סיכומי הרצאות ביריעות דיפרנציאביליות
חורף 2018, הטכניון

הרצאותיו של מיכאל חנבסקי
סוכמו על ידי אלעד צורני

מפת העולם. על ידי ג'ררד ואן שגן.

עדכון אחרון 7 בנובמבר 2018

תוכן העניינים

הקדמה

הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות.
להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל tzorani.elad@gmail.com.
אלעד צורני.

ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

M. Spivak: Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus

J. Milnor: Topology from athe differentiable viewpoint

J. Lee: Introduction to smooth manifolds

L. Conlon: Differentiable manifolds: a first course

V. Guillemin, A, Pollcak: Differential topology

הקדמה

0.1 תוכן הקורס

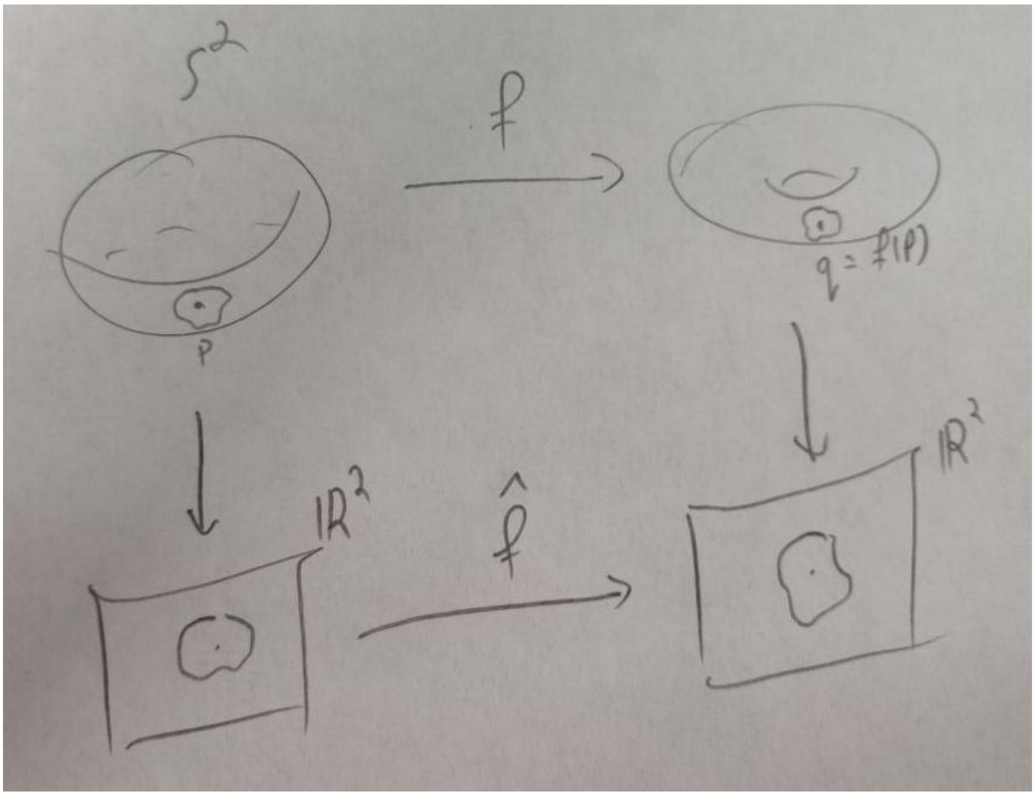
יריעה היא מרחב טופולוגי שלוקלית נראה כמו קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$. דוגמאות ליריעות הן עקומות ומשטחים. הרצאה 1 28 באוקטובר 2018

דוגמה 0.1.1. S^2 הינה יריעה. סביבה של נקודה נראית כמו קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^2$. הרצאה 2 21 באוקטובר 2018

דוגמה 0.1.2. $\mathbb{T}^2$ הינה יריעה. סביבה של נקודה גם כאן נראית כמו קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^2$.

נסתכל על העתקה $f\colon S^2 \to \mathbb{T}^2$. נוכל לזהות את ההעתקה $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ באופן לוקלי עם העתקה $\hat{f}$ שמעתיקה קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות. ראו איור 2.

איור 2: העתקה לוקלית.



בקורס נעסוק בהכללת משפטים מאנליזה ב־$\mathbb{R}^n$ למשפטים על יריעות חלקות. רוב המשפטים ניתנים להכללה ליריעות $\mathscr{C}^k$. למשפטים מהקורס שימושים רבים בגיאומטריה, טופולוגיה, פיזיקה, אנליזה, קומבינטוריקה ואלגברה. כדי שהתיאוריה הקשורה לקורס לא תישאר באוויר נראה חלק גדול מהקורס שימושים, בעיקר בתחום של טופולוגיה דיפרנציאלית.
קיימים מספר משפטים מוכרים מאנליזה.

דוגמאות. 1. נוסחאת ניוטון-לייבניץ:

$$\int_{\partial[a,b]} F = \int_{[a,b]} F' \,\mathrm{d}x$$

2. נוסחאת גרין:

$$\int_{\partial U} f \,\mathrm{d}x + g \,\mathrm{d}y = \iint_U \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

3. משפט גאוס:

$$\iiint_{\Omega} \div \vec{F}\,\mathrm{d}v = \iint_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}s$$

4. משפט סטוקס:

$$\iint_{\Sigma} \left\langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}s = \int_{\partial\Sigma} \left\langle \vec{F}, \vec{\gamma} \right\rangle \mathrm{d}t$$

כולם נובעים ממשפט סטוקס כללי יותר אותו נוכיח בקורס.

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega$$

0.2 דרישות קדם

נשתמש בקורס רבות במשפט הפונקציה הסתמונה ובמשפט הפונקציה ההפוכה מ-$\mathbb{R}^n$. רצוי להכיר את ניסוחיהם, את המשמעויות הגיאומטריות ומספר שימושים שלהם. נשתמש בהחלפות קואורדינטות מאלגברה לינאריות, במשפט פוביני, מטריצות יעקוביאן, במטריצות יעקוביאן, בכלל השרשרת ובמשפט קיום ויחידות של מד"ר.

0.3 תרגילי בית

בקורס יפורסמו ארבעה תרגילי בית רשמיים, רובם ברמת הבנת ההגדרות. אין חובת הגשה אך מומלץ מאוד לפתור את התרגילים כדי לוודא שאינכם הולכים לאיבוד.

0.4 ציון

הציון הסופי כולו יסתמך על הגשת עבודת בית.

פרק 1

מבוא

1.1 הגדרות

הגדרה 1.1.1. מרחב טופולוגי M נקרא **יריעה טופולוגית** (topological manifold) אם לכל $x \in M$ יש סביבה U שהומאומורפית לקבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ עבור n כלשהו.

הערה 1.1.2. לעתים יריעה טופולוגית כפי שהגדרנו אותה נקראת **מרחב אוקלידית לוקלית** (locally Euclidean space).

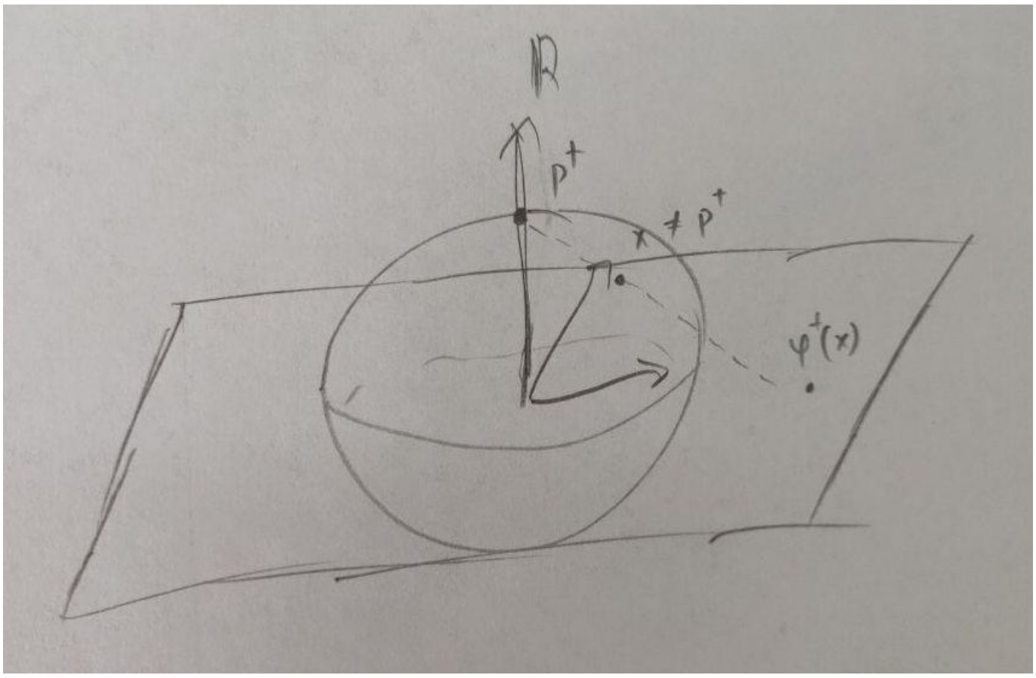
עובדה 1.1.3. עבור יריעה טופולוגית, n קבוע מקומית.
אם M קשירה, n קבוע.

הגדרה 1.1.4. עבור יריעה M עם n קבוע, נגיד ש־n הוא **המימד** של היריעה.

תרגיל 1. מצאו אילו אותיות מבין MANIFOLD הן יריעות. מצאו אילו הומאומורפיות.

דוגמאות.
1. עקומות
2. משטח ב־$\mathbb{R}^3$
3. $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$: נסמן $\mathcal{U}^+ = S^n \setminus \{p^+\}$ נתאים לנקודה $x \in \mathcal{U}^+$ על הספירה את הנקודה $\varphi^+(x) \in \mathbb{R}^n$ המתקבלת על ידי הטלה סטרוגרפית. ראו איור 1.1. ניתן לראות כי φ^+ הומאומורפיזם. אפשר באותו אופן להגדיר $\varphi^- : \mathrm{U}^- \to \mathbb{R}^n$. לכל נקודה על S^n יש

איור 1.1: הטלה סטרוגרפית.



סביבה הומאומורפית לקבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ המתקבלת מהמקור דרך $\varphi^\pm$ של סביבה בתמונה, לכן S^n יריעה.

תרגיל 2. אם M_1, M_2 יריעות טופולוגיות אז $M_1 \times M_2$ עם טופולוגיית המכפלה הינה יריעה. אם המימד של M_1, M_2 אחיד מתקיים גם

$$\dim\left(M_1 \times M_2\right) = \dim M_1 + \dim M_2 .$$

דוגמה 1.1.5. **טורוס n–מימדי** הוא $\mathbb{T}^n := \prod_{k=1}^{n} S^1$. ניתן להגדיר גם $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n/\sim$ כאשר $x \sim y$ אם $x - y \in \mathbb{Z}^n$. נסמן $\pi \colon \mathbb{R}^n \to T^n$ את ההטלה הטבעית (כלומר $\pi(x) = [x] = x + \mathbb{Z}^n$) ואז $\mathcal{U} \subseteq T^n$ פתוחה אם $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$.

תרגיל 3. הראו כי $\mathbb{T}^n$ הומאומורפי ל-T^n.

דוגמה 1.1.6. נגדיר **מרחב פרויקטיבי הוא** בשתי דרכים.

(i) נסתכל על ישרים דרך $\vec{0}$ ב-$\mathbb{R}^{n-1}$. עבור ℓ ישר דרך 0 נסמן $\mathcal{U}_\varepsilon(\ell)$ את אוסף הישרים ℓ' דרך $\vec{0}$ כך שמתקיים $\deg \ell, \ell' < \varepsilon$. אז קבוצה פתוחה היא איחוד כלשהו של $\mathcal{U}_{i\in I}\mathcal{U}_{\varepsilon_i}(\ell_i)$.

(ii) נגדיר גם $\mathrm{RP}^n = S^n/\pm 1$ כלומר $x \sim y$ אם $x = \pm y$. נסמן $\pi \colon S^n \to \mathrm{RP}^n$ את ההטלה $x \to \{x, -x\}$ ואז $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{RP}^n$ פתוחה אם $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ פתוחה ב-S^n.

תרגיל 4. הראו כי RP^n הומאומורפי ל-RP^n.

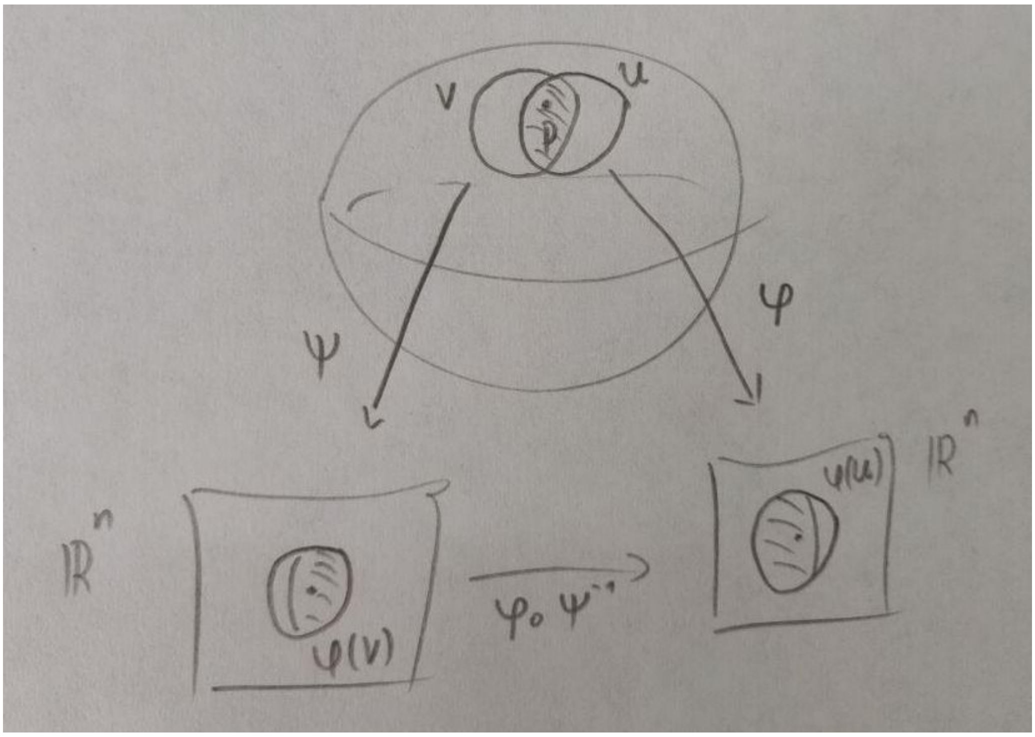
דוגמה 1.1.7. RP^1 הומאומורפי ל-S^1. לאחר הזיהוי מתקבל קטע המזוהה בקצותיו, וזה הומאומורפי למעגל.

הגדרה 1.1.8. תהי M יריעה טופולוגית. **מפה** map / coordinate chart היא זוג $(\mathcal{U}, \varphi)$ כאשר $\mathcal{U} \subseteq M$ קבוצה פתוחה ו-$\varphi \colon \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ הומאומורפיזם, ו-$\varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

דוגמה 1.1.9. ב-S^n הגדרנו שתי מפות $(\mathcal{U}^\pm, \varphi^\pm)$.

הגדרה 1.1.10. תהיינה $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$ מפות עבור יריעה M. אז $\varphi \circ \psi^{-1} \colon \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ הומאומורפיזם שנקרא **פונקציית מעבר** transition map או **פונקציית החלפת קואורדינטות**. ראו איור 1.2.

איור 1.2: פונקציית מעבר.



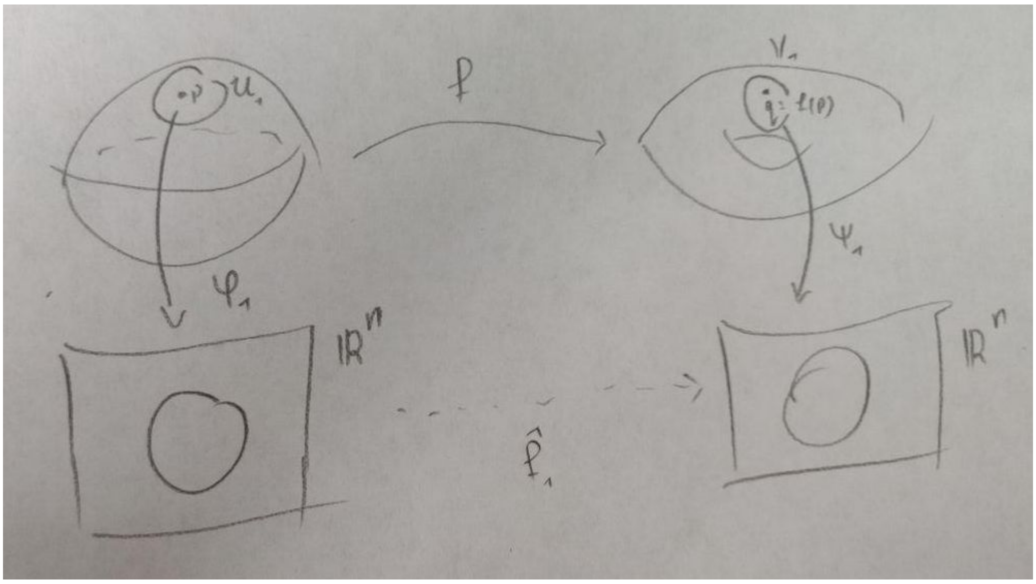
הגדרה 1.1.11. תהי העתקה $f \colon M \to N$ בין יריעות, ונניח בה"כ $f(\mathcal{U}_1) \subseteq \mathcal{V}_1$. אז $\hat{f}_1 \colon \varphi_1(\mathcal{U}_1) \to \psi_1(\mathcal{V}_1)$ **הצגה מקומית של** f (ביחס למפות $(\varphi_1, \mathcal{U}_1)$ ו-$(\psi_1, \mathcal{V}_1)$). מתקיים $\hat{f}_1 = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\big|_{\psi_1(\mathcal{U}_1)}$. ראו איור 1.3.

הגדרה 1.1.12. תהיינה $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ שתי הצגות מקומיות של $f \colon M \to N$. אז

$$\hat{f}_2\Big|_{\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \hat{f}_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} .$$

כאן $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ פונקציית מעבר מ-$(\mathcal{U}_2, \psi_2)$ ל-$(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ ו-$\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ פונקציית מעבר מ-$(\mathcal{V}, \psi_1)$ ל-$(\mathcal{V}, \psi_2)$. ראו איור 1.4.

איור 1.3: הצגה מקומית.



נזכיר כי $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ עבור $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת **חלקה** (smooth) אם לכל $x \in \mathcal{U}$ קיימות ורציפות נגזרות חלקיות של f מסדר כלשהו.

סימון 1.1.13. עבור f חלקה נסמן $f \in \mathscr{C}^\infty$.

הגדרה 1.1.14. $f: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ עבור $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$ **דיפאומורפיזם** אם f הפיכה, ו־f, f^{-1} חלקות.

תרגיל 5. אם $f: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ חלקה וגם $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$ אז $m = n$.

דוגמאות.

$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ איננה חלקה.

$f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$ חלקה (אך איננה אנליטית).

נגדיר $\mathcal{U} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \mathcal{W} = \mathrm{R}$. אז $\tan: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ דיפאומורפיזם.

תרגיל 6.
1. אם F דיפאו' גם F^{-1} דיפאו'.
2. הרכבה של דיפאו' היא דיפאו'.
3. אם $F_1: \mathcal{U}_1 \to \mathcal{W}_1$ ו־$F_2: \mathcal{U}_2 \to \mathcal{W}_2$ דיפאו' אז $F_1 \times F_2: \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \to \mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_2$ דיפאו'.
4. אם $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ ו־$-\infty \leq c \leq d \leq \infty$ אז (a,b) דיפאומורפי ל־(c,d).
5. הקבוצות במישור מאיור 1.5 דיפאומורפיות.

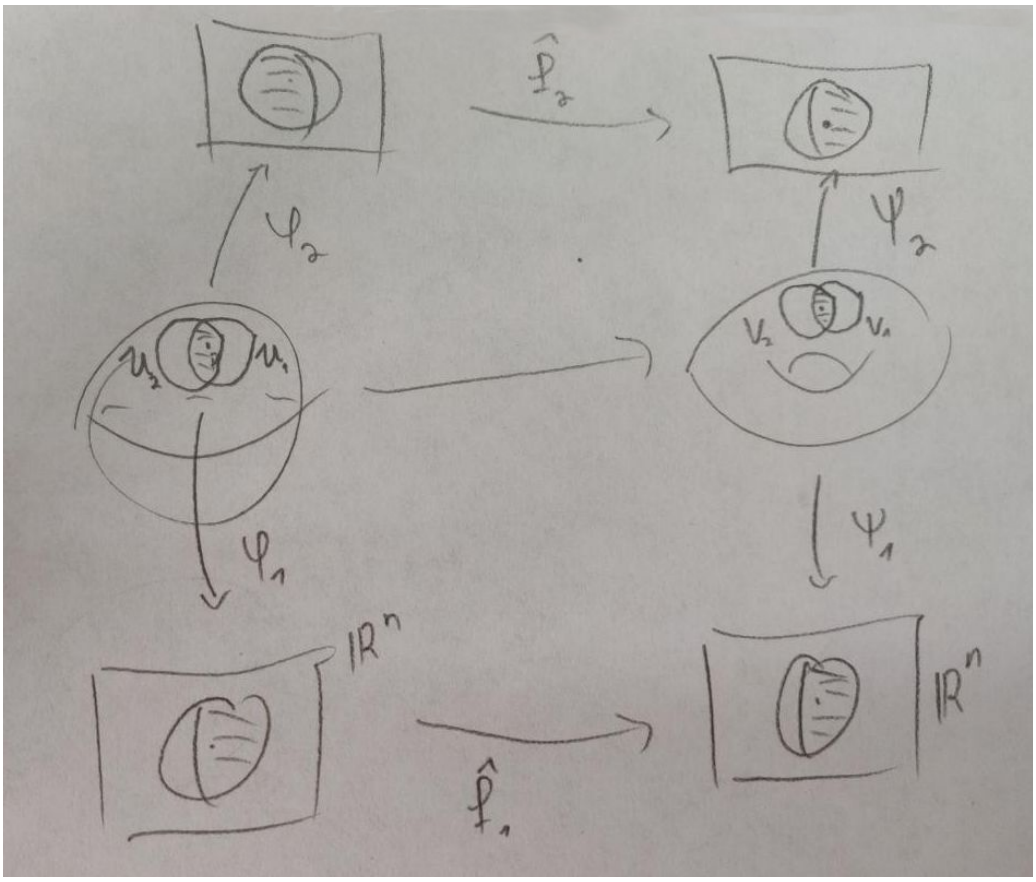
1.2 מבנה חלק

נרצה להגדיר מתי העתקה $f: M \to \mathbb{R}$ הינה גזירה/חלקה בנקודה p. ננסה להגדיר גזירות של העתקה f כנ"ל.

"הגדרה": f גזירה ב־$p \in M$ אם כל הצגה מקומית $\hat{f}$ גזירה ב־$\varphi(p)$. הגדרה זאת איננה טובה כי בהינתן שתי הצגות מקומיות סביב p ופונקציית מעבר ψ, $\hat{f}_1 = \hat{f}_2 \circ \psi$ איננה בהכרח גזירה.

"הגדרה 2": נניח כי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה. נאמר כי $f: M \to \mathbb{R}$ חלקה אם ניתן להרחיב את f לפונקציה חלקה $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ כאשר $\mathcal{U}$ סביבה פתוחה של M.
גם בהגדרה זו יש בעיות, כפי שנראה מיד בדוגמה.

איור 1.4: פונקציית מעבר בין יריעות.



דוגמה 1.2.1. ניקח $M=\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}$. נסתכל על שלוש מפות $(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\,,i\in[3]$ כאשר $\mathcal{U}_i=\mathbb{R}$ והמפות מוגדרות על ידי

$$\varphi_1(x)=x$$
$$\varphi_2(x)=x^3$$
$$.\varphi_3(x)=\sqrt[3]{x}$$

תהי $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$. אז $\hat{f}_1=f$ ונקבל כי מה"הגדרה" $\hat{f}_1$ חלקה אם ורק אם f חלקה במובן של אינפי. נקבל

$$\hat{f}_2(u)=f\circ\varphi_2^{-1}(u)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\cdot u^{\frac{i}{3}}$$

לכן תנאי הכרחי עבור חלקות של $\hat{f}_2$ הוא ש־$a_i=0$ לכל $i\not\equiv 0 \pmod 3$. נקבל באותו אופן

$$\hat{f}_3\left(w\right)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iw^{3i}$$

ונקבל פחות הצגות חלקות מאשר בהצגה המקומית הראשונה.

דוגמה 1.2.2. נגדיר $M_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y=0\right\}$ ו־$M_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y=|x|\right\}$. נגדיר העתקה $P\colon M_2\to M_1$ ע"י $(x,|x|)\mapsto(x,0)$. זהו הומיאומורפיזם.

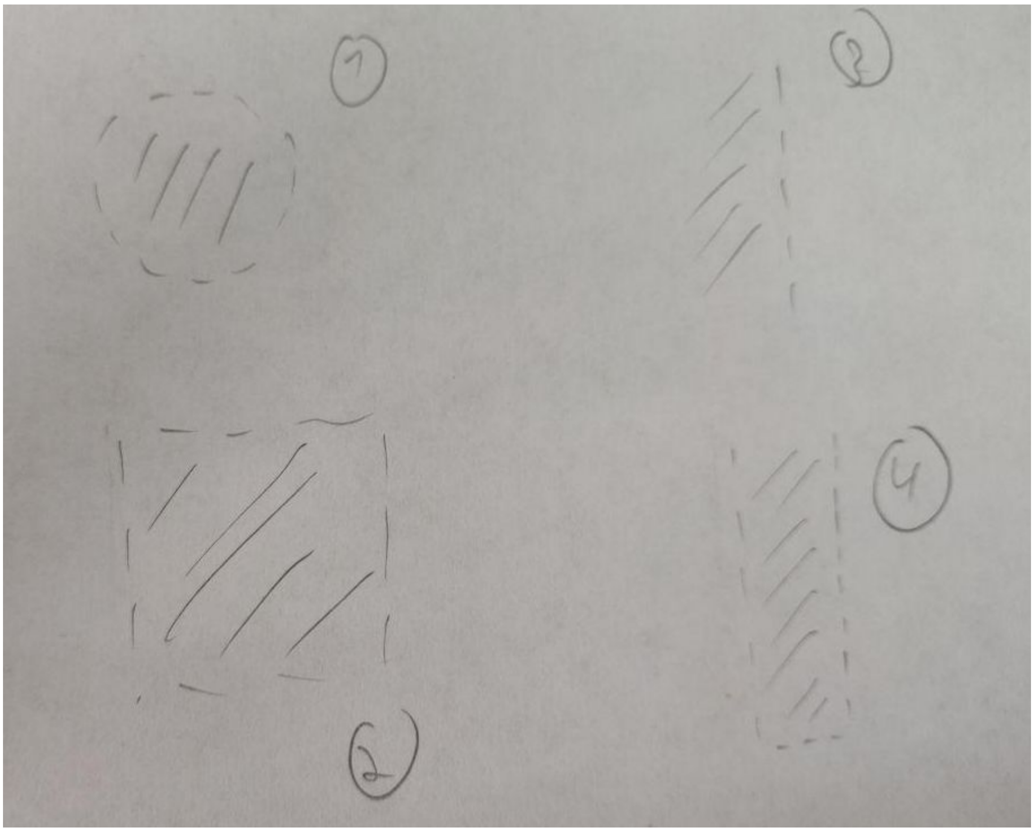
תרגיל 7. $f_1\colon M_1\to\mathbb{R}$ ע"י $(x,0)\mapsto\varphi\left(x\right)$ חלקה אם ורק אם φ חלקה כפונקציה $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

תרגיל 8. $f_2\left(x,|x|\right)=|x|$ פונקצייה חלקה $M_2\to\mathbb{R}$.
רמז: ניתן להרחיב אותה לפונקציה $f_2\left(x,y\right)=y$ כאשר $f_2\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

כאשר נפעיל את הזיהוי בין M_1 ל־M_2 על ידי P נקבל כי f_2 פונקצייה חלקה! לכן ה"הגדרה" תלויה בשיכון $M\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ ולא רק ביריעה עצמה.

נתקלנו בבעייה. המבנה של יריעה טופולוגית הינו חלש מידי ונראה שאין סיכוי להגדיר עליו נגזרת. איך נעקוף זאת? נרצה לדרוש שההעתקות המעבר יהיו חלקות, ואז $\hat{f}_1=\psi\circ\hat{f}_2\circ\varphi$ תהיה גזירה אם ורק אם $\hat{f}_2$ גזירה, עבור ψ,φ העתקות מעבר.

איור 1.5: קבוצות דיפאומורפיות במישור.



הגדרה 1.2.3. תהי M יריעה. מפות $(\mathcal{U},\varphi)\,,(\mathcal{V},\psi)$ יקראו **מתואמות** (compatible) אם $\psi\circ\varphi^{-1},\varphi\circ\psi^{-1}$ חלקות (כלומר, דיפאומורפיזמים).

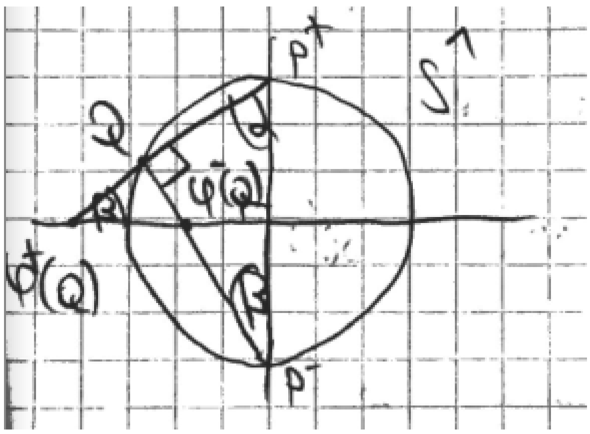
תרגיל 9. תהי $f:\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\to\mathbb{R}$. אז $f\circ\varphi^{-1}$ חלקה אם ורק אם $f\circ\psi^{-1}$ חלקה, כאשר φ,ψ מתואמות.

הגדרה 1.2.4. תהי M יריעה. **אטלס חלק** (smooth atlas / $\mathscr{C}^\infty$ atlas) על M הוא משפחת מפות מתואמות $\{(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ כך שמתקיים $M=\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{U}_\alpha$.

דוגמה 1.2.5. ניקח $M=S^1$ ואז $\{(\mathcal{U}^\pm,\varphi^\pm)\}$ שהגדרנו קודם הינו אטלס.

טענה 1.2.6. האטלס הנ"ל הינו חלק.

איור 1.6: the stereographic map.



הוכחה. מתקיים

$$\mathcal{U}^+\cap\mathcal{U}^-=S^1\setminus\{p^+,p^-\}$$

כמובן $\varphi^\pm\left(\mathcal{U}^+\cap\mathcal{U}^-\right)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. ראו איור 1.6. מתקיים $\varphi^-\left(Q\right)=\tan\left(\beta\right)$ וגם $\varphi^+\left(Q\right)=\frac{1}{\tan(\beta)}$. לכן אם $x=\varphi^+\left(Q\right)$ נקבל $\varphi^-\circ\left(\varphi^+\right)^{-1}\left(x\right)=\frac{1}{x}$ פונקציית מעבר חלקה. כנ"ל לפונקציית המעבר לכיוון השני, לכן האטלס חלק. ■

הגדרה 1.2.7. שני אטלסים חלקים נקראים **שקולים** אם האיחוד שלהם הוא אטלס חלק.

תרגיל 10. שקילות זאת הינה אכן יחס שקילות בין אטלסים חלקים על M.

הגדרה 1.2.8. **מבנה חלק** על M זו מחלקת שקילות של אטלסים.

דוגמה 1.2.9. ניקח $M = \mathbb{R}$ עם $\mathcal{U}_i = \mathbb{R}$ וההעתקות $\varphi_1 = \mathrm{id}, \varphi_2 = x^2, \varphi_3 = \sqrt[3]{x}$. אז שלושת האטלסים $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ אטלסים לא מתואמים בזוגות ולכן מייצגים שלושה מבנים חלקים שונים.

הגדרה 1.2.10. תהי $(M, \mathcal{A})$ יריעה עם אטלס חלק. נגדיר $f\colon M \to \mathbb{R}$ **גזירה** בנקודה $p \in M$ אם $\hat{f}\colon \varphi(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ גזירה ב־$\varphi(p)$ עבור $(\mathcal{U}, \varphi)$ מפה סביבה p מהאטלס $\mathcal{A}$.

תרגיל 11. בדקו כי הנ"ל מוגדר היטב.

הגדרה 1.2.11. **יריעה חלקה** היא יריעה טופולוגית M עם בחירה של אטלס חלק על M.

טענה 1.2.12. בכל מחלקת שקילות של אטלסים קיים אטלס מקסימלי.

מסקנה 1.2.13. בחירת מבנה חלק שקולה לבחירת אטלס חלק מקסימלי על M.

הגדרה 1.2.14. תהיינה $(M, \mathcal{A}_M), (N, \mathcal{A}_N)$ שתי יריעות חלקות ותהי $f\colon M \to N$. אז f תיקרא **גזירה ב־**$p \in M$ אם $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ גזירה ב־$\varphi(p)$, ההצגה המקומית ביחס למפות $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}_M, p \in \mathcal{U}$ ו־$(\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{A}_N, f(p) \in \mathcal{V}$.

תרגיל 12. בדקו כי הנ"ל מוגדר היטב ביחס למפות מתואמות.

הגדרה 1.2.15. פונקציה $f\colon M \to N$ **חלקה** אם כל ההצגות המקומיות של f ביחס למפות מתואמות הן פונקציות חלקות. הרצאה 3 28 באוקטובר 2018

הערה 1.2.16. כדי לבדוק חלקות, די לבדוק חלקות של פונקציות מתואמות עם מפות שמכסות את היריעה.

הגדרה 1.2.17. פונקציה הפיכה f כאשר f, f^{-1} חלקות נקראת **דיפאומורפיזם**.

תרגיל 13. אם $f\colon M \to N$ דיפאומורפיזם, אז $\dim M = \dim N$.

תרגיל 14. דיפאומורפיזמים שומרים על פונקציות חלקות. אם בדיאגרמה הבאה φ, ψ איזומורפיזמים, אז h חלקה אם ורק אם h' חלקה.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"] & N \arrow[d, "\psi"] \\ M' \arrow[r, dotted, "h'"] & N' \end{tikzcd}$$

הגדרה 1.2.18. **יריעה דיפרנציאבילית** $\mathscr{C}^r$ היא יריעה טופולוגית עם אטלס בו פונקציות המעבר חלקות $\mathscr{C}^r$.

תרגיל 15. תהי $(M, \mathcal{A})$ יריעה חלקה ותהי $(\mathcal{U}, \varphi)$ מפה מתואמת עם $\mathcal{A}$. אז $\varphi\colon \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^m$ דיפאומורפיזם.

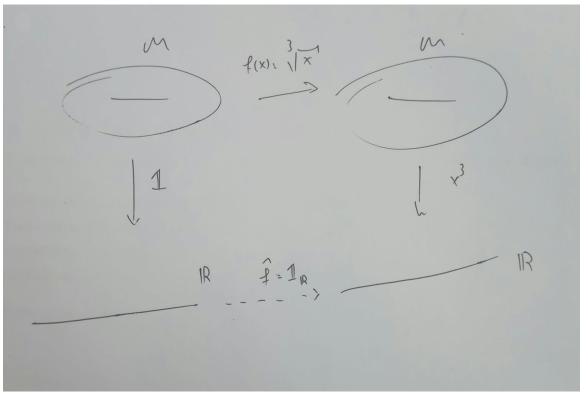
דוגמה 1.2.19. תהי $M = \mathbb{R}$ עם $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \mathbb{1})\}$ המבנה החלק הסטנדרטי, ועם $\mathcal{A}_2 = \left\{\left(\mathbb{R}, x^3\right)\right\}$. אז $(M, \mathcal{A}_1), (M, \mathcal{A}_2)$ יריעות חלקות שונות, אך דיפאומורפיות. נסמן $f(x) = \sqrt[3]{x}$. אז $\hat{f} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ ולכן f דיפאומורפיזם. ראה איור 1.7.

שאלה 1.2.20. האם קיימים מבנים שאינם דיפאומורפיים על אותה יריעה טופולוגית? עבור $\dim M \leq 3$ התשובה נכונה. עבור $\dim M = 1$ נסו **כתרגיל**. עבור $\dim M \geq 4$ הדבר תלוי ביריעה.

דוגמה 1.2.21. בטבלה 1.8 מספר המבנים הדיפאומורפיים של הספירה. עבור $n = 4$ זאת בעיה פתוחה הנקראת smooth Poincaré conjecture.

דוגמה 1.2.22. ב־$\mathbb{R}^n$ יש מבנה דיפאומורפי אחד לכל $n \neq 4$, ואינסוף עבור $n = 4$.

איור 1.7: דיפאומורפיזם.



איור 1.8: מבנים דיפאומורפיים של הספירה.

n	מספר מבנים חלקים שונים של S^n עד כדי דיפאומורפיזם
1	1
2	1
3	1
4	?
5	1
6	1
7	28
8	2
9	8
10	6
11	992
12	1

1.3 תתי־יריעות

הגדרה 1.3.1. תהי M יריעה טופולוגית ממימד m ותהי $N \subseteq M$ עם הטופולוגיה המושרית. N תיקרא **תת־יריעה טופולוגית** אם לכל $x \in N$ קיימת מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ של M עם $x \in \mathcal{U}$ וגם $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{U} \cap N$. (כאן $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^m$)

דוגמאות.
- $W \subseteq M$ קבוצה פתוחה היא תת־יריעה חלקה.
- אם $F \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ אז הגרף של F,

$$\mathrm{Gr}(F) = \{(x, F(x)) \mid x \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

היא תת־יריעה. אם F רציפה זאת רק תת־יריעה טופולוגית, אם F חלקה זאת תת־יריעה חלקה, וכו'. תהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחה. אז $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ פתוחה במרחב $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. נגדיר

$$\varphi_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathcal{R}^n$$
$$(x, y) \mapsto (x, y - F(x))$$

ואז $\mathcal{U} \times \{0\} \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}(F) \cap (\mathcal{U} \cap \mathbb{R}^n)$ המפה שנדרשת בהגדרה. אם F רציפה, $\varphi_{\mathcal{U}}$ הומאומורפיזם ולכן זאת תת־יריעה טופולוגית. אם F חלקה, $\varphi_{\mathcal{U}}$ חלקה, כלומר מתואמת עם האטלס הסטנדרטי, וזאת תת־יריעה חלקה.

תרגיל 16. גרף של $|x|$ הוא תת־יריעה טופולוגית אך לא חלקה.

תרגיל 17. תת־יריעה טופולוגית היא יריעה טופולוגית.

טענה 1.3.2. תהי $N^n \subseteq M^m$ (כלומר N ממימד n, M ממימד m) תת־יריעה חלקה. אזי M משרה על N מבנה של יריעה חלקה.

הוכחה. מתרגיל 17 תת־יריעה היא יריעה טופולוגית. נשאר להראות כי M משרה מבנה חלק.
ניקח $\{(\mathcal{U}_x,\varphi_x)\}_{x\in N}$ מפות מההגדרה של תת־יריעה חלקה ונגדיר

$$\mathcal{A}=\left\{\left(\mathcal{U}_x\cap N,\,\varphi_x|_{\mathcal{U}_x\cap N}\right)\right\}_{x\in N}$$

אטלס שמכסה את N. נשאר להראות כי המפות מתואמות. $(\mathcal{U}_x,\varphi_x)$ ו־$(\mathcal{U}_y,\varphi_y)$ מתואמות, לכן פונקציות המעבר

$$\varphi_y\circ\varphi_x^{-1}\colon \varphi_x\left(\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y\right)\to\varphi_y\left(\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y\right)$$

חלקות. לכן הצמצום באטלס $\mathcal{A}$, שהינו

$$\varphi_y\circ\varphi_x^{-1}|_{\mathbb{R}^n\cap\varphi_x(\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y)}\colon\mathbb{R}^n\cap\varphi_x\left(\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y\right)\to\mathbb{R}^n\cap\varphi_y\left(\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y\right)$$

גם הוא חלק. ■

דוגמה 1.3.3. נתונה מערכת משוואות

$$\begin{cases}F_1\left(x_1,\ldots,x_m\right)=0\\ \vdots\\ F_r\left(x_1,\ldots,x_m\right)=0\end{cases}$$

כאשר F_i חלקות. נניח שבנקודה $\vec{x}$ כך ש־$\vec{F}\left(\vec{x}\right)=0$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{x}}\right)=r$ (הדרגה מקסימלית). ממשפט הפונקציה הסתומה ניתן לבודד $m-r$ קואורדינטות $\vec{x}''$ כאשר $\vec{x}'$ שאר הקואורדינטות. נסמן $\vec{x}=\left(\vec{x}'',\vec{x}'\right)$ בה"כ ואז לוקלית ליד $\vec{x}$ קבוצת הפתרונות $\vec{F}\left(\vec{x}\right)=\vec{0}$ נראית כמו גרף של פונקצייה

$$\begin{aligned}G\colon\mathbb{R}^{m-r}&\to\mathbb{R}^n\\ x''&\mapsto G\left(x''\right)\subseteq\mathbb{R}^r\end{aligned}.$$

דוגמה 1.3.4. עבור $F\left(x_1,x_2\right)=x_1^2+x_2^1-1$, מתקיים $\frac{\partial F}{\partial x}=\left(2x_1,2x_2\right)$. כאשר $x_1,x_2\neq0$ ניתן להציג את x_1 כפונקציה של x_2 או להיפך. לוקלית, ליד x, $M=\{x\mid F(x)=0\}$ היא יריעה חלקה. אם תנאי של משפט הפונקציה הסתומנה מתקיים לכל $x\in M$, אז M יריעה חלקה (גלובלית).

תרגיל 18. עבור תת־יריעה כמו בדוגמה, מתקיים $\dim M=m-r$.

משפט 1.3.5. נניח ש־$N\subseteq\mathbb{R}^m$ תת־קבוצה כך שלכל $x\in N$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^m$ ו־$r=m-n$ פונקציות חלקות $F_i\colon\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ (עם r קבוע עבור N) כך שמתקיימים התנאים הבאים.

$$N\cap\mathcal{U}=\left\{\vec{x}\in\mathcal{U}\;\middle|\;\vec{f}\left(\vec{x}\right)=\vec{0}\right\}$$
$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{x}}\right)=r$$

אז $N\subseteq\mathbb{R}^m$ תת־יריעה ממימד $n=m-r$.

הערה 1.3.6. הכיוון ההפוך איננו בהכרח נכון. אם $\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\;\middle|\;\vec{F}\left(\vec{x}\right)=0\right\}$ תת־יריעה של $\mathbb{R}^m$, ייתכן ש־$\vec{F}$ איננה מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה. המשפט הינו תנאי מספיק שאינו הכרחי.

דוגמאות.

- קבוצת הפתרונות של S^n

$$F\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)=\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2-1.$$

מתקיים $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)=\left(2x_1,2x_2,\ldots,2x_{n+1}\right)$ ולכן לכל $\vec{x}\neq\vec{0}$ הדרגה היא 1. $\vec{0}$ לא ביריעה, לכן זאת יריעה n־מימדית.

- **(תרגיל)** תהי $B\left(x\right)$ תבנית ריבועית שאיננה מנוונת. $N=\{x\mid B(x)=1\}$ תת־יריעה. $\{x\mid B(x)=0\}$ איננה בהכרח תת־יריעה, לדוגמה עבור $x_1^2+x_2^2-x_3^2$ מתקבל חרוט דו־צדדי שאיננו תת־יריעה.

- $\mathrm{SL}\left(n,\mathbb{R}\right)\subseteq M_{n\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ תת־יריעה כאשר $M_{n\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ מזוהה עם $\mathbb{R}^{n^2}$ עם המבנה החלק הסנדרטי.

הוכחה. תהי

$$\begin{aligned}F\colon M_{n\times n}&\to\mathbb{R}\\ A&\to\det A\end{aligned}$$

ואז $\mathrm{SL}_n = \{A \mid FA = 1\}$. תהיינה $(x_{i,j})_{i,j=1}^n$ קואורדינטות של $M_{n\times n}$. צריך להוכיח שלכל $\vec{x} \in \mathrm{SL}_n$ מתקיים $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}\right) \neq \vec{0}$, כלומר שקיים $x_{i,j}$ כך ש־$\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}} \neq 0$. נחשב.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}(A) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\det\left(A + t\cdot T_{i,j}\right)\right)\\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\det A \cdot \det\left(\mathbb{1} + tA^{-1}T_{i,j}\right)\right)\\ &= \det A \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\det\left(\mathbb{1} + tA^{-1}T_{i,j}\right)\right)\\ &= \det A \cdot \mathrm{tr}\left(A^{-1}T_{i,j}\right)\end{aligned}$$

כאשר $(T_{i,j})_{k,l} = \delta_{k,i}\delta_{j,l}$ וכאשר $\det(1 + \varepsilon B) = 1 + \varepsilon\,\mathrm{tr}\,B + O(\varepsilon^2)$ נובע מפיתוח לפי תמורות. מתקיים $A^{-1} = \left(\frac{M_{i,j}}{|A|}_{i,j}\right)$ מנוסחה עם מינורים. מתקיים כי $BT_{i,j}$ שווה למטריצה עם העמודה $C_i(B)$ ה־i של B בעמודה ה־j, ואפסים בשאר המקומות. לכן

$$\left(A^{-1}T_{i,j}\right)_{l,k} = \frac{M_{k,l}}{|A|}$$

ולכן קיבלנו

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}(A) = \det A \cdot \frac{M_{j,i}}{|A|} = M_{i,j}.$$

A הפיכה ולכן לא כל המינורים מתאפסים ונקבל כי $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}\right) \neq \vec{0}$. לכן גם $\dim \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1$. ∎

- **תרגיל 19.** $O(n) \le M_{n\times n}$ תת יריעה.
- $\mathbb{T}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ כאשר $\mathbb{T}^n \cong \left(S^1\right)^n$ ו־$\left(\mathbb{R}^2\right)^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, ניתן להצגה ע"י המשוואות $x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2 - 1 = 0$ כאשר $k \in [n]$. עבור $\mathbb{T}^2$, ניתן לכתוב

$$F(x_1,x_2,x_3) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right)^2 + x_3^2 - 1 = 0.$$

תרגיל 20. $\nabla F \neq \vec{0}$ בנקודה $x \in \mathbb{T}^2$.

תרגיל 21. ניקח $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \big/ \mathbb{Z}^2$ ונגדיר

$$\begin{cases}\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + v_1 t\\ \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + v_2 t\end{cases}$$

תנועה חופשית של חלקיק ב־$\mathbb{T}^2$. לאילו v_i המסלול הוא תת־יריעה של $\mathbb{T}^2$?

דוגמה 1.3.7. תהי $f\colon M \to N$ חלקה. אזי

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N$$

תת־יריעה. **האלכסון** $\Delta \subseteq M \times M$ הוא הגרף של $\mathbb{1}_M$. הכיוון ההפוך איננו נכון. אם $\mathrm{Gr}\, f$ תת־יריעה, לא מובטח כי f חלקה.

הערה 1.3.8. ברוב הדוגמאות, יריעות הן תתי־יריעות של $\mathbb{R}^N$.

משפט 1.3.9 (Whitney). כל יריעה M^m ניתנת לשיכון כתת־יריעה חלקה ב־$\mathbb{R}^N$ עבור N מסוים.

הערה 1.3.10. המקרה האופטימלי הכללי הוא $N = 2m$. ל־$2m-1$ אין תמיד שיכון כתת־יריעה חלקה. $\mathbb{RP}^2, K^2$ לא ניתנים לשיכון ב־$\mathbb{R}^3$.

תרגיל 22. תהי $N \subseteq \mathbb{R}^m$ תת־יריעה ויהי $x \in N$. $f\colon N \to \mathbb{R}$ חלקה ליד x אם ורק אם ניתן להרחיב את f לפונקציה $F\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ חלקה, כאשר $\mathcal{U}$ סביבה של x ב־$\mathbb{R}^m$.

1.4 נגזרות

הגדרה 1.4.1. תהי M יריעה חלקה. **עקומה** γ היא העתקה $\gamma\colon (a,b) \to M$ חלקה (ביחס למבנה החלק של M והסטנדרטי ב־$\mathbb{R}$).

שאלה 1.4.2. מהי $\dot{\gamma}(x)$, "וקטור המהירות של חלקיק הנע לאורך γ"? אם $M \subseteq \mathbb{R}^n$ **עם שיכון נתון** נוכל להסתכל על $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$ ואז לגזור $\dot{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix}$ וקטור שמשיק ל־M בנקודה $\gamma(x)$.

הערה 1.4.3. תהי M יריעה חלקה. היינו רוצים להגדיר מרחב משיק בנקודה p להיות אוסף וקטורי המהירות של מסילות העוברות דרך p. אין לנו דרך טובה להגדיר וקטורי מהירות באופן כללי, לכן צריך לעקוף זאת.

הגדרה 1.4.4. תהיינה $\gamma_i\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ מסילות עבור $i \in [2]$ וכאשר $\gamma_i(0) = p$. אזי $\gamma_1 \sim \gamma_2$ אם קיימת מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ סביב p כך שלהצגות המקומיות $\hat{\gamma}_i = \varphi \circ \gamma_i$ אותו וקטור מהירות $\dot{\hat{\gamma}}_1(0) = \dot{\hat{\gamma}}_2(0)$.

הגדרה 1.4.5. **וקטור משיק בנקודה** p הוא מחלקת שקילות של עקומות $\bar{\gamma}$ עם $\gamma(0) = p$.

תרגיל 23. הראו כי שקילות עקומות בהגדרה הנ"ל היא אכן יחס שקילות.

הערה 1.4.6. יחס השקילות $\sim$ אינו תלוי בבחירת המפה סביב p. נסתכל על שתי מפות φ, ψ ואז

$$\underbrace{\varphi \circ \gamma_i}_{\hat{\gamma}_i} = \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right) \circ \underbrace{\psi \circ \gamma_i}_{\hat{\hat{\gamma}}_i}$$

ומכלל השרשרת

$$\dot{\hat{\gamma}}_i(0) = D\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} \cdot \dot{\hat{\hat{\gamma}}}_i(0)$$

ואז

$$\dot{\hat{\hat{\gamma}}}_1 = \dot{\hat{\hat{\gamma}}}_2 \iff \dot{\hat{\gamma}}_1 = \dot{\hat{\gamma}}_2 .$$

הגדרה 1.4.7. נגדיר

$$T_pM = \{\text{smooth paths } \gamma(0) = p\}\Big/\sim$$

המרחב המשיק בנקודה $p \in M$.

הערה 1.4.8. $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^m$ מגדירה העתקה

$$\begin{aligned} D\varphi_p\colon T_pM &\to \mathbb{R}^m \\ [\gamma(t)] &\to (\varphi \dot{\circ} \gamma)(0) \end{aligned}$$

תרגיל 24. 1.

$$D\varphi_p\colon T_pM \to \mathbb{R}^m$$

חח"ע ועל.

2. בהינתן שתי מפות $(\mathcal{U},\varphi)$, $(\mathcal{V},\psi)$ סביב p, הדיאגרמה הבאה קומוטטיבית.

$$\begin{tikzcd} & T_pM \arrow[dl, "D\varphi_p"'] \arrow[dr, "D\psi_p"] & \\ \mathbb{R}^m \arrow[rr, dashed, "D\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)\big|_{\varphi(p)}"'] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

3. ל־T_pM יש מבנה לינארי טבעי, ע"י משיכת המבנה הלינארי מ־$\mathbb{R}^m$. נגדיר

$$\begin{cases} \sigma + \eta \coloneqq D\varphi_p^{-1}\left(D\varphi_p(\sigma) + D\varphi_p(\eta)\right) \\ c \cdot \sigma \coloneqq D\varphi_p^{-1}\left(c \cdot D\varphi_p(\sigma)\right) \end{cases}$$

ונשאיר כתרגיל בדיקה כי הדבר אינו תלוי בבחירת המפה φ. (זה נובע מכך שהעתקות המעבר הינן לינאריות)

דוגמה 1.4.9. תהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וניקח את המפה $(\mathcal{U},\mathbb{1}_{\mathcal{U}})$. אז יש איזומורפיזם

$$\begin{aligned} D\mathbb{1}_{\mathcal{U}}\colon T_p\mathcal{U} &\to \mathbb{R}^n \\ [\gamma] &\to \dot\gamma(0) \end{aligned}.$$

דוגמה 1.4.10. תהי יריעה $M^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ מוגדרת על ידי $\{\vec{x}\mid F(x_1,\dots,x_n)=0\}$ עם $\nabla F\neq\vec{0}$. כעת $T_pM\subseteq T_p\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n$. מהו T_pM אחרי הזיהוי של $T_p\mathbb{R}^n$ עם $\mathbb{R}^n$? ניקח $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ עם $\gamma(0)=p$. נכתוב $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots\\ \gamma_n(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$. כעת $\gamma(t)\in M$ גורר כי לכל $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ מתקיים $F\circ\gamma(t)=0$. נחשב בעזרת כלל השרשרת.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F\circ\gamma(t)\right)\bigg|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} F(\gamma(t)) \\ &= \sum\frac{\partial F}{\partial x_i}\bigg|_{\gamma(0)}\dot\gamma_i(0) \\ &= \nabla F|_{\gamma(0)}\cdot\dot\gamma(0) \end{aligned}$$

לכן אם $\sigma\in T_pM$ אז $\sigma=D\varphi_p(\sigma)\perp\nabla F(p)$. אם נזהה את T_pM עם $D\varphi_p(T_pM)$ אזי $T_pM\subseteq(\nabla F)^\perp$. אלו שני מרחבים וקטוריים ממימד $n-1$, לכן יש שיוויון $T_pM=(\nabla F)^\perp$.

דוגמה 1.4.11. $S^1\subseteq\mathbb{R}^2$ מוגדר ע"י $F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1=0$ עם $\nabla F=(2x_1,2x_2)$. T_pM+p הינו ישר המאונך ל־$\nabla F(p)$, וזהו בדיוק ישר המשיק ל־S^1 בנקודה p.

הגדרה 1.4.12. **אגד משיק** (tangent bundle) הינו

$$TM=\coprod_{x\in M}(x,T_xM).$$

איבר ב־TM הינו זוג (x,σ) כאשר $x\in M$ ו־$\sigma\in T_xM$.

דוגמה 1.4.13. אגד משיק למעגל הוא $TM=S^1\times\mathbb{R}$, כלומר גליל.

הערה 1.4.14. על TM טופולוגיה הניתנת באופן מקומי על ידי אטלסים.

הערה 1.4.15. קיים זיהוי קנוני בין $T_p\mathcal{U},T_pM$ עבור $\mathcal{U}\subseteq M$ פתוחה.

דוגמה 1.4.16. תהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. אז

$$T\mathcal{U}=\{(x,\sigma)\mid x\in\mathcal{U}\wedge\sigma\in T_x\mathcal{U}\cong\mathbb{R}^n\}\cong\mathcal{U}\cong\mathbb{R}^n$$

או וקטורים עם נקודת התחלה ב־$\mathcal{U}$ וחץ שהוא וקטור ב־$\mathbb{R}^n$.

הגדרה 1.4.17. עבור M יריעה כללית, יהי $\mathcal{A}=\{(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ אטלס חלק על M. נגדיר

$$\bar{\mathcal{U}}_\alpha\coloneqq\coprod_{x\in\mathcal{U}_\alpha}T_x\mathcal{U}_\alpha$$

וגם

$$\begin{aligned} \bar\varphi_\alpha\colon\bar{\mathcal{U}}_\alpha &\to T[\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)]\cong\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\times\mathbb{R}^n\subseteq\mathbb{R}^{2n} \\ (x,\sigma) &\to (\varphi_\alpha(x),D\varphi_\alpha(x)(\sigma))\in T_{\varphi_\alpha(x)}\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \end{aligned}$$

תרגיל 25. 1.

$$TM=\bigcup_{\alpha\in I}\bar{\mathcal{U}}_\alpha$$

2.

$$\bar\varphi_\alpha\colon\bar{\mathcal{U}}_\alpha\to\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\times\mathbb{R}^n$$

חח"ע ועל.

הגדרה 1.4.18 תת־קבוצה $X \subseteq TM$ נקראת פתוחה אם ורק אם לכל α, $\bar{\varphi}_\alpha\left(X \cap \bar{\mathcal{U}}_\alpha\right)$ פתוחה ב־$\mathbb{R}^{2n}$.

תרגיל 26. הראו בשלבים הבאים כי יש מבנה חלק על TM.

ההגדרה מגדירה טופולוגיה על TM.

2. TM יריעה טופולוגית.

3. $\left\{\left(\bar{\mathcal{U}}_\alpha, \bar{\varphi}\right)\right\}_{\alpha \in I}$ אטלס מתואם.

הערה 1.4.19 $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$, אבל $TS^2 \ncong S^2 \times \mathbb{R}^2$.

הרצאה 4
4 באוקטובר
2018

הערה 1.4.20 בדרך כלל, $TM \ncong M \times \mathbb{R}^n$. נראה מבנה לוקלי על האגד המשיק. קיימות העתקות

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathcal{U} &\to \varphi\left(\mathcal{U}\right) \\ D\varphi \colon \left[\gamma\right] &\to \varphi \circ \gamma \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

ואז קיימת ההעתקה הבאה.

$$\begin{aligned} \left(\varphi, D\varphi\right) : T\mathcal{U} &\to \varphi\left(\mathcal{U}\right) \times \mathbb{R}^n \\ \left(p, \left[\gamma\right]\right) &\to \left(\varphi\left(p\right), \varphi \dot{\circ} \gamma\right) \end{aligned}$$

זאת העתקה השומרת על מבנה חלק, אך הינה תלויה בבחירת קואורדינטות $\left(\mathcal{U}, \varphi\right)$.

1.4.1 נגזרות כיווניות

יהיו $p \in M$, $f \colon M \to \mathbb{R}$ חלקה, ו־$\left[\gamma\right] = v \in T_pM$. נגדיר את **הנגזרת הכיוונית של** f **בכיוון** v להיות

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \gamma.$$

תרגיל 27. אם $\left[\gamma'\right] = \left[\gamma\right]$ אז

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0^f \circ \gamma = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0^f \circ \gamma'.$$

כלומר, הנגזרת מוגדרת היטב.

הנגזרת הכיוונית לינארית ב־v, וב־f. היא גם מקיימת את כלל לייבניץ.

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(f \circ g\right) = f\frac{\partial g}{\partial v} + g\frac{\partial f}{\partial v}$$

הוכיחו את תכונות אלו כ**תרגיל**.

הגדרה 1.4.21 **דריווציה** (derivation) זאת העתקה לינארית $D \colon \mathscr{C}^\infty\left(M\right) \to \mathbb{R}$ שמקיימת את כלל לייבניץ.

הערה 1.4.22 מתקבלת העתקה

$$\begin{aligned} T_p &\to \{\text{derivations}\} \\ v &\to \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

שהינה חח"ע ועל, ולמעשה איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

הערה 1.4.23 הגדרה שקולה למרחב משיק, היא ש־T_pM הוא מרחב הדריווציות בנקודה p.

1.4.2 דיפרנציאלים

תהי $f\colon M^m\to N^n$ העתקה חלקה. אם $[\gamma]=[\gamma']$ ניתן לבדוק כי מתקיים $[f\circ\gamma]=[f\circ\gamma']$ (**תרגיל**). אז מתקבלת העתקה

$$\begin{aligned} D_pf\colon T_pM &\to \mathrm{T}_{f(p)}N \\ [\gamma] &\to [f\circ\gamma] \end{aligned}\quad .$$

הגדרה 1.4.24. ההעתקה D_pf נקראת **דיפרנציאל**.

סימון 1.4.25. מסמנים את הדיפרנציאל בכמה אופנים.

$$D_p,\quad Df\left(p\right),\quad f_{*p}$$

הערה 1.4.26. הדיפרנציאל הוא פונקטור קווריאנטי.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, squiggly] & N \arrow[d, squiggly] \\ TM \arrow[r, "Df"] & TN \end{tikzcd}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} DF\colon TM &\to TN \\ (p,v) &\to \left(f\left(p\right),D_pf\left(v\right)\right) \end{aligned}\quad .$$

טענה 1.4.27 (כלל השרשרת). מתקיים $\dot{f\circ\gamma}=DF\cdot\dot\gamma$ ואז

$$F\left(x_0+\Delta x\right)=F\left(x_0\right)+Df\cdot\Delta x+O\left(\left\|\Delta x\right\|^2\right).$$

$F\left(x_0\right)+Df\cdot\Delta x$ נקראת **לינאריזציה של ההעתקה** F.

תרגיל 28. תהי $f\colon M^m\to N^n$ חלקה. נגדיר $D\varphi\colon\ [\gamma]\to\varphi\dot{\circ}\gamma\in\mathbb{R}^m$ ואז

$$D\varphi\colon T_p\mathcal{U}\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^m\ D\psi\colon T_{f(p)}\mathcal{V}\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^n$$

ונקבל העתקה

$$\widehat{D_pf}\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$$

לינארית ולכן נתונה ע"י מטריצה. זאת מטריצת היעקובי של $\hat f\left(\varphi\left(p\right)\right)$.

תרגיל 29.
- $Df\colon TM\to TN$ חלקה.
- $f\colon M\to N$ דיפאומורפיזם. לכן D_xf הפיכה לכל $x\in M$.
- **כלל השרשרת:**

$$D_x\left(f\circ g\right)=D_{g(x)}f\circ D_xg$$

1.5 שיכונים

הגדרה 1.5.1. $f\colon M^m\to N^n$ חלקה נקראת **אימרסיה** אם לכל $x\in M$,

$$D_xf\colon T_xM\to T_{f(x)}N$$

חד־חד ערכית, או באופן שקול $\ker D_xf=\{0\}$.

דוגמה 1.5.2. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ אימרסיה אם ורק אם $D_xf\neq 0$ אם ורק אם $\dot f\neq 0$.
באיור ההעתקות a,b הינן אימרסיות, אך c איננה.

הגדרה 1.5.3. $f\colon M^m\to N^n$ חלקה נקראת **סובמרסיה** אם לכל $x\in M$,

$$D_xf\colon T_xM\to T_{f(x)}N$$

חד־חד על.

דוגמה 1.5.4. $\pi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ההטלה הינה סובמרסיה.

הגדרה 1.5.5. $f\colon M\to N$ נקראת **שיכון** אם f אימרסיה וגם הומאומורפיזם.

דוגמה 1.5.6. ההעתקות באיור אינן שיכונים.

הערה 1.5.7. תהי $f\colon M^n\to N^n$ אימרסיה. אם $\ker D_x f=\{0\}$ בכל $x\in M$, אז $D_x f$ הפיכה ולכן f דיפאומורפיזם לוקאלי סביב x ו־$f(x)$. זה משפט הפונקציה ההפוכה והוא אינו נכון גלובלית.

$$\begin{aligned} f\colon S^1 &\to S^1\\ e^{i\theta}&\to e^{2i\theta}\end{aligned}$$

דיפאומורפיזם לוקלי שאינו גלובלי.

תרגיל 30 (קשה). יהי $f\colon M\to N$ שיכון. אז $f(M)$ תת־יריעה של N.

דוגמה 1.5.8 (מעגל המפלצת). נסמן $M=S^1\times\{0\}$ ו־$N=S^1\times\{1\}$. תהי $A\in S^1$ ונסמן $A_1=(A,0)\,,A_2=(A,1)$. נגדיר

$$S^1_{\circ\circ}=M\amalg N/\sim$$

כאשר $(x,0)\sim(x,1)$ עבור $A\neq x$. קיבלנו מעגל עם "נקודה שמנה", ומרחב זה אינו האוסדורף. הטופולוגיה המושרית היא לפי:

- עבור $x\in A_1,A_2$, סביבה היא קשת פתוחה בטופולוגיה הרגילה.
- סביבה של A_2 היא קשת סביב A_2 שאינה מכילה את A_1. באותו אופן סביבה של A_1.

$S^1_{\circ\circ}$ כן יריעה, אך לא ניתנת לשיכון ב־$\mathbb{R}^N$ (אם כן, $f\left(S^1_{\circ\circ}\right)$ תת־יריעה של $\mathbb{R}^N$ ולכן האוסדורף, בסתירה).

נניח מעתה כי כל היריעות הינן האוסדורף ובנות מנייה שנייה (כלומר, קיים בסיס בן־מניה).

תרגיל 31. יהי X טופולוגי האוסדורף ובן מנייה שנייה. מתקיימות התכונות הבאות.

1. X ספרבילי.
2. קומפקטיות שקולה לקומפקטיות סדרתית.
3. אם X הוא T_3 אז X מטריזבילי.
4. X לינדלוף.

תרגיל 32. יהיו X,Y טופולוגיים, X קומפקטי ו־Y האוסדורף.

1. אם $f\colon X\to Y$ חח"ע, על ורציפה, אז f^{-1} רציפה ולכן f הומאומורפיזם.
2. $K\subseteq Y$ קומפקטית היא סגורה.

משפט 1.5.9 (Whitney, גרסה חלשה). תהי M יריעה קומפקטית. אזי קיים שיכון $M\hookrightarrow\mathbb{R}^N$ עם N גדול מספיק.

הערה 1.5.10. הבנייה בהוכחת המשפט תיתן N גדול. נראה אחר־כך איך להקטין את N ל־$2\dim(M)+1$.

הערה 1.5.11. משפט Whitney נכון גם עבור יריעות שאינן קומפקטיות.

סימון 1.5.12.

$$B^n(r)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \|x\|\le r\}$$

למה 1.5.13. קיימת העתקה חלקה $f\colon B^n(3)\to S^n\le\mathbb{R}^{n-1}$ שמקיימת את התכונות הבאות.

1.
$$\operatorname{Im}\left(f|_{B^\circ(2)}\right)=S^n\setminus\{p_+\}$$

2. $f|_{B^\circ(2)}$ דיפאומורפיזם.

3.
$$f\left(B(3)\setminus B^\circ(2)\right)=p_+$$

הוכחה. מתקיים
$$S^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong B^\circ(2) \cup \{*\}$$
ולכן קיימת f הומאומורפיזם. השלימו את הפרטים ובדקו נגזרות ליד $r=2$ כך שהיא תהיה חלקה. ■

הוכחה (משפט Whitney). תהי M יריעה קומפקטית ממימד m. לכל $p \in M$ נבחר $(\mathcal{U}_p, \varphi_p)$ מפה. נניח כי $\varphi_p(p) = 0$ וגם $B(3) \subseteq \varphi_p(\mathcal{U}_p)$, ע"י תיקון של האטלס במידת הצורך. נקבל כי
$$\left\{\varphi_p^{-1}\left(B^\circ(2)\right)\right\}$$
כיסוי פתוח של M.
נבחר תת־כיסוי סופי
$$\left\{\varphi_{p_i}^{-1}\left(B^\circ(2)\right)\right\}_{i=1}^{d}$$
ונסמן $\mathcal{U}_i := \mathcal{U}_{p_i}$ ו־$\varphi_i := \varphi_{p_i}$. נגדיר
$$g_i \colon M \to \mathbb{R}^{m+1}$$
$$x \to \begin{cases} f\left(\varphi_i(x)\right) & x \in \varphi_i^{-1}\left(B^\circ(2)\right) \\ p_+ & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר f ההעתקה מהלמה. אז g_i חלקה כי הרחבנו את f שהינה חלקה וקבועה בסביבת השפה, לפונקציה קבועה מחוץ לכדור.
נגדיר $g := (g_1, \ldots, g_d) : M \to \mathbb{R}^{(n+1)d}$. אז

- g חלקה כוקטור של פונקציות חלקות.
- g חח"ע: לכל $x \neq y \in M$, עבור i מסוים מתקיים $x \in \varphi_i^{-1}\left(B^\circ(2)\right)$. אם $y \in \varphi_i^{-1}\left(B^\circ(2)\right)$ אז $g_i(x) \neq g_i(y)$ ולכן $g(x) \neq g(y)$. אחרת, $g_i(y) = p_+$ וגם אז $g_i(x) \neq g_i(y)$.
- $g \colon M \to g(M)$ חח"ע ועל, ו־$g(M)$ האוסדורף, לכן g^{-1} רציפה (לפי תרגיל). לכן g הומאומורפיזם.
- g אימרסיה: צריך להוכיח כי $D_x g \colon T_x M \to T_{g(x)}\mathbb{R}^N$ חח"ע לכל $x \in M$. קיים i עבורו $x \in \varphi_i^{-1}\left(B^\circ(2)\right)$. אז $g_i = f \circ \varphi_i(x)$ בסביבת x היא דיפאומורפיזם (לוקלי). לכן $D_x g_i$ הפיכה ולכן חח"ע. לכן $D_x g$ גם היא חח"ע.

g אימפרסיה על התמונה ■

הערה 1.5.14. כדי שההרחבה g_i של f תהייה חלקה השתמשנו בכך ש־M האוסדורף.

1.5.1 ערכים קריטיים ורגולריים

הגדרה 1.5.15. תהי $f \colon M \to N$ חלקה. $y \in N$ **ערך רגולרי של** f אם לכל $x \in f^{-1}(y)$ ההעתקה
$$D_x f \colon T_x M \to T_y N$$
היא על. אם $y \in N$ אינו רגולרי, הוא **ערך קריטי**.

הגדרה 1.5.16. $x \in M$ **נקודה רגולרית** אם $D_x f \colon T_x M \to T_y N$ על. אחרת $x \in M$ **נקודה קריטית**.

דוגמה 1.5.17. ניקח הטלה $\pi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ של שתי תתי־יריעות של $\mathbb{R}^2$ כמתואר באיור

הערה 1.5.18. יתכן כי תמונת נקודה רגולרית היא ערך קריטי.

הערה 1.5.19. אם $f^{-1}(y) = \varnothing$, y רגולרי.

הערה 1.5.20. קריטיות וסינגולריות הם מושגים שונים.

דוגמה 1.5.21. תהי $f \colon M \to \mathbb{R}$. x נקודה קריטית אם ורק אם $D_x f = 0$.

משפט 1.5.22. תהי $f \colon M^m \to N^n$ חלקה עם $m \geq n$. יהי $y \in f(M) \subseteq N$ ערך רגולרי. אזי $L := f^{-1}(y)$ תת־יריעה חלקה ממימד $m-n$ (שאינה בהכרח קשירה). בנוסף, לכל $x \in L$,
$$T_x L = \ker D_x f \subseteq T_x M.$$

הוכחה. ההגדרה של תת־יריעה הינה לוקלית, לכן די להראות כי L תת־יריעה בסביבת נקודה x, שמקיימת את הדרישות.
נבחר קואורדינטות מקומיות סביב x ו־y.[1] נסמנן $\left(x^1,\ldots,x^m\right)$ ו־$\left(y^1,\ldots,y^n\right)$ בהתאמה. באופן מקומי ניתן להציג את f באופן הבא.

$$f\left(x^1,\ldots,x^m\right)=\begin{pmatrix}f_1\left(x^1,\ldots,x^m\right)\\ \vdots\\ f_n\left(x^1,\ldots,x^m\right)\end{pmatrix}$$

כעת

$$\mathcal{U}\cap f^{-1}(Y)=\left\{\left(x^1,\ldots,x^m\right)\;\middle|\;\begin{cases}f_1\left(x^1,\ldots,x^m\right)=y_1\\ \vdots\\ f_n\left(x^1,\ldots,x^m\right)=y_n\end{cases}\right\}.$$

D_xf על (כי y על) לכן $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ המוגדרת ע"י מטריצת הנגזרות החלקיות היא על, ולכן $n=\operatorname{rank}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. ממשפט הפונקציה הסתומה, $f^{-1}\left(y\right)$ תת־יריעה (לוקלית) ממימד $m-n$.
נוכיח כי $T_xL=\ker D_xf$. תהי $\gamma\left(t\right)$ עקומה ב־L. אז $f\left(\gamma\left(t\right)\right)=y$ ואז

$$[\gamma]\xrightarrow{Df}[\text{const}]=0\in T_yN$$

ונקבל כי $T_xL\subseteq\ker D_xf$. משיקולי מימד, יש שיוויון. ■

הערה 1.5.23 y הדרישה כי y ערך רגולרי הינה מספיקה אך לא הכרחית. ייתכן ערך קריטי עם תמונה הפוכה שהיא תת־יריעה, ואפילו ממימד נכון.

דוגמה 1.5.24 נסתכל על $f\colon M\to\mathbb{R}$ פונקציית גובה באיור

- $f^{-1}\left(y_1\right)=\varnothing$ לכן y_1 רגולרית אך לא ב־$f(M)$.
- $f^{-1}\left(y_2\right)\cong S^1$
- $f^{-1}\left(y_3\right)=S^1\amalg S^1$.
- $f^{-1}\left(y_4\right)\cong S^1$.
- $f^{-1}\left(c_1\right)=\{\text{pt}\}$ תת־יריעה אך המימד אינו 1.
- $f^{-1}\left(c_2\right)=S^1\amalg\{\text{pt}\}$ תת־יריעה עם מימד שאינו קבועה בין מחלקות קשירות.
- $f^{-1}\left(c_3\right)=S^1\amalg S^1\big/\{\text{pt}\}$ לא תת־יריעה (זה זר עם שתי לולאות).

[1] ניתן להסתכל על קואורדינטות באופן אחר. קיים שריג פונקציות $x_1,\ldots,x_m\colon\varphi\left(\mathcal{U}\right)\to\mathbb{R}$. הדבר מגדיר קואורדינטות מקומיות $x^i=x_i\circ\varphi\colon\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ שהינן תלויות במפה. ראו איור