סיכומי הרצאות בירייעות דיפרנציאביליות
חורף 2018, הטכניון

הרצאותיו של מיכאל חנבסקי
סוכמו על ידי אלעד צורני

מפת העולם. על ידי ג'ררד ואן שגן.

עדכון אחרון 30 בדצמבר 2018

תוכן העניינים

הקדמה

הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין *כל הבטחה* כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות.
להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל tzorani.elad@gmail.com.
אלעד צורני.

ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

M. Spivak: Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus

J. Milnor: Topology from athe differentiable viewpoint

J. Lee: Introduction to smooth manifolds

L. Conlon: Differentiable manifolds: a first course

V. Guillemin, A, Pollcak: Differential topology

הקדמה

0.1 תוכן הקורס

הרצאה 1
21 באוקטובר 2018

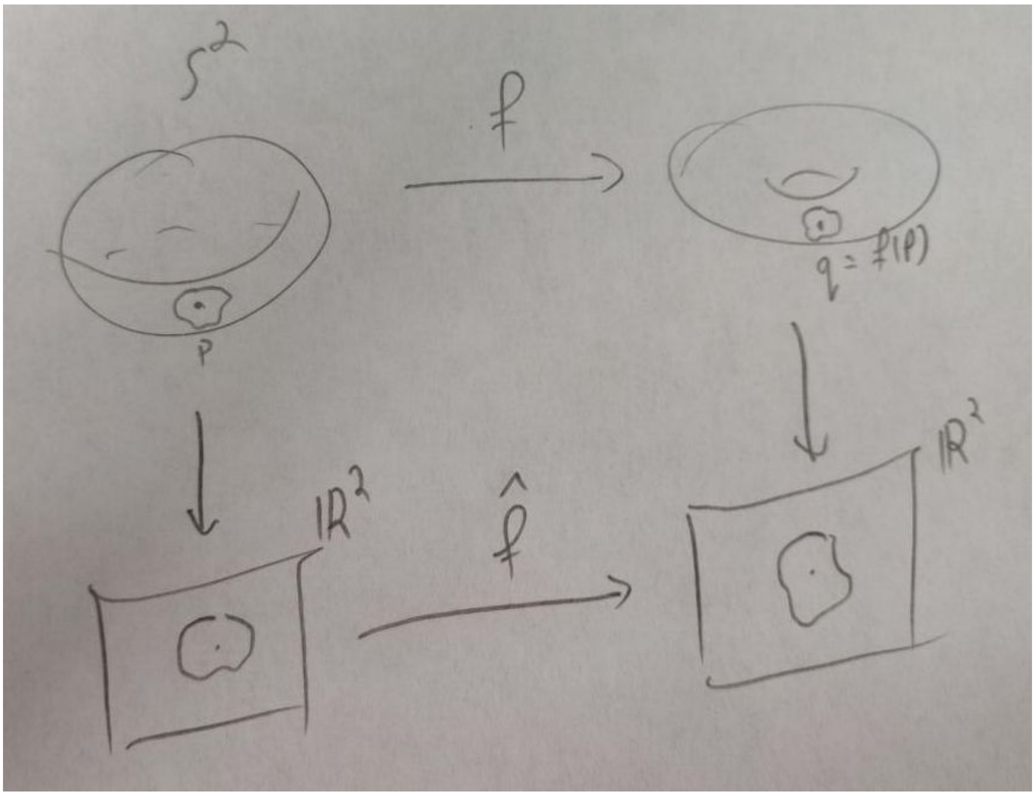
יריעה היא מרחב טופולוגי שלוקלית נראה כמו קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$. דוגמאות ליריעות הן עקומות ומשטחים.

דוגמה 0.1.1. S^2 הינה יריעה. סביבה של נקודה נראית כמו קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^2$.

דוגמה 0.1.2. $\mathbb{T}^2$ הינה יריעה. סביבה של נקודה גם כאן נראית כמו קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^2$.

נסתכל על העתקה $f\colon S^2 \to \mathbb{T}^2$. נוכל לזהות את ההעתקה $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ באופן לוקלי עם העתקה $\hat{f}$ שמעתיקה קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות. ראו איור 2.

איור 2: העתקה לוקלית.



בקורס נעסוק בהכללת משפטים מאנליזה ב־$\mathbb{R}^n$ למשפטים על יריעות חלקות. רוב המשפטים ניתנים להכללה ליריעות $\mathscr{C}^k$. למשפטים מהקורס שימושים רבים בגיאומטריה, טופולוגיה, פיזיקה, אנליזה, קומבינטוריקה ואלגברה. כדי שהתיאוריה הקשורה לקורס לא תישאר באוויר נראה חלק גדול מהקורס שימושים, בעיקר בתחום של טופולוגיה דיפרנציאלית.
קיימים מספר משפטים מוכרים מאנליזה.

דוגמאות. 1. *נוסחאת ניוטון-לייבניץ:*

$$\int_{\partial[a,b]} F = \int_{[a,b]} F' \,\mathrm{d}x$$

2. *נוסחאת גרין:*

$$\int_{\partial U} f \,\mathrm{d}x + g \,\mathrm{d}y = \iint_U \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

3. *משפט גאוס:*

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \,\mathrm{d}v = \iint_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}s$$

4. *משפט סטוקס:*

$$\iint_\Sigma \left\langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}s = \int_{\partial\Sigma} \left\langle \vec{F}, \vec{\gamma} \right\rangle \mathrm{d}t$$

כולם נובעים ממשפט סטוקס כללי יותר אותו נוכיח בקורס.

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega \mathrm{d}\omega$$

0.2 דרישות קדם

נשתמש בקורס רבות במשפט הפונקציה הסתמונה ובמשפט הפונקציה ההפוכה מ-$\mathbb{R}^n$. רצוי להכיר את ניסוחיהם, את המשמעויות הגיאומטריות ומספר שימושים שלהם. נשתמש בהחלפות קואורדינטות מאלגברה לינאריות, במשפט פוביני, מטריצות יעקוביאן, במטריצות יעקוביאן, בכלל השרשרת ובמשפט קיום ויחידות של מד"ר.

0.3 תרגילי בית

בקורס יפורסמו ארבעה תרגילי בית רשמיים, רובם ברמת הבנת ההגדרות. אין חובת הגשה אך מומלץ מאוד לפתור את התרגילים כדי לוודא שאינכם הולכים לאיבוד.

0.4 ציון

הציון הסופי כולו יסתמך על הגשת עבודת בית.

פרק 1

מבוא

1.1 הגדרות

הגדרה 1.1.1. מרחב טופולוגי M נקרא ***יריעה טופולוגית*** (topological manifold) אם לכל $x \in M$ יש סביבה U שהומאומורפית לקבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ עבור n כלשהו.

הערה 1.1.2. לעתים יריעה טופולוגית כפי שהגדרנו אותה נקראת ***מרחב אוקלידית לוקלית*** (locally Euclidean space).

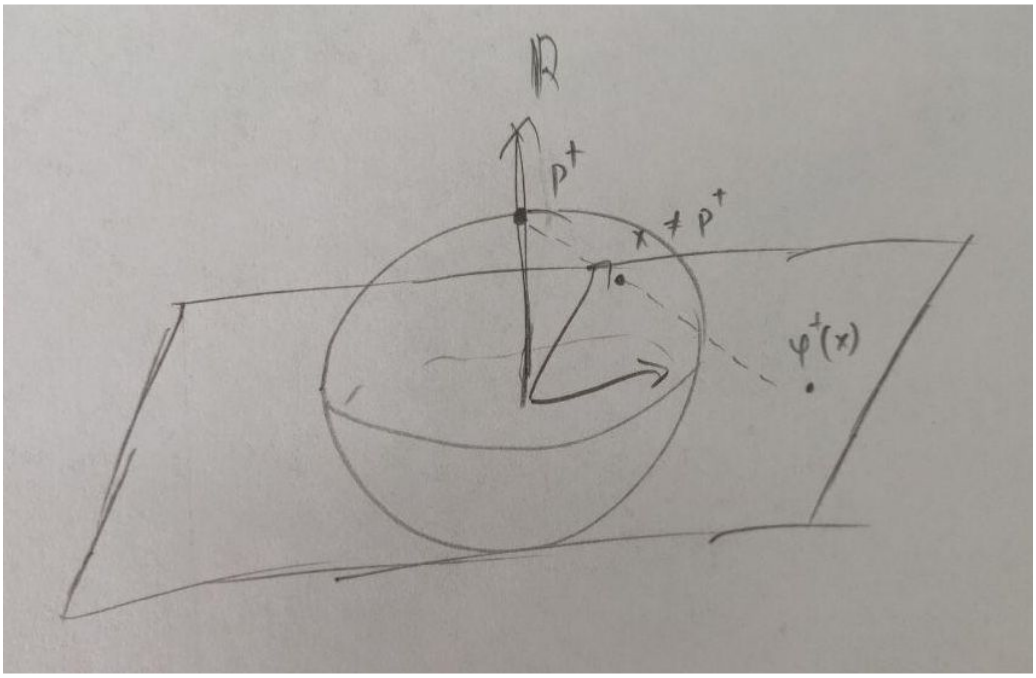
עובדה 1.1.3. *עבור יריעה טופולוגית, n קבוע מקומית.*
אם M קשירה, n קבוע.

הגדרה 1.1.4. עבור יריעה M עם n קבוע, נגיד ש־n הוא ***המימד*** של היריעה.

תרגיל 1. מצאו אילו אותיות מבין MANIFOLD הן יריעות. מצאו אילו הומאומורפיות.

דוגמאות.
1. עקומות
2. משטח ב־$\mathbb{R}^3$
3. $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$: נסמן $\mathcal{U}^+ = S^n \setminus \{p^+\}$ נתאים לנקודה $x \in \mathcal{U}^+$ על הספירה את הנקודה $\varphi^+(x) \in \mathbb{R}^n$ המתקבלת על ידי הטלה סטרוגרפית. ראו איור 1.1. ניתן לראות כי φ^+ הומאומורפיזם. אפשר באותו אופן להגדיר $\varphi^- : \mathrm{U}^- \to \mathbb{R}^n$. לכל נקודה על S^n יש

איור 1.1: הטלה סטרוגרפית.



סביבה הומאומורפית לקבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ המתקבלת מהמקור דרך $\varphi^\pm$ של סביבה בתמונה, לכן S^n יריעה.

תרגיל 2. אם M_1, M_2 יריעות טופולוגיות אז $M_1 \times M_2$ עם טופולוגיית המכפלה הינה יריעה. אם המימד של M_1, M_2 אחיד מתקיים גם

$$\dim\left(M_1 \times M_2\right) = \dim M_1 + \dim M_2 .$$

דוגמה 1.1.5 ***טורוס n–מימדי*** הוא $\mathbb{T}^n := \prod_{k=1}^{n} S^1$. ניתן להגדיר גם $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n/\sim$ כאשר $x \sim y$ אם $x - y \in \mathbb{Z}^n$. נסמן $\pi\colon \mathbb{R}^n \to T^n$ את ההטלה הטבעית (כלומר $\pi\left(x\right) = \left[x\right] = x + \mathbb{Z}^n$) ואז $\mathcal{U} \subseteq T^n$ פתוחה אם $\pi^{-1}\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$.

תרגיל 3. הראו כי $\mathbb{T}^n$ הומאומורפי ל-T^n.

דוגמה 1.1.6 נגדיר ***מרחב פרויקטיבי הוא*** בשתי דרכים.

(i) נסתכל על ישרים דרך $\vec{0}$ ב-$\mathbb{R}^{n-1}$. עבור ℓ ישר דרך 0 נסמן $\mathcal{U}_{\varepsilon}\left(\ell\right)$ את אוסף הישרים ℓ' דרך $\vec{0}$ כך שמתקיים $\deg \ell, \ell' < \varepsilon$. אז קבוצה פתוחה היא איחוד כלשהו של $\mathcal{U}_{i\in I}\mathcal{U}_{\varepsilon_i}\left(\ell_i\right)$.

(ii) נגדיר גם $\mathrm{RP}^n = S^n/\pm 1$ כלומר $x \sim y$ אם $x = \pm y$. נסמן $\pi\colon S^n \to \mathrm{RP}^n$ את ההטלה $x \to \{x, -x\}$ ואז $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{RP}^n$ פתוחה אם $\pi^{-1}\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה ב-S^n.

תרגיל 4. הראו כי RP^n הומאומורפי ל-RP^n.

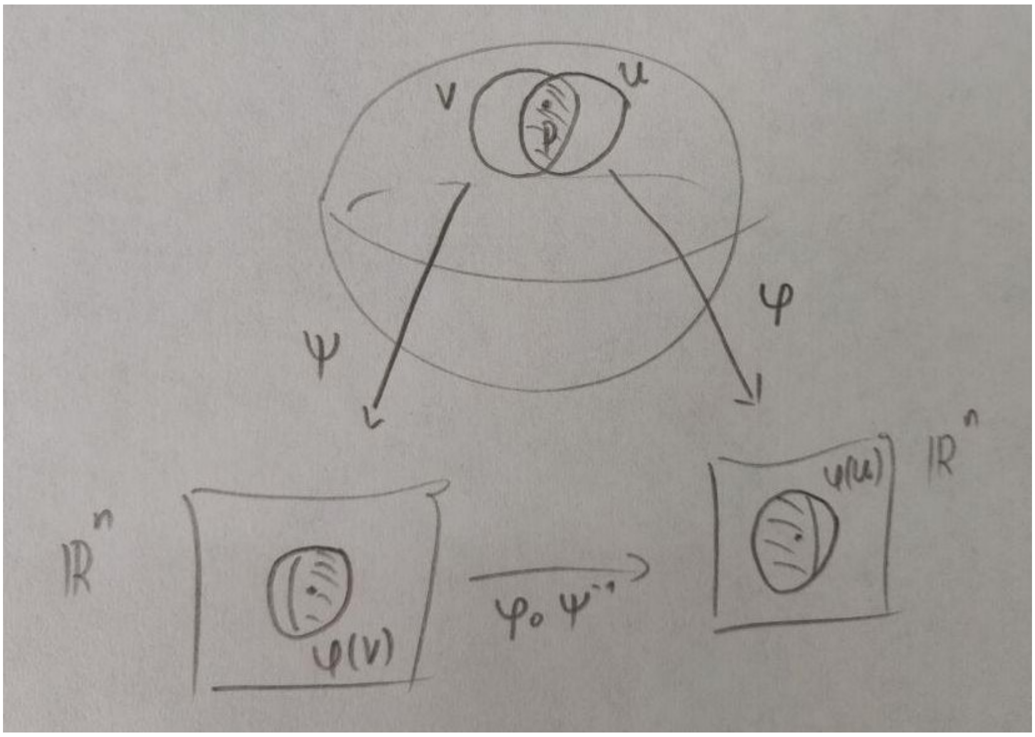
דוגמה 1.1.7 RP^1 הומאומורפי ל-S^1. לאחר הזיהוי מתקבל קטע המזוהה בקצותיו, וזה הומאומורפי למעגל.

הגדרה 1.1.8 תהי M יריעה טופולוגית. ***מפה*** coordinate chart / map היא זוג $(\mathcal{U}, \varphi)$ כאשר $\mathcal{U} \subseteq M$ קבוצה פתוחה ו-$\varphi\colon \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ הומאומורפיזם, ו-$\varphi\left(\mathcal{U}\right) \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

דוגמה 1.1.9 ב-S^n הגדרנו שתי מפות $(\mathcal{U}^{\pm}, \varphi^{\pm})$.

הגדרה 1.1.10 תהיינה $\left(\mathcal{U}, \varphi\right), \left(\mathcal{V}, \psi\right)$ מפות עבור יריעה M. אז $\varphi \circ \psi^{-1}\colon \psi\left(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}\right) \to \varphi\left(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}\right)$ הומאומורפיזם שנקרא ***פונקציית מעבר*** transition map או ***פונקציית החלפת קואורדינטות***. ראו איור 1.2.

איור 1.2: פונקציית מעבר.



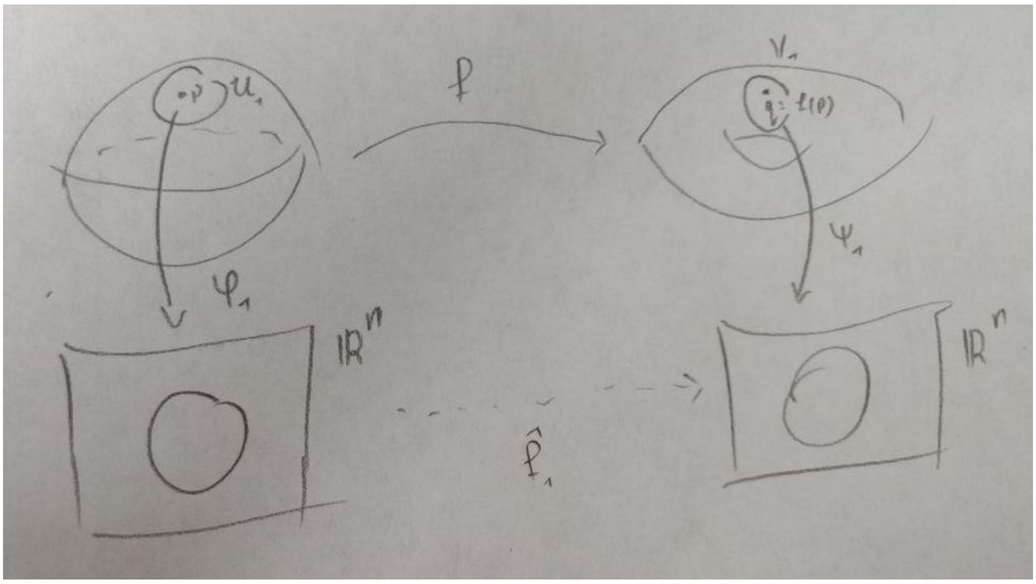
הגדרה 1.1.11 תהי העתקה $f\colon M \to N$ בין יריעות, ונניח בה"כ $f\left(\mathcal{U}_1\right) \subseteq \mathcal{V}_1$. אז $\hat{f}_1\colon \varphi_1\left(\mathcal{U}_1\right) \to \psi_1\left(\mathcal{V}_1\right)$ ***הצגה מקומית של*** f (ביחס למפות $(\varphi_1, \mathcal{U}_1)$ ו-$(\psi_1, \mathcal{V}_1)$). מתקיים $\hat{f}_1 = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\big|_{\psi_1(\mathcal{U}_1)}$. ראו איור 1.3.

הגדרה 1.1.12 תהיינה $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ שתי הצגות מקומיות של $f\colon M \to N$. אז

$$\hat{f}_2\Big|_{\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \hat{f}_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} .$$

כאן $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ פונקציית מעבר מ-$(\mathcal{U}_2, \psi_2)$ ל-$(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ ו-$\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ פונקציית מעבר מ-$(\mathcal{V}, \psi_1)$ ל-$(\mathcal{V}, \psi_2)$. ראו איור 1.4.

איור 1.3: הצגה מקומית.



נזכיר כי $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ עבור $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת ***חלקה*** (smooth) אם לכל $x \in \mathcal{U}$ קיימות ורציפות נגזרות חלקיות של f מסדר כלשהו.

סימון 1.1.13. עבור f חלקה נסמן $f \in \mathscr{C}^\infty$.

הגדרה 1.1.14. $f: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ עבור $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$ ***דיפאומורפיזם*** אם f הפיכה, ו־f, f^{-1} חלקות.

תרגיל 5. אם $f: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ חלקה וגם $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$ אז $m = n$.

דוגמאות.

$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ איננה חלקה.

$f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$ חלקה (אך איננה אנליטית).

נגדיר $\mathcal{W} = \mathrm{R}$, $\mathcal{U} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. אז $\tan \colon \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ דיפאומורפיזם.

תרגיל 6.
1. אם F דיפאו' גם F^{-1} דיפאו'.
2. הרכבה של דיפאו' היא דיפאו'.
3. אם $F_1: \mathcal{U}_1 \to \mathcal{W}_1$ ו־$F_2: \mathcal{U}_2 \to \mathcal{W}_2$ דיפאו' אז $F_1 \times F_2: \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \to \mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_2$ דיפאו'.
4. אם $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ ו־$-\infty \leq c \leq d \leq \infty$ אז (a, b) דיפאומורפי ל־(c, d).
5. הקבוצות במישור מאיור 1.5 דיפאומורפיות.

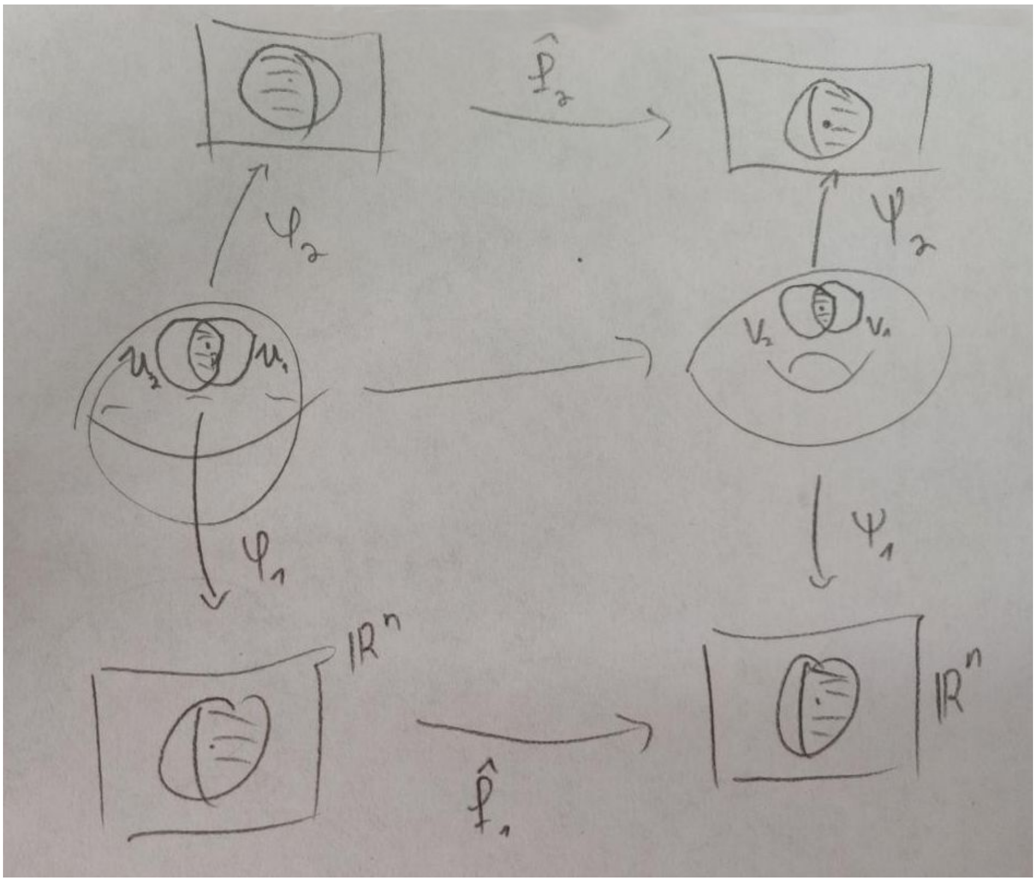
1.2 מבנה חלק

נרצה להגדיר מתי העתקה $f: M \to \mathbb{R}$ הינה גזירה/חלקה בנקודה p. ננסה להגדיר גזירות של העתקה f כנ"ל.

"הגדרה": *f גזירה ב־$p \in M$ אם כל הצגה מקומית $\hat{f}$ גזירה ב־$\varphi(p)$*. הגדרה זאת איננה טובה כי בהינתן שתי הצגות מקומיות סביב p ופונקציית מעבר ψ, $\hat{f}_1 = \hat{f}_2 \circ \psi$ איננה בהכרח גזירה.

"הגדרה 2": נניח כי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה. נאמר כי $f: M \to \mathbb{R}$ חלקה אם ניתן להרחיב את f לפונקציה חלקה $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ כאשר $\mathcal{U}$ סביבה פתוחה של M.
גם בהגדרה זו יש בעיות, כפי שנראה מיד בדוגמה.

איור 1.4: פונקציית מעבר בין יריעות.



דוגמה 1.2.1. ניקח $M=\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}$. נסתכל על שלוש מפות $(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\,, i\in[3]$ כאשר $\mathcal{U}_i=\mathbb{R}$ והמפות מוגדרות על ידי

$$\varphi_1(x)=x$$
$$\varphi_2(x)=x^3$$
$$.\varphi_3(x)=\sqrt[3]{x}$$

תהי $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$. אז $\hat{f}_1=f$ ונקבל כי מה"הגדרה" $\hat{f}_1$ חלקה אם ורק אם f חלקה במובן של אינפי. נקבל

$$\hat{f}_2(u)=f\circ\varphi_2^{-1}(u)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\cdot u^{\frac{i}{3}}$$

לכן תנאי הכרחי עבור חלקות של $\hat{f}_2$ הוא ש־$a_i=0$ לכל $i\not\equiv 0 \pmod 3$. נקבל באותו אופן

$$\hat{f}_3\left(w\right)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iw^{3i}$$

ונקבל פחות הצגות חלקות מאשר בהצגה המקומית הראשונה.

דוגמה 1.2.2. נגדיר $M_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\right\}$ ו־$M_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=|x|\right\}$. נגדיר העתקה $P\colon M_2\to M_1$ ע"י $(x,|x|)\mapsto(x,0)$. זהו הומיאומורפיזם.

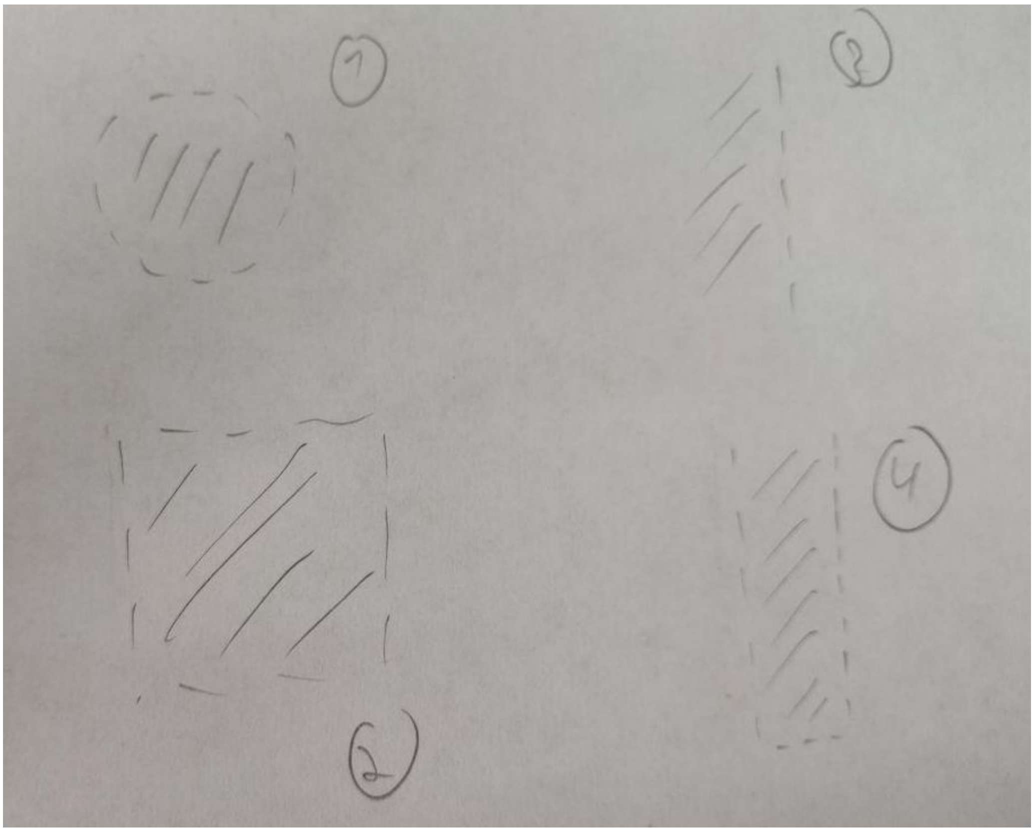
תרגיל 7. $f_1\colon M_1\to\mathbb{R}$ ע"י $(x,0)\mapsto\varphi\left(x\right)$ חלקה אם ורק אם φ חלקה כפונקציה $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

תרגיל 8. $f_2\left(x,|x|\right)=|x|$ פונקצייה חלקה $M_2\to\mathbb{R}$.
רמז: ניתן להרחיב אותה לפונקציה $f_2\left(x,y\right)=y$ כאשר $f_2\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

כאשר נפעיל את הזיהוי בין M_1 ל־M_2 על ידי P נקבל כי f_2 פונקצייה חלקה! לכן ה"הגדרה" תלויה בשיכון $M\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ ולא רק ביריעה עצמה.

נתקלנו בבעייה. המבנה של יריעה טופולוגית הינו חלש מידי ונראה שאין סיכוי להגדיר עליו נגזרת. איך נעקוף זאת? נרצה לדרוש שההעתקות המעבר יהיו חלקות, ואז $\hat{f}_1=\psi\circ\hat{f}_2\circ\varphi$ תהיה גזירה אם ורק אם $\hat{f}_2$ גזירה, עבור φ,ψ העתקות מעבר.

איור 1.5: קבוצות דיפאומורפיות במישור.



הגדרה 1.2.3. תהי M יריעה. מפות $(\mathcal{U},\varphi)$, $(\mathcal{V},\psi)$ יקראו ***מתואמות*** (compatible) אם $\varphi\circ\psi^{-1}$, $\psi\circ\varphi^{-1}$ חלקות (כלומר, דיפאומורפיזמים).

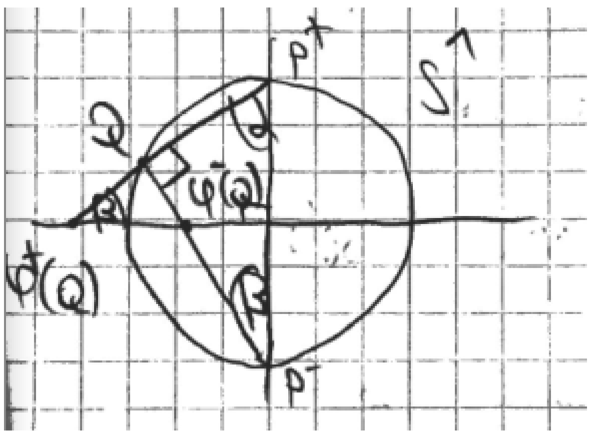
תרגיל 9. תהי $f:\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\to\mathbb{R}$. אז $f\circ\varphi^{-1}$ חלקה אם ורק אם $f\circ\psi^{-1}$ חלקה, כאשר φ,ψ מתואמות.

הגדרה 1.2.4. תהי M יריעה. ***אטלס חלק*** (smooth atlas / $\mathscr{C}^\infty$ atlas) על M הוא משפחת מפות מתואמות $\{(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ כך שמתקיים $M=\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{U}_\alpha$.

דוגמה 1.2.5. ניקח $M=S^1$ ואז $\{(\mathcal{U}^\pm,\varphi^\pm)\}$ שהגדרנו קודם הינו אטלס.

טענה 1.2.6. האטלס הנ"ל הינו חלק.

איור 1.6: the stereographic map.



הוכחה. מתקיים

$$\mathcal{U}^+\cap\mathcal{U}^-=S^1\setminus\{p^+,p^-\}$$

כמובן $\varphi^\pm\left(\mathcal{U}^+\cap\mathcal{U}^-\right)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. ראו איור 1.6. מתקיים $\varphi^-\left(Q\right)=\tan\left(\beta\right)$ וגם $\varphi^+\left(Q\right)=\frac{1}{\tan(\beta)}$. לכן אם $x=\varphi^+\left(Q\right)$ נקבל $\varphi^-\circ\left(\varphi^+\right)^{-1}\left(x\right)=\frac{1}{x}$ פונקציית מעבר חלקה. כנ"ל לפונקציית המעבר לכיוון השני, לכן האטלס חלק. ■

הגדרה 1.2.7. שני אטלסים חלקים נקראים ***שקולים*** אם האיחוד שלהם הוא אטלס חלק.

תרגיל 10. שקילות זאת הינה אכן יחס שקילות בין אטלסים חלקים על M.

הגדרה 1.2.8. ***מבנה חלק*** על M זו מחלקת שקילות של אטלסים.

דוגמה 1.2.9. ניקח $M=\mathbb{R}$ עם $\mathcal{U}_i=\mathbb{R}$ וההעתקות $\varphi_1=\mathrm{id},\varphi_2=x^2,\varphi_3=\sqrt[3]{x}$. אז שלושת האטלסים $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}$ אטלסים לא מתואמים בזוגות ולכן מייצגים שלושה מבנים חלקים שונים.

הגדרה 1.2.10. תהי $(M,\mathcal{A})$ יריעה עם אטלס חלק. נגדיר $f\colon M\to\mathbb{R}$ ***גזירה*** בנקודה $p\in M$ אם $\hat{f}\colon\varphi(\mathcal{U})\to\mathbb{R}$ גזירה ב־$\varphi(p)$ עבור $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה סביבה p מהאטלס $\mathcal{A}$.

תרגיל 11. בדקו כי הנ"ל מוגדר היטב.

הגדרה 1.2.11. ***יריעה חלקה*** היא יריעה טופולוגית M עם בחירה של אטלס חלק על M.

טענה 1.2.12. בכל מחלקת שקילות של אטלסים קיים אטלס מקסימלי.

מסקנה 1.2.13. *בחירת מבנה חלק שקולה לבחירת אטלס חלק מקסימלי על M.*

הגדרה 1.2.14. תהיינה $(M,\mathcal{A}_M),(N,\mathcal{A}_N)$ שתי יריעות חלקות ותהי $f\colon M\to N$. אז f תיקרא ***גזירה*** ב־$p\in M$ אם $\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ גזירה ב־$\varphi(p)$, ההצגה המקומית ביחס למפות $p\in\mathcal{U}$ $(\mathcal{U},\varphi)\in\mathcal{A}_M$ ו־$f(p)\in\mathcal{V}$ $(\mathcal{V},\psi)\in\mathcal{A}_N$.

תרגיל 12. בדקו כי הנ"ל מוגדר היטב ביחס למפות מתואמות.

הרצאה 2
28 באוקטובר
2018

הגדרה 1.2.15. פונקציה $f\colon M\to N$ ***חלקה*** אם כל ההצגות המקומיות של f ביחס למפות מתואמות הן פונקציות חלקות.

הערה 1.2.16. כדי לבדוק חלקות, די לבדוק חלקות של פונקציות מתואמות עם מפות שמכסות את היריעה.

הגדרה 1.2.17. פונקציה הפיכה f כאשר f,f^{-1} חלקות נקראת ***דיפאומורפיזם***.

תרגיל 13. אם $f\colon M\to N$ דיפאומורפיזם, אז $\dim M=\dim N$.

תרגיל 14. דיפאומורפיזמים שומרים על פונקציות חלקות. אם בדיאגרמה הבאה φ,ψ איזומורפיזמים, אז h חלקה אם ורק אם h' חלקה.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"] & N \arrow[d, "\psi"] \\ M' \arrow[r, dotted, "h'"] & N' \end{tikzcd}$$

הגדרה 1.2.18. ***יריעה דיפרנציאבילית*** $\mathscr{C}^r$ היא יריעה טופולוגית עם אטלס בו פונקציות המעבר חלקות $\mathscr{C}^r$.

תרגיל 15. תהי $(M,\mathcal{A})$ יריעה חלקה ותהי $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה מתואמת עם $\mathcal{A}$. אז $\varphi\colon\mathcal{U}\to\varphi(\mathcal{U})\subseteq\mathbb{R}^m$ דיפאומורפיזם.

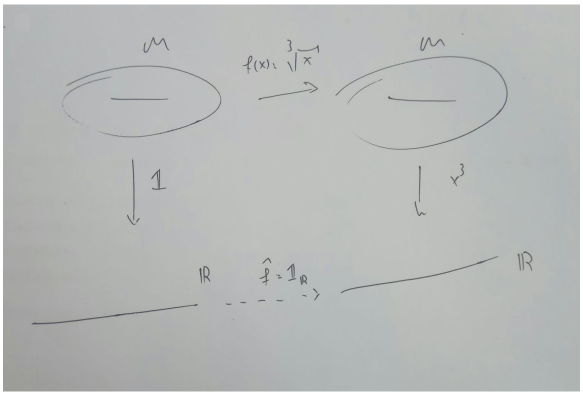
דוגמה 1.2.19. תהי $M=\mathbb{R}$ עם $\mathcal{A}_1=\{(\mathbb{R},\mathbb{1})\}$ המבנה החלק הסטנדרטי, ועם $\mathcal{A}_2=\left\{\left(\mathbb{R},x^3\right)\right\}$. אז $(M,\mathcal{A}_1),(M,\mathcal{A}_2)$ יריעות חלקות שונות, אך דיפאומורפיות. נסמן $f(x)=\sqrt[3]{x}$. אז $\hat{f}=\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ ולכן f דיפאומורפיזם. ראה איור 1.7.

שאלה 1.2.20. האם קיימים מבנים שאינם דיפאומורפיים על אותה יריעה טופולוגית? עבור $\dim M\leq 3$ התשובה נכונה. עבור $\dim M=1$ נסו **כתרגיל**. עבור $\dim M\geq 4$ הדבר תלוי ביריעה.

דוגמה 1.2.21. בטבלה 1.8 מספר המבנים הדיפאומורפיים של הספירה. עבור $n=4$ זאת בעייה פתוחה הנקראת smooth Poincaré conjecture.

דוגמה 1.2.22. ב־$\mathbb{R}^n$ יש מבנה דיפאומורפי אחד לכל $n\neq 4$, ואינסוף עבור $n=4$.

איור 1.7: דיפאומורפיזם.



איור 1.8: מבנים דיפאומורפיים של הספירה.

n	מספר מבנים חלקים שונים של S^n עד כדי דיפאומורפיזם
1	1
2	1
3	1
4	?
5	1
6	1
7	28
8	2
9	8
10	6
11	992
12	1

1.3 תתי־יריעות

הגדרה 1.3.1. תהי M יריעה טופולוגית ממימד m ותהי $N \subseteq M$ עם הטופולוגיה המושרית. N תיקרא ***תת־יריעה טופולוגית*** אם לכל $x \in N$ קיימת מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ של M עם $x \in \mathcal{U}$ וגם $\mathcal{U} \cap N = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)$. (כאן $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^m$)

דוגמאות.
- $W \subseteq M$ קבוצה פתוחה היא תת־יריעה חלקה.
- אם $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ אז הגרף של F,

$$\mathrm{Gr}(F) = \{(x, F(x)) \mid x \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

היא תת־יריעה. אם F רציפה זאת רק תת־יריעה טופולוגית, אם F חלקה זאת תת־יריעה חלקה, וכו'. תהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחה. אז $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ פתוחה במרחב $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. נגדיר

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n &\to \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto (x, y - F(x)) \end{aligned}$$

ואז $\mathcal{U} \times \{0\} \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}(F) \cap (\mathcal{U} \cap \mathbb{R}^n)$ המפה שנדרשת בהגדרה. אם F רציפה, $\varphi_{\mathcal{U}}$ הומאומורפיזם ולכן זאת תת־יריעה טופולוגית. אם F חלקה, $\varphi_{\mathcal{U}}$ חלקה, כלומר מתואמת עם האטלס הסטנדרטי, וזאת תת־יריעה חלקה.

תרגיל 16. גרף של $|x|$ הוא תת־יריעה טופולוגית אך לא חלקה.

תרגיל 17. תת־יריעה טופולוגית היא יריעה טופולוגית.

טענה 1.3.2. *תהי $N^n \subseteq M^m$ (כלומר N ממימד n, M ממימד m) תת־יריעה חלקה. אזי M משרה על N מבנה של יריעה חלקה.*

הוכחה. מתרגיל 17 תת־יריעה היא יריעה טופולוגית. נשאר להראות כי M משרה מבנה חלק.
ניקח $\{(\mathcal{U}_x,\varphi_x)\}_{x\in N}$ מפות מההגדרה של תת־יריעה חלקה ונגדיר

$$\mathcal{A}=\left\{\left(\mathcal{U}_x\cap N,\,\varphi_x|_{\mathcal{U}_x\cap N}\right)\right\}_{x\in N}$$

אטלס שמכסה את N. נשאר להראות כי המפות מתואמות. $(\mathcal{U}_x,\varphi_x)$ ו־$(\mathcal{U}_y,\varphi_y)$ מתואמות, לכן פונקציות המעבר

$$\varphi_y\circ\varphi_x^{-1}\colon \varphi_x\left(\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y\right)\to\varphi_y\left(\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y\right)$$

חלקות. לכן הצמצום באטלס $\mathcal{A}$, שהינו

$$\varphi_y\circ\varphi_x^{-1}|_{\mathbb{R}^n\cap\varphi_x(\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y)}\colon \mathbb{R}^n\cap\varphi_x\left(\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y\right)\to\mathbb{R}^n\cap\varphi_y\left(\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y\right)$$

גם הוא חלק. ∎

דוגמה 1.3.3. נתונה מערכת משוואות

$$\begin{cases}F_1\left(x_1,\ldots,x_m\right)=0\\ \vdots\\ F_r\left(x_1,\ldots,x_m\right)=0\end{cases}$$

כאשר F_i חלקות. נניח שבנקודה $\vec{x}$ כך ש־$\vec{F}\left(\vec{x}\right)=0$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{x}}\right)=r$ (הדרגה מקסימלית). ממשפט הפונקציה הסתומה ניתן לבודד $m-r$ קואורדינטות $\vec{x}''$ כאשר $\vec{x}'$ שאר הקואורדינטות. נסמן $\vec{x}=\left(\vec{x}'',\vec{x}'\right)$ בה"כ ואז לוקלית ליד $\vec{x}$ קבוצת הפתרונות $\vec{F}\left(\vec{x}\right)=\vec{0}$ נראית כמו גרף של פונקצייה

$$\begin{aligned}G\colon \mathbb{R}^{m-r}&\to\mathbb{R}^n\\ x''&\mapsto G\left(x''\right)\subseteq\mathbb{R}^r\end{aligned}.$$

דוגמה 1.3.4. עבור $F\left(x_1,x_2\right)=x_1^2+x_2^1-1$, מתקיים $\frac{\partial F}{\partial x}=\left(2x_1,2x_2\right)$. כאשר $x_1,x_2\neq 0$ ניתן להציג את x_1 כפונקציה של x_2 או להיפך. לוקלית, ליד x, $M=\{x\mid F(x)=0\}$ היא יריעה חלקה. אם תנאי של משפט הפונקציה הסתומנה מתקיים לכל $x\in M$, אז M יריעה חלקה (גלובלית).

תרגיל 18. עבור תת־יריעה כמו בדוגמה, מתקיים $\dim M=m-r$.

משפט 1.3.5. *נניח ש־$N\subseteq\mathbb{R}^m$ תת־קבוצה כך שלכל $x\in N$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^m$ ו־$r=m-n$ פונקציות חלקות $F_i\colon\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ (עם r קבוע עבור N) כך שמתקיימים התנאים הבאים.*

$$N\cap\mathcal{U}=\left\{\vec{x}\in\mathcal{U}\;\middle|\;\vec{f}\left(\vec{x}\right)=\vec{0}\right\}$$

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{x}}\right)=r$$

אז $N\subseteq\mathbb{R}^m$ תת־יריעה ממימד $n=m-r$.

הערה 1.3.6. הכיוון ההפוך איננו בהכרח נכון. אם $\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\;\middle|\;\vec{F}\left(\vec{x}\right)=0\right\}$ תת־יריעה של $\mathbb{R}^m$, ייתכן ש־$\vec{F}$ איננה מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה. המשפט הינו תנאי מספיק שאינו הכרחי.

דוגמאות.

- S^n קבוצת הפתרונות של

$$F\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)=\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2-1.$$

מתקיים $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)=\left(2x_1,2x_2,\ldots,2x_{n+1}\right)$ ולכן לכל $\vec{x}\neq\vec{0}$ הדרגה היא 1. $\vec{0}$ לא ביריעה, לכן זאת יריעה n־מימדית.

- **(תרגיל)** תהי $B\left(x\right)$ תבנית ריבועית שאיננה מנוונת. $N=\{x\mid B(x)=1\}$ תת־יריעה. $\{x\mid B(x)=0\}$ איננה בהכרח תת־יריעה, לדוגמה עבור $x_1^2+x_2^2-x_3^2$ מתקבל חרוט דו־צדדי שאיננו תת־יריעה.

- $\operatorname{SL}\left(n,\mathbb{R}\right)\subseteq M_{n\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ תת־יריעה כאשר $M_{n\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ מזוהה עם $\mathbb{R}^{n^2}$ עם המבנה החלק הסנדרטי.

הוכחה. תהי

$$\begin{aligned}F\colon M_{n\times n}&\to\mathbb{R}\\ A&\to\det A\end{aligned}$$

ואז $\mathrm{SL}_n=\{A\mid FA=1\}$. תהיינה $(x_{i,j})_{i,j=1}^n$ קואורדינטות של $M_{n\times n}$. צריך להוכיח שלכל $\vec{x}\in\mathrm{SL}_n$ מתקיים $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}\right)\neq\vec{0}$, כלומר שקיים $x_{i,j}$ כך ש־$\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}\neq 0$. נחשב.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}(A)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left(\det\left(A+t\cdot T_{i,j}\right)\right)\\&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left(\det A\cdot\det\left(\mathbb{1}+tA^{-1}T_{i,j}\right)\right)\\&=\det A\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\det\left(\mathbb{1}+tA^{-1}T_{i,j}\right)\right)\\&=\det A\cdot\operatorname{tr}\left(A^{-1}T_{i,j}\right)\end{aligned}$$

כאשר $(T_{i,j})_{k,l}=\delta_{k,i}\delta_{j,l}$ וכאשר $\det(1+\varepsilon B)=1+\varepsilon\operatorname{tr}B+O\left(\varepsilon^2\right)$ נובע מפיתוח לפי תמורות. מתקיים $A^{-1}=\left(\frac{M_{i,j}}{|A|}_{i,j}\right)$ מנוסחה עם מינורים. מתקיים כי $BT_{i,j}$ שווה למטריצה עם העמודה $C_i(B)$ ה־i של B בעמודה ה־j, ואפסים בשאר המקומות. לכן

$$\left(A^{-1}T_{i,j}\right)_{l,k}=\frac{M_{k,l}}{|A|}$$

ולכן קיבלנו

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}(A)=\det A\cdot\frac{M_{j,i}}{|A|}=M_{i,j}.$$

A הפיכה ולכן לא כל המינורים מתאפסים ונקבל כי $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}\right)\neq\vec{0}$. לכן גם $\dim\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})=n^2-1$. ■

- **תרגיל 19.** $O(n)\leq M_{n\times n}$ תת יריעה.
- $\mathbb{T}^n\subseteq\mathbb{R}^{2n}$ כאשר $\mathbb{T}^n\cong\left(S^1\right)^n$ ו־$\left(\mathbb{R}^2\right)^n\cong\mathbb{R}^{2n}$, ניתן להצגה ע"י המשוואות $x_{2k-1}^2+x_{2k}^2-1=0$ כאשר $k\in[n]$. עבור $\mathbb{T}^2$, ניתן לכתוב

$$F(x_1,x_2,x_3)=\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-2\right)^2+x_3^2-1=0.$$

תרגיל 20. $\nabla F\neq\vec{0}$ בנקודה $x\in\mathbb{T}^2$.

תרגיל 21. ניקח $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2\big/\mathbb{Z}^2$ ונגדיר

$$\begin{cases}\varphi_1(t)=\varphi_1(0)+v_1t\\\varphi_2(t)=\varphi_2(0)+v_2t\end{cases}$$

תנועה חופשית של חלקיק ב־$\mathbb{T}^2$. לאילו v_i המסלול הוא תת־יריעה של $\mathbb{T}^2$?

דוגמה 1.3.7. תהי $f\colon M\to N$ חלקה. אזי

$$\mathrm{Gr}(f)=\{(x,f(x))\mid x\in M\}\subseteq M\times N$$

תת־יריעה. ***האלכסון*** הוא $\Delta\subseteq M\times M$ הגרף של $\mathbb{1}_M$. הכיוון ההפוך איננו נכון. אם $\mathrm{Gr}\,f$ תת־יריעה, לא מובטח כי f חלקה.

הערה 1.3.8. ברוב הדוגמאות, יריעות הן תתי־יריעות של $\mathbb{R}^N$.

משפט 1.3.9 (Whitney). *כל יריעה M^m ניתנת לשיכון כתת־יריעה חלקה ב־$\mathbb{R}^N$ עבור N מסוים.*

הערה 1.3.10. המקרה האופטימלי הכללי הוא $N=2m$. ל־$2m-1$ אין תמיד שיכון כתת־יריעה חלקה. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2,K^2$ לא ניתנים לשיכון ב־$\mathbb{R}^3$.

תרגיל 22. תהי $N\subseteq\mathbb{R}^m$ תת־יריעה ויהי $x\in N$. $f\colon N\to\mathbb{R}$ חלקה ליד x אם ורק אם ניתן להרחיב את f לפונקציה $F\colon\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ חלקה, כאשר $\mathcal{U}$ סביבה של x ב־$\mathbb{R}^m$.

1.4 נגזרות

הגדרה 1.4.1. תהי M יריעה חלקה. ***עקומה*** γ היא העתקה $\gamma\colon(a,b)\to M$ חלקה (ביחס למבנה החלק של M והסטנדרטי ב־$\mathbb{R}$).

שאלה 1.4.2. מהי $\dot{\gamma}(x)$, "וקטור המהירות של חלקיק הנע לאורך γ"? אם $M \subseteq \mathbb{R}^n$ **עם שיכון נתון** נוכל להסתכל על $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$ ואז לגזור $\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix} = \dot{\gamma}(x)$ וקטור שמשיק ל-M בנקודה $\gamma(x)$.

הערה 1.4.3. תהי M יריעה חלקה. היינו רוצים להגדיר מרחב משיק בנקודה p להיות אוסף וקטורי המהירות של מסילות העוברות דרך p. אין לנו דרך טובה להגדיר וקטורי מהירות באופן כללי, לכן צריך לעקוף זאת.

הגדרה 1.4.4. תהיינה $\gamma_i\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ מסילות עבור $i \in [2]$ וכאשר $\gamma_i(0) = p$. אזי $\gamma_1 \sim \gamma_2$ אם קיימת מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ סביב p כך שלהצגות המקומיות $\hat{\gamma}_i = \varphi \circ \gamma_i$ אותו וקטור מהירות $\dot{\hat{\gamma}}_1(0) = \dot{\hat{\gamma}}_2(0)$.

הגדרה 1.4.5. ***וקטור משיק בנקודה*** p הוא מחלקת שקילות של עקומות $\bar{\gamma}$ עם $\gamma(0) = p$.

תרגיל 23. הראו כי שקילות עקומות בהגדרה הנ"ל היא אכן יחס שקילות.

הערה 1.4.6. יחס השקילות $\sim$ אינו תלוי בבחירת המפה סביב p. נסתכל על שתי מפות φ,ψ ואז

$$\underbrace{\varphi \circ \gamma_i}_{\hat{\gamma}_i} = \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right) \circ \underbrace{\psi \circ \gamma_i}_{\hat{\hat{\gamma}}_i}$$

ומכלל השרשרת

$$\dot{\hat{\gamma}}_i(0) = D\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)\big|_{\varphi(p)} \cdot \dot{\hat{\hat{\gamma}}}_i(0)$$

ואז

$$\dot{\hat{\hat{\gamma}}}_1 = \dot{\hat{\hat{\gamma}}}_2 \iff \dot{\hat{\gamma}}_1 = \dot{\hat{\gamma}}_2 .$$

הגדרה 1.4.7. נגדיר

$$T_pM = \{\text{smooth paths } \gamma(0) = p\}\big/\sim$$

המרחב המשיק בנקודה $p \in M$.

הערה 1.4.8. $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^m$ מגדירה העתקה

$$\begin{aligned} D\varphi_p\colon T_pM &\to \mathbb{R}^m \\ [\gamma(t)] &\to (\dot{\varphi \circ \gamma})(0) \end{aligned}$$

תרגיל 24. 1.

$$D\varphi_p\colon T_pM \to \mathbb{R}^m$$

חח"ע ועל.

2. בהינתן שתי מפות $(\mathcal{U},\varphi)$, $(\mathcal{V},\psi)$ סביב p, הדיאגרמה הבאה קומוטטיבית.

$$\begin{tikzcd} & T_pM \arrow[dl, "D\varphi_p"'] \arrow[dr, "D\psi_p"] & \\ \mathbb{R}^m \arrow[rr, dashed, "D\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)\big|_{\varphi(p)}"'] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

3. ל-T_pM יש מבנה לינארי טבעי, ע"י משיכת המבנה הלינארי מ-$\mathbb{R}^m$. נגדיר

$$\begin{cases} \sigma + \eta \coloneqq D\varphi_p^{-1}\left(D\varphi_p(\sigma) + D\varphi_p(\eta)\right) \\ c \cdot \sigma \coloneqq D\varphi_p^{-1}\left(c \cdot D\varphi_p(\sigma)\right) \end{cases}$$

ונשאיר כתרגיל בדיקה כי הדבר אינו תלוי בבחירת המפה φ. (זה נובע מכך שהעתקות המעבר הינן לינאריות)

דוגמה 1.4.9. תהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וניקח את המפה $(\mathcal{U},\mathbb{1}_{\mathcal{U}})$. אז יש איזומורפיזם

$$\begin{aligned} D\mathbb{1}_{\mathcal{U}}\colon T_p\mathcal{U} &\to \mathbb{R}^n \\ [\gamma] &\to \dot{\gamma}(0) \end{aligned}.$$

דוגמה 1.4.10. תהי יריעה $M^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ מוגדרת על ידי $\{\vec{x}\mid F(x_1,\ldots,x_n)=0\}$ עם $\nabla F\neq\vec{0}$. כעת $T_pM\subseteq T_p\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n$. מהו T_pM אחרי הזיהוי של $T_p\mathbb{R}^n$ עם $\mathbb{R}^n$? ניקח $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ עם $\gamma(0)=p$. נכתוב $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots\\ \gamma_n(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$. כעת $\gamma(t)\in M$ גורר כי לכל $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ מתקיים $F\circ\gamma(t)=0$. נחשב בעזרת כלל השרשרת.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F\circ\gamma(t)\right)\Big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}F(\gamma(t)) \\ &= \sum\frac{\partial F}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(0)}\dot{\gamma}_i(0) \\ &= \nabla F|_{\gamma(0)}\cdot\dot{\gamma}(0) \end{aligned}$$

לכן אם $\sigma\in T_pM$ אז $\sigma=D\varphi_p(\sigma)\perp\nabla F(p)$. אם נזהה את T_pM עם $D\varphi_p(T_pM)$ אזי $T_pM\subseteq(\nabla F)^{\perp}$. אלו שני מרחבים וקטוריים ממימד $n-1$, לכן יש שיוויון $T_pM=(\nabla F)^{\perp}$.

דוגמה 1.4.11. $S^1\subseteq\mathbb{R}^2$ מוגדר ע"י $F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1=0$ עם $\nabla F=(2x_1,2x_2)$. $p+T_pM$ הינו ישר המאונך ל־$\nabla F(p)$, וזהו בדיוק ישר המשיק ל־S^1 בנקודה p.

הגדרה 1.4.12. ***אגד משיק*** (tangent bundle) הינו

$$TM=\coprod_{x\in M}(x,T_xM).$$

איבר ב־TM הינו זוג (x,σ) כאשר $x\in M$ ו־$\sigma\in T_xM$.

דוגמה 1.4.13. אגד משיק למעגל הוא $TM=S^1\times\mathbb{R}$, כלומר גליל.

הערה 1.4.14. על TM טופולוגיה הניתנת באופן מקומי על ידי אטלסים.

הערה 1.4.15. קיים זיהוי קנוני בין $T_pM,T_p\mathcal{U}$ עבור $\mathcal{U}\subseteq M$ פתוחה.

דוגמה 1.4.16. תהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. אז

$$T\mathcal{U}=\{(x,\sigma)\mid x\in\mathcal{U}\wedge\sigma\in T_x\mathcal{U}\cong\mathbb{R}^n\}\cong\mathcal{U}\cong\mathbb{R}^n$$

או וקטורים עם נקודת התחלה ב־$\mathcal{U}$ וחץ שהוא וקטור ב־$\mathbb{R}^n$.

הגדרה 1.4.17. עבור M יריעה כללית, יהי $\mathcal{A}=\{(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ אטלס חלק על M. נגדיר

$$\bar{\mathcal{U}}_\alpha:=\coprod_{x\in\mathcal{U}_\alpha}T_x\mathcal{U}_\alpha$$

וגם

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_\alpha\colon\bar{\mathcal{U}}_\alpha &\to T\left[\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\right]\cong\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\times\mathbb{R}^n\subseteq\mathbb{R}^{2n} \\ (x,\sigma) &\to (\varphi_\alpha(x),D\varphi_\alpha(x)(\sigma))\in T_{\varphi_\alpha(x)}\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \end{aligned}$$

תרגיל 25.

1.

$$TM=\bigcup_{\alpha\in I}\bar{\mathcal{U}}_\alpha$$

2.

$$\bar{\varphi}_\alpha\colon\bar{\mathcal{U}}_\alpha\to\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\times\mathbb{R}^n$$

חח"ע ועל.

הגדרה 1.4.18 תת־קבוצה $X \subseteq TM$ נקראת פתוחה אם ורק אם לכל α, $\bar{\varphi}_\alpha\left(X \cap \bar{\mathcal{U}}_\alpha\right)$ פתוחה ב־$\mathbb{R}^{2n}$.

תרגיל 26. הראו בשלבים הבאים כי יש מבנה חלק על TM.

ההגדרה מגדירה טופולוגיה על TM.

2. TM יריעה טופולוגית.

3. $\left\{\left(\bar{\mathcal{U}}_\alpha, \bar{\varphi}\right)\right\}_{\alpha\in I}$ אטלס מתואם.

הערה 1.4.19 $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$, אבל $TS^2 \ncong S^2 \times \mathbb{R}^2$.

הערה 1.4.20 בדרך כלל, $TM \ncong M \times \mathbb{R}^n$. נראה מבנה לוקלי על האגד המשיק. קיימות ההעתקות הרצאה 3 4 באוקטובר 2018

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathcal{U} &\to \varphi\left(\mathcal{U}\right) \\ D\varphi\colon\ [\gamma] &\to \varphi\circ\gamma \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

ואז קיימת ההעתקה הבאה.

$$\begin{aligned} \left(\varphi, D\varphi\right) : T\mathcal{U} &\to \varphi\left(\mathcal{U}\right) \times \mathbb{R}^n \\ \left(p, [\gamma]\right) &\to \left(\varphi\left(p\right), \varphi\dot{\circ}\gamma\right) \end{aligned}$$

זאת העתקה השומרת על מבנה חלק, אך הינה תלויה בבחירת קוארדינטות $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$.

1.4.1 נגזרות כיווניות

יהיו $p\in M$, $f\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה, ו־$[\gamma] = v \in T_pM$. נגדיר את ***הנגזרת הכיוונית של f בכיוון v*** להיות

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\circ\gamma.$$

תרגיל 27. אם $[\gamma'] = [\gamma]$ אז

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f\circ\gamma = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f\circ\gamma'.$$

כלומר, הנגזרת מוגדרת היטב.

הנגזרת הכיוונית לינארית ב־v, וב־f. היא גם מקיימת את כלל לייבניץ.

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(fg\right) = f\frac{\partial g}{\partial v} + g\frac{\partial f}{\partial v}$$

הוכיחו את תכונות אלו כ**תרגיל**.

הגדרה 1.4.21 ***דריווציה*** (derivation) זאת העתקה לינארית $D\colon \mathscr{C}^\infty\left(M\right) \to \mathbb{R}$ שמקיימת את כלל לייבניץ.

הערה 1.4.22 מתקבלת העתקה

$$\begin{aligned} T_p &\to \{\text{derivations}\} \\ v &\to \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

שהינה חח"ע ועל, ולמעשה איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

הערה 1.4.23 הגדרה שקולה למרחב משיק, היא ש־T_pM הוא מרחב הדריווציות בנקודה p.

1.4.2 דיפרנציאלים

תהי $f\colon M^m \to N^n$ העתקה חלקה. אם $[\gamma] = [\gamma']$ ניתן לבדוק כי מתקיים $[f\circ\gamma] = [f\circ\gamma']$ (**תרגיל**). אז מתקבלת העתקה

$$\begin{aligned} D_pf\colon T_pM &\to \mathrm{T}_{f(p)}N \\ [\gamma] &\to [f\circ\gamma] \end{aligned}.$$

הגדרה 1.4.24 ההעתקה D_pf נקראת ***דיפרנציאל***.

סימון 1.4.25. מסמנים את הדיפרנציאל בכמה אופנים.

$$D_p, \quad Df(p), \quad f_{*p}$$

הערה 1.4.26. הדיפרנציאל הוא פונקטור קוואריאנטי.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, squiggly] & N \arrow[d, squiggly] \\ TM \arrow[r, "Df"] & TN \end{tikzcd}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} Df\colon TM &\to TN \\ (p,v) &\to (f(p), D_p f(v)) \end{aligned} .$$

טענה 1.4.27 (כלל השרשרת). *מתקיים* $\dot{\gamma}$ $\dot{\overline{f \circ \gamma}} = DF \cdot \dot{\gamma}$ ואז

$$.F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + Df \cdot \Delta x + O\left(\|\Delta x\|^2\right)$$

$F(x_0) + Df \cdot \Delta x$ *נקראת* ***לינאריזציה של ההעתקה*** F.

תרגיל 28. תהי $f\colon M^m \to N^n$ חלקה. נגדיר $D\varphi\colon [\gamma] \to \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} \in \mathbb{R}^m$ ואז

$$D\varphi\colon T_p\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \; D\psi\colon T_{f(p)}\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

ונקבל העתקה

$$\widehat{D_p f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

לינארית ולכן נתונה ע"י מטריצה. זאת מטריצת היעקובי של $\hat{f}(\varphi(p))$.

תרגיל 29.
- $Df\colon TM \to TN$ חלקה.
- $f\colon M \to N$ דיפאומורפיזם. לכן $D_x f$ הפיכה לכל $x \in M$.
- **כלל השרשרת:**

$$D_x(f \circ g) = D_{g(x)} f \circ D_x g$$

1.5 שיכונים

הגדרה 1.5.1. $f\colon M^m \to N^n$ חלקה נקראת ***אימרסיה*** אם לכל $x \in M$,

$$D_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N$$

חד־חד ערכית, או באופן שקול $\ker D_x f = \{0\}$.

דוגמה 1.5.2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ אימרסיה אם ורק אם $D_x f \neq 0$ אם ורק אם $\dot{f} \neq 0$.
באיור ההעתקות a,b הינן אימרסיות, אך c איננה.

הגדרה 1.5.3. $f\colon M^m \to N^n$ חלקה נקראת ***סובמרסיה*** אם לכל $x \in M$,

$$D_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N$$

על.

דוגמה 1.5.4. $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ההטלה הינה סובמרסיה.

הגדרה 1.5.5. $f\colon M \to N$ נקראת ***שיכון*** אם f אימרסיה וגם הומאומורפיזם.

דוגמה 1.5.6. ההעתקות באיור אינן שיכונים.

הערה 1.5.7. תהי $f\colon M^n \to N^n$ אימרסיה. אם $\ker D_x f = \{0\}$ בכל $x \in M$, אז $D_x f$ הפיכה ולכן f דיפאומורפיזם לוקאלי סביב x ו־$f(x)$. זה *משפט הפונקציה ההפוכה* והוא אינו נכון גלובלית.

$$\begin{aligned} f\colon S^1 &\to S^1 \\ e^{i\theta} &\to e^{2i\theta} \end{aligned}$$

דיפאומורפיזם לוקלי שאינו גלובלי.

תרגיל 30 (קשה). יהי $f\colon M \to N$ שיכון. אז $f(M)$ תת־יריעה של N.

דוגמה 1.5.8 (מעגל המפלצת). נסמן $M = S^1 \times \{0\}$ ו־$N = S^1 \times \{1\}$. תהי $A \in S^1$ ונסמן $A_1 = (A,0)\,, A_2 = (A,1)$. נגדיר

$$S^1_{\circ\circ} = M \amalg N/_{\sim}$$

כאשר $(x,0) \sim (x,1)$ עבור $A \neq x$. קיבלנו מעגל עם "נקודה שמנה", ומרחב זה אינו האוסדורף. הטופולוגיה המושרית היא לפי:

- עבור $x \in A_1, A_2$, סביבה היא קשת פתוחה בטופולוגיה הרגילה.
- סביבה של A_2 היא קשת סביב A_2 שאינה מכילה את A_1. באותו אופן סביבה של A_1.

$S^1_{\circ\circ}$ כן יריעה, אך לא ניתנת לשיכון ב־$\mathbb{R}^N$ (אם כן, $f\left(S^1_{\circ\circ}\right)$ תת־יריעה של $\mathbb{R}^N$ ולכן האוסדורף, בסתירה).

נניח מעתה כי כל היריעות הינן האוסדורף ובנות מנייה שנייה (כלומר, קיים בסיס בן־מניה).

תרגיל 31. יהי X טופולוגי האוסדורף ובן מנייה שנייה. מתקיימות התכונות הבאות.

1. X ספרבילי.
2. קומפקטיות שקולה לקומפקטיות סדרתית.
3. אם X הוא T_3 אז X מטריזבילי.[1]
4. X לינדלוף.

תרגיל 32. יהיו X, Y טופולוגיים, X קומפקטי ו־Y האוסדורף.

1. אם $f\colon X \to Y$ חח"ע, על ורציפה, אז f^{-1} רציפה ולכן f הומאומורפיזם.
2. $K \subseteq Y$ קומפקטית היא סגורה.

משפט 1.5.9 (Whitney, גרסה חלשה). *תהי M יריעה קומפקטית. אזי קיים שיכון $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ עם N גדול מספיק.*

הערה 1.5.10. הבנייה בהוכחת המשפט תיתן N גדול. נראה אחר־כך איך להקטין את N ל־$2\dim(M)+1$.

הערה 1.5.11. משפט Whitney נכון גם עבור יריעות שאינן קומפקטיות.

סימון 1.5.12.

$$B^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le r\}$$

למה 1.5.13. *קיימת העתקה חלקה $f\colon B^n(3) \to S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ שמקיימת את התכונות הבאות.*

1.

$$\operatorname{Im}\left(f|_{B^\circ(2)}\right) = S^n \setminus \{p_+\}$$

2. $f|_{B^\circ(2)}$ *דיפאומורפיזם.*

3.

$$f\left(B(3) \setminus B^\circ(2)\right) = p_+$$

הוכחה. מתקיים

$$S^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong B^\circ(2) \cup \{*\}$$

ולכן קיימת f הומאומורפיזם. השלימו את הפרטים ובדקו נגזרות ליד $r=2$ כך שהיא תהיה חלקה. ■

---

[1] בעצם אין צורך לדרוש כי X T_2. מתקיים (יש צורך בבדיקה) כי אם X יריעה טופולוגית האוסדורף ובת מנייה שנייה, אז X נורמלית ולכן מטריזבילית.

הוכחה (משפט Whitney). תהי M יריעה קומפקטית ממימד m. לכל $p \in M$ נבחר $(\mathcal{U}_p, \varphi_p)$ מפה. נניח כי $\varphi_p(p) = 0$ וגם $B(3) \subseteq \varphi_p(\mathcal{U}_p)$, ע"י תיקון של האטלס במידת הצורך. נקבל כי

$$\left\{\varphi_p^{-1}\left(B^\circ(2)\right)\right\}$$

כיסוי פתוח של M.
נבחר תת־כיסוי סופי

$$\left\{\varphi_{p_i}^{-1}\left(B^\circ(2)\right)\right\}_{i=1}^{d}$$

ונסמן $\mathcal{U}_i := \mathcal{U}_{p_i}$ ו־$\varphi_i := \varphi_{p_i}$. נגדיר

$$\begin{aligned} g_i \colon M &\to \mathbb{R}^{m+1} \\ x &\to \begin{cases} f\left(\varphi_i(x)\right) & x \in \varphi_i^{-1}\left(B^\circ(2)\right) \\ p_+ & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

כאשר f ההעתקה מהלמה. אז g_i חלקה כי הרחבנו את f שהינה חלקה וקבועה בסביבת השפה, לפונקציה קבועה מחוץ לכדור.
נגדיר $g := (g_1, \ldots, g_d) \colon M \to \mathbb{R}^{(n+1)d}$. אז

- g חלקה כוקטור של פונקציות חלקות.
- g *חח"ע:* לכל $y \neq x \in M$, עבור i מסוים מתקיים $x \in \varphi_i^{-1}\left(B^\circ(2)\right)$. אם $y \in \varphi_i^{-1}\left(B^\circ(2)\right)$ אז $g_i(x) \neq g_i(y)$ ולכן $g(x) \neq g(y)$. אחרת, $g_i(y) = p_+$ וגם אז $g_i(x) \neq g_i(y)$.
- $g \colon M \to g(M)$ חח"ע ועל, ו־$g(M)$ האוסדורף, לכן g^{-1} רציפה (לפי תרגיל). לכן g הומאומורפיזם.
- g *אימרסיה:* צריך להוכיח כי $D_x g \colon T_x M \to T_{g(x)}\mathbb{R}^N$ חח"ע לכל $x \in M$. קיים i עבורו $x \in \varphi_i^{-1}\left(B^\circ(2)\right)$. אז $g_i = f \circ \varphi_i(x)$ בסביבת x היא דיפאומורפיזם (לוקלי). לכן $D_x g_i$ הפיכה ולכן חח"ע. לכן $D_x g$ גם היא חח"ע.

g אימפרסיה על התמונה ■

הערה 1.5.14. כדי שההרחבה g_i של f תהייה חלקה השתמשנו בכך ש־M האוסדורף.

1.5.1 ערכים קריטיים ורגולריים

הגדרה 1.5.15. תהי $f \colon M \to N$ חלקה. $y \in N$ ***ערך רגולרי של*** f אם לכל $x \in f^{-1}(y)$ ההעתקה

$$D_x f \colon T_x M \to T_y N$$

היא על. אם $y \in N$ אינו רגולרי, הוא ***ערך קריטי***.

הגדרה 1.5.16. $x \in M$ ***נקודה רגולרית*** אם $D_x f \colon T_x M \to T_y N$ על. אחרת $x \in M$ ***נקודה קריטית***.

דוגמה 1.5.17. ניקח הטלה $\pi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ של שתי תתי־יריעות של $\mathbb{R}^2$ כמתואר באיור

הערה 1.5.18. יתכן כי תמונת נקודה רגולרית היא ערך קריטי.

הערה 1.5.19. אם $f^{-1}(y) = \varnothing$, y רגולרי.

הערה 1.5.20. קריטיות וסינגולריות הם מושגים שונים.

דוגמה 1.5.21. תהי $f \colon M \to \mathbb{R}$. x נקודה קריטית אם ורק אם $D_x f = 0$.

משפט 1.5.22. *תהי $f \colon M^m \to N^n$ חלקה עם $n \geq m$. יהי $y \in f(M) \subseteq N$ ערך רגולרי. אזי $L := f^{-1}(y)$ תת־יריעה חלקה ממימד $m - n$ (שאינה בהכרח קשירה). בנוסף, לכל $x \in L$,*

$$T_x L = \ker D_x f \subseteq T_x M.$$

הוכחה. ההגדרה של תת־יריעה הינה לוקלית, לכן די להראות כי L תת־יריעה בסביבת נקודה x, שמקיימת את הדרישות.
נבחר קואורדינטות מקומיות סביב x ו־y.[2] נסמן $(x^1, \ldots, x^m)$ ו־$(y^1, \ldots, y^n)$ בהתאמה. באופן מקומי ניתן להציג את f באופן הבא.

$$f\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x^1, \ldots, x^m\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x^1, \ldots, x^m\right) \end{pmatrix}$$

[2] ניתן להסתכל על קואורדינטות באופן אחר. קיים שריג פונקציות $x_1, \ldots, x_m \colon \varphi(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$. הדבר מגדיר קואורדינטות מקומיות $x^i = x_i \circ \varphi \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ שהינן תלויות במפה. ראו איור.

כעת

$$\mathcal{U}\cap f^{-1}(y)=\left\{\left(x^{1},\dots,x^{m}\right)\;\middle|\;\begin{cases}f_{1}\left(x^{1},\dots,x^{m}\right)=y_{1}\\ \vdots\\ f_{n}\left(x^{1},\dots,x^{m}\right)=y_{n}\end{cases}\right\}.$$

$D_x f$ על (כי y ערך רגולרי) לכן $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י מטריצת הנגזרות החלקיות היא על, ולכן $\operatorname{rank}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=n$. ממשפט הפונקציה הסתומה, $f^{-1}(y)$ תת־יריעה (לוקלית) ממימד $m-n$.

נוכיח כי $T_xL=\ker D_xf$. תהי $\gamma(t)$ עקומה ב־L. אז $f(\gamma(t))=y$ ואז

$$[\gamma]\xrightarrow{Df}[\text{const}]=0\in T_yN$$

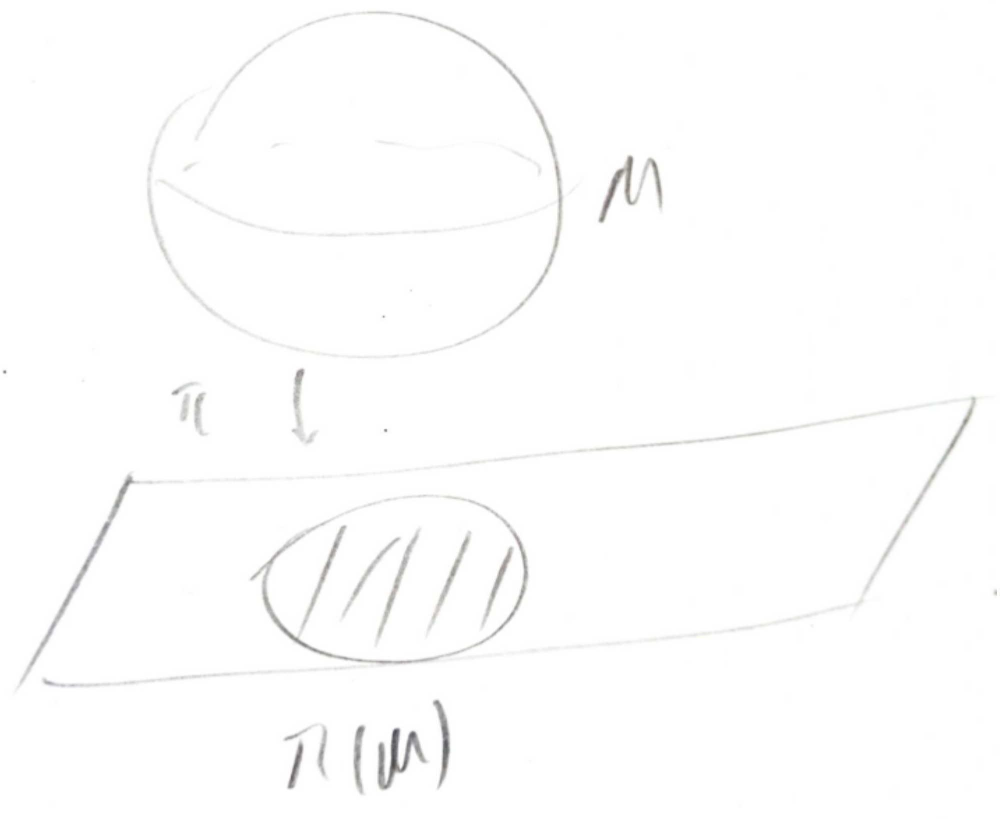
ונקבל כי $T_xL\subseteq\ker D_xf$. משיקולי מימד, יש שיוויון. ■

הערה 1.5.23. הדרישה כי y ערך רגולרי הינה מספיקה אך לא הכרחית. ייתכן ערך קריטי עם תמונה הפוכה שהיא תת־יריעה, ואפילו ממימד נכון.

דוגמה 1.5.24. נסתכל על $f:M\to\mathbb{R}$ פונקציית גובה באיור

- $f^{-1}(y_1)=\varnothing$ לכן y_1 רגולרית אך לא ב־$f(M)$.
- $f^{-1}(y_2)\cong S^1$
- $f^{-1}(y_3)=S^1\amalg S^1$.
- $f^{-1}(y_4)\cong S^1$.
- $f^{-1}(c_1)=\{\text{pt}\}$ תת־יריעה אך המימד אינו 1.
- $f^{-1}(c_2)=S^1\amalg\{\text{pt}\}$ תת־יריעה עם מימד שאינו קבועה בין מחלקות קשירות.
- $f^{-1}(c_3)=S^1\amalg S^1\big/\{\text{pt}\}$ לא תת־יריעה (זה זר עם שתי לולאות).

דוגמה 1.5.25. נסתכל על ההטלה π של הספירה $M=S^2\subseteq\mathbb{R}^3$ ל־$\mathbb{R}^2$. ראו איור 1.9. הרצאה 4 11 באוקטובר 2018



איור 1.9: הטלת ספירה על המישור.

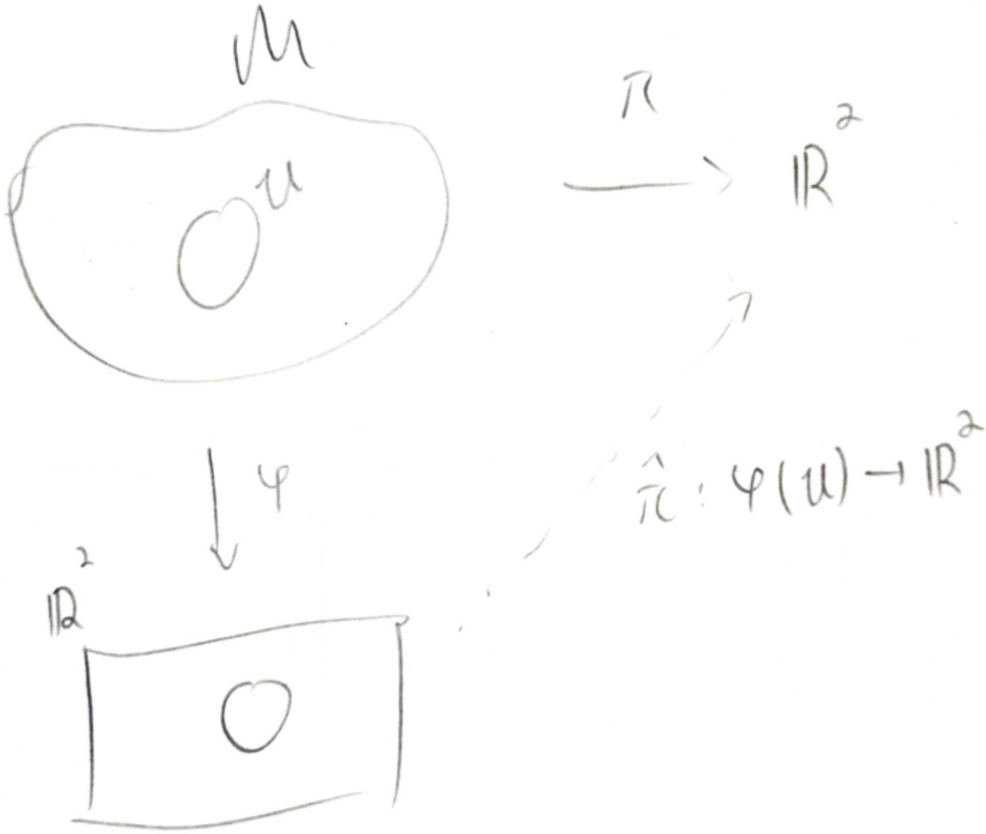
חישוב I: בקואורדינטות מקומיות ניקח

$$\mathcal{U}_1 = \left\{(x,y,z) \in S^1 \mid z > 0\right\}$$

עם

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathcal{U}_1 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\to (x,y) \end{aligned} .$$

ראו איור 1.10 נחשב את ההעתקה המקומית.



איור 1.10

$$\hat{\pi}_1 \colon\ (x,y) \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right) \xrightarrow{\pi} (x,y)$$

לכן $\hat{\pi}_1 = \mathbb{1}_{\varphi_1(\mathcal{U}_1)}$ ועל כן $D\hat{\pi}_1 = I_2$. נקבל כי $\mathcal{U}_1$ נקודה רגולריות. ניקח מפה נוספת

$$\mathcal{U}_2 = \left\{(x,y,z) \in S^2 \mid x < 0\right\}$$
$$\varphi_2\left(x,y,z\right) = (y,z)$$

ואז

$$\hat{\pi}_2 \colon\ (y,z) \xrightarrow{\varphi_2^{-1}} \left(-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z\right) \xrightarrow{\pi} \left(-\sqrt{1-y^2-z^2}, y\right)$$

ולכן

$$D\hat{\pi}_2\left(x,z\right) = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{\cdots}} & \frac{z}{\sqrt{\cdots}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (y,z)$$

לא על אם ורק אם $z = 0$. לכן הנקודות על קו המשווה חיתוך עם $\mathcal{U}_2$ הן נקודות קריטיות. עם נכסה את S^2 במפות קואורדינטות, חישוב דומה יראה שהנקודות הקריטיות הן קו המשווה. לכן הערכים הקריטיים יהיו מעגל היחידה.

חישוב II: נרחיב את π להעתקה

$$\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \to (x,y)$$

ולכן π לינארית ונסמן $\pi(x) = Ax$. אז $D\pi = A$ ולכן $\operatorname{Im} D\pi(x) = \mathbb{R}^3$. אז $\ker D\pi(x) = \operatorname{span}(0)$.
$M \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח ולכן $T_pM \subseteq T_p\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ תת־מרחב דו מימדי. נסמן $\pi_M = \pi|_M\colon M \to \mathbb{R}^2$. אז[3]

$$D\pi|_{T_pM} = D\pi_M(p)\colon T_pM \to \mathbb{R}^2$$
$$u \to A\cdot u$$

$D\pi_M(p)$ לינארית ממרחב ממימד 2 למרחב ממימד 2 ולכן אינה על אם ורק אם $\ker D\pi_M(p) \neq \{0\}$. נסמן $v = (0,0,1) = \ker D\pi$.
מתקיים

$$\ker D\pi_M(p) = \ker D\pi(p)|_{T_pM} = \ker D\pi(p) \cap T_pM = \{\lambda\vec{v}\} \cap T_pM$$

לא טריוויאלי אם ורק אם $\vec{v} \in T_pM$ אם ורק אם $\vec{v}$ וקטור משיק ל־M ב־p.

משפט 1.5.26 (Sard). *תהי $f\colon M^m \to N^n$ חלקה. אז $\{y \in N \mid y \text{ is a critical value}\}$ קבוצה בעלת מידה אפס. (ביחס למידת לבג)*

דוגמה 1.5.27.

$$\{M \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rank}(M) < \min\{m,n\}\}$$

קבוצה בעלת מידה אפס.

טענה 1.5.28. *תהי $C \in \mathbb{R}^m$ זניחה ותהי $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ חלקה. אז $f(C)$ זניחה.*

מסקנה 1.5.29. *תהי M יריעה עם מפות $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ כאשר $\mathcal{U}\cap\mathcal{V} \neq \varnothing$. נקבל העתקה*

$$\psi\circ\varphi^{-1}\colon \varphi(\mathcal{U}) \to \psi(\mathcal{V})$$

חלקה. לכן $\varphi(C\cap\mathcal{U}\cap\mathcal{V})$ זניחה ב־$\mathbb{R}^m$ אם ורק אם $\psi(C\cap\mathcal{U}\cap\mathcal{V})$ זניחה ב־$\mathbb{R}^m$.

הגדרה 1.5.30. $C \subset M$ זניחה אם לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ מהאטלס החלק $\varphi(C\cap\mathcal{U})$ זניחה ב־$\mathbb{R}^m$.

דוגמה 1.5.31. אם $N^n \subseteq M^m$ ת־יריעה אז N זניחה ב־M.

דוגמה 1.5.32. בהטלת S^2 על $\mathbb{R}^2$ ראינו כי הערכים הקריטיים הם מעגל היחידה, וזאת קבוצה זניחה.

הערה 1.5.33. משפט Sard מתייחס ל**ערכים קריטיים**. הטענה איננה נכונה עבור נקודות קריטיות. עבור ההעתקה

$$f\colon M \to N$$
$$p \to x_0 \in N$$

כל נקודה ב־M היא קריטית, ולכן לא זניחה.

הערה 1.5.34. ייתכן כי $\operatorname{Im}(f)$ מכילה רק ערכים קריטיים. במקרה זה $\operatorname{Im}(f)$ זניחה ב־N.

תרגיל 33. בנו העתקה $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שקבוצת הערכים הקריטיים של f היא $\mathbb{Q}$.

מסקנה 1.5.35. *1. אם $f\colon M \to N$ ו־$\dim M < \dim N$, הערכים הקריטיים של f ב־N זאת $\operatorname{Im}(f)$. אז $\operatorname{Im}(f)$ בעלת מידה אפס.*

דוגמה 1.5.36. אין העתקה חלקה מ־I^2 ל־I עם $\operatorname{Im}(f) = I^2$.

2. קבוצת הערכים הרגולריים צפופה ב־N. אם $\mathcal{U} \subseteq \operatorname{Im}(f)$ פתוחה, קיים ערך רגולרי ב־$\operatorname{Im}(f)$.

דוגמה 1.5.37. אם $f\colon M \to \mathbb{R}$ לא קבועה אז $(f(x),f(y)) \subseteq \operatorname{Im}(f)$, ויש ערך רגולרי ב־$\operatorname{Im}(f)$.

---

[3] מתקיים

$$D\pi_M\colon TM \to \mathbb{R}^2$$
$$(p,u) \to A\cdot u$$

כאשר $u \in T_pM$.

הוכחה (Sard). נוכיח עבור המקרה $\dim M \leq \dim N$. המקרה הכללי בספר של Milnor.
נסמן ב־$C \subseteq M$ את קבוצת הנקודות הקריטיות של f. קבוצת הערכים הקריטיים היא $f\left(C\right) \subseteq N$. נכסה את M על ידי מספר בן־מניה של מפות $\left(\mathcal{V}_i, \psi_i\right)$. את $f^{-1}\left(\mathcal{V}_i\right)$ נכסה על ידי מספר בן־מניה של מפות $\left(\mathcal{U}_{i_j}, \varphi_{i_j}\right)$ כך ש־$f\left(\mathcal{U}_{i_j}\right) \subseteq \mathcal{V}_i$. מתקיים

$$f\left(C\right) = \bigcup_{i,j} f\left(C \cap \mathcal{U}_{i_j}\right)$$

ומספיק להראות כי $f\left(c \cap \mathcal{U}_{i_j}\right)$ זניחות. מספיק להוכיח עבור הצגות מקומיות של f. כלומר, מספיק להוכיח את המשפט עבור $f\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. $\mathcal{U}$ הינה איחוד בן־מניה של כדורים, לכן ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות כי $\mathcal{U}$ כדור עם סגור בתחום הגדרתה של f.

א. **המקרה $m = n$:** נבחר $\varepsilon > 0$. אז $\left|Df\right|\colon \bar{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ רציפה ולכן רציפה במ"ש. לכן קיים $\delta > 0$ כך שאם $\left\|x-y\right\| < \sqrt{m}\delta$ אז $\left|\left|Df\left(x\right)\right| - \left|Df\left(y\right)\right|\right| < \varepsilon$. יהי $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}_i$ כיסוי על ידי קוביות על צלע δ עם $\sum \mathrm{Vol}\mathcal{U}_i < 2^m \mathrm{Vol}\left(\mathcal{U}\right)$. אם $C \cap \mathcal{U}_i \neq \varnothing$, קיימת $x \in \mathcal{U}_i$ קריטית, כלומר $\left|Df\left(x\right)\right| = 0$. אז $\left|Df\left(y\right)\right| < \varepsilon$ לכל $y \in \mathcal{U}_i$. יהי $I = \left\{i \mid \mathcal{U}_i \cap C \neq \varnothing\right\}$. אז $\bigcup_{i\in I} f\left(\mathcal{U}_i\right)$ כיסוי של $f\left(C\right)$. כעת

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \mathrm{Vol}\left(f\left(\mathcal{U}_i\right)\right) &= \sum_{I} \int_{\mathcal{U}_i} \left|Df\left(x\right)\right| \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_m \\ &\leq \varepsilon \sum_{i\in I} \mathrm{Vol}\left(\mathcal{U}_i\right) \leq \varepsilon \mathrm{Vol}\left(\mathcal{U}\right)\end{aligned}$$

ולכן $f\left(C\right)$ זניחה.

ב. **המקרה $m < n$:** תהי $f\colon M^m \to N^n$ ונרחיב את f ל־$F\colon M^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to N^n$ ע"י $F\left(x,s\right) = f\left(x\right)$. אז קבוצת הערכים הקריטיים של f היא $\mathrm{Im}\left(f\right)$. גם $\mathrm{Im}\left(f\right) = \mathrm{Im}\left(F\right)$. לכן תמונת F היא קבוצת הערכים הקריטיים של f. קבוצה זאת זניחה לפי המקרה הקודם. ■

ראינו כי אם M^m יריעה קומפקטית, קיים שיכון $M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^N$ עבור N גדול. ננסה להקטין את N בעזרת משפט Sard. נרצה להטיל את $i\left(M\right)$ בכיוון v על $v^\perp$ כך ש־$\pi_v \circ i\colon M \to v^\perp$ יהיה שיכון. M קומפקטית ולכן מספיק לבדוק כי זאת אימרסיה חד־חד ערכית.

אימרסיה: מתקיים כי

$$D\left(\pi_v \circ i\right) = D\pi_v \circ Di$$

לכן

$$\ker\left(D\pi_v \circ Di\right) = \left\{u \mid Di\left(u\right) \in \ker D\pi_v\right\}.$$

Di חד־חד ערכית (כי i אימרסיה) לכן $\ker D\pi_v \circ Di = \left\{0\right\}$ אם ורק אם $\mathrm{Im}\, D_i \cap \ker D\pi_v = \left\{0\right\}$. מתקיים $\ker D\pi_v = \left\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. אז $\pi_v \circ i$ אימרסיה אם ורק אם לכל $x \in M$, החיתוך $I_m Di\left(x\right) \cap \left\{\lambda\right\}$ טריוויאלי. זה שקול לכך שלכל $x \in M$, $v \notin \mathrm{Im}\, Di\left(x\right)$ (v אינו משיק ל־$i\left(M\right)$ באף נקודה). נגדיר העתקה

$$g\colon TM \setminus M \times \left\{0\right\} \to \mathbb{RP}^{N-1}.$$

גיאומטרית, $\mathbb{RP}^{N-1}$ קבוצת הכיוונים האפשריים להטלה ב־$\mathbb{R}^N$. נגדיר

$$\left(x,u\right) \mapsto \left[Di\left(x\right)\left(u\right)\right] = \left\{\lambda Di\left(x\right)\left(u\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \in \mathbb{RP}^{N-1}.$$

אם $\dim TM = 2m < N-1 = \dim \mathbb{RP}^{N-1}$, לפי מסקנה ממשפט Sard, $\mathrm{Im}\, g$ זניחה.

חד־חד ערכיות: נגדיר העתקה

$$\begin{aligned}P\colon M \times M \setminus \Delta M &\to \mathbb{RP}^{N-1} \\ \left(x,y\right) &\to \left\{\lambda\left(i\left(x\right) - i\left(y\right)\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

ואז כיוון בתמונה הוא בדיוק כיוון שאסור להטלה, כי זהו ישר המקביל לישר דרך $i(x), i(y)$. זה תנאי לזה ש־$\pi_v \circ i\left(x\right) = \pi_v \circ i\left(y\right)$ כלומר $\pi_v \circ i$ לא חד־חד ערכית. אם $2m = \dim M \times M \setminus \Delta < \dim \mathbb{RP}^{N-1} = N-1$ נקבל כי $\mathrm{Im}\, P$ זניחה. אז אם $\left\{\lambda v\right\} \notin \mathrm{Im}\, P \cup \mathrm{Im}\, g$, נקבל שיכון $\pi_v \circ i\colon M \to v^\perp \cong \mathbb{R}^{N-1}$. זה מתקיים כמעט לכל v כי $\mathrm{Im}\, P \cup \mathrm{Im}\, g$ זניחה. התהליך נעצר כאשר $2m = N-1$, כלומר $N = 2m+1$.

הערה 1.5.38. המקרה האופטימלי הוא $N = 2m$. עם חישוב קצת יותר זהיר מקבלים ש־$\pi_v \circ i$ אימרסיה כמעט לכל v גם כאשר $N = 2m+1$, כלומר ניתן לבנות אימרסיה $M \to \mathbb{R}^{2m}$.
אין דרך להבטיח חד־חד ערכיות באותו האופן. ניתן להיפטר מנקודות חיתוך על ידי דיפורמציות טופולוגיות.

1.6 טרנסוורסליות

הגדרה 1.6.1 יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ עם $\dim V < \infty$. תתי־מרחבים $W_1, W_2 \leq V$ נקראים ***טרנסוורסליים*** אם $W_1 + W_2 = V$.

הערה 1.6.2 W_1, W_2 טרנסוורסליים אם ורק אם $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ אם ורק אם $\operatorname{codim}(W_1 \cap W_2) = \operatorname{codim} W_1 + \operatorname{codim} W_2$.

הגדרה 1.6.3 $M_1, M_2 \subseteq N$ תתי יריעות יקראו ***טרנסוורסליות*** ונסמן $M_1 \pitchfork M_2$ אם לכל $x \in M_1 \cap M_2$ מתקיים $T_x M_1 + T_x M_2 = T_x N$.

דוגמאות.
1. אם $\dim M_1 + \dim M_2 < \dim N$ אז $M_1 \pitchfork M_2$ אם ורק אם $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.
2. אם $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ שני מעגלים נחתכים, סכום הישרים המשיקים בנקודות החיתוך הוא כל $\mathbb{R}^2$.
3. אם $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ שני מעגלים משיקים, בנקודת ההשקה סכום המרחבים המשיקים הוא $\mathbb{R}$, ולכן המעגלים אינם טרנסוורסליים.

הגדרה 1.6.4 תהי $f\colon M^m \to N^n$ חלקה ותהי $L^l \subseteq N^n$ תת־יריעה. נאמר כי f ***טרנסוורסלית ל־L*** ונסמן $f \pitchfork L$ אם לכל $p \in M$ עבורה $f(p) \in L$ מתקיים $\operatorname{Im} Df(p) \pitchfork T_{f(p)} L$.

הערה 1.6.5 אם f שיכון, $f \pitchfork L$ אם ורק אם $\operatorname{Im} f \pitchfork L$.

ראינו כי עבור $f\colon M \to N$ חלקה ו־$y \in N$ ערך רגולרי בתמונה, $f^{-1}(y)$ תת־יריעה של M. אנו רוצים להכליל זאת.

משפט 1.6.6 *תהי $f\colon M \to N$ חלקה ו־L תת־יריעה כך ש־$f \pitchfork L$ וגם $f^{-1}(L) \neq \varnothing$. אזי $f^{-1}(L)$ תת־יריעה של M ומתקיים*

$$\operatorname{codim}_M\left(f^{-1}(L)\right) = \operatorname{codim}_N(L).$$

תרגיל 34. הוכיחו את המשפט.

1.7 יריעות עם שפה

הגדרה 1.7.1 תהי $\hat{M}^m$ יריעה ותהי $g\colon \hat{M} \to \mathbb{R}$ חלקה עם 0 ערך רגולרי. אז $\{g = 0\} \subset \hat{M}$ תת־יריעה ממימד $m-1$. קבוצת הנקודות $\{x \mid g(x) \leq 0\} \subseteq \hat{M}$ נקראת ***יריעה עם שפה***. ***השפה של*** M היא

$$\partial M := \{x \mid g(x) = 0\}.$$

דוגמה 1.7.2 ניקח $\hat{M} = \mathbb{R}^n$ ו־$g = \sum x_i^2 - 1$. אז 0 ערך רגולרי ומתקיים $\{g \leq 0\} = \overline{D^n}$ כדור היחידה הסגור. מתקיים $\partial \overline{D^n} = S^{n-1}$.

דוגמה 1.7.3 אינטרוול סגור, או אינטרוול חצי־פתוח חצי־סגור הם יריעות עם שפה.

הערה 1.7.4 קיבלנו מרחב שבו סביבת כל נקודה x הומאומורפית לקבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ או לקבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n_+ := \{\vec{x} \mid x_n \geq 0\}$. ניתן להגדיר דרך סביבות אלה יריעה עם שפה בדומה להגדרת יריעה.

הגדרה 1.7.5 תהיינה M יריעה עם שפה ו־N יריעה. $f\colon M \to N$ נקראת ***חלקה*** אם ניתן להרחיב את f ל־$\hat{f}\colon \hat{M} \to N$ חלקה.

הגדרה 1.7.6 $f\colon M \to N$ כאשר M, N יריעות עם שפה נקראת ***חלקה*** אם $f\colon M \to \hat{N}$ חלקה.

תרגיל 35 (קשה). תהי $f\colon M^m \to N^n$ כאשר $\partial M \neq \varnothing$. יהי $y \in N$ ערך רגולרי של f ושל $f|_{\partial M}$. אז $V = f^{-1}(y)$ תת־יריעה עם שפה של M ומתקיים $\dim V = m - n$ וגם $\partial V = V \cap \partial M$.

הגדרה 1.7.7 יריעה M קומפקטית ללא שפה נקראת ***סגורה***.

הערה 1.7.8 תהי M יריעה עם שפה. אז ∂M יריעה בלי שפה. כלומר $\partial\partial M = \varnothing$. הרצאה 5 18 באוקטובר 2018

הגדרה 1.7.9 M נקראת ***יריעה עם פינות*** אם לכל $x \in M$ קיימת מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ עם

$$\varphi\colon \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i\colon x_i \geq 0\},$$

והאטלס מתואם.

דוגמה 1.7.10 קובייה I^n היא יריעה עם פינות.

דוגמה 1.7.11 גופים פלטוניים הם יריעות עם פינות.

הערה 1.7.12 יריעה טופולוגית עם פינות היא בדיוק יריעה טופולוגית עם שפה. אבל, בקטגוריה של יריעות חלקות, יריעה עם פינות איננה בהכרח יריעה עם שפה, אלא רק להפך.

1.8 הומוטופיה

1.9 הגדרות

שאלה 1.9.1. תהיינה $f,g\colon M\to N$ העתקות בין יריעות חלקות. מתי קיימת דפורמציה מ־f ל־g?

הגדרה 1.9.2. f ***הומוטופית*** ל־g אם קיימת העתקה $\Phi\colon M\times[0,1]\to N$ חלקה המקיימת

$$\begin{aligned}\Phi\left(x,0\right)&=f(x)\\ \Phi\left(x,1\right)&=g(x).\end{aligned}$$

תרגיל 36. הראו כי הומוטופיה בין העתקות היא יחס שקילות.

דוגמה 1.9.3. כל $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ הומוטופית ל־$g\left(x\right)\equiv 0$. נגדיר $\Phi\left(x,t\right)=t\cdot f\left(x\right)$. ראינו כי הומוטופיה הינה יחס שקילות, לכן כל שתי העתקות כאלו הומוטופיות.

דוגמה 1.9.4. תהיינה $M=N=S^n$ עם ההעתקות

$$\begin{aligned}\varphi\colon S^n&\to S^n\\ x&\to x\end{aligned}$$

ו־

$$\begin{aligned}\psi\colon S^n&\to S^n.\\ x&\to -x\end{aligned}$$

אז φ,ψ עבור n זוגי, ההעתקות אינן הומוטופיות (נראה בהמשך).

הגדרה 1.9.5.

$$\begin{aligned}v\colon M&\to TM\\ x&\to\left(x,v_x\right)\end{aligned}$$

(כאשר כל $v_x\in T_xM$) נקרא ***שדה וקטורי***. הוא יקרא ***חלק*** אם הוא חלק כהעתקה $M\to TM$.

דוגמה 1.9.6. באינפי, הגדרנו שדה וקטורי להיות העתקה $v\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. בהגדרה שלנו

$$\begin{aligned}v\colon\mathbb{R}^n&\to T\mathbb{R}^n\\ x&\to\left(x,v_x\in T_x\mathbb{R}^n\right)\end{aligned}$$

כאשר $\mathbb{R}^n\cong T_x\mathbb{R}^n$. ניתן לתאר את v בעזרת העתקה $x\to v_x\in\mathbb{R}^n$.

תהיינה M יריעה, ו־$\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה. אז

$$\begin{aligned}D\varphi\colon T\mathcal{U}&\xrightarrow{\sim}\varphi\left(\mathcal{U}\right)\times\mathbb{R}^n\\ v|_{\mathcal{U}}&\to\hat{v}\end{aligned}$$

הינו שדה וקטורי על $\varphi\left(\mathcal{U}\right)$. ההעתקה היא

$$\left(x,v_x\right)\to\left(\varphi\left(x\right),D\varphi_x\cdot v_x\right)$$

ו־v חלק אם ורק אם כל הצגה $\hat{v}$ חלקה כפונקציה $\varphi\left(\mathcal{U}\right)\to\mathbb{R}^n$.

הגדרה 1.9.7. $v\colon M\to TM$ ***לא מנוון*** אם $v_x\neq 0$ לכל x.

טענה 1.9.8. *נניח כי על S^n קיים שדה וקטורי לא מנוון. אז φ,ψ מדוגמה 1.9.4 הומוטופיות.*

הוכחה. נבחר v לא־מנוון ונניח בה"כ כי $\forall x\in S^n\colon\ \left\|v_x\right\|=1$. נגדיר

$$\begin{aligned}\Phi\colon S^n\times[0,\pi]&\to S^n.\\ \left(x,\theta\right)&\to x\cos\theta+v_x\sin\theta\ .\end{aligned}$$

נסתכל על $\mathbb{R}^{n+1}\supseteq\operatorname{Span}\left(x,v_x\right)$ כמתואר באיור מתקיים

$$\left\langle\Phi\left(x,\theta\right),\Phi\left(x,\theta\right)\right\rangle=\cancelto{1}{\left\|x\right\|^2}\cos^2\theta+2\cancelto{0}{\left\langle x,v_x\right\rangle}\cos\theta\sin\theta+\cancelto{1}{\left\|v_x\right\|^2}\sin^2\theta=1$$

וגם $\Phi\left(x,0\right)=x=\varphi\left(x\right)$ ו־$\Phi\left(x,\pi\right)=-x=\psi\left(x\right)$, לכן קיבלנו הומוטופיה כנדרש. ■

משפט 1.9.9. *עבור n זוגי, φ איננה הומוטופית ל־ψ.*

הוכחה. בעתיד.

מסקנה 1.9.10. *על S^{2k} לא קיים שדה וקטורי לא מנוון. (אי־אפשר לסרק את הקיפוד)*

מסקנה 1.9.11.

$$S^{2k}\times\mathbb{R}^{2k}\ncong TS^{2k}$$

כי עבור $S^{2k}\times\mathbb{R}^{2k}$ קיים שדה וקטורי לא מנוון.

דוגמה 1.9.12. לכל n אי־זוגי מתקיים $S^{2m+1}\subseteq\mathbb{R}^{2m+2}=\mathbb{C}^{m+1}$. לכל $x=(z_0,\ldots,z_m)\in S^{2m+1}$ נגדיר $v_x=(iz_0,\ldots,iz_m)\perp x$ וקטור משיק. אז $v\colon x\to ix$ שדה וקטורי לא מנוון ולכן $\psi\cong\varphi$.

משפט 1.9.13. *תהיינה*

$$\begin{aligned}\varphi\colon S^n&\to S^n\\ x&\to x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi\colon S^n&\to S^n.\\ x&\to x_0\end{aligned}$$

אז $\psi\not\simeq\varphi$.

הוכחה. בעתיד.

מסקנה 1.9.14. *תהי $f\colon\bar{D}^{n+1}\to S^n$ חלקה. אזי $f|_{S^n}\neq\mathbb{1}_{S^n}$. כלומר, אין ריטרקציה חלקה מהדיסק לספירה.*

הערה 1.9.15. נובע מכך עם אנליזה כי אין ריטרקציה רציפה מהדיסק לספירה.

הוכחה. ניתן שתי הוכחות.

1. נניח בשלילה כי $f|_{S^n}=\mathbb{1}_{S^n}$. נגדיר הומוטופיה

$$\begin{aligned}\Phi\colon S^n\times I&\to S^n\\ (x,t)&\to f(t\cdot x)\end{aligned}$$

ונקבל $\Phi(x,1)=f(x)=x$ ו־$\Phi(x,0)=f(0)=\mathrm{const}$ בסתירה למשפט.

2. נניח בשלילה כי $f|_{S^n}=\mathbb{1}_{S^n}$. יהי $y\in S^n$ ערך רגולרי של f (קיים לפי Sard). y ערך רגולרי גם של $\mathbb{1}_{S^n}=f|_{S^n}$ (כל ערך הוא רגולרי של הזהות). מתרגיל, $L:=f^{-1}(y)$ תת־יריעה עם שפה ממימד 1 ב־$\bar{D}^{n+1}$. לכן, כל רכיב קשירות הוא S^1 או קטע. כיוון ש־$f^{-1}(y)$ קבוצה סגורה בקבוצה קומפקטית $\bar{D}$, היא קומפקטית בעצמה, ולכן כל הקטעים אם ישנם הינם סגורים. בנוסף, $\partial L=f^{-1}(y)\cap\partial\bar{D}^{n+1}=\{y\}$ כי $f|_{\partial D}=\mathbb{1}_{\partial D}$. זאת סתירה, כי ליריעה קומפקטית עם שפה יש מספר זוגי של נקודות שפה (קצוות של קטעים סגורים). ■

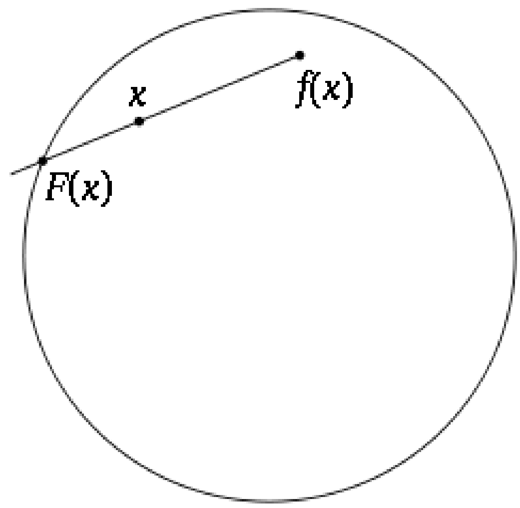
מסקנה 1.9.16 (משפט Brouwer). *לכל העתקה (חלקה) $f\colon\bar{D}^n\to\bar{D}^n$ יש נקודות שבת.*

הוכחה. נניח כי לכל x מתקיים $f(x)\neq x$. נגדיר

$$\lambda_x=\{f(x)+t(x-f(x))\mid t>0\}$$

קרן שמתחילה ב־$f(x)$ ועוברת דרך x. ראו איור 1.11. λ_x חותכת את שפת הדיסק בנקודה אחת שנסמנה $F(x)$. אז $F(x)=\lambda_x\cap\partial D^n$. F חלקה (*כתרגיל*), ואם $x\in\partial D^n$ אז $F(x)=x$. זאת סתירה למסקנה שאין רטרקציה מהדיסק לספירה. ■

הערה 1.9.17. המשפט נכון גם עבור העתקות רציפות.



איור 1.11: העתקה למשפט בראואר.

פרק 2

פיצול היחידה

הגדרה 2.0.1. יהי $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ כיסוי של מרחב טופולוגי X. הכיסוי נקרא ***סופי מקומית*** אם לכל $x \in X$ קיימת סביבה $\mathcal{W}$ כך ש־

$$\#\{\alpha \mid \mathcal{W} \cap \mathcal{U}_\alpha \neq \varnothing\}$$

סופי.

הגדרה 2.0.2. יהי $\{\mathcal{V}_\beta\}_\beta$ כיסוי של מרחב טופולוגי X. כיסוי $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ ***עידון*** (refinement) של הכיסוי $\{\mathcal{V}_\beta\}_\beta$ אם לכל α קיים β עבורו $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\beta$.

הגדרה 2.0.3. מרחב X נקרא ***פָּרָקומפקטי*** (paracompact) אם לכל כיסוי פתוח $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ קיים עידון פתוח סופי מקומית.

משפט 2.0.4. *כל יריעה טופולוגית האוסדורף בת־מנייה שנייה היא פָּרָקומפקטית.*

הגדרה 2.0.5. תהי M יריעה חלקה ותהי $f\colon M \to \mathbb{R}$ חלקה. ***התומך*** (support) של f הוא

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in M \mid f(x) \neq 0\}.$$

הגדרה 2.0.6. יהי $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ כיסוי פתוח של יריעה M. ***פיצול יחידה*** (partition of unity) הוא אוסף Λ של פונקציות חלקות $\lambda_\alpha\colon M \to [0,1]$ המקיימות את התנאים הבאים.

1. $\operatorname{supp}\lambda_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$
2. $\{\operatorname{supp}\lambda_\alpha\}_\alpha$ כיסוי סופי מקומית.
3. לכל $x \in M$ מתקיים $\sum_\alpha \lambda_\alpha(x) = 1$.[1]

הערה 2.0.7. פיצול היחידה תלוי בבחירת הכיסוי.

משפט 2.0.8. *נניח כי M יריעה. אז לכל כיסוי פתוח קיים פיצול יחידה.*

הוכחה. נציג רק את רעיון ההוכחה. ניקח כיסוי פתוח $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$. נניח בה"כ כי $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ סופי־מקומית.[2] נבחן כיסוי "קצת יותר עדין" $\{\mathcal{V}_\alpha\}_\alpha$[3] כך ש־$\{\mathcal{V}_\alpha\}_\alpha$ כיסוי פתוח וגם $\overline{\mathcal{V}_\alpha} \subseteq \mathcal{U}_\alpha$. נגדיר העתקה חלקה המקיימת

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha\colon M &\to [0,1]\\ x &\to \begin{cases} 1 & x \in \overline{\mathcal{V}_\alpha}\\ 0 & x \text{ is in a small neighbourhood of } M \setminus \mathcal{U}_\alpha\end{cases}\end{aligned}$$

זה קירוב של פונקציית האינדיקטור. לכל $x \in M$ קיים מספר סופי של α כך ש־$\Psi_\alpha(x) \neq 0$. לכן $\Psi(x) := \sum_\alpha \Psi_\alpha(x)$.[4] נגדיר $\lambda_\alpha(x) = \frac{\Psi_\alpha(x)}{\Psi(x)}$. אז

$$\operatorname{supp}(\lambda_\alpha) = \operatorname{supp}(\Psi_\alpha) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$$

וגם

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha(x) = \sum_\alpha \frac{\Psi_\alpha(x)}{\Psi(x)} = 1.$$

$\{\operatorname{supp}(\lambda_\alpha)\}_\alpha$ כיסוי סופי מקומית כי זה נכון ל־$\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$. ■

---

[1] יש מספר סופי של מחוברים שונים מאפס, לכן הסכום סופי.
[2] אחרת נחליף בעידון סופי מקומית
[3] קיים, אך דורש הוכחה
[4] מוגדר היטב, חיובית כי V_α כיסוי

2.1 מטריקה רימנית

שימוש של פיצול היחידה הוא הוכחה לכך שעל כל יריעה קיימת מטריקה רימנית.

הגדרה 2.1.1. ***מכפלה פנימית*** היא תבנית בילינארית סימטרית מוגדרת חיובית $\rho\colon V\times V\to\mathbb{R}$ כאשר V מרחב קטורי.

הגדרה 2.1.2. תהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה. ***מטריקה רימנית*** על $\mathcal{U}$ היא משפחה חלקה של מכפלות פנימיות $\rho_x\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ שתלויות ב־$x\in\mathcal{U}$ באופן חלק.

הערה 2.1.3. נחשוב על ההעתקות כעל העתקות $\rho_x\colon T_x\mathbb{R}^n\times T_x\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

הגדרה 2.1.4. תהי M יריעה (חלקה). ***מטריקה רימנית על*** M היא בחירה חלקה של מכפלות פנימיות $\rho_p\colon T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$, תלויה באופן חלק ב־$p$.

הערה 2.1.5. ρ_p חלקה אם ורק אם בקואורדינטות. מתקבל מכפלה פנימית

$$\varphi_{\alpha,*}\rho_p\colon T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n\times T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

ואז

$$\hat{\rho}_\alpha=\varphi_{\alpha,*}\rho_p\left(v,w\right)=\rho_p\left(D\varphi_\alpha^{-1}\left(p\right)v,D\varphi_\alpha^{-1}\left(p\right)w\right).$$

הערה 2.1.6. הדבר שקול לכך שלכל שני שדות וקטוריים חלקים $v,w\colon M\to TM$, $\rho\left(v,w\right)$ פונקצייה חלקה $M\to\mathbb{R}$ עם ההגדרה $\rho\left(v,w\right)\left(p\right)=\rho_p\left(v_p,w_p\right)$.

בעזרת מטריקה רימנית ניתן להגדיר אורך של וקטור משיק. אם $v\in T_pM$ נגדיר $\|v\|_p^2=\rho_p\left(v,v\right)$ ***האורך של*** v ***ביחס למטריקה הרימנית*** ρ.

ניתן כך להגדיר גם אורך של מסילה $\gamma\colon\ [a,b]\to M$ על ידי

$$\operatorname{len}\left(\gamma\right):=\int_a^b\|\dot{\gamma}\|\,\mathrm{d}t.$$

ניתן להגדיר זווית בין שני וקטורים משיקים $u,v\in T_pM$ על ידי

$$\rho_p\left(u,v\right)=\|u\|\,\|v\|\cos\theta.$$

משפט 2.1.7. *על כל יריעה יש מטריקה רימנית.*

הוכחה. ב־$\mathbb{R}^n$ ישנה מטריקה רימנית אוקלידית

$$\rho_0\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i$$

לכל נקודה $p\in\mathbb{R}^n$. בהינתן מפה $\left(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha\right)$ נקבל

$$\rho_\alpha:=\varphi_\alpha^*\rho_0\left(v,w\right):=\rho_0\left(D\varphi_\alpha v,D\varphi_\alpha w\right)$$

מטריקה רימנית על $\mathcal{U}_\alpha$.
נבחר כיסוי $\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}_\alpha$ על ידי מפות מתואמות. יהי $\left\{\lambda_\alpha\right\}_\alpha$ פיצול היחידה המתאים ל־$\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}_\alpha$ ונגדיר

$$\bar{\rho}_\alpha(p)=\begin{cases}\lambda_\alpha\left(p\right)\cdot\rho_\alpha\left(p\right) & p\in\mathcal{U}_\alpha\\ 0 & p\in\mathcal{U}_\alpha\end{cases}$$

תבנית חלקה. אז $\bar{\rho}\left(p\right)=\sum_\alpha\bar{\rho}_\alpha\left(p\right)$ תבנית חלקה (הסכום סופי מקומית), בילינארית סימטרית ומוגדרת חיובית כי $\sum\lambda_\alpha\left(p\right)=1$ ולכן קיים α עבורו $\lambda_\alpha\left(p\right)\neq0$ והסכום אינו מנוון. ■

נתאר הוכחה נוספת.

הוכחה. ממשפט Whitney קיים שיכון $i\colon M\hookrightarrow\mathbb{R}^N$. נגדיר $i^*\rho_0\left(p\right):=\rho_0\left(Di\left(p\right)\left(v\right),Di\left(p\right)\left(w\right)\right)$ לכל $v,w\in T_pM$, מטריקה רימנית על M. ■

תרגיל 37. תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ תת־יריעה. ההגדרה של פונקציות חלקות $M\to\mathbb{R}^k$ בעזרת אטלס חלק שקולה להגדרה הבאה:
$f\colon M\to\mathbb{R}^k$ חלקה אם ורק אם ניתן למצוא סביבה $\mathcal{U}$ של M ב־$\mathbb{R}^n$ והרחבה חלקה $f\colon\mathcal{U}\to\mathbb{R}^k$.

תרגיל 38. בדקו כי שתי ההגדרות שראינו ליריעה עם שפה שקולות.[5]

הרצאה 25 בנו... 2018

2.2 יריעות מרוכבות

הגדרה 2.2.1. ***יריעה מרוכבת*** זו יריעה טופולוגית X עם אטלס מתואם של מפות $\{(\mathcal{U}_\alpha \varphi_\alpha)\}_\alpha$ כאשר

$$\varphi_\alpha \colon \mathcal{U}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$$

הומאומורפיזם והתמונה פתוחה. כאן האטלס ***מתואם*** כאשר פונקציות המעבר $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ הולומורפיות.

הערה 2.2.2. על יריעות מרוכבות אין פיצול יחידה.

דוגמה 2.2.3 (המישור ההיפרבולי). נגדיר $\mathbb{H} := \{(x, y) \mid y > 0\}$. על המישור ההיפרבולי יש מטריקה היפרבולית:

$$\rho_{(x,y)} \colon T_{(x,y)}\mathbb{H} \times T_{(x,y)}\mathbb{H} \to \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \to (x_1, y_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

המטריצה $\begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$ המייצגת את $\rho_{(x,y)}$ תלויה בצורה חלקה ב־(x, y).

אם $\gamma \colon [0, 1] \to \mathbb{H}$ עקומה, האורך שלה הוא

$$\operatorname{len}_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_{\mathbb{H}} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\|\dot{\gamma}\|_2}{\gamma(t)} \, \mathrm{d}t.$$

דוגמה 2.2.4. נסתכל על המטריקה האוקלידית ב־$\mathbb{R}^2$ ונסמנה ρ_{eucl}. תהי $\varphi \colon (x, y) \to (r, \theta)$ הצגה הפולארית. ρ_{eucl} בקואורדינטות מקומיות לפי ρ נתונה על ידי $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$.

דוגמה 2.2.5. תהי (M, ρ) יריעה רימנית ותהיינה $x, y \in M$. אז T_xM, T_yM מרחבים שונים, אבל שניהם מזוהים עם $\mathbb{R}^n$ על ידי Dp.

$$\hat{\rho}_x, \hat{\rho}_y \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

הצגות מקומיות של ρ_x, ρ_y בהתאמה.

[5] מעבר מההגדרה הראשונה לשנייה מצריך את משפט הפונקציה הסתומה. הכיוון השני מצריך פיצול יחידה.

פרק 3

תבניות פולילינאריות

הגדרה 3.0.1. יהי V מ"ו סוף מימדי מעל $\mathbb{R}$. נסמן $n := \dim V$. ***תבנית פולילינארית אנטיסימטרית ממעלה*** $k \geq 0$ היא פונקצייה $\lambda \colon V^k \to \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות הבאות.

1. λ לינארית בכל רכיב.
2. החלפת שני וקטורים משנה סימן.

$$\lambda\left(v_1, \ldots, v_k\right) = \operatorname{sgn}\sigma \lambda\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right)$$

סימון 3.0.2. $\Omega^d\left(V\right)$ ***מרחב התבניות הפולילינאריות ממעלה*** d.

דוגמה 3.0.3. $d = 0$**:** $\Omega^0\left(V\right) \cong \mathbb{R}$

$d = 1$**:** $\Omega^1\left(V\right) = V^* = \operatorname{Hom}\left(V, \mathbb{R}\right)$. אם $V = \mathbb{R}^n$ דוגמה לתבנית היא $dx_i\left(a_1, \ldots, a_n\right) = a_i$. אז $V^* = \operatorname{span}\left\{dx_1, \ldots, dx_n\right\}$ הבסיס הסטנדרטי של $V^* = \left(\mathbb{R}^n\right)^*$.

מרחב וקטורים כלל: יהי $B = \left\{v_1, \ldots, v_n\right\}$ בסיס של V. כל $u \in V$ ניתן להציג באופן יחיד $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ומתקיים $dv_i\left(u\right) = \alpha_i$. אז $V^* = \operatorname{span}\left\{dv_1, \ldots, dv_n\right\}$ ***הבסיס הדואלי ל־***B. הוא מסומן B^*. מתקיים $\dim V = \dim V^* = n$ לכן $V \cong V^*$.[1]

$d = 2$**:** $\Omega^2\left(V\right)$ הוא מרחב התבניות הבילינאריות האנטי־סימטריות. תהי $\lambda \colon V \times V \to \mathbb{R}$, בהינתן בסיס B של V מתקבל

$$\lambda\left(v, w\right) = [v]_B^T \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ -\lambda_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{1,n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} [w]_B$$

כאשר המטריצה הינה אנטי־סימטרית. מתקיים $\dim \Omega^2\left(V\right) = \frac{n(n-1)}{2}$.

נניח $T \colon V \to W$ לינארית. אז

$$\begin{aligned} T^* &\colon \Omega^k\left(W\right) \to \Omega^k\left(V\right) \\ \lambda\left(\cdot, \ldots, \cdot\right) &\to T^* \lambda \end{aligned}$$

כאשר T^* המשיכה לאחור.
אם T איזו אז T^* איזו.

דוגמה 3.0.4. $V = \mathbb{R}^n$. אז $\det\left(v_1, \ldots, v_n\right) = \begin{vmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{vmatrix}$ לכן $\det \in \Omega^n\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה 3.0.5. $\Omega^m\left(V\right) = \{0\}$ עבור $n = \dim V < m$.

הוכחה. ניקח בסיס $B = \left\{v_1, \ldots, v_n\right\}$. נבחר $\left\{u_i\right\}_{i \in [m]} \subseteq V$ ואז $u_j = \sum_{i \in [n]} \alpha_{j,i} v_i$. תהי $\lambda \in \Omega^m\left(V\right)$ ואז

$$\lambda\left(u_1, \ldots, u_m\right) = \sum_{\left(\ell_1, \ldots, \ell_m\right)} \alpha_{1,\ell_1} \alpha_{2,\ell_2} \cdots \alpha_{m,\ell_m} \lambda\left(v_{\ell_1}, \ldots, v_{\ell_m}\right)$$

כאשר סוכמים על בחירות של m אינדקסים. לכן יש m וקטורים בתוך כל λ, ולכן יש חזרות (כי $n < m$) וכל איבר מתאפס. ■

---

[1] אבל אין איזומורפיזם קנוני, אלא אם ישנם מבנים נוספים כמו בחירת בסיס, או מכפלה פנימית

3.1 מכפלות חיצוניות

הגדרה 3.1.1. *מכפלה חיצונית של תבניות (exterior product, wedge product)*[2] היא העתקה

$$\begin{aligned}\Lambda\colon \Omega^{k}\left(V\right)\times\Omega^{\ell}\left(V\right) & \to\Omega^{k+\ell}\left(V\right)\\ \left(\alpha,\beta\right) & \to\alpha\wedge\beta\end{aligned}$$

המוגדרת באופן הבא.

$$\left(\alpha\wedge\beta\right)\left(v_{1},\ldots,v_{k+\ell}\right)\coloneqq\sum_{i_{1}<\ldots<i_{k}}\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)\alpha\left(v_{i_{1}},\ldots,v_{i_{k}}\right)\beta\left(v_{j_{1}},\ldots,v_{i_{\ell}}\right)$$

כאשר $i_{1},\ldots,i_{\ell}$ בחירת k אינדקסים מתוך $[k+\ell]$, $j_{1}<\ldots<j_{\ell}$ הם ℓ האינדקסים הנותרים, ו־$\sigma=\left(i_{1},\ldots,i_{k},j_{1},\ldots,j_{\ell}\right)\in S_{\ell+k}$.

תרגיל 39. מכפלה חיצונית הינה אסוציאטיבית, מקיימת פילוג מעל חיבור ($\left(a\alpha+b\beta\right)\wedge\gamma=a\alpha\wedge\gamma+b\beta\wedge\gamma$), והינה אנטיקומוטטיבית[3] כלומר

$$\alpha^{(k)}\wedge\beta^{(\ell)}=\left(-1\right)^{k\cdot\ell}\beta\wedge\alpha.$$

דוגמה 3.1.2. תהיינה $\left\{ \lambda_{i}\right\} _{i\in[k]}\subseteq\Omega^{1}\left(V\right)$. אז

$$\left(\lambda_{1}\wedge\ldots\wedge\lambda_{k}\right)\left(v_{1},\ldots,v_{k}\right)=\det\left(\lambda_{j}\left(v_{i}\right)\right)_{1\leq i,j\leq k}.$$

נוכיח זאת באינדוקציה על k.

בסיס: $k=1$ ברור.

צעד: נראה מעבר מ־$k-1$ ל־k. נפתח דטרמיננטה לפי עמודה ראשונה.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\lambda_{1}\left(v_{1}\right) & \cdots & \lambda_{k}\left(v_{1}\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{1}\left(v_{k}\right) & \cdots & \lambda_{k}\left(v_{k}\right)\end{vmatrix} & =\sum_{i=1}^{k}\left(-1\right)^{i+1}\lambda_{1}\left(v_{i}\right)\left|M_{i,1}\right|\\ & \overset{\text{induction hypotehsis}}{=}\sum_{i=1}^{k}\overbrace{\left(-1\right)^{i+1}}^{\operatorname{sgn}(i,1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k)}\overbrace{\lambda_{1}\left(v_{i}\right)}^{\alpha}\left[\overbrace{\left(\lambda_{2}\wedge\ldots\wedge\lambda_{k}\right)}^{\beta}\left(v_{1},\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{k}\right)\right]\\ & \overset{\text{definition}}{=}\left(\lambda_{1}\wedge\ldots\wedge\lambda_{k}\right)\left(v_{1},\ldots,v_{k}\right)\end{aligned}$$

משפט 3.1.3 *יהי V מ"ו עם $\left\{ \lambda_{1},\ldots,\lambda_{n}\right\}$ בסיס של V^{*}. אזי $\left\{ \lambda_{i_{1}}\wedge\ldots\wedge\lambda_{i_{k}}\right\} _{i_{1}<i_{2}<\ldots<i_{k}}$ בסיס ל־$\Omega^{k}\left(V\right)$.*

הוכחה. ניקח $\left\{ v_{1},\ldots,v_{n}\right\}$ הבסיס הדואלי ל־$\left\{ \lambda_{1},\ldots,\lambda_{n}\right\}$ של V.[4] יהי $\alpha\in\Omega^{k}\left(V\right)$. נבחר k וקטורים $i=\sum_{j\in[n]}a_{i,j}v_{j}$. אז

$$\begin{aligned}\alpha\left(u_{1},\ldots,u_{k}\right) & =\alpha\left(\sum a_{i,j}v_{j},\ldots,\sum\alpha_{k,j}v_{j}\right)\\ & =\sum_{1\leq j_{1},\ldots,j_{k}\leq n}a_{1,j_{1}},\ldots,a_{k,j_{k}}\alpha\left(v_{j_{1}},\ldots,v_{j_{k}}\right)\\ & =\star\end{aligned}$$

ואם $j_{a}=j_{b}$ אז α מתאפס. ניתן אם כן להניח כי j_{t} שונים. לכן

$$\begin{aligned}\star & =\sum_{\substack{\sigma\colon\left(j_{1},\ldots,j_{k}\right)\leftarrow\left(i_{1},\ldots,i_{k}\right)\\ i_{1},\ldots,i_{k}}}a_{1,\sigma\left(i_{1}\right)}\cdots a_{k,\sigma\left(i_{k}\right)}\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)\alpha\left(v_{i,1},\ldots,v_{i,k}\right)\\ & =\sum_{i_{1},\ldots,i_{k}}\left(\alpha\left(v_{i_{1}},\ldots,v_{i_{k}}\right)\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)\cdot a_{1,\sigma\left(i_{1}\right)}\cdot\ldots\cdot a_{k,\sigma\left(i_{k}\right)}\right)\end{aligned}$$

נשים ♥ כי

$$\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)\cdot a_{1,\sigma\left(i_{1}\right)}\cdot\ldots\cdot a_{k,\sigma\left(i_{k}\right)}=\begin{vmatrix}a_{1,j_{1}} & \cdots a_{1,i_{k}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k,i_{1}} & \cdots a_{k,i_{k}}\end{vmatrix}$$

[2] לא אותה הדבר כמו outer product
[3] anti-commutative / skew-commutative
[4] כלומר, $\lambda_{i}\left(j\right)=\delta_{i,j}$

עם שורות $u_1,\ldots,u_k$ ועמודות $\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_k}$. אז

$$\star=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\alpha\left(v_{i_1},\ldots,v_{i_k}\right)\cdot\left(\lambda_{i_1}\wedge\ldots\wedge\lambda_{i_k}\right)\left(u_1,\ldots,u_k\right)$$

נסמן $c:=\alpha\left(v_{i_1},\ldots,v_{i_k}\right)$ את המקדם ב־$\mathbb{R}$ וקיבלנו

$$\alpha=\sum_{i<\ldots,i_k}c_{i_1,\ldots,i_k}\cdot\lambda_{i_1}\wedge\ldots\lambda_{i_k}$$

כלומר

$$\alpha\in\operatorname{span}\left\{\lambda_{i_1},\wedge\ldots\lambda_{i_n}\right\}_{i_1<\ldots,i_k}$$

וקיבלנו כי הקבוצה פורשת. בדיקת אי־תלות נשארת כתרגיל. ■

תרגיל 40. בדקו אי־תלות של הוקטורים בבסיס.
רמז:

$$\left(\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_k}\right)\left(v_j,1,\ldots,v_{j,k}\right)=\delta_{\left(i_1,\ldots,i_k\right),\left(j_1,\ldots,j_k\right)}$$

מסקנה 3.1.4. $\dim\Omega^k\left(V\right)=\binom{\dim V}{k}$.

מסקנה 3.1.5. אם $\dim V=n$ אז $\dim\Omega^n\left(V\right)=\binom{n}{n}=1$. אז $\Omega^n\left(\mathbb{R}^n\right)=\operatorname{span}\left\{\det\right\}$.

תרגיל 41. תהי $T\colon V\to W$ ותהיינה $\alpha,\beta\in\Omega^*\left(W\right)$. אז $T^*\left(\alpha\wedge\beta\right)=T^*\alpha\wedge T^*\beta$.

דוגמה 3.1.6. תהי $T\colon V\to V$ הטלה ($T^2=T$). אז $\alpha\tilde{\wedge}\beta\colon T^*\alpha\wedge T^*\beta$ מקיים את כל 3 התכונות של $\wedge$. התכונות אינן קובעות את פעולת $\wedge$.

תרגיל 42. נסתכל על $\mathbb{R}^{2n}$ עם קואורדינטות $\left(p_1,q_1,\ldots,p_n,q_n\right)$. נגדיר $\omega:=dp_1\wedge dq_1+\ldots+dp_n\wedge dq_n$[5] ואז

$$\frac{\omega^n}{n!}=\frac{\omega\wedge\ldots\omega}{n!}dp_1\wedge dq_1\wedge\ldots\wedge dp_n\wedge dq_n$$

3.2 תבניות דיפרנציאליות

3.2.1 תיאור מקומי של תבניות דיפרנציאליות

סימון 3.2.1. תהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. ראינו $T_x\mathcal{U}\cong\mathbb{R}^n$ לכל $x\in\mathcal{U}$. נסמן $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$. נסמן ב־$x_i$ את ההטלה על הרכיב ה־i.
$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ הבסיס הסטנדרטי של $T_x\mathcal{U}\cong\mathbb{R}^n$.
$\left\{\mathrm{d}x_1,\ldots,\mathrm{d}x_n\right\}$ הבסיס הדואלי של $T_x^*\mathcal{U}=\left(T_x\mathcal{U}\right)^*=\left(\mathbb{R}^n\right)^*$. נקרא ל־$T_x^*$ ***מרחב קו־משיק***.
$\frac{\partial}{\partial x^i}\colon\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ שדה וקטורי חלק.

דוגמה 3.2.2. תהי $\gamma\colon\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{U}$ עם $p=\gamma\left(0\right)$ ועם $\left[\gamma\right]=\cdot\gamma\left(0\right)\in T_{\gamma(0)}\mathcal{U}$. אז

$$\left[\gamma\right]=\sum_{i\in[n]}\cdot\gamma_i\left(0\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\left(p\right)$$

ונקבל

$$\mathrm{d}x_i\left(p\right)\left(\left[\gamma\right]\right)=\cdot\gamma_i\left(0\right)$$

הגדרה 3.2.3. ***תבנית דיפרנציאלית differential form ממעלה k על $\mathcal{U}$*** זו משפחה של תבניות ממעלה k על $T_x\mathcal{U}$ כך שהמשפחה תלויה באופן חלק ב־x.

נכתוב

$$\lambda\left(x\right)=\sum_{i_1<\ldots<i_k}a_{i_1,\ldots,i_k}\left(x\right)\mathrm{d}x_{i,1}\wedge\ldots\mathrm{d}x_{i,k}$$

כאשר a_i פונקציה חלקה $\mathcal{U}\to\mathbb{R}$. לכל $x\in\mathcal{U}$, מתקיים

$$\lambda\left(x\right)\in\Omega^*\left(T_x\mathcal{U}\right).$$

בהגדרה הכוונה שהמשפחה תלויה באופן חלק ב־x היא לכך שהמקדמים בכתיב זה משתנים באופן חלק.

סימון 3.2.4. $\Omega^k\left(\mathcal{U}\right)$ אוסף התבניות ממעלה k על $\mathcal{U}$.

[5] התבנית סימפקטית סטנדרטית של $\mathbb{R}^n$

דוגמאות. 1. $\Omega^0(\mathcal{U}) = \mathscr{C}^\infty(\mathcal{U})$.

2. תהי $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{U}) = \Omega^0(\mathcal{U})$. נגדיר

$$\mathrm{d}f_{(p)} \coloneqq \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \mathrm{d}x_i$$

ואז $\mathrm{d}f \in \Omega^1(\mathcal{U})$.

ניקח $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{U}$ ואז

$$[\gamma] = \dot{\gamma}(0) = \vec{v} \in \mathbb{R}^n = T_p\mathcal{U}.$$

נסמן $\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(0) \end{pmatrix} = v$ ואז

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f_{(p)}(v) &= \sum \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \mathrm{d}x_i(p)\right] \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(0) \end{pmatrix} \\
&= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \mathrm{d}x_i(p) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(0) \end{pmatrix} \\
&= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \dot{\gamma}_i(0) \\
&\underset{\text{infi}}{=} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \gamma(t) \eqqcolon \frac{\partial f}{\partial v}
\end{aligned}$$

הגדרה 3.2.5. תהי M יריעה חלקה. ***תבנית דיפרנציאלית ממעלה k על M*** היא משפחה חלקה α של תבניות $\alpha_x \in \Omega^k(T_xM)$.

בהינתן α k־תבנית על M

$$\hat{\alpha}\colon (v_1, \ldots, v_k) \to \alpha_x\left(D\varphi^{-1}v_1, \ldots, D\varphi^{-1}v_k\right) \in \mathbb{R}$$

הצגה מקומית של α לפי φ. מתקיים $\hat{\alpha} \in \Omega^k(\varphi(\mathcal{U}))$. α חלקה אם כל הצגה מקומית $\hat{\alpha}$ חלקה על $\varphi(\mathcal{U})$.

טענה 3.2.6.

- *$\Omega^k(M)$ מרחב ליניארי מעל $\mathbb{R}$.*[6]
- *$\wedge$ מוגדר על $\Omega^*(M)$. (אוסף התבניות מכל מעלה)*
- *אם $f\colon M \to N$ ו־$\alpha \in \Omega^k(N)$ אז $f^*\alpha \in \Omega^k(M)$. מתקיים*

$$f^*\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(Dfv_1, \ldots, Dfv_k)$$

זאת העתקה ליניארית המקיימת $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$.

הרצאה 7 12 נובמבר 2018

תהי M יריעה עם מטריקה רימנית g. אז לכל x

$$\begin{aligned}
T_xM &\xrightarrow{\sim} T_x^*M \\
v &\to g_x(v, \cdot)
\end{aligned}$$

איזומורפיזם.

אז

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & T^*M \arrow[dl] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

איזומורפיזם[7] של אגדים וקטוריים.

סימון 3.2.7. תהי M יריעה ו־$(\mathcal{U}, \varphi)$ מפה ל־$\mathbb{R}^n$. סימנו $x_1, \ldots, x_n\colon \varphi(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ פונקציות קואורדינטות, $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ שדות וקטוריים מקבילים לסריג הקואורדינטות ו־$\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ פונקציונלים דואליים ל־$\frac{\partial}{\partial x^i}$.

ניתן להרים ולהגדיר אובייקטים מקבילים על $\mathcal{U} \subseteq M$

- $x_i\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ פונקציות קואורדינטות מקומיות על $\mathcal{U}$
- $\frac{\partial}{\partial x_i}$ שדות וקטוריים מקומיים.
- $\mathrm{d}x_i$ 1־תבניות על $\mathcal{U}$

[6] בדר"כ המרחב אינסוף מימדי

[7] לא קנוני; תלוי בבחירת g

3.3 אוריינטציה על יריעה

הגדרה 3.3.1. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ממימד $0<n<\infty$. יהיו B_1, B_2 בסיסים של V.
B_1, B_2 ל־***אותה אוריינטציה*** אם למטריצת המעבר $T_{B_1}^{B_2}$ דטרמיננטה חיובית. אחרת ***האוריינטציה הפוכה***.

תרגיל 43. שיוויון אוריינטציה הוא יחס שקילות וישנן שתי מחלקות שקילות של בסיסים. אז[8] יש שתי מחלקות קשירות של בסיסים (עם הטופולוגיה המושרית של V). לכן ל־$\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ יש שתי מחלקות קשירות.

הגדרה 3.3.2. עבור $V=\mathbb{R}^n$ ***אוריינטציה חיובית*** היא האוריינטרציה של הבסיס הסטנדרטי.

הגדרה 3.3.3. תהי M יריעה. ***אוריינטרציה על*** M היא בחירה חלקה של אוריינטציה לכל T_xM.
בחירת אוריינטציה של $T_x\mathcal{U}$ היא בחירת אוריינטציה של $\mathbb{R}^n$.

הגדרה 3.3.4. אוריינטציה על M ***חלקה*** אם היא קבועה מקומית על $\varphi(\mathcal{U})$.[9]

הגדרה 3.3.5. תהי M יריעה. אם קיימת אוריינטציה על M היא נקראת ***אוריינטבילית***. אחרת היא אינה ***אוריינטבילית***.

טענה 3.3.6. *אם B_x משפחה חלקה של בסיסים ל־T_xM כאשר $x\in M$, מתקבלת אוריינצטיה על M.*

הערה 3.3.7. כדי לקבל משפחה של בסיסים, צריכים $\dim M$ שדות וקטוריים שהינם בלתי־תלויים בכל נקודה.

דוגמה 3.3.8. על S^2 אין שדה וקטורי שאינו מנוון, לכן אין משפחה של בסיסים.

תרגיל 44. יהי V מרחב n־מימדי ותהי $A\colon V\to V$. אזי A פועלת על $\Omega^n(V)$. לכל $\omega\in\Omega^n(V)$, נקבל העתקה

$$\begin{aligned}A^*\omega\colon V^n&\to\mathbb{R}\\(u_1,\dots,u_n)&\to\omega(Au_1,\dots,Au_n)\end{aligned}$$

בדקו כי

$$A^*\omega(u_1,\dots,u_n)=\det A\cdot\omega(u_1,\dots,u_n).$$

דוגמה 3.3.9. נניח $\dim V=2$ ויהי $\{e_1,e_2\}$ בסיס ל־V. נגדיר

$$\begin{aligned}Ae_1&=ae_1+be_2\\Ae_2&=ce_1+de_2\end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned}A^*\omega(e_1,e_2)&=\omega(Ae_1,Ae_2)\\&=\omega(ae_1+be_2,ce_1+de_2)\\&=ac\underbrace{\omega(e_1,e_1)}_{0}+ad\omega(e_1,e_2)+bc\omega(e_2,e_1)+bd\underbrace{\omega(e_2,e_2)}_{0}\\&=(ad-bc)\,\omega(e1,e_2)\\&=|A|\cdot\omega(e_1,e_2)\end{aligned}$$

מסקנה 3.3.10. *יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס למרחב וקטורי V. יהיו $u_1,\dots,u_n\in V$. נגדיר*

$$\begin{aligned}A\colon V&\to V\\v_i&\to u_i\end{aligned}$$

ואז

$$|A|_B^B=\begin{pmatrix}| & & |\\ [u_1]_B & \cdots & [u_n]_B\\ | & & |\end{pmatrix}$$

[8] הדבר דורש הוכחה.
[9] פלוס או מינוס על כל מחלקת קשירות

ונקבל

$$\begin{aligned}\omega\left(u_1,\ldots,u_n\right)&=\omega\left(Av_1,\ldots,Av_n\right)\\&=\det A\omega\left(v_1,\ldots,v_n\right)\\&=\det\det\begin{pmatrix}| & & |\\ \left[u_1\right]_B & \cdots & \left[u_n\right]_B\\ | & & |\end{pmatrix}\overbrace{\omega\left(u_1,\ldots,u_n\right)}^{scalar}\end{aligned}$$

ולכן $\omega=c\cdot\det\left(\ldots\right)$ *כלומר* $\Omega^n\left(V\right)$ *חד־מימדי.*[10]

הגדרה 3.3.11 יהי V מ"ו n־מימדי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $\omega\in\Omega^n\left(V\right)$. אז ω ***תבנית נפח*** אם $\omega\neq 0$.

הגדרה 3.3.12 (תבניות נפח) $\omega_1\sim\omega_2$ אם $\frac{\omega_1}{\omega_2}$.[11]

הערה 3.3.13 $\sim$ יחס שקילות על $\Omega^n\left(V\right)$.

הגדרה 3.3.14 ***אוריינטציה של*** V היא מחלקת שקילות ב־$\Omega^n\left(V\right)$ תחת היחס $\sim$.

הגדרה 3.3.15 בהינתן $\omega\in\Omega^n\left(V\right)$ תבנית נפח ו־$\left[\omega\right]$ אוריינטציה, עבור B בסיס של V נגיד כי B ***חיובי***[12] אם $\omega\left(B\right)>0$ וכי B ***שלילי***[13] אם $\omega\left(B\right)<0$.

תרגיל 45. מקבלים מהנ"ל שתי מחלקות שקילות של בסיסים. אלו בלתי־תלויות בבחירת הנציג ω.

הגדרה 3.3.16 בהינתן בסיס $B=\left\{v_1,\ldots,v_n\right\}$ נגדיר $\omega=\mathrm{d}v_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}v_n$ ואז $\left[B\right]$ בסיסים חיוביים ביחס ל־ω.

הגדרה 3.3.17 $\Omega^n\left(V\right)$ נקרא ***מרחב הדטרמיננטות של*** V.

הגדרה 3.3.18 $\Omega^n\left(M\right)$ נקרא ***אגד דטרמיננטות של*** M.

הערה 3.3.19 מתקיים

$$\Omega^n\left(M\right)=\left\{\left(x,\omega\right)\mid x\in M,\omega\in\Omega^n\left(T_xM\right)\right\}$$

3.3.1 מבנה חלק על $\Omega^n\left(M\right)$

יהי $\left\{\left(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha\right)\right\}$ אטלס חלק על M. אז אם $\varphi_\alpha\left(\mathcal{U}_\alpha\right)\subseteq\mathbb{R}^n$. מתקיים

$$\begin{aligned}T\varphi_\alpha\left(\mathcal{U}_\alpha\right)&\cong\varphi_\alpha\left(\mathcal{U}_\alpha\right)\times\mathbb{R}^n\\ \Omega^n\left(T_x\varphi_\alpha\left(\mathcal{U}_\alpha\right)\right)&\cong\Omega^n\left(\mathbb{R}^n\right)\cong\mathbb{R}\end{aligned}$$

ולכן

$$\Omega^n\left(\varphi_\alpha\left(\mathcal{U}_\alpha\right)\right)\cong\varphi_\alpha\left(\mathcal{U}_\alpha\right)\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$$

הגדרה 3.3.20

$$\bar{\mathcal{U}}_\alpha:=\left\{\left(x,\omega\right)\;\middle|\;{}^{x\in\mathcal{U}_\alpha}_{\omega\in\Omega^n\left(T_x\mathcal{U}_\alpha\right)}\right\}$$

$$\bar{\varphi}_\alpha\colon\ \left(x,\omega\right)\to\left(\varphi\left(x\right),\left(\varphi_\alpha^{-1}\right)^*\omega\right)$$

הערה 3.3.21 מתקיים

$$\left(\varphi_\alpha^{-1}\right)^*\omega\left(v_1,\ldots,v_n\right)=\omega\left(D\varphi^{-1}v_1,\ldots,D\varphi^{-1}v_n\right)$$

לכן

$$\bar{\varphi}_\alpha\colon\bar{\mathcal{U}}_\alpha\to\Omega^n\left(\varphi_\alpha\left(\mathcal{U}_\alpha\right)\right)\subseteq\mathbb{R}^{n-1}.$$

[10] *כפי שכבר ראינו*
[11] זה מוגדר היטב כי המרחב חד־מימדי
[12] ביחס ל־ω
[13] ביחס ל־ω

תרגיל 46. $\left\{\left(\bar{\mathcal{U}}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha\right)\right\}$ משרה טופולוגיה על $\Omega^n\left(M\right)$ ומגדיר מבנה חלק. אז $\Omega^n\left(M\right)$ יריעה חלקה.

הגדרה 3.3.22. ***תבנית חלקה ממעלה*** n ***על*** M^n היא העתקה חלקה

$$\begin{aligned} \omega\colon M &\to \Omega^n\left(M\right) \\ x &\to \left(x, \omega_x\right) \end{aligned}$$

כאשר $\omega_x \in \Omega^n\left(T_xM\right)$.

תרגיל 47. בדקו כי הגדרה זאת מסכימה עם ההגדרה הקודמת עם קואורדינטות.

הגדרה 3.3.23. ***תבנית נפח*** על יריעה M^n היא n־תבנית ω כך ש־$\forall x \in M: \omega_x \neq 0$.

הגדרה 3.3.24. יריעה M נקראת ***אוריינטבילית*** אם קיימת עליה תבנית נפח.

תרגיל 48. בהינתן שתי תבניות נפח $\omega_{1,2}$ יש העתקה $\varphi_x\colon \frac{\omega_1}{\omega_2}\colon M \to \mathbb{R}$ *חלקה ושאינה מתאפסת.*

הגדרה 3.3.25. $\omega_1 \sim \omega_2$ אם $\varphi_x > 0$ לכל $x \in M$.

תרגיל 49. הנ"ל מגדיר יחס שקילות.

הגדרה 3.3.26. כל מחלקת שקילות נקראת אוריינטציה על M.

תרגיל 50. בחירת מחלקת אוריינטציה של תבניות שקולה לבחירת מחלקת אוריינטציה של בסיסים ל־T_xM לכל $x \in M$.

תהי $X \xrightarrow{f} Y$, נזכיר כי $TX \xrightarrow{f_*=Df} TY$ וניתן להגדיר גם

$$\begin{aligned} \Omega^k\left(X\right) &\xleftarrow{f^*} \Omega^k\left(Y\right) \\ \mathscr{C}^\infty\left(X\right) &\xleftarrow{f^*} \mathscr{C}^\infty\left(Y\right) \end{aligned}$$

בהינתן ω_0 תבנית נפח על M, ו־$\omega \in \Omega^n\left(M\right)$ n־תבנית כלשהי, מתקיים $\omega = \varphi\left(x\right) \cdot \omega_0$ ו־$\varphi_x\colon M \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה.

תרגיל 51. בהינתן

$$\begin{aligned} f&\colon M \to N \\ g&\colon N \to L \end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} f^* \circ g^* &= \left(g \circ f\right)^* \\ f^*\left(\varphi\omega\right) &= f^*\varphi \cdot f^*\omega \end{aligned}$$

כאשר φ פונקצייה ו־ω תבנית.

דוגמה 3.3.27. תהי $M = \mathbb{R}^n$ ואז $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. נגדיר $w_{0,x} = \det\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ***תבנית נפח אוקלידית.***

דוגמה 3.3.28. תהי $M = \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. תהי $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ ההטלה. תהי $x \in \mathbb{T}^n$, ו־$y \in \pi^{-1}\left(x\right) \in \mathbb{R}^n$. אז

$$D\pi_y = \pi_*\colon T_y\mathbb{R}^n \to T_x\mathbb{T}^n.$$

איזו.
נגדיר ω תבנית נפח על $\mathbb{T}^n$ על ידי

$$\omega_x\left(v_1, \ldots, v_n\right) \coloneqq \omega_{0,y}\left(\pi_*^{-1}v_1, \ldots, \pi_*^{-1}v_n\right).$$

תרגיל 52. בדקו כי ω אינה תלויה בבחירת $y \in \pi^{-1}\left(x\right)$.

פתרון. נבחר $y' \in \pi^{-1}(x)$ נקודה אחרת. נגדיר הזזה $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ על ידי $S(y)=y'$. אז $DS=\mathbb{1}$ ולכן $S^*\omega_0=\omega_0$.
אז

$$\begin{aligned}\omega_0\left(u_1,\dots,u_n\right) &= w_0\left(DSu_1,\dots,DSu_n\right)\\ &= S^*\omega_0\left(u_1,\dots,u_n\right)\end{aligned}$$

ואז $\left(\pi^{-1}\right)^*\omega_{0,y}=\left(\pi^{-1}\right)^*\omega_{0,y'}$ ואז ω_x בלתי־תלויה בבחירת הנציג.

דוגמה 3.3.29. תהי $M=\mathbb{S}^n\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$. כדי להגדיר תבנית נפח, נשתמש בתבנית נפח על $\mathbb{R}^{n+1}$.
נסמן $\nu\left(x\right):=x$ לכל $x\in S^n$ להיות נורמל יחידה חיצוני. נסמן

$$\Omega_0\left(x\right)\left(v_1,\dots,v_n\right):=\omega_0\left(\nu\left(x\right),v_1,\dots,v_n\right)$$

כאשר ω_0 תבנית הנפח האוקלידית.

תרגיל 53. בדקו כי Ω_0 תבנית נפח.

משפט 3.3.30. *תהי $M=\mathbb{RP}^n={S^n}/{\pm1}$. אז M אוריינטבילית אם ורק אם n אי־זוגי.*

הוכחה. • אם n אי־זוגי ו־π ההטלה, אז $\pi^{-1}\left(x\right)=\left\{\pm y\right\}\subseteq S^n$.

תרגיל 54. קיימת $\omega\in T_x\mathbb{RP}^n$ כך שמתקיים

$$\pi_y^*\omega=\Omega_0\left(y\right),\qquad \pi_{-y}^*\omega=\Omega_0\left(-y\right).$$

אז ω תבנית שלא מתאפסת לכל $x\in\mathbb{RP}^n$.

אם n זוגי, ו־π ההטלה, נגדיר

$$\begin{aligned}f\colon S^n&\to S^n\\ x&\to -x\end{aligned}$$

ואז הדיאגרמה

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & S^n \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbb{RP}^n & \end{tikzcd}$$

קומוטטיבית.
נניח בשלילה כי קיימת ω תבנית נפח על $\mathbb{RP}^n$. תהי Ω_0 תבנית הנפח הסטנדרטית על S^n. אז

$$\begin{aligned}f^*\Omega_0\left(p\right)\left(\eta_1,\dots,\eta_n\right) &= \Omega_0\left(f\left(p\right)\right)\left(f_*\eta_1,\dots,f_*\eta_n\right)\\ &= \omega_{0,f(p)}\left(\nu\left(f\left(p\right)\right),f_*\eta_1,\dots,f_*\eta_n\right)\\ &\underset{\omega_{0,p}=\omega_{0,f(p)}}{=} w_{0,p}\left(-\nu\left(p\right),-\eta_1,\dots,-\eta_n\right)\\ &= \left(-1\right)^{n+1}\omega_0\left(\nu\left(p\right),\eta_1,\dots,\eta_n\right)\\ &= \left(-1\right)^{n+1}\Omega_{0,p}\left(\eta_1,\dots,\eta_n\right)\end{aligned}$$

כאשר $\omega_{0,q}$ תבנית נפח סטנדרטית ב־$\mathbb{R}^{n+1}$, ואינה תלויה ב־q.
נסמן $\Omega=\pi^*\omega$ תבנית נפח על S^n. לכן $\Omega=H\cdot\Omega_0$ כאשר $H\colon S^n\to\mathbb{R}$ פונקציה שלא מתאפסת. מקומוטטיביות הדיאגרמה, $\pi\circ f=\pi$ ואז $f^*\circ\pi^*=\left(\pi\circ f\right)^*=\pi^*$ לכן $f^*\pi^*\omega=\pi^*\omega$ כלומר $f^*\Omega=\Omega$. אז

$$H\Omega_0=f^*\left(H\Omega_0\right)=f^*H\cdot f^*\Omega_0=f^*\circ H\cdot\left(-1\right)^{n+1}\Omega_0=f^*\left(H\right)\Omega_0.$$

בנק' p נקבל

$$H\left(p\right)\cdot\Omega_0\left(p\right)=f^*H\left(p\right)\Omega_0\left(p\right)=H\left(f\left(p\right)\right)\cdot\Omega_0\left(p\right)$$

אך H אינה מתאפסת, לכן $H\left(p\right)$ ו־$H\left(f\left(p\right)\right)$ בעלי אותו סימן. אז

$$\Omega_0\left(p\right)=-\overbrace{\frac{H\left(f\left(p\right)\right)}{H\left(p\right)}}^{<0}\Omega_0\left(\varphi\right)$$

בסתירה.

דוגמה 3.3.31. תהי

$$\begin{aligned}T\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\(x,y) &\to (x+1,-y)\end{aligned}$$

אז $z_1 \sim z_2$ אם ורק אם $T^k z_1 = z_2$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו. אם מחלקות שקילות הן מסלולים של T אז:

תרגיל 55.
1. $T/_{\sim}$ יריעה חלקה הומאומורפית לסרט Möbius.
2. היריעה אינה אוריינטבילית.

תרגיל 56. תהי M אוריינטבילית וקשירה. אז ישנן 2 אוריינטציות על M.

הגדרה 3.3.32. תהי $f\colon M^n \to N^n$ ותהיינה ω, Ω תבניות נפח על M, N בהתאמה. f ***שומרת אוריינטציה*** אם $\frac{f^*\Omega}{\omega} > 0$. אחרת היא ***הופכת אוריינטציה***.

הערה 3.3.33. נסתכל על הנ"ל בקואורדינטות מקומיות. נניח $\varphi(\mathcal{U}), \psi(\mathcal{V}) \subseteq \mathbb{R}^n$ כאשר ההצגות המקומיות $\hat{\omega}, \hat{\Omega}$ חיובית ביחס לאוריינטציה הסטנדרטית. אז f שומרת אוריינטציה אם ורק אם $\det\left(\frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_i}\right) > 0$.

הגדרה 3.3.34. אטלס חלק $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ נקרא **אוריינטבילי** אם פונקציות המעבר $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ שומרות אוריינטציה.

משפט 3.3.35. *יריעה M אוריינטבילית אם ורק אם קיים עליה אטלס אוריינטבילי.*

הוכחה. תרגיל. ∎

דוגמה 3.3.36 (יריעות מרוכבות). תהי M יריעה עם אטלס מרוכב ל־$\mathbb{C}^n$ ועם פונקציות מעבר ביהולומורפיות.

תרגיל 57. אם נזהה $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ וניקח $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ העתקה $\mathbb{C}$־לינארית, אז $\det(A_{\mathbb{R}}) > 0$ כאשר $A_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ ההעתקה המתאימה. לכן העתקות $\mathbb{C}$־לינאריות שומרות אוריינטציה של $\mathbb{R}^{2n}$. לכן[14] כל העתקה הולומופית שומרת אוריינטציה. לכן אטלס מרוכב הינו אוריינטבילי.

דוגמה 3.3.37. אם V מ"ו מעל $\mathbb{C}$, יש עליו אוריינטציה סטנדרטית. בהינתן בסיס מרוכב $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ניתן להגדיר בסיס ממשי $B_{\mathbb{R}} = \{v_1, iv_1, v_2, iv_2, \ldots, v_n, iv_n\}$.

תרגיל 58. $B_{1,\mathbb{R}}, B_{2,\mathbb{R}}$ בעלי אותה אוריינטציה לכל B_1, B_2 בסיסים מעל $\mathbb{C}$.

לכן לכל מרחב וקטורי מרוכב יש אוריינטציה טבעית.
ליריעה מרוכבת יש מבנה מרוכב לכל מרחב משיק T_xM, לכן יש אוריינטציה טבעית.

דוגמה 3.3.38. תהי $f\colon W \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ הולומורפית ונכתוב

$$f(x+iy) = (u+iv)(x+iy)$$

כאשר $u = \Re(f)$ ו־$v = \Im(f)$. אז

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

ומתקיים מקושי רימן

$$|Df| = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 \geq 0 \,.$$

אם Df הפיכה אז $|Df| > 0$ וההעתקה שומרת אוריינטציה.

דוגמה 3.3.39 (העתקות $\mathbb{C}$־לינאריות). תהי

$$\begin{aligned}\lambda\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C}\\z &\to (a+bi)\,z\\(x+iy) &\to (xa-by) + i\,(xb+ya)\,.\end{aligned}$$

זו מגדירה העתקה

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

14

ואז $|\lambda_{\mathbb{R}}| = a^2 + b^2 \geq 0$.

תהי $A\colon V \to V$ כאשר V מ"ו מעל $\mathbb{C}$. ניקח בסיס $B = \{v_1, v_n\}$ מעל $\mathbb{C}$ של V עבורו $[A]_B$ משולשת עליונה. אז $B_{\mathbb{R}} = \{v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n\}$ בסיס של V מעל $\mathbb{R}$ ונקבל מטריצה

$$[A]_{B_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & \dots & * & * \\ b_1 & a_1 & \dots & * & * \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & a_n & -b_n \\ 0 & 0 & & b_n & a_b \end{pmatrix}$$

עם דטרמיננטה

$$\left(a_1^2 + b_1^2\right) \cdot \dots \cdot \left(a_n^2 + b_n^2\right) \geq 0 \,.$$

אם A הפיכה אז $\det A > 0$.

מסקנה 3.3.40. *אם B, C שני בסיסים של V מעל $\mathbb{C}$, A העתקת מעבר מ־$[\cdot]_B$ ל־$[\cdot]_C$ אז היא שומרת אוריינטציה. אם $A_{\mathbb{R}}$ העתקת מעבר מ־$B_{\mathbb{R}}$ ל־$C_{\mathbb{R}}$, ל־$B_{\mathbb{R}}, C_{\mathbb{R}}$ יש אותה אוריינטציה. לכן יש אוריינטציה קנונית על מ"ו מרוכב.*

דוגמה 3.3.41. תהי $F\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ גזירה בנקודה z_0. אז

$$F(z_0 + \delta z) = F(z_0) + A\Delta z + O(|\Delta z|)$$

ואז

$$|DF_{z_0}| = |A_{\mathbb{R}}| \geq 0 \,.$$

בפרט, אם יש אטלס הולומורפי, העתקות המעבר שומרות אוריינטציה, ואז האטלס אוריינטבילי עם אוריינטציה קנונית.

משפט 3.3.42. *תהי M יריעה עם שפה ועם אוריינטציה. אז ל־∂M יש אוריינטציה קנונית.*

הוכחה. נבנה אוריינטציה בעזרת מטריקה רימנית. ניקח

$$\begin{aligned} f\colon \hat{M} &\to \mathbb{R} \\ M &= \{p \mid f(p) \leq 0\} \\ \partial M &= \{p \mid f(p) = 0\} \end{aligned}$$

ו־ω_0 תבנית נפח על M.

נבחר מטריקה רימנית ρ על $\hat{M}$. נגדיר נורמל חיצוני

$$\nu_x \in T_x\hat{M} = T_xM$$

על ידי

$$\begin{aligned} \nu_x &\perp T_x\partial M \\ \rho_x(\nu_x, \nu_x) &= 1 \\ Df_x(\nu_x) &> 0 \,. \end{aligned}$$

ν_x תלוי באופן חלק בנקודה $x \in \partial M$. (**# *תרגיל***)

קיבלנו תבנית נפח

$$\omega_x(\cdot, \dots, \cdot) = w_{0,x}(\nu_x, \cdot, \dots, \cdot)$$

והאוריינטציה של ω_x בלתי־תלויה בבחירת ρ. (**# *תרגיל***) ■

3.4 מעלה של העתקה

נסתכל על העקומות באיורים אם נספור נקודות לפי באוריינטציה ביחס להטלה, נוכל להגדיר דרגה של ההעתקה.

הגדרה 3.4.1 תהיינה M^n, N^n יריעות קשירות עם אוריינטציה. תהי $f\colon M \to N$ חלקה עם $y \in N$ ערך רגולרי. אז Df_X איזומורפיזם לכל $x \in f^{-1}(y)$.

M קומפקטית ללא שפה לכן (**# *תרגיל***)

$$\deg(f, y) := \sum \varepsilon(x)$$

סכום סופי כאשר $\varepsilon(x) = 1$ אם Df_x שומרת אוריינטציה ו־$\varepsilon(x) = -1$ אם Df_x הופכת אוריינטציה.

הערה 3.4.2. אם $f^{-1}(y) = \varnothing$ אז $\deg(f,y) = 0$.

משפט 3.4.3 *1.* $\deg(f,y)$ *אינו תלוי בבחירת* y.

הגדרה 3.4.4. $\deg(f) = \deg(f,y)$ עבור y רגולרי כלשהו.

2. אם f *הומוטופית ל־*g *אז* $\deg f = \deg g$.

למה 3.4.5. *נניח כי* $M^n = \partial X^{n+1}$ *(לא בהכרח קשירה) כאשר* X, M *יריעות קומפקטיות, ל־*X *יש אוריינטציה ול־*M *אוריינטציה מהשפה של* X*. נניח כי* $F\colon X \to N^n$ *חלקה ו־*y *ערך רגולרי של* F *ושל* $f\colon F|_M$*. אז* $\deg(f,y) = 0$.

הוכחה. נסמן $\Gamma = F^{-1}(y)$ תת־יריעה עם שפה של X. ממשפט הפונקציה הסתומנה ידוע

$$\dim\Gamma = (n+1) - n = 1$$
$$\partial\Gamma \subseteq \partial X = M$$
$$\Gamma \cap \partial x = \partial\Gamma.$$

כל הנקודות של $\partial\gamma = f^{-1}(y)$ מסודרות בזוגות x^+, x^- המתאימים לנקודות קצה של הקשתות ב־Γ. נראה ש־$\varepsilon(x^-) = -\varepsilon(x^+)$ ואז מתקיים

$$\deg(f,y) = \sum_x \varepsilon\left(x^+\right) + \varepsilon\left(x^-\right) = 0$$

כנדרש.

נבחר פרמטריזציה חלקה על אחת הקשתות של Γ,

$$\Gamma = \Gamma(t) : \begin{cases} \Gamma(0) = x^- \\ \Gamma(1) = x^+ \\ \dot\Gamma(t) \neq 0 \end{cases}$$

ואז לכל t מתקיים

$$F(\Gamma(t)) = y$$

ולכן

$$DF_{\Gamma(t)}\left(\dot\Gamma(t)\right) = 0.$$

מתקיים $\dot\Gamma(1), \dot\Gamma(0) \notin T_{x^\pm}M$ כי אחרת נקבל $DF|_{T_{x^\pm}} = Df$ בעל גרעין לא טריוויאלי, כלומר Df לא על ואז y אינו רגולרי.

נבחר מטריקה רימנית על X כך ש־$\dot\Gamma(1) \perp T_{x^+}M$ וגם $\dot\Gamma(0) \perp T_{x^-}M$. נגדיר

$$E(t) = \Gamma\dot{(t)}^{\perp} \subseteq T_{\Gamma(t)}X.$$

נטען כי

$$DF_{\Gamma(t)}\big|_{E(t)} : E(t) : \to T_yN$$

איזומורפיזם.

על: מתקיים כי $DF_{\Gamma(t)}\colon T_{\Gamma(t)}X \to T_yN$ על עם גרעין $DF\left(\dot\Gamma(t)\right) = 0$ אז $DF|_{\dot\Gamma(t)^\perp}$ על.

חח"ע: מכך שלקחנו y ערך רגולרי.

כעת נבחר $\{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס חיובי של T_yN. נגדיר

$$\bar e_j(t) = \left(DF_{\Gamma(t)}\big|_{E(t)}\right)^{-1}(e_j)$$

וכעת $B_t := \left\{\dot\Gamma(t), \bar e_1(t), \dots, \bar e_n(t)\right\}$ בסיס ל־$T_{\Gamma(t)}X$.

ניקח Ω תבנית נפח על X שמגדירה אוריינטציה. אז

$$\operatorname{sgn}\left(\Omega_{\Gamma(t)}(B_t)\right) = \pm 1$$

קבוע לאורך על Γ_t. נניח בה"כ $\operatorname{sgn}(\Omega(B_t)) = 1$.[15]

כעת

$$\Omega(B(1)) = \Omega(c\nu_{x^+}, \bar e_1(1), \dots, \bar e_n(1)) > 0$$

[15] אחרת נהפוך כיוון של Γ.

כאשר הוקטור הראשון בסיס של $\dot{\Gamma}(1)$ והשאר בסיס של $T_{x^+}M$. בסיס חיובי עובר לבסיס חיובי על ידי Df_{x^+} ולכן $\{\bar{e}_1(1),\ldots,\bar{e}_n(1)\}$ בסיס חיובי של $T_{x^+}M$ ביחס לאוריינטציית השפה, ולכן $\varepsilon(x^+)=1$.
גם $\Omega(B(0))>0$ כי

$$\Omega(B(0)) = \Omega\left(\dot{\Gamma}(0),\bar{e}_1(0),\ldots,\bar{e}_n(0)\right)$$
$$= \Omega(-c\nu_{x^-},\bar{e}_1(0),\ldots,\bar{e}_n(0))$$

כאשר

$$\Omega(\nu_{x^-},\ldots,\bar{e}_1(0),\ldots,\bar{e}_n(0))<0$$

כי ν_{x^-} נורמל חיצוני. אז

$$\{\bar{e}_1(0),\ldots,\bar{e}_n(0)\}$$

שלילי של $T_{x^-}M$ ביחס לאוריינטציית שפה. לכן Df_{x^-} מעביר בסיס שלילי ולבסיס שלילי ולכן $\varepsilon(x^-)=-1$. ■

למה 3.4.6. *3.4.5 נכונה גם ללא ההנחה ש־y רגולרי עבור F.*

הוכחה. נציין מספר עובדות.

1. ממשפט הפונקציה ההפכה נובע כי קבוצת הערכים הרגולריים של f היא קבוצה פתוחה ב־N.
2. (**# תרגיל**) אם y ערך רגולרי של f, קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של y כך שלכל $y'\in\mathcal{U}$ מתקיים $\deg(f,y')=\deg(f,y)$.
3. (משפט Sard) הערכים הרגולריים של F צפופים ב־N ולכן יש ערך רגולרי y' שמספיק קרוב ל־y. אז y' רגולרי של F,f ואז $\deg(f,y)=\deg(f,y')$.

כעת נסמן $f^{-1}(y)=\{x_1,\ldots,x_k\}$. מתקיים $\varepsilon(x_i')$ ולכן $\deg(f,y')=\deg(f,y)$, כי f דיפאומורפיזם לוקלי. ■

למה 3.4.7. *נניח כי $F\colon M\times I\to N$ הומוטופיה חלקה וכי*

$$f = F|_{M\times\{0\}}\colon M\to N$$
$$g = F|_{M\times\{1\}}\colon M\to N$$

עם y ערך רגולרי של f,g. אז $\deg(f,y)=\deg(g,y)$.

הוכחה. תהי Ω תבנית נפח על M אשר מגדירה אוריינטציה. נגדיר

$$X = M\times I$$
$$\partial X = M\times\{0\}\cup M\times\{1\}$$

ו־$\omega=\det\wedge\Omega$ תבנית נפח על X.
$M\times\{1\}$ עם אוריינטציית שפה זהה לזו של M, ו־$M\times\{0\}$ עם אוריינטציה הפוכה לה.
לכן

$$\varepsilon\left(F|_{M\times\{1\}}\right)=\varepsilon(g)$$
$$\varepsilon\left(F|_{M\times\{0\}}\right)=-\varepsilon(f)$$

לכן

$$0\overset{3.4.6}{=}\deg\left(F|_{\partial X},y\right)=\deg(g,y)-\deg(f,y)$$

ולכן $\deg(f,y)=\deg(g,y)$. ■

למה 3.4.8. *תהי $f\colon M\to N$ כמו בניסוח המשפט. יהיו $y,z\in N$ רגולריים. אז $\deg(f,y)=\deg(f,z)$.*

הוכחה (המשפט, בהינתן למה 3.4.8). נוכיח עבור f הומוטופית ל־g כי $\deg(f)=\deg g$. יהי y ערך רגולרי של f ו־z ערך רגולרי של g. צריך להוכיח $\deg(f,y)=\deg(g,z)$.
קבוצת הערכים הקריטיים של f,g הן קבוצות בעלות מידה 0 לכן קיים ערך רגולרי משותף w ואז

$$\deg(f,y)\overset{3.4.8}{=}\deg(f,w)\overset{3.4.7}{=}\deg(g,w)\overset{3.4.8}{=}\deg(g,z).$$ ■

נדגים מספר שימושים לפני הוכחת למה 3.4.8.

3.4.1 שימושים

1. תהי $f\colon M\to M$ דיפאומורפיזם. אז לכל $y\in M$ רגולרי מתקיים $\#f^{-1}(y)=1$. לכן $\deg f=\pm1$ בהתאם לאם f שומרת או הופכת אוריינטציה. למשל אם $f=\mathbb{1}_M$ אז $\deg f=1$ ואם

$$\begin{aligned}g\colon S^n&\to S^n\\ x&\to -x\end{aligned}$$

אז $\deg g=(-1)^{n+1}$.

מסקנה 3.4.9 *$f=\mathbb{1}_{S^n}$ ו־g הנ"ל לא הומוטופיות עבור n זוגי.*
זה גורר שלא קיים שדה וקטורי שאינו מנוון על S^n.

2. תהי $f\colon M\to M$ העתקה קבועה עם תמונה x_0. אם $\dim M\geq 1$ אז $\deg f=0$. לכן $\mathbb{1}_M$ לא הומוטופית ל־f. זה גורר את משפט Brouwer.

תרגיל 59. נגדיר $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}/\mathbb{Z}^n$ ותהי $A\in\mathbb{Z}^{n\times n}$. נגדיר $f_A(\vec{x})=A\cdot\vec{x}$. עבור $\vec{v}\in\mathbb{Z}^n$ מתקיים

$$f_A(\vec{x}+\vec{v})=A\vec{x}+A\vec{v}\in A\vec{x}+\mathbb{Z}^n=[A\vec{x}]$$

ולכן

$$\begin{aligned}f_A\colon \mathbb{T}^n&\to\mathbb{T}^n\\ [\vec{x}]&\to[A\vec{x}]\end{aligned}$$

מוגדרת היטב.

הגדרה 3.4.10 תהי M יריעה ותהי $h\colon M\times I\to M$ הומוטופיה חלקה. אז h ***איזוטופיה*** אם לכל t, $h_t\colon M\to M$ הינה דיפאומורפיזם, וגם $h_0=\mathbb{1}_M$.

טענה 3.4.11 *תהי N יריעה קשירה, ותהיינה $x,y\in N$. קיימת איזוטופיה h ב־N עבורה $h_1(x)=y$.*

הוכחה (למה 3.4.8). בוחרים איזוטופיה h_t של N עבורה $h_1(y)=z$. y ערך רגולרי של f אם ורק אם $h_t\circ prsy$ ערך רגולרי של $h_t\circ f$. כעת

- $h_1\circ f$ הומוטופית ל־$h_0\circ f$.
- $z=h_1(y)$ ערך רגולרי גם ל־f וגם ל־$h_1\circ f$.

ומשתי עובדות אלו ניתן להשתמש בלמה 3.4.7. אז $\deg(h_1\circ f,z)=\deg(f,z)$.
נבחין כי $\deg(h_t\circ f,h_t(y))$ קבועה.[16] אז

$$\deg(f,y)=\deg(h_0\circ f,h_0(y))=\deg(h_1\circ f,z)=\deg(f,z)$$

כנדרש. ■

משוואות דיפרנציאליות

נרצה להוכיח את טענה 3.4.11. כדי לעשות זאת ניעזר במד"ר.
נחפש $x(t)\in\mathbb{R}^n$ מסילה עם תנאי התחלה $x(0)=x_0$ ועם הדרישה $\dot{x}(t)=v(x(t),t)\in\mathbb{R}^n$. אם v עם תומך קומפקטי, קיימת מסילה x כזו.
יהי $v_t(\cdot)=v(\cdot,t)\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ שדה וקטורי ב־$\mathbb{R}^n$ לכל t. אז $v_t(x)\in T_x\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n$.

- לכל תנאי התחלה $x(0)$ קיים ויחיד פתרון $x(t)$. העתקה $h_t\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ע"י $x(0)\to x(t)$ הינה איזוטופיה כי

$$h_t\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n \text{ diffeo}\qquad h(0)=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}.$$

- נקבל באופן זה התאמה חד־חד ערכית בין מד"ר מסדר 1, שדות וקטוריים ב־$\mathbb{R}^n$, ואיזוטופיות $h\colon\mathbb{R}^n\times I\to\mathbb{R}^n$. כאן $v(x,t)=\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}$.

הערה 3.4.12 בנייה זו נשארת בתוקף ליריעות (לפחות באופן לוקלי).

- כאשר M סגורה, קיימים פתרונות ל־t כלשהו.

[16] זה נכון כי יש אותם מקורות, ואותם סימנים $\varepsilon(x_i)$.

- כאשר $\partial M \neq \varnothing$ ייתכן שנגיע לשפה בזמן מסוים.
- כאשר M אינה קומפקטית ייתכן שנגיע ל־∞ בזמן סופי.

הוכחה (טענה 3.4.11). שלב I: ניקח $\mathbb{R}^n \supseteq D^n = M$ כדור. אז קיימת איזוטופיה h_t עם תומך קומפקטי כך ש־$h_1(y) = z$.

ניקח שדה וקטורי $v(x,t) = z - y$ ב־$T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. פתרון למד"ר עם תנאי התחלה $x(0) = y$ הוא $x(t) = y + t(z-y)$ כאשר $x(1) = z$. נכפיל את v בפונקציה $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ כך ש־$\operatorname{supp}(f) \subseteq D$ ו־$f \equiv 1$ בסביבה של הקטע $[y,z]$. אז $f \cdot v$ שדה וקטורי עם תומך קומפקטי, ולכן קיימת איזוטופיה h_t שהיא פתרון של מד"ר המודרת ע"י fv. המסילה עם תנאי ההתחלה $x(0) = y$ לא משתנה אחרי הכפל ב־f.

שלב II: ניקח M יריעה קשירה. נגיד כי $x \sim y$ אם קיימת איזוטופיה המעבירה את x ל־y. מחלקות השקילות זרות ומכסות את M. לכל נקודה x יש סביבה דיפאומורפית לכדור D. לכל $y \in D$ קיימת מהשלב הקודם איזוטופיה $h_t\colon D \to D$ עם תומך קומפקטי. נגדיר

$$\tilde{h}_t\colon M \to M$$
$$z \to \begin{cases} h_t(z) & z \in D \\ z & z \notin D \end{cases}$$

ונקבל כי מחלקות השקילות פתוחות.

נקבל מהנ"ל כי כל מחלקת שקילות היא רכיב קשירות של M, לכן קיימת מחלקה יחידה. ■

הערה 3.4.13. תהי $F\colon X^{n+1} \to \partial X$ חלקה. אז מלמות 3.4.5, 3.4.6 $\deg(F|_{\partial X}\colon \partial X \to \partial X) = 0$. אז אין רטרקציה $X \to \partial X$.[17]

הערה 3.4.14. תהי $f\colon M \to N$ כאשר M, N קשירות. החלפת אוריינטציה של M או של N משנה את הסימן של $\deg(f)$.

הערה 3.4.15. יהי y ערך רגולרי. אז $\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(x)$.
ניתן להגדיר

$$\deg_2(f) := (\deg f) \pmod 2 \equiv \sum_{x \in f^{-1}y} \varepsilon(x) \pmod 2 \equiv \# f^{-1}(y) \pmod 2 .$$

תרגיל 60. עברו על הוכחת משפט 3.4.3 ובדקו שהוא נכון עבור $\deg_2$ גם ליריעות שאינן אוריינטביליות.

הערה 3.4.16. תהי $f\colon M \to N$ רציפה. ניתן לקרב את f על ידי $\hat{f}\colon M \to N$ חלקה אשר הומוטופית ל־f, ולהגדיר $\deg f := \deg\left(\hat{f}\right)$.
ניתן להרחיב את ההגדרה של מעלה למרחבים כלליים יותר (זה מופיע בטופולוגיה אלגברית כשמדובר על קוהומולוגיה, בורדיזמים וכו').

הערה 3.4.17. תהי $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{C}$ כאשר $0 \notin \operatorname{Im}\gamma$.
אז $\operatorname{Arg}(\gamma)\colon S^1 \to S^1$, ו־$\omega(\gamma, 0) := \deg \operatorname{Arg}(\gamma)$ נקרא מספר סיבוב של γ סביב 0.
אם e^{i0} ערך רגולרי של $\operatorname{Arg} \circ \gamma$ אז

$$\deg(\operatorname{Arg} \circ \gamma) = \sum_{x \in (\operatorname{Arg} \circ \gamma)^{-1}(e^{i0})} \varepsilon(x) .$$

הערה 3.4.18. ידוע כי $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$, ומתקיים כי $\deg\colon \pi_1(S^1, *) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ איזומורפיזם.

הערה 3.4.19. יהי $f \in \mathbb{R}[x]$ פולינום. ניקח y גדול מערכי כל נקודות הקיצון. אז $f^{-1}(y)$ שווה 0 אם n זוגי, ו־1 אם n אי־זוגי. לכן

$$\deg f = \begin{cases} 0 & n \text{ is even} \\ 1 & n \text{ is odd} \end{cases} .$$

אבל, כל שני פולינומים p, q הומוטופיים אחד לשני על ידי $t \cdot p + (1-t)q$. אין כאן סתירה למשפט כיוון ש־$\mathbb{R}$ אינה יריעה סגורה (כי אינה קומפקטית).

תרגיל 61. עברו על הוכחת המשפט ומצאו איכן ההוכחה משתבשת במקרה הנ"ל של פולינומים.

משפט 3.4.20 (המשפט היסודי של האלגברה). *יהי $p \in \mathbb{C}[z]$ לא קבוע. אז ל־p יש שורש.*

הגדרה 3.4.21 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ *המרחב הפרויקטיבי המרוכב ממימד* 1 הוא

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 := \left\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\right\} \big/ \sim$$

כאשר $(z_0, z_1) \sim (z_0', z_1')$ אם $(z_0, z_1) = \lambda(z_0', z_1')$ עבור $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[17] אם קיימת $r\colon X \to \partial X$ אז $r|_{\partial X} = \mathbb{1}_{\partial X}\colon \partial X \to \partial X$ ואז $\deg(r) = \deg(\mathbb{1}) = 1$

הערה 3.4.22. ניקח (z_0,z_1) בקואורדינטות הומוגניות. אם $z_0=0$ נורמל $(z_0,z_1)\sim(0,1)$. אחרת $(z_0,z_1)\sim\left(1,\frac{z_1}{z_0}\right)$, עם $\frac{z_1}{z_0}$ משתנה חופשי ב־$\mathbb{C}$. לכן

$$\mathbb{CP}^1\cong\mathbb{C}\amalg\{(0,1)\}\cong\text{Riemann Sphere}$$

יריעה חלקה עם האטלס הבא.

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1&=\mathbb{CP}^1\setminus\{(0,1)\}\\ \varphi_1\colon\ (z0,z_1)&\to\frac{z_1}{z_0}\in\mathbb{C}\\ \mathcal{U}_2&=\mathbb{CP}^1\setminus\{(1,0)\}\\ \varphi_2\colon\ (z_0,z_1)&\to\frac{z_0}{z_1}\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

1. פונקציית המעבר $z\to\frac{1}{z}$ חלקה, לכן זהו אטלס חלק.
2. $z\to\frac{1}{z}$ הולומורפית, לכן $\mathbb{CP}^1$ יריעה מרוכבת (עם אוריינטציה סטנדרטית).

תרגיל 62. $\mathbb{CP}^1$ דיפאומורפית ל־S^2.

הוכחה (המשפט היסודי של האלגברה). נסתכל על p כעל פונקציה $\hat{f}_p\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\to\sum_{i\in[n]}a_iz^i$. נרחיב את $\hat{f}_p$ להעתקה

$$\begin{aligned}&f_p\colon\mathbb{CP}^1\to\mathbb{CP}^1\\ &(z_0,z_1)\to\left(z_0^n,z_1^n+a_{n-1}z_1^{n-1}z_0+\ldots+a_0z_0^n\right)\end{aligned}$$

מוגדרת היטב כי

$$f_p\left(\lambda z_0,\lambda z_1\right)=\lambda^n\left(z_0^n,z_1^n+\ldots+a_0z_0^n\right)\underset{\mathbb{CP}^1}{=}f_p\left(z_0,z_1\right)$$

תרגיל 63. f_p חלקה.

נסתכל על הצגה מקומית $\tilde{f}_p$ של f_p עם מפות φ_1,φ'.

$$\tilde{f}_p\colon\ (1,z_1)\to z_1\in\mathbb{C}$$

מתקיים

$$f_p\left(1,z_1\right)=\left(1,z_1^n+a_{n-1}z_1^{n-1}+\ldots+a_0\right)=\left(1,p\left(z_1\right)\right)$$

לכן

$$\varphi_1\left(f_p\left(1,z_1\right)\right)=p\left(z_1\right)$$

כלומר $\tilde{f}_p=\hat{f}_p$.

טענה 3.4.23. f_p על.[18]

הוכחה. נראה כי $\deg f_p=n$ ביחס לאוריינטציה הסטנדרטית. נגדיר $q\left(z\right):=z^n$. אז f_p,f_q הומוטופיות ע"י $p_t:=tp+(1-t)\,q$. נקבל כי $f_{p_t}\colon\mathbb{CP}^1\to\mathbb{CP}^1$ הומוטופיה.[19] לפי משפט המעלה $\deg f_p=\deg f_q$. נחשב את $\deg f_q$. $f_q\left(z_0,z_1\right)=(1,1)$ אם ורק אם $q\left(z\right)=1$ בקואורדינטות לפי $(\mathcal{U},\varphi_1)$. הפתרונות הם שורשי היחידה $\sqrt[n]{1}$. $q'\left(z\right)=nz^{n-1}$ לא מתאפסת על שורשי היחידה.
כעת q "הולומורפית" לכן שומרת אוריינטציה, לכן D_q הפיך, ו־1 ערך רגולרי. לכן

$$\deg q=\sum_{x\in\sqrt{1}}\varepsilon\left(x\right)=n\ .$$

■

3.5 בחזרה לתבניות דיפרנציאליות

נזכיר כי תבנית α ממעלה k על יריעה M היא בחירה חלקה של k־תבנית על T_xM.

הגדרה 3.5.1. תהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. ***נגזרת חיצונית*** ***exterior derivative*** היא העתקה

$$\mathrm{d}\colon\ \Omega^k\left(\mathcal{U}\right)\to\Omega^{k+1}\left(\mathcal{U}\right)$$

כאשר

[18] *מה שגורר את סיום המשפט, כי אז $\hat{f}_p$ על*
[19] חשוב ש־p,q מתוקנים מאותה מעלה. אז p_t ממעלה n ו־f_{p_t} מוגדר היטב.

- עבור $k=0$ נגדיר

$$\mathrm{d}\colon f \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$$

- עבור $k \geq 1$ ו־

$$\alpha = a\left(x\right)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdot \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

נגדיר

$$\mathrm{d}\alpha \coloneqq \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

ונרחיב באופן לינארי ל־$\Omega^k\left(\mathcal{U}\right)$.

$$d\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1,\ldots,i_k}\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_k,j} \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

הערה 3.5.2. תהי $x_i\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ פונקציית קואורדינטות. אז

$$\mathrm{d}\left(x_i\right) = \mathrm{d}x_i$$

(כאשר $\mathrm{d}x_i$ הפונקציונל מהבסיס הדואלי, שהגדרנו קודם) ולכן הסימנים מסכימים.

טענה 3.5.3. *1.* d *לינארית לחיבור וכפל בסקלר.*

2. חוק לייבניץ:

$$\mathrm{d}\left(\alpha \wedge \beta\right) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + \left(-1\right)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$$

3.

$$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$$

הוכחה. נתחיל עם מקרה פרטי של (2), כאשר $\deg \alpha = \deg \beta = 0$. אז $\alpha, \beta\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. מאינפי

$$\frac{\partial\left(f \cdot g\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

לכן

$$\mathrm{d}\left(f \cdot g\right) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g.$$

במקרה הכללי, מספיק להראות למונומים

$$\alpha = f\left(x\right)\mathrm{d}x_i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = f\left(x\right)\mathrm{d}x_I$$

ו־

$$\beta = g\left(x\right)\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_k} = g\left(x\right)\mathrm{d}x_J.$$

מתקיים

$$\alpha \wedge \beta = f\left(x\right) g\left(x\right)\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J$$

ואז

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_r \frac{\partial f}{\partial x^r}\,\mathrm{d}x_r \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_I$$

וגם $\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x_J$ באותו האופן. לכן

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\alpha \wedge \beta\right) &= \mathrm{d}\left(fg\right) \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J \\
&= \left(\mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g\right) \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J \\
&= \left(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_i\right) \wedge \mathrm{d}g\,\mathrm{d}x_J + \left(-1\right)^k \left(f\,\mathrm{d}x_I\right) \wedge \left(\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x_J\right) \\
&= \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + \left(-1\right)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \mathrm{d}\beta
\end{aligned}$$

נראה גם את (3), כלומר $d^2 = 0$. מספיק לבדוק זאת למונומים.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\left(f\,\mathrm{d}x_I\right)\right) &= \mathrm{d}\left(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_I\right) \\
&= \mathrm{d}\,\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_I \pm \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\left(\underbrace{\mathrm{d}x_I}_{=1\cdot \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}}\right)^{0}
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\mathrm{d}f\right) &= \mathrm{d}\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i\right) \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_{i<j} \pm\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

כנדרש. ∎

טענה 3.5.4. *תהי* $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *חלקה כאשר* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ *פתוחות. נזכיר*

$$\begin{aligned}
f^*\colon \Omega^k\left(V\right) \to \Omega^k\left(\mathcal{U}\right) \\
\left(f^*\alpha\right)\left(\eta_1, \ldots, \eta_k\right) \coloneqq \alpha\left(f_*\eta_1, \ldots, f_*\eta_k\right)
\end{aligned}$$

ונטען כי

$$\mathrm{d}\left(f^*\alpha\right) = f^*\left(\mathrm{d}\alpha\right).$$

הוכחה.
- נניח כי $\deg\alpha = 0$. אז $\alpha\colon V \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה. מתקיים

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(f^*\alpha\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \mathrm{d}\left(\alpha \circ f\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&\overset{\text{directional derivative}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha \circ f\right)_p \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\left(f\left(p\right)\right)' \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\left(p\right)
\end{aligned}$$

ומצד שני

$$\begin{aligned}
\left(f^*\,\mathrm{d}\alpha\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \mathrm{d}\alpha|_{f(p)}\left(Df_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \& = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\alpha}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \\
&= \mathrm{d}\left(f^*\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}$$

לכן יש שיוויון.

- נסתכל על α ממעלה כללית. מספיק לבדוק עבור מונומים ונניח בלי הגבלת הכלליות

$$\alpha = a\left(x\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k.$$

אז

$$f^*\alpha = f^*a\left(x\right) \cdot f^*\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge f^*\,\mathrm{d}x_k.$$

ראינו כי $\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}\left(x_i\right)$. כל x_i ממעלה 0 לכן קיבלנו

$$f^*\alpha = f^*a\left(x\right) \cdot \mathrm{d}\left(f^*x_1\right) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\left(f^*x_k\right).$$

נשתמש בכלל לייבניץ.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(f^*\alpha\right) &= \mathrm{d}f^*a \wedge \mathrm{d}\left(f^*x_1\right) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f^*x_k + \\
&+ f^*a \cdot \cancelto{0}{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\left(f^*x_1\right)} \wedge \mathrm{d}f^*x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f^*x_k \\
&\vdots \\
&\pm f^*a \cdot \mathrm{d}f^*x_1 \wedge \ldots \wedge \cancelto{0}{\mathrm{d}\,\mathrm{d}f^*x_k} \\
&= \mathrm{d}f^*a \wedge \mathrm{d}f^*x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f^*x_k
\end{aligned}$$

מתקיים
$$\mathrm{d}\alpha = da \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}d_k$$
ולכן קיבלנו
$$.f^* \,\mathrm{d}\alpha = f^* \,\mathrm{d}a \wedge f^* \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge f^* \,\mathrm{d}x_k = \mathrm{d}f^* a \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f^* x_k$$
■

הערה 3.5.5. תהי M יריעה חלקה ותהיינה
$$(\mathcal{U}, \varphi), \qquad (\mathcal{V}, \psi)$$
מפות באטלס. תהיינה $\alpha_{\mathcal{U}} \in \Omega^k(\varphi(\mathcal{U}))$ ו־$\alpha_{\mathcal{V}} \in \Omega^k(\psi(\mathcal{V}))$. נסמן $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ פונקציית המעבר בתחום הגדרתה. אז מהטענה
$$\mathrm{d}\alpha_{\mathcal{U}} = \mathrm{d}(f^* \alpha_{\mathcal{V}}) = f^*(\mathrm{d}\alpha_{\mathcal{V}})$$
מתקיים $\alpha_{\mathcal{U}} = f^* \alpha_{\mathcal{V}}$ וגם $f^* = \left(\varphi^{-1}\right)^* \circ \psi^*$, לכן
$$\begin{aligned} \varphi^* \,\mathrm{d}\alpha_{\mathcal{U}} &= \left(\varphi^* \left(\left(\varphi^{-1}\right)^* \psi^*\right)\right)(\mathrm{d}\alpha_{\mathcal{V}}) \\ &= \psi^* \,\mathrm{d}\alpha_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$
ולכן פונקציית המעבר אינה תלויה בבחירת קואורדינטות.

מסקנה 3.5.6. *תהי N יריעה אז $\mathrm{d}\alpha \in \Omega^{k+1}(N)$ כאשר $\alpha \in \Omega^k(N)$ מוגדרת היטב ע"י גזירה של הצגות מקומיות. זה נובע מכך ש־d מתנהגת יפה ביחס להחלפת קואורדינטות.*

מסקנה 3.5.7. *$f\colon M \to N$ אז $f^* \,\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}(f^* \alpha)$ לכל $\alpha \in \Omega^N(N)$.*

שימושים

קיבלנו סדרה
$$\ldots \xrightarrow{\mathrm{d}_{k-1}} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_k} \Omega^k(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_{k+1}} \Omega^{k+1}(M)$$
כאשר $d_{k+1} d_k = 0$. אז $\operatorname{Im} \mathrm{d}_k \subseteq \ker \mathrm{d}_{k+1}$ וניתן להגדיר את ***קוהומולוגיית de Rham ה־k־ית***
$$.\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{R}) := {}^{\ker \mathrm{d}_{k+1}}\!/_{\operatorname{Im} \mathrm{d}_k}$$
זה אינווריאנט של יריעה M שנשמר תחת דיפאומורפיזמים. עבור $M = \mathbb{T}^2$ נקבל כי
$$\dim \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{R}) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2 & k = 1 \\ 1 & k = 2 \\ 3 & k = 3 \\ \vdots \end{cases}$$
ועבור $M = S^2$ נקבל כי
$$\dim \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{R}) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1 \\ 1 & k = 2 \\ 3 & k = 3 \\ \vdots \end{cases}$$
ולכן S^2 אינה דיפאומורפית ל־$\mathbb{T}^2$. עבור M סגורה מתקיים
$$\pi_1^{\mathrm{ab}} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R} \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{R})$$
ובאופן כללי הומולוגיית דה־ראם היא טנזור של הומולוגייה סינגולרית/סימפליציאלית עם $\mathbb{R}$ מעל $\mathbb{Z}$.

הגדרה 3.5.8. ***מכפלה פנימית interior product*** בהינתן שדה וקטורי $v\colon M \to TM$ היא העתקה
$$\begin{aligned} i_v \colon \Omega^k(M) &\to \Omega^{k-1}(M) \\ \alpha &\to \alpha(v, \cdot, \ldots, \cdot) \end{aligned}$$
ובנקודה $x \in M$ כאשר $\eta_i \in T_x M$ נקבל כי היא מוגדרת על ידי
$$(i_v \alpha)_{(x)}(\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}) = \alpha_{(x)}\left(v_{(x)}, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}\right)$$

דוגמה 3.5.9. יהי V מ"ו. עבור $\alpha \in \Omega^k(V)$ מתקיים $i_v\alpha \in \Omega^{k-1}(V)$.

הערה 3.5.10. d מגדילה מעלה ב־1. i_v מקטינה מעלה ב־1.

דוגמה 3.5.11. $v\colon M^m \to TM$ שדה וקטורי. $\Omega \in \Omega^m(M)$. אז

$$\operatorname{div}(v) := \frac{\mathrm{d}i_v\Omega}{\Omega}\colon M \to \mathbb{R}$$

דיוורגנציה של שדה וקטורי.

כאשר $M = \mathbb{R}^3$, $\Omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}_2x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ נפח אוקלידי ו־$v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ שדה וקטורי, נקבל כי

$$\begin{aligned}
i_v\Omega(\sigma,\eta) &= \Omega(v,\sigma,\eta) \\
&= \det \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{matrix} \\
&= v_1 \begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} - v_2 \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} + v_3 \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \\
&= v_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3(\sigma,\eta) - v_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3(\sigma,\eta) + v_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2(\sigma,\eta)
\end{aligned}$$

ולכן

$$i_v\Omega = v_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - v_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + v_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.$$

נחשב את $\operatorname{div}(v)$. מתקיים

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}i_v\Omega &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge x_3 - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Omega + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Omega + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\Omega
\end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{\mathrm{d}i_v\Omega}{\Omega} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

דוגמה 3.5.12 (עקמומיות גאוס). יהי $M \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח עם מטריקה רימנית אוקלידית מורשית מ־$\mathbb{R}^3$. נרצה לדעת האם קיימת איזומטריה (באופן מקומי) מ־M ל־$\mathbb{R}^2$. ***עקמומיות גאוס*** היא אינווריאנט של מטריקה רימנית, ול־$(\mathbb{R}^2, \langle\rangle)$ עקמומיות 0. לכן אם העקמומיות של M שונה מאפס, אין איזומטריה כנ"ל.

הגדרה 3.5.13 (העתקת גאוס). תהי $G\colon M \to S^2$. תהי $\nu(x)$ בחירת נורמל היחידה ל־M־$x \in M$.[20] נגדיר $G(x) = \nu(x)$.

הגדרה 3.5.14 (אופרטור צורה Weingarten map).

$$DG\colon T_xM \to T_{\nu(x)}S^2 \cong T_xM$$

כאשר נשים לב כי $T_xM, T_{\nu(x)}S^2 = \nu(x)^\perp$ נקרא ***אופרטור צורה***.

הגדרה 3.5.15 (עקמומיות גאוס).

$$K(x) := \det\left(DG_{(x)}\right)$$

עקמומיות גאוס.

משפט 3.5.16 (Eggregium). *ניתן לחשב את K במונחים של מטריקה רימנית על M. (בלי להשתמש בשיכון)*

נגדיר $\Omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$. על S^2 יש תבנית נפח $\sigma = i_n\Omega$ כאשר $n(x)$ נורמל ל־x. על M יש באותו אופן תבנית נפח

$$\Sigma = i_N\Omega$$

כאשר $N(x)$ נורמל יחידה ל־M ב־x. תבניות אלו תלויות בשיכון.

[20] ניתן לעשות זאת באופן מקומי

טענה 3.5.17. $K\cdot\Sigma=G^{*}\sigma$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}\left(G^{*}\sigma\right)_{X}(\eta,\tau)\\&=\sigma_{G(x)}\left(DG\eta,DG\tau\right)\\&=\Omega\left(n\left(G\left(x\right)\right),DG\eta,DG\tau\right)\end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned}n\left(G\left(x\right)\right)&=G\left(x\right)=N\left(x\right)\\DG\eta&\in T_{G(x)}S^{2}\cong T_{x}M\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\Omega\left(n\left(G\left(x\right)\right),DG\eta,DG\tau\right)&=\Omega\left(N\left(x\right),DG\eta,DG\tau\right)\\&=\Sigma\left(DG\eta,DG\tau\right)\\&=\det\left(DG\right)\cdot\Sigma\left(\eta,\tau\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$G^{*}\sigma=\det\left(DG\right)\cdot\Sigma$$

כנדרש. ■

דוגמה 3.5.18. ניקח

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2}&\hookrightarrow\mathbb{R}^{3}\\(x,y)&\to(x,y,0)\end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned}G\colon\mathbb{R}^{2}&\to S^{2}\\(x,y)&\to(0,0,1)\end{aligned}$$

קבועה ונקבל

$$G^{*}\sigma=\sigma\left(DG\cdot,DG\cdot\right)=0=0\cdot\Sigma$$

כי $DG=0$. לכן $K\equiv0$.

דוגמה 3.5.19. $M=S^{2}\subseteq\mathbb{R}^{3}$. אז $G=\mathbb{1}_{S^{2}}$. אם $\sigma=\Sigma$ נפח אוקלידי על S^{1} אז

$$G^{*}\sigma=\mathbb{1}^{*}\sigma=\sigma=\Sigma$$

ולכן $K\equiv1$ ואין איזומטריה לוקאלית בין S^{2} ל-$\mathbb{R}^{2}$.

3.6 אופרטורים על שדות וקטוריים / פונקציות

תהי M^{m} יריעה חלקה ותהיינה $\Omega\in\Omega^{m}\left(M\right)$ תבנית נפח, ρ מטריקה רימנית על M, ו-$g\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה. יהי $X\colon M\to\mathbb{R}^{m}$ שדה וקטורי. הגדרנו

$$\nabla x=\operatorname{div}\left(x\right)=\frac{\mathrm{d}i_{v}\Omega}{\Omega}$$

ונרצה להגדיר העתקה $\nabla g=\operatorname{grad}g$ שתיקח כל g לשדה וקטורי.
כעת

$$\begin{aligned}T_{x}m&\xrightarrow{\sim}T_{x}^{*}M\\v&\to i_{v}\rho_{x}=\rho_{x}\left(v,\cdot\right)\end{aligned}$$

איזומורפיזם אם ורק אם ρ_{x} איננה מנוונת. מתקיים $\rho_{x}\left(v,v\right)>0$ לכל v, ולכן $\rho_{x}\left(v,\cdot\right)\neq0$ לכל $v\neq0$.
ρ מגדירה העתקה

$$TM\cong T^{*}M$$

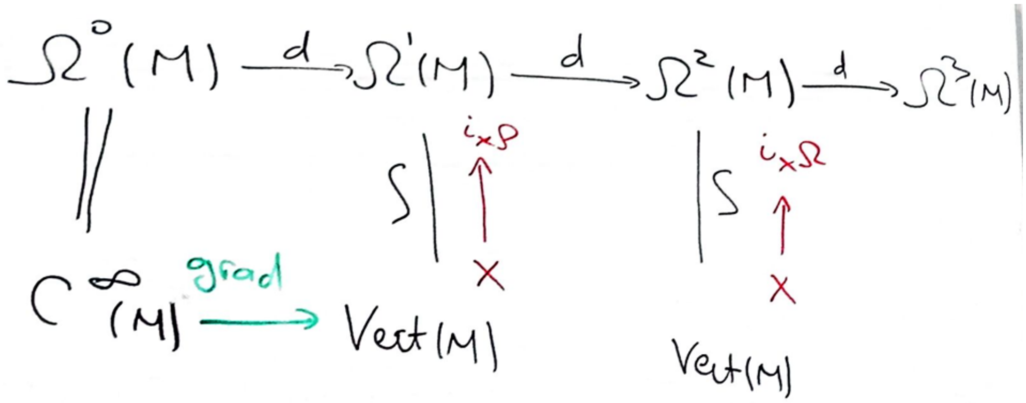
. יש שדה וקטורי יחיד X עבורו

$$i_{X}\rho=\mathrm{d}g$$

ושדה זה נקרא גרדיאנט

$$X\coloneqq\nabla g=\operatorname{grad}g.$$

איור 3.1: דיאגרמה עבור נגזרת חיצונית.



דוגמה 3.6.1. נניח $\dim M = 3$ ונקבל את הדיאגרמה הקומוטטיבית באיור 3.1.
בקואורדינטות לוקליות נקבל

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

ו-

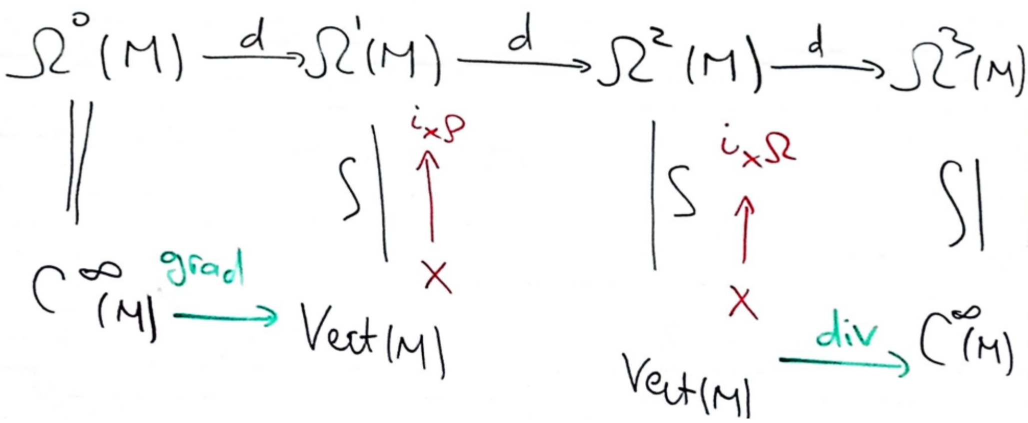
$$\Omega = a\left(x\right) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \neq 0$$

לכן

$$i_X \Omega = a x_1 \, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - a x_2 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + a x_3 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \in \Omega^2\left(M\right)$$

נקבל את הדיאגרמה הקומוטטיבית באיור 3.2. נרצה להשלים את החץ הנותר. נרצה ρ מתואמת עם תבנית נפח Ω. כלומר

איור 3.2: דיאגרמה עבור נגזרת חיצונית.



$$\Omega_x\left(B\right) = \pm$$

לכל B בסיס אורתונורמלי של $T_x M$ לכל x.
בקואורדינטות לוקליות זה שקול לכך שמתקיים

$$.\Omega = \pm \left(\det\left(\rho_x\right)_{i,j}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

תרגיל 64. $v_1, \ldots, v_m \in T_x M$. נרצה

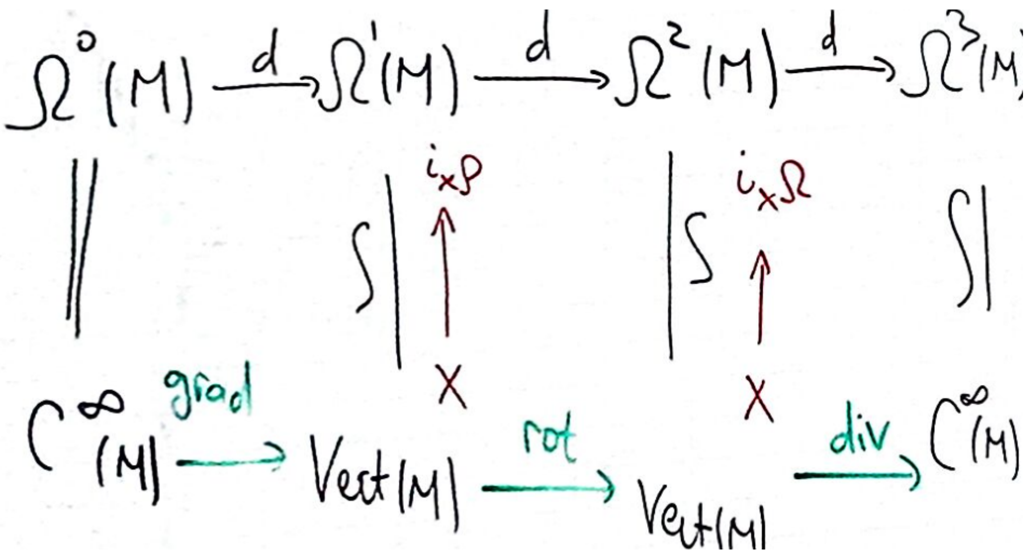
$$.\Omega\left(v_1, \ldots, v_m\right) = \sqrt{\left|\rho_x\left(v_i, v_j\right)\right|}\left(\pm 1\right)$$

המטריצה $\rho_x\left(v_i, v_j\right)$ נקראת ***מט' גרם***. לכל ρ קיימת Ω יחידה (עד כדי סימן) שמתואמת עם ρ.

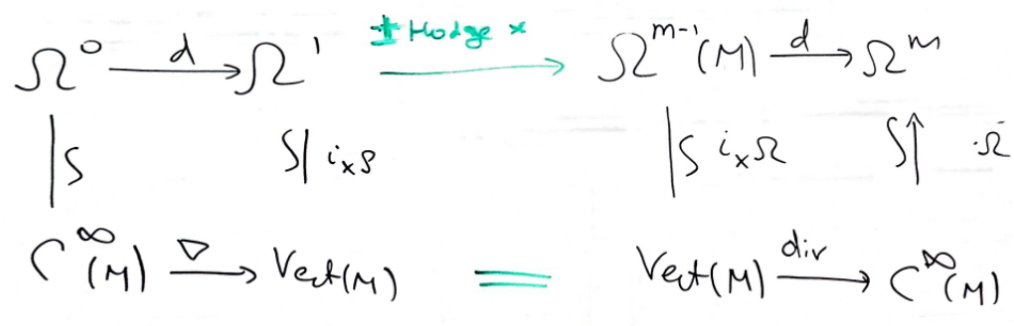
נגדיר $\mathrm{rot} = \mathrm{curl} = \nabla \times X$ על ידי השלמת הדיאגרמה. ראו איור 3.3.

תרגיל 65. עבור $M = \mathbb{R}^3$, ρ, Ω אוקלידיים, rot מסכים עם הנוסחאות מאינפי.

איור 3.3: דיאגרמה עבור נגזרת חיצונית.



איור 3.4: דיאגרמה עבור נגזרת חיצונית.



מסקנה 3.6.2. *לכל שדה וקטורי* X, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$ *(כי* $d^2 = 0$*). לכל* $g\colon M \to \mathbb{R}$ *מתקיים* $\operatorname{rot}(\nabla g) = 0$ *(כי* $d^2 = 0$*).*

הערה 3.6.3. אפשר להתאים את ההגדרה הנ"ל עבור M ממימד כללי כאשר Ω מתואמת עם ρ. במקום rot ניקח למטה את השיוויון, ועל ידי השלמת הדיאגמה נקבל העתקה $\pm\mathrm{Hodge}*$. ראו איור 3.4. נגדיר גם

$$\Delta g \coloneqq \mp \operatorname{div}(\operatorname{grad}(g))$$

אופרטור ***Laplace-Beltrami***.

פרק 4

נגזרות לי

הגדרה 4.0.1. תהי M יריעה עם x שדה וקטורי ו־$f: M \to \mathbb{R}$. נגדיר את ***נגזרת לי לכיוון*** x ***של*** f על ידי

$$L_x f \coloneqq \mathrm{d}f\left(x\right): M \to \mathbb{R}$$

הערה 4.0.2. בקואורדינטות מקומיות נקבל

$$L_x \colon \mathscr{C}^{\infty}\left(M\right) \to \mathscr{C}^{\infty}\left(M\right)$$

אופרטור דיפרנציאלי מסדר 1. על ידי

$$L_x f_{(p)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}_{(p)} x_i\left(p\right).$$

הגדרה 4.0.3. יהיו x, y שני שדות וקטוריים על M. נגדיר ***קומוטטור***

$$\left[L_x, L_y\right] = L_x L_y - L_y L_x\ .$$

תרגיל 66. בפועל, הקומומטטור הינו אופרטור דיפרנציאלי מסדר 1. (מספיק לבדוק בקואורדינטות מקומיות)

תרגיל 67. קיים ויחיד שדה וקטורי z עבורו $L_z = \left[L_x, L_y\right]$. z נקרא ***הקומוטטור של השדות*** x, y ונסמן

$$z = [x, y].$$

הערה 4.0.4. נסתכל בקואורדינטות מקומיות $\left(q_1, \ldots, q_n\right)$ של $\mathbb{R}^n$. נכתוב $y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$. ניתן לבדוק כי מתקיים

$$[x, y] = \sum_{j=1}^{n} x^j \left(\frac{\partial y}{\partial q^j} - y^j \frac{\partial x}{\partial q^j}\right)\ .$$

נזכיר כי יש התאמה בין שדות וקטוריים x, לבין מד"ר

$$\dot{q}\left(t\right) = x_t\left(q\left(t\right)\right)$$

לבין זרימות $f_x^t \colon M \to M$ שהינן דיפאו' ושולחות $q\left(0\right) \to q\left(t\right)$.
כאשר x_t בלתי־תלוי בזמן t (כלומר, שדה וקטורי קבוע ב־t) אז

$$f_x^{t+s} = f_x^t \circ f_x^s.$$

במקרה זה קיבלנו מבנה של חבורה.

תרגיל 68. אם $[x, y] = 0$ אז

$$f_x^t \circ f_y^s = f_y^s \circ f_x^t$$

(זרימות של x, y מתחלפות.)