סיכומי הרצאות ביריעות דיפרנציאביליות
חורף 2018, הטכניון

הרצאותיו של מיכאל חנבסקי
סוכמו על ידי אלעד צורני

מפת העולם. על ידי ג'ררד ואן שגן.

עדכון אחרון 24 באוקטובר 2018

תוכן העניינים

הקדמה

הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות.
להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל tzorani.elad@gmail.com.
אלעד צורני.

ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

M. Spivak: Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus

J. Milnor: Topology from athe differentiable viewpoint

J. Lee: Introduction to smooth manifolds

L. Conlon: Differentiable manifolds: a first course

V. Guillemin, A, Pollcak: Differential topology

הקדמה

0.1 תוכן הקורס

הרצאה 1
21 באוקטובר 2018

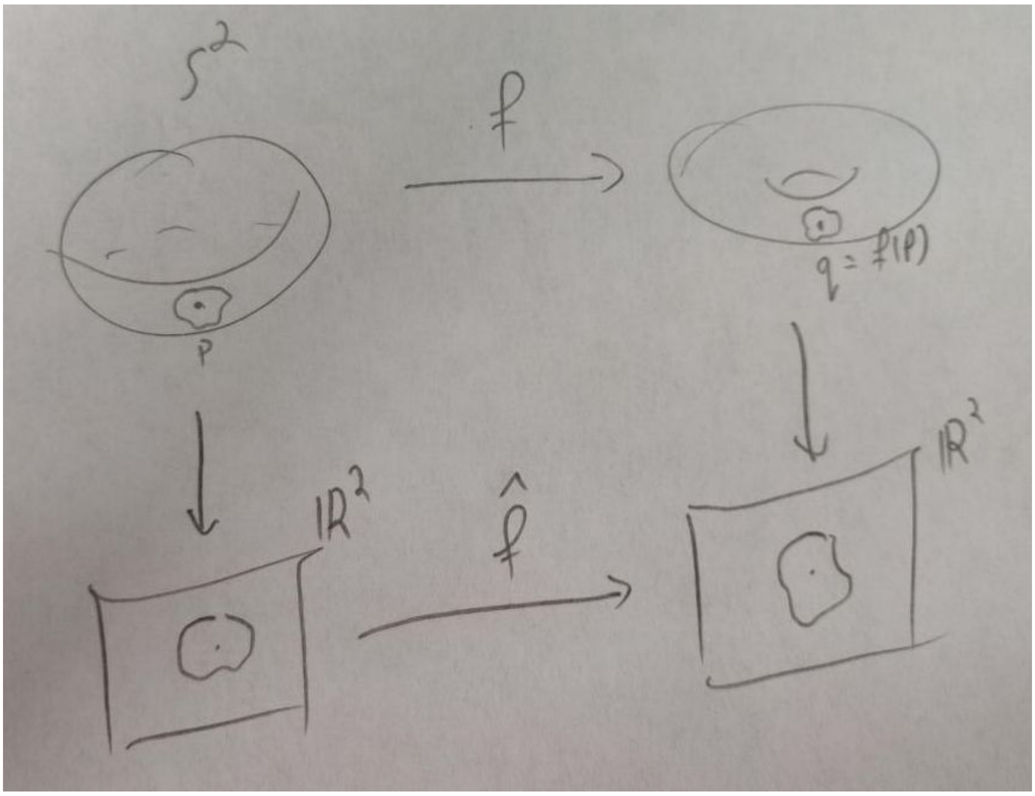
יריעה היא מרחב טופולוגי שלוקלית נראה כמו קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$. דוגמאות ליריעות הן עקומות ומשטחים.

דוגמה. S^2 הינה יריעה. סביבה של נקודה נראית כמו קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^2$.

דוגמה. $\mathbb{T}^2$ הינה יריעה. סביבה של נקודה גם כאן נראית כמו קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^2$.

נסתכל על העתקה $f\colon S^2 \to \mathbb{T}^2$. נוכל לזהות את ההעתקה $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ באופן לוקלי עם העתקה $\hat{f}$ שמעתיקה קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות. ראו איור 2.

איור 2: העתקה לוקלית.



בקורס נעסוק בהכללת משפטים מאנליזה ב־$\mathbb{R}^n$ למשפטים על יריעות חלקות. רוב המשפטים ניתנים להכללה ליריעות $\mathscr{C}^k$. למשפטים מהקורס שימושים רבים בגיאומטריה, טופולוגיה, פיזיקה, אנליזה, קומבינטוריקה ואלגברה. כדי שהתיאוריה הקשורה לקורס לא תישאר באוויר נראה חלק גדול מהקורס שימושים, בעיקר בתחום של טופולוגיה דיפרנציאלית.
קיימים מספר משפטים מוכרים מאנליזה.

דוגמאות. 1. נוסחאת ניוטון-לייבניץ:

$$\int_{\partial[a,b]} F = \int_{[a,b]} F' \,\mathrm{d}x$$

2. נוסחאת גרין:

$$\int_{\partial U} f \,\mathrm{d}x + g \,\mathrm{d}y = \iint_U \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

3. משפט גאוס:

$$\iiint_{\Omega} \div \vec{F}\,\mathrm{d}v = \iint_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}s$$

4. משפט סטוקס:

$$\iint_{\Sigma} \left\langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}s = \int_{\partial\Sigma} \left\langle \vec{F}, \vec{\gamma} \right\rangle \mathrm{d}t$$

כולם נובעים ממשפט סטוקס כללי יותר אותו נוכיח בקורס.

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega$$

0.2 דרישות קדם

נשתמש בקורס רבות במשפט הפונקציה הסתמונה ובמשפט הפונקציה ההפוכה מ-$\mathbb{R}^n$. רצוי להכיר את ניסוחיהם, את המשמעויות הגיאומטריות ומספר שימושים שלהם. נשתמש בהחלפות קואורדינטות מאלגברה לינאריות, במשפט פוביני, מטריצות יעקוביאן, במטריצות יעקוביאן, בכלל השרשרת ובמשפט קיום ויחידות של מד"ר.

0.3 תרגילי בית

בקורס יפורסמו ארבעה תרגילי בית רשמיים, רובם ברמת הבנת ההגדרות. אין חובת הגשה אך מומלץ מאוד לפתור את התרגילים כדי לוודא שאינכם הולכים לאיבוד.

0.4 ציון

הציון הסופי כולו יסתמך על הגשת עבודת בית.

פרק 1

מבוא

1.1 הגדרות

הגדרה 1.1.1. מרחב טופולוגי M נקרא **יריעה טופולוגית** (topological manifold) אם לכל $x \in M$ יש סביבה U שהומאומורפית לקבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ עבור n כלשהו.

הערה 1.1.2. לעתים יריעה טופולוגית כפי שהגדרנו אותה נקראת **מרחב אוקלידית לוקלית** (locally Euclidean space).

עובדה 1.1.3. עבור יריעה טופולוגית, n קבוע מקומית.
אם M קשירה, n קבוע.

הגדרה 1.1.4. עבור יריעה M עם n קבוע, נגיד ש־n הוא **המימד** של היריעה.

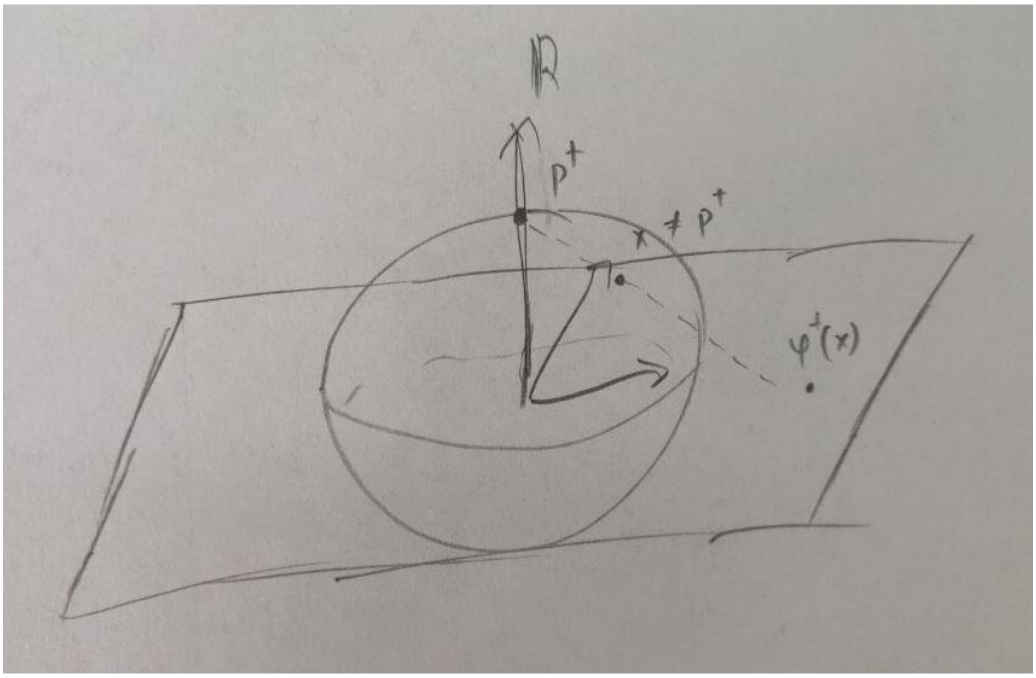
תרגיל. מצאו אילו אותיות מבין MANIFOLD הן יריעות. מצאו אילו הומאומורפיות.

דוגמאות. 1. עקומות

2. משטח ב־$\mathbb{R}^3$

3. $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$: נסמן $\mathcal{U}^+ = S^n \setminus \{p^+\}$ נתאים לנקודה $x \in \mathcal{U}^+$ על הספירה את הנקודה $\varphi^+(x) \in \mathbb{R}^n$ המתקבלת על ידי הטלה סטרוגרפית. ראו איור 1.1. ניתן לראות כי φ^+ הומאומורפיזם. אפשר באותו אופן להגדיר $\varphi^- : \mathrm{U}^- \to \mathbb{R}^n$. לכל נקודה על S^n יש

איור 1.1: הטלה סטרוגרפית.



סביבה הומאומורפית לקבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ המתקבלת מהמקור דרך $\varphi^\pm$ של סביבה בתמונה, לכן S^n יריעה.

תרגיל. אם M_1, M_2 יריעות טופולוגיות אז $M_1 \times M_2$ עם טופולוגיית המכפלה הינה יריעה. אם המימד של M_1, M_2 אחיד מתקיים גם

$$\dim (M_1 \times M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 .$$

דוגמה. **טורוס n–מימדי הוא** $\mathbb{T}^n := \prod_{k=1}^{n} S^1$. ניתן להגדיר גם $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n / \sim$ כאשר $x \sim y$ אם $x - y \in \mathbb{Z}^n$. נסמן $\pi \colon \mathbb{R}^n \to T^n$ את ההטלה הטבעית (כלומר $\pi(x) = [x] = x + \mathbb{Z}^n$) ואז $\mathcal{U} \subseteq T^n$ פתוחה אם $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$.

תרגיל. הראו כי $\mathbb{T}^n$ הומאומורפי ל־T^n.

דוגמה. נגדיר **מרחב פרויקטיבי הוא** בשתי דרכים.

(i) נסתכל על ישרים דרך $\vec{0}$ ב־$\mathbb{R}^{n-1}$. עבור ℓ ישר דרך 0 נסמן $\mathcal{U}_\varepsilon(\ell)$ את אוסף הישרים ℓ' דרך $\vec{0}$ כך שמתקיים $\deg \ell, \ell' < \varepsilon$. אז קבוצה פתוחה היא איחוד כלשהו של $\mathcal{U}_{i \in I} \mathcal{U}_{\varepsilon_i}(\ell_i)$.

(ii) נגדיר גם $\mathrm{RP}^n = S^n / \pm 1$ כלומר $x \sim y$ אם $x = \pm y$. נסמן $\pi \colon S^n \to \mathrm{RP}^n$ את ההטלה $x \to \{x, -x\}$ ואז $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{RP}^n$ פתוחה אם $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ פתוחה ב־S^n.

תרגיל. הראו כי RP^n הומאומורפי ל־RP^n.

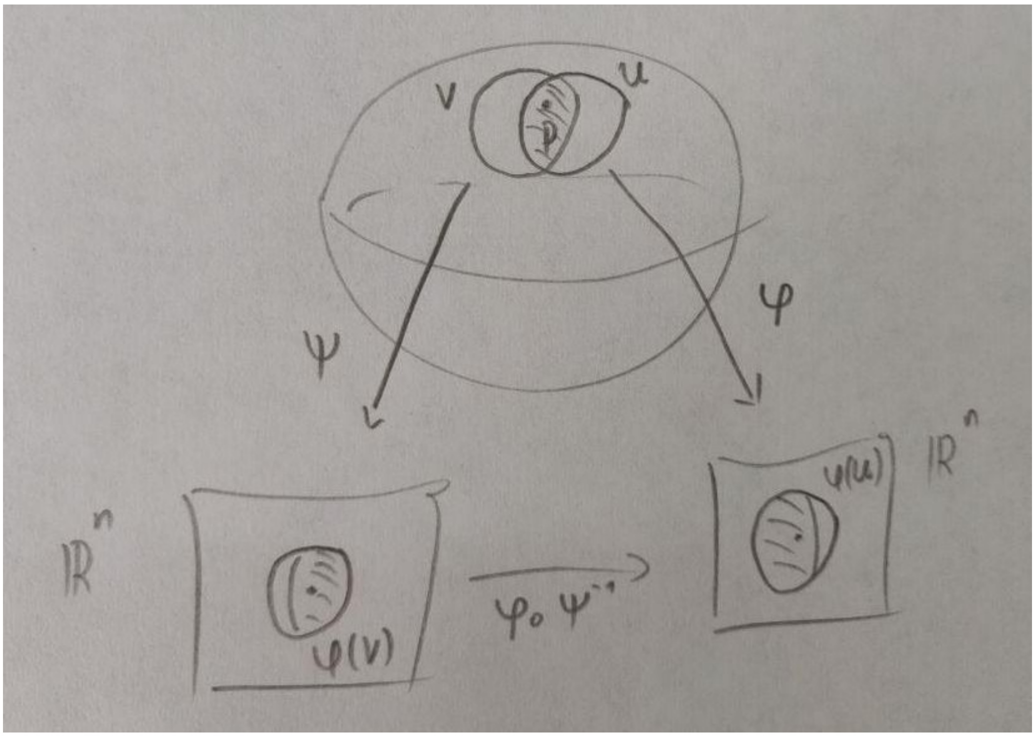
דוגמה. RP^1 הומאומורפי ל־S^1. לאחר הזיהוי מתקבל קטע המזוהה בקצותיו, וזה הומאומורפי למעגל.

הגדרה 1.1.5. תהי M יריעה טופולוגית. **מפה** map / coordinate chart היא זוג $(\mathcal{U}, \varphi)$ כאשר $\mathcal{U} \subseteq M$ קבוצה פתוחה ו־$\varphi \colon \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ הומאומורפיזם, ו־$\varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

דוגמה. ב־S^n הגדרנו שתי מפות $(\mathcal{U}^\pm, \varphi^\pm)$.

הגדרה 1.1.6. תהיינה $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$ מפות עבור יריעה M. אז $\varphi \circ \psi^{-1} \colon \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ הומאומורפיזם שנקרא **פונקציית מעבר** transition map או **פונקציית החלפת קואורדינטות**. ראו איור 1.2.

איור 1.2: פונקציית מעבר.



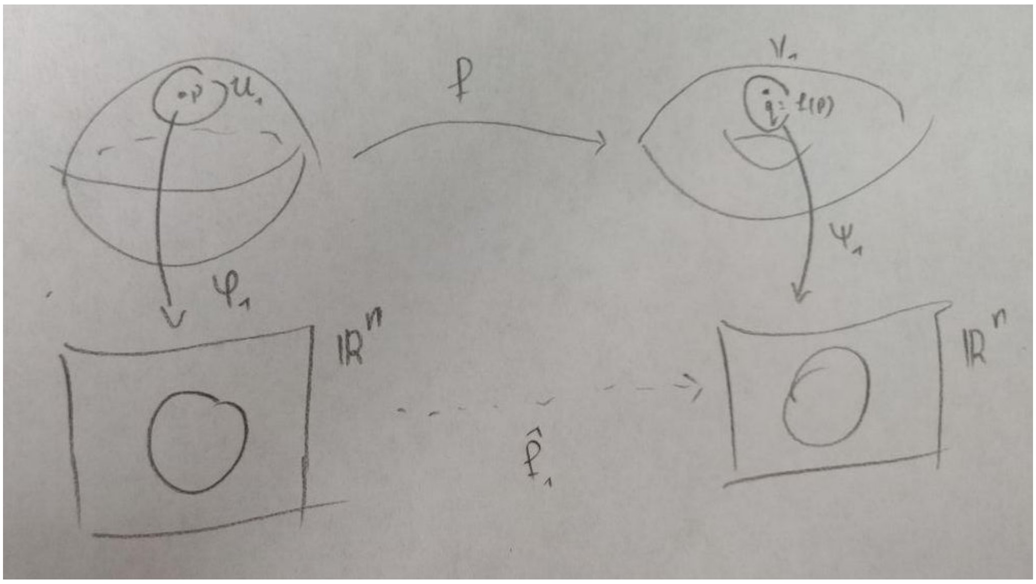
הגדרה 1.1.7. תהי העתקה $f \colon M \to N$ בין יריעות, ונניח בה"כ $f(\mathcal{U}_1) \subseteq \mathcal{V}_1$. אז $\hat{f}_1 \colon \varphi_1(\mathcal{U}_1) \to \psi_1(\mathcal{V}_1)$ **הצגה מקומית של** f (ביחס למפות $(\varphi_1, \mathcal{U}_1)$ ו־$(\psi_1, \mathcal{V}_1)$). מתקיים $\hat{f}_1 = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\big|_{\psi_1(\mathcal{U}_1)}$. ראו איור 1.3.

הגדרה 1.1.8. תהיינה $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ שתי הצגות מקומיות של $f \colon M \to N$. אז

$$\hat{f}_2\Big|_{\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \hat{f}_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} .$$

כאן $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ פונקציית מעבר מ־$(\mathcal{U}_2, \psi_2)$ ל־$(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ ו־$\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ פונקציית מעבר מ־$(\mathcal{V}, \psi_1)$ ל־$(\mathcal{V}, \psi_2)$. ראו איור 1.4.

איור 1.3: הצגה מקומית.



נזכיר כי $f\colon \mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבור $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת **חלקה** (smooth) אם לכל $x\in\mathcal{U}$ קיימות ורציפות נגזרות חלקיות של f מסדר כלשהו.

סימון 1.1.9. עבור f חלקה נסמן $f\in\mathscr{C}^\infty$.

הגדרה 1.1.10. $f\colon\mathcal{U}\to\mathcal{W}$ עבור $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n, \mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^m$ **דיפאומורפיזם** אם f הפיכה, ו־f, f^{-1} חלקות.

תרגיל. אם $f\colon \mathcal{U}\to\mathcal{W}$ חלקה וגם $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n, \mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^m$ אז $m=n$.

דוגמאות.

$f(x) := \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$ איננה חלקה.

$f(x) := \begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \end{cases}$ חלקה (אך איננה אנליטית).

נגדיר $\mathcal{U}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \mathcal{W}=\mathrm{R}$. אז $\tan\colon\mathcal{U}\to\mathcal{W}$ דיפאומורפיזם.

תרגיל.
1. אם F דיפאו' גם F^{-1} דיפאו'.
2. הרכבה של דיפאו' היא דיפאו'.
3. אם $F_1\colon\mathcal{U}_1\to\mathcal{W}_1$ ו־$F_2\colon\mathcal{U}_2\to\mathcal{W}_2$ דיפאו' אז $F_1\times F_2\colon\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\to\mathcal{W}_1\to\mathcal{W}_2$ דיפאו'.
4. אם $-\infty\leq a\leq b\leq\infty$ ו־$-\infty\leq c\leq d\leq\infty$ אז (a,b) דיפאומורפי ל־(c,d).
5. הקבוצות במישור מאיור 1.5 דיפאומורפיות.

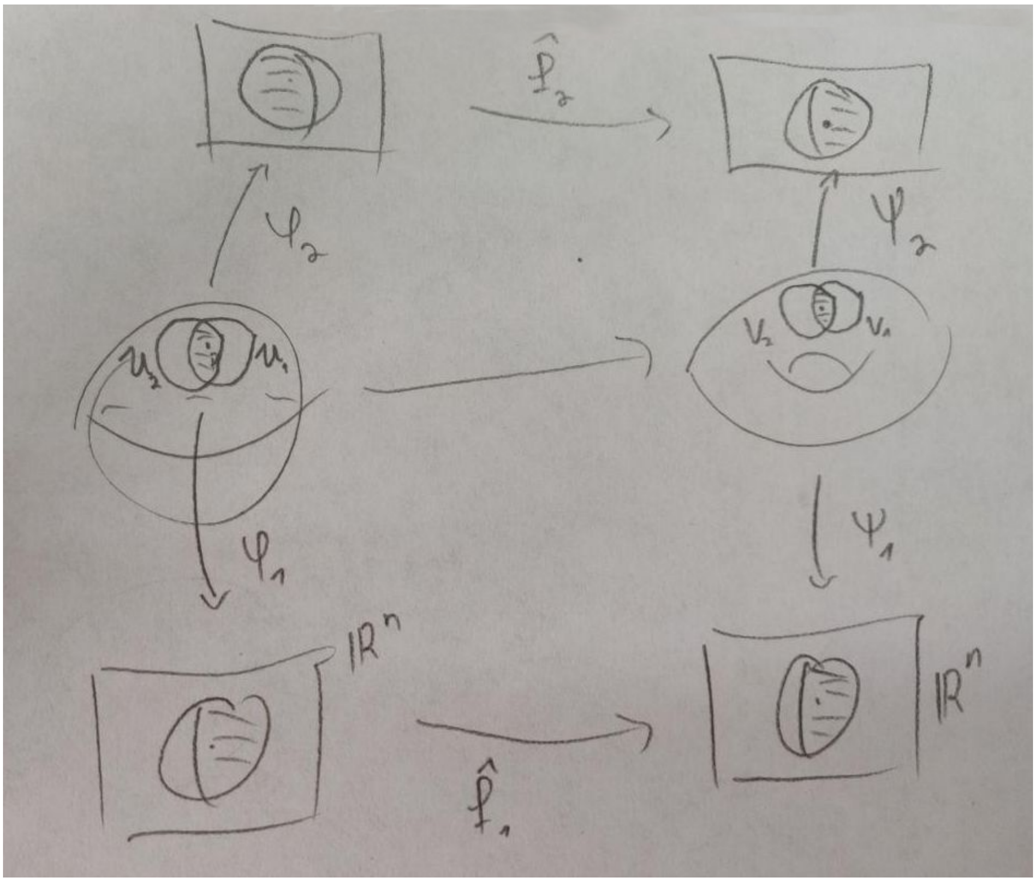
1.2 מבנה חלק

נרצה להגדיר מתי העתקה $f\colon M\to\mathbb{R}$ הינה גזירה/חלקה בנקודה p. ננסה להגדיר גזירות של העתקה f כנ"ל.

"הגדרה": f גזירה ב־$p\in M$ אם כל הצגה מקומית $\hat{f}$ גזירה ב־$\varphi(p)$. הגדרה זאת איננה טובה כי בהינתן שתי הצגות מקומיות סביב p ופונקציית מעבר ψ, $\hat{f}_1=\hat{f}_2\circ\psi$ איננה בהכרח גזירה.

"הגדרה 2": נניח כי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה. נאמר כי $f\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה אם ניתן להרחיב את f לפונקציה חלקה $f\colon\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ כאשר $\mathcal{U}$ סביבה פתוחה של M.
גם בהגדרה זו יש בעיות, כפי שנראה מיד בדוגמה.

איור 1.4: פונקציית מעבר בין יריעות.



דוגמה. ניקח $M=\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}$. נסתכל על שלוש מפות $(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\,, i\in[3]$ כאשר $\mathcal{U}_i=\mathbb{R}$ והמפות מוגדרות על ידי

$$\varphi_1(x)=x$$
$$\varphi_2(x)=x^3$$
$$.\varphi_3(x)=\sqrt[3]{x}$$

תהי $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$. אז $\hat{f}_1=f$ ונקבל כי מה"הגדרה" $\hat{f}_1$ חלקה אם ורק אם f חלקה במובן של אינפי. נקבל

$$\hat{f}_2(u)=f\circ\varphi_2^{-1}(u)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\cdot u^{\frac{i}{3}}$$

לכן תנאי הכרחי עבור חלקות של $\hat{f}_2$ הוא ש־$a_i=0$ לכל $i\not\equiv 0 \pmod 3$. נקבל באותו אופן

$$\hat{f}_3\left(w\right)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iw^{3i}$$

ונקבל פחות הצגות חלקות מאשר בהצגה המקומית הראשונה.

דוגמה. נגדיר $M_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y=0\right\}$ ו־$M_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y=|x|\right\}$. נגדיר העתקה $P\colon M_2\to M_1$ ע"י $(x,|x|)\mapsto(x,0)$. זהו הומיאומורפיזם.

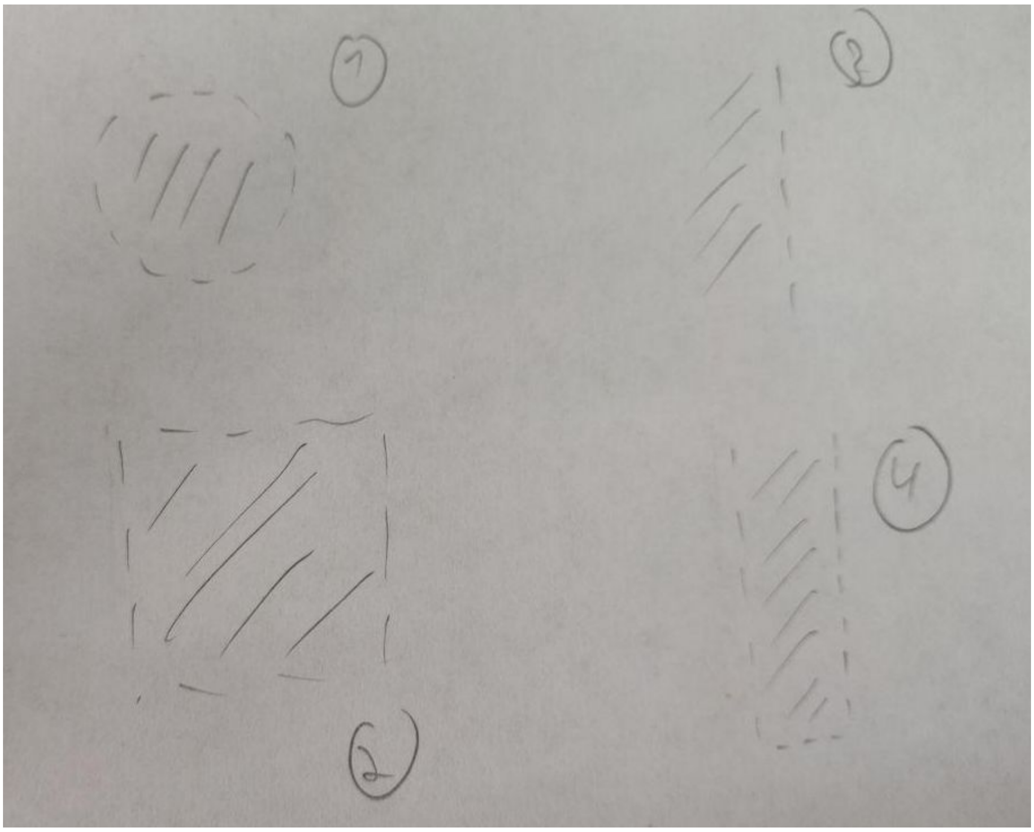
תרגיל. $f_1\colon M_1\to\mathbb{R}$ ע"י $(x,0)\mapsto\varphi\left(x\right)$ חלקה אם ורק אם φ חלקה כפונקציה $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

תרגיל. $f_2\left(x,|x|\right)=|x|$ פונקצייה חלקה $M_2\to\mathbb{R}$.
רמז: ניתן להרחיב אותה לפונקציה $f_2\left(x,y\right)=y$ כאשר $f_2\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

כאשר נפעיל את הזיהוי בין M_1 ל־M_2 על ידי P נקבל כי f_2 פונקצייה חלקה! לכן ה"הגדרה" תלויה בשיכון $M\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ ולא רק ביריעה עצמה.

נתקלנו בבעייה. המבנה של יריעה טופולוגית הינו חלש מידי ונראה שאין סיכוי להגדיר עליו נגזרת. איך נעקוף זאת? נרצה לדרוש שההעתקות המעבר יהיו חלקות, ואז $\hat{f}_1=\psi\circ\hat{f}_2\circ\varphi$ תהיה גזירה אם ורק אם $\hat{f}_2$ גזירה, עבור ψ,φ העתקות מעבר.

איור 1.5: קבוצות דיפאומורפיות במישור.



הגדרה 1.2.1. תהי M יריעה. מפות $(\mathcal{U},\varphi)\,,(\mathcal{V},\psi)$ יקראו **מתואמות** (compatible) אם $\psi\circ\varphi^{-1},\varphi\circ\psi^{-1}$ חלקות (כלומר, דיפאומורפיזמים).

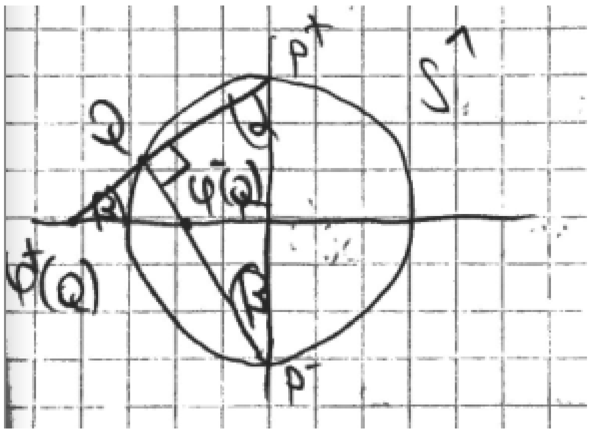
תרגיל. תהי $f:\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\to\mathbb{R}$. אז $f\circ\varphi^{-1}$ חלקה אם ורק אם $f\circ\psi^{-1}$ חלקה, כאשר φ,ψ מתואמות.

הגדרה 1.2.2. תהי M יריעה. **אטלס חלק** (smooth atlas / $\mathscr{C}^\infty$ atlas) על M הוא משפחת מפות מתואמות $\{(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ כך שמתקיים $M=\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{U}_\alpha$.

דוגמה. ניקח $M=S^1$ ואז $\{(\mathcal{U}^\pm,\varphi^\pm)\}$ שהגדרנו קודם הינו אטלס.

טענה 1.2.3. האטלס הנ"ל הינו חלק.

איור 1.6: the stereographic map.



הוכחה. מתקיים
$$\mathcal{U}^+\cap\mathcal{U}^-=S^1\setminus\{p^+,p^-\}$$
כמובן $\varphi^\pm(\mathcal{U}^+\cap\mathcal{U}^-)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. ראו איור 1.6. מתקיים $\varphi^-(Q)=\tan(\beta)$ וגם $\varphi^+(Q)=\frac{1}{\tan(\beta)}$. לכן אם $x=\varphi^+(Q)$ נקבל $\varphi^-\circ(\varphi^+)^{-1}(x)=\frac{1}{x}$ פונקציית מעבר חלקה. כנ"ל לפונקציית המעבר לכיוון השני, לכן האטלס חלק. ■

הגדרה 1.2.4. שני אטלסים חלקים נקראים **שקולים** אם האיחוד שלהם הוא אטלס חלק.

תרגיל. שקילות זאת הינה אכן יחס שקילות בין אטלסים חלקים על M.

הגדרה 1.2.5. **מבנה חלק** על M זו מחלקת שקילות של אטלסים.

דוגמה. ניקח $M=\mathbb{R}$ עם $\mathcal{U}_i=\mathbb{R}$ וההעתקות $\varphi_1=\mathrm{id},\varphi_2=x^2,\varphi_3=\sqrt[3]{x}$. אז שלושת האטלסים $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}$ אטלסים לא מתואמים בזוגות ולכן מייצגים שלושה מבנים חלקים שונים.

הגדרה 1.2.6. תהי (M,A) יריעה עם אטלס חלק. נגדיר $f\colon M\to\mathbb{R}$ **גזירה** בנקודה $p\in M$ אם $\hat{f}\colon\varphi(\mathcal{U})\to\mathbb{R}$ גזירה ב־$\varphi(p)$ עבור $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה סביבה p מהאטלס A.

תרגיל. בדקו כי הנ"ל מוגדר היטב.

הגדרה 1.2.7. **יריעה חלקה** היא יריעה טופולוגית M עם בחירה של אטלס חלק על M.

טענה 1.2.8. בכל מחלקת שקילות של אטלסים קיים אטלס מקסימלי.

מסקנה 1.2.9. בחירת מבנה חלק שקולה לבחירת אטלס חלק מקסימלי על M.

הגדרה 1.2.10. תהיינה $(M,A_M),(N,A_N)$ שתי יריעות חלקות ותהי $f\colon M\to N$. אז f תיקרא **גזירה ב־**$p\in M$ אם $\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ גזירה ב־$\varphi(p)$, ההצגה המקומית ביחס למפות $p\in\mathcal{U}$ $(\mathcal{U},\varphi)\in A_M$ ו־$f(p)\in\mathcal{V}$ $(\mathcal{V},\psi)\in A_N$.

תרגיל. בדקו כי הנ"ל מוגדר היטב ביחס למפות מתואמות.