

**סיכומי הרצאות ביריעות דיפרנציאביליות**  
חורף 2018, השכניון

**הרצאותיו של מיכאל חנבסקי**  
סוכמו על ידי אלעד צורני



מפת העולם. על ידי ג'ורדן ואן שגן.

עדכון אחרון 6 בינואר 2019

# תוכן העניינים

iii	הקדמה
iii	הבהרה
iii	ספרות מומלצת
1	0.1 תוכן הקורס
2	0.2 דרישות קדם
2	0.3 תרגילי בית
2	0.4 ציון
3	1 מבוא
3	1.1 הגדרות
5	1.2 מבנה חלק
9	1.3 תתייריעות
11	1.4 נגזרות
14	1.4.1 נגזרות כיווניות
14	1.4.2 דיפרנציאלים
15	1.5 שיכונים
17	1.5.1 ערכים קריטיים ורגולריים
22	1.6 טרנסוורסליות
22	1.7 יריעות עם שפה
23	1.8 הומוטופיה
23	1.9 הגדרות
26	2 פיצול היחידה
27	2.1 מטריקה רימנית
28	2.2 יריעות מרוכבות
29	3 תבניות פולינאריות
30	3.1 מכפלות חיצוניות
31	3.2 תבניות דיפרנציאליות
31	3.2.1 תיאור מקומי של תבניות דיפרנציאליות
33	3.3 אוריינטציה על יריעה
34	3.3.1 מבנה חלק על $\Omega^n(M)$
38	3.4 מעלה של העתקה
41	3.4.1 שימושים
43	3.5 בחזרה לתבניות דיפרנציאליות
48	3.6 אופרטורים על שדות וקטוריים / פונקציות
51	4 נגזרות לי
55	5 אינטגרציה על יריעות
55	5.1 נפח רימני

# הקדמה

## הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות. להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל [tzorani.elad@gmail.com](mailto:tzorani.elad@gmail.com). אלעד צורני.

## ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

**M. Spivak:** Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus

**J. Milnor:** Topology from the differentiable viewpoint

**J. Lee:** Introduction to smooth manifolds

**L. Conlon:** Differentiable manifolds: a first course

**V. Guillemin, A. Pollack:** Differential topology



# הקדמה

## 0.1 תוכן הקורס

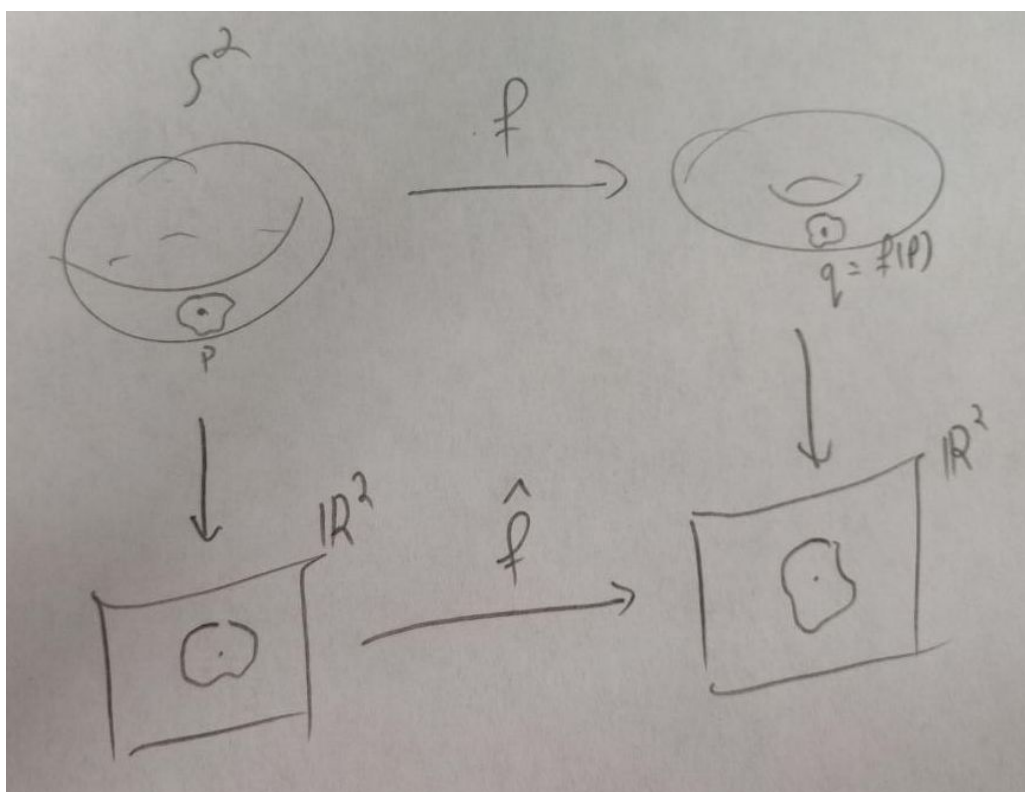
**יריעה** היא מרחב טופולוגי שלוקלית נראה כמו קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$ . דוגמאות ליריעות הן עקומות ומשטחים.

**דוגמה 0.1.1.**  $S^2$  הינה יריעה. סביבה של נקודה נראית כמו קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$ .

**דוגמה 0.1.2.**  $\mathbb{T}^2$  הינה יריעה. סביבה של נקודה גם כאן נראית כמו קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$ .

נסתכל על העתקה  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . נוכל לזהות את ההעתקה  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  באופן לוקלי עם העתקה  $\hat{f}$  שמעתיקה קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות. ראו איור 2.

איור 2: העתקה לוקלית.



בקורס נעסוק בהכללת משפטים מאנליזה ב- $\mathbb{R}^n$  למשפטים על יריעות חלקות. רוב המשפטים ניתנים להכללה ליריעות  $\mathcal{C}^k$ . למשפטים מהקורס שימושים רבים בגיאומטריה, טופולוגיה, פיזיקה, אנליזה, קומבינטוריקה ואלגברה. כדי שהתיאוריה הקשורה לקורס לא תישאר באוויר נראה חלק גדול מהקורס שימושים, בעיקר בתחום של טופולוגיה דיפרנציאלית. קיימים מספר משפטים מוכרים מאנליזה.

**דוגמאות.** 1. נוסחאת גרין-לייבניץ:

$$\int_{\partial[a,b]} F = \int_{[a,b]} F' dx$$

2. נוסחאת גרין:

$$\int_{\partial U} f dx + g dy = \iint_U \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

3. משפט גאוס:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dv = \iint_{\partial\Omega} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle ds$$

4. משפט סטוקס:

$$\iint_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\partial\Sigma} \langle \vec{F}, \vec{\gamma} \rangle dt$$

כולם נובעים ממשפט סטוקס כללי יותר אותו נוכיח בקורס.

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

## 0.2 דרישות קדם

נשתמש בקורס רבות במשפט הפונקציה הסתמונה ובמשפט הפונקציה ההפוכה מ- $\mathbb{R}^n$ . רצוי להכיר את ניסוחיהם, את המשמעויות הגיאומטריות ומספר שימושים שלהם. נשתמש בהחלפות קואורדינטות מאלגברה לינאריות, במשפט פוביני, מטריצות יעקוביאן, במטריצות יעקוביאן, בכלל השרשרת ובמשפט קיום ויחידות של מד"ר.

## 0.3 תרגילי בית

בקורס יפורסמו ארבעה תרגילי בית רשמיים, רובם ברמת הבנת ההגדרות. אין חובת הגשה אך מומלץ מאוד לפתור את התרגילים כדי לוודא שאינכם הולכים לאיבוד.

## 0.4 ציון

הציון הסופי כולו יסתמך על הגשת עבודת בית.

# פרק 1

## מבוא

### 1.1 הגדרות

**הגדרה 1.1.1.** מרחב טופולוגי  $M$  נקרא **יריעה טופולוגית** (topological manifold) אם לכל  $x \in M$  יש סביבה  $U$  שהומאומורפית לקבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$  עבור  $n$  כלשהו.

**הערה 1.1.2.** לעתים יריעה טופולוגית כפי שהגדרנו אותה נקראת **מרחב אוקלידית לוקלית** (locally Euclidean space).

**עובדה 1.1.3.** עבור יריעה טופולוגית,  $n$  קבוע מקומית. אם  $M$  קשירה,  $n$  קבוע.

**הגדרה 1.1.4.** עבור יריעה  $M$  עם  $n$  קבוע, נגיד ש- $n$  הוא **המימד** של היריעה.

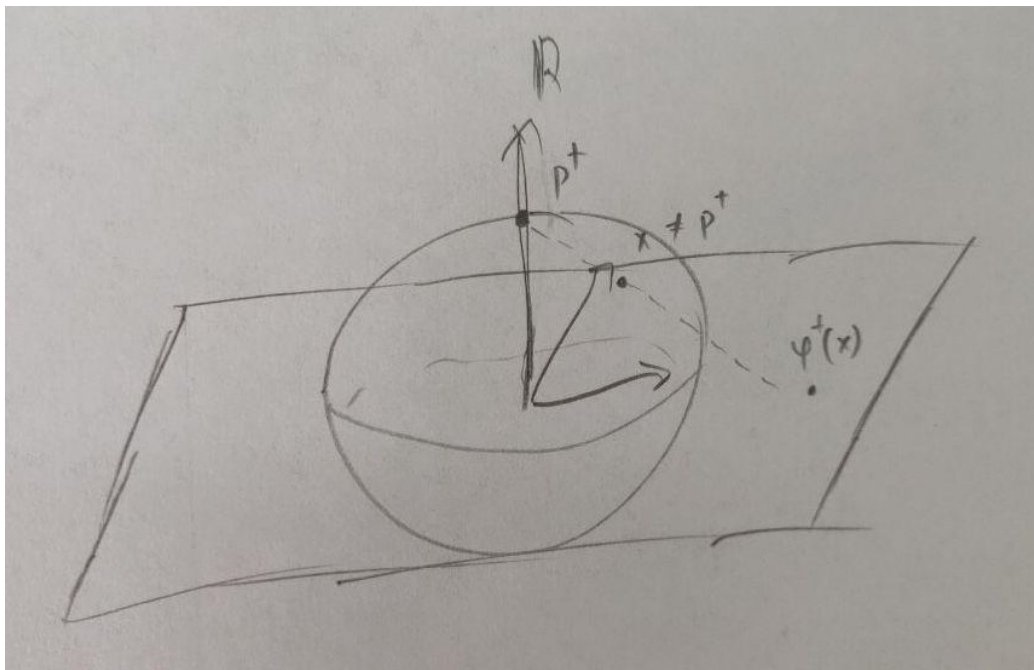
**תרגיל 1.** מצאו אילו אותיות מבין MANIFOLD הן יריעות. מצאו אילו הומאומורפיות.

**דוגמאות.** 1. עקומות

2. משטח ב- $\mathbb{R}^3$

3.  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ : נסמן  $U^+ = S^n \setminus \{p^+\}$  נתאים לנקודה  $x \in U^+$  על הספירה את הנקודה  $\varphi^+(x) \in \mathbb{R}^n$  המתקבלת על ידי הטלה סטרוגרפית. ראו איור 1.1. ניתן לראות כי  $\varphi^+$  הומאומורפיזם. אפשר באותו אופן להגדיר  $\varphi^-: U^- \rightarrow \mathbb{R}^n$ . לכל נקודה על  $S^n$  יש

איור 1.1: הטלה סטרוגרפית.



סביבה הומאומורפית לקבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$  המתקבלת מהמקור דרך  $\varphi^\pm$  של סביבה בתמונה, לכן  $S^n$  יריעה.



**תרגיל 2.** אם  $M_1, M_2$  יריעות טופולוגיות אז  $M_1 \times M_2$  עם טופולוגיית המכפלה הינה יריעה. אם המימד של  $M_1, M_2$  אחיד מתקיים גם

$$\dim(M_1 \times M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$$

**דוגמה 1.1.5.** טורוס  $n$ -מימדי הוא  $T^n := \prod_{k=1}^n S^1$ . ניתן להגדיר גם  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n / \sim$  כאשר  $x \sim y$  אם  $x - y \in \mathbb{Z}^n$ . נסמן  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$  את ההטלה הטבעית (כלומר  $\pi(x) = [x] = x + \mathbb{Z}^n$ ) ואז  $\mathcal{U} \subseteq T^n$  פתוחה אם  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$  פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$ .

**תרגיל 3.** הראו כי  $T^n$  הומאומורפי ל- $T^n$ .

**דוגמה 1.1.6.** נגדיר **מרחב פרויקטיבי** הוא בשתי דרכים.

(i) נסתכל על ישרים דרך  $\vec{0}$  ב- $\mathbb{R}^{n-1}$ . עבור  $\ell$  ישר דרך 0 נסמן  $\mathcal{U}_\varepsilon(\ell)$  את אוסף הישרים  $\ell'$  דרך  $\vec{0}$  כך שמתקיים  $\deg \ell, \ell' < \varepsilon$ . אז קבוצה פתוחה היא איחוד כלשהו של  $\mathcal{U}_{\varepsilon_i}(\ell_i)$ .

(ii) נגדיר גם  $\mathbb{RP}^n = S^n / \pm 1$  כלומר  $x \sim y$  אם  $x = \pm y$ . נסמן  $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  את ההטלה  $x \rightarrow \{x, -x\}$  ואז  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{RP}^n$  פתוחה אם  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$  פתוחה ב- $S^n$ .

**תרגיל 4.** הראו כי  $\mathbb{RP}^n$  הומאומורפי ל- $\mathbb{RP}^n$ .

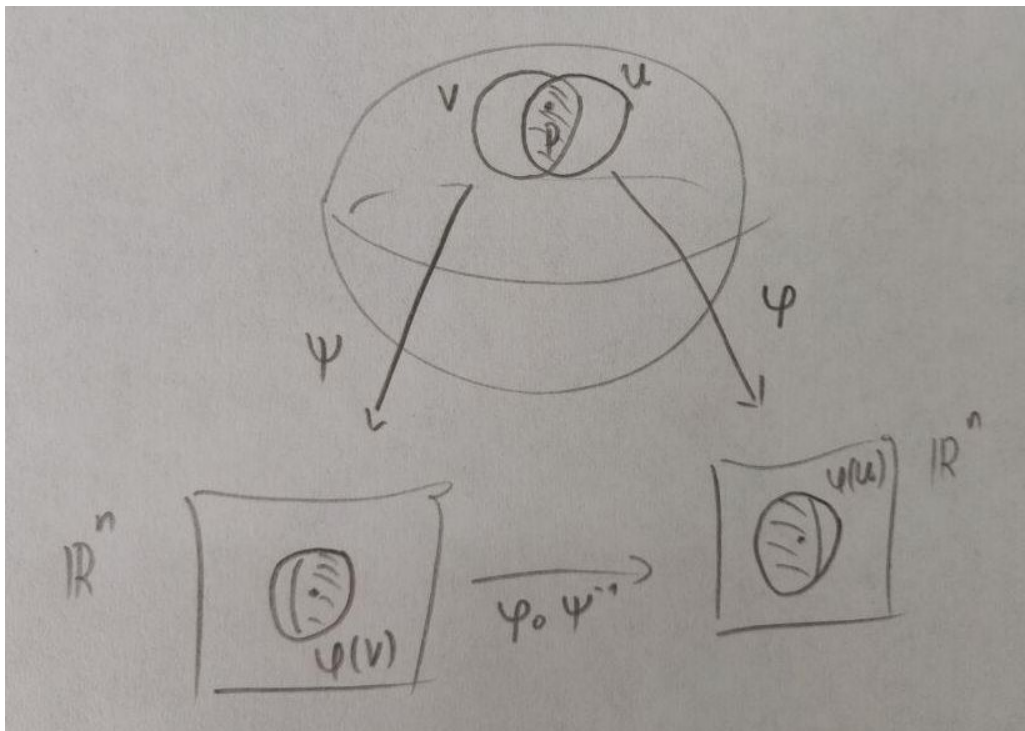
**דוגמה 1.1.7.**  $\mathbb{RP}^1$  הומאומורפי ל- $S^1$ . לאחר הזיהוי מתקבל קטע המזוהה בקצותיו, וזה הומאומורפי למעגל.

**הגדרה 1.1.8.** תהי  $M$  יריעה טופולוגית. **מפה** / coordinate chart / map היא זוג  $(\mathcal{U}, \varphi)$  כאשר  $\mathcal{U} \subseteq M$  קבוצה פתוחה ו- $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  הומאומורפיזם, ו- $\varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה.

**דוגמה 1.1.9.** ב- $S^n$  הגדרנו שתי מפות  $(\mathcal{U}^\pm, \varphi^\pm)$ .

**הגדרה 1.1.10.** תהיינה  $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$  מפות עבור יריעה  $M$ . אז  $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$  מעבר transition map או **פונקציית החלפת קואורדינטות**. ראו איור 1.2

איור 1.2: פונקציית מעבר.



**הגדרה 1.1.11.** תהי העתקה  $f: M \rightarrow N$  בין יריעות, ונניח בה"כ  $f(\mathcal{U}_1) \subseteq \mathcal{V}_1$ . אז  $\hat{f}_1: \varphi_1(\mathcal{U}_1) \rightarrow \psi_1(\mathcal{V}_1)$  **הצגה מקומית של  $f$**  (ביחס למפות  $(\varphi_1, \mathcal{U}_1)$  ו- $(\psi_1, \mathcal{V}_1)$ ). מתקיים  $\hat{f}_1 = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(\mathcal{U}_1)}$ . ראו איור 1.3.

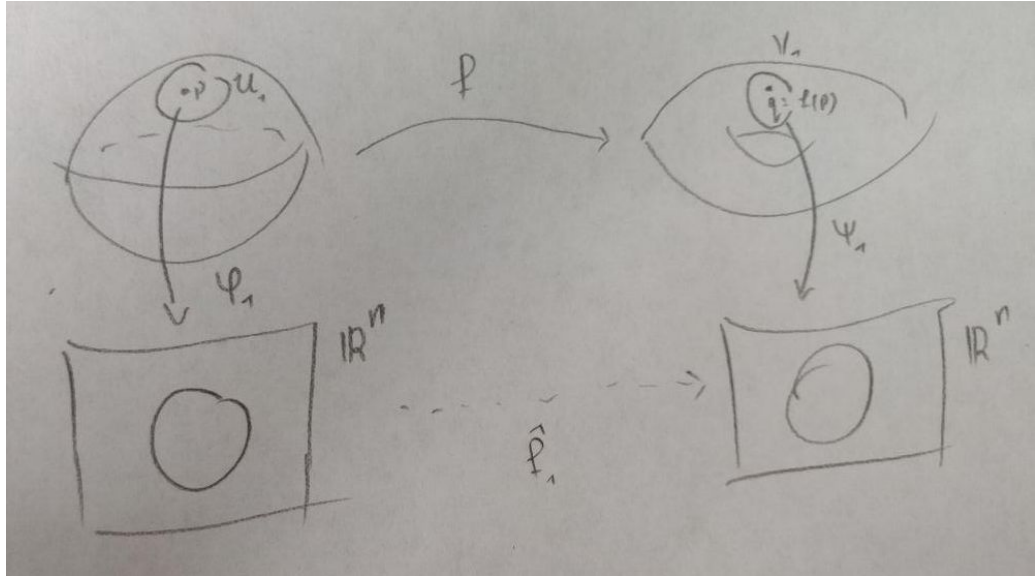
**הגדרה 1.1.12.** תהיינה  $\hat{f}_1, \hat{f}_2$  שתי הצגות מקומיות של  $f: M \rightarrow N$ . אז

$$\hat{f}_2|_{\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \hat{f}_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$$

כאן  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  פונקציית מעבר מ- $(\mathcal{U}_2, \psi_2)$  ל- $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$  ו- $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$  פונקציית מעבר מ- $(\mathcal{V}, \psi_1)$  ל- $(\mathcal{V}, \psi_2)$ . ראו איור 1.4.



איור 1.3: הצגה מקומית.



נזכיר כי  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  עבור  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  נקראת **חלקה** (smooth) אם לכל  $x \in \mathcal{U}$  קיימות ורציפות נגזרות חלקיות של  $f$  מסדר כלשהו.

**סימון 1.1.13.** עבור  $f$  חלקה נסמן  $f \in \mathcal{C}^\infty$ .

**הגדרה 1.1.14.** עבור  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$  דיפאומורפיזם אם  $f$  הפיכה, ו- $f^{-1}$  חלקות.

**תרגיל 5.** אם  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$  חלקה וגם  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$  אז  $m = n$ .

**דוגמאות.**

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \text{ איננה חלקה.}$$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases} \text{ חלקה (אך איננה אנליטית).}$$

נגדיר  $\mathcal{U} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $\mathcal{W} = \mathbb{R}$  אז  $\tan: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$  דיפאומורפיזם.

**תרגיל 6.** 1. אם  $F$  דיפאו' גם  $F^{-1}$  דיפאו'.

2. הרכבה של דיפאו' היא דיפאו'.

3. אם  $F_1: \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{W}_1$  ו- $F_2: \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{W}_2$  דיפאו' אז  $F_1 \times F_2: \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$  דיפאו'.

4. אם  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  ו- $-\infty \leq c \leq d \leq \infty$  אז  $(a, b)$  דיפאומורפי ל- $(c, d)$ .

5. הקבוצות במישור מאיור 1.5 דיפאומורפיות.

## 1.2 מבנה חלק

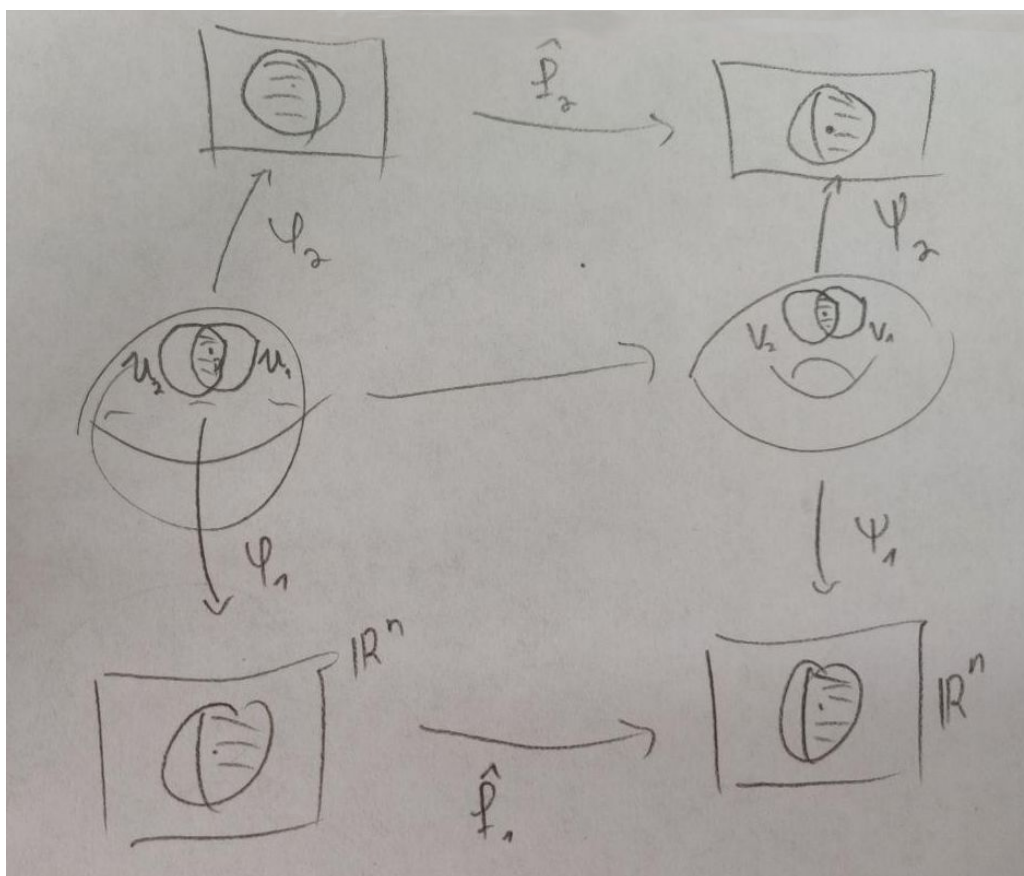
נרצה להגדיר מתי העתקה  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  הינה גזירה/חלקה בנקודה  $p$ . ננסה להגדיר גזירות של העתקה  $f$  כנ"ל.

**"הגדרה":**  $f$  גזירה ב- $p \in M$  אם כל הצגה מקומית  $\hat{f}$  גזירה ב- $\varphi(p)$ . הגדרה זאת איננה טובה כי בהינתן שתי הצגות מקומיות סביב  $p$  ופונקציית מעבר  $\psi, \hat{f}_1 = \hat{f}_2 \circ \psi$  איננה בהכרח גזירה.

**"הגדרה 2":** נניח כי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה. נאמר כי  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה אם ניתן להרחיב את  $f$  לפונקציה חלקה  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  כאשר  $\mathcal{U}$  סביבה פתוחה של  $M$ .

גם בהגדרה זו יש בעיות, כפי שנראה מיד בדוגמה.

איור 1.4: פונקציית מעבר בין יריעות.



**דוגמה 1.2.1.** ניקח  $M = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ . נסתכל על שלוש מפות  $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ ,  $i \in [3]$  כאשר  $\mathcal{U}_i = \mathbb{R}$  והמפות מוגדרות על ידי

$$\varphi_1(x) = x$$

$$\varphi_2(x) = x^3$$

$$\varphi_3(x) = \sqrt[3]{x}$$

תהי  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  אז  $\hat{f}_1 = f$  ונקבל כי מה"הגדרה"  $\hat{f}_1$  חלקה אם ורק אם  $f$  חלקה במובן של אינפי. נקבל

$$\hat{f}_2(u) = f \circ \varphi_2^{-1}(u) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot u^{\frac{i}{3}}$$

לכן תנאי הכרחי עבור חלקות של  $\hat{f}_2$  הוא ש- $a_i = 0$  לכל  $i \not\equiv 0 \pmod{3}$ . נקבל באותו אופן

$$\hat{f}_3(w) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i w^{3i}$$

ונקבל פחות הצגות חלקות מאשר בהצגה המקומית הראשונה.

**דוגמה 1.2.2.** נגדיר  $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$  ו- $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$ . נגדיר העתקה  $P: M_2 \rightarrow M_1$  ע"י  $(x, |x|) \mapsto (x, 0)$ . זהו הומיאומורפיזם.

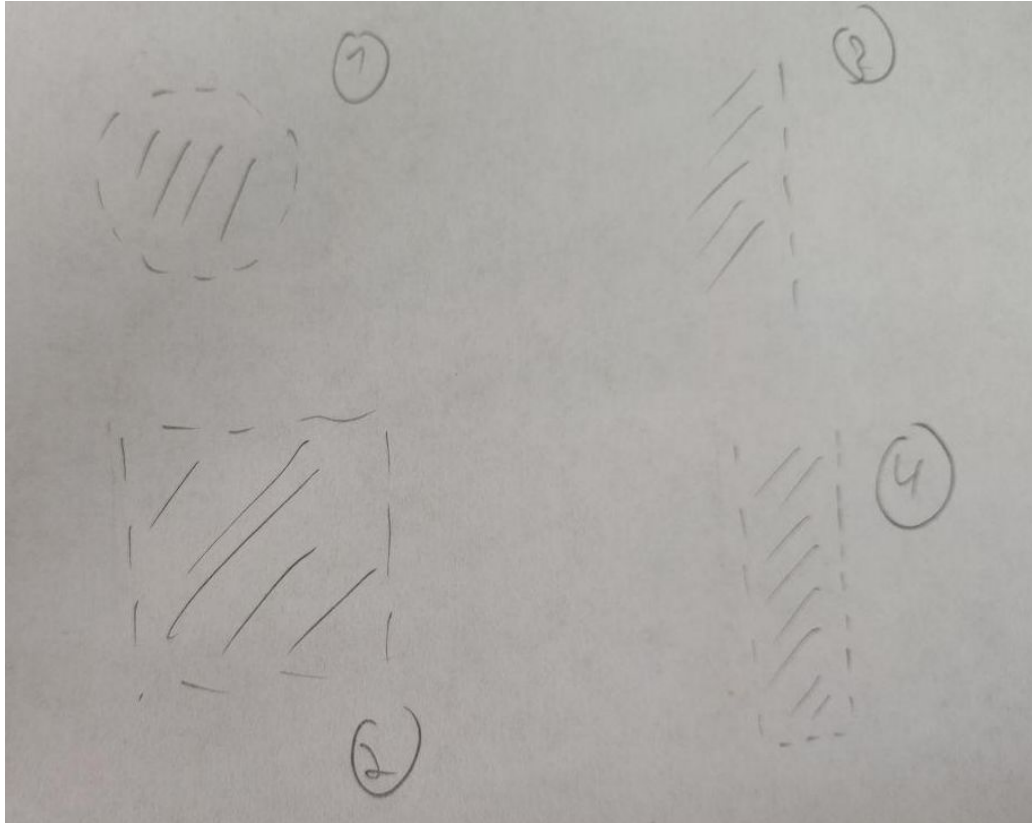
**תרגיל 7.**  $f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  ע"י  $(x, 0) \mapsto \varphi(x)$  חלקה אם ורק אם  $\varphi$  חלקה כפונקציה  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**תרגיל 8.**  $f_2(x, |x|) = |x|$  פונקצייה חלקה  $M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . רמז: ניתן להרחיב אותה לפונקציה  $f_2(x, y) = y$  כאשר  $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

כאשר נפעיל את הזהוי בין  $M_1$  ל- $M_2$  על ידי  $P$  נקבל כי  $f_2$  פונקצייה חלקה! לכן ה"הגדרה" תלויה בשיכון  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  ולא רק ביריעה עצמה.

נתקלנו בבעייה. המבנה של יריעה טופולוגית הינו חלש מידי ונראה שאין סיכוי להגדיר עליו גזורת. איך נעקוף זאת? נרצה לדרוש שההעתקות המעבר יהיו חלקות, ואז  $\hat{f}_1 = \psi \circ \hat{f}_2 \circ \varphi$  תהיה גזירה אם ורק אם  $\hat{f}_2$  גזירה, עבור  $\psi, \varphi$  העתקות מעבר.

איור 1.5: קבוצות דיפאומורפיות במישור.



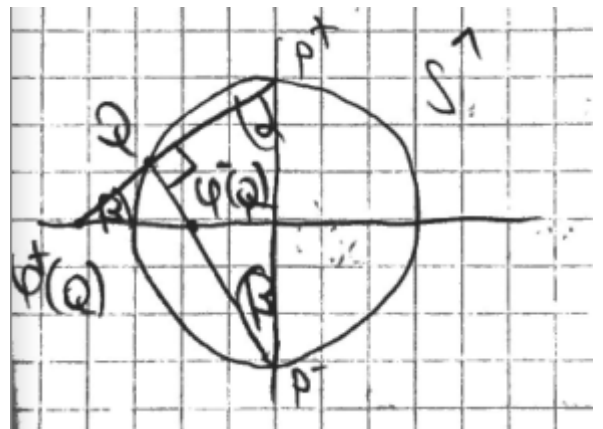
**1.2.3 הגדרה.** תהי  $M$  יריעה. מפות  $(\mathcal{U}, \varphi)$ ,  $(\mathcal{V}, \psi)$  יקראו **מתואמות** (compatible) אם  $\varphi \circ \psi^{-1}$ ,  $\psi \circ \varphi^{-1}$  חלקות (כלומר, דיפאומורפיזמים). **תרגיל 9.** תהי  $f: \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . אז  $f \circ \varphi^{-1}$  חלקה אם ורק אם  $f \circ \psi^{-1}$  חלקה, כאשר  $\varphi, \psi$  מתואמות.

**1.2.4 הגדרה.** תהי  $M$  יריעה. **אטלס חלק** (smooth atlas /  $\mathcal{C}^\infty$  atlas) על  $M$  הוא משפחת מפות מתואמות  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  כך שמתקיים  $M = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$ .

**1.2.5 דוגמה.**  $M = S^1$  ואז  $\{(\mathcal{U}^\pm, \varphi^\pm)\}$  שהגדרנו קודם הינו אטלס.

**1.2.6 טענה.** האטלס הנ"ל הינו חלק.

איור 1.6: the stereographic map.



הוכחה. מתקיים

$$\mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^- = S^1 \setminus \{p^+, p^-\}$$

כמובן  $\varphi^\pm(\mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^-) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . ראו איור 1.6. מתקיים  $\varphi^-(Q) = \tan(\beta)$  וגם  $\varphi^+(Q) = \frac{1}{\tan(\beta)}$ . לכן אם  $x = \varphi^+(Q)$  נקבל  $\varphi^- \circ (\varphi^+)^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ . כנ"ל לפונקציית המעבר לכיוון השני, לכן האטלס חלק. ■

**הגדרה 1.2.7.** שני אטלסים חלקים נקראים **שקולים** אם האיחוד שלהם הוא אטלס חלק.

**תרגיל 10.** שקילות זאת הינה אכן יחס שקילות בין אטלסים חלקים על  $M$ .

**הגדרה 1.2.8.** **מבנה חלק** על  $M$  זו מחלקת שקילות של אטלסים.

**דוגמה 1.2.9.** ניקח  $M = \mathbb{R}$  עם  $\mathcal{U}_i = \mathbb{R}$  וההעתקות  $\varphi_1 = \text{id}, \varphi_2 = x^2, \varphi_3 = \sqrt[3]{x}$ . אז שלושת האטלסים  $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$  אטלסים לא מתואמים בזוגות ולכן מייצגים שלושה מבנים חלקים שונים.

**הגדרה 1.2.10.** תהי  $(M, \mathcal{A})$  יריעה עם אטלס חלק. נגדיר  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  **גזירה** בנקודה  $p \in M$  אם  $\hat{f}: \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ב- $\varphi(p)$  עבור  $(\mathcal{U}, \varphi)$  מפה סביבה  $p$  מהאטלס  $\mathcal{A}$ .

**תרגיל 11.** בדקו כי הנ"ל מוגדר היטב.

**הגדרה 1.2.11.** **יריעה חלקה** היא יריעה טופולוגית  $M$  עם בחירה של אטלס חלק על  $M$ .

**טענה 1.2.12.** בכל מחלקת שקילות של אטלסים קיים אטלס מקסימלי.

**מסקנה 1.2.13.** בחירת מבנה חלק שקולה לבחירת אטלס חלק מקסימלי על  $M$ .

**הגדרה 1.2.14.** תהיינה  $(M, \mathcal{A}_M), (N, \mathcal{A}_N)$  שתי יריעות חלקות ותהי  $f: M \rightarrow N$ . אז  $f$  **תיקרא גזירה** ב- $p \in M$  אם  $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  גזירה ב- $\varphi(p)$ , ההצגה המקומית ביחס למפות  $\mathcal{U}, p \in \mathcal{U}, (U, \varphi) \in \mathcal{A}_M, (V, \psi) \in \mathcal{A}_N, f(p) \in V$ .

**תרגיל 12.** בדקו כי הנ"ל מוגדר היטב ביחס למפות מתואמות.

**הגדרה 1.2.15.** פונקציה  $f: M \rightarrow N$  **חלקה** אם כל ההצגות המקומיות של  $f$  ביחס למפות מתואמות הן פונקציות חלקות.

**הערה 1.2.16.** כדי לבדוק חלקות, די לבדוק חלקות של פונקציות מתואמות עם מפות שמכסות את היריעה.

**הגדרה 1.2.17.** פונקציה הפיכה  $f$  כאשר  $f^{-1}$  חלקות נקראת **דיפאומורפיזם**.

**תרגיל 13.** אם  $f: M \rightarrow N$  דיפאומורפיזם, אז  $\dim M = \dim N$ .

**תרגיל 14.** דיפאומורפיזמים שומרים על פונקציות חלקות. אם בדיאגרמה הבאה  $\varphi, \psi$  איזומורפיזמים, אז  $h$  חלקה אם ורק אם  $h'$  חלקה.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ M' & \xrightarrow{h'} & N' \end{array}$$

**הגדרה 1.2.18.** **יריעה דיפרנציאבילית**  $\mathcal{C}^r$  היא יריעה טופולוגית עם אטלס בו פונקציות המעבר חלקות  $\mathcal{C}^r$ .

**תרגיל 15.** תהי  $(M, \mathcal{A})$  יריעה חלקה ותהי  $(\mathcal{U}, \varphi)$  מפה מתואמת עם  $\mathcal{A}$ . אז  $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^m$  דיפאומורפיזם.

**דוגמה 1.2.19.** תהי  $M = \mathbb{R}$  עם  $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \text{id})\}$  המבנה החלק הסטנדרטי, ועם  $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$ . אז  $(M, \mathcal{A}_1), (M, \mathcal{A}_2)$  יריעות חלקות שונות, אך דיפאומורפיות. נסמן  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . אז  $\hat{f} = \text{id}_{\mathbb{R}}$  ולכן  $f$  דיפאומורפיזם. ראה איור 1.7.

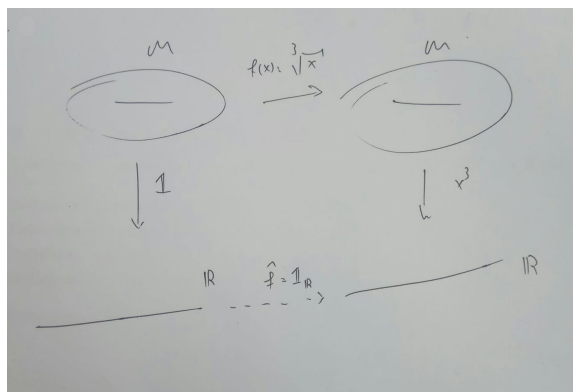
**שאלה 1.2.20.** האם קיימים מבנים שאינם דיפאומורפיים על אותה יריעה טופולוגית? עבור  $\dim M \leq 3$  התשובה נכונה. עבור  $\dim M = 1$  נסו **כתרגיל**. עבור  $\dim M \geq 4$  הדבר תלוי ביריעה.

**דוגמה 1.2.21.** בטבלה 1.8 מספר המבנים הדיפאומורפיים של הספירה. עבור  $n = 4$  זאת בעייה פתוחה הנקראת smooth Poincaré conjecture.

**דוגמה 1.2.22.** ב- $\mathbb{R}^n$  יש מבנה דיפאומורפי אחד לכל  $n \neq 4$ , ואינסוף עבור  $n = 4$ .

הרצאה 2  
28 באוקטובר  
2018

איור 1.7: דיפאומורפיזם.



איור 1.8: מבנים דיפאומורפיים של הספירה.

$n$	מספר מבנים חלקים שונים של $S^n$ עד כדי דיפאומורפיזם
1	1
2	1
3	1
4	?
5	1
6	1
7	28
8	2
9	8
10	6
11	992
12	1

## 1.3 תתייריעות

**הגדרה 1.3.1.** תהי  $M$  יריעה טופולוגית מממד  $m$  ותהי  $N \subseteq M$  עם הטופולוגיה המושרית.  $N$  תיקרא **תתייריעה טופולוגית** אם לכל  $x \in N$  קיימת מפה  $(\mathcal{U}, \varphi)$  של  $M$  עם  $x \in \mathcal{U}$  וגם  $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{U} \cap N$  (כאן  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^m$ )

**דוגמאות.** •  $W \subseteq M$  קבוצה פתוחה היא תתייריעה חלקה.

• אם  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  אז הגרף של  $F$ ,

$$\text{Gr}(F) = \{(x, F(x)) \mid x \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

היא תתייריעה. אם  $F$  רציפה זאת רק תתייריעה טופולוגית, אם  $F$  חלקה זאת תתייריעה חלקה, וכו'. תהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  פתוחה. אז  $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$  פתוחה במרחב  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . נגדיר

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto (x, y - F(x)) \end{aligned}$$

ואז  $\text{Gr}(F) \cap (\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \{0\}$  המפה שנדרשת בהגדרה. אם  $F$  רציפה,  $\varphi_{\mathcal{U}}$  הומאומורפיזם ולכן זאת תתייריעה טופולוגית. אם  $F$  חלקה,  $\varphi_{\mathcal{U}}$  חלקה, כלומר מתואמת עם האטלס הסטנדרטי, וזאת תתייריעה חלקה.

**תרגיל 16.** גרף של  $|x|$  הוא תתייריעה טופולוגית אך לא חלקה.

**תרגיל 17.** תתייריעה טופולוגית היא יריעה טופולוגית.

**טענה 1.3.2.** תהי  $N^n \subseteq M^m$  (כלומר  $N$  מממד  $n$ ,  $M$  מממד  $m$ ) תתייריעה חלקה. אזי  $M$  משרה על  $N$  מבנה של יריעה חלקה.

הוכחה. מתרגיל 17 תתייריעה היא יריעה טופולוגית. נשאר להראות כי  $M$  משרה מבנה חלק. ניקח  $\{(U_x, \varphi_x)\}_{x \in N}$  מפות מההגדרה של תתייריעה חלקה ונגדיר

$$\mathcal{A} = \{(U_x \cap N, \varphi_x|_{U_x \cap N})\}_{x \in N}$$

אטלס שמכסה את  $N$ . נשאר להראות כי המפות מתואמות.  $(U_x, \varphi_x)$  ו- $(U_y, \varphi_y)$  מתואמות, לכן פונקציות המעבר

$$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}: \varphi_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \varphi_y(U_x \cap U_y)$$

חלקות. לכן הצמצום באטלס  $\mathcal{A}$ , שהינו

$$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}|_{\mathbb{R}^n \cap \varphi_x(U_x \cap U_y)}: \mathbb{R}^n \cap \varphi_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \mathbb{R}^n \cap \varphi_y(U_x \cap U_y)$$

גם הוא חלק.

### דוגמה 1.3.3. נתונה מערכת משוואות

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ F_r(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

כאשר  $F_i$  חלקות. נניח שבנקודה  $\vec{x}$  כך ש- $\vec{F}(\vec{x}) = 0$  מתקיים  $\text{rank}\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}\right) = r$  (הדרגה מקסימלית). ממשפט הפונקציה הסתומה ניתן לבודד  $m - r$  קואורדינטות  $\vec{x}''$  כאשר  $\vec{x} = (\vec{x}'', \vec{x}')$  בה"כ ואז לוקלית ליד  $\vec{x}$  קבוצת הפתרונות  $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$  נראית כמו גרף של פונקצייה

$$G: \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow \mathbb{R}^r \\ x'' \mapsto G(x'') \subseteq \mathbb{R}^r$$

**דוגמה 1.3.4.** עבור  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ , מתקיים  $\frac{\partial F}{\partial x} = (2x_1, 2x_2)$ . כאשר  $x_1, x_2 \neq 0$  ניתן להציג את  $x_1$  כפונקציה של  $x_2$  או להיפך. לוקלית, ליד  $x$ ,  $M = \{x \mid F(x) = 0\}$  היא יריעה חלקה. אם תנאי של משפט הפונקציה הסתומה מתקיים לכל  $x \in M$ , אז  $M$  יריעה חלקה (גלובלית).

**תרגיל 18.** עבור תתייריעה כמו בדוגמה, מתקיים  $\dim M = m - r$ .

**משפט 1.3.5.** נניח ש- $N \subseteq \mathbb{R}^m$  תת-קבוצה כך שלכל  $x \in N$  קיימת סביבה  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  ו- $r = m - n$  פונקציות חלקות  $F_i: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  (עם  $r$  קבוע עבור  $N$ ) כך שמתקיימים התנאים הבאים.

$$N \cap U = \{\vec{x} \in U \mid \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}\} \\ \text{rank}\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}\right) = r$$

או  $N \subseteq \mathbb{R}^m$  תתייריעה ממימד  $n = m - r$ .

**הערה 1.3.6.** הכיוון ההפוך איננו בהכרח נכון. אם  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{F}(\vec{x}) = 0\}$  תתייריעה של  $\mathbb{R}^m$ , ייתכן ש- $\vec{F}$  איננה מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה. המשפט הינו תנאי מספיק שאינו הכרחי.

**דוגמאות.** • קבוצת הפתרונות של

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$$

מתקיים  $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n+1})$  ולכן לכל  $\vec{x} \neq \vec{0}$  הדרגה היא 1.  $\vec{0}$  לא ביריעה, לכן זאת יריעה  $n$ -מימדית.

• **(תרגיל)** תהי  $B(x)$  תבנית ריבועית שאיננה מנונת.  $N = \{x \mid B(x) = 1\}$  תתייריעה.  $\{x \mid B(x) = 0\}$  איננה בהכרח תתייריעה, לדוגמה עבור  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$  מתקבל חרוט דו-צדדי שאינו תתייריעה.

•  $\text{SL}(n, \mathbb{R}) \subseteq M_{n \times n}(\mathbb{R})$  תתייריעה כאשר  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  מוזהה עם  $\mathbb{R}^{n^2}$  עם המבנה החלק הסנדרטי.

הוכחה. תהי

$$F: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \det A$$

ואז  $SL_n = \{A \mid FA = 1\}$ . תהינה  $(x_{i,j})_{i,j=1}^n$  קואורדינטות של  $M_{n \times n}$ . צריך להוכיח שלכל  $\vec{x} \in SL_n$  מתקיים  $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}\right) \neq \vec{0}$ , כלומר שקיים  $x_{i,j}$  כך ש- $\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}} \neq 0$ . נחשב.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}(A) &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (\det(A + t \cdot T_{i,j})) \\ &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (\det A \cdot \det(\mathbb{1} + tA^{-1}T_{i,j})) \\ &= \det A \cdot \frac{d}{dt} (\det(\mathbb{1} + tA^{-1}T_{i,j})) \\ &= \det A \cdot \text{tr}(A^{-1}T_{i,j}) \end{aligned}$$

כאשר  $(T_{i,j})_{k,l} = \delta_{k,i}\delta_{j,l}$  וכאשר  $\det(1 + \varepsilon B) = 1 + \varepsilon \text{tr} B + O(\varepsilon^2)$  נובע מפיתוח לפי תמורות. מתקיים  $A^{-1} = \left(\frac{M_{i,j}}{|A|}\right)_{i,j}$  מתקיים  $BT_{i,j}$  שווה למטריצה עם העמודה  $C_i(B)$  של  $B$  בעמודה  $i$ -ה, ואפסים בשאר המקומות. לכן

$$(A^{-1}T_{i,j})_{l,k} = \frac{M_{k,l}}{|A|}$$

ולכן קיבלנו

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}(A) = \det A \cdot \frac{M_{j,i}}{|A|} = M_{i,j}$$

■ הפיכה ולכן לא כל המינורים מתאפסים ונקבל כי  $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,j}}\right) \neq \vec{0}$ . לכן גם  $\dim SL(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$ .

• **תרגיל 19.**  $O(n) \leq M_{n \times n}$  תת יריעה.

•  $\mathbb{T}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  כאשר  $\mathbb{T}^n \cong (S^1)^n$  ו- $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$ , ניתן להצגה ע"י המשוואות  $x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2 - 1 = 0$  כאשר  $k \in [n]$ . עבור  $\mathbb{T}^2$ , ניתן לכתוב

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right)^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

• **תרגיל 20.**  $\nabla F \neq \vec{0}$  בנקודה  $x \in \mathbb{T}^2$ .

• **תרגיל 21.** ניקח  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  ונגדיר

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \varphi_1(0) + v_1 t \\ \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + v_2 t \end{cases}$$

תנועה חופשית של חלקיק ב- $\mathbb{T}^2$ . לאילו  $v_i$  המסלול הוא תתי-יריעה של  $\mathbb{T}^2$ ?

• **דוגמה 1.3.7.** תהי  $f: M \rightarrow N$  חלקה. אזי

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N$$

תתי-יריעה. **האלכסון** הוא  $\Delta \subseteq M \times M$  הגרף של  $\mathbb{1}_M$ . הכייון ההפוך איננו נכון. אם  $f$  תתי-יריעה, לא מובטח כי  $f$  חלקה.

• **הערה 1.3.8.** ברוב הדוגמאות, יריעות הן תתי-יריעות של  $\mathbb{R}^N$ .

• **משפט 1.3.9 (Whitney).** כל יריעה  $M^m$  ניתנת לשיכון כתי-יריעה חלקה ב- $\mathbb{R}^N$  עבור  $N$  מסוים.

• **הערה 1.3.10.** המקרה האופטימלי הכללי הוא  $N = 2m$ . ל- $2m - 1$  אין תמיד שיכון כתי-יריעה חלקה.  $\mathbb{RP}^2, K^2$  לא ניתנים לשיכון ב- $\mathbb{R}^3$ .

• **תרגיל 22.** תהי  $N \subseteq \mathbb{R}^m$  תתי-יריעה ויהי  $x \in N$ .  $f: N \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה ליד  $x$  אם ורק אם ניתן להרחיב את  $f$  לפונקציה  $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה, כאשר  $U$  סביבה של  $x$  ב- $\mathbb{R}^m$ .

## 1.4 נגזרות

• **הגדרה 1.4.1.** תהי  $M$  יריעה חלקה. **עקומה**  $\gamma$  היא העתקה  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  חלקה (ביחס למבנה החלק של  $M$  והסטנדרטי ב- $\mathbb{R}$ ).



**שאלה 1.4.2.** מהי  $\dot{\gamma}(x)$ , "וקטור המהירות של חלקיק הנע לאורך  $\gamma$ "? אם  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  עם שיכון נתון נוכל להסתכל על  $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$  ואז

$$\dot{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix} \text{ לגזור וקטור שמשיק ל-} M \text{ בנקודה } \gamma(x).$$

**הערה 1.4.3.** תהי  $M$  יריעה חלקה. היינו רוצים להגדיר מרחב משיק בנקודה  $p$  להיות אוסף וקטורי המהירות של מסילות העוברות דרך  $p$ . אין לנו דרך טובה להגדיר וקטורי מהירות באופן כללי, לכן צריך לעקוף זאת.

**הגדרה 1.4.4.** תהיינה  $M \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) : \gamma_i$  מסילות עבור  $i \in [2]$  וכאשר  $\gamma_i(0) = p$ . אזי  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  אם קיימת מפה  $(\mathcal{U}, \varphi)$  סביב  $p$  כך שלהצגות המקומיות  $\hat{\gamma}_i = \varphi \circ \gamma_i$  אותו וקטור מהירות  $\dot{\hat{\gamma}}_1(0) = \dot{\hat{\gamma}}_2(0)$ .

**הגדרה 1.4.5.** וקטור משיק בנקודה  $p$  הוא מחלקת שקילות של עקומות  $\gamma$  עם  $\gamma(0) = p$ .

**תרגיל 23.** הראו כי שקילות עקומות בהגדרה הנ"ל היא אכן יחס שקילות.

**הערה 1.4.6.** יחס השקילות  $\sim$  אינו תלוי בבחירת המפה סביב  $p$ . נסתכל על שתי מפות  $\varphi, \psi$  ואז

$$\underbrace{\varphi \circ \gamma_i}_{\hat{\gamma}_i} = (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \underbrace{\psi \circ \gamma_i}_{\hat{\hat{\gamma}}_i}$$

ומכלל השרשרת

$$\dot{\hat{\gamma}}_i(0) = D(\varphi \circ \psi^{-1})|_{\varphi(p)} \cdot \dot{\hat{\hat{\gamma}}}_i(0)$$

ואז

$$\dot{\hat{\hat{\gamma}}}_1 = \dot{\hat{\hat{\gamma}}}_2 \iff \dot{\hat{\gamma}}_1 = \dot{\hat{\gamma}}_2$$

**הגדרה 1.4.7.** נגדיר

$$T_p M = \{\text{smooth paths } \gamma(0) = p\} / \sim$$

המרחב המשיק בנקודה  $p \in M$ .

**הערה 1.4.8.**  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  מגדירה העתקה

$$D\varphi_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$[\gamma(t)] \rightarrow (\varphi \circ \gamma)(0)$$

**תרגיל 24.** 1.

$$D\varphi_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

חח"ע ועל.

2. בהינתן שתי מפות  $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$  סביב  $p$ , הדיאגרמה הבאה קומוטטיבית.

$$\begin{array}{ccc} & T_p M & \\ D\varphi_p \swarrow & & \searrow D\psi_p \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

3. ל- $T_p M$  יש מבנה לינארי טבעי, ע"י משיכת המבנה הלינארי מ- $\mathbb{R}^m$ . נגדיר

$$\begin{cases} \sigma + \eta := D\varphi_p^{-1}(D\varphi_p(\sigma) + D\varphi_p(\eta)) \\ c \cdot \sigma := D\varphi_p^{-1}(c \cdot D\varphi_p(\sigma)) \end{cases}$$

ונשאיר כתרגיל בדיקה כי הדבר אינו תלוי בבחירת המפה  $\varphi$ . (זה נובע מכך שהעתקות המעבר הינן לינאריות)

**דוגמה 1.4.9.**  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תהי פתוחה וניקח את המפה  $(\mathcal{U}, 1_{\mathcal{U}})$ . אז יש איזומורפיזם

$$D1_{\mathcal{U}}: T_p\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$[\gamma] \rightarrow \dot{\gamma}(0)$$

**דוגמה 1.4.10.** תהי יריעה  $M^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  מוגדרת על ידי  $\{\vec{x} \mid F(x_1, \dots, x_n) = 0\}$  עם  $\nabla F \neq \vec{0}$ . כעת  $T_p M \subseteq T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ . מהו

$T_p M$  אחרי הזיהוי של  $T_p \mathbb{R}^n$  עם  $\mathbb{R}^n$ ? ניקח  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  עם  $\gamma(0) = p$ . נכתוב  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ . כעת  $\gamma(t) \in M$  גורר

כי לכל  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  מתקיים  $F \circ \gamma(t) = 0$ . נחשב בעזרת כלל השרשרת.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (F \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{\gamma(0)} \dot{\gamma}_i(0) \\ &= \nabla F|_{\gamma(0)} \cdot \dot{\gamma}(0) \end{aligned}$$

לכן אם  $\sigma \in T_p M$  אז  $\sigma = D\varphi_p(\sigma) \perp \nabla F(p)$ . אם נוזהה את  $T_p M$  עם  $D\varphi_p(T_p M)$  אזי  $T_p M \subseteq (\nabla F)^\perp$ . אלו שני מרחבים וקטוריים מממד  $n-1$ , לכן יש שיוויון  $T_p M = (\nabla F)^\perp$ .

**דוגמה 1.4.11.**  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  מוגדר ע"י  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$  עם  $\nabla F = (2x_1, 2x_2)$ .  $T_p M + p$  הינו ישר המאונך ל- $\nabla F(p)$ , וזהו בדיוק ישר המשיק ל- $S^1$  בנקודה  $p$ .

**הגדרה 1.4.12.** **אגד משיק** (tangent bundle) הינו

$$TM = \coprod_{x \in M} (x, T_x M)$$

איבר ב- $TM$  הינו זוג  $(x, \sigma)$  כאשר  $x \in M$  ו- $\sigma \in T_x M$ .

**דוגמה 1.4.13.** אגד משיק למעגל הוא  $TM = S^1 \times \mathbb{R}$ , כלומר גליל.

**הערה 1.4.14.** על  $TM$  טופולוגיה הניתנת באופן מקומי על ידי אטלסים.

**הערה 1.4.15.** קיים זיהוי קנוני בין  $T_p M, T_p \mathcal{U}$  עבור  $\mathcal{U} \subseteq M$  פתוחה.

**דוגמה 1.4.16.** תהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה. אז

$$T\mathcal{U} = \{(x, \sigma) \mid x \in \mathcal{U} \wedge \sigma \in T_x \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^n\} \cong \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^n$$

או וקטורים עם נקודת התחלה ב- $\mathcal{U}$  וחץ שהוא וקטור ב- $\mathbb{R}^n$ .

**הגדרה 1.4.17.** עבור  $M$  יריעה כללית, יהי  $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  אטלס חלק על  $M$ . נגדיר

$$\bar{\mathcal{U}}_\alpha := \coprod_{x \in \mathcal{U}_\alpha} T_x \mathcal{U}_\alpha$$

וגם

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_\alpha: \bar{\mathcal{U}}_\alpha &\rightarrow T[\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)] \cong \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n} \\ (x, \sigma) &\rightarrow (\varphi_\alpha(x), D\varphi_\alpha(x)(\sigma)) \in T_{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \end{aligned}$$

**תרגיל 25.** 1.

$$TM = \bigcup_{\alpha \in I} \bar{\mathcal{U}}_\alpha$$

2.

$$\bar{\varphi}_\alpha: \bar{\mathcal{U}}_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \times \mathbb{R}^n$$

חח"ע ועל.

**הגדרה 1.4.18.** תת־קבוצה  $X \subseteq TM$  נקראת פתוחה אם ורק אם לכל  $\alpha$ ,  $\bar{\varphi}_\alpha(X \cap \bar{U}_\alpha)$  פתוחה ב- $\mathbb{R}^{2n}$ .

**תרגיל 26.** הראו בשלבים הבאים כי יש מבנה חלק על  $TM$ .

ההגדרה מגדירה טופולוגיה על  $TM$ .

**2.**  $TM$  יריעה טופולוגית.

**3.**  $\{(\bar{U}_\alpha, \bar{\varphi})\}_{\alpha \in I}$  אטלס מתואם.

**הערה 1.4.19.**  $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ , אבל  $TS^2 \not\cong S^2 \times \mathbb{R}^2$ .

**הערה 1.4.20.** בדרך כלל,  $TM \not\cong M \times \mathbb{R}^n$ . נראה מבנה לוקלי על האגד המשיק. קיימות ההעתקות

$$\begin{aligned}\varphi: \mathcal{U} &\rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \\ D\varphi: [\gamma] &\rightarrow \varphi \circ \gamma \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

ואז קיימת ההעתקה הבאה.

$$\begin{aligned}(\varphi, D\varphi): TU &\rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \\ (p, [\gamma]) &\rightarrow (\varphi(p), \varphi \circ \gamma)\end{aligned}$$

זאת העתקה השומרת על מבנה חלק, אך הינה תלויה בבחירת קואורדינטות  $(\mathcal{U}, \varphi)$ .

### 1.4.1 נגזרות כיווניות

היו  $M \rightarrow \mathbb{R}, p \in M$  חלקה, ו- $[\gamma] = v \in T_p M$ . נגדיר את **הנגזרת הכיוונית של  $f$  בכיוון  $v$**  להיות

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \gamma$$

**תרגיל 27.** אם  $[\gamma'] = [\gamma]$  אז

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 f \circ \gamma = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f \circ \gamma'$$

כלומר, הנגזרת מוגדרת היטב.

הנגזרת הכיוונית לינארית ב- $v$ , וב- $f$ . היא גם מקיימת את כלל לייבניץ.

$$\frac{\partial}{\partial v}(fg) = f \frac{\partial g}{\partial v} + g \frac{\partial f}{\partial v}$$

הוכיחו את תכונות אלו כתרגיל.

**הגדרה 1.4.21.** **דרייוציה** (derivation) זאת העתקה לינארית  $D: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  שמקיימת את כלל לייבניץ.

**הערה 1.4.22.** מתקבלת העתקה

$$\begin{aligned}T_p &\rightarrow \{\text{derivations}\} \\ v &\rightarrow \frac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

שהינה חח"ע ועל, ולמעשה איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

**הערה 1.4.23.** הגדרה שקולה למרחב משיק, היא ש- $T_p M$  הוא מרחב הדרייוציות בנקודה  $p$ .

### 1.4.2 דיפרנציאלים

תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  העתקה חלקה. אם  $[\gamma] = [\gamma']$  ניתן לבדוק כי מתקיים  $[f \circ \gamma] = [f \circ \gamma']$  (תרגיל). אז מתקבלת העתקה

$$\begin{aligned}D_p f: T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ [\gamma] &\rightarrow [f \circ \gamma]\end{aligned}$$

**הגדרה 1.4.24.** ההעתקה  $D_p f$  נקראת **דיפרנציאל**.

**סימון 1.4.25.** מסמנים את הדיפרנציאל בכמה אופנים.

$$D_p, \quad Df(p), \quad f_{*p}$$

**הערה 1.4.26.** הדיפרנציאל הוא פונקטור קווריאנטי.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ TM & \xrightarrow{Df} & TN \end{array}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} Df: TM &\rightarrow TN \\ (p, v) &\rightarrow (f(p), D_p f(v)) \end{aligned}$$

**טענה 1.4.27 (כלל השרשרת).** מתקיים  $f \circ \gamma = DF \cdot \dot{\gamma}$  ואז

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + Df \cdot \Delta x + O(\|\Delta x\|^2)$$

$F(x_0) + Df \cdot \Delta x$  נקראת **לינאריזציה של ההעתקה**  $F$ .

**תרגיל 28.** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה. נגדיר  $D\varphi: [\gamma] \rightarrow \varphi \circ \gamma \in \mathbb{R}^m$  ואז

$$D\varphi: T_p \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \quad D\psi: T_{f(p)} \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

ונקבל העתקה

$$\widehat{D_p f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

לינארית ולכן נתונה ע"י מטריצה. זאת מטריצת היעקובי של  $\hat{f}(\varphi(p))$ .

**תרגיל 29.** •  $Df: TM \rightarrow TN$  חלקה.

•  $f: M \rightarrow N$  דיפאומורפיזם. לכן  $D_x f$  הפיכה לכל  $x \in M$ .

• כלל השרשרת:

$$D_x(f \circ g) = D_{g(x)} f \circ D_x g$$

## 1.5 שיכונים

**הגדרה 1.5.1.**  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה נקראת **אימרסיה** אם לכל  $x \in M$ ,

$$D_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

חד-חד ערכית, או באופן שקול  $\ker D_x f = \{0\}$ .

**דוגמה 1.5.2.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  אימרסיה אם ורק אם  $D_x f \neq 0$  אם ורק אם  $\dot{f} \neq 0$ .  
באזור ההעתקות  $a, b$  הינן אימרסיות, אך  $c$  איננה.

**הגדרה 1.5.3.**  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה נקראת **סובמרסיה** אם לכל  $x \in M$ ,

$$D_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

על.

**דוגמה 1.5.4.**  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ההטלה הינה סובמרסיה.

**הגדרה 1.5.5.**  $f: M \rightarrow N$  נקראת **שיכון** אם אימרסיה וגם הומאומורפיזם.

**דוגמה 1.5.6.** ההעתקות באיור אינן שיכונים.

**הערה 1.5.7.** תהי  $f: M^n \rightarrow N^n$  אימריסה. אם  $\ker D_x f = \{0\}$  בכל  $x \in M$ , אז  $D_x f$  הפיכה ולכן  $f$  דיפאומורפיזם לוקאלי סביב  $x$  ו- $f(x)$ . זה משפט הפונקציה ההפוכה והוא אינו נכון גלובלית.

$$\begin{aligned} f: S^1 &\rightarrow S^1 \\ e^{i\theta} &\rightarrow e^{2i\theta} \end{aligned}$$

דיפאומורפיזם לוקאלי שאינו גלובלי.

**תרגיל 30 (קשה).** יהי  $f: M \rightarrow N$  שיכון. אז  $f(M)$  תת־יריעה של  $N$ .

**דוגמה 1.5.8 (מעגל המפלצת).** נסמן  $M = S^1 \times \{0\}$  ו- $N = S^1 \times \{1\}$ . תהי  $A \in S^1$  ונסמן  $A_1 = (A, 0)$ ,  $A_2 = (A, 1)$ . נגדיר

$$S_{\circ\circ}^1 = M \amalg N / \sim$$

כאשר  $(x, 0) \sim (x, 1)$  עבור  $x \neq A$ . קיבלנו מעגל עם "נקודה שמנה", ומרחב זה אינו האוסדורף. הטופולוגיה המושרית היא לפי:

- עבור  $x \in A_1, A_2$ , סביבה היא קשת פתוחה בטופולוגיה הרגילה.
- סביבה של  $A_2$  היא קשת סביב  $A_2$  שאינה מכילה את  $A_1$ . באותו אופן סביבה של  $A_1$ .
- $S_{\circ\circ}^1$  כן יריעה, אך לא ניתנת לשיכון ב- $\mathbb{R}^N$  אם כן,  $f(S_{\circ\circ}^1)$  תת־יריעה של  $\mathbb{R}^N$  ולכן האוסדורף, בסתירה).
- נניח מעתה כי כל היריעות הינן האוסדורף ובנות מנייה שנייה (כלומר, קיים בסיס בן־מניה).

**תרגיל 31.** יהי  $X$  טופולוגי האוסדורף ובן מנייה שנייה. מתקיימות התכונות הבאות.

1.  $X$  ספרבילי.
2. קומפקטיות שקולה לקומפקטיות סדרתית.
3. אם  $X$  הוא  $T_3$  אז  $X$  מטריזבילי.<sup>1</sup>
4.  $X$  לינדלוף.

**תרגיל 32.** יהיו  $X, Y$  טופולוגיים,  $X$  קומפקטי ו- $Y$  האוסדורף.

1. אם  $f: X \rightarrow Y$  חח"ע, על ורציפה, אז  $f^{-1}$  רציפה ולכן  $f$  הומאומורפיזם.
2.  $K \subseteq Y$  קומפקטית היא סגורה.

**משפט 1.5.9 (Whitney, גרסה חלשה).** תהי  $M$  יריעה קומפקטית. אזי קיים שיכון  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  עם  $N$  גדול מספיק.

**הערה 1.5.10.** הבנייה בהוכחת המשפט תיתן  $N$  גדול. נראה אחר־כך איך להקטין את  $N$  ל- $2 \dim(M) + 1$ .

**הערה 1.5.11.** משפט Whitney נכון גם עבור יריעות שאינן קומפקטיות.

**סימון 1.5.12.**

$$B^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$$

**למה 1.5.13.** קיימת העתקה חלקה  $\mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow S^n \hookrightarrow B^n(3) \rightarrow S^n$  שמקיימת את התכונות הבאות.

$$\text{Im}(f|_{B^\circ(2)}) = S^n \setminus \{p_+\}$$

2.  $f|_{B^\circ(2)}$  דיפאומורפיזם.

3.

$$f(B(3) \setminus B^\circ(2)) = p_+$$

הוכחה. מתקיים

$$S^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong B^\circ(2) \cup \{*\}$$

ולכן קיימת  $f$  הומאומורפיזם. השלימו את הפרטים ובדקו נגזרות ליד  $r = 2$  כך שהיא תהיה חלקה.

<sup>1</sup>בעצם אין צורך לדרוש כי  $X$   $T_2$ . מתקיים (יש צורך בבדיקה) כי אם  $X$  יריעה טופולוגית האוסדורף ובת מנייה שנייה, אז  $X$  נורמלית ולכן מטריזבילית.

הוכחה (משפט Whitney). תהי  $M$  יריעה קומפקטית מממד  $m$ . לכל  $p \in M$  נבחר  $(\mathcal{U}_p, \varphi_p)$  מפה. נניח כי  $\varphi_p(p) = 0$  וגם  $B(3) \subseteq \varphi_p(\mathcal{U}_p)$  ע"י תיקון של האטלס במידת הצורך. נקבל כי

$$\{\varphi_p^{-1}(B^\circ(2))\}$$

כיסוי פתוח של  $M$ .  
נבחר תת-כיסוי סופי

$$\{\varphi_{p_i}^{-1}(B^\circ(2))\}_{i=1}^d$$

ונסמן  $\mathcal{U}_i := \varphi_{p_i}^{-1}(B^\circ(2))$  ו- $\varphi_i := \varphi_{p_i}$ . נגדיר

$$g_i: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} f(\varphi_i(x)) & x \in \varphi_i^{-1}(B^\circ(2)) \\ p_+ & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר  $f$  ההעתקה מהלמה. אז  $g_i$  חלקה כי הרחבנו את  $f$  שהינה חלקה וקבועה בסביבת השפה, לפונקציה קבועה מחוץ לכדור. נגדיר  $g := (g_1, \dots, g_d): M \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)d}$  אז

•  $g$  חלקה כוקטור של פונקציות חלקות.

•  $g$  חח"ע: לכל  $x \neq y \in M$ , עבור  $i$  מסוים מתקיים  $x \in \varphi_i^{-1}(B^\circ(2))$  אם  $y \in \varphi_i^{-1}(B^\circ(2))$  אז  $g_i(x) \neq g_i(y)$  ולכן  $g(x) \neq g(y)$ . אחרת,  $g_i(y) = p_+$  וגם אז  $g_i(x) \neq g_i(y)$ .

•  $g: M \rightarrow g(M)$  חח"ע ועל, ו- $g(M)$  האוסדורף, לכן  $g^{-1}$  רציפה (לפי תרגיל). לכן  $g$  הומאומורפיזם.

•  $g$  אימרסיה: צריך להוכיח כי  $D_x g: T_x M \rightarrow T_{g(x)} \mathbb{R}^N$  חח"ע לכל  $x \in M$ . קיים  $i$  עבורו  $x \in \varphi_i^{-1}(B^\circ(2))$  אז  $g_i = f \circ \varphi_i(x)$  בסביבת  $x$  היא דיפאומורפיזם (לוקלי). לכן  $D_x g_i$  הפיכה ולכן חח"ע. לכן  $D_x g$  גם היא חח"ע.

■

$g$  אימפרסיה על התמונה

**הערה 1.5.14.** כדי שההרחבה  $g_i$  של  $f$  תהייה חלקה השתמשנו בכך ש- $M$  האוסדורף.

## 1.5.1 ערכים קריטיים ורגולריים

**הגדרה 1.5.15.** תהי  $f: M \rightarrow N$  חלקה.  $y \in N$  **ערך רגולרי של  $f$**  אם לכל  $x \in f^{-1}(y)$  ההעתקה

$$D_x f: T_x M \rightarrow T_y N$$

היא על. אם  $y \in N$  אינו רגולרי, הוא **ערך קריטי**.

**הגדרה 1.5.16.**  $x \in M$  **נקודה רגולרית** אם  $D_x f: T_x M \rightarrow T_y N$  על. אחרת  $x \in M$  **נקודה קריטית**.

**דוגמה 1.5.17.** ניקח הטלה  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  של שתי תתי-יריעות של  $\mathbb{R}^2$  כמתואר באיור

**הערה 1.5.18.** יתכן כי תמונת נקודה רגולרית היא ערך קריטי.

**הערה 1.5.19.** אם  $f^{-1}(y) = \emptyset$  אז  $y$  רגולרי.

**הערה 1.5.20.** קריטיות וסינגולריות הם מושגים שונים.

**דוגמה 1.5.21.** תהי  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . נקודה קריטית אם ורק אם  $D_x f = 0$ .

**משפט 1.5.22.** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה עם  $m \geq n$ . יהי  $y \in f(M) \subseteq N$  ערך רגולרי. אזי  $L := f^{-1}(y)$  תתי-יריעה חלקה מממד  $m - n$  (שאינה בהכרח קשירה). בנוסף, לכל  $x \in L$ ,

$$T_x L = \ker D_x f \subseteq T_x M$$

הוכחה. ההגדרה של תתי-יריעה הינה לוקלית, לכן די להראות כי  $L$  תתי-יריעה בסביבת נקודה  $x$ , שמקיימת את הדרישות. נבחר קואורדינטות מקומיות סביב  $x$  ו- $y$ .<sup>2</sup> נסמן  $(x^1, \dots, x^m)$  ו- $(y^1, \dots, y^n)$  בהתאמה. באופן מקומי ניתן להציג את  $f$  באופן הבא.

$$f(x^1, \dots, x^m) = \begin{pmatrix} f_1(x^1, \dots, x^m) \\ \vdots \\ f_n(x^1, \dots, x^m) \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup> ניתן להסתכל על קואורדינטות באופן אחר. קיים שריג פונקציות  $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_1, \dots, x_m: \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ . הדבר מגדיר קואורדינטות מקומיות  $x^i = x_i \circ \varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  שהינן תלויות במפה. ראו איור

כעת

$$\mathcal{U} \cap f^{-1}(y) = \left\{ (x^1, \dots, x^m) \mid \begin{cases} f_1(x^1, \dots, x^m) = y_1 \\ \vdots \\ f_n(x^1, \dots, x^m) = y_n \end{cases} \right\}$$

$D_x f$  על  $y$  (כי ערך רגולרי) לכן  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  המוגדרת ע"י מטריצת הנגזרות החלקיות היא על, ולכן  $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = n$ . ממשפט הפונקציה הסתומה,  $f^{-1}(y)$  תת־יריעה (לוקלית) ממימד  $m - n$ . נוכיח כי  $T_x L = \ker D_x f$ . תהי  $\gamma(t)$  עקומה ב־ $L$ . אז  $f(\gamma(t)) = y$  ואז

$$[\gamma] \xrightarrow{Df} [\text{const}] = 0 \in T_y N$$

ונקבל כי  $T_x L \subseteq \ker D_x f$ . משיקולי מימד, יש שוויון.

**הערה 1.5.23.** הדרישה כי  $y$  ערך רגולרי הינה מספיקה אך לא הכרחית. ייתכן ערך קריטי עם תמונה הפוכה שהיא תת־יריעה, ואפילו ממימד נכון.

**דוגמה 1.5.24.** נסתכל על  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית גובה באיור

$$\bullet f^{-1}(y_1) = \emptyset \text{ לכן } y_1 \text{ רגולרית אך לא ב-} f(M).$$

$$\bullet f^{-1}(y_2) \cong S^1.$$

$$\bullet f^{-1}(y_3) = S^1 \amalg S^1.$$

$$\bullet f^{-1}(y_4) \cong S^1.$$

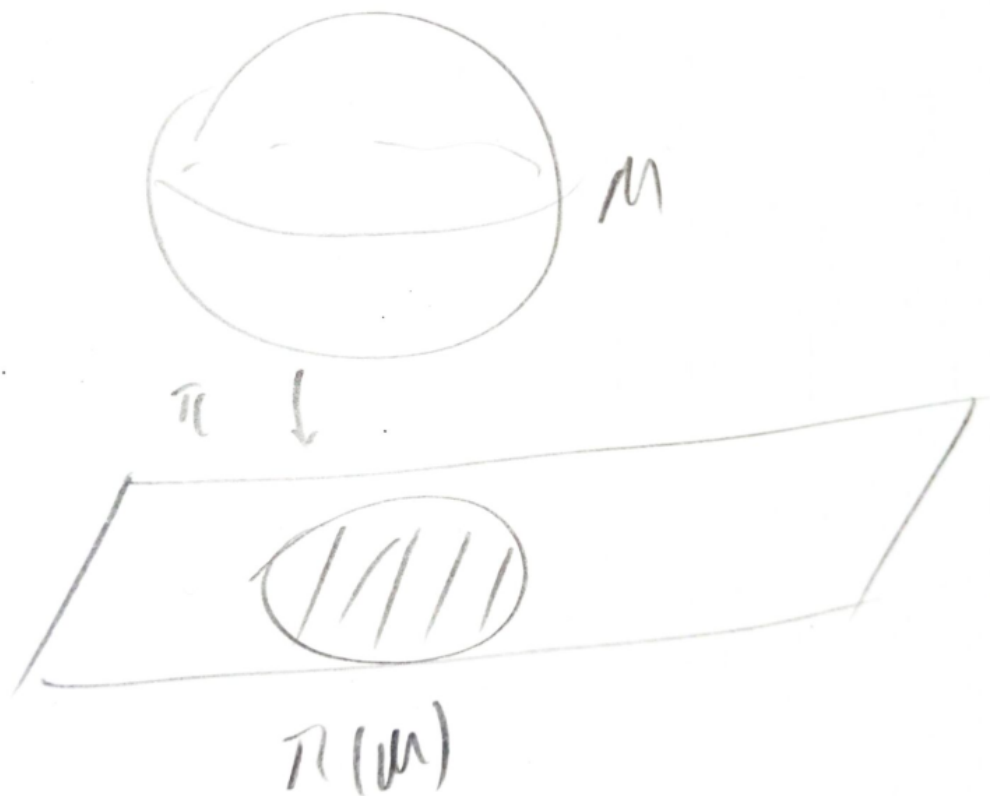
$$\bullet f^{-1}(c_1) = \{\text{pt}\} \text{ תת־יריעה אך המימד אינו 1.}$$

$$\bullet f^{-1}(c_2) = S^1 \amalg \{\text{pt}\} \text{ תת־יריעה עם מימד שאינו קבועה בין מחלקות קשירות.}$$

$$\bullet f^{-1}(c_3) = S^1 \amalg S^1 / \{\text{pt}\} \text{ לא תת־יריעה (זה זר עם שתי לולאות).}$$

**דוגמה 1.5.25.** נסתכל על ההטלה  $\pi$  של הספירה  $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  ל־ $\mathbb{R}^2$ . ראו איור 1.9.

הרצאה 4  
11 באוקטובר  
2018



איור 1.9: הטלת ספירה על המישור.



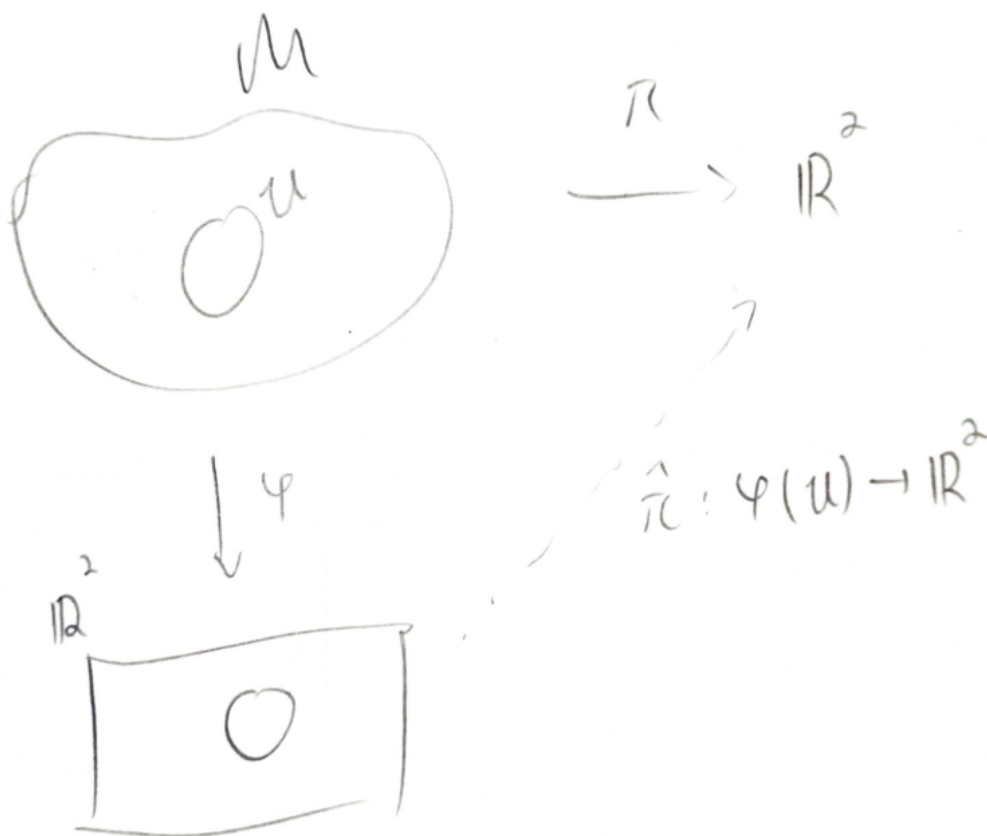
**חישוב I:** בקואורדינטות מקומיות ניקח

$$\mathcal{U}_1 = \{(x, y, z) \in S^1 \mid z > 0\}$$

עם

$$\begin{aligned} \varphi_1: \mathcal{U}_1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, y) \end{aligned}$$

ראו איור 1.10 נחשב את ההעתקה המקומית.



איור 1.10

$$\hat{\pi}_1: (x, y) \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \xrightarrow{\pi} (x, y)$$

לכן  $\hat{\pi}_1 = \mathbb{1}_{\varphi_1(\mathcal{U}_1)}$  ועל כן  $D\hat{\pi}_1 = I_2$ . נקבל כי  $\mathcal{U}_1$  נקודה רגולרית. ניקח מפה נוספת

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2 &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid x < 0\} \\ \varphi_2(x, y, z) &= (y, z) \end{aligned}$$

ואז

$$\hat{\pi}_2: (y, z) \xrightarrow{\varphi_2^{-1}} (-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z) \xrightarrow{\pi} (-\sqrt{1-y^2-z^2}, y)$$

ולכן

$$D\hat{\pi}_2(x, z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{\dots}} & \frac{z}{\sqrt{\dots}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (y, z)$$

לא על אם ורק אם  $z = 0$ . לכן הנקודות על קו המשווה חיתוך עם  $\mathcal{U}_2$  הן נקודות קריטיות. עם נכסה את  $S^2$  במפות קואורדינטות, חישוב דומה יראה שהנקודות הקריטיות הן קו המשווה. לכן הערכים הקריטיים יהיו מעגל היחידה.

חשוב II: נרחיב את  $\pi$  להעתקה

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, y)\end{aligned}$$

ולכן  $\pi$  לינארית ונסמן  $\pi(x) = Ax$  או  $D\pi = A$  ולכן  $\text{Im } D\pi(x) = \mathbb{R}^2$  או  $\ker D\pi(x) = \text{span}(0)$ .  
<sup>3</sup> או  $\pi_M = \pi|_M: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  נסמן  $T_p M \subseteq T_p \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$  תת-מרחב דו מימדי.

$$\begin{aligned}D\pi|_{T_p M} &= D\pi_M(p): T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\rightarrow A \cdot u\end{aligned}$$

$D\pi_M(p)$  לינארית ממרחב ממימד 2 למרחב ממימד 2 ולכן אינה על אם ורק אם  $\ker D\pi_M(p) \neq \{0\}$ . נסמן  $v = (0, 0, 1) = \ker D\pi$  מתקיים

$$\ker D\pi_M(p) = \ker D\pi(p)|_{T_p M} = \ker D\pi(p) \cap T_p M = \{\lambda v\} \cap T_p M$$

לא טריוויאלי אם ורק אם  $v \in T_p M$  או ורק אם  $v$  וקטור משיק ל- $M$  ב- $p$ .

**משפט 1.5.26 (Sard).** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה. או  $\{y \in N \mid y \text{ is a critical value}\}$  קבוצה בעלת מידה אפס. (ביחס למידת לבג)

## דוגמה 1.5.27

$$\{M \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \mid \text{rank}(M) < \min\{m, n\}\}$$

קבוצה בעלת מידה אפס.

**טענה 1.5.28.** תהי  $C \in \mathbb{R}^m$  זניחה ותהי  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  חלקה. או  $f(C)$  זניחה.

**מסקנה 1.5.29.** תהי  $M$  יריעה עם מפות  $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$  כאשר  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ . נקבל העתקה

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \psi(\mathcal{V})$$

חלקה. לכן  $\varphi(C \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V})$  זניחה ב- $\mathbb{R}^m$  אם ורק אם  $\psi(C \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V})$  זניחה ב- $\mathbb{R}^m$ .

**הגדרה 1.5.30.**  $C \subset M$  זניחה אם לכל מפה  $(\mathcal{U}, \varphi)$  מהאטלס החלק  $\varphi(C \cap \mathcal{U})$  זניחה ב- $\mathbb{R}^m$ .

**דוגמה 1.5.31.** אם  $N^n \subseteq M^m$  ת-יריעה אז  $N$  זניחה ב- $M$ .

**דוגמה 1.5.32.** בהטלת  $S^2$  על  $\mathbb{R}^2$  ראינו כי הערכים הקריטיים הם מעגל היחידה, וזאת קבוצה זניחה.

**הערה 1.5.33.** משפט Sard מתייחס לערכים קריטיים. הטענה איננה נכונה עבור נקודות קריטיות. עבור ההעתקה

$$\begin{aligned}f: M &\rightarrow N \\ p &\rightarrow x_0 \in N\end{aligned}$$

כל נקודה ב- $M$  היא קריטית, ולכן לא זניחה.

**הערה 1.5.34.** ייתכן כי  $\text{Im}(f)$  מכילה רק ערכים קריטיים. במקרה זה  $\text{Im}(f)$  זניחה ב- $N$ .

**תרגיל 33.** בנו העתקה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  כל שקבוצת הערכים הקריטיים של  $f$  היא  $\mathbb{Q}$ .

**מסקנה 1.5.35.**  $I$  אם  $f: M \rightarrow N$  ו- $\dim M < \dim N$ , הערכים הקריטיים של  $f$  ב- $N$  זאת  $\text{Im}(f)$  או בעלת מידה אפס.

**דוגמה 1.5.36.** אין העתקה חלקה מ- $I^2$  אל  $I$  עם  $\text{Im}(f) = I^2$ .

**2.** קבוצת הערכים הרגולריים צפופה ב- $N$ . אם  $\mathcal{U} \subseteq \text{Im}(f)$  פתוחה, קיים ערך רגולרי ב- $\text{Im}(f)$ .

**דוגמה 1.5.37.** אם  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  לא קבועה אז  $(f(x), f(y)) \subseteq \text{Im}(f)$ , ויש ערך רגולרי ב- $\text{Im}(f)$ .

<sup>3</sup>מתקיים

$$\begin{aligned}D\pi_M: TM &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (p, u) &\rightarrow A \cdot u\end{aligned}$$

כאשר  $u \in T_p M$

**הוכחה (Sard).** נוכיח עבור המקרה  $\dim M \leq \dim N$ . המקרה הכללי בספר של Milnor. נסמן ב- $C \subseteq M$  קבוצת הנקודות הקריטיות של  $f$ . קבוצת הערכים הקריטיים היא  $f(C) \subseteq N$ . נכסה את  $M$  על ידי מספר בן-מניה של מפות  $(\mathcal{V}_i, \psi_i)$ . את  $f^{-1}(\mathcal{V}_i)$  נכסה על ידי מספר בן-מניה של מפות  $(\mathcal{U}_{i,j}, \varphi_{i,j})$  כך ש- $f(\mathcal{U}_{i,j}) \subseteq \mathcal{V}_i$ . מתקיים

$$f(C) = \bigcup_{i,j} f(C \cap \mathcal{U}_{i,j})$$

ומספיק להראות כי  $f(C \cap \mathcal{U}_{i,j})$  זניחות. מספיק להוכיח עבור הצגות מקומיות של  $f$ . כלומר, מספיק להוכיח את המשפט עבור  $f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{U}$  הינה איחוד בן-מניה של כדורים, לכן ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות כי  $\mathcal{U}$  כדור עם סגור בתחום הגדרתה של  $f$ .

**א. המקרה  $m = n$ :** נבחר  $\varepsilon > 0$ . אז  $|Df|: \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ולכן רציפה במ"ש. לכן קיים  $\delta > 0$  כך שאם  $\|x - y\| < \sqrt{m}\delta$  אז  $\|Df(x) - Df(y)\| < \varepsilon$ . יהי  $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}_i$  כיסוי על ידי קוביות על צלע  $\delta$  עם  $\sum \text{Vol} \mathcal{U}_i < 2^m \text{Vol}(\mathcal{U})$ . אם  $C \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$ , קיימת  $x \in \mathcal{U}_i$  קריטית, כלומר  $|Df(x)| = 0$ . אז  $|Df(y)| < \varepsilon$  לכל  $y \in \mathcal{U}_i$ . יהי  $I = \{i \mid \mathcal{U}_i \cap C \neq \emptyset\}$ . אז  $\bigcup_{i \in I} f(\mathcal{U}_i)$  כיסוי של  $f(C)$  כעת

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \text{Vol}(f(\mathcal{U}_i)) &= \sum_I \int_{\mathcal{U}_i} |Df(x)| dx_1, \dots, dx_m \\ &\leq \varepsilon \sum_{i \in I} \text{Vol}(\mathcal{U}_i) \leq \varepsilon \text{Vol}(\mathcal{U}) \end{aligned}$$

ולכן  $f(C)$  זניחה.

**ב. המקרה  $m < n$ :** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  ונרחיב את  $f$  ל- $F: M^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow N^n$  ע"י  $F(x, s) = f(x)$ . אז קבוצת הערכים הקריטיים של  $f$  היא  $\text{Im}(f)$  גם  $\text{Im}(F)$ . לכן תמונת  $F$  היא קבוצת הערכים הקריטיים של  $f$ . קבוצה זאת זניחה לפי המקרה הקודם. ■

ראינו כי אם  $M^m$  יריעה קומפקטית, קיים שיכון  $M \xrightarrow{i} \mathbb{R}^N$  עבור  $N$  גדול. ננסה להקטין את  $N$  בעזרת משפט Sard. נרצה להטיל את  $i(M)$  בכיוון  $v$  על  $v^\perp$  כך ש- $\pi_v \circ i: M \rightarrow v^\perp$  יהיה שיכון.  $M$  קומפקטית ולכן מספיק לבדוק כי זאת אימריסיה חד-חד ערכית.

**אימריסיה:** מתקיים כי

$$D(\pi_v \circ i) = D\pi_v \circ Di$$

לכן

$$\ker(D\pi_v \circ Di) = \{u \mid Di(u) \in \ker D\pi_v\}$$

$Di$  חד-חד ערכית (כי  $i$  אימריסיה) לכן  $\ker D\pi_v \circ Di = \{0\}$  אם ורק אם  $\ker D\pi_v = \{0\}$ . מתקיים  $\ker D\pi_v = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . אז  $\pi_v \circ i$  אימריסיה אם ורק אם לכל  $x \in M$ , החיתוך  $\{\lambda\} \cap I_m Di(x)$  טריוויאלי. זה שקול לכך שלכל  $x \in M$ ,  $v \notin \text{Im} Di(x)$  (אם  $v \in \text{Im} Di(x)$  אז  $v$  אינו משיק ל- $i(M)$  באף נקודה). נגדיר העתקה

$$g: TM \setminus M \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}$$

גיאומטרית,  $\mathbb{R}P^{N-1}$  קבוצת הכיוונים האפשריים להטלה ב- $\mathbb{R}^N$ . נגדיר

$$(x, u) \mapsto [Di(x)(u)] = \{\lambda Di(x)(u) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}P^{N-1}$$

אם  $\dim TM = 2m < N - 1 = \dim \mathbb{R}P^{N-1}$ , לפי מסקנה ממשפט Sard,  $\text{Im} g$  זניחה.

**חד-חד ערכיות:** נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} P: M \times M \setminus \Delta M &\rightarrow \mathbb{R}P^{N-1} \\ (x, y) &\rightarrow \{\lambda(i(x) - i(y)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

ואז כיוון בתמונה הוא בדיוק כיוון שאסור להטלה, כי זהו ישר המקביל לישר דרך  $i(x), i(y)$ . זה תנאי לזה ש- $\pi_v \circ i(x) = \pi_v \circ i(y)$ . כלומר  $\pi_v \circ i$  לא חד-חד ערכית. אם  $2m = \dim M \times M \setminus \Delta < \dim \mathbb{R}P^{N-1} = N - 1$  נקבל כי  $\text{Im} P$  זניחה. אז אם  $\{\lambda v\} \notin \text{Im} P \cup \text{Im} g$ , נקבל שיכון  $\pi_v \circ i: M \rightarrow v^\perp \cong \mathbb{R}^{N-1}$ . זה מתקיים כמעט לכל  $v$  כי  $\text{Im} P \cup \text{Im} g$  זניחה. התהליך נעצר כאשר  $2m = N - 1$ , כלומר  $N = 2m + 1$ .

**הערה 1.5.38.** המקרה האופטימלי הוא  $N = 2m$ . עם חישוב קצת יותר זהיר מקבלים ש- $\pi_v \circ i$  אימריסיה כמעט לכל  $v$  גם כאשר  $N = 2m + 1$ , כלומר ניתן לבנות אימריסיה  $M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ . אין דרך להבטיח חד-חד ערכיות באותו האופן. ניתן להיפטר מנקודות חיתוך על ידי דיפורמציות טופולוגיות.

## 1.6 טרנספורסליות

**הגדרה 1.6.1.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$  עם  $\dim V < \infty$ . תתי־מרחבים  $W_1, W_2 \leq V$  נקראים **טרנספורסליים** אם  $W_1 + W_2 = V$ .  
**הערה 1.6.2.**  $W_1, W_2$  טרנספורסליים אם ורק אם  $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$  או ורק אם  $\text{codim} (W_1 \cap W_2) = \text{codim} W_1 + \text{codim} W_2$ .

**הגדרה 1.6.3.**  $M_1, M_2 \subseteq N$  תתי יריעות יקראו **טרנספורסליות** ונסמן  $M_1 \pitchfork M_2$  אם לכל  $x \in M_1 \cap M_2$  מתקיים  $T_x M_1 + T_x M_2 = T_x N$ .

**דוגמאות.** 1. אם  $\dim M_1 + \dim M_2 < \dim N$  אז  $M_1 \pitchfork M_2$  אם ורק אם  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ .

2. אם  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  שני מעגלים נחתכים, סכום הישרים המשיקים בנקודות החיתוך הוא כל  $\mathbb{R}^2$ .

3. אם  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  שני מעגלים משיקים, בנקודת ההשקה סכום המרחבים המשיקים הוא  $\mathbb{R}$ , ולכן המעגלים אינם טרנספורסליים.

**הגדרה 1.6.4.** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  חלקה ותהי  $L^1 \subseteq N^n$  תתי־יריעה. נאמר כי  $f$  **טרנספורסלית ל־ $L$**  ונסמן  $L \pitchfork f$  אם לכל  $p \in M$  עבורה  $f(p) \in L$  מתקיים  $\text{Im } Df(p) \pitchfork T_{f(p)} L$ .

**הערה 1.6.5.** אם  $f \pitchfork L$ , שייך  $f$  אם ורק אם  $\text{Im } f \pitchfork L$ .

ראינו כי עבור  $f: M \rightarrow N$  חלקה ו־ $y \in N$  ערך רגולרי בתמונה,  $f^{-1}(y)$  תתי־יריעה של  $M$ . אנו רוצים להכליל זאת.

**משפט 1.6.6.** תהי  $f: M \rightarrow N$  חלקה ו־ $L$  תתי־יריעה כך ש־ $L \pitchfork f$  וגם  $f^{-1}(L) \neq \emptyset$ . אזי  $f^{-1}(L)$  תתי־יריעה של  $M$  ומתקיים

$$\text{codim}_M (f^{-1}(L)) = \text{codim}_N (L)$$

**תרגיל 34.** הוכיחו את המשפט.

## 1.7 יריעות עם שפה

**הגדרה 1.7.1.** תהי  $\hat{M}^m$  יריעה ותהי  $g: \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה עם 0 ערך רגולרי. אז  $\{g = 0\} \subset \hat{M}$  תתי־יריעה ממימד  $m - 1$ . קבוצת הנקודות  $\{x \mid g(x) \leq 0\} \subseteq \hat{M}$  נקראת **יריעה עם שפה**. **השפה של  $M$**  היא

$$\partial M := \{x \mid g(x) = 0\}$$

**דוגמה 1.7.2.** ניקח  $\hat{M} = \mathbb{R}^n$  ו־ $g = \sum x_i^2 - 1$ . אז 0 ערך רגולרי ומתקיים  $\{g \leq 0\} = \overline{D^n}$  כדור היחידה הסגור. מתקיים  $\partial \overline{D^n} = S^{n-1}$ .

**דוגמה 1.7.3.** אינטרוול סגור, או אינטרוול חצי־פתוח חצי־סגור הם יריעות עם שפה.

**הערה 1.7.4.** קיבלנו מרחב שבו סביבת כל נקודה  $x$  הומאומורפית לקבוצה פתוחה ב־ $\mathbb{R}^n$  או לקבוצה פתוחה ב־ $\mathbb{R}_+^n := \{\vec{x} \mid x_n \geq 0\}$ . ניתן להגדיר דרך סביבות אלה יריעה עם שפה בדומה להגדרת יריעה.

**הגדרה 1.7.5.** תהינה  $M$  יריעה עם שפה ו־ $N$  יריעה.  $f: M \rightarrow N$  נקראת **חלקה** אם ניתן להרחיב את  $f$  ל־ $\hat{M} \rightarrow N$  חלקה.

**הגדרה 1.7.6.**  $f: M \rightarrow N$  כאשר  $M, N$  יריעות עם שפה נקראת **חלקה** אם  $f: M \rightarrow \hat{N}$  חלקה.

**תרגיל 35 (קשה).** תהי  $f: M^m \rightarrow N^n$  כאשר  $\partial M \neq \emptyset$ . יהי  $y \in N$  ערך רגולרי של  $f$  ושל  $f|_{\partial M}$ . אז  $V = f^{-1}(y)$  תתי־יריעה עם שפה של  $M$  ומתקיים  $\dim V = m - n$  וגם  $\partial V = V \cap \partial M$ .

**הגדרה 1.7.7.** יריעה  $M$  קומפקטית ללא שפה נקראת **סגורה**.

**הערה 1.7.8.** תהי  $M$  יריעה עם שפה. אז  $\partial M$  יריעה בלי שפה. כלומר  $\partial \partial M = \emptyset$ .

**הגדרה 1.7.9.**  $M$  נקראת **יריעה עם פינות** אם לכל  $x \in M$  קיימת מפה  $(U, \varphi)$  עם

$$\varphi: \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i: x_i \geq 0\}$$

והאטלס מתואם.

**דוגמה 1.7.10.** קובייה  $I^n$  היא יריעה עם פינות.

**דוגמה 1.7.11.** גופים פלטוניים הם יריעות עם פינות.

**הערה 1.7.12.** יריעה טופולוגית עם פינות היא בדיוק יריעה טופולוגית עם שפה. אבל, בקטגוריה של יריעות חלקות, יריעה עם פינות איננה בהכרח יריעה עם שפה, אלא רק להפך.

## 1.8 הומוטופיה

## 1.9 הגדרות

**שאלה 1.9.1.** תהיינה  $f, g: M \rightarrow N$  העתקות בין יריעות חלקות. מתי קיימת דפורמציה מ $^{-}f$  ל $^{-}g$ ?

**הגדרה 1.9.2.**  $f$  הומוטופית ל $^{-}g$  אם קיימת העתקה  $\Phi: M \times [0, 1] \rightarrow N$  חלקה המקיימת

$$\Phi(x, 0) = f(x)$$

$$\Phi(x, 1) = g(x)$$

**תרגיל 36.** הראו כי הומוטופיה בין העתקות היא יחס שקילות.

**דוגמה 1.9.3.** כל  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  הומוטופית ל $^{-}0$   $g(x) \equiv 0$ . נגדיר  $\Phi(x, t) = t \cdot f(x)$ . ראינו כי הומוטופיה הינה יחס שקילות, לכן כל שתי העתקות כאלו הומוטופיות.

**דוגמה 1.9.4.** תהיינה  $M = N = S^n$  עם ההעתקות

$$\varphi: S^n \rightarrow S^n$$

$$x \rightarrow x$$

ר

$$\psi: S^n \rightarrow S^n$$

$$x \rightarrow -x$$

אז  $\varphi, \psi$  עבור  $n$  זוגי, ההעתקות אינן הומוטופיות (נראה בהמשך).

## 1.9.5 הגדרה

$$v: M \rightarrow TM$$

$$x \rightarrow (x, v_x)$$

(כאשר כל  $v_x \in T_x M$ ) נקרא **שדה וקטורי**. הוא יקרא **חלק** אם הוא חלק כהעתקה  $M \rightarrow TM$ .

**דוגמה 1.9.6.** באינפי, הגדרנו שדה וקטורי להיות העתקה  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . בהגדרה שלנו

$$v: \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$$

$$x \rightarrow (x, v_x \in T_x \mathbb{R}^n)$$

כאשר  $T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ . ניתן לתאר את  $v$  בעזרת העתקה  $x \rightarrow v_x \in \mathbb{R}^n$ .

תהיינה  $M$  יריעה, ו $^{-}(\mathcal{U}, \varphi)$  מפה. אז

$$D\varphi: T\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n$$

$$v|_{\mathcal{U}} \rightarrow \hat{v}$$

הינו שדה וקטורי על  $\varphi(\mathcal{U})$ . ההעתקה היא

$$(x, v_x) \rightarrow (\varphi(x), D\varphi_x \cdot v_x)$$

ו $^{-}v$  חלק אם ורק אם כל הצגה  $\hat{v}$  חלקה כפונקציה  $\varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**הגדרה 1.9.7.**  $v: M \rightarrow TM$  לא מנוון אם  $v_x \neq 0$  לכל  $x$ .

**טענה 1.9.8.** נניח כי על  $S^n$  קיים שדה וקטורי לא מנוון. אז  $\varphi, \psi$  מדוגמה 1.9.4 הומוטופיות.

הוכחה. נבחר  $v$  לא־מנוון ונניח בה"כ כי  $\|v_x\| = 1 \forall x \in S^n$ . נגדיר

$$\Phi: S^n \times [0, \pi] \rightarrow S^n$$

$$(x, \theta) \rightarrow x \cos \theta + v_x \sin \theta$$

נסתכל על  $\text{Span}(x, v_x) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  כמתואר באיור מתקיים

$$\langle \Phi(x, \theta), \Phi(x, \theta) \rangle = \|x\|^2 \cos^2 \theta + 2 \langle x, v_x \rangle \cos \theta \sin \theta + \|v_x\|^2 \sin^2 \theta = 1$$

וגם  $\Phi(x, 0) = x = \varphi(x)$  ו $^{-}\Phi(x, \pi) = -x = \psi(x)$ , לכן קיבלנו הומוטופיה כנדרש. ■

**משפט 1.9.9.** עבור  $n$  זוגי,  $\varphi$  איננה הומוטופית ל- $\psi$ .

הוכחה. בעתיד.

**מסקנה 1.9.10.** על  $S^{2k}$  לא קיים שדה וקטורי לא מנוון. (אי־אפשר לסרק את הקפוד)

**מסקנה 1.9.11.**

$$S^{2k} \times \mathbb{R}^{2k} \not\cong TS^{2k}$$

כי עבור  $S^{2k} \times \mathbb{R}^{2k}$  קיים שדה וקטורי לא מנוון.

**דוגמה 1.9.12.** לכל  $n$  אי־זוגי מתקיים  $S^{2m+1} \subseteq \mathbb{R}^{2m+2} = \mathbb{C}^{m+1}$ . לכל  $x = (z_0, \dots, z_m) \in S^{2m+1}$  נגדיר  $v_x = (iz_0, \dots, iz_m) \perp x$  וקטור משיק. אז  $v: x \rightarrow ix$  שדה וקטורי לא מנוון ולכן  $\psi \cong \varphi$ .

**משפט 1.9.13.** תהייה

$$\begin{aligned} \varphi: S^n &\rightarrow S^n \\ x &\rightarrow x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi: S^n &\rightarrow S^n \\ x &\rightarrow x_0 \end{aligned}$$

אז  $\psi \not\cong \varphi$ .

הוכחה. בעתיד.

**מסקנה 1.9.14.** תהי  $f: \bar{D}^{n+1} \rightarrow S^n$  חלקה. אזי  $f|_{S^n} \neq \mathbb{1}_{S^n}$ . כלומר, אין ריטרקציה חלקה מהדיסק לספירה.

**הערה 1.9.15.** נובע מכך עם אנליזה כי אין ריטרקציה רציפה מהדיסק לספירה.

הוכחה. ניתן שתי הוכחות.

1. נניח בשלילה כי  $f|_{S^n} = \mathbb{1}_{S^n}$ . נגדיר הומוטופיה

$$\begin{aligned} \Phi: S^n \times I &\rightarrow S^n \\ (x, t) &\rightarrow f(t \cdot x) \end{aligned}$$

ונקבל  $\Phi(x, 0) = f(0) = \text{const}$  ו- $\Phi(x, 1) = f(x) = x$  בסתירה למשפט.

2. נניח בשלילה כי  $f|_{S^n} = \mathbb{1}_{S^n}$ . יהי  $y \in S^n$  ערך רגולרי של  $f$  (קיים לפי Sard).  $y$  ערך רגולרי גם של  $f|_{S^n} = \mathbb{1}_{S^n}$  (כל ערך הוא רגולרי של הזהות). מתרגיל,  $L := f^{-1}(y)$  תת־יריעה עם שפה ממימד 1 ב- $\bar{D}^{n+1}$ . לכן, כל רכיב קשירות הוא  $S^1$  או קטע. כיוון ש- $f^{-1}(y)$  קבוצה סגורה בקבוצה קומפקטית  $\bar{D}$ , היא קומפקטית בעצמה, ולכן כל הקטעים אם ישנם הינם סגורים. בנוסף,  $\partial L = f^{-1}(y) \cap \partial \bar{D}^{n+1} = \{y\}$  כי  $\partial L = f|_{\partial D}^{-1}(y)$ . זאת סתירה, כי ליריעה קומפקטית עם שפה יש מספר זוגי של נקודות שפה (קצוות של קטעים סגורים). ■

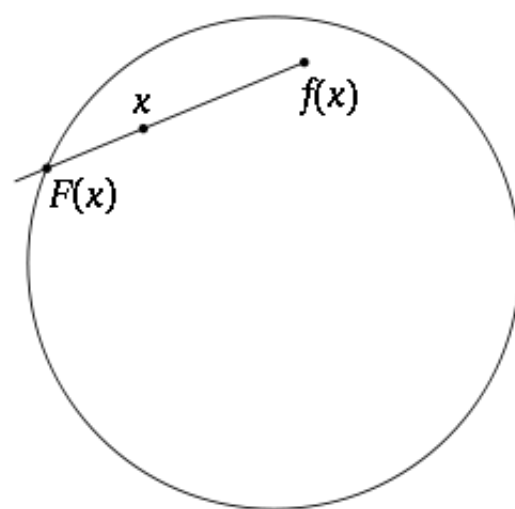
**מסקנה 1.9.16 (משפט Brouwer).** לכל העתקה (חלקה)  $f: \bar{D}^n \rightarrow \bar{D}^n$  יש נקודות שבת.

הוכחה. נניח כי לכל  $x$  מתקיים  $f(x) \neq x$ . נגדיר

$$\lambda_x = \{f(x) + t(x - f(x)) \mid t > 0\}$$

קרן שמתחילה ב- $f(x)$  ועוברת דרך  $x$ . ראו איור 1.11.  $\lambda_x$  חותכת את שפת הדיסק בנקודה אחת שנסמנה  $F(x)$ . אז  $F(x) = \lambda_x \cap \partial D^n$ . ואם  $x \in \partial D^n$  אז  $F(x) = x$ . זאת סתירה למסקנה שאין ריטרקציה מהדיסק לספירה. ■

**הערה 1.9.17.** המשפט נכון גם עבור העתקות רציפות.



איור 1.11: העתקה למשפט בראואר.



## פרק 2

# פיצול היחידה

**הגדרה 2.0.1.** יהי  $\{\mathcal{U}_\alpha\}$  כיסוי של מרחב טופולוגי  $X$ . הכיסוי נקרא **סופי מקומי** אם לכל  $x \in X$  קיימת סביבה  $W$  כך ש-

$$\#\{\alpha \mid W \cap \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset\}$$

סופי.

**הגדרה 2.0.2.** יהי  $\{\mathcal{V}_\beta\}$  כיסוי של מרחב טופולוגי  $X$ . כיסוי  $\{\mathcal{U}_\alpha\}$  **עידון** (refinement) של הכיסוי  $\{\mathcal{V}_\beta\}$  אם לכל  $\alpha$  קיים  $\beta$  עבורו  $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\beta$ .

**הגדרה 2.0.3.** מרחב  $X$  נקרא **פרקומפקטי** (paracompact) אם לכל כיסוי פתוח  $\{\mathcal{U}_\alpha\}$  קיים עידון פתוח סופי מקומי.

**משפט 2.0.4.** כל יריעה טופולוגית האוסדורף בת־מנייה שנייה היא פרקומפקטית.

**הגדרה 2.0.5.** תהי  $M$  יריעה חלקה ותהי  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה. **התומך** (support) של  $f$  הוא

$$\text{supp}(f) = \{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$$

**הגדרה 2.0.6.** יהי  $\{\mathcal{U}_\alpha\}$  כיסוי פתוח של יריעה  $M$ . **פיצול יחידה** (partition of unity) הוא אוסף  $\Lambda$  של פונקציות חלקות  $\lambda_\alpha: M \rightarrow [0, 1]$  המקיימות את התנאים הבאים.

$$\text{supp} \lambda_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$$

$$\{\text{supp} \lambda_\alpha\}_\alpha \text{ כיסוי סופי מקומי.}$$

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha(x) = 1 \text{ לכל } x \in M$$

**הערה 2.0.7.** פיצול היחידה תלוי בבחירת הכיסוי.

**משפט 2.0.8.** נניח כי  $M$  יריעה. אז לכל כיסוי פתוח קיים פיצול יחידה.

**הוכחה.** נציג רק את רעיון ההוכחה. ניקח כיסוי פתוח  $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ . נניח בה"כ כי  $\{\mathcal{U}_\alpha\}$  סופי־מקומי. <sup>2</sup> נבחן כיסוי "קצת יותר עדין"  $\{\mathcal{V}_\alpha\}$  כך ש- $\{\mathcal{V}_\alpha\}$  כיסוי פתוח וגם  $\overline{\mathcal{V}_\alpha} \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ . נגדיר העתקה חלקה המקיימת

$$\Psi_\alpha: M \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow \begin{cases} 1 & x \in \overline{\mathcal{V}_\alpha} \\ 0 & x \text{ is in a small neighbourhood of } M \setminus \mathcal{U}_\alpha \end{cases}$$

זה קירוב של פונקציית האינדיקטור. לכל  $x \in M$  קיים מספר סופי של  $\alpha$  כך ש- $\Psi_\alpha(x) \neq 0$ . לכן  $\Psi(x) := \sum_\alpha \Psi_\alpha(x)$  <sup>4</sup> נגדיר  $\lambda_\alpha(x) = \frac{\Psi_\alpha(x)}{\Psi(x)}$  אז

$$\text{supp}(\lambda_\alpha) = \text{supp}(\Psi_\alpha) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$$

וגם

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha(x) = \sum_\alpha \frac{\Psi_\alpha(x)}{\Psi(x)} = 1$$

$\{\text{supp}(\lambda_\alpha)\}_\alpha$  כיסוי סופי מקומי כי זה נכון ל- $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ .

<sup>1</sup> יש מספר סופי של מחוברים שונים מאפס, לכן הסכום סופי.

<sup>2</sup> אחרת נחליף בעידון סופי מקומי

<sup>3</sup> קיים, אך דורש הוכחה

<sup>4</sup> מוגדר היטב, חיובית כי  $V_\alpha$  כיסוי

## 2.1 מטריקה רימנית

שימוש של פיצול היחידה הוא הוכחה לכך שעל כל יריעה קיימת מטריקה רימנית.

**הגדרה 2.1.1.** *מכפלה פנימית* היא תבנית בילינארית סימטרית מוגדרת חיובית  $\rho: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  כאשר  $V$  מרחב קטורי.

**הגדרה 2.1.2.** תהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה. *מטריקה רימנית על  $\mathcal{U}$*  היא משפחה חלקה של מכפלות פנימיות  $\rho_x: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  שתלויות ב- $x \in \mathcal{U}$  באופן חלק.

**הערה 2.1.3.** נחשוב על ההעתקות כעל העתקות  $\rho_x: T_x \mathbb{R}^n \times T_x \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**הגדרה 2.1.4.** תהי  $M$  יריעה (חלקה). *מטריקה רימנית על  $M$*  היא בחירה חלקה של מכפלות פנימיות  $\rho_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , תלויה באופן חלק ב- $p$ .

**הערה 2.1.5.**  $\rho_p$  חלקה אם ורק אם בקואורדינטות. מתקבל מכפלה פנימית

$$\varphi_{\alpha,*} \rho_p: T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n \times T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

ואז

$$\hat{\rho}_\alpha = \varphi_{\alpha,*} \rho_p(v, w) = \rho_p(D\varphi_\alpha^{-1}(p)v, D\varphi_\alpha^{-1}(p)w)$$

**הערה 2.1.6.** הדבר שקול לכך שלכל שני שדות וקטוריים חלקים  $v, w: M \rightarrow TM$ ,  $\rho(v, w)$  פונקצייה חלקה  $M \rightarrow \mathbb{R}$  עם ההגדרה  $\rho(v, w)(p) = \rho_p(v_p, w_p)$ .

בעזרת מטריקה רימנית ניתן להגדיר אורך של וקטור משיק. אם  $v \in T_p M$  נגדיר  $\|v\|_p^2 = \rho_p(v, v)$  **האורך של  $v$  ביחס למטריקה הרימנית  $\rho$** . ניתן כך להגדיר גם אורך של מסילה  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  על ידי

$$\text{len}(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt$$

ניתן להגדיר זווית בין שני וקטורים משיקים  $u, v \in T_p M$  על ידי

$$\rho_p(u, v) = \|u\| \|v\| \cos \theta$$

**משפט 2.1.7.** על כל יריעה יש מטריקה רימנית.

הוכחה. ב- $\mathbb{R}^n$  ישנה מטריקה רימנית אוקלידית

$$\rho_0(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

לכל נקודה  $p \in \mathbb{R}^n$ . בהינתן מפה  $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$  נקבל

$$\rho_\alpha := \varphi_\alpha^* \rho_0(v, w) := \rho_0(D\varphi_\alpha v, D\varphi_\alpha w)$$

מטריקה רימנית על  $\mathcal{U}_\alpha$ . נבחר כיסוי  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$  על ידי מפות מתואמות. יהי  $\{\lambda_\alpha\}_\alpha$  פיצול היחידה המתאים ל- $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$  ונגדיר

$$\bar{\rho}_\alpha(p) = \begin{cases} \lambda_\alpha(p) \cdot \rho_\alpha(p) & p \in \mathcal{U}_\alpha \\ 0 & p \notin \mathcal{U}_\alpha \end{cases}$$

תבנית חלקה. אז  $\bar{\rho}(p) = \sum_\alpha \bar{\rho}_\alpha(p)$  תבנית חלקה (הסכום סופי מקומית), בילינארית סימטרית ומוגדרת חיובית כי  $\sum \lambda_\alpha(p) = 1$  ולכן קיים  $\alpha$  עבורו  $\lambda_\alpha(p) \neq 0$  והסכום אינו מנוון. ■

נתאר הוכחה נוספת.

**הוכחה.** ממשפט Whitney קיים שיכון  $i: M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ . נגדיר  $i^* \rho_0(p) := \rho_0(Di(p)(v), Di(p)(w))$  לכל  $v, w \in T_p M$ , מטריקה רימנית על  $M$ . ■

**תרגיל 37.** תהי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  תתי-יריעה. ההגדרה של פונקציות חלקות  $M \rightarrow \mathbb{R}^k$  בעזרת אטלס חלק שקולה להגדרה הבאה:  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  חלקה אם ורק אם ניתן למצוא סביבה  $\mathcal{U}$  של  $M$  ב- $\mathbb{R}^n$  והרחבה חלקה  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

**תרגיל 38.** בדקו כי שתי ההגדרות שראינו ליריעה עם שפה שקולות.<sup>5</sup>

## 2.2 יריעות מרוכבות

**הגדרה 2.2.1.** יריעה מרוכבת זו יריעה טופולוגית  $X$  עם אטלס מתואם של מפות  $\{\mathcal{U}_\alpha \varphi_\alpha\}_\alpha$  כאשר

$$\varphi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$$

הומאומורפיזם והתמונה פתוחה. כאן האטלס **מתואם** כאשר פונקציות המעבר  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  הולומורפיות.

**הערה 2.2.2.** על יריעות מרוכבות אין פיצול יחידה.

**דוגמה 2.2.3 (המישור ההיפרבולי).** נגדיר  $\mathbb{H} := \{(x, y) \mid y > 0\}$ . על המישור ההיפרבולי יש מטריקה היפרבולית:

$$\rho_{(x,y)}: T_{(x,y)}\mathbb{H} \times T_{(x,y)}\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \rightarrow (x_1, y_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

המטריצה המייצגת את  $\rho_{(x,y)}$  תלויה בצורה חלקה ב- $(x, y)$ . אם  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  עקומה, האורך שלה הוא

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_{\mathbb{H}} dt = \int_0^1 \frac{\|\dot{\gamma}\|_2}{\gamma(t)} dt$$

**דוגמה 2.2.4.** נסתכל על המטריקה האוקלידית ב- $\mathbb{R}^2$  ונסמנה  $\rho_{\text{eucl}}$ . תהי  $\varphi: (x, y) \rightarrow (r, \theta)$  הצגה הפולארית.  $\rho_{\text{eucl}}$  בקואורדינטות מקומיות

$$\text{לפי } \rho \text{ נתונה על ידי } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

**דוגמה 2.2.5.** תהי  $(M, \rho)$  יריעה רימנית ותהיינה  $x, y \in M$  אז  $T_x M, T_y M$  מרחבים שונים, אבל שניהם מזוהים עם  $\mathbb{R}^n$  על ידי  $Dp$ .

$$\hat{\rho}_x, \hat{\rho}_y: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

הצגות מקומיות של  $\rho_x, \rho_y$  בהתאמה.



# פרק 3

## תבניות פולינאריות

**הגדרה 3.0.1.** יהי  $V$  מ"ו סוף מימדי מעל  $\mathbb{R}$ . נסמן  $n := \dim V$ . **תבנית פולינארית אנטיסימטרית ממעלה  $k \geq 0$**  היא פונקציה  $\lambda: V^k \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת את התכונות הבאות.

1.  $\lambda$  לינארית בכל רכיב.

2. החלפת שני וקטורים משנה סימן.

$$\lambda(v_1, \dots, v_k) = \operatorname{sgn} \sigma \lambda(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

**סימון 3.0.2.**  $\Omega^d(V)$  מרחב התבניות הפולינאריות ממעלה  $d$ .

**דוגמה 3.0.3.**  $\Omega^0(V) \cong \mathbb{R} : d = 0$

$d = 1$ :  $\Omega^1(V) = V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ . אם  $V = \mathbb{R}^n$  דוגמה לתבנית היא  $dx_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$  אז  $V^* = \operatorname{span}\{dx_1, \dots, dx_n\}$  הבסיס הסטנדרטי של  $V^* = (\mathbb{R}^n)^*$ .

**מרחב וקטורים כלל:** יהי  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס של  $V$ . כל  $u \in V$  ניתן להציג באופן יחיד  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  ומתקיים  $dv_i(u) = \alpha_i$ . אז  $V^* = \operatorname{span}\{dv_1, \dots, dv_n\}$  **הבסיס הדואלי ל- $B$** . הוא מסומן  $B^*$ . מתקיים  $\dim V = \dim V^* = n$  לכן  $V \cong V^*$ .<sup>1</sup>

$d = 2$ :  $\Omega^2(V)$  הוא מרחב התבניות הבילינאריות האנטיסימטריות. תהי  $\lambda: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , בהינתן בסיס  $B$  של  $V$  מתקבל

$$\lambda(v, w) = [v]_B^T \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n} \\ -\lambda_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{1,n} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} [w]_B$$

כאשר המטריצה הינה אנטיסימטרית. מתקיים  $\dim \Omega^2(V) = \frac{n(n-1)}{2}$ .

נניח  $T: V \rightarrow W$  לינארית. אז

$$T^*: \Omega^k(W) \rightarrow \Omega^k(V)$$

$$\lambda(\cdot, \dots, \cdot) \rightarrow T^* \lambda$$

כאשר  $T^*$  המשיכה לאחור.

אם  $T$  איזו אז  $T^*$  איזו.

**דוגמה 3.0.4.**  $V = \mathbb{R}^n$  אז  $\det(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{vmatrix}$  לכן  $\det \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ .

**טענה 3.0.5.**  $\Omega^m(V) = \{0\}$  עבור  $n = \dim V < m$ .

הוכחה. ניקח בסיס  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ . נבחר  $\{u_i\}_{i \in [m]} \subseteq V$  ואז  $u_j = \sum_{i \in [n]} \alpha_{j,i} v_i$  תהי  $\lambda \in \Omega^m(V)$  ואז

$$\lambda(u_1, \dots, u_m) = \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_m)} \alpha_{1,\ell_1} \alpha_{2,\ell_2} \dots \alpha_{m,\ell_m} \lambda(v_{\ell_1}, \dots, v_{\ell_m})$$

כאשר סוכמים על בחירות של  $m$  אינדקסים. לכן יש  $m$  וקטורים בתוך כל  $\lambda$ , ולכן יש חזרות (כי  $n < m$ ) וכל איבר מתאפס. ■

<sup>1</sup> אבל אין איזומורפיזם קנוני, אלא אם ישנם מבנים נוספים כמו בחירת בסיס, או מכפלה פנימית

## 3.1 מכפלות חיצוניות

הגדרה 3.1.1. **מכפלה חיצונית של תבניות (exterior product, wedge product)**<sup>2</sup> היא העתקה

$$\begin{aligned}\Lambda: \Omega^k(V) \times \Omega^\ell(V) &\rightarrow \Omega^{k+\ell}(V) \\ (\alpha, \beta) &\rightarrow \alpha \wedge \beta\end{aligned}$$

המוגדרת באופן הבא.

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_\ell})$$

כאשר  $i_1 < \dots < i_\ell$  בחירת  $k$  אינדקסים מתוך  $[k+\ell]$  ו- $j_1 < \dots < j_\ell$  הם האינדקסים הנותרים, ו- $\sigma = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell) \in S_{k+\ell}$ .

**תרגיל 39.** מכפלה חיצונית הינה אסוציאטיבית, מקיימת פילוג מעל חיבור  $((\alpha\beta) \wedge \gamma = \alpha\beta \wedge \gamma = \alpha\beta \wedge \gamma)$ , והינה אנטיקומוטטיבית<sup>3</sup> כלומר

$$\alpha^{(k)} \wedge \beta^{(\ell)} = (-1)^{k \cdot \ell} \beta \wedge \alpha$$

**דוגמה 3.1.2.** תהייה  $\Omega^1(V) \subseteq \{\lambda_i\}_{i \in [k]}$  אז

$$(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\lambda_j(v_i))_{1 \leq i, j \leq k}$$

נוכיח זאת באינדוקציה על  $k$ .

**בסיס:**  $k = 1$  ברור.

**צעד:** נראה מעבר מ- $k-1$  ל- $k$ . נפתח דטרמיננטה לפי עמודה ראשונה.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \lambda_1(v_1) & \dots & \lambda_k(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(v_k) & \dots & \lambda_k(v_k) \end{vmatrix} &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \lambda_1(v_i) |M_{i,1}| \\ &\stackrel{\text{induction hypothesis}}{=} \sum_{i=1}^k \underbrace{\text{sgn}(i, 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, k)}_{(-1)^{i+1}} \underbrace{\lambda_1(v_i)}_{\alpha} \left[ \underbrace{(\lambda_2 \wedge \dots \wedge \lambda_k)}_{\beta}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k) \right] \\ &\stackrel{\text{definition}}{=} (\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k)(v_1, \dots, v_k)\end{aligned}$$

**משפט 3.1.3.** יהי  $V$  מ"ו עם בסיס של  $V^*$   $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  אזי  $\{\lambda_{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_k}\}_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}$  בסיס ל- $\Omega^k(V)$ .

**הוכחה.** ניקח  $\{v_1, \dots, v_n\}$  הבסיס הדואלי ל- $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  של  $V$ .<sup>4</sup> יהי  $\alpha \in \Omega^k(V)$ . נבחר  $k$  וקטורים  $u_i = \sum_{j \in [n]} a_{i,j} v_j$  אז

$$\begin{aligned}\alpha(u_1, \dots, u_k) &= \alpha\left(\sum a_{i,j} v_j, \dots, \sum a_{k,j} v_j\right) \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} a_{1,j_1} \dots a_{k,j_k} \alpha(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \\ &= \star\end{aligned}$$

ואם  $j_a = j_b$  אז  $\alpha$  מתאפס. ניתן אם כן להניח כי  $j_t$  שונים. לכן

$$\begin{aligned}\star &= \sum_{\substack{\sigma: (j_1, \dots, j_k) \leftarrow (i_1, \dots, i_k) \\ i_1, \dots, i_k}} a_{1, \sigma(i_1)} \dots a_{k, \sigma(i_k)} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \left( \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1, \sigma(i_1)} \dots a_{k, \sigma(i_k)} \right)\end{aligned}$$

נשים ♥ כי

$$\sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1, \sigma(i_1)} \dots a_{k, \sigma(i_k)} = \begin{vmatrix} a_{1,j_1} & \dots & a_{1,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,i_1} & \dots & a_{k,i_k} \end{vmatrix}$$



<sup>2</sup> לא אותה הדבר כמו outer product  
<sup>3</sup> anti-commutative / skew-commutative  
<sup>4</sup> כלומר,  $\lambda_i(j) = \delta_{i,j}$

עם שורות  $u_1, \dots, u_k$  ועמודות  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ . אז

$$\star = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \cdot (\lambda_{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_k})(u_1, \dots, u_k)$$

נסמן  $c := \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$  את המקדם ב- $\mathbb{R}$  וקיבלנו

$$\alpha = \sum_{i < \dots, i_k} c_{i_1, \dots, i_k} \cdot \lambda_{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_k}$$

כלומר

$$\alpha \in \text{span} \{ \lambda_{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_k} \}_{i_1 < \dots, i_k}$$

■

וקיבלנו כי הקבוצה פורשת. בדיקת אי-תלות נשארת כתרגיל.

**תרגיל 40.** בדקו אי-תלות של הוקטורים בבסיס. רמז:

$$(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k})(v_j, 1, \dots, v_{j,k}) = \delta_{(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_k)}$$

**מסקנה 3.1.4.**  $\dim \Omega^k(V) = \binom{\dim V}{k}$ .

**מסקנה 3.1.5.** אם  $\dim V = n$  אז  $\dim \Omega^n(V) = \binom{n}{n} = 1$  ואילו  $\dim \Omega^n(V) = \text{span} \{ \det \}$ .

**תרגיל 41.** תהי  $T: V \rightarrow W$  ותהי  $\alpha, \beta \in \Omega^*(W)$ . אז  $T^*(\alpha \wedge \beta) = T^*\alpha \wedge T^*\beta$ .

**דוגמה 3.1.6.** תהי  $T: V \rightarrow V$  הטלה ( $T^2 = T$ ). אז  $T^*\alpha \wedge T^*\beta = \alpha \wedge \beta$  מקיים את כל 3 התכונות של  $\wedge$ . התכונות אינן קובעות את פעולת  $\wedge$ .

**תרגיל 42.** נסתכל על  $\mathbb{R}^{2n}$  עם קואורדינטות  $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ . נגדיר  $\omega := dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$  ואז

$$\frac{\omega^n}{n!} = \frac{\omega \wedge \dots \wedge \omega}{n!} = dp_1 \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq_n$$

## 3.2 תבניות דיפרנציאליות

### 3.2.1 תיאור מקומי של תבניות דיפרנציאליות

**סימון 3.2.1.** תהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה. ראינו  $T_x \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^n$  לכל  $x \in \mathcal{U}$ . נסמן  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . נסמן ב- $x_i$  את ההטלה על הרכיב ה- $i$ .  $T_x \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^n$  הבסיס הסטנדרטי של  $T_x \mathcal{U}$  הוא  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ . הבסיס הדואלי של  $(T_x \mathcal{U})^* = (\mathbb{R}^n)^*$  הוא  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ . נקרא ל- $T_x^* \mathcal{U}$  **מרחב קו-משיק**. שדה וקטורי חלק.  $\frac{\partial}{\partial x^i}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**דוגמה 3.2.2.** תהי  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}$  עם  $p = \gamma(0)$  ועם  $\dot{\gamma}(0) \in T_{\gamma(0)} \mathcal{U}$ . אז

$$[\gamma] = \sum_{i \in [n]} \dot{\gamma}_i(0) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

ונקבל

$$dx_i(p)([\gamma]) = \dot{\gamma}_i(0)$$

**הגדרה 3.2.3.** **תבנית דיפרנציאלית differential form ממעלה  $k$  על  $\mathcal{U}$**  זו משפחה של תבניות ממעלה  $k$  על  $T_x \mathcal{U}$  כך שהמשפחה תלויה באופן חלק ב- $x$ .

נכתוב

$$\lambda(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

כאשר  $a_i$  פונקציה חלקה  $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ . לכל  $x \in \mathcal{U}$ , מתקיים

$$\lambda(x) \in \Omega^*(T_x \mathcal{U})$$

בהגדרה הכוונה שהמשפחה תלויה באופן חלק ב- $x$  היא לכך שהמקדמים בכתוב זה משתנים באופן חלק.

**סימון 3.2.4.**  $\Omega^k(\mathcal{U})$  אוסף התבניות ממעלה  $k$  על  $\mathcal{U}$ .

דוגמאות. 1.  $\Omega^0(\mathcal{U}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ .

2. תהי  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) = \Omega^0(\mathcal{U})$  נגדיר

$$df_{(p)} := \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot dx_i$$

ואז  $df \in \Omega^1(\mathcal{U})$ .

ניקח  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}$  ואז

$$[\gamma] = \dot{\gamma}(0) = \vec{v} \in \mathbb{R}^n = T_p\mathcal{U}$$

$$\text{נסמן } v = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(0) \end{pmatrix} \text{ ואז}$$

$$\begin{aligned} df_{(p)}(v) &= \sum \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot dx_i(p) \right] \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(0) \end{pmatrix} \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot dx_i(p) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(0) \end{pmatrix} \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \dot{\gamma}_i(0) \\ &\stackrel{\text{inf}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \gamma(t) =: \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

**הגדרה 3.2.5.** תהי  $M$  יריעה חלקה. **תבנית דיפרנציאלית ממעלה  $k$  על  $M$**  היא משפחה חלקה  $\alpha$  של תבניות  $\alpha_x \in \Omega^k(T_x M)$ .

בהינתן  $\alpha$  תבנית על  $M$

$$\hat{\alpha}: (v_1, \dots, v_k) \rightarrow \alpha_x(D\varphi^{-1}v_1, \dots, D\varphi^{-1}v_k) \in \mathbb{R}$$

**הצגה מקומית של  $\alpha$  לפי  $\varphi$ .** מתקיים  $(\varphi(\mathcal{U})) \cap \Omega^k(M)$  אם כל הצגה מקומית  $\hat{\alpha}$  חלקה על  $\varphi(\mathcal{U})$ .

**טענה 3.2.6.** •  $\Omega^k(M)$  מרחב לינארי מעל  $\mathbb{R}$ .

•  $\wedge$  מוגדר על  $\Omega^*(M)$  (אוסף התבניות מכל מעלה)

• אם  $f: M \rightarrow N$  ו- $\alpha \in \Omega^k(N)$  אז  $f^*\alpha \in \Omega^k(M)$  מתקיים

$$f^*\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Df v_1, \dots, Df v_k)$$

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta \text{ המקיימת}$$

תהי  $M$  יריעה עם מטריקה רימנית  $g$ . אז לכל  $x$

$$\begin{aligned} T_x M &\xrightarrow{\sim} T_x^* M \\ v &\rightarrow g_x(v, \cdot) \end{aligned}$$

איזומורפיזם.

אז

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\sim} & T^*M \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

איזומורפיזם<sup>7</sup> של אגדים וקטוריים.

**סימון 3.2.7.** תהי  $M$  יריעה ו- $(\mathcal{U}, \varphi)$  מפה ל- $\mathbb{R}^n$ . סימנו  $x_1, \dots, x_n: \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות קואורדינטות,  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  שדות וקטוריים

מקבילים לסריג הקואורדינטות ו- $dx_1, \dots, dx_n$  פונקציונלים דואליים ל- $\frac{\partial}{\partial x^i}$ .

ניתן להרים ולהגדיר אובייקטים מקבילים על  $\mathcal{U} \subseteq M$ .

•  $x_i: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות קואורדינטות מקומיות על  $\mathcal{U}$ .

• שדות וקטוריים מקומיים  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

•  $dx_i$  תבניות על  $\mathcal{U}$ .



<sup>6</sup>כבר"כ המרחב אינסוף מימדי  
<sup>7</sup>לא קנוני; תלוי בבחירת  $g$



### 3.3 אוריינטציה על יריעה

**הגדרה 3.3.1.** יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{R}$  מממד  $0 < n < \infty$ . יהיו  $B_1, B_2$  בסיסים של  $V$ . ל- $B_1, B_2$  אותה אוריינטציה אם למטריצת המעבר  $T_{B_1}^{B_2}$  דטרמיננטה חיובית. אחרת האוריינטציה הפוכה.

**תרגיל 43.** שיויון אוריינטציה הוא יחס שקילות וישנן שתי מחלקות שקילות של בסיסים. אז<sup>8</sup> יש שתי מחלקות קשירות של בסיסים (עם הטופולוגיה המושרית של  $V$ ). לכן ל- $\text{GL}_{\mathbb{R}}(n)$  יש שתי מחלקות קשירות.

**הגדרה 3.3.2.** עבור  $V = \mathbb{R}^n$  אוריינטציה חיובית היא האוריינטציה של הבסיס הסטנדרטי.

**הגדרה 3.3.3.** תהי  $M$  יריעה. אוריינטציה על  $M$  היא בחירה חלקה של אוריינטציה לכל  $T_x M$ . בחירת אוריינטציה של  $T_x U$  היא בחירת אוריינטציה של  $\mathbb{R}^n$ .

**הגדרה 3.3.4.** אוריינטציה על  $M$  חלקה אם היא קבועה מקומית על  $\varphi(U)$ .<sup>9</sup>

**הגדרה 3.3.5.** תהי  $M$  יריעה. אם קיימת אוריינטציה על  $M$  היא נקראת אוריינטבילית. אחרת היא אינה אוריינטבילית.

**טענה 3.3.6.** אם  $B_x$  משפחה חלקה של בסיסים ל- $T_x M$  כאשר  $x \in M$ , מתקבלת אוריינטציה על  $M$ .

**הערה 3.3.7.** כדי לקבל משפחה של בסיסים, צריכים  $\dim M$  שדות וקטוריים שהינם בלתי-תלויים בכל נקודה.

**דוגמה 3.3.8.** על  $S^2$  אין שדה וקטורי שאינו מנוון, לכן אין משפחה של בסיסים.

**תרגיל 44.** יהי  $V$  מרחב  $n$ -מימדי ותהי  $A: V \rightarrow V$ . אזי  $A$  פועלת על  $\Omega^n(V)$ . לכל  $\omega \in \Omega^n(V)$ , נקבל העתקה

$$\begin{aligned} A^* \omega: V^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) &\rightarrow \omega(Au_1, \dots, Au_n) \end{aligned}$$

בדקו כי

$$A^* \omega(u_1, \dots, u_n) = \det A \cdot \omega(u_1, \dots, u_n)$$

**דוגמה 3.3.9.** נניח  $\dim V = 2$  ויהי  $\{e_1, e_2\}$  בסיס ל- $V$ . נגדיר

$$\begin{aligned} Ae_1 &= ae_1 + be_2 \\ Ae_2 &= ce_1 + de_2 \end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned} A^* \omega(e_1, e_2) &= \omega(Ae_1, Ae_2) \\ &= \omega(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= \overbrace{ac\omega(e_1, e_1)}^0 + ad\omega(e_1, e_2) + bc\omega(e_2, e_1) + \overbrace{bd\omega(e_2, e_2)}^0 \\ &= (ad - bc) \omega(e_1, e_2) \\ &= |A| \cdot \omega(e_1, e_2) \end{aligned}$$

**מסקנה 3.3.10.** יהי  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס למרחב וקטורי  $V$ . יהיו  $u_1, \dots, u_n \in V$ . נגדיר

$$\begin{aligned} A: V &\rightarrow V \\ v_i &\rightarrow u_i \end{aligned}$$

ואז

$$[A]_B^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [u_1]_B & \cdots & [u_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix}$$

<sup>8</sup>הדבר דורש הוכחה.  
<sup>9</sup>פלוס או מינוס על כל מחלקת קשירות

ונקבל

$$\begin{aligned}\omega(u_1, \dots, u_n) &= \omega(Av_1, \dots, Av_n) \\ &= \det A \omega(v_1, \dots, v_n) \\ &= \det \begin{pmatrix} | & & | \\ [u_1]_B & \cdots & [u_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix} \overbrace{\omega(u_1, \dots, u_n)}^{\text{scalar}}\end{aligned}$$

ולכן  $\omega = c \cdot \det(\dots)$  כלומר  $\Omega^n(V)$  חד-מימדי.<sup>10</sup>**הגדרה 3.3.11.** יהי  $V$  מ"ו  $n$ -מימדי מעל  $\mathbb{R}$  ותהי  $\omega \in \Omega^n(V)$ . אז  $\omega$  **תבנית נפח** אם  $\omega \neq 0$ .**הגדרה 3.3.12.**  $\omega_1 \sim \omega_2$  (תבניות נפח) אם  $\frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$ .<sup>11</sup>**הערה 3.3.13.**  $\sim$  יחס שקילות על  $\Omega^n(V)$ .**הגדרה 3.3.14.** **אוריינטציה של  $V$**  היא מחלקת שקילות ב- $\Omega^n(V)$  תחת היחס  $\sim$ .**הגדרה 3.3.15.** בהינתן  $\omega \in \Omega^n(V)$  תבנית נפח ו- $[\omega]$  אוריינטציה, עבור  $B$  בסיס של  $V$  נגיד כי  $B$  **חיובי**<sup>12</sup> אם  $\omega(B) > 0$  וכי  $B$  **שלילי**<sup>13</sup> אם  $\omega(B) < 0$ .**תרגיל 45.** מקבלים מהנ"ל שתי מחלקות שקילות של בסיסים. אלו בלתי-תלויות בבחירת הנציג.**הגדרה 3.3.16.** בהינתן בסיס  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  נגדיר  $\omega = dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n$  ואז  $[B]$  בסיסים חיוביים ביחס ל- $\omega$ .**הגדרה 3.3.17.**  $\Omega^n(V)$  נקרא **מרחב דטרמיננטות של  $V$** .**הגדרה 3.3.18.**  $\Omega^n(M)$  נקרא **אגד דטרמיננטות של  $M$** .**הערה 3.3.19.** מתקיים

$$\Omega^n(M) = \{(x, \omega) \mid x \in M, \omega \in \Omega^n(T_x M)\}$$

**3.3.1 מבנה חלק על  $\Omega^n(M)$** יהי  $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha\}$  אטלס חלק על  $M$ . אז אם  $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$  מתקיים

$$\begin{aligned}T\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) &\cong \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \times \mathbb{R}^n \\ \Omega^n(T_x \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)) &\cong \Omega^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}\end{aligned}$$

ולכן

$$\Omega^n(\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)) \cong \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

**3.3.20 הגדרה**

$$\bar{\mathcal{U}}_\alpha := \left\{ (x, \omega) \mid \omega \in \Omega^n(T_x \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)) \right\}$$

$$\bar{\varphi}_\alpha: (x, \omega) \rightarrow \left( \varphi_\alpha(x), (\varphi_\alpha^{-1})^* \omega \right)$$

**הערה 3.3.21.** מתקיים

$$(\varphi_\alpha^{-1})^* \omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(D\varphi_\alpha^{-1}v_1, \dots, D\varphi_\alpha^{-1}v_n)$$

לכן

$$\bar{\varphi}_\alpha: \bar{\mathcal{U}}_\alpha \rightarrow \Omega^n(\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

<sup>10</sup>כפי שזכר ראינו<sup>11</sup>זה מוגדר היטב כי המרחב חד-מימדי<sup>12</sup>ביחס ל- $\omega$ <sup>13</sup>ביחס ל- $\omega$

**תרגיל 46.**  $\{(\bar{U}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)\}$  משרה טופולוגיה על  $\Omega^n(M)$  ומגדיר מבנה חלק. אז  $\Omega^n(M)$  יריעה חלקה.

**הגדרה 3.3.22.** תבנית חלקה ממעלה  $n$  על  $M^n$  היא העתקה חלקה

$$\begin{aligned}\omega: M &\rightarrow \Omega^n(M) \\ x &\rightarrow (x, \omega_x)\end{aligned}$$

כאשר  $\omega_x \in \Omega^n(T_x M)$ .

**תרגיל 47.** בדקו כי הגדרה זאת מסכימה עם ההגדרה הקודמת עם קואורדינטות.

**הגדרה 3.3.23.** תבנית נפח על יריעה  $M^n$  היא תבנית  $\omega$  כך ש- $\forall x \in M: \omega_x \neq 0$ .

**הגדרה 3.3.24.** יריעה  $M$  נקראת אוריינטבילית אם קיימת עליה תבנית נפח.

**תרגיל 48.** בהינתן שתי תבניות נפח  $\omega_{1,2}$  יש העתקה  $\varphi_x: \frac{\omega_1}{\omega_2}: M \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה ושאינה מתאפסת.

**הגדרה 3.3.25.**  $\omega_1 \sim \omega_2$  אם  $\varphi_x > 0$  לכל  $x \in M$ .

**תרגיל 49.** הנ"ל מגדיר יחס שקילות.

**הגדרה 3.3.26.** כל מחלקת שקילות נקראת אוריינטציה על  $M$ .

**תרגיל 50.** בחירת מחלקת אוריינטציה של תבניות שקולה לבחירת מחלקת אוריינטציה של בסיסים ל- $T_x M$  לכל  $x \in M$ .

תהי  $X \xrightarrow{f} Y$ , נזכיר כי  $TX \xrightarrow{f_* = Df} TY$  וניתן להגדיר גם

$$\begin{aligned}\Omega^k(X) &\xleftarrow{f^*} \Omega^k(Y) \\ \mathcal{C}^\infty(X) &\xleftarrow{f^*} \mathcal{C}^\infty(Y)\end{aligned}$$

בהינתן  $\omega_0$  תבנית נפח על  $M$ , ו- $\omega \in \Omega^n(M)$  תבנית כלשהי, מתקיים  $\omega = \varphi(x) \cdot \omega_0$  ו- $\varphi_x: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חלקה.

**תרגיל 51.** בהינתן

$$\begin{aligned}f: M &\rightarrow N \\ g: N &\rightarrow L\end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned}f^* \circ g^* &= (g \circ f)^* \\ f^*(\varphi\omega) &= f^*\varphi \cdot f^*\omega\end{aligned}$$

כאשר  $\varphi$  פונקציית  $\omega$  תבנית.

**דוגמה 3.3.27.** תהי  $M = \mathbb{R}^n$  ואז  $T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ . נגדיר  $w_{0,x} = \det \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_n \\ | & | \end{pmatrix}$  תבנית נפח אוקלידית.

**דוגמה 3.3.28.** תהי  $M = \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ . תהי  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  ההטלה. תהי  $x \in \mathbb{T}^n$ , ו- $y \in \pi^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$ . אז

$$D\pi_y = \pi_*: T_y \mathbb{R}^n \rightarrow T_x \mathbb{T}^n$$

איזו.

נגדיר  $\omega$  תבנית נפח על  $\mathbb{T}^n$  על ידי

$$\omega_x(v_1, \dots, v_n) := \omega_{0,y}(\pi_*^{-1}v_1, \dots, \pi_*^{-1}v_n)$$

**תרגיל 52.** בדקו כי  $\omega$  אינה תלויה בבחירת  $y \in \pi^{-1}(x)$ .

**פתרון.** נבחר  $y' \in \pi^{-1}(x)$  נקודה אחרת. נגדיר הזזה  $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  על ידי  $S(y) = y'$  אז  $DS = 1$  ולכן  $S^*\omega_0 = \omega_0$  אז

$$\begin{aligned}\omega_0(u_1, \dots, u_n) &= \omega_0(DSu_1, \dots, DSu_n) \\ &= S^*\omega_0(u_1, \dots, u_n)\end{aligned}$$

ואז  $(\pi^{-1})^*\omega_{0,y} = (\pi^{-1})^*\omega_{0,y'}$  ואז  $\omega_x$  בלתי-תלויה בבחירת הנציג.

**דוגמה 3.3.29.** תהי  $M = S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . כדי להגדיר תבנית נפח, נשתמש בתבנית נפח על  $\mathbb{R}^{n+1}$ . נסמן  $\nu(x) := x$  לכל  $x \in S^n$  להיות נורמל יחידה חיצוני. נסמן

$$\Omega_0(x)(v_1, \dots, v_n) := \omega_0(\nu(x), v_1, \dots, v_n)$$

כאשר  $\omega_0$  תבנית הנפח האוקלידית.

**תרגיל 53.** בדקו כי  $\Omega_0$  תבנית נפח.

**משפט 3.3.30.** תהי  $M = \mathbb{RP}^n = S^n/\pm 1$  אז  $M$  אוריינטבילית אם ורק אם  $n$  אי-זוגי.

• אם  $n$  אי-זוגי ו- $\pi$  ההטלה, אז  $\pi^{-1}(x) = \{\pm y\} \subseteq S^n$

**תרגיל 54.** קיימת  $\omega \in T_x\mathbb{RP}^n$  כך שמתקיים

$$\pi_y^*\omega = \Omega_0(y), \quad \pi_{-y}^*\omega = \Omega_0(-y)$$

אז  $\omega$  תבנית שלא מתאפסת לכל  $x \in \mathbb{RP}^n$

אם  $n$  זוגי, ו- $\pi$  ההטלה, נגדיר

$$\begin{aligned}f: S^n &\rightarrow S^n \\ x &\rightarrow -x\end{aligned}$$

ואז הדיאגרמה

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & \mathbb{RP}^n & \end{array}$$

קומוטיבית.

נניח בשלילה כי קיימת  $\omega$  תבנית נפח על  $\mathbb{RP}^n$ . תהי  $\Omega_0$  תבנית הנפח הסטנדרטית על  $S^n$ . אז

$$\begin{aligned}f^*\Omega_0(p)(\eta_1, \dots, \eta_n) &= \Omega_0(f(p))(f_*\eta_1, \dots, f_*\eta_n) \\ &= \omega_{0,f(p)}(\nu(f(p)), f_*\eta_1, \dots, f_*\eta_n) \\ &= \omega_{0,p}(-\nu(p), -\eta_1, \dots, -\eta_n) \\ &= (-1)^{n+1} \omega_0(\nu(p), \eta_1, \dots, \eta_n) \\ &= (-1)^{n+1} \Omega_{0,p}(\eta_1, \dots, \eta_n)\end{aligned}$$

כאשר  $\omega_{0,q}$  תבנית נפח סטנדרטית ב- $\mathbb{R}^{n+1}$ , ואינה תלויה ב- $q$ .

נסמן  $\Omega = \pi^*\omega$  תבנית נפח על  $S^n$ . לכן  $\Omega = H \cdot \Omega_0$  כאשר  $H: S^n \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה שלא מתאפסת. מקומוטיביות הדיאגרמה,  $\pi \circ f = \pi$  ואז  $\pi \circ f = \pi$  ולכן  $f^*\pi^*\omega = \pi^*\omega$  כלומר  $f^*\Omega = \Omega$  או

$$H\Omega_0 = f^*(H\Omega_0) = f^*H \cdot f^*\Omega_0 = f^* \circ H \cdot (-1)^{n+1} \Omega_0 = f^*(H) \Omega_0$$

בנק'  $p$  נקבל

$$H(p) \cdot \Omega_0(p) = f^*H(p) \Omega_0(p) = H(f(p)) \cdot \Omega_0(p)$$

אך  $H$  אינה מתאפסת, לכן  $H(p)$  ו- $H(f(p))$  בעלי אותו סימן. אז

$$\Omega_0(p) = - \overbrace{\frac{H(f(p))}{H(p)}}^{<0} \Omega_0(p)$$

בסתירה.

## דוגמה 3.3.31. תהי

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x + 1, -y)$$

אז  $z_1 \sim z_2$  אם ורק אם  $T^k z_1 = z_2$  עבור  $k \in \mathbb{Z}$ . כלשהו. אם מחלקות שקילות הן מסלולים של  $T$  אז:

1.  $T/\sim$  יריעה חלקה הומאומורפית לסרט Möbius.

2. היריעה אינה אוריינטבילית.

תרגיל 56. תהי  $M$  אוריינטבילית וקשירה. אז ישנן 2 אוריינטציות על  $M$ .

3.3.32. הגדרה. תהי  $f: M^n \rightarrow N^n$  ותהי  $\omega, \Omega$  תבניות נפח על  $M, N$  בהתאמה.  $f$  שומרת אוריינטציה אם  $\frac{f^* \Omega}{\omega} > 0$ . אחרת היא הופכת אוריינטציה.

3.3.33. הערה. נסתכל על ה"ל בקואורדינטות מקומיות. נניח  $\varphi(\mathcal{U}), \psi(\mathcal{V}) \subseteq \mathbb{R}^n$  כאשר ההצגות המקומיות  $\hat{\omega}, \hat{\Omega}$  חיובית ביחס לאוריינטציה הסטנדרטית. אז  $f$  שומרת אוריינטציה אם ורק אם  $\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) > 0$ .

3.3.34. הגדרה. אטלס חלק  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  נקרא אוריינטבילי אם פונקציות המעבר  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  שומרות אוריינטציה.

משפט 3.3.35. יריעה  $M$  אוריינטבילית אם ורק אם קיים עליה אטלס אוריינטבילי.

הוכחה. תרגיל. ■

דוגמה 3.3.36 (יריעות מרוכבות). תהי  $M$  יריעה עם אטלס מרוכב ל- $\mathbb{C}^n$  ועם פונקציות מעבר ביהולומורפיות.

תרגיל 57. אם נזהה  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  וניקח  $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  העתקה  $\mathbb{C}$ -לינארית, אז  $\det(A_{\mathbb{R}}) > 0$  כאשר  $A_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  ההעתקה המתאימה. לכן העתקות  $\mathbb{C}$ -לינאריות שומרות אוריינטציה של  $\mathbb{R}^{2n}$ . לכן<sup>14</sup> כל העתקה הולומורפית שומרת אוריינטציה. לכן אטלס מרוכב הינו אוריינטבילי.

דוגמה 3.3.37. אם  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{C}$ , יש עליו אוריינטציה סטנדרטית. בהינתן בסיס מרוכב  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  ניתן להגדיר בסיס ממשי  $B_{\mathbb{R}} = \{v_1, iv_1, v_2, iv_2, \dots, v_n, iv_n\}$ .

תרגיל 58.  $B_{1, \mathbb{R}}, B_{2, \mathbb{R}}$  בעלי אותה אוריינטציה לכל  $B_1, B_2$  בסיסים מעל  $\mathbb{C}$ .

לכן לכל מרחב וקטורי מרוכב יש אוריינטציה טבעית. ליריעה מרוכבת יש מבנה מרוכב לכל מרחב משיק  $T_x M$ , לכן יש אוריינטציה טבעית.

דוגמה 3.3.38. תהי  $f: W \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ונכתוב

$$f(x + iy) = (u + iv)(x + iy)$$

כאשר  $u = \Re(f)$  ו- $v = \Im(f)$ . אז

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

ומתקיים מקושי רימן

$$|Df| = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 \geq 0$$

אם  $Df$  הפיכה אז  $|Df| > 0$  וההעתקה שומרת אוריינטציה.

דוגמה 3.3.39 (העתקות  $\mathbb{C}$ -לינאריות). תהי

$$\lambda: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow (a + bi)z$$

$$(x + iy) \rightarrow (xa - by) + i(xb + ya)$$

זו מגדירה העתקה

$$\lambda_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ואז  $|\lambda_{\mathbb{R}}| = a^2 + b^2 \geq 0$ .  
 תהי  $A: V \rightarrow V$  כאשר  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{C}$ . ניקח בסיס  $B = \{v_1, v_n\}$  מעל  $\mathbb{C}$  של  $V$  עבורו  $[A]_B$  משולשת עליונה. אז  $B_{\mathbb{R}} = \{v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n\}$  בסיס של  $V$  מעל  $\mathbb{R}$  ונקבל מטריצה

$$[A]_{B_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & \dots & * & * \\ b_1 & a_1 & \dots & * & * \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & a_n & -b_n \\ 0 & 0 & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

עם דטרמיננטה

$$(a_1^2 + b_1^2) \cdot \dots \cdot (a_n^2 + b_n^2) \geq 0$$

אם  $A$  הפיכה אז  $\det A > 0$ .

**מסקנה 3.3.40.** אם  $B, C$  שני בסיסים של  $V$  מעל  $\mathbb{C}$ ,  $A$  העתקת מעבר מ- $[\cdot]_B$  ל- $[\cdot]_C$  אז היא שומרת אוריינטציה. אם  $A_{\mathbb{R}}$  העתקת מעבר מ- $B_{\mathbb{R}}$  ל- $C_{\mathbb{R}}$ ,  $C_{\mathbb{R}}$  ל- $B_{\mathbb{R}}$  יש אותה אוריינטציה. לכן יש אוריינטציה קנונית על מ"ו מרוכב.

**דוגמה 3.3.41.** תהי  $F: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  גזירה בנקודה  $z_0$ . אז

$$F(z_0 + \delta z) = F(z_0) + A\Delta z + O(|\Delta z|)$$

ואז

$$|DF_{z_0}| = |A_{\mathbb{R}}| \geq 0$$

בפרט, אם יש אטלס הולומורפי, העתקות המעבר שומרות אוריינטציה, ואז האטלס אוריינטבילי עם אוריינטציה קנונית.

**משפט 3.3.42.** תהי  $M$  יריעה עם שפה ועם אוריינטציה. אז ל- $\partial M$  יש אוריינטציה קנונית.

הוכחה. נבנה אוריינטציה בעזרת מטריקה רימנית. ניקח

$$\begin{aligned} f: \hat{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &= \{p \mid f(p) \leq 0\} \\ \partial M &= \{p \mid f(p) = 0\} \end{aligned}$$

ו- $\omega_0$  תבנית נפח על  $M$ . נבחר מטריקה רימנית  $\rho$  על  $\hat{M}$ . נגדיר נורמל חיצוני

$$\nu_x \in T_x \hat{M} = T_x M$$

על ידי

$$\begin{aligned} \nu_x &\perp T_x \partial M \\ \rho_x(\nu_x, \nu_x) &= 1 \\ Df_x(\nu_x) &> 0 \end{aligned}$$

$\nu_x$  תלוי באופן חלק בנקודה  $x \in \partial M$ . (# תרגיל)  
 קיבלנו תבנית נפח

$$\omega_x(\cdot, \dots, \cdot) = w_{0,x}(\nu_x, \cdot, \dots, \cdot)$$

והאוריינטציה של  $\omega_x$  בלתי-תלויה בבחירת  $\rho$ . (# תרגיל)

## 3.4 מעלה של העתקה

נסתכל על העקומות באיורים אם נספור נקודות לפי באוריינטציה ביחס להטלה, נוכל להגדיר דרגה של ההעתקה.

**הגדרה 3.4.1.** תהיינה  $M^n, N^n$  יריעות קשירות עם אוריינטציה. תהי  $f: M \rightarrow N$  חלקה עם  $y \in N$  ערך רגולרי. אז  $Df_X$  איזומורפיזם לכל  $x \in f^{-1}(y)$ .

$M$  קומפקטית ללא שפה לכן (# תרגיל)

$$\deg(f, y) := \sum \varepsilon(x)$$

סכום סופי כאשר  $\varepsilon(x) = 1$  אם  $Df_x$  שומרת אוריינטציה ו- $\varepsilon(x) = -1$  אם  $Df_x$  הופכת אוריינטציה.

**הערה 3.4.2.** אם  $f^{-1}(y) = \emptyset$  אז  $\deg(f, y) = 0$ .

**משפט 3.4.3.**  $I$ .  $\deg(f, y)$  אינו תלוי בבחירת  $y$ .

**הגדרה 3.4.4.**  $\deg(f) = \deg(f, y)$  עבור  $y$  רגולרי כלשהו.

2. אם  $f$  הומוטופית ל- $g$  אז  $\deg f = \deg g$ .

**למה 3.4.5.** נניח כי  $M^n = \partial X^{n+1}$  (לא בהכרח קשירה) כאשר  $X, M$  יריעות קומפקטיות, ל- $X$  יש אוריינטציה ול- $M$  אוריינטציה מהשפה של  $X$ . נניח כי  $F: X \rightarrow N^n$  חלקה ו- $y$  ערך רגולרי של  $F$  ושל  $f: F|_M$ . אז  $\deg(f, y) = 0$ .

הוכחה. נסמן  $\Gamma = F^{-1}(y)$  תת-יריעה עם שפה של  $X$ . ממשפט הפונקציה הסתומנה ידוע

$$\dim \Gamma = (n+1) - n = 1$$

$$\partial \Gamma \subseteq \partial X = M$$

$$\Gamma \cap \partial x = \partial \Gamma$$

כל הנקודות של  $\partial \gamma = f^{-1}(y)$  מסודרות בזוגות  $x^+, x^-$  המתאימים לנקודות קצה של הקשתות ב- $\Gamma$ . נראה ש- $\varepsilon(x^+) = -\varepsilon(x^-)$  ואז מתקיים

$$\deg(f, y) = \sum_x \varepsilon(x^+) + \varepsilon(x^-) = 0$$

כנדרש.

נבחר פרמטריזציה חלקה על אחת הקשתות של  $\Gamma$ ,

$$\Gamma = \Gamma(t) : \begin{cases} \Gamma(0) = x^- \\ \Gamma(1) = x^+ \\ \dot{\Gamma}(t) \neq 0 \end{cases}$$

ואז לכל  $t$  מתקיים

$$F(\Gamma(t)) = y$$

ולכן

$$DF_{\Gamma(t)}(\dot{\Gamma}(t)) = 0$$

מתקיים  $\dot{\Gamma}(0) \notin T_{x^+}M$ ,  $\dot{\Gamma}(1) \notin T_{x^-}M$  כי אחרת נקבל  $DF|_{T_{x^\pm}} = Df$  בעל גרעין לא טריוויאלי, כלומר  $Df$  לא על ואז  $y$  אינו רגולרי. נבחר מטריקה רימנית על  $X$  כך ש- $\dot{\Gamma}(1) \perp T_{x^+}M$  וגם  $\dot{\Gamma}(0) \perp T_{x^-}M$ . נגדיר

$$E(t) = \dot{\Gamma}(t)^\perp \subseteq T_{\Gamma(t)}X$$

נטען כי

$$DF_{\Gamma(t)}|_{E(t)} : E(t) \rightarrow T_y N$$

איזומורפיזם.

**על:** מתקיים כי  $DF_{\Gamma(t)} : T_{\Gamma(t)}X \rightarrow T_y N$  על עם גרעין  $DF(\dot{\Gamma}(t)) = 0$  אז  $DF|_{\dot{\Gamma}(t)^\perp}$  על.

**חח"ע:** מכך שלקחנו  $y$  ערך רגולרי.

כעת נבחר  $\{e_1, \dots, e_n\}$  בסיס חיובי של  $T_y N$ . נגדיר

$$\bar{e}_j(t) = \left( DF_{\Gamma(t)}|_{E(t)} \right)^{-1}(e_j)$$

וכעת  $B_t := \{\dot{\Gamma}(t), \bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_n(t)\}$  בסיס ל- $T_{\Gamma(t)}X$ . ניקח  $\Omega$  תבנית נפח על  $X$  שמגדירה אוריינטציה. אז

$$\text{sgn}(\Omega_{\Gamma(t)}(B_t)) = \pm 1$$

קבוע לאורך על  $\Gamma_t$ . נניח בה"כ  $\text{sgn}(\Omega(B_t)) = 1$ .<sup>15</sup> כעת

$$\Omega(B(1)) = \Omega(c\nu_{x^+}, \bar{e}_1(1), \dots, \bar{e}_n(1)) > 0$$



<sup>15</sup>אחרת נהפוך כיוון של  $\Gamma$ .

כאשר הוקטור הראשון בסיס של  $\dot{\Gamma}(1)$  והשאר בסיס של  $T_{x^+}M$ . בסיס חיובי עובר לבסיס חיובי על ידי  $Df_{x^+}$  ולכן  $\{\bar{e}_1(1), \dots, \bar{e}_n(1)\}$  בסיס חיובי של  $T_{x^+}M$  ביחס לאוריינטציית השפה, ולכן  $\varepsilon(x^+) = 1$ . גם  $\Omega(B(0)) > 0$  כי

$$\begin{aligned}\Omega(B(0)) &= \Omega(\dot{\Gamma}(0), \bar{e}_1(0), \dots, \bar{e}_n(0)) \\ &= \Omega(-c\nu_{x^-}, \bar{e}_1(0), \dots, \bar{e}_n(0))\end{aligned}$$

כאשר

$$\Omega(\nu_{x^-}, \dots, \bar{e}_1(0), \dots, \bar{e}_n(0)) < 0$$

כי  $\nu_{x^-}$  נורמל חיכוני. אז

$$\{\bar{e}_1(0), \dots, \bar{e}_n(0)\}$$

שליילי של  $T_{x^-}M$  ביחס לאוריינטציית שפה. לכן  $Df_{x^-}$  מעביר בסיס שליילי ולבסיס שליילי ולכן  $\varepsilon(x^-) = -1$ .

**למה 3.4.6.** נכונה גם ללא ההנחה ש- $y$  רגולרי עבור  $F$ .

הוכחה. נציין מספר עובדות.

1. ממשפט הפונקציה ההפוכה נובע כי קבוצת הערכים הרגולריים של  $f$  היא קבוצה פתוחה ב- $N$ .

2. (# תרגיל) אם  $y$  ערך רגולרי של  $f$ , קיימת סביבה  $\mathcal{U}$  של  $y$  כך שלכל  $y' \in \mathcal{U}$  מתקיים  $\deg(f, y') = \deg(f, y)$ .

3. (משפט Sard) הערכים הרגולריים של  $F$  צפופים ב- $N$  ולכן יש ערך רגולרי  $y'$  שמספיק קרוב ל- $y$ . אז רגולרי של  $F, f$  ואז  $\deg(f, y) = \deg(f, y')$ .

כעת נסמן  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . מתקיים  $\varepsilon(x'_i) = \varepsilon(x_i)$  ולכן  $\deg(f, y') = \deg(f, y)$  כי  $f$  דיפאומורפיזם לוקלי.

**למה 3.4.7.** נניח כי  $F: M \times I \rightarrow N$  הומוטופיה חלקה וכי

$$f = F|_{M \times \{0\}}: M \rightarrow N$$

$$g = F|_{M \times \{1\}}: M \rightarrow N$$

עם  $y$  ערך רגולרי של  $f, g$ . אז  $\deg(f, y) = \deg(g, y)$ .

הוכחה. תהי  $\Omega$  תבנית נפח על  $M$  אשר מגדירה אוריינטציה. נגדיר

$$X = M \times I$$

$$\partial X = M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$$

ו- $\omega = \det \wedge \Omega$  תבנית נפח על  $X$ .

$M \times \{1\}$  עם אוריינטציית שפה זהה לזו של  $M$ , ו- $M \times \{0\}$  עם אוריינטציה הפוכה לה. לכן

$$\varepsilon(F|_{M \times \{1\}}) = \varepsilon(g)$$

$$\varepsilon(F|_{M \times \{0\}}) = -\varepsilon(f)$$

לכן

$$\deg(F|_{\partial X}, y) \stackrel{3.4.6}{=} \deg(g, y) - \deg(f, y)$$

ולכן  $\deg(f, y) = \deg(g, y)$ .

**למה 3.4.8.** תהי  $f: M \rightarrow N$  כמו בניסוח המשפט. יהיו  $y, z \in N$  רגולריים. אז  $\deg(f, y) = \deg(f, z)$ .

הוכחה (המשפט, בהינתן למה 3.4.8). נוכיח עבור  $f$  הומוטופית ל- $g$  כי  $\deg(f) = \deg(g)$ . יהי  $y$  ערך רגולרי של  $f$  ו- $z$  ערך רגולרי של  $g$ . צריך להוכיח  $\deg(f, y) = \deg(g, z)$ .

קבוצת הערכים הקריטיים של  $f, g$  הן קבוצות בעלות מידה 0 לכן קיים ערך רגולרי משותף  $w$  ואז

$$\deg(f, y) \stackrel{3.4.8}{=} \deg(f, w) \stackrel{3.4.7}{=} \deg(g, w) \stackrel{3.4.8}{=} \deg(g, z)$$

נדגים מספר שימושים לפני הוכחת למה 3.4.8.



## 3.4.1 שימושים

1. תהי  $f: M \rightarrow M$  דיפאומורפיזם. אז לכל  $y \in M$  רגולרי מתקיים  $\#f^{-1}(y) = 1$ . לכן  $\deg f = \pm 1$  בהתאם לאם  $f$  שומרת או הופכת אוריינטציה. למשל אם  $f = 1_M$  אז  $\deg f = 1$  ואם

$$g: S^n \rightarrow S^n \\ x \rightarrow -x$$

$$\deg g = (-1)^{n+1}$$

**מסקנה 3.4.9.**  $f = 1_{S^n}$  רגולרי לא הומוטופית עבור  $n$  זוגי. זה גורר שלא קיים שדה וקטורי שאינו מנוון על  $S^n$ .

2. תהי  $f: M \rightarrow M$  העתקה קבועה עם תמונה  $x_0$ . אם  $\dim M \geq 1$  אז  $\deg f = 0$ . לכן  $1_M$  לא הומוטופית ל- $f$ . זה גורר את משפט Brouwer.

**תרגיל 59.** נגדיר  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}/\mathbb{Z}^n$  ותהי  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ . נגדיר  $f_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ . עבור  $\vec{v} \in \mathbb{Z}^n$  מתקיים

$$f_A(\vec{x} + \vec{v}) = A\vec{x} + A\vec{v} \in A\vec{x} + \mathbb{Z}^n = [A\vec{x}]$$

ולכן

$$f_A: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \\ [\vec{x}] \rightarrow [A\vec{x}]$$

מוגדרת היטב.

**הגדרה 3.4.10.** תהי  $M$  יריעה ותהי  $h: M \times I \rightarrow M$  הומוטופיה חלקה. אז **איזוטופיה** אם לכל  $t$ ,  $h_t: M \rightarrow M$  הינה דיפאומורפיזם, וגם  $h_0 = 1_M$ .

**טענה 3.4.11.** תהי  $N$  יריעה קשירה, ותהיינה  $x, y \in N$ . קיימת איזוטופיה  $h$  ב- $N$  עבורה  $h_1(x) = y$ .

**הוכחה (למה 3.4.8).** בוחרים איזוטופיה  $h_t$  של  $N$  עבורה  $h_1(y) = z$ .  $h_1(y) = z$  ערך רגולרי של  $f$  אם ורק אם  $h_t \circ prsy$  ערך רגולרי של  $h_t \circ f$ . כעת

$$h_0 \circ f \text{ הומוטופית ל-} h_0.$$

$$h_1 \circ f \text{ ערך רגולרי גם ל-} f \text{ וגם ל-} h_1.$$

ומשתי עובדות אלו ניתן להשתמש בלמה 3.4.7. אז  $\deg(h_1 \circ f, z) = \deg(f, z)$ . נבחין כי  $\deg(h_t \circ f, h_t(y))$  קבועה.<sup>16</sup> אז

$$\deg(f, y) = \deg(h_0 \circ f, h_0(y)) = \deg(h_1 \circ f, z) = \deg(f, z)$$

■

כנדרש.

## משוואות דיפרנציאליות

נרצה להוכיח את טענה 3.4.11. כדי לעשות זאת נייער במד"ר. נחפש  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  מסילה עם תנאי התחלה  $x(0) = x_0$  ועם הדרישה  $\dot{x}(t) = v(x(t), t) \in \mathbb{R}^n$  אם  $v$  עם תומך קומפקטי, קיימת מסילה  $x$  כזו.

$$\text{יהי } v_t(\cdot) = v(\cdot, t): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ שדה וקטורי ב-} \mathbb{R}^n \text{ לכל } t. \text{ אז } T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \text{ ו-} v_t(x) \in T_x \mathbb{R}^n$$

• לכל תנאי התחלה  $x(0)$  קיים ויחיד פתרון  $x(t)$ . העתקה  $h_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ע"י  $h_t: x(0) \rightarrow x(t)$  הינה איזוטופיה כי

$$h(0) = 1_{\mathbb{R}^n}, \quad h_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ diffeo}$$

• נקבל באופן זה האתאמה חד-חד ערכית בין מד"ר מסדר 1, שדות וקטוריים ב- $\mathbb{R}^n$ , ואיזוטופיות  $h: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

$$\text{כאן } v(x, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t}$$

**הערה 3.4.12.** בנייה זו נשארת בתוקף ליריעות (לפחות באופן לוקלי).

• כאשר  $M$  סגורה, קיימים פתרונות ל- $t$  כלשהו.

<sup>16</sup> זה נכון כי יש אותם מקורות, ואותם סימנים  $\varepsilon(x_i)$ .

• כאשר  $\partial M \neq \emptyset$  ייתכן שנגיע לשפה בזמן מסוים.

• כאשר  $M$  אינה קומפקטית ייתכן שנגיע ל- $\infty$  בזמן סופי.

הוכחה (טענה 3.4.11). שלב I: ניקח  $M = D^n \subseteq \mathbb{R}^n$  כדור. אז קיימת איזוטופיה  $h_t$  עם תומך קומפקטי כך ש- $h_1(y) = z$ .

ניקח שדה וקטורי  $v(x, t) = z - y$  ב- $\mathbb{R}^n \cong T_x \mathbb{R}^n$ . פתרון למד"ר עם תנאי התחלה  $x(0) = y$  הוא  $x(t) = y + t(z - y)$  כאשר  $x(1) = z$ . נכפיל את  $v$  בפונקציה  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  כך ש- $\text{supp}(f) \subseteq D$  ו- $f \equiv 1$  בסביבה של הקטע  $[y, z]$ . אז  $f \cdot v$  שדה וקטורי עם תומך קומפקטי, ולכן קיימת איזוטופיה  $h_t$  שהיא פתרון של מד"ר המודרת ע"י  $f \cdot v$ . המסילה עם תנאי ההתלה  $x(0) = y$  לא משתנה אחרי הכפל ב- $f$ .

שלב II: ניקח  $M$  יריעה קשירה. נגיד כי  $x \sim y$  אם קיימת איזוטופיה המעבירה את  $x$  ל- $y$ . מחלקות השקילות זרות ומכסות את  $M$ . לכל נקודה  $x$  יש סביבה דיפאומורפית לכדור  $D$ . לכל  $y \in D$  קיימת מהשלב הקודם איזוטופיה  $h_t: D \rightarrow D$  עם תומך קומפקטי. נגדיר

$$\tilde{h}_t: M \rightarrow M$$

$$z \rightarrow \begin{cases} h_t(z) & z \in D \\ z & z \notin D \end{cases}$$

ונקבל כי מחלקות השקילות פתוחות.

נקבל מהנ"ל כי כל מחלקת שקילות היא רכיב קשירות של  $M$ , לכן קיימת מחלקה יחידה.

**הערה 3.4.13.** תהי  $F: X^{n+1} \rightarrow \partial X$  חלקה. אז מלמות 3.4.5, 3.4.6.  $\deg(F|_{\partial X}: \partial X \rightarrow \partial X) = 0$ . אז אין רטרקציה  $X \rightarrow \partial X$ .<sup>17</sup>

**הערה 3.4.14.** תהי  $f: M \rightarrow N$  כאשר  $M, N$  קשירות. החלפת אוריינטציה של  $M$  או של  $N$  משנה את הסימן של  $\deg(f)$ .

**הערה 3.4.15.** יהי  $y$  ערך רגולרי. אז  $\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(x)$  ניתן להגדיר

$$\deg_2(f) := (\deg f) \pmod{2} \equiv \sum_{x \in f^{-1}y} \varepsilon(x) \pmod{2} \equiv \#f^{-1}(y) \pmod{2}$$

**תרגיל 60.** עברו על הוכחת משפט 3.4.3 ובדקו שהוא נכון עבור  $\deg_2$  גם ליריעות שאינן אוריינטביליות.

**הערה 3.4.16.** תהי  $f: M \rightarrow N$  רציפה. ניתן לקרב את  $f$  על ידי  $\hat{f}: M \rightarrow N$  חלקה אשר הומוטופית ל- $f$ , ולהגדיר  $\deg f := \deg(\hat{f})$ . ניתן להרחיב את ההגדרה של מעלה למרחבים כלליים יותר (זה מופיע בטופולוגיה אלגברית כשמדובר על קוהומומולוגיה, בורדיזמים וכו').

**הערה 3.4.17.** תהי  $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  כאשר  $\gamma \notin \text{Im } \gamma$ . אז  $\deg \text{Arg}(\gamma): S^1 \rightarrow S^1$  ו- $\deg \text{Arg}(\gamma) := \deg \omega(\gamma, 0)$  נקרא מספר סיבוב של  $\gamma$  סביב 0. אם  $e^{i\theta}$  ערך רגולרי של  $\text{Arg} \circ \gamma$  אז

$$\deg(\text{Arg} \circ \gamma) = \sum_{x \in (\text{Arg} \circ \gamma)^{-1}(e^{i\theta})} \varepsilon(x)$$

**הערה 3.4.18.** ידוע כי  $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$  ומתקיים כי  $\pi_1(S^1, *) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$  איזומורפיזם.

**הערה 3.4.19.** יהי  $f \in \mathbb{R}[x]$  פולינום. ניקח  $y$  גדול מערכי כל נקודות הקיצון. אז  $f^{-1}(y)$  שווה 0 אם  $n$  זוגי, ו-1 אם  $n$  אי-זוגי. לכן

$$\deg f = \begin{cases} 0 & n \text{ is even} \\ 1 & n \text{ is odd} \end{cases}$$

אבל, כל שני פולינומים  $p, q$  הומוטופיים אחד לשני על ידי  $t \cdot p + (1-t)q$ . אין כאן סתירה למשפט כיוון ש- $\mathbb{R}$  אינה יריעה סגורה (כי אינה קומפקטית).

**תרגיל 61.** עברו על הוכחת המשפט ומצאו איכן ההוכחה משתבשת במקרה הנ"ל של פולינומים.

**משפט 3.4.20 (המשפט היסודי של האלגברה).** יהי  $p \in \mathbb{C}[z]$  לא קבוע. אז  $p$  יש שורש.

**הגדרה 3.4.21.**  $\mathbb{CP}^1$  המרחב הפרויקטיבי המרוכב ממימד 1 הוא

$$\mathbb{CP}^1 := \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\} / \sim$$

כאשר  $(z_0, z_1) \sim (z'_0, z'_1)$  אם  $(z_0, z_1) = \lambda(z'_0, z'_1)$  עבור  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

<sup>17</sup> אם קיימת  $r: X \rightarrow \partial X$  אז  $r|_{\partial X}: \partial X \rightarrow \partial X$  ואז  $\deg(r) = \deg(1) = 1$

**הערה 3.4.22.** ניקח  $(z_0, z_1)$  בקואורדינטות הומוגניות. אם  $z_0 = 0$  נרמל  $(z_0, z_1) \sim (0, 1)$ . אחרת  $(z_0, z_1) \sim (1, \frac{z_1}{z_0})$  עם  $\frac{z_1}{z_0}$  משתנה חופשי ב- $\mathbb{C}$ . לכן

$$\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{C} \amalg \{(0, 1)\} \cong \text{Riemann Sphere}$$

יריעה חלקה עם האטלס הבא.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \mathbb{CP}^1 \setminus \{(0, 1)\} \\ \varphi_1: (z_0, z_1) &\rightarrow \frac{z_1}{z_0} \in \mathbb{C} \\ \mathcal{U}_2 &= \mathbb{CP}^1 \setminus \{(1, 0)\} \\ \varphi_2: (z_0, z_1) &\rightarrow \frac{z_0}{z_1} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

1. פונקציית המעבר  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  חלקה, לכן זהו אטלס חלק.

2.  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  חלקה, לכן  $\mathbb{CP}^1$  יריעה מרוכבת (עם אוריינטציה סטנדרטית).

**תרגיל 62.**  $\mathbb{CP}^1$  דיפאומורפית ל- $S^2$ .

הוכחה (המשפט היסודי של האלגברה). נסתכל על  $p$  כעל פונקציה  $\hat{f}_p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\hat{f}_p: z \rightarrow \sum_{i \in [n]} a_i z^i$ . נרחיב את  $\hat{f}_p$  להעתקה

$$\begin{aligned} f_p: \mathbb{CP}^1 &\rightarrow \mathbb{CP}^1 \\ (z_0, z_1) &\rightarrow (z_0^n, z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \dots + a_0z_0^n) \end{aligned}$$

מוגדרת היטב כי

$$f_p(\lambda z_0, \lambda z_1) = \lambda^n (z_0^n, z_1^n + \dots + a_0 z_0^n) \underset{\mathbb{CP}^1}{=} f_p(z_0, z_1)$$

**תרגיל 63.**  $f_p$  חלקה.

נסתכל על הצגה מקומית  $\tilde{f}_p$  של  $f_p$  עם מפות  $\varphi_1, \varphi'$ .

$$\tilde{f}_p: (1, z_1) \rightarrow z_1 \in \mathbb{C}$$

מתקיים

$$f_p(1, z_1) = (1, z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1} + \dots + a_0) = (1, p(z_1))$$

לכן

$$\varphi_1(f_p(1, z_1)) = p(z_1)$$

$$\tilde{f}_p = \hat{f}_p$$

**טענה 3.4.23.** על  $f_p$  על<sup>18</sup>.

הוכחה. נראה כי  $\deg f_p = n$  ביחס לאוריינטציה הסטנדרטית. נגדיר  $q(z) := z^n$ . אז  $f_p, f_q$  הומוטופיות ע"י  $p_t := tp + (1-t)q$ . נקבל כי  $f_{p_t}: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$  הומוטופיה<sup>19</sup>. לפי משפט המעלה  $\deg f_p = \deg f_q$ . נחשב את  $\deg f_q$ .  $f_q(z_0, z_1) = (1, 1)$  אם ורק אם  $q(z) = 1$  בקואורדינטות לפי  $(\mathcal{U}, \varphi_1)$ . הפתרונות הם שורשי היחידה  $\sqrt[n]{1}$ .  $q'(z) = nz^{n-1}$  לא מתאפסת על שורשי היחידה. כעת  $q$  "הולומורפית" לכן שומרת אוריינטציה, לכן  $D_q$  הפיך, ו-1 ערך רגולרי. לכן

$$\deg q = \sum_{x \in \sqrt{1}} \varepsilon(x) = n$$

■

## 3.5 בחזרה לתבניות דיפרנציאליות

נזכיר כי תבנית  $\alpha$  ממעלה  $k$  על יריעה  $M$  היא בחירה חלקה של  $k$ -תבנית על  $T_x M$ .

**הגדרה 3.5.1.** תהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה. **נגזרת חיצונית** *exterior derivative* היא העתקה

$$d: \Omega^k(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{U})$$

כאשר



<sup>18</sup>מה שגורר את סיום המשפט, כי או  $\hat{f}_p$  על

<sup>19</sup>חשוב ש- $q, p$  מתוקנים מאותה מעלה. או  $p_t$  ממעלה  $n$  ו- $f_{p_t}$  מוגדר היטב.

• עבור  $k = 0$  נגדיר

$$d: f \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

• עבור  $k \geq 1$  נגדיר

$$\alpha = a(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

נגדיר

$$d\alpha := da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

ונרחיב באופן ליניארי ל- $\Omega^k(\mathcal{U})$ .

$$d \left( \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) = \sum_{i_1, \dots, i_k, j} \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

**הערה 3.5.2.** תהי  $x_i: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית קואורדינטות. אז

$$d(x_i) = dx_i$$

(כאשר  $dx_i$  הפונקציונל מהבסיס הדואלי, שהגדרנו קודם) ולכן הסימנים מסכימים.

**טענה 3.5.3.**  $d \circ d = 0$  לינארית לחיבור וכפל בסקלר.

2. חוק לייבניץ:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$$

3.

$$d \circ d = 0$$

הוכחה. נתחיל עם מקרה פרטי של (2), כאשר  $\deg \alpha = \deg \beta = 0$  אז  $\alpha, \beta: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  מאינפי

$$\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

לכן

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$$

במקרה הכללי, מספיק להראות למונומים

$$\alpha = f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = f(x) dx_I$$

ר

$$\beta = g(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} = g(x) dx_J$$

מתקיים

$$\alpha \wedge \beta = f(x) g(x) dx_I \wedge dx_J$$

ואז

$$d\alpha = \sum_r \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = df \wedge dx_I$$

וגם  $d\beta = dg \wedge dx_J$  באותו האופן. לכן

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \cdot g + f \cdot dg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_i) \wedge dg \wedge dx_J + (-1)^k (f dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

נראה גם את (3), כלומר  $d^2 = 0$ . מספיק לבדוק זאת למונומים.

$$\begin{aligned} d(d(f dx_I)) &= d(df \wedge dx_I) \\ &= d df \wedge dx_I \pm df \wedge d \left( \underbrace{dx_I}_{=1 \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}} \right)^0 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
 d(df) &= d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \\
 &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\
 &= \sum_{i < j} \pm dx_i \wedge dx_j \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}_{=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■

כנדרש.

**טענה 3.5.4.** תהי  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  חלקה כאשר  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות. נזכיר

$$\begin{aligned}
 f^*: \Omega^k(\mathcal{V}) &\rightarrow \Omega^k(\mathcal{U}) \\
 (f^*\alpha)(\eta_1, \dots, \eta_k) &:= \alpha(f_*\eta_1, \dots, f_*\eta_k)
 \end{aligned}$$

ונטען כי

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha)$$

הוכחה. • נניח כי  $\deg \alpha = 0$ . אז  $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חלקה. מתקיים

$$\begin{aligned}
 d(f^*\alpha)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= d(\alpha \circ f)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
 &\stackrel{\text{directional derivative}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha \circ f)_p \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} (f(p))' \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (p)
 \end{aligned}$$

ומצד שני

$$\begin{aligned}
 (f^*d\alpha)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= d\alpha|_{f(p)} \left( Df_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
 &= \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} dx_j \right) \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \\
 &= d(f^*\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned}$$

לכן יש שיוויון.

• נסתכל על  $\alpha$  ממעלה כללית. מספיק לבדוק עבור מונומים ונניח בלי הגבלת הכלליות

$$\alpha = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

אז

$$f^*\alpha = f^*a(x) \cdot f^*dx_1 \wedge \dots \wedge f^*dx_k$$

ראינו כי  $dx_i = d(x_i)$ . כל  $x_i$  ממעלה 0 לכן קיבלנו

$$f^*\alpha = f^*a(x) \cdot d(f^*x_1) \wedge \dots \wedge d(f^*x_k)$$

נשתמש בכלל לייבניץ.

$$\begin{aligned}
 d(f^*\alpha) &= df^*a \wedge d(f^*x_1) \wedge \dots \wedge df^*x_k + \\
 &\quad + f^*a \cdot \underbrace{dd(f^*x_1)}_{\rightarrow 0} \wedge df^*x_2 \wedge \dots \wedge df^*x_k \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \pm f^*a \cdot df^*x_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{ddf^*x_k}_{\rightarrow 0} \\
 &= df^*a \wedge df^*x_1 \wedge \dots \wedge df^*x_k
 \end{aligned}$$

מתקיים

$$d\alpha = da \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

ולכן קיבלנו

$$f^* d\alpha = f^* da \wedge f^* dx_1 \wedge \dots \wedge f^* dx_k = df^* a \wedge \dots \wedge df^* x_k \quad \blacksquare$$

**הערה 3.5.5.** תהי  $M$  יריעה חלקה ותהיינה

$$(\mathcal{U}, \varphi), \quad (\mathcal{V}, \psi)$$

מפות באטלס. תהיינה  $\alpha_{\mathcal{U}} \in \Omega^k(\varphi(\mathcal{U}))$  ו- $\alpha_{\mathcal{V}} \in \Omega^k(\psi(\mathcal{V}))$ . נסמן  $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ . פונקציית המעבר בתחום הגדרתה. אז מהטענה

$$d\alpha_{\mathcal{U}} = d(f^* \alpha_{\mathcal{V}}) = f^*(d\alpha_{\mathcal{V}})$$

מתקיים  $\alpha_{\mathcal{U}} = f^* \alpha_{\mathcal{V}}$  וגם  $f^* = (\varphi^{-1})^* \circ \psi^*$ , לכן

$$\begin{aligned} \varphi^* d\alpha_{\mathcal{U}} &= \left( \varphi^* \left( (\varphi^{-1})^* \psi^* \right) \right) (d\alpha_{\mathcal{V}}) \\ &= \psi^* d\alpha_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

ולכן פונקציית המעבר אינה תלויה בבחירת קואורדינטות.

**מסקנה 3.5.6.** תהי  $N$  יריעה אז  $d\alpha \in \Omega^{k+1}(N)$  כאשר  $\alpha \in \Omega^k(N)$  מוגדרת היטב ע"י גזירה של הצגות מקומיות. זה נובע מכך ש- $d$  מתנהגת יפה ביחס להחלפת קואורדינטות.**מסקנה 3.5.7.**  $f: M \rightarrow N$  אז  $f^* d\alpha = d(f^* \alpha)$  לכל  $\alpha \in \Omega^k(N)$ .**שימושים**

קיבלנו סדרה

$$\dots \xrightarrow{d_{k-1}} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d_k} \Omega^k(M) \xrightarrow{d_{k+1}} \Omega^{k+1}(M)$$

כאשר  $d_{k+1}d_k = 0$ . אז  $\text{Im } d_k \subseteq \ker d_{k+1}$  וניתן להגדיר את **קוהומונולוגיית de Rham**

$$H_{\text{dR}}^k(M; \mathbb{R}) := \ker d_{k+1} / \text{Im } d_k$$

זה אינווריאנט של יריעה  $M$  שנשמר תחת דיפאומורפיזמים. עבור  $M = \mathbb{T}^2$  נקבל כי

$$\dim H_{\text{dR}}^k(M; \mathbb{R}) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 2 & k=1 \\ 1 & k=2 \\ 3 & k=3 \\ \vdots & \end{cases}$$

ועבור  $M = S^2$  נקבל כי

$$\dim H_{\text{dR}}^k(M; \mathbb{R}) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k=1 \\ 1 & k=2 \\ 3 & k=3 \\ \vdots & \end{cases}$$

ולכן  $S^2$  אינה דיפאומורפית ל- $\mathbb{T}^2$ . עבור  $M$  סגורה מתקיים

$$\pi_1^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong H_{\text{dR}}^1(M; \mathbb{R})$$

ובאופן כללי הומונולוגיית דה-ראם היא טנזור של הומונולוגיית סינגולרית/סימפליציאלית עם  $\mathbb{R}$  מעל  $\mathbb{Z}$ .**הגדרה 3.5.8.** **מכפלה פנימית interior product** בהינתן שדה וקטורי  $v: M \rightarrow TM$  היא העתקה

$$\begin{aligned} i_v: \Omega^k(M) &\rightarrow \Omega^{k-1}(M) \\ \alpha &\rightarrow \alpha(v, \cdot, \dots, \cdot) \end{aligned}$$

ובנקודה  $x \in M$  כאשר  $\eta_i \in T_x M$  נקבל כי היא מוגדרת על ידי

$$(i_v \alpha)_{(x)}(\eta_1, \dots, \eta_{k-1}) = \alpha_{(x)}(v_{(x)}, \eta_1, \dots, \eta_{k-1})$$

**דוגמה 3.5.9.** יהי  $V$  מ"ו. עבור  $\alpha \in \Omega^k(V)$  מתקיים  $i_v \alpha \in \Omega^{k-1}(V)$ .

**הערה 3.5.10.**  $d$  מגדילה מעלה ב-1.  $i_v$  מקטינה מעלה ב-1.

**דוגמה 3.5.11.**  $v: M^m \rightarrow TM$  שדה וקטורי.  $\Omega \in \Omega^m(M)$  אז

$$\operatorname{div}(v) := \frac{di_v \Omega}{\Omega}: M \rightarrow \mathbb{R}$$

דיוורגנציה של שדה וקטורי.

כאשר  $M = \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  נפח אוקלידי ו- $\mathbb{R}^3$   $v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  שדה וקטורי, נקבל כי

$$i_v \Omega(\sigma, \eta) = \Omega(v, \sigma, \eta)$$

$$= \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

$$= v_1 \begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} - v_2 \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} + v_3 \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

$$= v_1 dx_2 \wedge dx_3(\sigma, \eta) - v_2 dx_1 \wedge dx_3(\sigma, \eta) + v_3 dx_1 \wedge dx_2(\sigma, \eta)$$

ולכן

$$i_v \Omega = v_1 dx_2 \wedge dx_3 - v_2 dx_1 \wedge dx_3 + v_3 dx_1 \wedge dx_2$$

נחשב את  $\operatorname{div}(v)$  מתקיים

$$\begin{aligned} di_v \Omega &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Omega + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Omega + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \Omega \end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{di_v \Omega}{\Omega} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

**דוגמה 3.5.12 (עקמומיות גאוס).** יהי  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  משטח עם מטריקה רימנית אוקלידית מורשית מ- $\mathbb{R}^3$ . נרצה לדעת האם קיימת איזומטריה (באופן מקומי) מ- $M$  ל- $\mathbb{R}^2$ . **עקמומיות גאוס** היא אינווריאנט של מטריקה רימנית, ול- $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  עקמומיות 0. לכן אם העקמומיות של  $M$  שונה מאפס, אין איזומטריה כנ"ל.

**הגדרה 3.5.13 (העתקת גאוס).** תהי  $G: M \rightarrow S^2$ . תהי  $\nu(x)$  בחירת נורמל היחידה ל- $x \in M$ .<sup>20</sup> נגדיר  $G(x) = \nu(x)$ .

**הגדרה 3.5.14 (אופרטור צורה Weingarten map).**

$$DG: T_x M \rightarrow T_{\nu(x)} S^2 \cong T_x M$$

כאשר נשים לב כי  $T_{\nu(x)} S^2 = \nu(x)^\perp$  נקרא **אופרטור צורה**.

**הגדרה 3.5.15 (עקמומיות גאוס).**

$$K(x) := \det(DG_{(x)})$$

**עקמומיות גאוס.**

**משפט 3.5.16 (Egregium).** ניתן לחשב את  $K$  במונחים של מטריקה רימנית על  $M$ . (בלי להשתמש בשיכון)

נגדיר  $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ . על  $S^2$  יש תבנית נפח  $\sigma = i_n \Omega$  כאשר  $n(x)$  נורמל ל- $x$ . על  $M$  יש באותו אופן תבנית נפח

$$\Sigma = i_N \Omega$$

כאשר  $N(x)$  נורמל יחידה ל- $M$  ב- $x$ . תבניות אלו תלויות בשיכון.



<sup>20</sup>ניתן לעשות זאת באופן מקומי

$$K \cdot \Sigma = G^* \sigma \quad 3.5.17 \text{ טענה}$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} (G^* \sigma)_X(\eta, \tau) &= \sigma_{G(x)}(DG\eta, DG\tau) \\ &= \Omega(n(G(x)), DG\eta, DG\tau) \end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} n(G(x)) &= G(x) = N(x) \\ DG\eta &\in T_{G(x)}S^2 \cong T_x M \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} \Omega(n(G(x)), DG\eta, DG\tau) &= \Omega(N(x), DG\eta, DG\tau) \\ &= \Sigma(DG\eta, DG\tau) \\ &= \det(DG) \cdot \Sigma(\eta, \tau) \end{aligned}$$

ולכן

$$G^* \sigma = \det(DG) \cdot \Sigma$$

כנדרש.

דוגמה 3.5.18. ניקח

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\hookrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow (x, y, 0) \end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned} G: \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \\ (x, y) &\rightarrow (0, 0, 1) \end{aligned}$$

קבועה ונקבל

$$G^* \sigma = \sigma(DG \cdot, DG \cdot) = 0 = 0 \cdot \Sigma$$

כי  $DG = 0$  לכן  $K \equiv 0$ .

דוגמה 3.5.19.  $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  אז  $G = \mathbb{1}_{S^2}$ . אם  $\sigma = \Sigma$  נפח אוקלידי על  $S^1$  אז

$$G^* \sigma = \mathbb{1}^* \sigma = \sigma = \Sigma$$

ולכן  $K \equiv 1$  ואין איזומטריה לוקאלית בין  $S^2$  ל- $\mathbb{R}^2$ .

### 3.6 אופרטורים על שדות וקטוריים / פונקציות

תהי  $M^m$  יריעה חלקה ותהי  $\Omega \in \Omega^m(M)$  תבנית נפח,  $\rho$  מטריקה רימנית על  $M$ , ו- $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה. יהי  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  שדה וקטורי. הגדרנו

$$\nabla x = \operatorname{div}(x) = \frac{di_v \Omega}{\Omega}$$

ונרצה להגדיר העתקה  $\operatorname{grad} g = \nabla g$  שתתקח כל  $g$  לשדה וקטורי. כעת

$$\begin{aligned} T_x m &\xrightarrow{\sim} T_x^* M \\ v &\rightarrow i_v \rho_x = \rho_x(v, \cdot) \end{aligned}$$

איזומורפיזם אם ורק אם  $\rho_x$  איננה מנונת. מתקיים  $\rho_x(v, v) > 0$  לכל  $v$ , ולכן  $\rho_x(v, \cdot) \neq 0$  לכל  $v \neq 0$ .  $\rho$  מגדירה העתקה

$$TM \cong T^*M$$

. יש שדה וקטורי יחיד  $X$  עבורו

$$i_X \rho = dg$$

ושדה זה נקרא גרדיאנט

$$X := \nabla g = \operatorname{grad} g$$



איור 3.1: דיאגרמה עבור נגזרת חיצונית.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(M) \\
 \parallel & & \uparrow i_X \rho & & \uparrow i_X \Omega & & \\
 & & S & & S & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vect}(M) & & \text{Vect}(M) & & \\
 & & \times & & \times & & 
 \end{array}$$

**דוגמה 3.6.1.** נניח  $\dim M = 3$  ונקבל את הדיאגרמה הקומוטטיבית באיור 3.1 בקואורדינטות לוקליות נקבל

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\Omega = a(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \neq 0$$

ר-

לכן

$$i_X \Omega = ax_1 dx_2 \wedge dx_3 - ax_2 dx_1 \wedge dx_3 + ax_3 dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega^2(M)$$

נקבל את הדיאגרמה הקומוטטיבית באיור 3.2. נרצה להשלים את החץ הנותר. נרצה  $\rho$  מתואמת עם תבנית נפח  $\Omega$ . כלומר

איור 3.2: דיאגרמה עבור נגזרת חיצונית.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(M) \\
 \parallel & & \uparrow i_X \rho & & \uparrow i_X \Omega & & \parallel \\
 & & S & & S & & S \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vect}(M) & & \text{Vect}(M) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(M) \\
 & & \times & & \times & & 
 \end{array}$$

$$\Omega_x(B) = \pm$$

לכל  $B$  בסיס אורתונורמלי של  $T_x M$  לכל  $x$ .  
בקואורדינטות לוקליות זה שקול לכך שמתקיים

$$\Omega = \pm (\det(\rho_x)_{i,j})^{\frac{1}{2}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

**תרגיל 64.**  $v_1, \dots, v_m \in T_x M$ . נרצה

$$\Omega(v_1, \dots, v_m) = \sqrt{|\rho_x(v_i, v_j)|} (\pm 1)$$

המטריצה  $\rho_x(v_i, v_j)$  נקראת **מט' גרם**. לכל  $\rho$  קיימת יחידה (עד כדי סימן) שמתואמת עם  $\rho$ .

נגדיר  $\text{rot} = \text{curl} = \nabla \times X$  על ידי השלמת הדיאגרמה. ראו איור 3.3.

**תרגיל 65.** עבור  $\rho, \Omega, M = \mathbb{R}^3$  מסכים עם הנוסחאות מאינפי.

איור 3.3: דיאגרמה עבור נגזרת חיצונית.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(M) \\
 \parallel & & \downarrow \scriptstyle i_X \rho & \uparrow & \downarrow \scriptstyle i_X \Omega & \uparrow & \parallel \\
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vect}(M) & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Vect}(M) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

איור 3.4: דיאגרמה עבור נגזרת חיצונית.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{\pm \text{Hodge}^*} & \Omega^{m-1} & \xrightarrow{d} & \Omega^m \\
 \downarrow \scriptstyle \iota_S & & \downarrow \scriptstyle \iota_X \rho & & \downarrow \scriptstyle \iota_X \Omega & & \downarrow \scriptstyle \iota_X \\
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\nabla} & \text{Vect}(M) & \xrightarrow{=} & \text{Vect}(M) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

**מסקנה 3.6.2.** לכל שדה וקטורי  $X$ ,  $\text{div}(\text{rot } X) = 0$  (כי  $d^2 = 0$ ). לכל  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  מתקיים  $\text{rot}(\nabla g) = 0$  (כי  $d^2 = 0$ ).

**הערה 3.6.3.** אפשר להתאים את ההגדרה הנ"ל עבור  $M$  מממד כללי כאשר  $\Omega$  מתואמת עם  $\rho$ . במקום  $\text{rot}$  ניקח למטה את השיויון, ועל ידי השלמת הדיאגרמה נקבל העתקה  $\pm \text{Hodge}^*$ . ראו איור 3.4. נגדיר גם

$$\Delta g := \mp \text{div}(\text{grad}(g))$$

אופרטור *Laplace-Beltrami*.

## פרק 4

### נגזרות לי

**הגדרה 4.0.1.** תהי  $M$  יריעה עם שדה וקטורי  $\mathbb{R}$  ו- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . נגדיר את **נגזרת לי** לכיוון  $x$  של  $f$  על ידי

$$L_x f := df(x) : M \rightarrow \mathbb{R}$$

**הערה 4.0.2.** בקואורדינטות מקומיות נקבל

$$L_x : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

אופרטור דיפרנציאלי מסדר 1. על ידי

$$L_x f(p) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i(p)} x_i(p)$$

**הגדרה 4.0.3.** יהיו  $x, y$  שני שדות וקטוריים על  $M$ . נגדיר **קומוטטור**

$$[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x$$

**תרגיל 66.** בפועל, הקומוטטור הינו אופרטור דיפרנציאלי מסדר 1. (מספיק לבדוק בקואורדינטות מקומיות)

**תרגיל 67.** קיים ויחיד שדה וקטורי  $z$  עבורו  $L_z = [L_x, L_y]$ . נקרא **הקומוטטור של השדות**  $x, y$  ונסמן

$$z = [x, y]$$

**הערה 4.0.4.** נסתכל בקואורדינטות מקומיות  $(q_1, \dots, q_n)$  של  $\mathbb{R}^n$ . נכתוב  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$ . ניתן לבדוק כי מתקיים

$$[x, y] = \sum_{j=1}^n x^j \left( \frac{\partial y}{\partial q^j} - y^j \frac{\partial x}{\partial q^j} \right)$$

נזכיר כי יש התאמה בין שדות וקטוריים  $x$ , לבין מד"ר

$$\dot{q}(t) = x_t(q(t))$$

לבין זרימות  $f_x^t: M \rightarrow M$  שהינן דיפא' ושולחות  $q(0) \rightarrow q(t)$ . כאשר  $x_t$  בלתי־תלוי בזמן  $t$  (כלומר, שדה וקטורי קבוע ב- $t$ ) אז

$$f_x^{t+s} = f_x^t \circ f_x^s$$

במקרה זה קיבלנו מבנה של חבורה.

**תרגיל 68.** אם  $[x, y] = 0$  אז

$$f_x^t \circ f_y^s = f_y^s \circ f_x^t$$

(זרימות של  $x, y$  מתחלפות).

**טענה 4.0.5.** יהי  $\lambda \in \Omega^1(M)$  ויהיו  $x, y$  שדות וקטוריים. אז

$$d\lambda(x, y) = L_x(\lambda(y)) - L_y(\lambda(x)) - \lambda([x, y])$$

הוכחה. ניקח  $(q_i)_{i \in [n]} : \mathcal{U} \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות קואורדינטות. נסמן

$$x = \sum_{i \in [n]} x^i \frac{\partial}{\partial \delta^i}, \quad y = \sum_{i \in [n]} y^i \frac{\partial}{\partial \delta^i}$$

וגם

$$\lambda = \sum_{i \in [n]} a_i(\vec{q}) dq_i$$

אז

$$\begin{aligned} \lambda([x, y]) &= \sum_{i \in [n]} a_i(q) dq_i \left( \sum_{j \in [n]} x^j \frac{\partial y}{\partial q^j} - y^j \frac{\partial x}{\partial q^j} \right) \\ &= \sum_{i \in [n]} a_i(q) \left( \sum_{j \in [n]} \left( x^j \frac{\partial y^i}{\partial q^j} - y^j \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j} a_i(q) \left( x^j \frac{\partial y^i}{\partial q^j} - y^j \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) \end{aligned}$$

מתקיים

$$\lambda(x) = \sum_{i \in [n]} a_i x^i$$

ולכן

$$\begin{aligned} L_y \lambda(x) &= \sum_{i,j=1}^n y^j \frac{\partial}{\partial q^j} (a_i x^i) \\ &= \sum_{i,j=1}^n y^j \left( \frac{\partial a_i}{\partial q^j} x^i + a_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) \end{aligned}$$

ובאותו אופן

$$L_x \lambda(y) = \sum_{i,j=1}^n x^j \left( \frac{\partial a_i}{\partial q^j} y^i + a_i \frac{\partial y^i}{\partial q^j} \right)$$

נקבל

$$L_y \lambda(x) - L_x \lambda(y) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial q^j} (x^i y^j - x^j y^i) - \lambda([x, y])$$

ואז

$$\begin{aligned} d\lambda(y, x) &= \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial q^j} dq_j \wedge dq_i(y, x) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial q^j} \begin{vmatrix} y^j & y^i \\ x^j & x^i \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial q^j} (x^i y^j - x^j y^i) \end{aligned}$$

בסך הכל

$$L_y \lambda(x) - L_x \lambda(y) = d\lambda(y, x) - \lambda([x, y])$$

כנדרש. ■

**הגדרה 4.0.6.** יהי  $v$  שדה וקטורי. תהי  $g_t : M \rightarrow M$  זרימה המוגדרת על ידי  $v$ <sup>1</sup> ונסמן  $g_t(x(0)) = x(t)$ . תהי  $\lambda \in \Omega^k(M)$  תבנית.<sup>2</sup> נגדיר **נגזרת לי של  $\lambda$  בכיוון  $v$**  להיות

$$L_v \lambda(x) := \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} g_t^* \lambda(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(g_t^* \lambda)(x) - \lambda(x)}{t}$$

<sup>1</sup>על ידי המד"ר  $\dot{x} = v(x)$   
<sup>2</sup> נזכיר כי

$$g_t^*(x_1, \dots, x_k) := \lambda_{g_t}((g_t)_* x_1, \dots, (g_t)_* x_k)$$

**הערה 4.0.7.** תהי  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקצייה<sup>3</sup>. ההגדרות השונות של נגזרת לי על  $f$  מזדהות. אכן

$$\begin{aligned} L_v f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g_t^* f) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ g_t) \\ &= df \cdot \dot{g}_t(0) \\ &= df(v) \\ &= \frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

**משפט 4.0.8 (Cartan).**

$$L_v \lambda = i_v d\lambda + di_v \lambda$$

**למה 4.0.9.** יהי  $v$  שדה וקטורי שמגדיר זרימה על ידי  $\dot{x} = v(x)$  הי  $u \in T_{x(0)}M$  וקטור משיק ונגדיר גם  $u(t) = (g_t)_* u$  אזי

$$\dot{u}(t) = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} (g_t(x)) u(t) = Dv(g_t(x)) u(t)$$

הוכחה. הדיפרנציאל של  $g_t$  נתון על ידי מטריצת יקובי, לכן

$$u(t) = Dg_t(x) \cdot u = \left( \frac{\partial g_{t,i}}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j} u$$

לכן

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} (Dg_t(x) u) \\ &= \left( D \frac{\partial g_t}{\partial t} \right)(x) \cdot u \\ &= D(v \cdot g_t)(x) u \\ &= Dv(g_t(x)) \underbrace{Dg_t(x) u}_{u(t)} \end{aligned}$$

ולכן

$$\dot{u}(t) = Dv(g_t(x)) u(t) \quad \blacksquare$$

הוכחה (משפט Cartan). נוכיח עבור  $\deg \lambda = 1$  מתקיים

$$\lambda = \sum a_i(x) dx_i$$

כעת

$$\begin{aligned} (g_t^* \lambda)_{(x)}(u) &= \lambda_{(g_t(x))}(u(t)) \\ &= \sum_{i \in [n]} a_i(x(t)) \cdot u_i(t) \end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned} (L_v \lambda)_{(x)}(u) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g_t^* \lambda)_{(x)} u \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x(t)) v^j \cdot u_i(t) + \sum_{i,j=1}^n a_i(x(t)) \cdot \dot{u}_i(t) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

מתקיים מההגדרות

$$i_v(\lambda) = \lambda(v) = \sum_{i \in [n]} a_i v_i$$

ולכן

$$(di_v \lambda)_{(x)}(u) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_j + \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} v_i u_j$$

וגם

$$\begin{aligned} (i_v d\lambda)_{(x)}(u) &= d\lambda(v, u) \\ &= \sum \underbrace{\frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i}_{d\lambda}(v, u) \\ &= \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \begin{vmatrix} v_j & v_i \\ u_j & u_i \end{vmatrix} \\ &= \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_j} (v_j u_i - v_i u_j) \end{aligned}$$

נסכום ונקבל

$$. di_v \lambda(u) + i_v d\lambda(u) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_j(0) + \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} v_j u_i = L_v \lambda(u)$$

■

**תרגיל 69.** הוכיחו את המקרה הכללי של המשפט בעזרת התכונות מהתרגיל הבא.

**תרגיל 70.** יהיו  $x, y, z$  שדות,  $\omega, \alpha, \beta$  תבניות ו- $f$  פונקציה.

1.

$$i_{fx} \omega = f i_x \omega$$

2.

$$i_x f \omega = f i_x \omega$$

3.

$$L_{f(x)} \omega = f L_x \omega + df \wedge i_x \omega$$

4.

$$L_x(f\omega) = f L_x \omega + (L_x f) \wedge \omega$$

5.

$$L_x(\alpha \wedge \beta) = (L_x \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_x \beta)$$

6.

$$d(L_x \omega) = L_x d\omega$$

7.

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$$

8.

$$[x, f \cdot y] = (L_x f) \cdot y + f[x, y]$$

**הגדרה 4.0.10.** זרימה  $g_t$  שומרת על תבנית נפח  $\Omega \in \Omega^n(M)$  אם

$$L_v \Omega = 0$$

**מסקנה 4.0.11.**  $g_t$  שומרת על  $\Omega$  אם ורק אם  $i_v d\Omega + di_v \Omega = 0$  אם ורק אם  $di_v \Omega = 0$  אם ורק אם  $\text{div}(v) = 0$ .

## פרק 5

# אינטגרציה על יריעות

### 5.1 נפח רימני

תהי  $g$  מטריקה רימנית, ובקואורדינטות נכתוב

$$g = \sum g_{i,j} dx_i dx_j$$
$$g_{i,j} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

ונסתכל ראשית על המקרה בו  $x$  מקבילון<sup>1</sup>. נפח התיבה הוא בערך<sup>2</sup>

$$\sqrt{\det(g_{i,j})(x)} \cdot \prod_{i \in [n]} \Delta x_i = \sqrt{\det(g_{i,j})} (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(e_1, \dots, e_n)$$

**תרגיל 71.** בדקו כי הנפח הרימני אינו תלוי בבחירת קואורדינטות עם אותה האוריינטציה.

תהי  $M$  יריעה קומפקטית עם תבנית נפח  $\Omega$ . נרצה להגדיר נפח של  $M$  ביחס ל- $\Omega$

$$\text{Vol}(M, \Omega) := \int_M \Omega$$

### 5.2 אינטגרציה בעזרת תבניות חיצוניות

**הגדרה 5.2.1.** תהי  $M^n$  יריעה עם אוריינטציה ותהי  $\omega \in \Omega^n(M)$ . נגדיר את **תומך של  $\omega$  ב- $M$** :

$$\text{supp}(\omega) := \text{closure}\{x \in M \mid \omega_x \neq 0\}$$

נתיר באינטגרציה יריעה  $M$  שאינה קומפקטית, עם תומך קומפקטי של  $\omega$  ב- $M$ . נתיר  $\partial M \neq \emptyset$ .

**הגדרה 5.2.2 (הגדרה מקומית).**  $\mathbb{R}^n$  עם האוריינטציה הסטנדרטית,  $\mathcal{U}$  פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$  או ב- $\mathbb{R}_+^n$ . אם נכתוב

$$\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

אז  $\text{supp}(\omega) = \text{supp}(f)$  קומפקטי ב- $\mathbb{R}^n$  או ב- $\mathbb{R}_+^n$ . אז נגדיר בעזרת ההגדרה מאינפי

$$\int_{\mathcal{U}} \omega := \int_{\mathcal{U}} f dx_1, \dots, dx_n$$

**טענה 5.2.3.** יהי  $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  דיפא' כאשר  $\mathcal{U}$  קשירה,  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  פתוחות ב- $\mathbb{R}^n$  או ב- $\mathbb{R}_+^n$ . ו- $\omega \in \Omega^n(\mathcal{V})$ . אז

$$\int_{\mathcal{U}} F^* \omega = \begin{cases} \int_{\mathcal{V}} \omega & F \text{ is orientation preserving} \\ -\int_{\mathcal{V}} \omega & F \text{ is orientation reversing} \end{cases}$$

<sup>1</sup> כלומר, עם צלעות  $e_i$  מקבילות ל- $\frac{\partial}{\partial x_i}$  ומאורך  $\Delta x_i$

<sup>2</sup> כי אנו מסתכלים על הצפיפות בנקודה ספציפית

<sup>3</sup> ללא דווקא תבנית נפח

הוכחה. נכתוב

$$\begin{aligned}
 \omega &= f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\
 F^* \omega(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= f(F(x)) \cdot (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(F_* \sigma_1, \dots, F_* \sigma_n) \\
 &= f(F(x)) \cdot \underbrace{\det(F_*)}_{\det \frac{\partial F_i}{\partial x_j}} (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(\sigma_1, \dots, \sigma_n)
 \end{aligned}$$

נחשב<sup>4</sup>.

$$\begin{aligned}
 \int_U F^* \omega &= \int_U f(F(x)) \cdot \det \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n \\
 &= \int_U \operatorname{sgn}(\det F_*) \cdot f(F(x)) \cdot \left| \det \frac{\partial F}{\partial x} \right| dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n \\
 &\stackrel{\text{infi}}{=} \operatorname{sgn}(\det F_*) \cdot \int_{F(U)=V} f(x) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n \\
 &= \int_V \omega
 \end{aligned}$$

■

**הגדרה 5.2.4.** תהי  $M$  יריעה עם שפה ובעלת אוריינטציה. ניקח אטלס סופי מקומית  $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$  כאשר כל  $\varphi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  שומרת אוריינטציה. נבחר פיצול יחידה  $\{\rho_\alpha\}_\alpha$  שמתואם עם האטלס<sup>5</sup>. תהי  $\omega \in \Omega^n(M)$  עם  $\operatorname{supp} \omega$  קומפקטי, ונגדיר

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^* \rho_\alpha \cdot \omega$$

**הערה 5.2.5.** הסכום הנ"ל סופי כי  $\operatorname{supp} \omega$  קומפקטי. ניתן להכליל את ההגדרה למקרה בו אין דרישה לתומך קומפקטי, אך לא נעשה זאת.

**טענה 5.2.6.**  $\int_M \omega$  אינו תלוי בבחירת האטלס  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$  ובפיצול היחידה.

הוכחה. ניקח  $\{(\mathcal{V}_\beta, \psi_\beta)\}_\beta$  אטלס אחר עם  $\chi_\beta$  פיצול יחידה מתאים. אז

$$\begin{aligned}
 \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \omega) &= \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)} \underbrace{\left( \sum_\beta \chi_\beta \right)}_1 \cdot (\varphi_\alpha^{-1})^* \rho_\alpha \cdot (\varphi_\alpha^{-1})^* \omega \\
 &= \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)} \underbrace{\left( \sum_\beta (\varphi_\alpha^{-1})^* \chi_\beta \right)}_{1|_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)}} (\varphi_\alpha^{-1})^* \rho_\alpha (\varphi_\alpha^{-1})^* \omega \\
 &\stackrel{\text{the sum is finite}}{=} \sum_{\alpha, \beta} \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \chi_\beta) (\varphi_\alpha^{-1})^* \omega \\
 &= \sum_{\alpha, \beta} \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \chi_\beta \omega) =: I
 \end{aligned}$$

כעת

$$\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}: \psi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)$$

שומרת אוריינטציה. מתקיים

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \chi_\beta \omega) &= \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)} (\varphi_\alpha^{-1})^* \psi_\beta^* \left( \psi_\beta^{-1} \right)^* (\chi_\beta \rho_\alpha \omega) \\
 &= \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)} \underbrace{(\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^*}_{F^*} \cdot \left( \psi_\beta^{-1} \right)^* (\chi_\beta \rho_\alpha \omega) \\
 &\stackrel{\text{infi coordinate change}}{=} \int_{F(\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta))} \left( \psi_\beta^{-1} \right)^* (\chi_\beta \rho_\alpha \omega)
 \end{aligned}$$

כאשר

$$\operatorname{pr}_s \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta) = (\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)) = \psi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)$$

⋄

<sup>4</sup>כאשר אינטגרציה מאינפי מתאימה לאינטגרציה לפי התבנית  $dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$   
<sup>5</sup>כלומר,  $\rho_\alpha: M \rightarrow [0, 1]$ ,  $\sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1$ , והתומך של  $\rho_\alpha$  ב- $\mathcal{U}_\alpha$



ולכן

$$\int_{F(\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta))} (\psi_\beta^{-1})^* (\chi_\beta \rho_\alpha \omega) = \int_{\psi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)} (\psi_\beta^{-1})^* (\rho_\alpha \chi_\beta \omega)$$

נציב ב-I ונקבל לאחר גלגול החישוב לאחר

$$.I = \sum_{\beta} \int_{\psi_\beta(\mathcal{V}_\beta)} (\psi_\beta^{-1})^* (\chi_\beta \omega)$$

■

הגדרה 5.2.7.  $\Omega_{\text{comp}}^n(M)$  מרחב התכניות עם תומך קומפקטי.

טענה 5.2.8. 1.

$$\int : \Omega_{\text{comp}}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

העתקה לינארית.

2. תהייה  $M = M'$  עם אוריינטציה הפוכה. אז

$$\int_{M'} \omega = - \int_M \omega$$

3. אם  $\partial M_1 = \partial M_2$  כאשר  $M = M_1 \amalg M_2 \amalg \partial M_1$  אז

$$\int_M \omega = \int_{M_1} \omega + \int_{M_2} \omega$$

4. אם  $M, N$  קשירות,  $F: M \rightarrow N$  דיפאומורפיזם ו- $\omega \in \Omega_{\text{comp}}^n(N)$  אז

$$\int_M F^* \omega = \varepsilon \cdot \int_N \omega$$

כאשר  $\varepsilon = \pm 1$  בהתאם לשינוי אוריינטציה על ידי  $F$ .