

$$B^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$$

**למה 1.5.13.** קיימת העתקה חלקה  $f: B^n(3) \rightarrow S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  שמקיימת את התכונות הבאות.

$$\text{Im}(f|_{B^\circ(2)}) = S^n \setminus \{p_+\}$$

$$f|_{B^\circ(2)} \text{ דיפאומורפיזם.}$$

3.

$$f(B(3) \setminus B^\circ(2)) = p_+$$

הוכחה. מתקיים

$$S^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong B^\circ(2) \cup \{*\}$$

ולכן קיימת  $f$  הומאומורפיזם. השלימו את הפרטים ובדקו נגזרות ליד  $r = 2$  כך שהיא תהיה חלקה.

<sup>1</sup>בעצם אין צורך לדרוש כי  $X$   $T_2$ . מתקיים (יש צורך בבדיקה) כי אם  $X$  יריעה טופולוגית האוסדורף ובת מנייה שנייה, אז  $X$  נורמלית ולכן מטריזבילית.

הוכחה (משפט Whitney). תהי  $M$  יריעה קומפקטית מממד  $m$ . לכל  $p \in M$  נבחר  $(\mathcal{U}_p, \varphi_p)$  מפה. נניח כי  $\varphi_p(p) = 0$  וגם  $B(3) \subseteq \varphi_p(\mathcal{U}_p)$  ע"י תיקון של האטלס במידת הצורך. נקבל כי

$$\{\varphi_p^{-1}(B^\circ(2))\}$$

כיסוי פתוח של  $M$ .

נבחר תת-כיסוי סופי

$$\{\varphi_{p_i}^{-1}(B^\circ(2))\}_{i=1}^d$$

ונסמן  $\mathcal{U}_i := \varphi_{p_i}^{-1} \mathcal{U}_i$  ו- $\varphi_i := \varphi_{p_i}$ . נגדיר

$$g_i: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} f(\varphi_i(x)) & x \in \varphi_i^{-1}(B^\circ(2)) \\ p_+ & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר  $f$  ההעתקה מהלמה. אז  $g_i$  חלקה כי הרחבנו את  $f$  שהינה חלקה וקבועה בסביבת השפה, לפונקציה קבועה מחוץ לכדור. נגדיר  $g := (g_1, \dots, g_d): M \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)d}$  אז

•  $g$  חלקה כוקטור של פונקציות חלקות.

•  $g$  חז"ע: לכל  $x \neq y \in M$ , עבור  $i$  מסוים מתקיים  $x \in \varphi_i^{-1}(B^\circ(2))$  אם  $y \in \varphi_i^{-1}(B^\circ(2))$  אז  $g_i(x) \neq g_i(y)$  ולכן  $g(x) \neq g(y)$ . אחרת,  $g_i(y) = p_+$  וגם אז  $g_i(x) \neq g_i(y)$ .

•  $g: M \rightarrow g(M)$  חז"ע ועל, ו- $g(M)$  האוסדורף, לכן  $g^{-1}$  רציפה (לפי תרגיל). לכן  $g$  הומאומורפיזם.

•  $g$  אימרסיה: צריך להוכיח כי  $D_x g: T_x M \rightarrow T_{g(x)} \mathbb{R}^N$  חז"ע לכל  $x \in M$ . קיים  $i$  עבורו  $x \in \varphi_i^{-1}(B^\circ(2))$  אז  $g_i = f \circ \varphi_i(x)$  בסביבת  $x$  היא דיפאומורפיזם (לוקלי). לכן  $D_x g_i$  הפיכה ולכן חז"ע. לכן  $D_x g$  גם היא חז"ע.

■

$g$  אימפרסיה על התמונה

**הערה 1.5.14.** כדי שההרחבה  $g_i$  של  $f$  תהייה חלקה השתמשנו בכך ש- $M$  האוסדורף.

## 1.5.1 ערכים קריטיים ורגולריים

**הגדרה 1.5.15.** תהי  $f: M \rightarrow N$  חלקה.  $y \in N$  ערך רגולרי של  $f$  אם לכל  $x \in f^{-1}(y)$  ההעתקה

$$D_x f: T_x M \rightarrow T_y N$$

היא על. אם  $y \in N$  אינו רגולרי, הוא ערך קריטי.

**הגדרה 1.5.16.**  $x \in M$  נקודה רגולרית אם  $D_x f: T_x M \rightarrow T_y N$  על. אחרת  $x \in M$  נקודה קריטית.

**דוגמה 1.5.17.** ניקח הטלה  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  של שתי תתי-יריעות של  $\mathbb{R}^2$  כמתואר באיור

**הערה 1.5.18.** יתכן כי תמונת נקודה רגולרית היא ערך קריטי.

**הערה 1.5.19.** אם  $f^{-1}(y) = \emptyset$  אז  $y$  רגולרי.

**הערה 1.5.20.** קריטיות וסינגולריות הם מושגים שונים.

**דוגמה 1.5.21.** תהי  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . נקודה קריטית אם ורק אם  $D_x f = 0$ .

**משפט 1.5.22.** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה עם  $m \geq n$ . יהי  $y \in f(M) \subseteq N$  ערך רגולרי. אזי  $L := f^{-1}(y)$  תתי-יריעה חלקה מממד  $m - n$  (שאינה בהכרח קשירה). בנוסף, לכל  $x \in L$

$$T_x L = \ker D_x f \subseteq T_x M$$

הוכחה. ההגדרה של תתי-יריעה הינה לוקלית, לכן די להראות כי  $L$  תתי-יריעה בסביבת נקודה  $x$ , שמקיימת את הדרישות. נבחר קואורדינטות מקומיות סביב  $x$  ו- $y$ .<sup>2</sup> נסמן  $(x^1, \dots, x^m)$  ו- $(y^1, \dots, y^n)$  בהתאמה. באופן מקומי ניתן להציג את  $f$  באופן הבא.

$$f(x^1, \dots, x^m) = \begin{pmatrix} f_1(x^1, \dots, x^m) \\ \vdots \\ f_n(x^1, \dots, x^m) \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup> ניתן להסתכל על קואורדינטות באופן אחר. קיים שריג פונקציות  $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_1, \dots, x_m: \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ . הדבר מגדיר קואורדינטות מקומיות  $x^i = x_i \circ \varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  שהינן תלויות במפה. ראו איור

כעת

$$\mathcal{U} \cap f^{-1}(y) = \left\{ (x^1, \dots, x^m) \mid \begin{cases} f_1(x^1, \dots, x^m) = y_1 \\ \vdots \\ f_n(x^1, \dots, x^m) = y_n \end{cases} \right\}$$

$D_x f$  על  $y$  (כך רגולרי) לכן  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  המוגדרת ע"י מטריצת הנגזרות החלקיות היא על, ולכן  $\text{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = n$ . ממשפט הפונקציה הסתומה,  $f^{-1}(y)$  תת־יריעה (לוקלית) ממימד  $m - n$ . נוכיח כי  $T_x L = \ker D_x f$ . תהי  $\gamma(t)$  עקומה ב- $L$ . אז  $f(\gamma(t)) = y$  ואז

$$[\gamma] \xrightarrow{Df} [\text{const}] = 0 \in T_y N$$

ונקבל כי  $T_x L \subseteq \ker D_x f$ . משיקולי מימד, יש שוויון.

**הערה 1.5.23.** הדרישה כי  $y$  ערך רגולרי הינה מספיקה אך לא הכרחית. ייתכן ערך קריטי עם תמונה הפוכה שהיא תת־יריעה, ואפילו ממימד נכון.

**דוגמה 1.5.24.** נסתכל על  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית גובה באיור

$$\bullet f^{-1}(y_1) = \emptyset \text{ לכן } y_1 \text{ רגולרית אך לא ב-} f(M).$$

$$\bullet f^{-1}(y_2) \cong S^1.$$

$$\bullet f^{-1}(y_3) = S^1 \amalg S^1.$$

$$\bullet f^{-1}(y_4) \cong S^1.$$

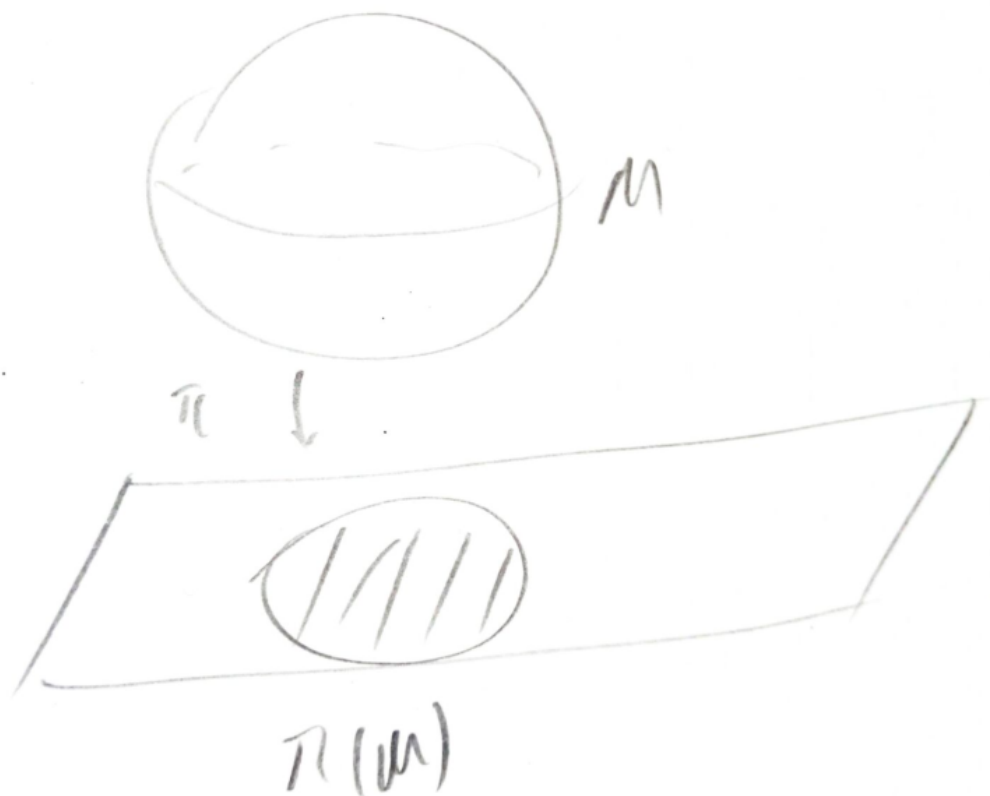
$$\bullet f^{-1}(c_1) = \{\text{pt}\} \text{ תת־יריעה אך המימד אינו 1.}$$

$$\bullet f^{-1}(c_2) = S^1 \amalg \{\text{pt}\} \text{ תת־יריעה עם מימד שאינו קבועה בין מחלקות קשירות.}$$

$$\bullet f^{-1}(c_3) = S^1 \amalg S^1 / \{\text{pt}\} \text{ לא תת־יריעה (זה זר עם שתי לולאות).}$$

**דוגמה 1.5.25.** נסתכל על ההטלה  $\pi$  של הספירה  $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  ל- $\mathbb{R}^2$ . ראו איור 1.9.

הרצאה 4  
11 באוקטובר  
2018



איור 1.9: הטלת ספירה על המישור.



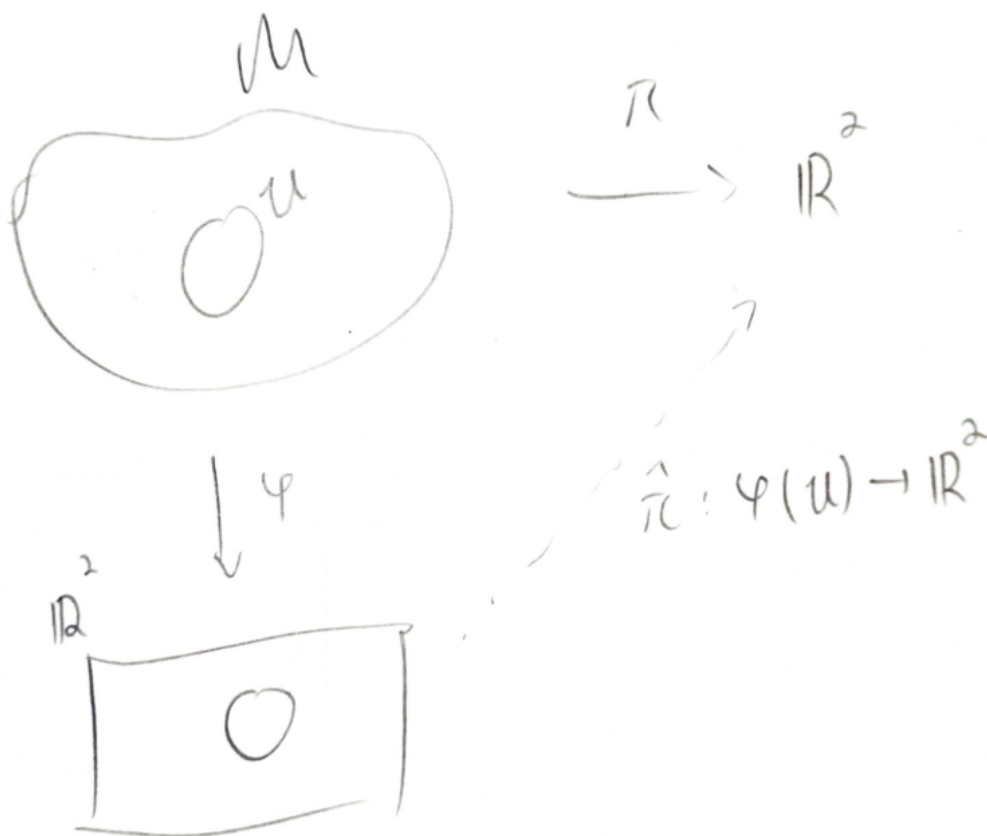
**חישוב I:** בקואורדינטות מקומיות ניקח

$$\mathcal{U}_1 = \{(x, y, z) \in S^1 \mid z > 0\}$$

עם

$$\begin{aligned} \varphi_1: \mathcal{U}_1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, y) \end{aligned}$$

ראו איור 1.10 נחשב את ההעתקה המקומית.



איור 1.10

$$\hat{\pi}_1: (x, y) \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \xrightarrow{\pi} (x, y)$$

לכן  $\hat{\pi}_1 = \mathbb{1}_{\varphi_1(\mathcal{U}_1)}$  ועל כן  $D\hat{\pi}_1 = I_2$ . נקבל כי  $\mathcal{U}_1$  נקודה רגולרית. ניקח מפה נוספת

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2 &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid x < 0\} \\ \varphi_2(x, y, z) &= (y, z) \end{aligned}$$

ואז

$$\hat{\pi}_2: (y, z) \xrightarrow{\varphi_2^{-1}} (\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z) \xrightarrow{\pi} (-\sqrt{1-y^2-z^2}, y)$$

ולכן

$$D\hat{\pi}_2(x, z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{\dots}} & \frac{z}{\sqrt{\dots}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (y, z)$$

לא על אם ורק אם  $z = 0$ . לכן הנקודות על קו המשווה חיתוך עם  $\mathcal{U}_2$  הן נקודות קריטיות. עם נכסה את  $S^2$  במפות קואורדינטות, חישוב דומה יראה שהנקודות הקריטיות הן קו המשווה. לכן הערכים הקריטיים יהיו מעגל היחידה.

**חישוב II:** נרחיב את  $\pi$  להעתקה

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, y)\end{aligned}$$

ולכן  $\pi$  לינארית ונסמן  $\pi(x) = Ax$  אז  $D\pi = A$  ולכן  $\text{Im } D\pi(x) = \mathbb{R}^2$  ו- $\ker D\pi(x) = \text{span}(0)$  אז  $\pi_M = \pi|_M: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  נסמן  $\pi_M$  אז<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}D\pi|_{T_p M} &= D\pi_M(p): T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\rightarrow A \cdot u\end{aligned}$$

$D\pi_M(p)$  לינארית ממרחב ממימד 2 למרחב ממימד 2 ולכן אינה על אם ורק אם  $\ker D\pi_M(p) \neq \{0\}$  נסמן  $v = (0, 0, 1) = \ker D\pi$  מתקיים

$$\ker D\pi_M(p) = \ker D\pi(p)|_{T_p M} = \ker D\pi(p) \cap T_p M = \{\lambda \vec{v}\} \cap T_p M$$

לא טריוויאלי אם ורק אם  $\vec{v} \in T_p M$  אם ורק אם  $\vec{v}$  וקטור משיק ל- $M$  ב- $p$ .

**משפט 1.5.26 (Sard).** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה. אז  $\{y \in N \mid y \text{ is a critical value}\}$  קבוצה בעלת מידה אפס. (ביחס למידת לבג)

**דוגמה 1.5.27.**

$$\{M \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \mid \text{rank}(M) < \min\{m, n\}\}$$

קבוצה בעלת מידה אפס.

**טענה 1.5.28.** תהי  $C \in \mathbb{R}^m$  זניחה ותהי  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  חלקה. אז  $f(C)$  זניחה.

**מסקנה 1.5.29.** תהי  $M$  יריעה עם מפות  $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$ , כאשר  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ . נקבל העתקה

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \psi(\mathcal{V})$$

חלקה. לכן  $\varphi(C \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V})$  זניחה ב- $\mathbb{R}^m$  אם ורק אם  $\psi(C \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V})$  זניחה ב- $\mathbb{R}^m$ .

**הגדרה 1.5.30.**  $C \subset M$  זניחה אם לכל מפה  $(\mathcal{U}, \varphi)$  מהאטלס החלק  $\varphi(C \cap \mathcal{U})$  זניחה ב- $\mathbb{R}^m$ .

**דוגמה 1.5.31.** אם  $N^n \subseteq M^m$  ת-יריעה אז  $N$  זניחה ב- $M$ .

**דוגמה 1.5.32.** בהטלת  $S^2$  על  $\mathbb{R}^2$  ראינו כי הערכים הקריטיים הם מעגל היחידה, וזאת קבוצה זניחה.

**הערה 1.5.33.** משפט Sard מתייחס לערכים קריטיים. הטענה איננה נכונה עבור נקודות קריטיות. עבור ההעתקה

$$\begin{aligned}f: M &\rightarrow N \\ p &\rightarrow x_0 \in N\end{aligned}$$

כל נקודה ב- $M$  היא קריטית, ולכן לא זניחה.

**הערה 1.5.34.** ייתכן כי  $\text{Im}(f)$  מכילה רק ערכים קריטיים. במקרה זה  $\text{Im}(f)$  זניחה ב- $N$ .

**תרגיל 33.** בנו העתקה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  כל שקבוצת הערכים הקריטיים של  $f$  היא  $\mathbb{Q}$ .

**מסקנה 1.5.35.** 1. אם  $f: M \rightarrow N$  ו- $\dim M < \dim N$ , הערכים הקריטיים של  $f$  ב- $N$  זאת  $\text{Im}(f)$ . אז  $\text{Im}(f)$  בעלת מידה אפס.

**דוגמה 1.5.36.** אין העתקה חלקה מ- $I \rightarrow I^2$  עם  $\text{Im}(f) = I^2$ .

2. קבוצת הערכים הרגולריים צפופה ב- $N$ . אם  $\mathcal{U} \subseteq \text{Im}(f)$  פתוחה, קיים ערך רגולרי ב- $\text{Im}(f)$ .

**דוגמה 1.5.37.** אם  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  לא קבועה אז  $(f(x), f(y)) \subseteq \text{Im}(f)$ , ויש ערך רגולרי ב- $\text{Im}(f)$ .

<sup>3</sup>מתקיים

$$\begin{aligned}D\pi_M: TM &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (p, u) &\rightarrow A \cdot u\end{aligned}$$

כאשר  $u \in T_p M$

הוכחה (Sard). נוכיח עבור המקרה  $\dim M \leq \dim N$ . המקרה הכללי בספר של Milnor. נסמן ב- $C \subseteq M$  את קבוצת הנקודות הקריטיות של  $f$ . קבוצת הערכים הקריטיים היא  $f(C) \subseteq N$ . נכסה את  $M$  על ידי מספר בן-מניה של מפות  $(\mathcal{V}_i, \psi_i)$ . את  $f^{-1}(\mathcal{V}_i)$  נכסה על ידי מספר בן-מניה של מפות  $(\mathcal{U}_{i,j}, \varphi_{i,j})$  כך  $f(\mathcal{U}_{i,j}) \subseteq \mathcal{V}_i$ . מתקיים

$$f(C) = \bigcup_{i,j} f(C \cap \mathcal{U}_{i,j})$$

ומספיק להראות כי  $f(C \cap \mathcal{U}_{i,j})$  זניחות. מספיק להוכיח עבור הצגות מקומיות של  $f$ . כלומר, מספיק להוכיח את המשפט עבור  $f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . הינה איחוד בן-מניה של כדורים, לכן ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות כי  $\mathcal{U}$  כדור עם סגור בתחום הגדרתה של  $f$ .

א. **המקרה  $m = n$ :** נבחר  $\varepsilon > 0$ . אז  $|Df|: \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ולכן רציפה במ"ש. לכן קיים  $\delta > 0$  כך שאם  $\|x - y\| < \sqrt{m}\delta$  אז  $\|Df(x) - Df(y)\| < \varepsilon$ . יהי  $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}_i$  כיסוי על ידי קוביות על צלע  $\delta$  עם  $\sum \text{Vol} \mathcal{U}_i < 2^m \text{Vol}(\mathcal{U})$ . אם  $C \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$ , קיימת  $x \in \mathcal{U}_i$  קריטית, כלומר  $|Df(x)| = 0$ . אז  $|Df(y)| < \varepsilon$  לכל  $y \in \mathcal{U}_i$ . יהי  $I = \{i \mid \mathcal{U}_i \cap C \neq \emptyset\}$ . אז  $\bigcup_{i \in I} f(\mathcal{U}_i)$  כיסוי של  $f(C)$  כעת

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \text{Vol}(f(\mathcal{U}_i)) &= \sum_I \int_{\mathcal{U}_i} |Df(x)| dx_1, \dots, dx_m \\ &\leq \varepsilon \sum_{i \in I} \text{Vol}(\mathcal{U}_i) \leq \varepsilon \text{Vol}(\mathcal{U}) \end{aligned}$$

ולכן  $f(C)$  זניחה.

ב. **המקרה  $m < n$ :** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  ונרחיב את  $f$  ל- $F: M^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow N^n$  ע"י  $F(x, s) = f(x)$ . אז קבוצת הערכים הקריטיים של  $f$  היא  $\text{Im}(f)$  גם  $\text{Im}(F) = \text{Im}(f)$ . לכן תמונת  $F$  היא קבוצת הערכים הקריטיים של  $f$ . קבוצה זאת זניחה לפי המקרה הקודם. ■

ראינו כי אם  $M^m$  יריעה קומפקטית, קיים שיכון  $M \xrightarrow{i} \mathbb{R}^N$  עבור  $N$  גדול. ננסה להקטין את  $N$  בעזרת משפט Sard. נרצה להטיל את  $i(M)$  בכיוון  $v$  על  $v^\perp$  כך ש- $v^\perp \circ i: M \rightarrow v^\perp$  יהיה שיכון.  $M$  קומפקטית ולכן מספיק לבדוק כי זאת אימרסיה חד-חד ערכית.

**אימרסיה:** מתקיים כי

$$D(\pi_v \circ i) = D\pi_v \circ Di$$

לכן

$$\ker(D\pi_v \circ Di) = \{u \mid Di(u) \in \ker D\pi_v\}$$

$Di$  חד-חד ערכית (כי  $i$  אימרסיה) לכן  $\ker D\pi_v \circ Di = \{0\}$  אם ורק אם  $\ker D\pi_v = \{0\}$ . מתקיים  $\ker D\pi_v = \{0\}$  אם ורק אם  $\pi_v \circ i$  אימרסיה. אז  $\pi_v \circ i$  אימרסיה אם ורק אם לכל  $x \in M$ , החיתוך  $\{ \lambda \} \cap I_m Di(x)$  טריוויאלי. זה שקול לכך שלכל  $x \in M$ ,  $\lambda v \notin \text{Im} Di(x)$  (אם  $v \in \text{Im} Di(x)$  אז  $v$  אינו משיק ל- $i(M)$  באף נקודה). נגדיר העתקה

$$g: TM \setminus M \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}$$

גיאומטרית, קבוצת הכיוונים האפשריים להטלה ב- $\mathbb{R}^N$ . נגדיר

$$(x, u) \mapsto [Di(x)(u)] = \{ \lambda Di(x)(u) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \in \mathbb{R}P^{N-1}$$

אם  $\dim TM = 2m < N - 1 = \dim \mathbb{R}P^{N-1}$ , לפי מסקנה ממשפט Sard,  $\text{Im} g$  זניחה.

**חד-חד ערכיות:** נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} P: M \times M \setminus \Delta M &\rightarrow \mathbb{R}P^{N-1} \\ (x, y) &\rightarrow \{ \lambda (i(x) - i(y)) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

ואז כיוון בתמונה הוא בדיוק כיוון שאסור להטלה, כי זהו ישר המקביל לישר דרך  $i(x), i(y)$ . זה תנאי לזה ש- $\pi_v \circ i(x) = \pi_v \circ i(y)$ . כלומר  $\pi_v \circ i$  לא חד-חד ערכית. אם  $2m = \dim M \times M \setminus \Delta < \dim \mathbb{R}P^{N-1} = N - 1$  נקבל כי  $\text{Im} P$  זניחה. אז אם  $\lambda v \notin \text{Im} P \cup \text{Im} g$ , נקבל שיכון  $\pi_v \circ i: M \rightarrow v^\perp \cong \mathbb{R}^{N-1}$ . זה מתקיים כמעט לכל  $v$  כי  $\text{Im} P \cup \text{Im} g$  זניחה. התהליך נעצר כאשר  $2m = N - 1$ , כלומר  $N = 2m + 1$ .

**הערה 1.5.38.** המקרה האופטימלי הוא  $N = 2m$ . עם חישוב קצת יותר זהיר מקבלים ש- $\pi_v \circ i$  אימרסיה כמעט לכל  $v$  גם כאשר  $N = 2m + 1$ , כלומר ניתן לבנות אימרסיה  $M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ . אין דרך להבטיח חד-חד ערכיות באותו האופן. ניתן להיפטר מנקודות חיתוך על ידי דיפורמציות טופולוגיות.

## 1.6 טרנספורסליות

**הגדרה 1.6.1.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$  עם  $\dim V < \infty$ . תתי-מרחבים  $W_1, W_2 \leq V$  נקראים **טרנספורסליים** אם  $W_1 + W_2 = V$ .  
**הערה 1.6.2.**  $W_1, W_2$  טרנספורסליים אם ורק אם  $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$  או  $\text{codim } (W_1 \cap W_2) = \text{codim } W_1 + \text{codim } W_2$ .

**הגדרה 1.6.3.**  $M_1, M_2 \subseteq N$  תתי יריעות יקראו **טרנספורסליות** ונסמן  $M_1 \cap M_2$  אם לכל  $x \in M_1 \cap M_2$  מתקיים  $T_x M_1 + T_x M_2 = T_x N$ .

**דוגמאות.** 1. אם  $\dim M_1 + \dim M_2 < \dim N$  אז  $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$  אם ורק אם  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ .

2. אם  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  שני מעגלים נחתכים, סכום הישרים המשיקים בנקודות החיתוך הוא כל  $\mathbb{R}^2$ .

3. אם  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  שני מעגלים משיקים, בנקודת ההשקה סכום המרחבים המשיקים הוא  $\mathbb{R}$ , ולכן המעגלים אינם טרנספורסליים.

**הגדרה 1.6.4.** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה ותהי  $L^l \subseteq N^n$  תת-יריעה. נאמר כי  $f$  **טרנספורסלית ל- $L$**  ונסמן  $L$  אם לכל  $p \in M$  עבורה  $f(p) \in L$  מתקיים  $\text{Im } Df(p) \cap T_{f(p)} L = \text{Im } Df(p)$ .

**הערה 1.6.5.** אם  $f$  שיקוף,  $L$  אם ורק אם  $f \cap L$  אם ורק אם  $f \cap L$ .

ראינו כי עבור  $f: M \rightarrow N$  חלקה ו- $y \in N$  ערך רגולרי בתמונה,  $f^{-1}(y)$  תת-יריעה של  $M$ . אנו רוצים להכליל זאת.

**משפט 1.6.6.** תהי  $f: M \rightarrow N$  חלקה ו- $L$  תת-יריעה כך ש- $L \cap f$  וגם  $f^{-1}(L) \neq \emptyset$ . אזי  $f^{-1}(L)$  תת-יריעה של  $M$  ומתקיים

$$\text{codim}_M (f^{-1}(L)) = \text{codim}_N (L)$$

**תרגיל 34.** הוכיחו את המשפט.

## 1.7 יריעות עם שפה

**הגדרה 1.7.1.** תהי  $\hat{M}^m$  יריעה ותהי  $g: \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה עם 0 ערך רגולרי. אז  $\{g = 0\} \subset \hat{M}$  תת-יריעה ממימד  $m - 1$ . קבוצת הנקודות  $\{x \mid g(x) \leq 0\} \subseteq \hat{M}$  נקראת **יריעה עם שפה**. **השפה של  $M$**  היא

$$\partial M := \{x \mid g(x) = 0\}$$

**דוגמה 1.7.2.** ניקח  $\hat{M} = \mathbb{R}^n$  ו- $g = \sum x_i^2 - 1$ . אז 0 ערך רגולרי ומתקיים  $\{g \leq 0\} = \overline{D^n}$  כדור היחידה הסגור. מתקיים  $\partial \overline{D^n} = S^{n-1}$ .

**דוגמה 1.7.3.** אינטרוול סגור, או אינטרוול חצי-פתוח חצי-סגור הם יריעות עם שפה.

**הערה 1.7.4.** קיבלנו מרחב שבו סביבת כל נקודה  $x$  הומומורפית לקבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$  או לקבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}_+^n := \{\vec{x} \mid x_n \geq 0\}$ . ניתן להגדיר דרך סביבות אלה יריעה עם שפה בדומה להגדרת יריעה.

**הגדרה 1.7.5.** תהיינה  $M$  יריעה עם שפה ו- $N$  יריעה.  $f: M \rightarrow N$  נקראת **חלקה** אם ניתן להרחיב את  $f$  ל- $\hat{M} \rightarrow N$  חלקה.

**הגדרה 1.7.6.**  $f: M \rightarrow N$  כאשר  $M, N$  יריעות עם שפה נקראת **חלקה** אם  $f: M \rightarrow \hat{N}$  חלקה.

**תרגיל 35 (קשה).** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  כאשר  $\partial M \neq \emptyset$ . יהי  $y \in N$  ערך רגולרי של  $f$  ושל  $f|_{\partial M}$ . אז  $V = f^{-1}(y)$  תת-יריעה עם שפה של  $M$  ומתקיים  $\dim V = m - n$  וגם  $\partial V = V \cap \partial M$ .

**הגדרה 1.7.7.** יריעה  $M$  קומפקטית ללא שפה נקראת **סגורה**.

**הערה 1.7.8.** תהי  $M$  יריעה עם שפה. אז  $\partial M$  יריעה בלי שפה. כלומר  $\partial \partial M = \emptyset$ .

**הגדרה 1.7.9.**  $M$  נקראת **יריעה עם פינות** אם לכל  $x \in M$  קיימת מפה  $(\mathcal{U}, \varphi)$  עם

$$\varphi: \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i: x_i \geq 0\}$$

והאטלס מתואם.

**דוגמה 1.7.10.** קובייה  $I^n$  היא יריעה עם פינות.

**דוגמה 1.7.11.** גופים פלטוניים הם יריעות עם פינות.

**הערה 1.7.12.** יריעה טופולוגית עם פינות היא בדיוק יריעה טופולוגית עם שפה. אבל, בקטגוריה של יריעות חלקות, יריעה עם פינות איננה בהכרח יריעה עם שפה, אלא רק להפך.

הרצאה 5  
18 באוקטובר  
2018

## 1.8 הומוטופיה

## 1.9 הגדרות

**שאלה 1.9.1.** תהיינה  $f, g: M \rightarrow N$  העתקות בין יריעות חלקות. מתי קיימת דפורמציה מ $^{-}f$  ל $^{-}g$ ?

**הגדרה 1.9.2.**  $f$  הומוטופית ל $^{-}g$  אם קיימת העתקה  $\Phi: M \times [0, 1] \rightarrow N$  חלקה המקיימת

$$\Phi(x, 0) = f(x)$$

$$\Phi(x, 1) = g(x)$$

**תרגיל 36.** הראו כי הומוטופיה בין העתקות היא יחס שקילות.

**דוגמה 1.9.3.** כל  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  הומוטופית ל $^{-}0$   $g(x) \equiv 0$ . נגדיר  $\Phi(x, t) = t \cdot f(x)$ . ראינו כי הומוטופיה הינה יחס שקילות, לכן כל שתי העתקות כאלו הומוטופיות.

**דוגמה 1.9.4.** תהיינה  $M = N = S^n$  עם ההעתקות

$$\varphi: S^n \rightarrow S^n$$

$$x \rightarrow x$$

ר

$$\psi: S^n \rightarrow S^n$$

$$x \rightarrow -x$$

אז  $\varphi, \psi$  עבור  $n$  זוגי, ההעתקות אינן הומוטופיות (נראה בהמשך).

## 1.9.5 הגדרה

$$v: M \rightarrow TM$$

$$x \rightarrow (x, v_x)$$

(כאשר כל  $v_x \in T_x M$ ) נקרא **שדה וקטורי**. הוא יקרא **חלק** אם הוא חלק כהעתקה  $M \rightarrow TM$ .

**דוגמה 1.9.6.** באינפי, הגדרנו שדה וקטורי להיות העתקה  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . בהגדרה שלנו

$$v: \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$$

$$x \rightarrow (x, v_x \in T_x \mathbb{R}^n)$$

כאשר  $T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ . ניתן לתאר את  $v$  בעזרת העתקה  $x \rightarrow v_x \in \mathbb{R}^n$ .

תהיינה  $M$  יריעה, ו $^{-}(\mathcal{U}, \varphi)$  מפה. אז

$$D\varphi: T\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n$$

$$v|_{\mathcal{U}} \rightarrow \hat{v}$$

הינו שדה וקטורי על  $\varphi(\mathcal{U})$ . ההעתקה היא

$$(x, v_x) \rightarrow (\varphi(x), D\varphi_x \cdot v_x)$$

ו $^{-}v$  חלק אם ורק אם כל הצגה  $\hat{v}$  חלקה כפונקציה  $\varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**הגדרה 1.9.7.**  $v: M \rightarrow TM$  לא מנוון אם  $v_x \neq 0$  לכל  $x$ .

**טענה 1.9.8.** נניח כי על  $S^n$  קיים שדה וקטורי לא מנוון. אז  $\varphi, \psi$  מדוגמה 1.9.4 הומוטופיות.

הוכחה. נבחר  $v$  לא־מנוון ונניח בה"כ כי  $\|v_x\| = 1 \forall x \in S^n$ . נגדיר

$$\Phi: S^n \times [0, \pi] \rightarrow S^n$$

$$(x, \theta) \rightarrow x \cos \theta + v_x \sin \theta$$

נסתכל על  $\text{Span}(x, v_x) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  כמתואר באיור מתקיים

$$\langle \Phi(x, \theta), \Phi(x, \theta) \rangle = \|x\|^2 \cos^2 \theta + 2\langle x, v_x \rangle \cos \theta \sin \theta + \|v_x\|^2 \sin^2 \theta = 1$$

וגם  $\Phi(x, 0) = x = \varphi(x)$  ו $^{-}\Phi(x, \pi) = -x = \psi(x)$ , לכן קיבלנו הומוטופיה כנדרש. ■

**משפט 1.9.9.** עבור  $n$  זוגי,  $\varphi$  איננה הומוטופית ל- $\psi$ .

הוכחה. בעתיד.

**מסקנה 1.9.10.** על  $S^{2k}$  לא קיים שדה וקטורי לא מנוון. (אי-אפשר לסרק את הקיפוד)

**מסקנה 1.9.11.**

$$S^{2k} \times \mathbb{R}^{2k} \not\cong TS^{2k}$$

כי עבור  $S^{2k} \times \mathbb{R}^{2k}$  קיים שדה וקטורי לא מנוון.

**דוגמה 1.9.12.** לכל  $n$  אי-זוגי מתקיים  $S^{2m+1} \subseteq \mathbb{R}^{2m+2} = \mathbb{C}^{m+1}$ . לכל  $x = (z_0, \dots, z_m) \in S^{2m+1}$  נגדיר  $v_x = (iz_0, \dots, iz_m) \perp x$  וקטור משיק. אז  $v: x \rightarrow ix$  שדה וקטורי לא מנוון ולכן  $\varphi \cong \psi$ .

**משפט 1.9.13.** תהייה

$$\begin{aligned} \varphi: S^n &\rightarrow S^n \\ x &\rightarrow x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi: S^n &\rightarrow S^n \\ x &\rightarrow x_0 \end{aligned}$$

אז  $\psi \not\cong \varphi$ .

הוכחה. בעתיד.

**מסקנה 1.9.14.** תהי  $f: \bar{D}^{n+1} \rightarrow S^n$  חלקה. אזי  $f|_{S^n} \neq \mathbb{1}_{S^n}$ . כלומר, אין ריטרקציה חלקה מהדיסק לספירה.

**הערה 1.9.15.** נובע מכך עם אנליזה כי אין ריטרקציה רציפה מהדיסק לספירה.

הוכחה. ניתן שתי הוכחות.

1. נניח בשלילה כי  $f|_{S^n} = \mathbb{1}_{S^n}$ . נגדיר הומוטופיה

$$\begin{aligned} \Phi: S^n \times I &\rightarrow S^n \\ (x, t) &\rightarrow f(t \cdot x) \end{aligned}$$

ונקבל  $\Phi(x, 0) = f(0) = \text{const}$  ו- $\Phi(x, 1) = f(x) = x$  בסתירה למשפט.

2. נניח בשלילה כי  $f|_{S^n} = \mathbb{1}_{S^n}$ . יהי  $y \in S^n$  ערך רגולרי של  $f$  (קיים לפי Sard).  $y$  ערך רגולרי גם של  $f|_{S^n} = \mathbb{1}_{S^n}$  (כל ערך הוא רגולרי של הזהות). מתרגיל,  $L := f^{-1}(y)$  תת-יריעה עם שפה ממימד 1 ב- $\bar{D}^{n+1}$ . לכן, כל רכיב קשירות הוא  $S^1$  או קטע. כיוון ש- $f^{-1}(y)$  קבוצה סגורה בקבוצה קומפקטית  $\bar{D}$ , היא קומפקטית בעצמה, ולכן כל הקטעים אם ישנם הינם סגורים. בנוסף,  $\partial L = f^{-1}(y) \cap \partial \bar{D}^{n+1} = \{y\}$  כי  $\partial L = f|_{\partial D}^{-1}(y)$ . זאת סתירה, כי ליריעה קומפקטית עם שפה יש מספר זוגי של נקודות שפה (קצוות של קטעים סגורים). ■

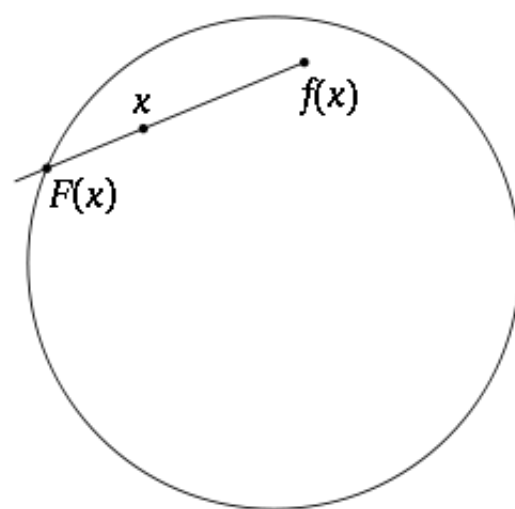
**מסקנה 1.9.16 (משפט Brouwer).** לכל העתקה (חלקה)  $f: \bar{D}^n \rightarrow \bar{D}^n$  יש נקודות שבת.

הוכחה. נניח כי לכל  $x$  מתקיים  $f(x) \neq x$ . נגדיר

$$\lambda_x = \{f(x) + t(x - f(x)) \mid t > 0\}$$

קרן שמתחילה ב- $f(x)$  ועוברת דרך  $x$ . ראו איור 1.11.  $\lambda_x$  חותכת את שפת הדיסק בנקודה אחת שנסמנה  $F(x)$ . אז  $F(x) = \lambda_x \cap \partial D^n$ .  $F(x) = x$  אם  $x \in \partial D^n$  ואם  $x \in \partial D^n$  זאת סתירה למסקנה שאין ריטרקציה מהדיסק לספירה. ■

**הערה 1.9.17.** המשפט נכון גם עבור העתקות רציפות.



איור 1.11: העתקה למשפט בראואר.



## פרק 2

# פיצול היחידה

**הגדרה 2.0.1.** יהי  $\{\mathcal{U}_\alpha\}$  כיסוי של מרחב טופולוגי  $X$ . הכיסוי נקרא **סופי מקומי** אם לכל  $x \in X$  קיימת סביבה  $\mathcal{W}$  כך ש-

$$\#\{\alpha \mid \mathcal{W} \cap \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset\}$$

סופי.

**הגדרה 2.0.2.** יהי  $\{\mathcal{V}_\beta\}_\beta$  כיסוי של מרחב טופולוגי  $X$ . כיסוי  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$  **עידון** (refinement) של הכיסוי  $\{\mathcal{V}_\beta\}_\beta$  אם לכל  $\alpha$  קיים  $\beta$  עבורו  $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\beta$ .

**הגדרה 2.0.3.** מרחב  $X$  נקרא **פרקומפקטי** (paracompact) אם לכל כיסוי פתוח  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$  קיים עידון פתוח סופי מקומי.

**משפט 2.0.4.** כל יריעה טופולוגית האוסדורף בת־מנייה שנייה היא פרקומפקטית.

**הגדרה 2.0.5.** תהי  $M$  יריעה חלקה ותהי  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה. **התומך** (support) של  $f$  הוא

$$\text{supp}(f) = \{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$$

**הגדרה 2.0.6.** יהי  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$  כיסוי פתוח של יריעה  $M$ . **פיצול יחידה** (partition of unity) הוא אוסף  $\Lambda$  של פונקציות חלקות  $\lambda_\alpha: M \rightarrow [0, 1]$  המקיימות את התנאים הבאים.

$$1. \text{supp} \lambda_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$$

$$2. \{\text{supp} \lambda_\alpha\}_\alpha \text{ כיסוי סופי מקומי.}$$

$$3. \text{לכל } x \in M \text{ מתקיים } \sum_\alpha \lambda_\alpha(x) = 1.$$

**הערה 2.0.7.** פיצול היחידה תלוי בבחירת הכיסוי.

**משפט 2.0.8.** נניח כי  $M$  יריעה. אז לכל כיסוי פתוח קיים פיצול יחידה.

הוכחה. נציג רק את רעיון ההוכחה. ניקח כיסוי פתוח  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ . נניח בה"כ כי  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$  סופי־מקומי<sup>2</sup>. נבחן כיסוי "קצת יותר עדין"  $\{\mathcal{V}_\alpha\}_\alpha$ <sup>3</sup> כך ש- $\{\mathcal{V}_\alpha\}_\alpha$  כיסוי פתוח וגם  $\overline{\mathcal{V}_\alpha} \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ . נגדיר העתקה חלקה המקיימת

$$\Psi_\alpha: M \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow \begin{cases} 1 & x \in \overline{\mathcal{V}_\alpha} \\ 0 & x \text{ is in a small neighbourhood of } M \setminus \mathcal{U}_\alpha \end{cases}$$

זה קירוב של פונקציית האינדיקטור. לכל  $x \in M$  קיים מספר סופי של  $\alpha$  כך ש- $\Psi_\alpha(x) \neq 0$ . לכן  $\Psi(x) := \sum_\alpha \Psi_\alpha(x)$ <sup>4</sup>. נגדיר

$$\lambda_\alpha(x) = \frac{\Psi_\alpha(x)}{\Psi(x)} \text{ אז}$$

$$\text{supp}(\lambda_\alpha) = \text{supp}(\Psi_\alpha) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$$

וגם

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha(x) = \sum_\alpha \frac{\Psi_\alpha(x)}{\Psi(x)} = 1$$

$\{\text{supp}(\lambda_\alpha)\}_\alpha$  כיסוי סופי מקומי כי זה נכון ל- $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ .

<sup>1</sup> יש מספר סופי של מחוברים שונים מאפס, לכן הסכום סופי.

<sup>2</sup> אחרת נחליף בעידון סופי מקומי

<sup>3</sup> קיים, אך דורש הוכחה

<sup>4</sup> מוגדר היטב, חיובית כי  $V_\alpha$  כיסוי

## 2.1 מטריקה רימנית

שימוש של פיצול היחידה הוא הוכחה לכך שעל כל יריעה קיימת מטריקה רימנית.

**הגדרה 2.1.1.** מכפלה פנימית היא תבנית בילינארית סימטרית מוגדרת חיובית  $\rho: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  כאשר  $V$  מרחב קטורי.

**הגדרה 2.1.2.** תהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה. מטריקה רימנית על  $\mathcal{U}$  היא משפחה חלקה של מכפלות פנימיות  $\rho_x: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  שתלויות ב- $x \in \mathcal{U}$  באופן חלק.

**הערה 2.1.3.** נחשוב על ההעתקות כעל העתקות  $\rho_x: T_x \mathbb{R}^n \times T_x \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**הגדרה 2.1.4.** תהי  $M$  יריעה (חלקה). מטריקה רימנית על  $M$  היא בחירה חלקה של מכפלות פנימיות  $\rho_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , תלויה באופן חלק ב- $p$ .

**הערה 2.1.5.**  $\rho_p$  חלקה אם ורק אם בקואורדינטות. מתקבל מכפלה פנימית

$$\varphi_{\alpha,*} \rho_p: T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n \times T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

ואז

$$\hat{\rho}_\alpha = \varphi_{\alpha,*} \rho_p(v, w) = \rho_p(D\varphi_\alpha^{-1}(p)v, D\varphi_\alpha^{-1}(p)w)$$

**הערה 2.1.6.** הדבר שקול לכך שלכל שני שדות וקטוריים חלקים  $v, w: M \rightarrow TM$ ,  $\rho(v, w)$  פונקצייה חלקה  $M \rightarrow \mathbb{R}$  עם ההגדרה  $\rho(v, w)(p) = \rho_p(v_p, w_p)$ .

בעזרת מטריקה רימנית ניתן להגדיר אורך של וקטור משיק. אם  $v \in T_p M$  נגדיר  $\|v\|_p^2 = \rho_p(v, v)$  האורך של  $v$  ביחס למטריקה הרימנית  $\rho$ . ניתן כך להגדיר גם אורך של מסילה  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  על ידי

$$\text{len}(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt$$

ניתן להגדיר זווית בין שני וקטורים משיקים  $u, v \in T_p M$  על ידי

$$\rho_p(u, v) = \|u\| \|v\| \cos \theta$$

**משפט 2.1.7.** על כל יריעה יש מטריקה רימנית.

הוכחה. ב- $\mathbb{R}^n$  ישנה מטריקה רימנית אוקלידית

$$\rho_0(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

לכל נקודה  $p \in \mathbb{R}^n$ . בהינתן מפה  $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$  נקבל

$$\rho_\alpha := \varphi_\alpha^* \rho_0(v, w) := \rho_0(D\varphi_\alpha v, D\varphi_\alpha w)$$

מטריקה רימנית על  $\mathcal{U}_\alpha$ . נבחר כיסוי  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$  על ידי מפות מתואמות. יהי  $\{\lambda_\alpha\}_\alpha$  פיצול היחידה המתאים ל- $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$  ונגדיר

$$\bar{\rho}_\alpha(p) = \begin{cases} \lambda_\alpha(p) \cdot \rho_\alpha(p) & p \in \mathcal{U}_\alpha \\ 0 & p \notin \mathcal{U}_\alpha \end{cases}$$

תבנית חלקה. אז  $\bar{\rho}(p) = \sum_\alpha \bar{\rho}_\alpha(p)$  תבנית חלקה (הסכום סופי מקומית), בילינארית סימטרית ומוגדרת חיובית כי  $\sum \lambda_\alpha(p) = 1$  ולכן קיים  $\lambda_\alpha(p) \neq 0$  והסכום אינו מנוון. ■

נתאר הוכחה נוספת.

הוכחה. ממשפט Whitney קיים שיכון  $i: M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ . נגדיר  $i^* \rho_0(p) := \rho_0(Di(p)(v), Di(p)(w))$  לכל  $v, w \in T_p M$ , מטריקה רימנית על  $M$ . ■

**תרגיל 37.** תהי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  תתי-יריעה. ההגדרה של פונקציות חלקות  $M \rightarrow \mathbb{R}^k$  בעזרת אטלס חלק שקולה להגדרה הבאה:  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  חלקה אם ורק אם ניתן למצוא סביבה  $\mathcal{U}$  של  $M$  ב- $\mathbb{R}^n$  והרחבה חלקה  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

**תרגיל 38.** בדקו כי שתי ההגדרות שראינו ליריעה עם שפה שקולות. <sup>5</sup>

## 2.2 יריעות מרוכבות

**הגדרה 2.2.1.** יריעה מרוכבת זו יריעה טופולוגית  $X$  עם אטלס מתואם של מפות  $\{\mathcal{U}_\alpha \varphi_\alpha\}_\alpha$  כאשר

$$\varphi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$$

הומאומורפיזם והתמונה פתוחה. כאן האטלס **מתואם** כאשר פונקציות המעבר  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  הולומורפיות.

**הערה 2.2.2.** על יריעות מרוכבות אין פיצול יחידה.

**דוגמה 2.2.3 (המישור ההיפרבולי).** נגדיר  $\mathbb{H} := \{(x, y) \mid y > 0\}$ . על המישור ההיפרבולי יש מטריקה היפרבולית:

$$\rho_{(x,y)}: T_{(x,y)}\mathbb{H} \times T_{(x,y)}\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \rightarrow (x_1, y_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

המטריצה  $\begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$  המייצגת את  $\rho_{(x,y)}$  תלויה בצורה חלקה ב- $(x, y)$ . אם  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  עקומה, האורך שלה הוא

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_{\mathbb{H}} dt = \int_0^1 \frac{\|\dot{\gamma}\|_2}{\gamma(t)} dt$$

**דוגמה 2.2.4.** נסתכל על המטריקה האוקלידית ב- $\mathbb{R}^2$  ונסמנה  $\rho_{\text{eucl}}$ . תהי  $\varphi: (x, y) \rightarrow (r, \theta)$  הצגה הפולארית.  $\rho_{\text{eucl}}$  בקואורדינטות מקומיות

$$\text{לפי } \rho \text{ נתונה על ידי } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

**דוגמה 2.2.5.** תהי  $(M, \rho)$  יריעה רימנית ותהי  $x, y \in M$  אז  $T_x M, T_y M$  מרחבים שונים, אבל שניהם מזוהים עם  $\mathbb{R}^n$  על ידי  $Dp$ .

$$\hat{\rho}_x, \hat{\rho}_y: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

הצגות מקומיות של  $\rho_x, \rho_y$  בהתאמה.



## פרק 3

# תבניות פולינאריות

**הגדרה 3.0.1.** יהי  $V$  מ"ו סוף מימדי מעל  $\mathbb{R}$ . נסמן  $n := \dim V$ . **תבנית פולינארית אנטיסימטרית ממעלה  $k \geq 0$**  היא פונקציה  $\lambda: V^k \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת את התכונות הבאות.

1.  $\lambda$  לינארית בכל רכיב.

2. החלפת שני וקטורים משנה סימן.

$$\lambda(v_1, \dots, v_k) = \text{sgn} \sigma \lambda(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

**סימון 3.0.2.**  $\Omega^d(v)$  מרחב התבניות הפולינאריות ממעלה  $d$ .

**דוגמה 3.0.3.**  $\Omega^0(V) \cong \mathbb{R} : d = 0$

$d = 1$ :  $\Omega^1(V) = V^* = \text{hom}(V, \mathbb{R})$ . אם  $V = \mathbb{R}^n$  דוגמה לתבנית היא  $dx_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$  אז  $V^* = \text{span}\{dx_1, \dots, dx_n\}$  הבסיס הסטנדרטי של  $V^* = (\mathbb{R}^n)^*$ .

**מרחב וקטורים כלל:** יהי  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס של  $V$ . כל  $u \in V$  ניתן להציג באופן יחיד  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  ומתקיים  $dv_i(u) = \alpha_i$ . אז  $V^* = \text{span}\{dv_1, \dots, dv_n\}$  **הבסיס הדואלי ל- $B$** . הוא מסומן  $B^*$ . מתקיים  $\dim V = \dim V^* = n$  לכן  $V \cong V^*$ .<sup>1</sup>

$d = 2$ :  $\Omega^2(V)$  הוא מרחב התבניות הבילינאריות האנטיסימטריות. תהי  $\lambda: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , בהינתן בסיס  $B$  של  $V$  מתקבל

$$\lambda(v, w) = [v]_B^T \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n} \\ -\lambda_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{1,n} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} [w]_B$$

כאשר המטריצה הינה אנטיסימטרית. מתקיים  $\dim \Omega^2(V) = \frac{n(n-1)}{2}$ .

נניח  $T: V \rightarrow W$  לינארית. אז

$$T^*: \Omega^k(W) \rightarrow \Omega^k(V)$$

$$\lambda(\cdot, \dots, \cdot) \rightarrow T^* \lambda$$

כאשר  $T^*$  המשיכה לאחור.

אם  $T$  איזו אז  $T^*$  איזו.

**דוגמה 3.0.4.**  $V = \mathbb{R}^n$  אז  $\det(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{vmatrix}$  לכן  $\det \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ .

**טענה 3.0.5.**  $\Omega^m(V) = \{0\}$  עבור  $n = \dim V < m$ .

הוכחה. ניקח בסיס  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ . נבחר  $\{u_i\}_{i \in [m]} \subseteq V$  ואז  $u_j = \sum_{i \in [n]} \alpha_{j,i} u_i$ . תהי  $\lambda \Omega^m(V)$  ואז

$$\lambda(u_1, \dots, u_m) = \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_m)} \alpha_{1,\ell_1} \alpha_{2,\ell_2} \dots \alpha_{m,\ell_m} \lambda(v_{\ell_1}, \dots, v_{\ell_m})$$

כאשר סוכמים על בחירות של  $m$  אינדקסים. לכן יש  $m$  וקטורים בתוך כל  $\lambda$ , ולכן יש חזרות (כי  $n < m$ ) וכל איבר מתאפס. ■

<sup>1</sup> אבל אין איוזמורפיזם קנוני, אלא אם ישנם מבנים נוספים כמו בחירת בסיס, או מכפלה פנימית

## 3.1 מכפלות חיצוניות

הגדרה 3.1.1. מכפלה חיצונית של תבניות (exterior product, wedge product)<sup>2</sup> היא העתקה

$$\begin{aligned}\Lambda: \Omega^k(V) \times \Omega^\ell(V) &\rightarrow \Omega^{k+\ell}(V) \\ (\alpha, \beta) &\rightarrow \alpha \wedge \beta\end{aligned}$$

המוגדרת באופן הבא.

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) := \sum_{i_1 < \dots, i_k} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_\ell})$$

כאשר  $i_1, \dots, i_\ell$  בחירת  $k$  אינדקסים מתוך  $[k + \ell]$  הם  $j_1 < \dots < j_\ell$  הם האינדקסים הנותרים, ו- $\sigma = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell) \in S_{k+\ell}$ .

תרגיל 39. מכפלה חיצונית הינה אסוציאטיבית, מקיימת פילוג מעל חיבור  $((\alpha\beta) \wedge \gamma = \alpha\beta \wedge \gamma = \alpha\beta \wedge \gamma)$ , והינה אנטיקומוטטיבית<sup>3</sup> כלומר

$$\alpha^{(k)} \wedge \beta^{(\ell)} = (-1)^{k \cdot \ell} \beta \wedge \alpha$$

דוגמה 3.1.2. תהייה  $\Omega^1(V) \subseteq \{\lambda_i\}_{i \in [k]}$  אז

$$(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\lambda_j(v_i))_{1 \leq i, j \leq k}$$

נוכיח זאת באינדוקציה על  $k$ .

בסיס:  $k = 1$  ברור.

צעד: נראה מעבר מ- $k-1$  ל- $k$ . נפתח דטרמיננטה לפי עמודה ראשונה.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \lambda_1(v_1) & \dots & \lambda_k(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(v_k) & \dots & \lambda_k(v_k) \end{vmatrix} &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \lambda_1(v_i) |M_{i,1}| \\ &\stackrel{\text{induction hypothesis}}{=} \sum_{i=1}^k \underbrace{\text{sgn}(i, 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, k)}_{(-1)^{i+1}} \underbrace{\lambda_1(v_i)}_{\alpha} \left[ \underbrace{(\lambda_2 \wedge \dots \wedge \lambda_k)}_{\beta}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k) \right]\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{definition}}{=} (\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k)(v_1, \dots, v_k)$$

משפט 3.1.3. יהי  $V$  מ"י עם  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  בסיס של  $V^*$ . אזי  $\{\lambda_{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_k}\}_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}$  בסיס ל- $\Omega^k(V)$ .

הוכחה. ניקח  $\{v_1, \dots, v_n\}$  הבסיס הדואלי ל- $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  של  $V$ .<sup>4</sup> יהי  $\alpha \in \Omega^k(V)$ . נבחר  $k$  וקטורים  $a_{i,j} v_j$   $i = \sum_{j \in [n]} a_{i,j} v_j$  אז

$$\begin{aligned}\alpha(u_1, \dots, u_k) &= \alpha\left(\sum a_{i,j} v_j, \dots, \sum a_{k,j} v_j\right) \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} a_{1,j_1} \dots a_{k,j_k} \alpha(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \\ &= \star\end{aligned}$$

ואם  $j_a = j_b$  אז  $\alpha$  מתאפס. ניתן אם כן להניח כי  $j_t$  שונים. לכן

$$\begin{aligned}\star &= \sum_{\substack{\sigma: (j_1, \dots, j_k) \leftarrow (i_1, \dots, i_k) \\ i_1, \dots, i_k}} a_{1,\sigma(i_1)} \dots a_{k,\sigma(i_k)} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \left( \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(i_1)} \dots a_{k,\sigma(i_k)} \right)\end{aligned}$$

נשים ♥ כי

$$\sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(i_1)} \dots a_{k,\sigma(i_k)} = \begin{vmatrix} a_{1,j_1} & \dots & a_{1,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,i_1} & \dots & a_{k,i_k} \end{vmatrix}$$

<sup>2</sup>לא אותה הדבר כמו outer product  
<sup>3</sup>anti-commutative / skew-commutative  
<sup>4</sup>כלומר,  $\lambda_i(j) = \delta_{i,j}$

עם שורות  $u_1, \dots, u_k$  ועמודות  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$  אז

$$\star = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \cdot (\lambda_{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_k})(u_1, \dots, u_k)$$

נסמן  $c := \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$  את המקדם ב- $\mathbb{R}$  וקיבלנו

$$\alpha = \sum_{i < \dots, i_k} c_{i_1, \dots, i_k} \cdot \lambda_{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_k}$$

כלומר

$$\alpha \in \text{span} \{ \lambda_{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_n} \}_{i_1 < \dots, i_k}$$

■

וקיבלנו כי הקבוצה פורשת. בדיקת אי־תלות נשארת כתרגיל.

**תרגיל 40.** בדקו אי־תלות של הוקטורים בבסיס. רמז:

$$(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k})(v_j, 1, \dots, v_{j,k}) = \delta_{(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_k)}$$

**מסקנה 3.1.4.**  $\dim \Omega^k(V) = \binom{\dim V}{k}$

**מסקנה 3.1.5.** אם  $\dim V = n$  אז  $\dim \Omega^n(V) = \binom{n}{n} = 1$  אז  $\dim \Omega^n(V) = \text{span} \{ \det \}$

**תרגיל 41.** תהי  $T: V \rightarrow W$  ותהי  $\alpha, \beta \in \Omega^*(W)$  אז  $T^*(\alpha \wedge \beta) = T^*\alpha \wedge T^*\beta$

**דוגמה 3.1.6.** תהי  $T: V \rightarrow V$  הטלה ( $T^2 = T$ ). אז  $\alpha \tilde{\wedge} T^*\alpha \wedge T^*\beta$  מקיים את כל 3 התכונות של  $\wedge$ . התכונות אינן קובעות את פעולת  $\wedge$ .

**תרגיל 42.** נסתכל על  $\mathbb{R}^{2n}$  עם קואורדינטות  $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ . נגדיר  $\omega := dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$  ואז

$$\frac{\omega^n}{n!} = \frac{\omega \wedge \dots \wedge \omega}{n!} dp_1 \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq_n$$

## 3.2 תבניות דיפרנציאליות

### 3.2.1 תיאור מקומי של תבניות דיפרנציאליות

**סימון 3.2.1.** תהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה. ראינו  $T_x \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^n$  לכל  $x \in \mathcal{U}$ . נסמן  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . נסמן ב- $x_i$  את ההטלה על הרכיב ה- $i$ .  $T_x \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^n$  הבסיס הסטנדרטי של  $T_x \mathcal{U}$  הוא  $\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \}$ .  $T_x \mathcal{U} = (T_x \mathcal{U})^* = (\mathbb{R}^n)^*$  הבסיס הדואלי של  $T_x \mathcal{U}$  הוא  $\{ dx_1, \dots, dx_n \}$ . נקרא ל- $T_x^*$  **מרחב קו־משק**. שדה וקטורי חלק.  $\frac{\partial}{\partial x^i}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$

**דוגמה 3.2.2.** תהי  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}$  עם  $p = \gamma(0)$  ועם  $\dot{\gamma}(0) \in T_{\gamma(0)} \mathcal{U}$ . אז

$$[\gamma] = \sum_{i \in [n]} \dot{\gamma}_i(0) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

ונקבל

$$dx_i(p)([\gamma]) = \dot{\gamma}_i(0)$$

**הגדרה 3.2.3.** תבנית דיפרנציאלית **differential form ממעלה  $k$  על  $\mathcal{U}$**  זו משפחה של תבניות ממעלה  $k$  על  $T_x \mathcal{U}$  כך שהמשפחה תלויה באופן חלק ב- $x$ .

נכתוב

$$\lambda(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

כאשר  $a_i$  פונקציה חלקה  $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . לכל  $x \in \mathcal{U}$ , מתקיים

$$\lambda(x) \in \Omega^*(T_x \mathcal{U})$$

בהגדרה הכוונה שהמשפחה תלויה באופן חלק ב- $x$  היא לכך שהמקדמים בכתוב זה משתנים באופן חלק.

**סימון 3.2.4.**  $\Omega^k(\mathcal{U})$  אוסף התבניות ממעלה  $k$  על  $\mathcal{U}$ .

דוגמאות. 1.  $\Omega^0(\mathcal{U}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ .

2. תהי  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) = \Omega^0(\mathcal{U})$  נגדיר

$$df_{(p)} := \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot dx_i$$

ואז  $df \in \Omega^1(\mathcal{U})$

ניקח  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}$  ואז

$$[\gamma] = \dot{\gamma}(0) = \vec{v} \in \mathbb{R}^n = T_p\mathcal{U}$$

$$v = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(0) \end{pmatrix} \text{ נסמן ואז}$$

$$\begin{aligned} df_{(p)}(v) &= \sum \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot dx_i(p) \right] \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(0) \end{pmatrix} \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot dx_i(p) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(0) \end{pmatrix} \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \dot{\gamma}_i(0) \\ &\stackrel{\text{inf}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \gamma(t) =: \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

**הגדרה 3.2.5.** תהי  $M$  יריעה חלקה. תבנית דיפרנציאלית ממעלה  $k$  על  $M$  היא משפחה חלקה  $\alpha$  של תבניות  $\alpha_x \in \Omega^k(T_x M)$ .

בהינתן  $\alpha$  תבנית על  $M$

$$\hat{\alpha}: (v_1, \dots, v_k) \rightarrow \alpha_x(D\varphi^{-1}v_1, \dots, D\varphi^{-1}v_k) \in \mathbb{R}$$

הצגה מקומית של  $\alpha$  לפי  $\varphi$ . מתקיים  $\hat{\alpha} \in \Omega^k(\varphi(\mathcal{U}))$ .  $\alpha$  חלקה אם כל הצגה מקומית  $\hat{\alpha}$  חלקה על  $\varphi(\mathcal{U})$ .

**טענה 3.2.6.** •  $\Omega^k(M)$  מרחב לינארי מעל  $\mathbb{R}$ .<sup>6</sup>

•  $\wedge$  מוגדר על  $\Omega^*(M)$ . (אוסף התבניות מכל מעלה)

• אם  $f: M \rightarrow N$  ו- $\alpha \in \Omega^k(N)$  אז  $f^*\alpha \in \Omega^k(M)$ . מתקיים

$$f^*\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Df v_1, \dots, Df v_k)$$

זאת העתקה לינארית המקיימת  $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$ .

<sup>6</sup>בדרך"כ המרחב אינסוף מימדי