רשימות הרצאה לחבורות לי

חורף 2020, הטכניון

הרצאותיו של מקס גורביץ׳

הוקלדו על ידי אלעד צורני

26 באוקטובר 2020

תוכן העניינים

פרק 1

מבוא

1.1 מבוא היסטורי

1.1.1 חבורות לי

בנורבגיה, סביב שנת 1870, מתמטיקאי בשם סופוס לי, שחקר משוואות דיפרנציאליות, שם לב להופעה של מה שנקרא $“transformation\ groups”$.

באופן לוקלי, נניח כי נתון שדה וקטורי חלק

$$x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

נחפש פתרון למשוואה

$$y'(t) = x(y(t))$$
$$y(0) = y_0$$

עבור $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. לפי משפט קיום ויחידות של מד"ר, קיים פתרון יחיד $y(t)$ שמוגדר עבור $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ עבור $\varepsilon > 0$ כלשהו.

נגדיר $\varphi_x(t)(y_0) \coloneqq y(t)$ לכל $y_0 \in \mathbb{R}^n$. אז

$$\varphi_X(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

אוטומורפיזם של $\mathbb{R}^n$. זאת משפחה של אופרטורים שמשתנה באופן חלק כתלות ב־t.

מתקיים

$$\varphi_x(0) = \mathrm{id}$$

ומיחידות הפתרונות,

$$\varphi_x(t) \circ \varphi_x(s) = \varphi_x(t+s).$$

התמונה $\operatorname{Im}\varphi_x$ נקראת *חבורה חד־פרמטרית*. אז

$$\varphi_x\colon \mathbb{R} \to \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$$

הומומורפיזם של חבורות. זה לא מדויק, φ_x אולי לא מוגדר תמיד.

באופן גלובלי, קיימות משוואות שהפתרונות שלהן אינווריאנטיים לפעולה של חבורה כלשהי. למשל

$$.\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^t A = I \right\}$$

נסתכל על הלפלסיאן

$$.\Delta = \sum_{i\in[n]} \partial_{x_i,x_i}$$

אם $y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מקיימת $\Delta(y) = 0$ אז $y \circ g = y$ לכל $g \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

סופוס לי חקר חבורות חלקות כאלו, ולמעשה הגדיר חשבון דיפרנציאלי של חבורות. כדי לחקור פונקציה חלקה $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ אנו מסתכלים על הנגזרת של f בנקודה, שהיא העתקה לינארית

$$.T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

האנלוג לחבורות הוא *חבורת לי* שהיא חבורה שאותה אפשר "לגזור". פורמלית, זאת חבורה עם מבנה של יריעה חלקה, או במילים אחרות, אוביקט חבורה בקטגוריה של יריעות חלקות.

"נגזרת" של חבורת לי נקראת *אלגברת לי* $\text{Lie}(G)$. זהו מרחב וקטורי עם מבנה מסוים. תורת לי בסיסית היא הבנת ההתאמה בין חבורות לי לאלגבראות לי שלהן.

דוגמאות.

1. $\text{Lie}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R})$.
2. $\text{Lie}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C})$.
3. $\text{Lie}(\mathcal{O}_n(k)) = \mathfrak{so}_n(k) \coloneqq \{A \in M_n(k) \mid A^t = -A\}$.
4. $\text{Lie}(\mathsf{SL}_n(k)) = \mathfrak{sl}_n(k) \coloneqq \{A \in M_n(k) \mid \text{tr}(A) = 0\}$.
5. נגדיר

$$\mathsf{Sp}_{2n}(k) = \left\{ A \in M_{2n}(k) \;\middle|\; A^t J A = J \right\}$$

עבור

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ {}_n{-I} & 0 \end{pmatrix}.$$

זאת נקראת *החבורה הסימפלקטית.* אז

$$\text{Lie}(\mathsf{Sp}_{2n}(k)) = \mathfrak{sp}_{2n}(k) \coloneqq \left\{ A \in M_{2n}(k) \;\middle|\; A^t J = -JA \right\}.$$

באופן כללי, אם ניקח חבורת לי $G \le \mathsf{GL}_n(k)$ אז $\text{Lie}(G) \le M_n(k)$ וזאת תהיה אלגברה יחד עם הפעולה של הקומוטטור

$$.[A,B] = AB - BA$$

בקורס זה נעשה "קירוב" של התאמת לי על ידי לקיחת *כל* תת־חבורה $G \le \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ ובניית $\text{Lie}(G) \le M_n(\mathbb{R})$.

1.1.2 סיווג של חבורות לי

חבורות לי מופיעות במגוון מקומות בטבע ובמתמטיקה. הרבה חבורות סימטריה בטבע הינן חבורות לי. אנו רוצים להבין בין השאר מסיבות אלו את המבנה של חבורות לי ולנסות לסווג אותן.

תחילה נבין את הקשר בין G_1, G_2 כך ש־$\mathsf{Lie}\left(G_1\right) \cong \mathsf{Lie}\left(G_2\right)$. התשובה לשאלה זאת תיעזר בחבורות כיסוי. נקבל מכך שמספיק להשיג סיווג של אלגבראות לי. למעשה, מספיק לסווג אלגבראות לי מעל $\mathbb{C}$.

נצמצם לפעמים את הדיון לחבורות לי *פשוטות* שהן חבורות לי קשירות ללא תת־חבורות נורמליות קשירות לא טריוויאליות. דוגמאות לחבורות לי פשוטות הן $\mathsf{SL}_n, \mathsf{Sp}_{2n}, \mathsf{SO}_n = \mathsf{SL}_n \cap \mathcal{O}_n$. מהן ניתן, במובן מסוים, לבנות כל חבורת לי. עבור G חבורת לי פשוטה, $\mathsf{Lie}\left(G\right)$ היא אלגברת לי פשוטה. לכן, מספיק לסווג אלגבראות לי פשוטות.

סביב שנת 1890, Cartan ו־$\mathrm{Killing}$ סיווגו באופן מלא אלגבראות לי פשוטות מעל $\mathbb{C}$, שהן "אבני הבניין של הסימטריה של הטבע".

יש משפחות של אלגבראות לי פשוטות, שנקראות אלגבראות קלאסיות. הן $\mathfrak{sl}_n\left(\mathbb{C}\right), \mathfrak{so}_n\left(\mathbb{C}\right), \mathfrak{sp}_{2n}\left(\mathbb{C}\right)$ שהגדרנו מקודם. חבורות לי שאלו הן אלגבראות לי שלהן נקראות חבורות קלאסיות. התברר שלמעט המשפחות הקלאסיות יש עוד בדיוק 5 אלגבראות לי פשוטות, שנקראות מיוחדות $\mathrm{exceptional}$. הן מסומנות G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. הכי קטנה מהן היא G_2 בעלת מימד 14, והכי גדולה היא E_8 בעלת מימד 248. לצורך הבנת התוצאה, נדרשת התעמקות אלגברית במבנה של אלגבראות לי, מה שדורש זמן.

1.1.3 חבורות קומפקטיות

חבורות לי הן חבורות שהן יריעות חלקות. מתברר שאם הן קומפקטיות, יש הרבה מה להגיד עליהן. חבורות לי קומפקטיות הן למשל

$$\mathcal{O}\left(n\right) \equiv \mathcal{O}_n\left(\mathbb{R}\right) \coloneqq \left\{A \in \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right) \mid A^t A = I\right\}$$
$$U\left(n\right) \coloneqq \left\{A \in \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right) \mid \bar{A}^t A = I\right\}.$$

כאשר המבנה שלהן מושרה מזה של $M_n\left(k\right) \cong k^{n^2}$.

1.1.4 תורת ההצגות

בתורת לי הגיעו להבנה שניתן ללמוד הרבה על חבורה ע"י הבנת הפעולה שלה על מרחבים וקטוריים. זוהי תורת ההצגות. עבור חבורות קומפקטיות יש מבנה נחמד לתורת ההצגות.

1.1.5 חבורות רדוקטיביות ואלגבריות

משפט שנחתור אליו הוא שכל חבורת לי קומפקטית קשירה היא חבורה אלגברית של מטריצות ממשיות. מסקנה ממשפט זה תהיה שלכל חבורת לי קומקפטית ניתן להגדיר קומפלקסיפיקציה על ידי הרחבת סקלרים. זאת מוגדרת על ידי השורשים המרוכבים של אותם פולינומים. חבורות שנקבל מקומפלקסיפיקציה נקראות *רדוקטיביות* ומהוות משפחה גדולה.

בשנת 1920 פיתח הרמן וייל $\left(\mathrm{Weyl}\right)$ את המבנה וההצגות של חבורות לי רדוקטיביות על סמך חבורות קומפקטיות.

בשנת 1940 קלוד שיבליי (Chevalley) הראה שניתן לתאר כל חבורת לי פשוטה כחבורה אלגברית. מסקנה של כך היא ש"לא צריך" אנליזה כדי לחקור תורת לי. אפשר גם להגדיר אנלוגית של חבורות לי מעל כל שדה.

1.1.6 התפתחות מודרנית של התחום

חבורות לי התפתחו לנושאים מאוחרים שמופיעים בהרבה תחומים.

- אחד התחומים הוא חבורות אלגבריות. תחום אחר הוא חבורות סופיות מסוג לי (Lie Type) שהן חבורות אלגבריות מעל שדה סופי. אלו אבני יסוד בסיווג של חבורות סופיות פשוטות.
- נושא אחר הוא מרחבים סימטריים. אלו מרחבים טבעיים עם פעולה של חבורת לי. למשל S^3 הוא מרחב סימטרי עם הפעולה של $\mathcal{O}\left(3\right)$.
- חבורות לי גם הפכו לכלי מרכזי בחקר של תבניות אוטומורפיות ותורת המספרים. הן מתקשרות למשפט Harish-Chandraולתוכנית Laglands.
- חבורות לי מתקשרות גם לאנליזה הרמונית.
- נחקרת היום גם תורת הצגות אינסוף־מימדיות של חבורות לי ופעולות של חבורות לי על מרחבי פונקציות. בין השאר נחקרות פעולות על מרחבי פונקציות שמקודדים תוכן של תורת מספרים.
- נחקרות גם היום, משנת 1985, חבורות קוונטיות, שהן דפורמציות של חבורות לי.
- נחקרות גם חבורות ואלגבראות אינסוף־מימדיות שנקראות אלגבראות Kac-Moody.
- ישנן תורת לי קטגורית ותורת לי גיאומטרית. הראשונה עוסקת למשל בקטגוריות שמוגדרות באופן דומה לחבורות לי.

1.2 חבורות לי

1.2.1 אקספוננט של מטריצות

נעבוד מעל שדה $k\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.
נסמן ב־

$$M\equiv M_n\equiv M_n\left(k\right)$$

מטריצות $n\times n$ מעל k עם הנורמה האוקלידית המושרית מ־k^{n^2}.

טענה 1.2.1 (עקרון ההצבה). *יהי*

$$F\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

עבור $a_n\in k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות r.
לכל $A\in M_n$ עבורה $\left\Vert A\right\Vert <r$ הטור $F\left(A\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n$ מגדיר טור מטריצות מתכנס בנורמה.

הוכחה. הנורמה מקיימת

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$
$$\|X \cdot Y\| \leq \|X\| \cdot \|Y\| .$$

לכן

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=k}^{\ell} a_n A^n\right\| &\leq \sum_{n=k}^{\ell} |a_n| \|A^n\| \\ &\leq \sum_{n=k}^{\ell} |a_n| \|A\|^n \\ &< \sum_{n=k}^{\ell} |a_n| (r-\varepsilon)^n \\ &\xrightarrow[k,\ell\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

ולפי קריטריון קושי נקבל שיש לסדרה $\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n A^n\right\|$ גבול. ■

אם $F(z)$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות ρ ו־$G(z)$ עם רדיוס התכנסות σ, אז

$$(F+G)(A) = F(A) + G(A)$$
$$(FG)(A) = F(A) \cdot G(A)$$

עבור A עם $\|A\| < \min\{\rho, \sigma\}$. אם $G(0)=0$ אז $F \circ G$ הוא טור חזקות, ועבור מטריצה A כך ש־$\|A\| < \sigma$ וגם $\|G(A)\| < \rho$ הטור

$$(F \circ G)(A) = F(G(A))$$

מתכנס.

הגדרה 1.2.2 (אקספוננט של מטריצה). עבור $z \in k$ נגדיר

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n$$

ועבור $z \in k$ עם $|z| < 1$ נגדיר

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot z^n .$$

מכאן, לכל מטריצה $X \in M$ ניתן להגדיר

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X$$

ועבור $X \in M$ עבורה $\|X - I\| < 1$ נגדיר

$$\log(x) := \log(1 + (X - I)) .$$

מסקנה 1.2.3. *1. לכל מטריצה $X \in M$ מתקיים*

$$\exp(X) \cdot \exp(-X) = I$$

וגם $\exp(X) \in \mathsf{GL}_n(k)$.

2. כאשר $\|X - I\| < 1$ מתקיים

$$\exp(\log(X)) = X.$$

3. עבור $X \in M$ המקיימת $\|X\| < \log 2$ מתקיים

$$\log(\exp(X)) = X.$$

אכן מתקיים

$$\begin{aligned}\|\exp(X) - I\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n\right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \|X\|^n \\ &= \exp(\|X\|) - 1 \\ &< 2 - 1 \\ &= 1\end{aligned}.$$

תרגיל 1. כאשר $XY = YX$ מתקיים

$$\exp(X) \cdot \exp(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (X+Y)^n = \exp(X+Y).$$

בפרט, עבור $t, s \in k$ מתקיים

$$\exp(tX) \cdot \exp(sX) = \exp((t+s)X).$$

לכן

$$\begin{aligned} a_X \colon k &\to \mathsf{GL}_n(k) \\ t &\mapsto \exp(tX) \end{aligned}$$

הומומורפיזם של חבורות.

טענה 1.2.4. *1. a_x הוא הפתרון היחיד למשוואה*

$$\begin{aligned} a'(t) &= a(t) \cdot X \\ a(0) &= I \end{aligned}$$

או למשוואה

$$\begin{aligned} a'(t) &= X \cdot a(t) \\ a(0) &= I \end{aligned}$$

עבור

$$a \colon k \to \mathsf{GL}_n(k).$$

2. a_X *הוא ההומומורפיזם החלק היחיד*

$$a\colon k\to \mathsf{GL}_n\left(k\right)$$

שמקיים $a'\left(0\right)=X$.

הוכחה. 1. a_X פתרון למשוואה. מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(a_X\left(t\right)\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\frac{1}{n!}\left(tX\right)^n\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{\left(n-1\right)!}X^n\\&=\mathsf{exp}\left(tX\right)\cdot X\\&=X\cdot\mathsf{exp}\left(tX\right)\end{aligned}.$$

יחידות נובעת ממשפט קיום ויחידות למד"ר.

2. אם a הוא הומומורפיזם כלשהו, כמו שנתון, מתקיים

$$\begin{aligned}a'\left(t\right)&=\left.\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left(a\left(t+s\right)\right)\right|_{s=0}\\&=\left.\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left(a\left(t\right)\cdot a\left(s\right)\right)\right|_{s=0}\\&=a\left(t\right)\cdot a'\left(0\right)\\&=a\left(t\right)\cdot X\end{aligned}$$

ומ־1 נובע $a=a_X$. ■