סיכומי הרצאות בתורת המשחקים

חורף 2018, הטכניון

הרצאותיו של רון הולצמן

סוכמו על ידי מתן שרגר ואלעד צורני

עדכון אחרון 28 באוקטובר 2018

תוכן העניינים

הקדמה

הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות.
להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל tzorani.elad@gmail.com.
אלעד צורני.

ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

G. Owen: Game Theory (Academic Press)

פרטים טכניים

הקורס מועבר על ידי פרופ' רון הולצמן בטכניון. שעת הקבלה בימי א' בין השעות 15:30 ו־16:30.

על תורת המשחקים

תורת המשחקים פותחה עם כתיבת הספר תורת המשחקים והתנהגות כלכלית מאת המתמטיקאי ג'ון פון־נוימן והכלכלן אוסקר מורגנשטרן. עם כן, תורת המשחקים פותחה כתחום מתמטי במחשבה על שימושיה לכלכלה, וכיום הינה כלי מרכזי בחקר כלכלה. אכן הוענקו פרסי נובל בכלכלה על חקר תורת המספרים, בין השאר עבור המתמטיקאי ג'ון נאש שתרם את עיקרון שיווי המשקל. במהלך השנים תורת המשחקים חדרה לתחומים נוספים, בינם תורת האבולוציה, ביולוגיה, וחקר מערכות במדעי המחשב.

החלוקה המרכזית בתורת המשחקים היא חלוקה לתחומים של משחקים שיתופיים ושאינם שיתופיים. בקורס זה נעסוק בשני התחומים. למרות שנראה כי אין קשר בינם, נגלה כי דווקא קיים קשר שכזה. בצורה כללית ביותר, במשחקים שאינם שיתופיים ההנחה הבסיסית היא שכל אחד מהשחקנים פועל להשגת מטרותיו שלו, והינו אוטונומי לקבלת החלטות לקידום מטרותיו. במשחקים שיתופיים, השחקנים יוצרים קואליציות בינם ופועלים במשותף כדי לקדם את מטרות אותה קואליציה.

חלק I

משחקים שאינם שיתופיים

פרק 1

משחקים דמויי־שחמט

1.1 מאפיינים

הרצאה 1
18 באוקטובר
2018

המאפיינים של משחקים דמויי־שחמט הם:

- יש שני שחקנים שנקרא להם "לבן" ו"שחור".
- שני השחקנים משחקים לסירוגין.
- בכל שלב שבו שחקן צריך לשחק, הוא יודע את כל מהלך המשחק עד אותו שלב.
- מהלך המשחק נקבע באופן מלא ע"י החלטות השחקנים: אין צעדי גורל.
- תוצאת המשחק היא אחת מהבאות.
  - נצחון ללבן.
  - נצחון לשחור.
  - תיקו.

נתאר משחק דמוי־שחמט בעזרת עץstress משחק. השלב ההתחלתי הינו שורש העץ r. נציין ליד כל קודקוד את זהות השחקן הבוחר את המסע הבא, b עבור שחור או w עבור לבן. הצלעות יתאימו למסעים האפשריים עבורו. המשחק יכול להסתיים במספר סופי של מסעים, ואם הדבר קורה נקבעת תוצאה (נצחון לאחד הצדדים, או תיקו). לכן, אם הגענו לקודקוד קצה ניתן לרשום עליו את תוצאת המשחק. נסמן B עבור ניצחון של השחור, W עבור ניצחון של הלבן, ו־D עבור תיקו.

1.2 הגדרות

הגדרה 1.2.1. **משחק דמוי־שחמט** מתואר על ידי עץ משחק ובו המרכיבים הבאים:

- עץ $T=(V,E)$ – כלומר גרף עם קבוצה V (תיתכן אינסופית) של קודקודים, וקבוצה E של צלעות, שהוא קשיר וחסר־מעגלים.
- קודקוד r ב־V הנקרא **שורש**. אנו חושבים על כל צלע כמכוונת בכיוון המתרחק מן השורש.
- קבוצת הצלעות היוצאות מקודקוד v נקראת **קבוצת המסעים האפשריים ב־**v.
- קודקוד שאין לו עוקבים נקרא **קודקוד קצה.**
- קבוצת קודקודי הקצה תסומן ע"י V_{end}.
- קבוצת הקודקודים שאינם קודקודי־קצה מחולקת לשתי תת־קבוצות $V_{\text{black}}, V_{\text{white}}$, כלומר

$$V \setminus V_{\text{end}} = V_{\text{white}} \cup V_{\text{black}}$$

כאשר V_{white} היא קבוצת הקודקודים במרחק זוגי מהשורש ו־V_{black} היא קבוצת הקודקודים במרחק אי־זוגי מהשורש, או להיפף. קודקודי V_{white} נקראים קודקודי ההחלטה של לבן, קודקודי V_{black} נקראים קודקודי ההחלטה של שחור.

- **תחרות** (play) היא מסלול בעץ המשחק המתחיל בשורש ומקיים אחד משני הבאים.
  א. מסתיים בקודקוד קצה
  ב. נמשך לבלי סוף
- קבוצת כל התחרויות תסומן ע"י P.

- כחלק מתיאור המשחק, נתונה חלוקה $P = W \amalg B \amalg D$ (זהו סימון לאיחוד זר) המחלקת את התחרויות לכאלה שהמהוות נצחון ללבן, ניצחון לשחור, או תיקו.

הערה 1.2.2. חייבת להיות תוצאה למשחק, אך היא יכולה להתקבל לארך אין־סוף מסעים. לדוגמה, אם שני שחקנים בוחרים ספרות למספר עשרוני בין 0 ו־1. הלבן מנצח אם המספר הינו רציונלי, והשחור אחרת.

הגדרה 1.2.3. במשחק דמוי שחמט, **תכסיס** (strategy) של שחקן הוא כלל האומר לו באיזה מסע לבחור בכל אחד מקודקודי ההחלטה שלו. כלומר, תכסיס של לבן, זוהי פונקציה $\sigma\colon V_{\text{white}} \to E$ כך שלכל $v \in V_{\text{white}}$, מתקיים כי $\sigma\left(v\right)$ מסע אפשרי ב־v. באופן דומה, תכסיס של שחור זוהי פונקציה $\tau\colon V_{\text{black}} \to E$ כך שלכל $v \in V_{\text{black}}$, מתקיים כי $\tau\left(v\right)$ הוא מסע אפשרי ב־v.

דוגמה. כמה תכסיסים יש ללבן בדוגמה שבאיור?

פתרון. ללבן שישה תכסיסים

$$\begin{aligned} &\sigma\left(r\right)=\alpha, \quad \sigma\left(v\right)=\mu \\ &\sigma\left(r\right)=\alpha, \quad \sigma\left(v\right)=\nu \\ &\sigma\left(r\right)=\beta, \quad \sigma\left(v\right)=\mu \\ &\sigma\left(r\right)=\beta, \quad \sigma\left(v\right)=\nu \\ &\sigma\left(r\right)=\gamma, \quad \sigma\left(v\right)=\mu \\ &\sigma\left(r\right)=\gamma, \quad \sigma\left(v\right)=\nu \end{aligned}$$

ולשחור עשרים וארבעה תכסיסים $2\cdot3\cdot4=24$. נשים לב שזוג $\left(\sigma,\tau\right)$ מורכב מתכסיס σ של לבן ותכסיס τ של שחור, קובע לחלוטין את התחרות. בפרט זה קובע לחלוטין את התוצאה.

הגדרה 1.2.4. במשחק דמוי־שחמט, תכסיס של שחקן נקרא **תכסיס ניצחון** אם הוא מבטיח לו ניצחון כנגד כל תכסיס של היריב; הוא נקרא **תכסיס תיקו** אם הוא מבטיח לו לפחות תיקו כנגד כל תכסיס של היריב.

משפט 1.2.5 (von-Neumann, 1928). יהי G משחק דמוי־שחמט שבו כל התחרויות הן סופיות ובאורך חסום (כלומר, קיים M טבעי כך שהאורך של כל תחרות הוא לכל היותר M). אזי, אחד משלושת הבאים נכון עבור G:

1. ללבן יש תכסיס ניצחון.
2. לשחור יש תכסיס ניצחון.
3. לשני השחקנים יש תכסיסי תיקו.

דוגמה. נסתכל על העץ באיור נסתכל על צומת שכן לעלה בעץ. אם זה צומת לבן, לדוגמה זה שבעומק 2, ויש עלה לבן הסמוך לו, הגעה לצומת זה משמעותה נצחון עבור לבן. לכן אפשר להחליף צומת זה בעלה לבן של העץ. באותו האופן עבור שחור, למשל בצומת הימני מהשורש. אם כל העלים הסמוכים, הצומת יתאים לתיקו. כך נמשיך באינדוקציה לאחור עד שנקבל רדוקציה שמשחק עם מהלך יחיד שקובע את התוצאה. הרצאה 2 28 באוקטובר 2018

הוכחה. יהי G משחק כמו במשפט. לכל קדקוד v, נגדיר את G_v להיות התת-משחק המתואר ע"י החלק של עץ המשחק G המופיע מהקדקוד v ומעלה. נשים לב שגם G_v הוא משחק דמוי-שחמט המקיים את הנחת המשפט. כמו-כן, נגדיר את עומק הקודקוד

$$\text{depth}(v) = \text{the maximal length of a play in } G_v$$

לצורך ההוכחה נגדיר פונקציה $f\colon V \to \{W,B,D\}$ כך שלכל $v \in V$ יתקיים התנאי הבא $(*)_v$:

- אם $f(v)=W$ אז ללבן יש תכסיס ניצחון ב־G_v.
- אם $f(v)=B$ אז לשחור יש תכסיס ניצחון ב־G_v.
- אם $f(v)=D$ אז לשני השחקנים יש תכסיסי תיקו ב־G_v.

אם נצליח להגדיר פונקציה כזו, אז התבוננות ב$f(r)$ תראה שבמשחק G עצמו מתקיים א, ב, או ג, כנדרש. אנחנו נגדיר את $f(v)$ ונבדוק את קיום התנאי $(*)_v$ באינדוקציה על $\text{depth}(v)$.

בסיס: $\text{depth}(v)=0$. אז v קדקוד־קצה ובתיאור המשחק נתונה התוצאה $W/B/D$ של תחרות המסתיימת בו, ניקח אותה להיות $f(v)$. ברור שמתקיים התנאי $(*)_v$.

צעד: $\text{depth}(v)>0$. אז v אינו קדקוד־קצה, ולכן יש לו קבוצה לא־ריקה U של עוקבים. נשים ♥ שלכל $u \in U$ מתקיים

$$.\text{depth}(u) < \text{depth}(v)$$

לכן נוכל להניח שלכל $u \in U$, $f(u)$ כבר הוגדר ומתקיים התנאי. כעת נגדיר את $f(v)$. אם $v \in V_{\text{white}}$ נגדיר:

$$f(v) = \begin{cases} W & \exists u \in U\colon f(u) = W \\ B & \forall u \in U\colon f(u) = B \\ D & \text{otherwise} \end{cases}$$

אם $v \in V_{\text{black}}$ נגדיר:

$$f(v) = \begin{cases} B & \exists u \in U\colon f(u) = B \\ W & \forall u \in U\colon f(u) = W \\ D & \text{otherwise} \end{cases}$$

כעת נראה שמתקיים התנאי $(*)_V$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $v \in V_{\text{white}}$. נטפל בשלושת המקרים המופיעים בהגדרת $f(v)$:

1. $f(v) = W$. אז לפי ההגדרה, קיים $u \in U$ קח ש־ $f(u) = W$. לפי הנחת האינדוקציה, ללבן יש תכסיס נצחון ב־G_u, נסמן תכסיס כזה ע"י σ_u. נבנה תכסיס נצחון σ ללבן ב־ G_σ באופן הבא:

   ב־v לבן יבחר את המסע המוביל ל־u. בכל קדקוד החלטה של לבן ב־ G_u, σ מתלכד עם σ_u. בכל שאר קדקודי ההחלטה של לבן של ב־G_v, נגדיר את σ באופן שרירותי. זה אכן מגדיר תכסיס נצחון של לבן ב־ G_v.

2. $f(v) = B$. לפי ההגדרה, לכל $u \in U$ מתקיים $f(u) = B$. לפי הנחת האינדוקציה, לכל u כזה, יש לשחור תכסיס נצחון ב־G_u, נסמנו על ידי τ_u. נבנה תכסיס נצחון τ לשחור ב־G_v באופן הבא:

   בכל קדקוד החלטה של שחור בG_u כלשהו, $u \in U$, τ מתלכד עם τ_u. זה אכן מגדיר תכסיס נצחון של שחור ב־G_v.

3. $f(v) = D$. לפי ההגדרה, לכל $u \in U$ מתקיים $f(u) \in \{B, D\}$ וקיים $u^* \in U$ שעבורו $f(u^*) = D$. לפי הנחת האינדוקציה, לכל $u \in U$ קיים לשחור תכסיס נצחון או תיקו בG_u, נסמן תכסיס כזה ע"י τ_u. כמו־כן, קיים ללבן תכסיס תיקו ב־ G_{u^*}, נסמן תכסיס כזה ע"י σ_{u^*}. ראשית נבנה תכסיס תיקו σ ללבן ב־G_u:

   ב־v לבן יבחר את המסע המוביל ל־u^*. בכל קדקוד החלטה של לבן ב־G_{u*} σ מתלכד עם σ_{u^*}. בכל קדקוד החלטה אחר של לבן ב־G_v, σ מוגדר באופן שרירותי. זה אכן מגדיר תכסיס תיקו ללבן ב־G_v.

   כעת נבנה תכסיס תיקו τ לשחור ב־G_v:

   בכל קדקוד החלטה של שחור ב־G_u כלשהו, $u \in U$, τ מתלכד עם τ_u. זה אכן מגדיר תכסיס תיקו לשחור ב־G_v. ■

דוגמה (המשחק Chomp). עבור שני פרמטרים m, n טבעיים, המשחק $G_{m,n}$ משוחק על לוח $m \times n$ שבו המשבצת השמאלית התחתונה חסרה. כל שחקן בתורו (לבן מתחיל) מוחק מן הלוח משבצת שטרם נמחקה, ואת כל המשבצות ברביע שמימינה ומעליה. שחקן, שבתורו לשחק לא נותרו משבצות בלוח, מפסיד ויריבו מנצח.

טענה 1.2.6. עבור $m = n \geq 2$, ללבן יש תכסיס נצחון ב- $G_{m,n}$.

הוכחה. לבן יבחר במסע הראשון את המשבצת הסמוכה אלכסונית למשבצת החסרה. כתוצאה מכך, יישארו על הלוח שני טורי משבצות באורכים שווים. מכאן והלאה, על כל מסע של שחור באחד הטורים, לבן יגיב במסע סימטרי לו בטור האחר. לכן, המצב של שני הטורים יהיה סימטרי אחרי כל מסע של לבן, וזה אומר שלבן ינצח. ■