# רשימות הרצאה לחבורות לי
חורף 2020, הטכניון


הרצאותיו של מקס גורביץ׳
הוקלדו על ידי אלעד צורני


29 בנובמבר 2020

# תוכן העניינים

# פרק 1

# מבוא

## 1.1 מבוא היסטורי

### 1.1.1 חבורות לי

בנורבגיה, סביב שנת 1870, מתמטיקאי בשם סופוס לי, שחקר משוואות דיפרנציאליות, שם לב להופעה של מה שנקרא "*transformation groups*".

**באופן לוקלי,** נניח כי נתון שדה וקטורי חלק

$$x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

נחפש פתרון למשוואה

$$\begin{aligned} y'(t) &= x(y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

עבור $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. לפי משפט קיום ויחידות של מד"ר, קיים פתרון יחיד $y(t)$ שמוגדר עבור $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ עבור $\varepsilon > 0$ כלשהו.

נגדיר $\varphi_x(t)(y_0) \coloneqq y(t)$ לכל $y_0 \in \mathbb{R}^n$. אז

$$\varphi_X(t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

אוטומורפיזם של $\mathbb{R}^n$. זאת משפחה של אופרטורים שמשתנה באופן חלק כתלות ב־$t$.

מתקיים

$$\varphi_x(0) = \mathrm{id}$$

ומיחידות הפתרונות,

$$\varphi_x(t) \circ \varphi_x(s) = \varphi_x(t+s).$$

התמונה $\mathrm{Im}\,\varphi_x$ נקראת *חבורה חד־פרמטרית*. אז

$$\varphi_x\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$$

הומומורפיזם של חבורות. זה לא מדויק, $\varphi_x$ אולי לא מוגדר תמיד.

**באופן גלובלי,** קיימות משוואות שהפתרונות שלהן אינווריאנטיים לפעולה של חבורה כלשהי. למשל

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^t A = I \right\}.$$

נסתכל על הלפלסיאן

$$\Delta = \sum_{i \in [n]} \partial_{x_i, x_i}.$$

אם $y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מקיימת $\Delta(y) = 0$ אז $y \circ g = y$ לכל $g \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

סופוס לי חקר חבורות חלקות כאלו, ולמעשה הגדיר חשבון דיפרנציאלי של חבורות. כדי לחקור פונקציה חלקה $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ אנו מסתכלים על הנגזרת של $f$ בנקודה, שהיא העתקה לינארית

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

האנלוג לחבורות הוא *חבורת לי* שהיא חבורה שאותה אפשר "לגזור" פורמלית, זאת חבורה עם מבנה של יריעה חלקה, או במילים אחרות, אוביקט חבורה בקטגוריה של יריעות חלקות.

"נגזרת" של חבורת לי נקראת *אלגברת לי* $\mathrm{Lie}(G)$. זהו מרחב וקטורי עם מבנה מסוים. תורת לי בסיסית היא הבנת ההתאמה בין חבורות לי לאלגבראות לי שלהן.

**דוגמאות.**

1. $\text{Lie}\left(\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)\right) = M_n\left(\mathbb{R}\right)$.
2. $\text{Lie}\left(\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)\right) = M_n\left(\mathbb{C}\right)$.
3. $\text{Lie}\left(\mathcal{O}_n\left(k\right)\right) = \mathfrak{so}_n\left(k\right) \coloneqq \left\{A \in M_n\left(k\right) \mid A^t = -A\right\}$.
4. $\text{Lie}\left(\mathsf{SL}_n\left(k\right)\right) = \mathfrak{sl}_n\left(k\right) \coloneqq \left\{A \in M_n\left(k\right) \mid \text{tr}\left(A\right) = 0\right\}$.
5. נגדיר
$$\mathsf{Sp}_{2n}\left(k\right) = \left\{A \in M_{2n}\left(k\right) \;\middle|\; A^tJA = J\right\}$$
עבור
$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ {}_n{-I} & 0 \end{pmatrix}.$$
זאת נקראת *החבורה הסימפלקטית*. אז
$$\text{Lie}\left(\mathsf{Sp}_{2n}\left(k\right)\right) = \mathfrak{sp}_{2n}\left(k\right) \coloneqq \left\{A \in M_{2n}\left(k\right) \;\middle|\; A^tJ = -JA\right\}.$$

באופן כללי, אם ניקח חבורת לי $G \le \mathsf{GL}_n\left(k\right)$ אז $\text{Lie}\left(G\right) \le M_n\left(k\right)$ וזאת תהיה אלגברה יחד עם הפעולה של הקומוטטור
$$\left[A, B\right] = AB - BA.$$

בקורס זה נעשה "קירוב" של התאמת לי על ידי לקיחת *כל* תת־חבורה $G \le \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)$ ובניית $\text{Lie}\left(G\right) \le M_n\left(\mathbb{R}\right)$.

### 1.1.2 סיווג של חבורות לי

חבורות לי מופיעות במגוון מקומות בטבע ובמתמטיקה. הרבה חבורות סימטריה בטבע הינן חבורות לי. אנו רוצים להבין בין השאר מסיבות אלו את המבנה של חבורות לי ולנסות לסווג אותן.

תחילה נבין את הקשר בין $G_1, G_2$ כך ש־$\text{Lie}\left(G_1\right) \cong \text{Lie}\left(G_2\right)$. התשובה לשאלה זאת תיעזר בחבורות כיסוי. נקבל מכך שמספיק להשיג סיווג של אלגבראות לי. למעשה, מספיק לסווג אלגבראות לי מעל $\mathbb{C}$.

נצמצם לפעמים את הדיון לחבורות לי *פשוטות* שהן חבורות לי קשירות ללא תת־חבורות נורמליות קשירות לא טריוויאליות. דוגמאות לחבורות לי פשוטות הן $\mathsf{SL}_n, \mathsf{Sp}_{2n}, \mathsf{SO}_n = \mathsf{SL}_n \cap \mathcal{O}_n$. מהן ניתן, במובן מסוים, לבנות כל חבורת לי. עבור $G$ חבורת לי פשוטה, $\text{Lie}\left(G\right)$ היא אלגברת לי פשוטה. לכן, מספיק לסווג אלגבראות לי פשוטות.

סביב שנת 1890, $\mathrm{Cartan}$ ו־$\mathrm{Killing}$ סיווגו באופן מלא אלגבראות לי פשוטות מעל $\mathbb{C}$, שהן "אבני הבניין של הסימטריה של הטבע".

יש משפחות של אלגבראות לי פשוטות, שנקראות אלגבראות קלאסיות. הן $\mathfrak{sl}_n\left(\mathbb{C}\right), \mathfrak{so}_n\left(\mathbb{C}\right), \mathfrak{sp}_{2n}\left(\mathbb{C}\right)$ שהגדרנו מקודם. חבורות לי שאלו הן אלגבראות לי שלהן נקראות חבורות קלאסיות. התברר שלמעט המשפחות הקלאסיות יש עוד בדיוק 5 אלגבראות לי פשוטות, שנקראות מיוחדות $\mathrm{exceptional}$. הן מסומנות $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$. הכי קטנה מהן היא $G_2$ בעלת מימד $14$, והכי גדולה היא $E_8$ בעלת מימד $248$. לצורך הבנת התוצאה, נדרשת התעמקות אלגברית במבנה של אלגבראות לי, מה שדורש זמן.

### 1.1.3 חבורות קומפקטיות

חבורות לי הן חבורות שהן יריעות חלקות. מתברר שאם הן קומפקטיות, יש הרבה מה להגיד עליהן. חבורות לי קומפקטיות הן למשל
$$\mathcal{O}\left(n\right) \equiv \mathcal{O}_n\left(\mathbb{R}\right) \coloneqq \left\{A \in \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right) \;\middle|\; A^tA = I\right\}$$
$$U\left(n\right) \coloneqq \left\{A \in \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right) \;\middle|\; \bar{A}^tA = I\right\}.$$

כאשר המבנה שלהן מושרה מזה של $M_n\left(k\right) \cong k^{n^2}$.

### 1.1.4 תורת ההצגות

בתורת לי הגיעו להבנה שניתן ללמוד הרבה על חבורה ע"י הבנת הפעולה שלה על מרחבים וקטוריים. זוהי תורת הצגות. עבור חבורות קומפקטיות יש מבנה נחמד לתורת ההצגות.

### 1.1.5 חבורות רדוקטיביות ואלגבריות

משפט שנחתור אליו הוא שכל חבורת לי קומפקטית קשירה היא חבורה אלגברית של מטריצות ממשיות. מסקנה ממשפט זה תהיה שלכל חבורת לי קומפקטית ניתן להגדיר קומפלקסיפיקציה על ידי הרחבת סקלרים. זאת מוגדרת על ידי השורשים המרוכבים של אותם פולינומים. חבורות שנקבל מקומפלקסיפיקציה נקראות *רדוקטיביות* ומהוות משפחה גדולה.

בשנת 1920 פיתח הרמן וייל $\left(\mathrm{Weyl}\right)$ את המבנה וההצגות של חבורות לי רדוקטיביות על סמך חבורות קומפקטיות.

בשנת 1940 קלוד שיבליי $\left(\mathrm{Chevalley}\right)$ הראה שניתן לתאר כל חבורת לי פשוטה כחבורה אלגברית. מסקנה של כך היא ש"לא צריך" אנליזה כדי לחקור תורת לי. אפשר גם להגדיר אנלוגית של חבורות לי מעל כל שדה.

### 1.1.6 התפתחות מודרנית של התחום

חבורות לי התפתחו לנושאים מאוחרים שמופיעים בהרבה תחומים.

- אחד התחומים הוא חבורות אלגבריות. תחום אחר הוא חבורות סופיות מסוג לי (Lie Type) שהן חבורות אלגבריות מעל שדה סופי. אלו אבני יסוד בסיווג של חבורות סופיות פשוטות.
- נושא אחר הוא מרחבים סימטריים. אלו מרחבים טבעיים עם פעולה של חבורת לי. למשל $S^3$ הוא מרחב סימטרי עם הפעולה של $\mathcal{O}(3)$.
- חבורות לי גם הפכו לכלי מרכזי בחקר של תבניות אוטומורפיות ותורת המספרים. הן מתקשרות למשפט Harish-Chandra ולתוכנית Lag-lands.
- חבורות לי מתקשרות גם לאנליזה הרמונית.
- נחקרת היום גם תורת הצגות אינסוף־מימדיות של חבורות לי ופעולות של חבורות לי על מרחבי פונקציות. בין השאר נחקרות פעולות על מרחבי פונקציות שמקודדים תוכן של תורת מספרים.
- נחקרות גם היום, משנת 1985, חבורות קוונטיות, שהן דפורמציות של חבורות לי.
- נחקרות גם חבורות ואלגבראות אינסוף־מימדיות שנקראות אלגבראות Kac-Moody.
- ישנן תורת לי קטגורית ותורת לי גיאומטרית. הראשונה עוסקת למשל בקטגוריות שמוגדרות באופן דומה לחבורות לי.

## 1.2 חבורות לי

### 1.2.1 אקספוננט של מטריצות

נעבוד מעל שדה $k\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.
נסמן ב־

$$M\equiv M_n\equiv M_n(k)$$

מטריצות $n\times n$ מעל $k$ עם הנורמה האוקלידית המושרית מ־$k^{n^2}$.

***טענה 1.2.1 (עקרון ההצבה).*** *יהי*

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

*עבור $a_n\in k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $r$.*
*לכל $A\in M_n$ עבורה $\|A\|<r$ הטור $F(A)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n$ מגדיר טור מטריצות מתכנס בנורמה.*

*הוכחה.* הנורמה מקיימת

$$\|X+Y\|\le\|X\|+\|Y\|$$
$$\|X\cdot Y\|\le\|X\|\cdot\|Y\| .$$

לכן

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=k}^{\ell}a_nA^n\right\| &\le\sum_{n=k}^{\ell}|a_n|\,\|A^n\|\\ &\le\sum_{n=k}^{\ell}|a_n|\,\|A\|^n\\ &<\sum_{n=k}^{\ell}|a_n|\,(r-\varepsilon)^n\\ &\xrightarrow[k,\ell\to\infty]{}0\end{aligned}$$

ולפי קריטריון קושי נקבל שיש לסדרה $\left\|\sum_{n=1}^{N}a_nA^n\right\|$ גבול. ■

אם $F(z)$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $\rho$ ו־$G(z)$ עם רדיוס התכנסות $\sigma$, אז

$$\begin{aligned}(F+G)(A) &= F(A)+G(A)\\ (FG)(A) &= F(A)\cdot G(A)\end{aligned}$$

עבור $A$ עם $\|A\| < \min\{\rho,\sigma\}$. אם $G(0)=0$ אז $F\circ G$ הוא טור חזקות, ועבור מטריצה $A$ כך ש־$\|A\| < \sigma$ וגם $\|G(A)\| < \rho$ הטור

$$(F\circ G)(A) = F(G(A))$$

מתכנס.

**הגדרה 1.2.2 (אקספוננט של מטריצה).** עבור $z\in k$ נגדיר

$$\exp(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot z^n$$

ועבור $z\in k$ עם $|z|<1$ נגדיר

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot z^n .$$

מכאן, לכל מטריצה $X\in M$ ניתן להגדיר

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X$$

ועבור $X\in M$ עבורה $\|X-I\|<1$ נגדיר

$$\log(x) \coloneqq \log(1+(X-I)) .$$

***מסקנה 1.2.3.*** *1. לכל מטריצה $X\in M$ מתקיים*

$$\exp(X)\cdot\exp(-X) = I$$

*וגם $\exp(X)\in \mathrm{GL}_n(k)$.*

*2. כאשר $\|X-I\|<1$ מתקיים*

$$\exp(\log(X)) = X .$$

*3. עבור $X\in M$ המקיימת $\|X\|<\log 2$ מתקיים*

$$\log(\exp(X)) = X .$$

*אכן מתקיים*

$$\begin{aligned}\|\exp(X)-I\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n\right\|\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\|X\|^n\\ &= \exp(\|X\|)-1\\ &< 2-1\\ &= 1\end{aligned} .$$

**תרגיל 1.** כאשר $XY=YX$ מתקיים

$$\exp(X)\cdot\exp(Y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(X+Y)^n = \exp(X+Y) .$$

בפרט, עבור $t,s\in k$ מתקיים

$$\exp(tX)\cdot\exp(sX) = \exp((t+s)X) .$$

לכן

$$\begin{aligned}a_X\colon k &\to \mathrm{GL}_n(k)\\ t &\mapsto \exp(tX)\end{aligned}$$

הומומורפיזם של חבורות.

**טענה 1.2.4.** *1. $a_x$ הוא הפתרון היחיד למשוואה*

$$\begin{aligned} a'(t) &= a(t)\cdot X \\ a(0) &= I \end{aligned}$$

*או למשוואה*

$$\begin{aligned} a'(t) &= X\cdot a(t) \\ a(0) &= I \end{aligned}$$

*עבור*

$$a\colon k\to \mathsf{GL}_n(k).$$

*2. $a_X$ הוא ההומומורפיזם החלק היחיד*

$$a\colon k\to \mathsf{GL}_n(k)$$

*שמקיים $a'(0)=X$.*

*הוכחה.* 1. $a_X$ פתרון למשוואה. מתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(a_X(t)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\frac{1}{n!}(tX)^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}X^n \\ &= \mathsf{exp}(tX)\cdot X \\ &= X\cdot \mathsf{exp}(tX) \end{aligned}.$$

יחידות נובעת ממשפט קיום ויחידות למד"ר.

2. אם $a$ הוא הומומורפיזם כלשהו, כמו שנתון, מתקיים

$$\begin{aligned} a'(t) &= \left.\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left(a(t+s)\right)\right|_{s=0} \\ &= \left.\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left(a(t)\cdot a(s)\right)\right|_{s=0} \\ &= a(t)\cdot a'(0) \\ &= a(t)\cdot X \end{aligned}$$

ומ־$1$ נובע $a=a_X$. ■

**דוגמה 1.2.5.** נחשב אקספוננט של מטריצה אלכסונית. נקבל

$$\begin{aligned} \mathsf{exp}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\mathsf{exp}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathsf{exp}(\lambda_n)\end{pmatrix} \end{aligned}.$$

**הגדרה 1.2.6 (אופרטור ההצמדה).** בהינתן $a\in\mathsf{GL}_n(k)$ נגדיר את *אופרטור ההצמדה ב־$a$* על ידי

$$\begin{aligned} \mathsf{Ad}(a): M &\to M \\ X &\mapsto aXa^{-1} \end{aligned}.$$

**סימון 1.2.7.** עבור מרחב וקטורי $V$ נסמן ב־$\mathsf{End}\left(V\right)$ את מרחב ההעתקות הלינאריות מ־$V$ לעצמו. זהו מרחב וקטורי איזומורפי ל־$M_{n^2}$.

**סימון 1.2.8.** עבור מרחב וקטורי $V$ נסמן ב־$\mathsf{GL}\left(V\right) \subseteq \mathsf{End}\left(V\right)$ את האנדומורפיזמים ההפיכים של $V$. לעתים מסמנים זאת $\mathsf{Aut}\left(V\right)$.

**הערה 1.2.9.** מתקיים $\mathsf{Ad}\left(a\right) \in \mathsf{GL}\left(M\right)$ כיוון ש־

$$\mathsf{Ad}\left(a^{-1}\right)\left(\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(X\right)\right) = X.$$

כמו כן, Ad הוא הומומורפיזם של חבורות $\mathsf{GL}_n\left(k\right) \to \mathsf{GL}\left(M\right)$ כיוון שמתקיים

$$\mathsf{Ad}\left(ab\right)\left(X\right) = abX\left(ab\right)^{-1} = a\left(bXb^{-1}\right)a^{-1} = \mathsf{Ad}\left(a\right) \circ \mathsf{Ad}\left(b\right)\left(X\right).$$

**תרגיל 2.** אם $f\left(z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ טור חזקות, ו־$X \in M_n$ עבורה $f\left(X\right)$ מוגדרת, מתקיים

$$\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(f\left(X\right)\right) = f\left(\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(X\right)\right).$$

בפרט, מתקיים

$$\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(\exp\left(X\right)\right) = \exp\left(\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(X\right)\right).$$

***מסקנה 1.2.10.*** *נניח כי $V$ מרחב וקטורי עם בסיס $B$. יש זיהוי*

$$\begin{aligned} \mathsf{End}\left(V\right) &\cong M_n \\ T &\leftrightarrow \left[T\right]_B \end{aligned}.$$

*לכן, עבור $X \in \mathsf{End}\left(V\right)$ אפשר להגדיר $\exp\left(X\right) \in \mathsf{GL}\left(V\right)$ כאופרטור שמקיים*

$$\left[\exp\left(X\right)\right]_B = \exp\left(\left[X\right]_B\right)$$

*ובנייה זאת לא תלויה בבחירת הבסיס $B$.*

**הגדרה 1.2.11 (הקומוטטור).** עבור $X, Y \in M$ נגדיר

$$\left[X, Y\right] = XY - YX.$$

**הגדרה 1.2.12.** עבור $X \in M$ נגדיר

$$\begin{aligned} \mathsf{ad}\left(X\right) : M &\to M \\ Y &\mapsto \left[X, Y\right] \end{aligned}.$$

***טענה 1.2.13.*** *עבור $X \in M$ מתקיים*

$$\mathsf{Ad}\left(\exp\left(X\right)\right) = \exp\left(\mathsf{ad}\left(x\right)\right).$$

*הוכחה.* מתקיים

$$\mathsf{Ad}\left(\exp\left(X\right)\right)\left(Y\right) = \exp\left(X\right) \cdot Y \cdot \exp\left(-X\right)$$

ומצד שני

$$\exp\left(\mathsf{ad}\left(X\right)\right)\left(Y\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\mathsf{ad}\left(X\right)\right)^k\left(Y\right).$$

נגדיר

$$A\left(t\right) \coloneqq \mathsf{Ad}\left(\exp\left(tX\right)\right).$$

נחפש את $A\left(t\right)$. מתקיים

$$A\left(0\right) = \mathsf{Ad}\left(I\right) = \mathsf{id}$$

וגם

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\left(t\right)\left(Y\right)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(tX\right) \cdot Y \cdot \exp\left(-tX\right)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(tX\right)\right)Y\exp\left(-tX\right) + \exp\left(tX\right)Y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(-tX\right)\right) \\ &= X \cdot A\left(t\right)\left(Y\right) + A\left(t\right)\left(Y\right) \cdot \left(-X\right) \\ &= \mathsf{ad}\left(X\right)\left(A\left(t\right)\left(Y\right)\right) \end{aligned}.$$

לכן

$$A'\left(t\right) = \mathsf{ad}\left(X\right) \cdot A\left(t\right).$$

ראינו שזה מחייב

$$A\left(t\right) = \exp\left(t\mathsf{ad}\left(X\right)\right).$$

לכן $A\left(1\right)$ מה שרצינו. ■

### 1.2.2 נוסחת Campbell-Baker-Hausdorff

ראינו שקיימות סביבה $U \subseteq M$ של $0$ וסביבה $V \subseteq \mathsf{GL}_n(k)$ של $I$ כך ש־$\exp\colon U \to V$ הוא הומאומורפיזם.
עבור $A, B \in V$ מספיק קרובות ל־$I$ מתקיים $AB \in V$. כלומר, אם $A = \exp(X)$ ו־$B = \exp(Y)$ יש $Z \in V$ עבורה

$$\exp(Z) = \exp(X) \cdot \exp(Y) .$$

נחשוב על ההתאמה הזאת כפונקציה, $Z = C(X, Y)$, שמוגדרת לפחות עבור $X, Y$ קרובים מספיק ל־$0$.
נרצה נוסחה עבור $C(X, Y)$, או לפחות תיאור כלשהו של $C$. ראינו שאם $XY = YX$ אז $C(X, Y) = X + Y$.

***טענה 1.2.14 (נוסחת Campbell-Baker-Hausdorff).*** *באופן כללי מתקיים*

$$C(X, Y) = x + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \ldots$$

*כאשר שאר הביטויים הם קומוטטורים ארוכים יותר ב־$X, Y$.*

**הערה 1.2.15.** מתקיים

$$C(tx, ty) = t(x + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + o(t^2) .$$

**הגדרה 1.2.16 (אלגברת לי של מטריצות).** תת מרחב $\mathfrak{g} \leq M$ יקרא *אלגברת לי של מטריצות* אם הוא סגור תחת הקומוטטור.

***מסקנה 1.2.17.*** *אם $X, Y \in \mathfrak{g}$ ו־$C(X, Y)$ מוגדרת, אז $C(X, Y) \in \mathfrak{g}$.*

**תרגיל 3.** לכל מטריצה $X \in M_n$ מתקיים

$$\det(\exp(X)) = e^{\mathsf{tr}(X)} .$$

נביט בטורי החזקות הבאים.

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n = \begin{cases} \frac{1 - \exp(-z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

$$G(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n = \begin{cases} \frac{\log(1+z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

כאשר $G$ מוגדרת כשמתקיים $|z| < 1$. אז

$$G(\exp(z) - 1) \cdot \exp(z) \cdot F(z) = \frac{z}{\exp(z) - 1} \cdot \exp(z) \cdot \frac{1 - \exp(-z)}{z} = 1$$

למשל כאשר $|z| < \log(2)$.

***טענה 1.2.18 (נוסחת Duhamel).*** *תהי $x\colon \mathbb{R} \to M_n$ מסילה חלקה. מתקיים*

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \exp(x(t)) = \exp(x(t)) F(\mathsf{ad}(x(t))(x'(t))) .$$

*הוכחה.* נגדיר

$$Y(s, t) \coloneqq \exp(-sx(t)) \cdot \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\exp(sx(t))) .$$

אז

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\exp(x(t))) = \exp(x(t)) Y(1, t)$$

וגם

$$Y(0, t) = 0 .$$

אז

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial s} &= \exp(-sx(t)) \cdot (-x(t)) \cdot \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\exp(sx(t))) + \exp(-sx(t)) \cdot \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(x(t) \exp(sx(t))) \\ &= \exp(-sx(t)) \cdot x'(t) \cdot \exp(sx(t)) \\ &= \mathsf{Ad}(\exp(-sx(t)))(x'(t)) \\ &= \exp(\mathsf{ad}(-sx(t)))(x'(t)) \\ &= \exp(-s\,\mathsf{ad}(x(t)))(x'(t)) \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} Y(1,t) &= \int_0^1 \frac{\partial Y}{\partial s}(s,t)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n s^n}{n!} (\mathrm{ad}(x(t)))^n (x'(t))\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 \frac{(-1)^n s^n}{n!} (\mathrm{ad}(x(t)))^n (x'(t))\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\mathrm{ad}(x(t)))^n (x'(t)) \\ &= F(\mathrm{ad}(x(t)))(x'(t)) \end{aligned}$$

כנדרש. ■

**סימון 1.2.19.** נסמן

$$[X_1, X_2, \ldots, X_k] \coloneqq [X_1, \ldots, [X_{k+2}, [X_{k+1,X_k}]]] .$$

**תרגיל 4.** אם $C(X,Y)$ מוגדר, גם $C(tX,tY)$ מוגדר לכל $t\in(0,1)$.

***טענה 1.2.20 (נוסחת $Dynkin$ (1947)).*** *אם $C(X,Y)$ מוגדר אז*

$$C(X,Y) = \sum_{k\in\mathbb{N}_+} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\in\mathbb{N}\\ j_1,\ldots,j_k\in\mathbb{N}\\ \forall n\in\mathbb{N}:\ i_n+j_n>0}} \frac{1}{(i_1+j_1)\cdot\ldots\cdot(i_k+j_k)\cdot i_1!j_1!\cdot\ldots\cdot i_k!j_k!} [\underbrace{X,\ldots,X}_{i_1},\underbrace{Y,\ldots,Y}_{j_1},\ldots,\underbrace{X,\ldots,X}_{i_k},\underbrace{Y,\ldots,Y}_{j_k}] .$$

*הוכחה.* נגדיר

$$Z(t) = C(tX,tY)$$

עבור $t\in(0,1)$, ונגדיר $Z(0)=0$. אז

$$\exp Z(t) = \exp(tX)\cdot\exp(tY)$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(\exp Z(t)) &= \mathrm{Ad}(\exp(tX))\,\mathrm{Ad}(\exp(tY)) \\ \exp(\mathrm{ad}\,Z(t)) &= \exp(\mathrm{ad}(tX))\exp(\mathrm{ad}(tY)) \\ &= \exp(t\,\mathrm{ad}(X))\exp(t\,\mathrm{ad}(Y)) . \end{aligned}$$

לכן מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp Z(t)) = X\exp(Z(t)) + \exp(Z(t))\cdot Y$$

ומצד שני

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp Z(t)) = \exp(Z(t))\cdot F(\mathrm{ad}\,Z(t))(Z'(t)) .$$

לכן

$$X\exp(Z(t)) + \exp(Z(t))\cdot Y = \exp(Z(t))\cdot F(\mathrm{ad}\,Z(t))(Z'(t))$$

ולאחר פישוט נקבל

$$\begin{aligned} F(\mathrm{ad}\,Z(t))(Z'(t)) &= \mathrm{Ad}(\exp(-Z(t)))(X) + Y \\ &= \exp(-ad(Z(t)))(X) + Y \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} Z'(t) &= (G(\exp(\mathrm{ad}(Z(t))) - I)\exp(\mathrm{ad}(Z(t))))(\exp(-ad(Z(t)))(X) + Y) \\ &= G(\exp(\mathrm{ad}(Z(t))) - I)(X + \exp(\mathrm{ad}\,Z(t))(Y)) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1} (\exp(t\,\mathrm{ad}\,X)\exp(t\,\mathrm{ad}\,Y) - I)^k (X + \exp(\mathrm{ad}(Z(t)))(Y)) \end{aligned}$$

כאשר

$$\exp\left(t\,\mathrm{ad}\left(Y\right)\right)\left(Y\right)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{j!}t^{j}\left(\mathrm{ad}\left(Y\right)\right)^{j}\left(Y\right)=Y$$

ולכן

$$\begin{aligned}Z'\left(t\right) & =\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k+1}\left(\exp\left(t\,\mathrm{ad}\,X\right)\exp\left(t\,\mathrm{ad}\,Y\right)-I\right)^{k}\left(X+\exp\left(t\,\mathrm{ad}\left(X\right)\right)\left(Y\right)\right)\\
 & =\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k+1}\sum_{n\in\mathbb{N}}t^{n}\left[\text{sums of commutators in }X\text{ and }Y\right]
\end{aligned}.$$

אז

$$\begin{aligned}C\left(X,Y\right) & Z\left(1\right)\\
 & =\int_{0}^{1}Z'\left(t\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}.$$

על ידי אינטגרציה איבר איבר בטור של $Z'$ נגיע לנוסחה עבור $C\left(X,Y\right)$ ונקבל את הנדרש. ■

**הערה 1.2.21.** מתקיים

$$C\left(X,Y\right)=\log\left(\exp\left(X\right)\cdot\exp\left(Y\right)\right).$$

# פרק 2

# אלגבראות לי

## 2.1 חבורות לי ואלגבראות לי

### 2.1.1 מאלגבראות לי לחבורות לי

לכל $V \leq M_n(\mathbb{R})$ נגדיר חבורת מטריצות

$$\Gamma(V) \coloneqq \{\mathsf{exp}(X_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{exp}(X_m) \mid x_1, \ldots, x_m \in V\} \leq \mathsf{GL}_n(k)$$

שהיא תת־חבורת מטריצות של $\mathsf{GL}_n(k)$.

### 2.1.2 מחבורות לי לאלגבראות לי

בכיוון ההפוך, עבור כל תת־חבורה $G \leq \mathsf{GL}_n(k)$ נגדיר את *המרחב המשיק* ל־$G$ על ידי

$$\mathfrak{g} \coloneqq \mathsf{Lie}(G) = \left\{X \in M_n \,\middle|\, \exists \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G\colon \substack{\gamma \in \mathscr{C}^1 \\ \gamma(0) = I \\ \gamma'(0) = X}\right\}.$$

***טענה 2.1.1.*** *1. $\mathfrak{g}$ מרחב וקטורי.*

*2. עבור $X \in \mathfrak{g}$ ו־$a \in G$ מתקיים*

$$\mathsf{Ad}(a)(X) \in \mathfrak{g}.$$

*3. $\mathfrak{g}$ אלגברת לי.*

*הוכחה.* 1. תהיינה $X, Y \in \mathfrak{g}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. נניח כי $a, b$ מסילות ב־$G$ עבורן

$$a(0) = b(0) = I$$
$$a'(0) = X$$
$$b'(0) = Y.$$

נגדיר

$$c(t) \coloneqq a(\alpha t) \cdot b(\beta(t)) \in G$$
$$c(0) = I.$$

אז

$$c'(0) = \alpha a'(0)\, b(0) + \beta a(0)\, b'(0) = \alpha X + \beta Y \in \mathfrak{g}.$$

2. תהי $\gamma$ מסילה ב־$G$ עם $\gamma(0) = I$ ו־$\gamma'(0) = X$. לכל $t$ בתחום ההגדרה של $\gamma$ מתקיים

$$\delta(t)\, \mathsf{Ad}(a)(\gamma(t)) \in G.$$

אז

$$\begin{aligned} \delta(0) &= \mathsf{Ad}(a)(I) = I \\ \delta'(0) &= \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(a\gamma(t)\, a^{-1}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \mathsf{Ad}(a)(\gamma'(0)) \\ &= \mathsf{Ad}(a)(X) \end{aligned}$$

כנדרש.

3. יהיו $X, Y \in \mathfrak{g}$ ו־$a, b$ מסילות ב־$G$ עבורן $a'(0) = X, b'(0) = Y$. יהי

$$I = a(t)\, a(t)^{-1}$$

ואז

$$0 = a'(0) \cdot a(0)^{-1} + a(0) \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \left( a(t)^{-1} \right) \Big|_{t=0}.$$

לכן

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \left( a(t)^{-1} \right) \Big|_{t=0} = -a'(0) = -X.$$

אז

$$\gamma(t) = \mathsf{Ad}(a(t))(Y) \in \mathfrak{g}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= a'(0) \cdot Y \cdot a(0)^{-1} + a(0)\, Y \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \left( a(t)^{-1} \right) \Big|_{t=0} \\ &= X \cdot Y \cdot Y + I \cdot Y \cdot (-X) \\ &= [X, Y] \end{aligned}$$

לכן

$$[X, Y] = \gamma'(0) \in \mathfrak{g}.$$

■

נרצה להראות שתחת תנאים מתאימים, ההעתקות $\mathsf{Lie}, \Gamma$ הופכיות אחת לשנייה. כלומר, נרצה ליצור התאמה חח"ע בין חבורות מטריצות מסוימות לבין אלגבראות לי.

ליתר דיוק, נוכיח שלושה דברים מרכזיים.

1. לכל אלגברת לי $\mathfrak{g} \leq M_n$ ממשית מתקיים
$$\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}(\Gamma(\mathfrak{g})).$$

2. עבור כל תת־חבורה $G \leq \mathsf{GL}_n(k)$ מתקיים
$$\Gamma(\mathsf{Lie}(G)) \leq G.$$

3. נחפש תנאים על $G$ עבורם
$$\Gamma(\mathsf{Lie}(G)) = G.$$

חבורה $G$ כזאת תיקרא בהמשך *קשירה*.

נוכיח את משפט התת־חבורה הסגורה: אם $G \leq \mathsf{GL}_n(k)$ תת־חבורה סגורה וקשירה, מתקיים

$$\Gamma(\mathsf{Lie}(G)) = G.$$

**הערה 2.1.2.** בנינו התאמה בין חבורות לי של מטריצות לאלגבראות לי של מטריצות. ניתן להתאים באופן כללי בין חבורות לי לאלגבראות לי (אבסטרקטיות).

קיים משפט שאומר שכל אלגברת לי כזאת איזומורפית לאלגברת לי של מטריצות, ונקבל מדיון זה שחבורת לי כללית היא חבורת כיסוי של חבורות לי של מטריצות.

**דוגמה 2.1.3.** החבורה $G \leq \mathsf{GL}_n(k)$ של מטריצות אלכסוניות הפיכות איזומורפית ל־$(k^\times)^n$.

מתקיים

$$\mathsf{Lie}(G) = \left\{ X \in M_n \;\middle|\; \substack{\exists \gamma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G \\ \gamma(0) = I \\ \gamma'(0) = X} \right\}.$$

במקרה זה $\mathsf{Lie}(G)$ אלגברת המטריצות האלכסוניות, שהאיזומורפית ל־$k^n$.

זה נכון כי לכל $X = \mathsf{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ נוכל להביט במסילה $\gamma(t) = \mathsf{diag}(1 + tx_1, \ldots, 1 + tx_n) \in G$. מתקיים כאן

$$[X, Y] = 0.$$

**הגדרה 2.1.4.** עבור $\mathfrak{g} \leq M$ אלגברת לי, נגדיר

$$\Gamma(\mathfrak{g}) := \left\{ \exp(X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(X_t) \;\middle|\; (X_i)_{i \in [t]} \in \mathfrak{g} \right\} \leq \mathsf{GL}_n(k).$$

**דוגמה 2.1.5.** אם $\mathfrak{g}$ האלגברה של מטריצות אלכסוניות נקבל

$$\Gamma\left(g\right)=\left\{ \mathsf{diag}\left(e^{\lambda_{1}},\ldots,e^{\lambda_{n}}\right)\;\middle|\;\left(\lambda_{i}\right)_{i\in[n]}\subseteq k\right\}$$

כי $e^{\lambda}e^{\mu}=e^{\lambda+\mu}$.

אם $k=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, כל $z$ ניתן לכתיבה כ־$e^{a}$. עבור $G=\left(k^{\times}\right)^{n}$ נקבל

$$\Gamma\left(\mathsf{Lie}\left(G\right)\right)=G.$$

אם $k=\mathbb{R}$ נקבל כי $e^{a}$ מכסה את המספרים החיוביים אז

$$\Gamma\left(\mathsf{Lie}\left(G\right)\right)=\left\{ \mathsf{diag}\left(a_{1},\ldots,a_{n}\right)\mid\forall i\in[n]\colon a_{i}>0\right\} \cong\left(R_{>0}\right)^{n}.$$

אם נחשוב על הטופולוגיה של $G$ נגלה שהיא לא קשירה וש־$\Gamma\left(\mathsf{Lie}\left(G\right)\right)$ רכיב קשירות של $G$.

נסמן $\mathfrak{g}=\mathsf{Lie}\left(G\right)$. ו־$k\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. אז $\mathsf{exp}\colon\mathfrak{g}\to G$ הוא הומומורפיזם בין $\left(k^{n},+\right)\cong\left(\mathfrak{g},+\right)$ ל־$G$. כאשר $k=\mathbb{R}$ זה איזומורפיזם

$$\mathsf{exp}\colon\mathfrak{g}\xrightarrow{\sim}\Gamma\left(\mathsf{Lie}\left(G\right)\right).$$

אם $k=\mathbb{C}$, יהיה גרעין, כי $e^{2\pi ki}=1$ עבור $k$ שלם. עבור $n=1$ למשל, נקבל העתקת כיסוי

$$\mathsf{exp}\colon\;\left(\mathbb{C},+\right)\to\left(\mathbb{C}^{\times},\cdot\right).$$

**דוגמה 2.1.6.** נחשוב האם $\left(k^{n},+\right)$ היא חבורת מטריצות, ואם כן מה אלגברת לי שלה.

התשובה היא כן, מתקיים

$$G=\left\{ \begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & \cdots & x_{1}\\
\vdots\\
0 &  & \ddots\\
\vdots &  &  &  & x_{n}\\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}\;\middle|\;\left(x_{i}\right)_{i\in[n]}\subseteq k\right\} \leq\mathsf{GL}_{n+1}\left(k\right).$$

**דוגמה 2.1.7.** מתקיים

$$\mathsf{Lie}\left(G\right)=\left\{ \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & \cdots & x_{1}\\
\vdots\\
0 &  & \ddots\\
\vdots &  &  &  & x_{n}\\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}\;\middle|\;\left(x_{i}\right)_{i\in[n]}\subseteq k\right\} \leq\mathsf{GL}_{n+1}\left(k\right)$$

ו־$\mathsf{exp}\colon\;\left(\mathsf{Lie}\left(G\right),+\right)\xrightarrow{\sim}G$ איזומורפיזם.

נשים לב כי מתקיים

$$\mathsf{det}\left(\mathsf{exp}\left(X\right)\right)=e^{\mathsf{tr}\,X}$$

וניתן דוגמאות למשפחות של חבורות לי.

**דוגמאות (דוגמאות למשפחות של חבורות לי).**

1.

$$\mathsf{SL}_{n}\left(k\right)=\left\{ g\in\mathsf{GL}_{n}\left(k\right)\mid\;\mathsf{det}\left(g\right)=1\right\}$$

עם אלגברת לי

$$*\mathfrak{sl}_{n}\left(k\right)=\left\{ X\in M_{n}\mid\;\mathsf{tr}\left(X\right)=0\right\}$$

כפי ששנראה.

תהי $X\in\mathfrak{sl}_{n}$. תהי $\gamma\left(t\right)=\mathsf{exp}\left(tX\right)\in\mathsf{SL}_{n}\left(k\right)$. אז $\gamma\left(0\right)=I$ ו־$\gamma'\left(0\right)=X$. מתקיים

$$\mathfrak{sl}_{n}\subseteq\mathsf{Lie}\left(\mathsf{SL}_{n}\left(k\right)\right)$$

ולמעשה יש שוויון: אם $\gamma\left(t\right)\in\mathsf{SL}_{n}\left(k\right)$ וגם $\gamma\left(0\right)=I,\gamma'\left(0\right)=X$ מתקיים

$$0\underset{\left[\gamma\left(t\right)\in\mathsf{SL}_{n}\right]}{=}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\mathsf{det}\left(\gamma\left(t\right)\right)\right)_{t=0}=\mathsf{tr}\left(\gamma'\left(0\right)\right)=\mathsf{tr}\left(X\right)$$

ולכן באמת $\mathfrak{sl}_{n}=\mathsf{Lie}\left(\mathsf{SL}_{n}\left(k\right)\right)$.

.2

$$\mathcal{O}\left(n\right)=\left\{ g\in\mathsf{GL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)\mid g^{t}\cdot g=I\right\}$$

.3

$$SO\left(n\right)=\mathcal{O}\left(n\right)\cap\mathsf{SL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$$

עם אלגברת לי

$$\mathfrak{so}_{n}=\left\{ X\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)\mid X^{t}=-X\right\} .$$

.4

$$U\left(n\right)=\left\{ g\in\mathsf{GL}_{n}\left(\mathbb{C}\right)\mid\bar{g}^{t}\cdot g=I\right\}$$

עם אלגברת לי

$$\mathfrak{u}_{n}=\left\{ X\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)\mid\bar{X}^{t}=-X\right\} .$$

.5

$$\mathbb{SU}\left(n\right)=U\left(n\right)\cap\mathsf{SL}_{n}\left(\mathbb{C}\right)$$

עם אלגברת לי

$$\mathfrak{su}_{n}=\mathfrak{u}_{n}\cap\mathfrak{sl}_{n}\left(\mathbb{C}\right).$$

***טענה 2.1.8.*** *1. מתקיים*

$$\mathfrak{so}_{n}=\mathsf{Lie}\left(\mathsf{SO}\left(n\right)\right)=\mathsf{Lie}\left(\mathcal{O}\left(n\right)\right).$$

*2. מתקיים*

$$\mathfrak{su}_{n}=\mathsf{Lie}\left(\mathsf{SU}\left(n\right)\right).$$

*הוכחה.* 1. תהי

$$\gamma\colon\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathsf{SO}\left(n\right).$$

אז

$$\forall s\in\left(-\varepsilon,\varepsilon\right):\ \left(\gamma\left(s\right)\right)^{t}\gamma\left(s\right)=I.$$

נגזור את המשווה ונקבל

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left(\gamma\left(s\right)^{t}\right)_{s=0}\cdot\overset{I}{\cancel{\gamma\left(0\right)}}+\overset{I}{\cancel{\gamma\left(0\right)^{t}}}\cdot\gamma'\left(0\right)=0.$$

שחלוף מתחלף עם נגזרת, לכן נקבל

$$\gamma'\left(0\right)^{t}+\gamma'\left(0\right)=0.$$

לכן $\gamma'\left(0\right)\in\mathfrak{so}_{n}$.

להיפך, אם

$$\begin{aligned}\mathsf{exp}\left(sX\right)^{t} & =\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}s^{n}\left(X^{t}\right)^{n}\\
 & =\mathsf{exp}\left(sX^{t}\right)\\
 & =\mathsf{exp}\left(-sX\right)\\
 & =\mathsf{exp}\left(sX\right)^{-1}
\end{aligned}.$$

לכן $\mathsf{exp}\left(sX\right)\in\mathcal{O}\left(n\right)$. ראינו שאם $X\in\mathfrak{sl}_{n}$ אז $\mathsf{exp}\left(sX\right)\in\mathsf{SL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$, לכן $\gamma\left(s\right)=\mathsf{exp}\left(sX\right)\in\mathsf{SO}\left(n\right)$. אכן מתקיים $\gamma\left(0\right)=I,\gamma'\left(0\right)=X$.

2. ההוכחה דומה. ■

## 2.2 דוגמאות במימדים נמוכים

**דוגמאות.**

1. $\mathcal{O}(1)=\{\pm1\}\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. $$\mathsf{SO}(2)=\left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\;\middle|\;a^2+b^2=1\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\theta\cos & -\sin\theta\\ \theta\sin & \cos\theta\end{pmatrix}\;\middle|\;\theta\in\mathbb{R}\right\}\cong S^1$$
   אלו כל הסיבובים בזווית $\theta$.
3. מתקיים
   $$\mathcal{O}(2)=\mathsf{SO}(2)\sqcup\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\mathsf{SO}(2).$$
4. מתקיים $\mathbb{C}^{\times}\cong\mathsf{GL}_1(\mathbb{C})$. כמרחב ממשי
   $$\mathbb{C}=\mathsf{Span}\{1,i\}.$$
   כל $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ נותן אופרטור הפיך על $C\cong\mathbb{R}^2$ על ידי מכפלה. אם נביט במטריצה המייצגת של אופרטור זה ביחס לבסיס $(1,i)$ נקבל ש־$z=a+ib$ מיוצג על ידי $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.
   נקבל שיכון
   $$\iota\colon\mathsf{GL}_1(\mathbb{C})\hookrightarrow\mathsf{GL}_2(\mathbb{R}).$$
   מתקיים
   $$\mathsf{U}(1)\,\mathsf{eq}\,\{z\in\mathbb{C}\mid z\bar{z}=1\}=S^1.$$
   אז
   $$\iota(\mathsf{U}(1))=\mathsf{SO}(2).$$
   זאת מתרחבת להעתקה לינארית $\mathbb{C}\to M_2(\mathbb{R})$. לכן $\mathsf{U}(1)\cong\mathsf{SO}(2)$.
5. מתקיים $\mathsf{Lie}(\mathsf{GL}_1(\mathbb{C}))=\mathbb{C}$. אם ניקח $z\in\mathbb{C}$ נקבל
   $$\iota(\exp(z))=\exp(\iota(z)).$$
   אז מתקיים
   $$\begin{aligned}\mathsf{Lie}(i(\mathsf{U}(1)))&=\mathsf{Lie}(\mathsf{SO}(2))\\&=\mathfrak{so}_2\\&=\left\{\begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}\;\middle|\;\alpha\in\mathbb{R}\right\}\\&=i\mathbb{R}\\&\le\mathbb{C}\end{aligned}.$$
   עבור $\mathfrak{so}_2\ni\begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}$ אכן ניתן להגדיר
   $$\gamma_\alpha(t):=\begin{pmatrix}(\alpha t)\cos & -\sin(\alpha t)\\ (\alpha t)\sin & \cos(\alpha t)\end{pmatrix}\in\mathsf{SO}(2)$$
   שמקיימת $\gamma_\alpha(0)=I,\gamma'_\alpha=\begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}$.

***משפט 2.2.1 (משפט הסיבוב של אוילר).*** *כל איבר $g\in\mathsf{SO}(3)$ הוא סיבוב סביב ציר נתון במרחב. כלומר, קיימת מטריצה $T\in\mathsf{SO}(3)$ עבורה*
$$TgT^{-1}=\begin{pmatrix}\theta\cos & -\sin\theta & 0\\ \theta\sin & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

*הוכחה.* מתקיים

$$
\begin{aligned}
\det(g-I) &= \det\left(g^{t}-I\right)\\
&= \det\left(g^{1}-I\right)\\
&= \det\left(g^{-1}(I-g)\right)\\
&= \det\left(g^{-1}\right)\det(I-g)\\
&= \det(I-g)\\
&= (-1)^{3}\det(g-I)\\
&= -\det(g-I)
\end{aligned}
$$

לכן $\det(g-I)=0$. לכן $1$ שורש של הפולינום האופייני של $g$ לכן יש ל־$g$ וקטור עצמי $e_3\in\mathbb{R}^3$ עם ערך עצמי $1$. נסמן $W:=\{e_3\}^{\perp}\le\mathbb{R}^3$. אז

$$
\begin{aligned}
\langle g\cdot W,e_3\rangle &= \left\langle W,g^{t}\cdot e_3\right\rangle\\
&= \left\langle W,g^{-1}e_3\right\rangle\\
&= \langle W,e_3\rangle\\
&= \{0\}
\end{aligned}
$$

לכן $W$ נשמר על ידי $g$. לכן קיים בסיס אורתונורמלי $B$ שבו

$$[g]_B=\begin{pmatrix} h & \\ & 1\end{pmatrix}$$

עבור $h\in M_2(\mathbb{R})$ וקיימת $T\in\mathrm{SO}(2)$ עבורה

$$TgT^{-1}=[g]_B=\begin{pmatrix} h & \\ & 1\end{pmatrix}.$$

לכן $h=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ עבור $\theta\in\mathbb{R}$ כלשהי. ■

**הערה 2.2.2.** נכתוב

$$\begin{pmatrix} h & \\ & 1\end{pmatrix}=\exp(Y)$$

עבור

$$Y=\begin{pmatrix}0 & \alpha & 0\\ -\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{so}_3.$$

אז

$$g=\mathrm{Ad}\left(T^{-1}\right)(\exp(Y))=\exp\left(\mathrm{Ad}\left(T^{-1}\right)(Y)\right)$$

ומתקיים

$$\mathrm{Ad}\left(T^{-1}\right)(Y)\in\mathfrak{so}_3.$$

אז

$$\exp\colon\mathfrak{so}_3\to\mathrm{SO}(3)$$

הוא על.

נזכיר כי מתקיים

$$\mathfrak{so}_3=\left\{X\in M_3(\mathbb{R})\;\middle|\;X^{t}=-X\right\}.$$

נבחר בסיס

$$
\begin{aligned}
E_1&=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\\
E_2&=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\\
E_3&=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ל־$\mathfrak{so}_3$. נסמן את האיזומורפיזם

$$\begin{aligned}\mathfrak{so}_3 &\to \mathbb{R}^3\\ \alpha_1 E_2 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 &\mapsto \begin{pmatrix} {}_1\alpha \\ {}_2\alpha \\ {}_3\alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

על ידי $X \mapsto \vec{X}$.

**למה 2.2.3.** *1. מתקיים*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{so}_3 \colon \overrightarrow{AB}[X,Y] = X\left(\vec{Y}\right).$$

*2. מתקיים*

$$\overrightarrow{\mathrm{Ad}\,(a)\,(X)} = a\left(\vec{X}\right).$$

*הוכחה.* 1. מספיק לבדוק על איברי בסיס

$$\overrightarrow{[E_i, E_j]} = E_i\left(\vec{E_j}\right).$$

2. exp הוא על. נקבל

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{Ad}\,(a)\,(Y)} &= \overrightarrow{\exp\left(\mathrm{ad}\,X\right)(Y)}\\ &= \overrightarrow{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\left(\mathrm{ad}\,X\right)^n (Y)}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\overrightarrow{\left(\mathrm{ad}\,(X)\right)^n (Y)}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} X^n\left(\vec{Y}\right)\\ &= \exp\left(X\right)\left(\vec{Y}\right)\\ &= a\left(\vec{Y}\right).\end{aligned}$$

■

**הערה 2.2.4.** הפעולה של $\mathrm{SO}\,(3)$ על $\mathrm{Lie}\,(\mathrm{SO}\,(3))$ על ידי $a \cdot X = \mathrm{Ad}\,(a)\,(X)$ איזומורפית לפעולה הסטנדרטית של $\mathrm{SO}\,(3)$ על $\mathbb{R}^3$.

**טענה 2.2.5.** *1. עבור $X \in \mathfrak{so}_3$ המטריצה $\exp\,(X)$ היא סיבוב סביב $\vec{X} \in \mathbb{R}^3$ בכיוון יד ימין בזווית $\|\vec{x}\|$.*

*2. מתקיים $\exp\,(X) = \exp\,(Y)$ אם ורק אם $X = c \cdot Y$ עבור $c \in \mathbb{R}$ וגם*

$$\left\|\vec{X} - \vec{Y}\right\| = 2\pi k$$

*עבור $k \in \mathbb{Z}$.*

*הוכחה.* 1. יהי $X \in \mathfrak{so}_3$. אז יש $a \in \mathrm{SO}\,(3)$ ו־$\alpha = \left\|\vec{X}\right\|$ עבורם

$$\begin{aligned}\vec{X} &= a \cdot \left(\vec{E_3}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\alpha \cdot \mathrm{Ad}\,(a)\,E_3\end{aligned}$$

ולכן

$$X = \alpha\,\mathrm{Ad}\,(a)\,(E_3) = \mathrm{Ad}\,(a)\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

אז

$$\begin{aligned}\exp\,(X) &= \exp\left(\mathrm{Ad}\,(a)\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)\\ &= \mathrm{Ad}\,(a)\begin{pmatrix} \alpha\cos & -\sin\alpha & 0 \\ \alpha\sin & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

אז $\exp(X)$ סיבוב סביב הציר

$$a \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = a\left(\vec{E_3}\right) = \frac{1}{\alpha}\vec{X}$$

או סביב הציר $\vec{X}$. הזווית היא $\alpha = \left\|\vec{X}\right\|$.

2. תרגיל. ■

**תרגיל 5.** חישבו על $\mathsf{SO}(2)$ כמרחב טופולוגי כפי שמתקבל מהטענה. $\exp\colon \mathfrak{so}_3 \to \mathsf{SO}(3)$ העתקה רציפה ועל.

**דוגמה 2.2.6.** מתקיים

$$\mathsf{SU}(2) = \left\{A \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; \bar{A}^t = A^{-1}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{pmatrix} \;\middle|\; {\scriptstyle |\alpha|^2+|\beta|^2=1}\right\}.$$

טופולוגית נוכל לזהות זאת עם $S^3$.

מהמשפט הספקטרלי, לכל $a \in \mathsf{SU}(2)$ יש $g \in \mathsf{SU}(2)$ עבורה

$$gag^{-1} = \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z^{-1}\end{pmatrix}.$$

ידוע $z^{-1} = \bar{z}$ לכן $z = e^{i\theta}$ כלומר

$$gag^{-1} = \exp\begin{pmatrix}i\theta & 0\\ 0 & -i\theta\end{pmatrix}$$

ואז

$$a = \mathsf{Ad}\left(g^{-1}\right)\exp\begin{pmatrix}i\theta & \\ & -\theta\end{pmatrix} = \exp\left(\mathsf{Ad}\left(g^{-1}\right)\begin{pmatrix}i\theta & \\ & -i\theta\end{pmatrix}\right).$$

לכן

$$\exp\colon \mathfrak{su}_2 \to \mathsf{SU}(2)$$

על. מתקיים

$$\mathfrak{su}_2 = \left\{\begin{pmatrix}{}_3 i\zeta & \zeta_1 - i\zeta_2\\ {}_2\zeta_1 + i\zeta & -i\zeta_3\end{pmatrix} \;\middle|\; \zeta_i \in \mathbb{R}\right\}$$

ואז $\mathfrak{su}_2 \cong \mathbb{R}^3$ כשמטריצה כנ"ל מתאימה לוקטור $\begin{pmatrix}{}_1\zeta\\ {}_2\zeta\\ {}_3\zeta\end{pmatrix}$. במעבר ל־$\mathbb{R}^3$ מתקבלת המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

אם $a \in \mathsf{SU}(2)$ ו־$X, Y \in \mathfrak{su}_2$ נקבל

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{Ad}(a)(X), \mathsf{Ad}(a)(Y)\rangle &= \mathsf{tr}\left(\overline{aXa^{-1}}^t aYa^{-1}\right)\\ &= \mathsf{tr}\left(a\bar{X}^t Ya^{-1}\right)\\ &= \langle X, Y\rangle\end{aligned}.$$

אז

$$\mathsf{Ad}\colon \mathsf{SU}(2) \to \mathsf{GL}(\mathfrak{su}_2) \cong \mathsf{GL}_3(\mathbb{R})$$

והאיזומורפיזם נותן

$$\Im\,\mathsf{Ad} \subseteq \mathcal{O}(2).$$

למעשה גם

$$\Im\,\mathsf{Ad} \subseteq \mathsf{SO}(2).$$

לכן אפשר במקרה זה להסתכל על

$$\mathsf{Ad}\colon \mathsf{SU}(2) \to \mathsf{SO}(3).$$

אם $Z \in \mathfrak{su}_2$ מתקיים

$$\forall X, Y \in \mathfrak{su}_2\colon\ \langle \mathsf{ad}(Z)(X), Y\rangle = \langle X, -\,\mathsf{ad}(Z)(Y)\rangle.$$

אז

$$\mathsf{ad}\colon \mathfrak{su}_2 \to \mathsf{End}(\mathfrak{su}_2) \cong M_3(\mathbb{R})$$

והמשוואה נותנת בזיהוי זה ש־$\mathsf{ad}(Z)^t = -\,\mathsf{ad}(Z)$. לכן נוכל לחשוב על $\mathsf{ad}$ כהעתקה

$$\mathsf{ad}\colon \mathfrak{su}_2 \to \mathfrak{so}_2.$$

***טענה 2.2.7.*** *1.*

$$\mathsf{ad}\colon \mathfrak{su}_2 \to \mathfrak{so}_3$$

*איזומורפיזם של אלגבראות לי.*

*2.*

$$\mathsf{Ad}\colon \mathsf{SU}\left(2\right) \to \mathsf{SO}\left(3\right)$$

*היא על ומתקיים*

$$\ker \mathsf{Ad} = \left\{\pm 1\right\}.$$

*הוכחה.* 1. משוויון מימדים, מספיק להראות שמתקיים

$$\ker\left(\mathsf{ad}\right) = \left\{0\right\}.$$

נניח כי $X \in \ker\left(\mathsf{ad}\right)$ כלומר

$$\forall Y \in \mathfrak{su}_2\colon\ \left[X,Y\right] = 0.$$

תהי $Z \in M_2\left(\mathbb{C}\right)$. אפשר לכתוב $Z = U + iV + \alpha I$ עבור סקלר $\alpha \in \mathbb{C}$ ועבור $U,V \in \mathfrak{su}_2$. נקבל

$$\left[X,Z\right] = \left[X,U\right] + i\left[X,V\right] + \left[X,\alpha I\right] = 0 + 0 + 0 = 0.$$

לכן $\left[X,Z\right] = 0$ ולכן $X$ מתחלף עם $M_2\left(\mathbb{C}\right)$. לכן יש $\beta \in \mathbb{C}$ עבורה $X = \beta I$. ידוע $\mathsf{tr}\, X = 0$ לכן $\beta = 0$ ולכן $X = 0$.

2. חישוב $\ker \mathsf{Ad}$ דומה מאוד לסעיף הקודם. $g \in \ker \mathsf{Ad}$ מתחלפת עם מטריצות כי $gag^{-1} = a$. כדי להראות ש־$\mathsf{Ad}$ יהיה על נשים לב כי $\mathsf{Ad} \circ \exp = \exp \circ\, \mathsf{ad}$ כאשר $\exp, \mathsf{ad}$ שתיהן על. ■

***משפט 2.2.8.*** *לכל חבורה $G \le \mathsf{GL}_n\left(k\right)$ מתקיים $\Gamma\left(\mathsf{Lie}\left(G\right)\right) \le G$.*
*במילים אחרות, לכל $G \le \mathsf{GL}_n\left(k\right)$ ולכל $X \in \mathsf{Lie}\left(G\right)$ מתקיים $\exp\left(X\right) \in G$.*

*הוכחה.* תהי $G \le \mathsf{GL}_n\left(k\right)$ ותהי $X \in \mathsf{Lie}\left(G\right)$. נוכיח שמתקיים $\exp\left(tX\right) \in G$ עבור $|t|$ מספיק קטן. אם זה מספיק עבור $|t| < \varepsilon$, עבור $k \in \mathbb{Z}$ עבורו $\frac{1}{k}$ נקבל

$$\exp\left(\frac{1}{k}X\right) \in G \implies \exp\left(X\right) = \exp\left(\frac{1}{k}X\right)^k \in G.$$

תהי $\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}\left(G\right)$ ונבחר בסיס $\left(X_i\right)_{i\in[k]}$ עבור $\mathfrak{g}$ כמרחב וקטורי. קיימות מסילות $a_i\left(t\right) \in G$ כך שמתקיים $a_i\left(0\right) = I$ וגם $a_i'\left(0\right) = X_i$. נגדיר

$$g\colon \mathfrak{g} \to G$$

על ידי

$$g\left(t_1X_1 + \ldots + t_kX_k\right) = a_1\left(t_1\right)\cdot\ldots\cdot a_k\left(t_k\right).$$

יהי $S$ תת־מרחב משלים ל־$\mathfrak{g}$ בתוך $M_n$.
תהי

$$h\colon S \to M$$
$$Y \mapsto I + Y,$$

כך שמתקיים $f = g \cdot h$. אז

$$\left(\mathsf{d}h\right)_0\left(Y\right) = Y$$
$$\left(\mathsf{d}g\right)_0\left(X\right) = X.$$

נגדיר

$$f = g\cdot h\colon M_n \to M_n.$$

אז

$$\left(\mathsf{d}f\right)_0 = \mathsf{id},\quad f\left(0\right) = I$$

ובפרט $\left(\mathsf{d}f\right)_0$ הפיכה. לכן, לפי משפט הפונקציה ההפוכה $f$ הפיכה מקומית ב־$0$. כלומר, קיימות סביבה $W_1$ של $I$, סביבה $W_2$ של $0$, והעתקה

$$f^{-1}\colon W_1 \to W_2 \subseteq M_n = \mathfrak{g} \oplus S$$

שהפכית ל־$f$. כיוון שהעתקה לסכום ישר היא סכום העתקות (כי סכום ישר הוא קו־מכפלה) נוכל לכתוב $f^{-1} = U + V$ כאשר $U,V$ העתקות מ־$W_1$ ל־$\mathfrak{g}, S$ בהתאמה.

נרצה להראות שמתקיים $V\left(\exp\left(tX\right)\right)=0$ כיוון שאז נקבל

$$f^{-1}\left(\exp\left(tX\right)\right)=g$$

מספיק להראות

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\left(\exp\left(tX\right)\right)\right)=0$$

וכיוון שמתקיים $a\left(t\right)=\exp\left(tX\right)$ צריך לשם כך להראות

$$\mathrm{d}V_{a(t)}\cdot X\cdot a\left(t\right)=\left(\mathrm{d}V\right)_{a(t)}\cdot a'\left(t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\left(\exp\left(tX\right)\right)\right)=0.$$

נרצה לכן להראות

$$\left(\mathrm{d}V\right)_{a}\cdot X\cdot a=0$$

לכל מטריצה בסביבת $I$ ולכל $X\in\mathfrak{g}$. מתקיים $V\colon M_n\to S$ ולכן $\mathrm{d}V_a\colon M_n\to S$. כעת

$$\begin{aligned}a&=f\left(X_a,Y_a\right)\\&=g\left(X_a\right)\cdot h\left(Y_a\right)\end{aligned}$$

כאשר $X_a\in\mathfrak{g},Y_a\in S$. אז

$$V\left(f\left(X_a+X,Y_a\right)\right)=Y_a$$

לכל $X\in\mathfrak{g}$. כלומר,

$$\left(\mathrm{d}V\right)_a\cdot\left(\mathrm{d}f\right)_{\left(X_a,Y_a\right)}\left(X\right)=0\,.$$

אבל

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{d}f\right)_{\left(X_a,Y_a\right)}\left(X\right)&=\left(\mathrm{d}g\right)_{X_a}\left(X\right)\cdot h\left(Y_a\right)\\&=\left(\mathrm{d}g\right)_{X_a}\cdot X\cdot g\left(X_a\right)^{-1}\cdot a\end{aligned}\,.$$

קיבלנו

$$\left(\mathrm{d}V\right)_a\cdot\left(\mathrm{d}g\right)_{X_a}\cdot X\cdot g\left(X_a\right)^{-1}\cdot a=0$$

לכל $a$ בסביבת $I$ ולכל $X\in\mathfrak{g}$. אבל, נרצה

$$\left(\mathrm{d}V\right)_a\cdot X\cdot a=0\,.$$

נסמן $X':=\left(\mathrm{d}g\right)_{X_a}\cdot X\cdot g\left(X_a\right)^{-1}$ ונשים לב שמתקיים $X'=\gamma'\left(0\right)$. אז

$$\gamma\left(t\right)=g\left(X_a-tX\right)\cdot g\left(X_a\right)^{-1}\in G$$

וגם $\gamma\left(0\right)=I$. לכן מהגדרת $\mathfrak{g}$ נקבל $X'$. לכן ההעתקה $X\mapsto X'$ היא העתקה לינארית $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$. אם $a=I$ ו־$f\left(0,0\right)=I$ נקבל

$$\left(\mathrm{d}g\right)_0=\mathrm{id},\quad X_a=0$$

ואז

$$A_I=\mathrm{id}$$

אופרטור הפיך. לכן אם נרחיק את $a$ ממטריצת היחידה קצת, עדיין $A_a$ הפיך, ולכן על. ■

# פרק 3

# חבורות מטריצות

### 3.0.1 חבורות מטריצות כחבורות לי

## 3.1 טופולוגיה על חבורות מטריצות

**הגדרה 3.1.1.** ראינו שלכל חבורה $G \leq \mathsf{GL}_n(k)$ אפשר לדבר על $\mathsf{exp}(X) \in G$ לכל $X \in \mathsf{Lie}(G)$.
לכל $G \leq \mathsf{GL}_n(k)$ נגדיר טופולוגיה חדשה באופן הבא.
נאמר שקבוצה $U \subseteq G$ פתוחה אם לכל $g \in U$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שמתקיים $g \cdot \mathsf{exp}(X) \in U$ לכל $X \in \mathsf{Lie}(G)$ המקיים $\|X\| < \varepsilon$.
פורמלית, הקבוצות

$$B_{g,\varepsilon} = \left\{ g \cdot \mathsf{exp}(X) \;\middle|\; \substack{X \in \mathsf{Lie}(G) \\ \|X\| < \varepsilon} \right\}$$

נותנות בסיס לטופולוגיה.

**תרגיל 6.** באופן דומה אפשר לקחת בסיס אחר $\{\mathsf{exp}(X) \cdot g\}$ אבל הוא נותן את אותה הטופולוגיה.

**תרגיל 7.** ההעתקות

$$\begin{aligned} \mathsf{exp}\colon \mathsf{Lie}(G) &\to G \\ \cdot\colon G \times G &\to G \\ ()^{-1} : G &\to G \end{aligned}$$

רציפות בטופולוגיה הנ"ל.

**הבחנה 3.1.2.** קיבלנו שלכל $g \in G$ אם נבחר $\varepsilon > 0$ מספיק קטן יש סביבה $B_{g,\varepsilon}$ של $g$ שהומיאומורפית לקבוצה פתוחה במרחב אוקלידי. לכן $G$ יריעה טופולוגית. ההעתקות המעבר (בין הקבוצות במרחבים האוקלידיים) יוצאות חלקות ולכן $G$ *יריעה חלקה*.
אכן, אם

$$h = g_1 \, \mathsf{exp}(X_1) = g_2 \cdot \mathsf{exp}(X_2)$$

נקודה בחיתוך של שתי קבוצות פתוחות, ניתן לכתוב

$$X_1 = \mathsf{log}\left(g_1^{-1} g_2 \, \mathsf{exp}(X_2)\right) \coloneqq \psi(X_2)$$

ולכן $X_1$ כפונקציה של $X_2$ היא פונקציה חלקה $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. ההופכית שלה חלקה באותו אופן, ולכן זה דיפאומורפיזם.

**הערה 3.1.3.** במבנה של $G$ כיריעה חלקה, ההעתקות

$$\begin{aligned} \mathsf{exp}\colon \mathsf{Lie}(G) &\to G \\ \cdot\colon G \times G &\to G \\ ()^{-1} : G &\to G \end{aligned}$$

חלקות.

**הערה 3.1.4.** לפעמים הטופולוגיה שהגדרנו מתלכדת עם הטופולוגיה על $G$ כתת־קבוצה של $M_n$, אבל זה לא נכון תמיד.

**דוגמה 3.1.5.** תהי $G \coloneqq \mathsf{GL}_n(\mathbb{Q})$. כל מסילה חלקה $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ קבועה. לכן $\gamma'(0) = 0$ ולכן $\mathsf{Lie}(G) = \{0\}$.
אז $B_{g,\varepsilon} = \{g\}$ ונקבל את הטופולוגיה הדיסקרטית על $G$. זאת אינה הטופולוגיה היחסית.

**דוגמה 3.1.6 (ישרים על הטורוס).** תהי
$$\mathbb{T}^2 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, |a| = |b| = 1 \right\} \leq \mathsf{GL}_2\left(\mathbb{C}\right)$$
מתקיים $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$ וגם
$$.\mathsf{Lie}\left(\mathbb{T}^2\right) = \left\{ \begin{pmatrix} {}_1 2\pi i\theta & 0 \\ 0 & 2\pi i\theta_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
ניתן לבדוק שהטופולוגיה שעל $\mathbb{T}^2$ שהגדרנו בבניית המבנה של היריעה החלקה מתלכדת עם הטופולוגיה המושרית ועם הטופולוגיה על $S^1 \times S^1$.
לכל $X, Y \in \mathfrak{g} \coloneqq \mathsf{Lie}\left(\mathbb{T}^2\right)$ מתקיים $[X, Y] = 0$. לכן כל תת־מרחב של $\mathfrak{g}$ הוא אלגברת לי. כאן
$$\mathsf{exp}\colon \left(\mathfrak{g}, +\right) \to \mathbb{T}^2$$
הוא הומומורפיזם של חבורות על ידי
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \big/ 2\pi\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{T}^2$$
כשהעתקה הראשונה היא העתקת המנה.
עבור כל $\alpha \in \mathbb{R}$ ניקח תת־אלגברה
$$.\mathfrak{g}_\alpha = \left\{ \mathsf{diag}\left(2\pi i\alpha\theta, 2\pi i\theta\right) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$
אז
$$\mathfrak{g}_\alpha = \mathsf{Lie}\left(G_\alpha\right)$$
כאשר
$$.G_\alpha \coloneqq \left\{ \mathsf{diag}\left(e^{2\pi i\alpha\theta}, e^{2\pi i\theta}\right) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$
נגדיר
$$\gamma_\alpha\left(\theta\right) = \mathsf{diag}\left(e^{2\pi i\alpha\theta}, e^{2\pi i\theta}\right)$$
ואם $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\gamma_\alpha\left(n\right) = 1$. במקרה זה $G_\alpha$ לולאה סגורה הומיאומורפית ל־$S^1$. אם $\alpha \notin \mathbb{Q}$ נקבל כי $G_\alpha$ לולאה פתוחה (וצפופה) שהומיאומורפית ל־$\mathbb{R}$. אפשר להשתכנע שהטופולוגיה שהגדרנו על $G_\alpha$ אכן מתאימה לזאת של $\mathbb{R}$, ובמקרה זה הטופולוגיה המושרית על $G_\alpha$ בתוך $\mathbb{T}^2$ היא אחרת.
נוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ יש $\theta$ גדולה כרצוננו כך שמתקיים $|\gamma\left(\alpha\right)\left(\theta\right) - I| < \varepsilon$. נביט בחבורה
$$S^1 = \left\{ \mathsf{diag}\left(z, 1\right) \mid |z| = 1 \right\}$$
ובחבורה
$$.H \coloneqq G_\alpha \cap S^1 \leq S^1$$
אם $H$ סופית, קיים $d \in \mathbb{N}$ עבורו
$$\gamma_\alpha\left(d\right) = \gamma_\alpha\left(1\right)^d = 1$$
שזאת סתירה לאי־רציונליות של $\alpha$. לכן $H$ אינסופית. מקומפקטיות של $S^1$ נקבל $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ עבורם
$$.\left|\gamma_\alpha\left(k_1 - k_2\right) - I\right| = \left|\gamma_\alpha\left(k_1\right) - \gamma_\alpha\left(k_2\right)\right| < \varepsilon$$

עבור כל חבורת מטריצות $G$ החבורה $G^\circ = \Gamma\left(\mathsf{Lie}\left(G\right)\right)$ היא תת־החבורה של $G$ הנוצרת על ידי איברים מהצורה $\mathsf{exp}\left(X\right)$.

***טענה 3.1.7*** *1. $G^\circ$ תת־חבורה נורמלית וקשירה ב־$G$.*

*2. אם $G$ קשירה מתקיים $G = G^\circ$.*

*הוכחה.* 1. עבור
$$a = \mathsf{exp}\left(X_1\right) \cdot \ldots \cdot \mathsf{exp}\left(X_k\right)$$
המסילה
$$\gamma\left(t\right) = \mathsf{exp}\left(tX_1\right) \cdot \ldots \cdot \mathsf{exp}\left(tX_k\right)$$
מסילה רציפה שמקשרת בין $a, I$. מתקיים גם
$$\forall g \in G\colon \mathsf{Ad}\left(g\right)\left(a\right) = \mathsf{exp}\left(\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(X_1\right)\right) \cdot \ldots \cdot \mathsf{exp}\left(\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(X_k\right)\right) \in \mathsf{Lie}\left(G\right)$$
לכן $G^\circ$ נורמלית.

2. $G^\circ$ מכילה סביבה פתוחה $U$ של $I$, למשל $U = B_{I,\varepsilon}$. מתקיים
$$G^\circ = \bigcup_{g \in G^\circ} g \cdot U$$
וזה איחוד של קבוצות פתוחות. לכן $G^\circ$ פתוחה. תת־חבורה פתוחה של חבורה טופולוגית היא גם סגורה, כי הקוסטים שלה ב־$G$ פתוחים. לכן $G$ פתוחה וסגורה, ולכן קשירה. לכן $G = G^\circ$. באופן דומה, איברי $G/G^\circ$ פתוחים וסגורים ולכן הינם רכיבי הקשירות של $G$. ■

**מסקנה 3.1.8.** *$G^\circ$ רכיב הקשירות של $I \in G$.*

**מסקנה 3.1.9.** *$G \le \mathsf{GL}_n$ קשירה בטופולוגיה שהגדרנו אם ורק אם $\Gamma\left(\mathsf{Lie}\left(G\right)\right) = G$.*

**הערה 3.1.10.** בעתיד נוכיח שאם $G \le \mathsf{GL}_n$ היא סגורה בטופולוגיה המושרית, הטופולוגיה שהגדרנו מתלכדת עם הטופולוגיה היחסית.

**דוגמה 3.1.11.** לכל $X \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים

$$\mathsf{det}\left(\mathsf{exp}\left(X\right)\right) = e^{\mathsf{tr}(X)} > 0 .$$

אז

$$\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)^\circ \subseteq \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)^+ \coloneqq \left\{A \in \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right) \mid \mathsf{det}\left(A\right) > 0\right\}.$$

למעשה, ראינו בתרגיל ש־$\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)^+$ קשירה. לכן יש שוויון

$$\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)^\circ = \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)^+.$$

**דוגמה 3.1.12.** ראינו שקיימת $g \in \mathcal{O}\left(n\right)$ עבורה

$$\mathcal{O}\left(n\right) = \mathsf{SO}\left(n\right) \cup g \cdot \mathsf{SO}\left(n\right).$$

ראינו גם שמתקיים

$$\mathfrak{so}_3 = \mathsf{Lie}\left(\mathsf{SO}\left(3\right)\right)$$

ושמתקיים

$$\Gamma\left(\mathfrak{so}_3\right) = \mathsf{SO}\left(3\right)$$

לכן

$$\mathsf{SO}\left(3\right) = \mathsf{SO}\left(3\right)^\circ = \mathcal{O}\left(3\right)^\circ.$$

**דוגמה 3.1.13.** תהי

$$\mathsf{O}\left(1,1\right) \coloneqq \left\{A \in \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right) \;\middle|\; A\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}A^t = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right\}.$$

עבור $A \in \mathsf{O}\left(1,1\right)$ מתקיים

$$\mathsf{det}\left(A\right) \cdot \mathsf{det}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} \cdot \mathsf{det}\left(A^t\right) = \mathsf{det}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$$

לכן $\mathsf{det}\left(A\right)^2 = 1$ לכן $\mathsf{det}\left(A\right) = \pm 1$. מתקיים $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \in \mathsf{O}\left(1,1\right)$ וגם

$$\mathsf{O}\left(1,1\right) = \mathsf{SO}\left(1,1\right) \cup \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\mathsf{SO}\left(1,1\right)$$

עבור

$$\mathsf{SO}\left(1,1\right) \coloneqq \mathsf{O}\left(1,1\right) \cap \mathsf{SL}_n\left(\mathbb{R}\right).$$

החבורה $\mathsf{SO}\left(1,1\right)$ אינה קשירה. מתקיים

$$\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}\left(\mathsf{O}\left(1,1\right)\right)$$

ואם נגזור את $\gamma\colon \left(-\varepsilon, \varepsilon\right) \to \mathsf{O}\left(1,1\right)$ עם $\gamma\left(0\right) = I$ נקבל

$$\gamma'\left(0\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\gamma'\left(0\right)^t = 0.$$

אז

$$\mathfrak{g} = \left\{X \in M_2\left(\mathbb{R}\right) \;\middle|\; A\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}A^t = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0 & a\\a & 0\end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\}.$$

זאת חבורה חד־מימדית. נקבל

$$\mathsf{O}\left(1,1\right)^\circ = \mathsf{SO}\left(1,1\right)^\circ = \left\{\mathsf{exp}\begin{pmatrix}0 & a\\a & 0\end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\}$$

והאיברים בחבורה זאת נקראים סיבובים היפרבוליים.

נסמן

$$C \coloneqq \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \in \mathsf{SO}\left(2\right).$$

אז

$$\exp\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix} = \exp\left(C\begin{pmatrix}2a & \\ & -2a\end{pmatrix}C^{-1}\right) = C\begin{pmatrix}e^{2a} & \\ & e^{-2a}\end{pmatrix}C^{-1} = \begin{pmatrix}\cosh(2a) & \sinh(2a)\\ \sinh(2a) & \cosh(2a)\end{pmatrix}.$$

בבסיס המלכסן אלו העתקות מהצורה $\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}$ עבור $t>0$. העתקות אלה מקיימות

$$xy=(tx)\left(t^{-1}y\right)$$

ולכן משמרות את ההיפרבולה.

מתקיים למשל

$$-I\in \mathsf{SO}(1,1)\setminus \mathsf{SO}(1,1)^{\circ}$$

ולמעשה

$$\left[\mathsf{SO}(1,1):\mathsf{SO}(1,1)^{\circ}\right]=2$$
$$\left[\mathsf{O}(1,1):\mathsf{O}(1,1)^{\circ}\right]=4 .$$

בדקו זאת וחשבו בנוסף מהי החבורה הסופית $\mathsf{O}(1,1)\big/\mathsf{O}(1,1)^{\circ}$.

**הגדרה 3.1.14.** לכל $G$, החבורה $G\big/G^{\circ}$ נקראת ה־component group של $G$.

**דוגמה 3.1.15.** עבור $G:=\mathsf{GL}_n(\mathbb{Q})$ מתקיים $G\big/G^{\circ}\cong G$.

### 3.1.1 חבורות לי אבליות

***טענה 3.1.16.*** *תהי $G\le \mathsf{GL}_n(k)$ קשירה. $G$ אבלית אם ורק אם $\mathsf{Lie}(G)$ אבלית (כלומר $[X,Y]=0$ לכל $X,Y\in\mathsf{Lie}(G)$).*

*הוכחה.* נניח כי $G$ אבלית ותהיינה $X,Y\in\mathsf{Lie}(G)$. מתקיים

$$\gamma(s,t):=\mathsf{Ad}(\exp(tX))(\exp(sY))=\exp(sY).$$

נגזור ב-0 לפי $s$ ונקבל

$$\exp(tX)\cdot Y\cdot\exp(-tX)=\mathsf{Ad}(\exp(tX))(Y)=Y .$$

נגזור ב־$t=0$ ונקבל $XY-YX=0$.

בכיוון השני, נניח כי $\mathsf{Lie}(G)$ אבלית וכי $G$. אז

$$\forall X,Y\in\mathsf{Lie}(G):\ \exp(X)\exp(Y)=\exp(Y)\exp(X)$$

אז $\Gamma^{\circ}=\Gamma(\mathsf{Lie})(G)$ אבלית, ומתקיים $G^{\circ}=G$ כי $G$ קשירה. ■

**הערה 3.1.17.** נניח כי $G$ קשירה ואבלית. אז $\exp\colon\mathfrak{g}\to G$ הומומורפיזם מ־$(\mathfrak{g},+)$ ל־$(G,\cdot)$. אז אפשר לכתוב

$$G=(\mathfrak{g},+)\big/L$$

כאשר

$$L:=\ker\exp=\{x\in\mathfrak{g}\mid \exp(X)=1\}.$$

לפעמים $G$ כזאת נקראת טורוס (מוכלל).

**הערה 3.1.18.** כל חבורה סופית $G$ אפשר לשכן בתוך $S_n$. יש גם שיכון

$$i\colon S_n\to\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$$

על ידי מטריצות פרמוטציה על הבסיס הסטנדרטי.

באופן זה אפשר לחשוב על כל חבורה סופית כחבורת מטריצות. ל־$G$ סופית נקבל $\mathsf{Lie}(G)=\{0\}$. לכן הטופולוגיה של $G$ כחבורת לי היא דיסקרטית.

נשים לב ש־$\mathsf{Lie}(G)$ אבלית, בעוד $G$ לאו דווקא אבלית. זה מתאפשר כי $G^{\circ}=\{\mathsf{id}\}\subsetneq G$. על כל חבורה סופית אפשר לחשוב כחבורת לי לא־קשירה עם $G^{\circ}$ טריוויאלי.

**הגדרה 3.1.19 (טורוס $n$־מימדי).** נגדיר

$$\mathbb{T}^n := \left\{ \mathsf{diag}\left(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\right) \;\middle|\; (\theta_i)_{i\in[n]} \subseteq \mathbb{R} \right\} \le \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

**הערה 3.1.20.** $\mathbb{T}^n \cong \left(S^1\right)^n$ כחבורות לי, וההעתקה

$$\exp\colon \mathbb{R}^n \cong \mathsf{Lie}\left(\mathbb{T}^n\right) \to \mathbb{T}^n$$

היא הומומורפיזם על. אז

$$\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n \Big/ \mathsf{ker}\left(\exp\right) = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n.$$

**דוגמה 3.1.21.** $(\mathbb{R}^n, +)$ זאת חבורת מטריצות אבלית קשירה על ידי שיכון כמטריצות $\begin{pmatrix} & & * \\ I_n & & \vdots \\ & & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. לחילופין, מתקיים

$$\left(\left(\mathbb{R}^\times\right)^n\right)^\circ \cong \left\{ \mathsf{diag}\left(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_n}\right) \;\middle|\; (\theta_i)_{i\in[n]} \subseteq \mathbb{R} \right\}$$

$$\left(\mathbb{R}^\times\right)^n \cong \left\{ \mathsf{diag}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \mid \forall i \in [n] \colon x_i \ne 0 \right\}.$$

אז

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\cong \left(\mathbb{R}^\times\right)^\circ \\ x &\mapsto e^x \\ \log(y) &\leftarrow y \end{aligned}$$

איזומורפיזם. נקבל כי $\exp\colon \mathbb{R}^n \to \left(\left(\mathbb{R}^\times\right)^n\right)^\circ$ איזומורפיזם.

**טענה 3.1.22.** *תהי $G$ חבורה קשירה אבלית. אז*

$$\exp\colon \mathsf{Lie}(G) \to G$$

*הוא הומומורפיזם על ומתקיים*

$$G \cong \mathsf{Lie}(G) \Big/ \mathsf{ker}\left(\exp\right)$$

*כאשר $\mathsf{ker}\left(\exp\right)$ תת־חבורה דיסקרטית בתוך $(\mathsf{Lie}(G), +)$.*

**משפט 3.1.23.** *עבור $V$ מרחב וקטורי ממשי ו־$L \le V$ תת־חבורה דיסקרטית יש $k, n$ עבורם*

$$V/L \cong \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n.$$

**מסקנה 3.1.24.** *כל חבורת מטריצות אבלית קשירה היא מהצורה $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n$.*

**למה 3.1.25.** *תהי $L \le V$ תת־חבורה דיסקרטית של מרחב וקטורי ממשי. אז קיימים וקטורים בלתי־תלויים לינארית $(u_i)_{i\in[n]}$ עבורם*

$$L = \mathsf{Span}_{\mathbb{Z}}\left(u_i\right)_{i\in[n]}.$$

*הוכחה.* נבנה באינדוקציה וקטורים $(u_i)_{i\in[r]}$ בלתי־תלויים לינארית ב־$V$ עבורם

$$L \cap \mathsf{Span}_{\mathbb{R}}\left(u_1, \ldots, u_r\right) = \mathsf{Span}_{\mathbb{Z}}\left(u_1, \ldots, u_r\right).$$

אם $L \subseteq \mathsf{Span}_{\mathbb{R}}\left(u_1, \ldots, u_r\right)$ סיימנו. אחרת קיים $u \in \mathbb{L}$ בלתי־תלוי לינארית ב־$(u_1, \ldots, u_r)$. תהי

$$P = \left\{ \sum_{i\in[r]} \alpha_i u_i + \beta u \;\middle|\; \substack{(\alpha_i)_{i\in[r]} \subseteq [0,1] \\ \beta \in [0,1]} \right\} \subseteq V$$

שהינה קומפקטית. אז

$$u \in P \cap L \cong \{0\}$$

וזאת קבוצה סופית כחיתוך של קומפקטית ודיסקרטית. תהי $v \in P \cap L$ עם $\beta \ne 0$ מינימלי. אז לכל $x \in L \cap \mathsf{Span}_{\mathbb{R}}\left(u_1, \ldots, u_r, u\right)$ קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו

$$x - nv \in L \cap \mathsf{Span}_{\mathbb{R}}\left(u_1, \ldots, u_R\right) = \mathsf{Span}_{\mathbb{Z}}\left(u_1, \ldots, u_r\right).$$

(אחרת היינו מוצאים $n \in \mathbb{Z}$ שיתן סתירה למינימליות של $\beta$). ■

*הוכחה (3.1.23).* מ־3.1.25 יש ל־$L$ בסיס $(u_i)_{i\in[m]}$. נשלים אותו לבסיס $(u_i)_{i\in[k]}$ של $V$ ואז $V \cong \mathbb{R}^k$ לפי הבסיס. נקבל

$$L \cong \mathbb{Z}^m \times \{0\} \le \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k-m}$$

ואז

$$\mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^{k-m} \cong V/L.$$

■

**הערה 3.1.26.** לפעמים, בהקשר של חבורות אלגבריות, חבורות אלגבריות קשירות נקראות טורוסים.

### 3.1.2 חזרה להתאמת לי

נרצה שלכל אלגברת לי נתונה $\mathfrak{g} \leq M_n$ יתקיים
$$\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}\left(\Gamma\right)\left(\mathfrak{g}\right).$$
לכל $X \in \mathfrak{g}$ אנו יודעים $\mathsf{exp}\left(tX\right) \in \Gamma\left(\mathfrak{g}\right)$. לכן לפי ההגדרה נקבל
$$X \in \mathsf{Lie}\left(\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)\right)$$
ולכן
$$\mathfrak{g} \subseteq \mathsf{Lie}\left(\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)\right).$$
נרצה לתאר את $\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)$ באופן יותר קונקרטי ונרצה להראות במובן מסוים שהיא לא גדולה מדי.

מכך ש-$\mathsf{exp}\left(X\right) = \mathsf{exp}\left(\frac{1}{k}X\right)^k$ נובע שלכל סביבה $U \in \mathfrak{g}$ של $0$ מתקיים
$$\Gamma\left(\mathfrak{g}\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} \mathsf{exp}\left(U\right)^k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} \mathsf{exp}\left(\bar{U}\right)^k.$$
נרצה להיפטר מהחזקות ולשם כך נוכל לכתוב
$$\Gamma\left(\mathfrak{g}\right) = \bigcup_{g \in \Gamma\left(\mathfrak{g}\right)} g \cdot \mathsf{exp}\left(\bar{U}\right).$$
נרצה להיות מסוגלים לכתוב את $\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)$ כאיחוד בן מניה באופן דומה. זה מתאפשר, ויבנע מהמהות של נוסחת Baker-Cambell-Hausdorff, מזה שקיימת העתקה
$$C \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$
מוגדרת בסביבת אפס.

ראינו כי עבור $G$ חבורת מטריצות קשירה מתקיים
$$G = \Gamma\left(\mathsf{Lie}\left(G\right)\right).$$
נרצה בעצם תיאור כלשהו של כל $G$ על ידי $\mathsf{exp}$. ראינו שמתקיים
$$\Gamma\left(\mathfrak{g}\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} \mathsf{exp}\left(U\right)^k$$
עבור $U \subseteq \mathfrak{g}$ סביבה פתוחה של $0$.

ניזכר שעבור $X, Y \in \mathfrak{g}$ מתקיים
$$C\left(X, Y\right) = \mathsf{log}\left(\mathsf{exp}\left(X\right)\mathsf{exp}\left(Y\right)\right) \in \mathfrak{g}$$
כאשר זה מוגדר. נגדיר
$$I_X\left(Y\right) \coloneqq C\left(X, Y\right)$$
ואז $I_0\left(Y\right) = Y$. לכן מתקיים
$$\left(\mathsf{d}\left(I_0\right)\right)_0 = \mathsf{id}\ .$$
מרציפות נקבל כי $\left(\mathsf{d}I_X\right)_0$ הפיכה עבור $X$ מספיק קטן. ממשפט הפונקציה ההפוכה קיימת סביבה $U \subseteq \mathfrak{g}$ של $0$ כך שעבור $X$ מספיק קטן הקבוצה
$$I_X\left(U\right) = C\left(X, U\right)$$
פתוחה (בדקו למה $U$ אחידה לכל $X$ מספיק קטן).

תהי
$$V \coloneqq C\left(U, U\right)$$
ותהי
$$V' = C\left(\bar{U}, \bar{U}\right).$$
אז $V'$ קומפקטית כתמונה רציפה של קבוצה קומפקטית $\bar{U} \times \bar{U}$. מתקיים
$$V' \subseteq \bigcup_{X \in V'} C\left(X, U\right)$$
אם בוחרים $V'$ מספיק קטנה, וזה איחוד של קבוצות פתוחות ולכן פתוח. מקומפקטיות, קיימת קבוצה סופית $\left\{X_i \mid i \in [n]\right\} \subseteq V'$ כך שמתקיים
$$V' \subseteq \bigcup_{i \in [n]} C\left(X_i, U\right).$$

לכל $i \in [n]$ נסמן $a_i = \exp(X_i)$. על ידי לקיחת אקספוננט נקבל

$$\exp(\bar{U})\exp(\bar{U}) \subseteq \bigcup_{i\in[n]} a_i \cdot \exp(\bar{U}) .$$

אם נמשיך באינדוקציה נקבל

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \exp(\bar{U})^k \subseteq \bigcup_b b \cdot \exp(\bar{U})$$

כאשר $b$ רץ על מילים באותיות $\{a_i \mid i \in [n]\}$.

***משפט 3.1.27.*** *לכל אלגברת לי $\mathfrak{g}$ של מטריצות מתקיים* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\Gamma(\mathfrak{g}))$.

*הוכחה.* עבור $X \in \mathfrak{g}$ יש מסילה

$$\gamma(t) = \exp(tx) \in \Gamma(\mathfrak{g})$$

עם

$$X = \gamma'(0) \in \mathrm{Lie}(\Gamma(\mathfrak{g})).$$

לכן $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Lie}(\Gamma(\mathfrak{g}))$.

להכלה ההפוכה, נראה שקיימת סביבה פתוחה $U \subseteq \mathfrak{g}$ של $0$ וקיים $c \in \Gamma(\mathfrak{g})$ כך שהקבוצה $c\exp(U)$ פתוחה בטופולוגיה של $\Gamma(\mathfrak{g})$. אכן, $\Gamma(\mathfrak{g})$ מרחב טופולוגי קומפקטי מקומית והאוסדורף שהוא איחוד בן מנייה של קבוצות סגורות מהצורה $c \cdot \exp(\bar{U})$. לפי משפט הקטגוריה של בייר, אחת הקבוצות $c \cdot \exp(\bar{U})$ פתוחה. אפשר להניח (בדקו!) ש־$c \cdot \exp(U)$ צפופה ופתוחה בתוך $c \cdot \exp(\bar{U})$ ומכאן $c \cdot \exp(U)$ פתוחה בעצמה ב־$\Gamma(\mathfrak{g})$.

אפשר להניח ש־$c \cdot \exp(U) \subseteq B(c,\varepsilon)$ עבור $c, \varepsilon$. אז $U \subseteq \mathrm{Lie}(\Gamma(\mathfrak{g}))$ פתוחה כי $\exp$ הומיאומורפיזם, אבל אם $\mathfrak{g}$ תת־מרחב ממימד קטן יותר זה לא יכול לקרות (כי תת־מרחב לא יכול להכיל קבוצה פתוחה). ■

***משפט 3.1.28.*** *בהינתן חבורת מטריצות $G$ קיימת התאמה חד־חד ערכית בין אוסף כל התת־חבורות הקשירות $H \leq G$ לבין אוסף כל התת־אלגבראות לי* $\mathfrak{h} \leq \mathrm{Lie}(G)$.

*הוכחה.* זה נובע מכך שההתאמה שהראנו בין אלגבראות לי לחבורות שומרת על סדר הכלה. ■

***טענה 3.1.29.*** *תהי $G \leq \mathrm{GL}_n(k)$ ונניח שמתקיים $G = G^\circ$. יש התאם בין תת־אלגבראות לי $\mathfrak{h} \leq \mathrm{Lie}(G)$ שמקיימות*

$$[\mathrm{Lie}(G), \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$$

*(ונקראות אידאלים), לבין תת-חבורות נורמליות קשירות $H \trianglelefteq G$.*

*הוכחה.* נניח כי $H$ ו־$\mathfrak{h}$ קשורות בהתאמת לי.

נניח כי $H$ ת"ח נורמלית. אז

$$\forall X \in \mathrm{Lie}(G)\, \forall Y \in \mathfrak{h} \colon\ [X,Y] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{Ad}(\exp(tx))(Y)\right)\Big|_{t=0}$$

כי

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp(tx)\, Y \exp(-tX)\right) = X\exp(tX)\, Y\exp(-tX) + \exp(tX)\, Y \exp(-tX)(-X)$$

וב־$t = 0$ מקבלים $XY - YX$. מתקיים

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX)) \colon H \to H$$

וגם

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$$

לכן מהנ"ל $[X,Y] \in \mathfrak{h}$.

בכיוון השני, אם $\mathfrak{h}$ אידאל, מספיק לבדוק שמתקיים

$$\forall X \in \mathrm{Lie}(G)\, \forall Y \in \mathfrak{h} \colon\ \mathrm{Ad}(\exp(X))(\exp(Y)) \in H.$$

מתקיים $G = G^\circ, H = H^\circ$ ולכן $G, H$ נוצרות על ידי $\exp$. לכן

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp(X))(\exp(Y)) &= \exp(\mathrm{Ad}(\exp(X))(Y)) \\ &= \exp(\exp(\mathrm{ad}(X))(Y))\end{aligned}$$

אבל כיוון שמתקיים $\mathrm{ad}(X)(Y) \in \mathfrak{h}$ נובע $\exp(\mathrm{ad}(X))(Y) \in \mathfrak{h}$, ולכן

$$\exp\left(\exp(\mathrm{ad}(X))(Y)\right) \in H .$$ ■

## 3.2 הומומורפיזמים

### 3.2.1 הגדרה

בהינתן הומומורפיזם גזיר $\varphi\colon G\to H$ בין חבורות מטריצות, הנגזרת

$$(\mathrm{d}\varphi)_I$$

היא העתקה לינארית

$$\mathrm{Lie}\left(G\right)\to\mathrm{Lie}\left(H\right).$$

ביתר פירוט, אם

$$\gamma\colon\ \left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to G$$

מקיימת

$$\begin{aligned}\gamma\left(0\right)&=I\\ \gamma'\left(0\right)&=X\in\mathrm{Lie}\left(G\right)\end{aligned}$$

אז

$$\varphi\left(\gamma\left(0\right)\right)=\varphi\left(I\right)=I\in H$$

ומתקיים

$$\left(\varphi\circ\gamma\right)'\left(0\right)=\left(\mathrm{d}\varphi\right)_I\left(\gamma'\left(0\right)\right)=\left(\mathrm{d}\varphi\right)_I\left(X\right)\in\mathrm{Lie}\left(H\right),.$$

אז $\varphi$ מעבירה וקטורים משיקים ב־$G$ לוקטורים משיקים ב־$H$. נסמן העתקה זאת בין המשיקים

$$\mathrm{d}\varphi\colon\ \mathrm{Lie}\left(G\right)\to\mathrm{Lie}\left(H\right).$$

***טענה 3.2.1.*** *$\mathrm{d}\varphi$ הוא הומומורפיזם של אלגבראות לי. כלומר, מתקיים*

$$\forall X,Y\in\mathrm{Lie}\left(G\right):\ \left[\mathrm{d}\varphi\left(X\right),\mathrm{d}\varphi\left(Y\right)\right]=\mathrm{d}\varphi\left(\left[X,Y\right]\right)$$

*וגם*

$$\forall X\in\mathrm{Lie}\left(G\right):\varphi\left(\exp\left(X\right)\right)=\exp\left(\mathrm{d}\varphi\left(X\right)\right).$$

*את המשוואה השנייה נציג על ידי הדיאגרמה הקומוטטיבית הבאה.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathrm{Lie}\left(G\right) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi"'] & \mathrm{Lie}\left(H\right) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

*הוכחה.* לכל $X\in\mathrm{Lie}\left(G\right)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varphi\left(\exp\left(tX\right)\right)\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varphi\left(\exp\left(\left(t+s\right)X\right)\right)\right)_{s=0}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varphi\left(\exp\left(tX\right)\right)\varphi\left(\exp\left(sX\right)\right)\right)_{s=0}\\&=\varphi\left(\exp\left(tX\right)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varphi\left(\exp\left(sX\right)\right)\right)_{s=0}\\&=\varphi\left(\exp\left(tX\right)\right)\cdot\mathrm{d}\varphi\left(X\right)\end{aligned}$$

ולפי טענת המד"ר בתחילת הקורס נובע

$$\varphi\left(\exp\left(tX\right)\right)=\exp\left(t\cdot\mathrm{d}\varphi\left(X\right)\right).$$

כאשר $t=1$ אנו מקבלים את המשוואה.
נראה כעת כי $\mathrm{d}\varphi$ הוא הומומורפיזם. לכל $X,Y\in\mathrm{Lie}\left(G\right)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\varphi\left(\mathrm{Ad}\left(\exp\left(tX\right)\right)\left(\exp\left(sY\right)\right)\right)&=\mathrm{Ad}\left(\varphi\left(\exp\left(tX\right)\right)\right)\left(\varphi\left(\exp\left(sY\right)\right)\right)\\&=\mathrm{Ad}\left(\exp\left(t\,\mathrm{d}\varphi\left(X\right)\right)\right)\left(\exp\left(s\,\mathrm{d}\varphi\left(Y\right)\right)\right)\end{aligned}$$

ולאחר גזירה ב־$s=0$ נקבל

$$\mathrm{d}\varphi\left(\mathrm{Ad}\left(\exp\left(tX\right)\right)\left(Y\right)\right)=\mathrm{Ad}\left(\exp\left(t\,\mathrm{d}\varphi\left(X\right)\right)\right)\left(\mathrm{d}\varphi\left(Y\right)\right).$$

נגזור כעת ב־$t=0$ ונקבל שאגף שמאל שווה

$$\mathrm{d}\varphi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{Ad}\left(\exp\left(tX\right)\right)\left(Y\right)\right)_{t=0}\right)=\mathrm{d}\varphi\left(\left[X,Y\right]\right).$$

אגף ימין שווה $\left[\mathrm{d}\varphi\left(X\right),\mathrm{d}\varphi\left(Y\right)\right]$ באותו טיעון, ולכן נקבל את התוצאה. ■

**הערה 3.2.2.** למעשה, קיבלנו ש־
$$\text{Lie}\colon \textbf{Mat-Grp} \to \textbf{Lie-Alg}$$
הוא פנקטור מהקטגוריה של חבורות לקטגוריה של אלגבראות לי כשעל מורפיזמים הוא מוגדר $\text{Lie}(\varphi)=\text{d}\varphi$. העובדה
$$\text{Lie}(\varphi_1\circ\varphi_2)=\text{Lie}(\varphi_1)\circ\text{Lie}(\varphi_2)$$
היא כלל השרשרת.

נרצה לדעת מתי
$$\text{d}\colon \text{Hom}(G,H)\to\text{Hom}(\text{Lie}(G),\text{Lie}(H))$$
הוא חד־חד ערכי, ומתי הוא על. אם הוא חד־חד ערכי ועל, הדבר קרוב להיות שקילות בין קטגוריות.
כדי לבדוק מתי d חד־חד ערכי, נבדוק מתי $\varphi$ נקבע ביחידות על ידי $\text{d}\varphi$. מתקיים
$$\varphi(\exp(X))=\exp(\text{d}\varphi(X))$$
ולכן $\varphi$ נקבע ביחידות על $\Gamma(\text{Lie}(G))$. $G^\circ=\Gamma(\text{Lie}(G))$. לכן אם $G$ קשירה נובע ש־d חד־חד ערכי. בפרט, אם נביט על תת־קטגוריה של חבורות מטריצות קשירות נקבל שהפנקטור Lie חד־חד ערכי על מורפיזמים, כלומר *נאמן*.
נשאל כעת מתי d על. זאת השאלה מתי אפשר להרים הומומורפיזם של אלגבראות לי. אם $\psi\colon\text{Lie}(G)\to\text{Lie}(H)$, מתי קיים $\varphi\colon G\to H$ כך ש־$\text{d}\varphi=\psi$. לזה יש תשובה טופולוגית, והתשובה היא כן בפרט כאשר $G$ פשוטת קשר.

**הערה 3.2.3.** תהי $G$ חבורת מטריצות ונסמן $\mathfrak{g}=\text{Lie}(G)$. אם $g\in G$ אפשר לחשוב על $\text{Ad}(g):G\to G$ כאוטומורפיזם של $G$. נקבל העתקה
$$\text{Ad}\colon G\to\text{Aut}(G)\,.$$
נוכל להרכיב ולקבל
$$G\underset{\text{Ad}}{\longrightarrow}\text{Aut}(G)\underset{\text{d}}{\to}\text{Aut}(\mathfrak{g})\le\text{GL}(\mathfrak{g})\,.$$
נסמן הרכבה זאת (with abuse of notation)
$$\text{Ad}(g)=(\text{d}\circ\text{Ad})(g)\in\text{Aut}(\mathfrak{g})\,.$$
אם נסמן זאת $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}$ נקבל
$$\text{Ad}_{\mathfrak{g}}\colon G\to\text{Aut}(\mathfrak{g})\,.$$
נוכל גם לגזור ולקבל
$$\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(g)=\text{d}(\text{Ad}_G(g)):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\,.$$
כעת, $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ חבורת מטריצות ומתקיים
$$\text{d}(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}):\mathfrak{g}\to\text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{g}))\le\text{End}(\mathfrak{g})\,.$$
*העתקה זאת מסומנת* ad ומתקיים
$$\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\exp(X))=\exp(\text{ad}(X))$$
לכל $X\in\mathfrak{g}$.

קיבלנו חבורת מטריצות חדשה
$$G/\ker(\text{Ad}_{\mathfrak{g}})\cong\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)\le\text{GL}(\mathfrak{g})\,.$$
את הגרעין הזה אנחנו לא מבינים ישר. מתקיים
$$\ker(\text{Ad}_G)=Z(G)$$
וגם $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}=\text{d}\circ\text{Ad}_G$ ולכן אנחנו כן יודעים $Z(G)\le\ker(\text{Ad}_{\mathfrak{g}})$. על פניו, מלחתכילה לא ידוע לנו ש־$G/Z(G)$ חבורת מטריצות, אך נראה זאת.

**הערה 3.2.4.** דיברנו על גזירות וחלקות של הומומורפיזמים $\varphi\colon G\to H$ כאשר $G,H$ חבורות מטריצות, והגדרנו את $\text{d}\varphi$ כנגזרת של $\varphi$ ב־$I$.
הכוונה היא שאם ניקח סביבה $B_{I,\varepsilon}\subseteq G$ של $I$ שמוגדרת על ידי
$$\left\{\exp(X)\;\middle|\;\substack{X\in\text{Lie}(G)\\ \|X\|<\varepsilon}\right\},$$
וניקח סביבה $B'_{I,\varepsilon}\subseteq H$ של $I$, נקבל שההעתקת המעבר $\exp|_V^{-1}\circ\varphi\circ\exp|_U$ גזירה/חלקה ו־$\text{d}\varphi$ הנגזרת של הרכבה זאת. בפרט, $\text{d}\varphi$ לא תלויה במימוש של $G$ כחבורת מטריצות. למעשה גם הטופולוגיה שהגדרנו על $G$, והחלקות של $\varphi$ אינן תלויות במימוש.
בהמשך נגדיר חבורות לי כלליות שאינן בהכרח חבורות מטריצות, באופן שאינו תלוי במימוש.