רשימות הרצאה לחבורות לי

חורף 2020, הטכניון

הרצאותיו של מקס גורביץ׳

הוקלדו על ידי אלעד צורני

25 בינואר 2021

תוכן העניינים

פרק 1

מבוא

1.1 מבוא היסטורי

1.1.1 חבורות לי

בנורבגיה, סביב שנת 1870, מתמטיקאי בשם סופוס לי, שחקר משוואות דיפרנציאליות, שם לב להופעה של מה שנקרא $``transformation$ $groups"$.

באופן לוקלי, נניח כי נתון שדה וקטורי חלק
$$x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$
נחפש פתרון למשוואה
$$y'(t) = x(y(t))$$
$$y(0) = y_0$$
עבור $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. לפי משפט קיום ויחידות של מד"ר, קיים פתרון יחיד $y(t)$ שמוגדר עבור $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ עבור $\varepsilon > 0$ כלשהו.
נגדיר $\varphi_x(t)(y_0) \coloneqq y(t)$ לכל $y_0 \in \mathbb{R}^n$. אז
$$\varphi_X(t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
אוטומורפיזם של $\mathbb{R}^n$. זאת משפחה של אופרטורים שמשתנה באופן חלק כתלות ב־t.
מתקיים
$$\varphi_x(0) = \mathrm{id}$$
ומיחידות הפתרונות,
$$\varphi_x(t) \circ \varphi_x(s) = \varphi_x(t+s).$$
התמונה $\mathrm{Im}\,\varphi_x$ נקראת *חבורה חד־פרמטרית*. אז
$$\varphi_x\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$$
הומומורפיזם של חבורות. זה לא מדויק, φ_x אולי לא מוגדר תמיד.

באופן גלובלי, קיימות משוואות שהפתרונות שלהן אינווריאנטיים לפעולה של חבורה כלשהי. למשל
$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^t A = I \right\}.$$
נסתכל על הלפלסיאן
$$\Delta = \sum_{i \in [n]} \partial_{x_i, x_i}.$$
אם $y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מקיימת $\Delta(y) = 0$ אז $y \circ g = y$ לכל $g \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

סופוס לי חקר חבורות חלקות כאלו, ולמעשה הגדיר חשבון דיפרנציאלי של חבורות. כדי לחקור פונקציה חלקה $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ אנו מסתכלים על הנגזרת של f בנקודה, שהיא העתקה לינארית
$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$
האנלוג לחבורות הוא *חבורת לי* שהיא חבורה שאותה אפשר "לגזור" פורמלית, זאת חבורה עם מבנה של יריעה חלקה, או במילים אחרות, אוביקט חבורה בקטגוריה של יריעות חלקות.
"נגזרת" של חבורת לי נקראת *אלגברת לי* $\mathrm{Lie}(G)$. זהו מרחב וקטורי עם מבנה מסוים. תורת לי בסיסית היא הבנת ההתאמה בין חבורות לי לאלגבראות לי שלהן.

דוגמאות.

1. $\text{Lie}\left(\text{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)\right) = M_n\left(\mathbb{R}\right)$.
2. $\text{Lie}\left(\text{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)\right) = M_n\left(\mathbb{C}\right)$.
3. $\text{Lie}\left(\mathcal{O}_n\left(k\right)\right) = \mathfrak{so}_n\left(k\right) \coloneqq \left\{A \in M_n\left(k\right) \mid A^t = -A\right\}$.
4. $\text{Lie}\left(\text{SL}_n\left(k\right)\right) = \mathfrak{sl}_n\left(k\right) \coloneqq \left\{A \in M_n\left(k\right) \mid \text{tr}\left(A\right) = 0\right\}$.
5. נגדיר
$$\text{Sp}_{2n}\left(k\right) = \left\{A \in M_{2n}\left(k\right) \,\middle|\, A^t J A = J\right\}$$
עבור
$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ {}_n{-I} & 0 \end{pmatrix}.$$
זאת נקראת *החבורה הסימפלקטית*. אז
$$\text{Lie}\left(\text{Sp}_{2n}\left(k\right)\right) = \mathfrak{sp}_{2n}\left(k\right) \coloneqq \left\{A \in M_{2n}\left(k\right) \,\middle|\, A^t J = -JA\right\}.$$

באופן כללי, אם ניקח חבורות לי $G \le \text{GL}_n\left(k\right)$ אז $\text{Lie}\left(G\right) \le M_n\left(k\right)$ וזאת תהיה אלגברה יחד עם הפעולה של הקומוטטור
$$\left[A, B\right] = AB - BA.$$
בקורס זה נעשה "קירוב" של התאמת לי על ידי לקיחת *כל* תת־חבורה $G \le \text{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)$ ובניית $\text{Lie}\left(G\right) \le M_n\left(\mathbb{R}\right)$.

1.1.2 סיווג של חבורות לי

חבורות לי מופיעות במגוון מקומות בטבע ובמתמטיקה. הרבה חבורות סימטריה בטבע הינן חבורות לי. אנו רוצים להבין בין השאר מסיבות אלו את המבנה של חבורות לי ולנסות לסווג אותן.

תחילה נבין את הקשר בין G_1, G_2 כך ש־$\text{Lie}\left(G_1\right) \cong \text{Lie}\left(G_2\right)$. התשובה לשאלה זאת תיעזר בחבורות כיסוי. נקבל מכך שמספיק להשיג סיווג של אלגבראות לי. למעשה, מספיק לסווג אלגבראות לי מעל $\mathbb{C}$.

נצמצם לפעמים את הדיון לחבורות לי *פשוטות* שהן חבורות לי קשירות ללא תת־חבורות נורמליות קשירות לא טריוויאליות. דוגמאות לחבורות לי פשוטות הן $\text{SO}_n = \text{SL}_n \cap \mathcal{O}_n, \text{Sp}_{2n}, \text{SL}_n$. מהן ניתן, במובן מסוים, לבנות כל חבורת לי. עבור G חבורת לי פשוטה, $\text{Lie}\left(G\right)$ היא אלגברת לי פשוטה. לכן, מספיק לסווג אלגבראות לי פשוטות.

סביב שנת 1890, Cartan ו־$\mathrm{Killing}$ סיווגו באופן מלא אלגבראות לי פשוטות מעל $\mathbb{C}$, שהן "אבני הבניין של הסימטריה של הטבע".

יש משפחות של אלגבראות לי פשוטות, שנקראות אלגבראות קלאסיות. הן $\mathfrak{sl}_n\left(\mathbb{C}\right), \mathfrak{so}_n\left(\mathbb{C}\right), \mathfrak{sp}_{2n}\left(\mathbb{C}\right)$ שהגדרנו מקודם. חבורות לי שאלו הן אלגבראות לי שלהן נקראות חבורות קלאסיות. התברר שלמעט המשפחות הקלאסיות יש עוד בדיוק 5 אלגבראות לי פשוטות, שנקראות מיוחדות $\mathrm{exceptional}$. הן מסומנות G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. הכי קטנה מהן היא G_2 בעלת מימד 14, והכי גדולה היא E_8 בעלת מימד 248. לצורך הבנת התוצאה, נדרשת התעמקות אלגברית במבנה של אלגבראות לי, מה שדורש זמן.

1.1.3 חבורות קומפקטיות

חבורות לי הן חבורות שהן יריעות חלקות. מתברר שאם הן קומפקטיות, יש הרבה מה להגיד עליהן. חבורות לי קומפקטיות הן למשל
$$\mathcal{O}\left(n\right) \equiv \mathcal{O}_n\left(\mathbb{R}\right) \coloneqq \left\{A \in \text{GL}_n\left(\mathbb{R}\right) \,\middle|\, A^t A = I\right\}$$
$$U\left(n\right) \coloneqq \left\{A \in \text{GL}_n\left(\mathbb{C}\right) \,\middle|\, \bar{A}^t A = I\right\}.$$
כאשר המבנה שלהן מושרה מזה של $M_n\left(k\right) \cong k^{n^2}$.

1.1.4 תורת ההצגות

בתורת לי הגיעו להבנה שניתן ללמוד הרבה על חבורה ע"י הבנת הפעולה שלה על מרחבים וקטוריים. זוהי תורת הצגות. עבור חבורות קומפקטיות יש מבנה נחמד לתורת ההצגות.

1.1.5 חבורות רדוקטיביות ואלגבריות

משפט שנחתור אליו הוא שכל חבורת לי קומפקטית קשירה היא חבורה אלגברית של מטריצות ממשיות. מסקנה ממשפט זה תהיה שלכל חבורת לי קומפקטית ניתן להגדיר קומפלקסיפיקציה על ידי הרחבת סקלרים. זאת מוגדרת על ידי השורשים המרוכבים של אותם פולינומים. חבורות שנקבל מקומפלקסיפיקציה נקראות *רדוקטיביות* ומהוות משפחה גדולה.

בשנת 1920 פיתח הרמן וייל $\left(\mathrm{Weyl}\right)$ את המבנה וההצגות של חבורות לי רדוקטיביות על סמך חבורות קומפקטיות.

בשנת 1940 קלוד שיבליי $\left(\mathrm{Chevalley}\right)$ הראה שניתן לתאר כל חבורת לי פשוטה כחבורה אלגברית. מסקנה של כך היא ש"לא צריך" אנליזה כדי לחקור תורת לי. אפשר גם להגדיר אנלוגית של חבורות לי מעל כל שדה.

1.1.6 התפתחות מודרנית של התחום

חבורות לי התפתחו לנושאים מאוחרים שמופיעים בהרבה תחומים.

- אחד התחומים הוא חבורות אלגבריות. תחום אחר הוא חבורות סופיות מסוג לי (Lie Type) שהן חבורות אלגבריות מעל שדה סופי. אלו אבני יסוד בסיווג של חבורות סופיות פשוטות.
- נושא אחר הוא מרחבים סימטריים. אלו מרחבים טבעיים עם פעולה של חבורת לי. למשל S^3 הוא מרחב סימטרי עם הפעולה של $\mathcal{O}(3)$.
- חבורות לי גם הפכו לכלי מרכזי בחקר של תבניות אוטומורפיות ותורת המספרים. הן מתקשרות למשפט Harish-Chandra ולתוכנית Langlands.
- חבורות לי מתקשרות גם לאנליזה הרמונית.
- נחקרת היום גם תורת הצגות אינסוף־מימדיות של חבורות לי ופעולות של חבורות לי על מרחבי פונקציות. בין השאר נחקרות פעולות על מרחבי פונקציות שמקודדים תוכן של תורת מספרים.
- נחקרות גם היום, משנת 1985, חבורות קוונטיות, שהן דפורמציות של חבורות לי.
- נחקרות גם חבורות ואלגבראות אינסוף־מימדיות שנקראות אלגבראות Kac-Moody.
- ישנן תורת לי קטגורית ותורת לי גיאומטרית. הראשונה עוסקת למשל בקטגוריות שמוגדרות באופן דומה לחבורות לי.

1.2 חבורות לי

1.2.1 אקספוננט של מטריצות

נעבוד מעל שדה $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
נסמן ב־

$$M \equiv M_n \equiv M_n(k)$$

מטריצות $n \times n$ מעל k עם הנורמה האוקלידית המושרית מ־k^{n^2}.

טענה 1.2.1 (עקרון ההצבה). *יהי*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

עבור $a_n \in k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות r.
לכל $A \in M_n$ עבורה $\|A\| < r$ הטור $F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ מגדיר טור מטריצות מתכנס בנורמה.

הוכחה. הנורמה מקיימת

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$
$$\|X \cdot Y\| \leq \|X\| \cdot \|Y\| .$$

לכן

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=k}^{\ell} a_n A^n\right\| &\leq \sum_{n=k}^{\ell} |a_n| \, \|A^n\| \\ &\leq \sum_{n=k}^{\ell} |a_n| \, \|A\|^n \\ &< \sum_{n=k}^{\ell} |a_n| \, (r - \varepsilon)^n \\ &\xrightarrow[k,\ell \to \infty]{} 0\end{aligned}$$

ולפי קריטריון קושי נקבל שיש לסדרה $\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n A^n\right\|$ גבול. ■

אם $F(z)$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות ρ ו־$G(z)$ עם רדיוס התכנסות σ, אז

$$(F+G)(A) = F(A) + G(A)$$
$$(FG)(A) = F(A) \cdot G(A)$$

עבור A עם $\|A\| < \min\{\rho, \sigma\}$. אם $G(0)=0$ אז $F \circ G$ הוא טור חזקות, ועבור מטריצה A כך ש־$\|A\| < \sigma$ וגם $\|G(A)\| < \rho$ הטור

$$(F \circ G)(A) = F(G(A))$$

מתכנס.

הגדרה 1.2.2 (אקספוננט של מטריצה). עבור $z \in k$ נגדיר

$$\exp(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n$$

ועבור $z \in k$ עם $|z| < 1$ נגדיר

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot z^n .$$

מכאן, לכל מטריצה $X \in M$ ניתן להגדיר

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X$$

ועבור $X \in M$ עבורה $\|X - I\| < 1$ נגדיר

$$\log(x) \coloneqq \log(1 + (X - I)) .$$

מסקנה 1.2.3. *1. לכל מטריצה $X \in M$ מתקיים*

$$\exp(X) \cdot \exp(-X) = I$$

וגם $\exp(X) \in \mathrm{GL}_n(k)$.

2. כאשר $\|X - I\| < 1$ מתקיים

$$\exp(\log(X)) = X .$$

3. עבור $X \in M$ המקיימת $\|X\| < \log 2$ מתקיים

$$\log(\exp(X)) = X .$$

אכן מתקיים

$$\begin{aligned} \|\exp(X) - I\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \right\| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \|X\|^n \\ &= \exp(\|X\|) - 1 \\ &< 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned} .$$

תרגיל 1. כאשר $XY = YX$ מתקיים

$$\exp(X) \cdot \exp(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (X+Y)^n = \exp(X+Y) .$$

בפרט, עבור $t, s \in k$ מתקיים

$$\exp(tX) \cdot \exp(sX) = \exp((t+s)X) .$$

לכן

$$\begin{aligned} a_X \colon k &\to \mathrm{GL}_n(k) \\ t &\mapsto \exp(tX) \end{aligned}$$

הומומורפיזם של חבורות.

טענה 1.2.4. *1. a_x הוא הפתרון היחיד למשוואה*

$$\begin{aligned} a'(t) &= a(t)\cdot X \\ a(0) &= I \end{aligned}$$

או למשוואה

$$\begin{aligned} a'(t) &= X\cdot a(t) \\ a(0) &= I \end{aligned}$$

עבור

$$a\colon k\to \mathsf{GL}_n(k).$$

2. a_X הוא ההומומורפיזם החלק היחיד

$$a\colon k\to \mathsf{GL}_n(k)$$

שמקיים $a'(0)=X$.

הוכחה. 1. a_X פתרון למשוואה. מתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(a_X(t)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\frac{1}{n!}(tX)^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}X^n \\ &= \mathsf{exp}(tX)\cdot X \\ &= X\cdot \mathsf{exp}(tX) \end{aligned}.$$

יחידות נובעת ממשפט קיום ויחידות למד"ר.

2. אם a הוא הומומורפיזם כלשהו, כמו שנתון, מתקיים

$$\begin{aligned} a'(t) &= \left.\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left(a(t+s)\right)\right|_{s=0} \\ &= \left.\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left(a(t)\cdot a(s)\right)\right|_{s=0} \\ &= a(t)\cdot a'(0) \\ &= a(t)\cdot X \end{aligned}$$

ומ־1 נובע $a=a_X$. ■

דוגמה 1.2.5. נחשב אקספוננט של מטריצה אלכסונית. נקבל

$$\begin{aligned} \mathsf{exp}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\mathsf{exp}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathsf{exp}(\lambda_n)\end{pmatrix} \end{aligned}.$$

הגדרה 1.2.6 (אופרטור ההצמדה). בהינתן $a\in \mathsf{GL}_n(k)$ נגדיר את *אופרטור ההצמדה ב־a* על ידי

$$\begin{aligned} \mathsf{Ad}(a): M &\to M \\ X &\mapsto aXa^{-1} \end{aligned}.$$

סימון 1.2.7. עבור מרחב וקטורי V נסמן ב־$\mathsf{End}\left(V\right)$ את מרחב ההעתקות הלינאריות מ־V לעצמו. זהו מרחב וקטורי איזומורפי ל־M_{n^2}.

סימון 1.2.8. עבור מרחב וקטורי V נסמן ב־$\mathsf{GL}\left(V\right) \subseteq \mathsf{End}\left(V\right)$ את האנדומורפיזמים ההפיכים של V. לעתים מסמנים זאת $\mathsf{Aut}\left(V\right)$.

הערה 1.2.9. מתקיים $\mathsf{Ad}\left(a\right) \in \mathsf{GL}\left(M\right)$ כיוון ש־

$$\mathsf{Ad}\left(a^{-1}\right)\left(\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(X\right)\right) = X.$$

כמו כן, Ad הוא הומומורפיזם של חבורות $\mathsf{GL}_n\left(k\right) \to \mathsf{GL}\left(M\right)$ כיוון שמתקיים

$$\mathsf{Ad}\left(ab\right)\left(X\right) = abX\left(ab\right)^{-1} = a\left(bXb^{-1}\right)a^{-1} = \mathsf{Ad}\left(a\right) \circ \mathsf{Ad}\left(b\right)\left(X\right).$$

תרגיל 2. אם $f\left(z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ טור חזקות, ו־$X \in M_n$ עבורה $f\left(X\right)$ מוגדרת, מתקיים

$$\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(f\left(X\right)\right) = f\left(\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(X\right)\right).$$

בפרט, מתקיים

$$\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(\exp\left(X\right)\right) = \exp\left(\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(X\right)\right).$$

מסקנה 1.2.10. *נניח כי V מרחב וקטורי עם בסיס B. יש זיהוי*

$$\begin{aligned} \mathsf{End}\left(V\right) &\cong M_n \\ T &\leftrightarrow \left[T\right]_B \end{aligned}.$$

לכן, עבור $X \in \mathsf{End}\left(V\right)$ אפשר להגדיר $\exp\left(X\right) \in \mathsf{GL}\left(V\right)$ כאופרטור שמקיים

$$\left[\exp\left(X\right)\right]_B = \exp\left(\left[X\right]_B\right)$$

ובנייה זאת לא תלויה בבחירת הבסיס B.

הגדרה 1.2.11 (הקומוטטור). עבור $X, Y \in M$ נגדיר

$$\left[X, Y\right] = XY - YX.$$

הגדרה 1.2.12. עבור $X \in M$ נגדיר

$$\begin{aligned} \mathsf{ad}\left(X\right) : M &\to M \\ Y &\mapsto \left[X, Y\right] \end{aligned}.$$

טענה 1.2.13. *עבור $X \in M$ מתקיים*

$$\mathsf{Ad}\left(\exp\left(X\right)\right) = \exp\left(\mathsf{ad}\left(x\right)\right).$$

הוכחה. מתקיים

$$\mathsf{Ad}\left(\exp\left(X\right)\right)\left(Y\right) = \exp\left(X\right) \cdot Y \cdot \exp\left(-X\right)$$

ומצד שני

$$\exp\left(\mathsf{ad}\left(X\right)\right)\left(Y\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\mathsf{ad}\left(X\right)\right)^k\left(Y\right).$$

נגדיר

$$A\left(t\right) \coloneqq \mathsf{Ad}\left(\exp\left(tX\right)\right).$$

נחפש את $A\left(t\right)$. מתקיים

$$A\left(0\right) = \mathsf{Ad}\left(I\right) = \mathsf{id}$$

וגם

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\left(t\right)\left(Y\right)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(tX\right) \cdot Y \cdot \exp\left(-tX\right)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(tX\right)\right) Y \exp\left(-tX\right) + \exp\left(tX\right) Y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(-tX\right)\right) \\ &= X \cdot A\left(t\right)\left(Y\right) + A\left(t\right)\left(Y\right) \cdot \left(-X\right) \\ &= \mathsf{ad}\left(X\right)\left(A\left(t\right)\left(Y\right)\right) \end{aligned}.$$

לכן

$$A'\left(t\right) = \mathsf{ad}\left(X\right) \cdot A\left(t\right).$$

ראינו שזה מחייב

$$A\left(t\right) = \exp\left(t\mathsf{ad}\left(X\right)\right).$$

לכן $A\left(1\right)$ מה שרצינו. ∎

1.2.2 נוסחת Campbell-Baker-Hausdorff

ראינו שקיימות סביבה $U \subseteq M$ של 0 וסביבה $V \subseteq \mathsf{GL}_n(k)$ של I כך ש־$\mathsf{exp}\colon U \to V$ הוא הומאומורפיזם.
עבור $A, B \in V$ מספיק קרובות ל־I מתקיים $AB \in V$. כלומר, אם $A = \mathsf{exp}(X)$ ו־$B = \mathsf{exp}(Y)$ יש $Z \in V$ עבורה

$$\mathsf{exp}(Z) = \mathsf{exp}(X) \cdot \mathsf{exp}(Y).$$

נחשוב על ההתאמה הזאת כפונקציה, $Z = C(X, Y)$, שמוגדרת לפחות עבור X, Y קרובים מספיק ל־0.
נרצה נוסחה עבור $C(X, Y)$, או לפחות תיאור כלשהו של C. ראינו שאם $XY = YX$ אז $C(X, Y) = X + Y$.

טענה 1.2.14 (נוסחת Campbell-Baker-Hausdorff). *באופן כללי מתקיים*

$$C(X, Y) = x + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots$$

כאשר שאר הביטויים הם קומוטטורים ארוכים יותר ב־X, Y.

הערה 1.2.15. מתקיים

$$C(tx, ty) = t(x + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + o(t^2).$$

הגדרה 1.2.16 (אלגברת לי של מטריצות). תת מרחב $\mathfrak{g} \leq M$ יקרא *אלגברת לי של מטריצות* אם הוא סגור תחת הקומוטטור.

מסקנה 1.2.17. *אם $X, Y \in \mathfrak{g}$ ו־$C(X, Y)$ מוגדרת, אז $C(X, Y) \in \mathfrak{g}$.*

תרגיל 3. לכל מטריצה $X \in M_n$ מתקיים

$$\det(\mathsf{exp}(X)) = e^{\mathsf{tr}(X)}.$$

נביט בטורי החזקות הבאים.

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n = \begin{cases} \frac{1 - \mathsf{exp}(-z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

$$G(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n = \begin{cases} \frac{\mathsf{log}(1+z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

כאשר G מוגדרת כשמתקיים $|z| < 1$. אז

$$G(\mathsf{exp}(z) - 1) \cdot \mathsf{exp}(z) \cdot F(z) = \frac{z}{\mathsf{exp}(z) - 1} \cdot \mathsf{exp}(z) \cdot \frac{1 - \mathsf{exp}(-z)}{z} = 1$$

למשל כאשר $|z| < \mathsf{log}(2)$.

טענה 1.2.18 (נוסחת Duhamel). *תהי $x\colon \mathbb{R} \to M_n$ מסילה חלקה. מתקיים*

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \mathsf{exp}(x(t)) = \mathsf{exp}(x(t)) F(\mathsf{ad}(x(t))(x'(t))).$$

הוכחה. נגדיר

$$Y(s, t) \coloneqq \mathsf{exp}(-sx(t)) \cdot \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\mathsf{exp}(sx(t))).$$

אז

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\mathsf{exp}(x(t))) = \mathsf{exp}(x(t)) Y(1, t)$$

וגם

$$Y(0, t) = 0.$$

אז

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial s} &= \mathsf{exp}(-sx(t)) \cdot (-x(t)) \cdot \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\mathsf{exp}(sx(t))) + \mathsf{exp}(-sx(t)) \cdot \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(x(t)\,\mathsf{exp}(sx(t))) \\
&= \mathsf{exp}(-sx(t)) \cdot x'(t) \cdot \mathsf{exp}(sx(t)) \\
&= \mathsf{Ad}(\mathsf{exp}(-sx(t)))(x'(t)) \\
&= \mathsf{exp}(\mathsf{ad}(-sx(t)))(x'(t)) \\
&= \mathsf{exp}(-s\,\mathsf{ad}(x(t)))(x'(t))
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}Y(1,t) &= \int_0^1 \frac{\partial Y}{\partial s}(s,t)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n s^n}{n!}(\mathrm{ad}(x(t)))^n(x'(t))\,\mathrm{d}s\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 \frac{(-1)^n s^n}{n!}(\mathrm{ad}(x(t)))^n(x'(t))\,\mathrm{d}s\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(\mathrm{ad}(x(t)))^n(x'(t))\\ &= F(\mathrm{ad}(x(t)))(x'(t))\end{aligned}$$

כנדרש. ■

סימון 1.2.19. נסמן

$$[X_1,X_2,\ldots,X_k] \coloneqq [X_1,\ldots,[X_{k+2},[X_{k+1,X_k}]]]\,.$$

תרגיל 4. אם $C(X,Y)$ מוגדר, גם $C(tX,tY)$ מוגדר לכל $t\in(0,1)$.

טענה 1.2.20 (נוסחת $Dynkin$ (1947)). *אם $C(X,Y)$ מוגדר אז*

$$C(X,Y) = \sum_{k\in\mathbb{N}_+} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\in\mathbb{N}\\ j_1,\ldots,j_k\in\mathbb{N}\\ \forall n\in\mathbb{N}\colon\, i_n+j_n>0}} \frac{1}{(i_1+j_1)\cdot\ldots\cdot(i_k+j_k)\cdot i_1!j_1!\cdot\ldots\cdot i_k!j_k!}[\underbrace{X,\ldots,X}_{i_1},\underbrace{Y,\ldots,Y}_{j_1},\ldots,\underbrace{X,\ldots,X}_{i_k},\underbrace{Y,\ldots,Y}_{j_k}].$$

הוכחה. נגדיר

$$Z(t) = C(tX,tY)$$

עבור $t\in(0,1)$, ונגדיר $Z(0)=0$. אז

$$\exp Z(t) = \exp(tX)\cdot\exp(tY)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp Z(t)) &= \mathrm{Ad}(\exp(tX))\,\mathrm{Ad}(\exp(tY))\\ \exp(\mathrm{ad}\,Z(t)) &= \exp(\mathrm{ad}(tX))\exp(\mathrm{ad}(tY))\\ &= \exp(t\,\mathrm{ad}(X))\exp(t\,\mathrm{ad}(Y))\,.\end{aligned}$$

לכן מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp Z(t)) = X\exp(Z(t)) + \exp(Z(t))\cdot Y$$

ומצד שני

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp Z(t)) = \exp(Z(t))\cdot F(\mathrm{ad}\,Z(t))(Z'(t))\,.$$

לכן

$$X\exp(Z(t)) + \exp(Z(t))\cdot Y = \exp(Z(t))\cdot F(\mathrm{ad}\,Z(t))(Z'(t))$$

ולאחר פישוט נקבל

$$\begin{aligned}F(\mathrm{ad}\,Z(t))(Z'(t)) &= \mathrm{Ad}(\exp(-Z(t)))(X)+Y\\ &= \exp(-ad(Z(t)))(X)+Y\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}Z'(t) &= (G(\exp(\mathrm{ad}(Z(t)))-I)\exp(\mathrm{ad}(Z(t))))(\exp(-ad(Z(t)))(X)+Y)\\ &= G(\exp(\mathrm{ad}(Z(t)))-I)(X+\exp(\mathrm{ad}\,Z(t))(Y))\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1}(\exp(t\,\mathrm{ad}\,X)\exp(t\,\mathrm{ad}\,Y)-I)^k(X+\exp(\mathrm{ad}(Z(t)))(Y))\end{aligned}$$

כאשר
$$\exp\left(t\,\mathrm{ad}\left(Y\right)\right)\left(Y\right)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{j!}t^{j}\left(\mathrm{ad}\left(Y\right)\right)^{j}\left(Y\right)=Y$$
ולכן
$$\begin{aligned}Z'\left(t\right)&=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k+1}\left(\exp\left(t\,\mathrm{ad}\,X\right)\exp\left(t\,\mathrm{ad}\,Y\right)-I\right)^{k}\left(X+\exp\left(t\,\mathrm{ad}\left(X\right)\right)\left(Y\right)\right)\\&=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k+1}\sum_{n\in\mathbb{N}}t^{n}\left[\text{sums of commutators in }X\text{ and }Y\right]\end{aligned}.$$
אז
$$C\left(X,Y\right)Z\left(1\right)=\int_{0}^{1}Z'\left(t\right)\mathrm{d}t.$$
על ידי אינטגרציה איבר איבר בטור של Z' נגיע לנוסחה עבור $C\left(X,Y\right)$ ונקבל את הנדרש. ■

הערה 1.2.21. מתקיים
$$C\left(X,Y\right)=\log\left(\exp\left(X\right)\cdot\exp\left(Y\right)\right).$$

פרק 2

אלגבראות לי

2.1 חבורות לי ואלגבראות לי

2.1.1 מאלגבראות לי לחבורות לי

לכל $V \leq M_n(\mathbb{R})$ נגדיר חבורת מטריצות

$$\Gamma(V) \coloneqq \{\exp(X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(X_m) \mid x_1, \ldots, x_m \in V\} \leq \mathsf{GL}_n(k)$$

שהיא תת־חבורת מטריצות של $\mathsf{GL}_n(k)$.

2.1.2 מחבורות לי לאלגבראות לי

בכיוון ההפוך, עבור כל תת־חבורה $G \leq \mathsf{GL}_n(k)$ נגדיר את *המרחב המשיק* ל־G על ידי

$$\mathfrak{g} \coloneqq \mathrm{Lie}(G) = \left\{ X \in M_n \;\middle|\; \exists \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G\colon \substack{\gamma \in \mathscr{C}^1 \\ \gamma(0) = I \\ \gamma'(0) = X} \right\}.$$

טענה 2.1.1. *1. $\mathfrak{g}$ מרחב וקטורי.*

2. עבור $X \in \mathfrak{g}$ ו־$a \in G$ מתקיים

$$\mathsf{Ad}(a)(X) \in \mathfrak{g}.$$

3. $\mathfrak{g}$ אלגברת לי.

הוכחה. 1. תהיינה $X, Y \in \mathfrak{g}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. נניח כי a, b מסילות ב־G עבורן

$$a(0) = b(0) = I$$
$$a'(0) = X$$
$$b'(0) = Y.$$

נגדיר

$$c(t) \coloneqq a(\alpha t) \cdot b(\beta(t)) \in G$$
$$c(0) = I.$$

אז

$$c'(0) = \alpha a'(0) b(0) + \beta a(0) b'(0) = \alpha X + \beta Y \in \mathfrak{g}.$$

2. תהי γ מסילה ב־G עם $\gamma(0) = I$ ו־$\gamma'(0) = X$. לכל t בתחום ההגדרה של γ מתקיים

$$\delta(t)\, \mathsf{Ad}(a)(\gamma(t)) \in G.$$

אז

$$\begin{aligned} \delta(0) &= \mathsf{Ad}(a)(I) = I \\ \delta'(0) &= \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \left(a\gamma(t) a^{-1}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \mathsf{Ad}(a)(\gamma'(0)) \\ &= \mathsf{Ad}(a)(X) \end{aligned}$$

כנדרש.

3. יהיו $X, Y \in \mathfrak{g}$ ו־a, b מסילות ב־G עבורן $a'(0) = X, b'(0) = Y$. יהי

$$I = a(t)\,a(t)^{-1}$$

ואז

$$0 = a'(0) \cdot a(0)^{-1} + a(0)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a(t)^{-1}\right)\Big|_{t=0}.$$

לכן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a(t)^{-1}\right)\Big|_{t=0} = -a'(0) = -X\,.$$

אז

$$\gamma(t) = \mathrm{Ad}\,(a(t))\,(Y) \in \mathfrak{g}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned}\gamma'(0) &= a'(0) \cdot Y \cdot a(0)^{-1} + a(0)\,Y\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a(t)^{-1}\right)\Big|_{t=0}\\ &= X \cdot Y \cdot Y + I \cdot Y \cdot (-X)\\ &= [X, Y]\end{aligned}$$

לכן

$$[X, Y] = \gamma'(0) \in \mathfrak{g}\,.$$

■

נרצה להראות שתחת תנאים מתאימים, ההעתקות Γ, Lie הופכיות אחת לשנייה. כלומר, נרצה ליצור התאמה חח"ע בין חבורות מטריצות מסוימות לבין אלגבראות לי.

ליתר דיוק, נוכיח שלושה דברים מרכזיים.

1. לכל אלגברת לי $\mathfrak{g} \le M_n$ ממשית מתקיים
$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,(\Gamma(\mathfrak{g})).$$

2. עבור כל תת־חבורה $G \le \mathrm{GL}_n(k)$ מתקיים
$$\Gamma(\mathrm{Lie}\,(G)) \le G.$$

3. נחפש תנאים על G עבורם
$$\Gamma(\mathrm{Lie}\,(G)) = G.$$

חבורה G כזאת תיקרא בהמשך *קשירה*.

נוכיח את משפט התת־חבורה הסגורה: אם $G \le \mathrm{GL}_n(k)$ תת־חבורה סגורה וקשירה, מתקיים

$$\Gamma(\mathrm{Lie}\,(G)) = G.$$

הערה 2.1.2. בנינו התאמה בין חבורות לי של מטריצות לאלגבראות לי של מטריצות. ניתן להתאים באופן כללי בין חבורות לי לאלגבראות לי (אבסטרקטיות).

קיים משפט שאומר שכל אלגברת לי כזאת איזומורפית לאלגברת לי של מטריצות, ונקבל מדיון זה שחבורת לי כללית היא חבורת כיסוי של חבורות לי של מטריצות.

דוגמה 2.1.3. החבורה $G \le \mathrm{GL}_n(k)$ של מטריצות אלכסוניות הפיכות איזומורפית ל־$(k^\times)^n$.

מתקיים

$$\mathrm{Lie}\,(G) = \left\{X \in M_n \;\middle|\; \begin{smallmatrix}\exists \gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to G\\ \gamma(0)=I\\ \gamma'(0)=X\end{smallmatrix}\right\}.$$

במקרה זה $\mathrm{Lie}\,(G)$ אלגברת המטריצות האלכסוניות, שהאיזומורפית ל־k^n.

זה נכון כי לכל $X = \mathrm{diag}\,(x_1, \ldots, x_n)$ נוכל להביט במסילה $\gamma(t) = \mathrm{diag}\,(1 + tx_1, \ldots, 1 + tx_n) \in G$. מתקיים כאן

$$[X, Y] = 0\,.$$

הגדרה 2.1.4. עבור $\mathfrak{g} \le M$ אלגברת לי, נגדיר

$$\Gamma(\mathfrak{g}) \coloneqq \left\{\exp(X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(X_t) \;\middle|\; (X_i)_{i\in[t]} \in \mathfrak{g}\right\} \le \mathrm{GL}_n(k).$$

דוגמה 2.1.5. אם $\mathfrak{g}$ האלגברה של מטריצות אלכסוניות נקבל

$$\Gamma(g)=\left\{\mathsf{diag}\left(e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_n}\right)\;\middle|\;(\lambda_i)_{i\in[n]}\subseteq k\right\}$$

כי $e^{\lambda}e^{\mu}=e^{\lambda+\mu}$.

אם $k=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, כל z ניתן לכתיבה כ־e^a. עבור $G=(k^\times)^n$ נקבל

$$\Gamma(\mathsf{Lie}(G))=G.$$

אם $k=\mathbb{R}$ נקבל כי e^a מכסה את המספרים החיוביים אז

$$\Gamma(\mathsf{Lie}(G))=\{\mathsf{diag}(a_1,\ldots,a_n)\mid\forall i\in[n]\colon a_i>0\}\cong(R_{>0})^n.$$

אם נחשוב על הטופולוגיה של G נגלה שהיא לא קשירה וש־$\Gamma(\mathsf{Lie}(G))$ רכיב קשירות של G.

נסמן $\mathfrak{g}=\mathsf{Lie}(G)$. ו־$k\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. אז $\exp\colon\mathfrak{g}\to G$ הוא הומומורפיזם בין $(\mathfrak{g},+)\cong(k^n,+)$ ל־G. כאשר $k=\mathbb{R}$ זה איזומורפיזם

$$\exp\colon\mathfrak{g}\xrightarrow{\sim}\Gamma(\mathsf{Lie}(G)).$$

אם $k=\mathbb{C}$, יהיה גרעין, כי $e^{2\pi ki}=1$ עבור k שלם. עבור $n=1$ למשל, נקבל העתקת כיסוי

$$\exp\colon(\mathbb{C},+)\to\left(\mathbb{C}^\times,\cdot\right).$$

דוגמה 2.1.6. נחשוב האם $(k^n,+)$ היא חבורת מטריצות, ואם כן מה אלגברת לי שלה.

התשובה היא כן, מתקיים

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&\cdots&0&\cdots&x_1\\\vdots&&&&\\0&&\ddots&&\\\vdots&&&&x_n\\0&\cdots&0&\cdots&1\end{pmatrix}\;\middle|\;(x_i)_{i\in[n]}\subseteq k\right\}\leq\mathsf{GL}_{n+1}(k).$$

דוגמה 2.1.7. מתקיים

$$\mathsf{Lie}(G)=\left\{\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\cdots&x_1\\\vdots&&&&\\0&&\ddots&&\\\vdots&&&&x_n\\0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}\;\middle|\;(x_i)_{i\in[n]}\subseteq k\right\}\leq\mathsf{GL}_{n+1}(k)$$

ו־$\exp\colon(\mathsf{Lie}(G),+)\xrightarrow{\sim}G$ איזומורפיזם.

נשים לב כי מתקיים

$$\det(\exp(X))=e^{\mathsf{tr}\,X}$$

וניתן דוגמאות למשפחות של חבורות לי.

דוגמאות (דוגמאות למשפחות של חבורות לי).

.1

$$\mathsf{SL}_n(k)=\{g\in\mathsf{GL}_n(k)\mid\det(g)=1\}$$

עם אלגברת לי

$$*\mathfrak{sl}_n(k)=\{X\in M_n\mid\mathsf{tr}(X)=0\}$$

כפי ששנראה.

תהי $X\in\mathfrak{sl}_n$. תהי $\gamma(t)=\exp(tX)\in\mathsf{SL}_n(k)$. אז $\gamma(0)=I$ ו־$\gamma'(0)=X$. מתקיים

$$\mathfrak{sl}_n\subseteq\mathsf{Lie}(\mathsf{SL}_n(k))$$

ולמעשה יש שוויון: אם $\gamma(t)\in\mathsf{SL}_n(k)$ וגם $\gamma(0)=I,\gamma'(0)=X$ מתקיים

$$0\underset{[\gamma(t)\in\mathsf{SL}_n]}{=}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\det(\gamma(t))\right)_{t=0}=\mathsf{tr}(\gamma'(0))=\mathsf{tr}(X)$$

ולכן באמת $\mathfrak{sl}_n=\mathsf{Lie}(\mathsf{SL}_n(k))$.

2.

$$\mathcal{O}\left(n\right)=\left\{ g\in\mathsf{GL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)\;\middle|\;g^{t}\cdot g=I\right\}$$

3.

$$SO\left(n\right)=\mathcal{O}\left(n\right)\cap\mathsf{SL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$$

עם אלגברת לי

$$.\mathfrak{so}_{n}=\left\{ X\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)\;\middle|\;X^{t}=-X\right\}$$

4.

$$U\left(n\right)=\left\{ g\in\mathsf{GL}_{n}\left(\mathbb{C}\right)\;\middle|\;\bar{g}^{t}\cdot g=I\right\}$$

עם אלגברת לי

$$.\mathfrak{u}_{n}=\left\{ X\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)\;\middle|\;\bar{X}^{t}=-X\right\}$$

5.

$$\mathbb{SU}\left(n\right)=U\left(n\right)\cap\mathsf{SL}_{n}\left(\mathbb{C}\right)$$

עם אלגברת לי

$$.\mathfrak{su}_{n}=\mathfrak{u}_{n}\cap\mathfrak{sl}_{n}\left(\mathbb{C}\right)$$

טענה 2.1.8. *1. מתקיים*

$$.\mathfrak{so}_{n}=\mathsf{Lie}\left(\mathsf{SO}\left(n\right)\right)=\mathsf{Lie}\left(\mathcal{O}\left(n\right)\right)$$

2. מתקיים

$$.\mathfrak{su}_{n}=\mathsf{Lie}\left(\mathsf{SU}\left(n\right)\right)$$

הוכחה. 1. תהי

$$.\gamma\colon\ \left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathsf{SO}\left(n\right)$$

אז

$$.\forall s\in\left(-\varepsilon,\varepsilon\right):\ \left(\gamma\left(s\right)\right)^{t}\gamma\left(s\right)=I$$

נגזור את המשווה ונקבל

$$.\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left(\gamma\left(s\right)^{t}\right)_{s=0}\cdot\cancelto{I}{\gamma\left(0\right)}+\cancelto{I}{\gamma\left(0\right)^{t}}\cdot\gamma'\left(0\right)=0$$

שחלוף מתחלף עם נגזרת, לכן נקבל

$$.\gamma'\left(0\right)^{t}+\gamma'\left(0\right)=0$$

לכן $.\gamma'\left(0\right)\in\mathfrak{so}_{n}$

להיפך, אם

$$\begin{aligned}\mathsf{exp}\left(sX\right)^{t} & =\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}s^{n}\left(X^{t}\right)^{n}\\
 & =\mathsf{exp}\left(sX^{t}\right)\\
 & =\mathsf{exp}\left(-sX\right)\\
 & =\mathsf{exp}\left(sX\right)^{-1}
\end{aligned}$$
.

לכן $\mathsf{exp}\left(sX\right)\in\mathcal{O}\left(n\right)$. ראינו שאם $X\in\mathfrak{sl}_{n}$ אז $\mathsf{exp}\left(sX\right)\in\mathsf{SL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$, לכן $\gamma\left(s\right)=\mathsf{exp}\left(sX\right)\in\mathsf{SO}\left(n\right)$. אכן מתקיים $\gamma\left(0\right)=I,\gamma'\left(0\right)=X$.

2. ההוכחה דומה. ■

2.2 דוגמאות במימדים נמוכים

דוגמאות.

1. $\mathcal{O}(1)=\{\pm1\}\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2.
$$\mathsf{SO}(2)=\left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\,\middle|\, a^2+b^2=1\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\theta\cos & -\sin\theta\\ \theta\sin & \cos\theta\end{pmatrix}\,\middle|\,\theta\in\mathbb{R}\right\}\cong S^1$$
אלו כל הסיבובים בזווית θ.
3. מתקיים
$$\mathcal{O}(2)=\mathsf{SO}(2)\sqcup\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\mathsf{SO}(2).$$
4. מתקיים $\mathbb{C}^\times\cong\mathsf{GL}_1(\mathbb{C})$. כמרחב ממשי
$$\mathbb{C}=\mathsf{Span}\{1,i\}.$$
כל $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ נותן אופרטור הפיך על $C\cong\mathbb{R}^2$ על ידי מכפלה. אם נביט במטריצה המייצגת של אופרטור זה ביחס לבסיס $(1,i)$ נקבל ש־$z=a+ib$ מיוצג על ידי $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.
נקבל שיכון
$$\iota\colon\mathsf{GL}_1(\mathbb{C})\hookrightarrow\mathsf{GL}_2(\mathbb{R}).$$
מתקיים
$$\mathsf{U}(1)\text{ eq}\{z\in\mathbb{C}\mid z\bar{z}=1\}=S^1.$$
אז
$$\iota(\mathsf{U}(1))=\mathsf{SO}(2).$$
זאת מתרחבת להעתקה לינארית $\mathbb{C}\to M_2(\mathbb{R})$. לכן $\mathsf{U}(1)\cong\mathsf{SO}(2)$.
5. מתקיים $\mathsf{Lie}(\mathsf{GL}_1(\mathbb{C}))=\mathbb{C}$. אם ניקח $z\in\mathbb{C}$ נקבל
$$\iota(\exp(z))=\exp(\iota(z)).$$
אז מתקיים
$$\begin{aligned}\mathsf{Lie}(i(\mathsf{U}(1))) &= \mathsf{Lie}(\mathsf{SO}(2))\\ &=\mathfrak{so}_2\\ &=\left\{\begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha\in\mathbb{R}\right\}\\ &= i\mathbb{R}\\ &\le\mathbb{C}\end{aligned}.$$
עבור $\mathfrak{so}_2\ni\begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}$ אכן ניתן להגדיר
$$\gamma_\alpha(t):=\begin{pmatrix}(\alpha t)\cos & -\sin(\alpha t)\\ (\alpha t)\sin & \cos(\alpha t)\end{pmatrix}\in\mathsf{SO}(2)$$
שמקיימת $\gamma_\alpha(0)=I,\gamma'_\alpha=\begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}$.

משפט 2.2.1 (משפט הסיבוב של אוילר). *כל איבר $g\in\mathsf{SO}(3)$ הוא סיבוב סביב ציר נתון במרחב. כלומר, קיימת מטריצה $T\in\mathsf{SO}(3)$ עבורה*
$$TgT^{-1}=\begin{pmatrix}\theta\cos & -\sin\theta & 0\\ \theta\sin & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

הוכחה. מתקיים

$$\begin{aligned}\det(g-I) &= \det\left(g^t-I\right)\\ &= \det\left(g^1-I\right)\\ &= \det\left(g^{-1}(I-g)\right)\\ &= \det\left(g^{-1}\right)\det(I-g)\\ &= \det(I-g)\\ &= (-1)^3\det(g-I)\\ &= -\det(g-I)\end{aligned}$$

לכן $\det(g-I)=0$. לכן 1 שורש של הפולינום האופייני של g לכן יש ל־g וקטור עצמי $e_3\in\mathbb{R}^3$ עם ערך עצמי 1. נסמן $W\coloneqq\{e_3\}^\perp\le\mathbb{R}^3$. אז

$$\begin{aligned}\langle g\cdot W,e_3\rangle &= \left\langle W,g^t\cdot e_3\right\rangle\\ &= \left\langle W,g^{-1}e_3\right\rangle\\ &= \langle W,e_3\rangle\\ &= \{0\}\end{aligned}$$

לכן W נשמר על ידי g. לכן קיים בסיס אורתונורמלי B שבו

$$[g]_B=\begin{pmatrix}h & \\ & 1\end{pmatrix}$$

עבור $h\in M_2(\mathbb{R})$ וקיימת $T\in\mathrm{SO}(2)$ עבורה

$$TgT^{-1}=[g]_B=\begin{pmatrix}h & \\ & 1\end{pmatrix}.$$

לכן $h=\begin{pmatrix}\theta\cos & -\sin\theta\\ \theta\sin & \cos\theta\end{pmatrix}$ עבור $\theta\in\mathbb{R}$ כלשהי. ■

הערה 2.2.2. נכתוב

$$\begin{pmatrix}h & \\ & 1\end{pmatrix}=\exp(Y)$$

עבור

$$Y=\begin{pmatrix}0 & \alpha & 0\\ -\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{so}_3.$$

אז

$$g=\mathrm{Ad}\left(T^{-1}\right)(\exp(Y))=\exp\left(\mathrm{Ad}\left(T^{-1}\right)(Y)\right)$$

ומתקיים

$$\mathrm{Ad}\left(T^{-1}\right)(Y)\in\mathfrak{so}_3.$$

אז

$$\exp\colon\mathfrak{so}_3\to\mathrm{SO}(3)$$

הוא על.

נזכיר כי מתקיים

$$\mathfrak{so}_3=\left\{X\in M_3(\mathbb{R})\,\middle|\,X^t=-X\right\}.$$

נבחר בסיס

$$\begin{aligned}E_1&=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\\ E_2&=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\\ E_3&=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ל־$\mathfrak{so}_3$. נסמן את האיזומורפיזם

$$\begin{aligned}\mathfrak{so}_3 &\to \mathbb{R}^3\\ \alpha_1 E_2 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 &\mapsto \begin{pmatrix} {}_1\alpha \\ {}_2\alpha \\ {}_3\alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

על ידי $X \mapsto \vec{X}$.

למה 2.2.3. *1. מתקיים*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{so}_3 \colon \overrightarrow{AB}[X,Y] = X\left(\vec{Y}\right).$$

2. מתקיים

$$\overrightarrow{\mathrm{Ad}(a)(X)} = a\left(\vec{X}\right).$$

הוכחה. 1. מספיק לבדוק על איברי בסיס

$$\overrightarrow{[E_i, E_j]} = E_i\left(\vec{E_j}\right).$$

2. $\exp$ הוא על. נקבל

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{Ad}(a)(Y)} &= \overrightarrow{\exp(\mathrm{ad}\,X)(Y)}\\ &= \overrightarrow{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}\,X)^n(Y)}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\overrightarrow{(\mathrm{ad}(X))^n(Y)}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}X^n\left(\vec{Y}\right)\\ &= \exp(X)\left(\vec{Y}\right)\\ &= a\left(\vec{Y}\right).\end{aligned}$$

■

הערה 2.2.4. הפעולה של $\mathrm{SO}(3)$ על $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$ על ידי $a \cdot X = \mathrm{Ad}(a)(X)$ איזומורפית לפעולה הסטנדרטית של $\mathrm{SO}(3)$ על $\mathbb{R}^3$.

טענה 2.2.5. *1. עבור $X \in \mathfrak{so}_3$ המטריצה $\exp(X)$ היא סיבוב סביב $\vec{X} \in \mathbb{R}^3$ בכיוון יד ימין בזווית $\|\vec{x}\|$.*

2. מתקיים $\exp(X) = \exp(Y)$ אם ורק אם $X = c \cdot Y$ עבור $c \in \mathbb{R}$ וגם

$$\left\|\vec{X} - \vec{Y}\right\| = 2\pi k$$

עבור $k \in \mathbb{Z}$.

הוכחה. 1. יהי $X \in \mathfrak{so}_3$. אז יש $a \in \mathrm{SO}(3)$ ו־$\alpha = \left\|\vec{X}\right\|$ עבורם

$$\begin{aligned}\vec{X} &= a \cdot \left(\vec{E_3}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\alpha \cdot \mathrm{Ad}(a) E_3\end{aligned}$$

ולכן

$$X = \alpha\,\mathrm{Ad}(a)(E_3) = \mathrm{Ad}(a)\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

אז

$$\begin{aligned}\exp(X) &= \exp\left(\mathrm{Ad}(a)\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)\\ &= \mathrm{Ad}(a)\begin{pmatrix} \alpha\cos & -\sin\alpha & 0 \\ \alpha\sin & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

אז $\exp\left(X\right)$ סיבוב סביב הציר

$$a\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=a\left(\vec{E}_3\right)=\frac{1}{\alpha}\vec{X}$$

או סביב הציר $\vec{X}$. הזווית היא $\alpha=\left\Vert \vec{X}\right\Vert$.

2. תרגיל. ■

תרגיל 5. חישבו על $\mathsf{SO}\left(2\right)$ כמרחב טופולוגי כפי שמתקבל מהטענה. $\exp\colon\mathfrak{so}_3\to\mathsf{SO}\left(3\right)$ העתקה רציפה ועל.

דוגמה 2.2.6. מתקיים

$$\mathsf{SU}\left(2\right)=\left\{A\in\mathsf{GL}_2\left(\mathbb{C}\right)\;\middle|\;\bar{A}^t=A^{-1}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\;\middle|\;{\scriptstyle |\alpha|^2+|\beta|^2=1}\right\}.$$

טופולוגית נוכל לזהות זאת עם S^3.

מהמשפט הספקטרלי, לכל $a\in\mathsf{SU}\left(2\right)$ יש $g\in\mathsf{SU}\left(2\right)$ עבורה

$$gag^{-1}=\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z^{-1}\end{pmatrix}.$$

ידוע $z^{-1}=\bar{z}$ לכן $z=e^{i\theta}$ כלומר

$$gag^{-1}=\exp\begin{pmatrix}i\theta & 0\\ 0 & -i\theta\end{pmatrix}$$

ואז

$$a=\mathsf{Ad}\left(g^{-1}\right)\exp\begin{pmatrix}i\theta & \\ & -\theta\end{pmatrix}=\exp\left(\mathsf{Ad}\left(g^{-1}\right)\begin{pmatrix}i\theta & \\ & -i\theta\end{pmatrix}\right).$$

לכן

$$\exp\colon\mathfrak{su}_2\to\mathsf{SU}\left(2\right)$$

על. מתקיים

$$\mathfrak{su}_2=\left\{\begin{pmatrix}i\zeta_3 & \zeta_1-i\zeta_2\\ \zeta_1+i\zeta_2 & -i\zeta_3\end{pmatrix}\;\middle|\;\zeta_i\in\mathbb{R}\right\}$$

ואז $\mathfrak{su}_2\cong\mathbb{R}^3$ כשמטריצה כנ"ל מתאימה לוקטור $\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \zeta_3\end{pmatrix}$. במעבר ל־$\mathbb{R}^3$ מתקבלת המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

אם $a\in\mathsf{SU}\left(2\right)$ ו־$X,Y\in\mathfrak{su}_2$ נקבל

$$\begin{aligned}\left\langle \mathsf{Ad}\left(a\right)\left(X\right),\mathsf{Ad}\left(a\right)\left(Y\right)\right\rangle &=\mathsf{tr}\left(\overline{aXa^{-1}}^t aYa^{-1}\right)\\ &=\mathsf{tr}\left(a\bar{X}^tYa^{-1}\right)\\ &=\left\langle X,Y\right\rangle\end{aligned}.$$

אז

$$\mathsf{Ad}\colon\mathsf{SU}\left(2\right)\to\mathsf{GL}\left(\mathfrak{su}_2\right)\cong\mathsf{GL}_3\left(\mathbb{R}\right)$$

והאיזומורפיזם נותן

$$\Im\,\mathsf{Ad}\subseteq\mathcal{O}\left(2\right).$$

למעשה גם

$$\Im\,\mathsf{Ad}\subseteq\mathsf{SO}\left(2\right).$$

לכן אפשר במקרה זה להסתכל על

$$\mathsf{Ad}\colon\mathsf{SU}\left(2\right)\to\mathsf{SO}\left(3\right).$$

אם $Z\in\mathfrak{su}_2$ מתקיים

$$\forall X,Y\in\mathfrak{su}_2\colon\ \left\langle \mathsf{ad}\left(Z\right)\left(X\right),Y\right\rangle=\left\langle X,-\mathsf{ad}\left(Z\right)\left(Y\right)\right\rangle.$$

אז

$$\mathsf{ad}\colon\mathfrak{su}_2\to\mathsf{End}\left(\mathfrak{su}_2\right)\cong M_3\left(\mathbb{R}\right)$$

והמשוואה נותנת בזיהוי זה ש־$\mathsf{ad}\left(Z\right)^t=-\mathsf{ad}\left(Z\right)$. לכן נוכל לחשוב על ad כהעתקה

$$\mathsf{ad}\colon\mathfrak{su}_2\to\mathfrak{so}_2.$$

טענה 2.2.7. *1.*

$$\mathsf{ad}\colon \mathfrak{su}_2 \to \mathfrak{so}_3$$

איזומורפיזם של אלגבראות לי.

2.

$$\mathsf{Ad}\colon \mathsf{SU}(2) \to \mathsf{SO}(3)$$

היא על ומתקיים

$$\ker \mathsf{Ad} = \{\pm 1\} .$$

הוכחה. 1. משוויון מימדים, מספיק להראות שמתקיים

$$\ker(\mathsf{ad}) = \{0\} .$$

נניח כי $X \in \ker(\mathsf{ad})$ כלומר

$$\forall Y \in \mathfrak{su}_2\colon\ [X,Y] = 0 .$$

תהי $Z \in M_2(\mathbb{C})$. אפשר לכתוב $Z = U + iV + \alpha I$ עבור סקלר $\alpha \in \mathbb{C}$ ועבור $U,V \in \mathfrak{su}_2$. נקבל

$$[X,Z] = [X,U] + i[X,V] + [X,\alpha I] = 0 + 0 + 0 = 0 .$$

לכן $[X,Z] = 0$ ולכן X מתחלף עם $M_2(\mathbb{C})$. לכן יש $\beta \in \mathbb{C}$ עבורה $X = \beta I$. ידוע $\mathsf{tr}\, X = 0$ לכן $\beta = 0$ ולכן $X = 0$.

2. חישוב $\ker \mathsf{Ad}$ דומה מאוד לסעיף הקודם. $g \in \ker \mathsf{Ad}$ מתחלפת עם מטריצות כי $gag^{-1} = a$. כדי להראות ש־Ad יהיה על נשים לב כי $\mathsf{Ad} \circ \exp = \exp \circ\, \mathsf{ad}$ כאשר $\exp, \mathsf{ad}$ שתיהן על. ■

משפט 2.2.8. *לכל חבורה $G \le \mathsf{GL}_n(k)$ מתקיים $\Gamma(\mathsf{Lie}(G)) \le G$.*
במילים אחרות, לכל $G \le \mathsf{GL}_n(k)$ ולכל $X \in \mathsf{Lie}(G)$ מתקיים $\exp(X) \in G$.

הוכחה. תהי $G \le \mathsf{GL}_n(k)$ ותהי $X \in \mathsf{Lie}(G)$. נוכיח שמתקיים $\exp(tX) \in G$ עבור $|t|$ מספיק קטן. אם זה מספיק עבור $|t| < \varepsilon$, עבור $k \in \mathbb{Z}$ עבורו $\frac{1}{k}$ נקבל

$$\exp\left(\frac{1}{k}X\right) \in G \implies \exp(X) = \exp\left(\frac{1}{k}X\right)^k \in G .$$

תהי $\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}(G)$ ונבחר בסיס $(X_i)_{i\in[k]}$ עבור $\mathfrak{g}$ כמרחב וקטורי. קיימות מסילות $a_i(t) \in G$ כך שמתקיים $a_i(0) = I$ וגם $a_i'(0) = X_i$. נגדיר

$$g\colon \mathfrak{g} \to G$$

על ידי

$$g(t_1X_1 + \ldots + t_kX_k) = a_1(t_1)\cdot \ldots \cdot a_k(t_k) .$$

יהי S תת־מרחב משלים ל־$\mathfrak{g}$ בתוך M_n.
תהי

$$h\colon S \to M$$
$$Y \mapsto I + Y ,$$

כך שמתקיים $f = g \cdot h$. אז

$$(\mathsf{d}h)_0(Y) = Y$$
$$(\mathsf{d}g)_0(X) = X .$$

נגדיר

$$f = g \cdot h\colon M_n \to M_n .$$

אז

$$(\mathsf{d}f)_0 = \mathsf{id},\quad f(0) = I$$

ובפרט $(\mathsf{d}f)_0$ הפיכה. לכן, לפי משפט הפונקציה ההפוכה f הפיכה מקומית ב־0. כלומר, קיימות סביבה W_1 של I, סביבה W_2 של 0, והעתקה

$$f^{-1}\colon W_1 \to W_2 \subseteq M_n = \mathfrak{g} \oplus S$$

שהפכית ל־f. כיוון שהעתקה לסכום ישר היא סכום העתקות (כי סכום ישר הוא קו־מכפלה) נוכל לכתוב $f^{-1} = U + V$ כאשר U,V העתקות מ־W_1 ל־$\mathfrak{g}, S$ בהתאמה.

נרצה להראות שמתקיים $V\left(\exp\left(tX\right)\right)=0$ כיוון שאז נקבל

$$f^{-1}\left(\exp\left(tX\right)\right)=g$$

מספיק להראות

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\left(\exp\left(tX\right)\right)\right)=0$$

וכיוון שמתקיים $a\left(t\right)=\exp\left(tX\right)$ צריך לשם כך להראות

$$\mathrm{d}V_{a(t)}\cdot X\cdot a\left(t\right)=\left(\mathrm{d}V\right)_{a(t)}\cdot a'\left(t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\left(\exp\left(tX\right)\right)\right)=0.$$

נרצה לכן להראות

$$\left(\mathrm{d}V\right)_{a}\cdot X\cdot a=0$$

לכל מטריצה בסביבת I ולכל $X\in\mathfrak{g}$. מתקיים $V\colon M_{n}\to S$ ולכן $\mathrm{d}V_{a}\colon M_{n}\to S$. כעת

$$\begin{aligned}a&=f\left(X_{a},Y_{a}\right)\\&=g\left(X_{a}\right)\cdot h\left(Y_{a}\right)\end{aligned}$$

כאשר $X_{a}\in\mathfrak{g},Y_{a}\in S$. אז

$$V\left(f\left(X_{a}+X,Y_{a}\right)\right)=Y_{a}$$

לכל $X\in\mathfrak{g}$. כלומר,

$$\left(\mathrm{d}V\right)_{a}\cdot\left(\mathrm{d}f\right)_{\left(X_{a},Y_{a}\right)}\left(X\right)=0\ .$$

אבל

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{d}f\right)_{\left(X_{a},Y_{a}\right)}\left(X\right)&=\left(\mathrm{d}g\right)_{X_{a}}\left(X\right)\cdot h\left(Y_{a}\right)\\&=\left(\mathrm{d}g\right)_{X_{a}}\cdot X\cdot g\left(X_{a}\right)^{-1}\cdot a\end{aligned}\ .$$

קיבלנו

$$\left(\mathrm{d}V\right)_{a}\cdot\left(\mathrm{d}g\right)_{X_{a}}\cdot X\cdot g\left(X_{a}\right)^{-1}\cdot a=0$$

לכל a בסביבת I ולכל $X\in\mathfrak{g}$. אבל, נרצה

$$\left(\mathrm{d}V\right)_{a}\cdot X\cdot a=0\ .$$

נסמן $X':=\left(\mathrm{d}g\right)_{X_{a}}\cdot X\cdot g\left(X_{a}\right)^{-1}$ ונשים לב שמתקיים $X'=\gamma'\left(0\right)$. אז

$$\gamma\left(t\right)=g\left(X_{a}-tX\right)\cdot g\left(X_{a}\right)^{-1}\in G$$

וגם $\gamma\left(0\right)=I$. לכן מהגדרת $\mathfrak{g}$ נקבל X'. לכן ההעתקה $X\mapsto X'$ היא העתקה לינארית $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$. אם $a=I$ ו־$f\left(0,0\right)=I$ נקבל

$$\left(\mathrm{d}g\right)_{0}=\mathrm{id},\quad X_{a}=0$$

ואז

$$A_{I}=\mathrm{id}$$

אופרטור הפיך. לכן אם נרחיק את a ממטריצת היחידה קצת, עדיין A_{a} הפיך, ולכן על. ■

פרק 3

חבורות מטריצות

3.0.1 חבורות מטריצות כחבורות לי

3.1 טופולוגיה על חבורות מטריצות

הגדרה 3.1.1. ראינו שלכל חבורה $G \leq \mathsf{GL}_n(k)$ אפשר לדבר על $\exp(X) \in G$ לכל $X \in \mathsf{Lie}(G)$.
לכל $G \leq \mathsf{GL}_n(k)$ נגדיר טופולוגיה חדשה באופן הבא.
נאמר שקבוצה $U \subseteq G$ פתוחה אם לכל $g \in U$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שמתקיים $g \cdot \exp(X) \in U$ לכל $X \in \mathsf{Lie}(G)$ המקיים $\|X\| < \varepsilon$.
פורמלית, הקבוצות

$$B_{g,\varepsilon} = \left\{ g \cdot \exp(X) \;\middle|\; \substack{X \in \mathsf{Lie}(G) \\ \|X\| < \varepsilon} \right\}$$

נותנות בסיס לטופולוגיה.

תרגיל 6. באופן דומה אפשר לקחת בסיס אחר $\{\exp(X) \cdot g\}$ אבל הוא נותן את אותה הטופולוגיה.

תרגיל 7. ההעתקות

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathsf{Lie}(G) &\to G \\ \cdot\colon G \times G &\to G \\ ()^{-1}: G &\to G \end{aligned}$$

רציפות בטופולוגיה הנ"ל.

הבחנה 3.1.2. קיבלנו שלכל $g \in G$ אם נבחר $\varepsilon > 0$ מספיק קטן יש סביבה $B_{g,\varepsilon}$ של g שהומיאומורפית לקבוצה פתוחה במרחב אוקלידי. לכן G יריעה טופולוגית. ההעתקות המעבר (בין הקבוצות במרחבים האוקלידיים) יוצאות חלקות ולכן G *יריעה חלקה*.
אכן, אם

$$h = g_1 \exp(X_1) = g_2 \cdot \exp(X_2)$$

נקודה בחיתוך של שתי קבוצות פתוחות, ניתן לכתוב

$$X_1 = \log\left(g_1^{-1} g_2 \exp(X_2)\right) \coloneqq \psi(X_2)$$

ולכן X_1 כפונקציה של X_2 היא פונקציה חלקה $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. ההופכית שלה חלקה באותו אופן, ולכן זה דיפאומורפיזם.

הערה 3.1.3. במבנה של G כיריעה חלקה, ההעתקות

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathsf{Lie}(G) &\to G \\ \cdot\colon G \times G &\to G \\ ()^{-1}: G &\to G \end{aligned}$$

חלקות.

הערה 3.1.4. לפעמים הטופולוגיה שהגדרנו מתלכדת עם הטופולוגיה על G כתת־קבוצה של M_n, אבל זה לא נכון תמיד.

דוגמה 3.1.5. תהי $G \coloneqq \mathsf{GL}_n(\mathbb{Q})$. כל מסילה חלקה $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ קבועה. לכן $\gamma'(0) = 0$ ולכן $\mathsf{Lie}(G) = \{0\}$.
אז $B_{g,\varepsilon} = \{g\}$ ונקבל את הטופולוגיה הדיסקרטית על G. זאת אינה הטופולוגיה היחסית.

דוגמה 3.1.6 (ישרים על הטורוס). תהי
$$\mathbb{T}^2 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; |a| = |b| = 1 \right\} \le \mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$$
מתקיים $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$ וגם
$$\mathsf{Lie}\left(\mathbb{T}^2\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 2\pi i\theta_1 & 0 \\ 0 & 2\pi i\theta_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$
ניתן לבדוק שהטופולוגיה שעל $\mathbb{T}^2$ שהגדרנו בבניית המבנה של היריעה החלקה מתלכדת עם הטופולוגיה המושרית ועם הטופולוגיה על $S^1 \times S^1$.
לכל $X, Y \in \mathfrak{g} \coloneqq \mathsf{Lie}\left(\mathbb{T}^2\right)$ מתקיים $[X, Y] = 0$. לכן כל תת־מרחב של $\mathfrak{g}$ הוא אלגברת לי. כאן
$$\mathsf{exp}\colon (\mathfrak{g}, +) \to \mathbb{T}^2$$
הוא הומומורפיזם של חבורות על ידי
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \big/ 2\pi\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{T}^2$$
כשהעתקה הראשונה היא העתקת המנה.
עבור כל $\alpha \in \mathbb{R}$ ניקח תת־אלגברה
$$\mathfrak{g}_\alpha = \left\{ \mathsf{diag}\left(2\pi i\alpha\theta, 2\pi i\theta\right) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$
אז
$$\mathfrak{g}_\alpha = \mathsf{Lie}\left(G_\alpha\right)$$
כאשר
$$G_\alpha \coloneqq \left\{ \mathsf{diag}\left(e^{2\pi i\alpha\theta}, e^{2\pi i\theta}\right) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$
נגדיר
$$\gamma_\alpha(\theta) = \mathsf{diag}\left(e^{2\pi i\alpha\theta}, e^{2\pi i\theta}\right)$$
ואם $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\gamma_\alpha(n) = 1$. במקרה זה G_α לולאה סגורה הומיאומורפית ל־S^1. אם $\alpha \notin \mathbb{Q}$ נקבל כי G_α לולאה פתוחה (וצפופה) שהומיאומורפית ל־$\mathbb{R}$. אפשר להשתכנע שהטופולוגיה שהגדרנו על G_α אכן מתאימה לזאת של $\mathbb{R}$, ובמקרה זה הטופולוגיה המושרית על G_α בתוך $\mathbb{T}^2$ היא אחרת.
נוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ יש θ גדולה כרצוננו כך שמתקיים $|\gamma(\alpha)(\theta) - I| < \varepsilon$. נביט בחבורה
$$S^1 = \left\{ \mathsf{diag}(z, 1) \mid |z| = 1 \right\}$$
ובחבורה
$$H \coloneqq G_\alpha \cap S^1 \le S^1.$$
אם H סופית, קיים $d \in \mathbb{N}$ עבורו
$$\gamma_\alpha(d) = \gamma_\alpha(1)^d = 1$$
שזאת סתירה לאי־רציונליות של α. לכן H אינסופית. מקומפקטיות של S^1 נקבל $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ עבורם
$$\left|\gamma_\alpha(k_1 - k_2) - I\right| = \left|\gamma_\alpha(k_1) - \gamma_\alpha(k_2)\right| < \varepsilon.$$

עבור כל חבורת מטריצות G החבורה $G^\circ = \Gamma\left(\mathsf{Lie}(G)\right)$ היא תת־החבורה של G הנוצרת על ידי איברים מהצורה $\mathsf{exp}(X)$.

טענה 3.1.7 *1. G° תת־חבורה נורמלית וקשירה ב־G.*

2. אם G קשירה מתקיים $G = G^\circ$.

הוכחה. 1. עבור
$$a = \mathsf{exp}(X_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{exp}(X_k)$$
המסילה
$$\gamma(t) = \mathsf{exp}(tX_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{exp}(tX_k)$$
מסילה רציפה שמקשרת בין I, a. מתקיים גם
$$\forall g \in G\colon \mathsf{Ad}(g)(a) = \mathsf{exp}\left(\mathsf{Ad}(a)(X_1)\right) \cdot \ldots \cdot \mathsf{exp}\left(\mathsf{Ad}(a)(X_k)\right) \in \mathsf{Lie}(G)$$
לכן G° נורמלית.

2. G° מכילה סביבה פתוחה U של I, למשל $U = B_{I,\varepsilon}$. מתקיים
$$G^\circ = \bigcup_{g \in G^\circ} g \cdot U$$
וזה איחוד של קבוצות פתוחות. לכן G° פתוחה. תת־חבורה פתוחה של חבורה טופולוגית היא גם סגורה, כי הקוסטים שלה ב־G פתוחים. לכן G פתוחה וסגורה, ולכן קשירה. לכן $G = G^\circ$. באופן דומה, איברי G/G° פתוחים וסגורים ולכן הינם רכיבי הקשירות של G. ■

מסקנה 3.1.8. *G° רכיב הקשירות של $I \in G$.*

מסקנה 3.1.9. *$G \le \mathsf{GL}_n$ קשירה בטופולוגיה שהגדרנו אם ורק אם $\Gamma\left(\mathsf{Lie}\left(G\right)\right) = G$.*

הערה 3.1.10. בעתיד נוכיח שאם $G \le \mathsf{GL}_n$ היא סגורה בטופולוגיה המושרית, הטופולוגיה שהגדרנו מתלכדת עם הטופולוגיה היחסית.

דוגמה 3.1.11. לכל $X \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים
$$\det\left(\exp\left(X\right)\right) = e^{\mathsf{tr}(X)} > 0 .$$
אז
$$\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)^\circ \subseteq \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)^+ \coloneqq \left\{A \in \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right) \mid \det\left(A\right) > 0\right\}.$$
למעשה, ראינו בתרגיל ש־$\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)^+$ קשירה. לכן יש שוויון
$$\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)^\circ = \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)^+.$$

דוגמה 3.1.12. ראינו שקיימת $g \in \mathcal{O}\left(n\right)$ עבורה
$$\mathcal{O}\left(n\right) = \mathsf{SO}\left(n\right) \cup g \cdot \mathsf{SO}\left(n\right).$$
ראינו גם שמתקיים
$$\mathfrak{so}_3 = \mathsf{Lie}\left(\mathsf{SO}\left(3\right)\right)$$
ושמתקיים
$$\Gamma\left(\mathfrak{so}_3\right) = \mathsf{SO}\left(3\right)$$
לכן
$$\mathsf{SO}\left(3\right) = \mathsf{SO}\left(3\right)^\circ = \mathcal{O}\left(3\right)^\circ.$$

דוגמה 3.1.13. תהי
$$\mathsf{O}\left(1,1\right) \coloneqq \left\{A \in \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right) \;\middle|\; A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}A^t = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}.$$
עבור $A \in \mathsf{O}\left(1,1\right)$ מתקיים
$$\det\left(A\right) \cdot \det\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} \cdot \det\left(A^t\right) = \det\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$$
לכן $\det\left(A\right)^2 = 1$ לכן $\det\left(A\right) = \pm 1$. מתקיים $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \in \mathsf{O}\left(1,1\right)$ וגם
$$\mathsf{O}\left(1,1\right) = \mathsf{SO}\left(1,1\right) \cup \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\mathsf{SO}\left(1,1\right)$$
עבור
$$\mathsf{SO}\left(1,1\right) \coloneqq \mathsf{O}\left(1,1\right) \cap \mathsf{SL}_n\left(\mathbb{R}\right).$$
החבורה $\mathsf{SO}\left(1,1\right)$ אינה קשירה. מתקיים
$$\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}\left(\mathsf{O}\left(1,1\right)\right)$$
ואם נגזור את $\gamma\colon \left(-\varepsilon,\varepsilon\right) \to \mathsf{O}\left(1,1\right)$ עם $\gamma\left(0\right) = I$ נקבל
$$\gamma'\left(0\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\gamma'\left(0\right)^t = 0.$$
אז
$$\mathfrak{g} = \left\{X \in M_2\left(\mathbb{R}\right) \;\middle|\; A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}A^t = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\}.$$
זאת חבורה חד־מימדית. נקבל
$$\mathsf{O}\left(1,1\right)^\circ = \mathsf{SO}\left(1,1\right)^\circ = \left\{\exp\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\}$$
והאיברים בחבורה זאת נקראים סיבובים היפרבוליים.

נסמן
$$C \coloneqq \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathsf{SO}\left(2\right).$$

אז

$$\exp\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix} = \exp\left(C\begin{pmatrix}2a & \\ & -2a\end{pmatrix}C^{-1}\right) = C\begin{pmatrix}e^{2a} & \\ & e^{-2a}\end{pmatrix}C^{-1} = \begin{pmatrix}\cosh(2a) & \sinh(2a)\\ \sinh(2a) & \cosh(2a)\end{pmatrix}.$$

בבסיס המלכסן אלו העתקות מהצורה $\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}$ עבור $t>0$. העתקות אלה מקיימות

$$xy = (tx)\left(t^{-1}y\right)$$

ולכן משמרות את ההיפרבולה.

מתקיים למשל

$$-I \in \mathsf{SO}(1,1)\setminus \mathsf{SO}(1,1)^{\circ}$$

ולמעשה

$$\left[\mathsf{SO}(1,1) : \mathsf{SO}(1,1)^{\circ}\right] = 2$$
$$\left[\mathsf{O}(1,1) : \mathsf{O}(1,1)^{\circ}\right] = 4\ .$$

בדקו זאת וחשבו בנוסף מהי החבורה הסופית $\mathsf{O}(1,1)\big/\mathsf{O}(1,1)^{\circ}$.

הגדרה 3.1.14. לכל G, החבורה $G\big/G^{\circ}$ נקראת ה־component group של G.

דוגמה 3.1.15. עבור $G := \mathsf{GL}_n(\mathbb{Q})$ מתקיים $G\big/G^{\circ} \cong G$.

3.1.1 חבורות לי אבליות

טענה 3.1.16. *תהי $G \le \mathsf{GL}_n(k)$ קשירה. G אבלית אם ורק אם $\mathsf{Lie}(G)$ אבלית (כלומר $[X,Y]=0$ לכל $X,Y\in\mathsf{Lie}(G)$).*

הוכחה. נניח כי G אבלית ותהיינה $X,Y\in\mathsf{Lie}(G)$. מתקיים

$$\gamma(s,t) := \mathsf{Ad}(\exp(tX))(\exp(sY)) = \exp(sY).$$

נגזור ב-0 לפי s ונקבל

$$\exp(tX)\cdot Y\cdot\exp(-tX) = \mathsf{Ad}(\exp(tX))(Y) = Y\ .$$

נגזור ב־$t=0$ ונקבל $XY-YX=0$.

בכיוון השני, נניח כי $\mathsf{Lie}(G)$ אבלית וכי G. אז

$$\forall X,Y\in\mathsf{Lie}(G):\ \exp(X)\exp(Y) = \exp(Y)\exp(X)$$

אז $\Gamma^{\circ} = \Gamma(\mathsf{Lie})(G)$ אבלית, ומתקיים $G^{\circ}=G$ כי G קשירה. ■

הערה 3.1.17. נניח כי G קשירה ואבלית. אז $\exp\colon \mathfrak{g}\to G$ הומומורפיזם מ־$(\mathfrak{g},+)$ ל־$(G,\cdot)$. אז אפשר לכתוב

$$G = (\mathfrak{g},+)\big/L$$

כאשר

$$L := \ker\exp = \{x\in\mathfrak{g} \mid \exp(X)=1\}.$$

לפעמים G כזאת נקראת טורוס (מוכלל).

הערה 3.1.18. כל חבורה סופית G אפשר לשכן בתוך S_n. יש גם שיכון

$$i\colon S_n \to \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$$

על ידי מטריצות פרמוטציה על הבסיס הסטנדרטי.

באופן זה אפשר לחשוב על כל חבורה סופית כחבורת מטריצות. ל־G סופית נקבל $\mathsf{Lie}(G)=\{0\}$. לכן הטופולוגיה של G כחבורת לי היא דיסקרטית.

נשים לב ש־$\mathsf{Lie}(G)$ אבלית, בעוד G לאו דווקא אבלית. זה מתאפשר כי $G^{\circ}=\{\mathsf{id}\}\subsetneq G$. על כל חבורה סופית אפשר לחשוב כחבורת לי לא־קשירה עם G° טריוויאלי.

הגדרה 3.1.19 (טורוס n־מימדי). נגדיר
$$\mathbb{T}^n := \left\{ \mathsf{diag}\left(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\right) \;\middle|\; (\theta_i)_{i\in[n]} \subseteq \mathbb{R} \right\} \leq \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

הערה 3.1.20. $\left(S^1\right)^n \cong \mathbb{T}^n$ כחבורות לי, וההעתקה
$$\mathsf{exp}\colon \mathbb{R}^n \cong \mathsf{Lie}\left(\mathbb{T}^n\right) \to \mathbb{T}^n$$
היא הומומורפיזם על. אז
$$\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n \big/ \mathsf{ker}\left(\mathsf{exp}\right) = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n.$$

דוגמה 3.1.21. $(\mathbb{R}^n, +)$ זאת חבורת מטריצות אבלית קשירה על ידי שיכון כמטריצות $\begin{pmatrix} & & * \\ I_n & & \vdots \\ & & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. לחילופין, מתקיים
$$\left(\left(\mathbb{R}^\times\right)^n\right)^\circ \cong \left\{ \mathsf{diag}\left(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_n}\right) \;\middle|\; (\theta_i)_{i\in[n]} \subseteq \mathbb{R} \right\}$$
$$\left(\mathbb{R}^\times\right)^n \cong \left\{\mathsf{diag}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \mid \forall i \in [n]\colon x_i \neq 0\right\}.$$
אז
$$\mathbb{R} \cong \left(\mathbb{R}^\times\right)^\circ$$
$$x \mapsto e^x$$
$$\mathsf{log}\left(y\right) \leftarrow y$$
איזומורפיזם. נקבל כי $\mathsf{exp}\colon \mathbb{R}^n \to \left(\left(\mathbb{R}^\times\right)^n\right)^\circ$ איזומורפיזם.

טענה 3.1.22. *תהי G חבורה קשירה אבלית. אז*
$$\mathsf{exp}\colon \mathsf{Lie}\left(G\right) \to G$$
הוא הומומורפיזם על ומתקיים
$$G \cong \mathsf{Lie}\left(G\right) \big/ \mathsf{ker}\left(\mathsf{exp}\right)$$
כאשר $\mathsf{ker}\left(\mathsf{exp}\right)$ תת־חבורה דיסקרטית בתוך $\left(\mathsf{Lie}\left(G\right), +\right)$.

משפט 3.1.23. *עבור V מרחב וקטורי ממשי ו־$L \leq V$ תת־חבורה דיסקרטית יש k, n עבורם*
$$V/L \cong \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n.$$

מסקנה 3.1.24. *כל חבורת מטריצות אבלית קשירה היא מהצורה $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n$.*

למה 3.1.25. *תהי $L \leq V$ תת־חבורה דיסקרטית של מרחב וקטורי ממשי. אז קיימים וקטורים בלתי־תלויים לינארית $(u_i)_{i\in[n]}$ עבורם*
$$L = \mathsf{Span}_{\mathbb{Z}}\left(u_i\right)_{i\in[n]}.$$

הוכחה. נבנה באינדוקציה וקטורים $(u_i)_{i\in[r]}$ בלתי־תלויים לינארית ב־V עבורם
$$L \cap \mathsf{Span}_{\mathbb{R}}\left(u_1, \ldots, u_r\right) = \mathsf{Span}_{\mathbb{Z}}\left(u_1, \ldots, u_r\right).$$
אם $L \subseteq \mathsf{Span}_{\mathbb{R}}\left(u_1, \ldots, u_r\right)$ סיימנו. אחרת קיים $u \in \mathbb{L}$ בלתי־תלוי לינארית ב־$(u_1, \ldots, u_r)$. תהי
$$P = \left\{ \sum_{i\in[r]} \alpha_i u_i + \beta u \;\middle|\; \substack{(\alpha_i)_{i\in[r]} \subseteq [0,1] \\ \beta \in [0,1]} \right\} \subseteq V$$
שהינה קומפקטית. אז
$$u \in P \cap L \cong \{0\}$$
וזאת קבוצה סופית כחיתוך של קומפקטית ודיסקרטית. תהי $v \in P \cap L$ עם $\beta \neq 0$ מינימלי. אז לכל $x \in L \cap \mathsf{Span}_{\mathbb{R}}\left(u_1, \ldots, u_r, u\right)$ קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו
$$x - nv \in L \cap \mathsf{Span}_{\mathbb{R}}\left(u_1, \ldots, u_R\right) = \mathsf{Span}_{\mathbb{Z}}\left(u_1, \ldots, u_r\right).$$
(אחרת היינו מוצאים $n \in \mathbb{Z}$ שיתן סתירה למינימליות של β). ■

הוכחה (3.1.23). מ־3.1.25 יש ל־L בסיס $(u_i)_{i\in[m]}$. נשלים אותו לבסיס $(u_i)_{i\in[k]}$ של V ואז $V \cong \mathbb{R}^k$ לפי הבסיס. נקבל
$$L \cong \mathbb{Z}^m \times \{0\} \leq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k-m}$$
ואז
$$\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^{k-m} \cong V/L.$$
■

הערה 3.1.26. לפעמים, בהקשר של חבורות אלגבריות, חבורות אלגבריות קשירות נקראות טורוסים.

3.1.2 חזרה להתאמת לי

נרצה שלכל אלגברת לי נתונה $\mathfrak{g} \leq M_n$ יתקיים
$$\mathfrak{g} = \text{Lie}\left(\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)\right).$$
לכל $X \in \mathfrak{g}$ אנו יודעים $\exp\left(tX\right) \in \Gamma\left(\mathfrak{g}\right)$. לכן לפי ההגדרה נקבל
$$X \in \text{Lie}\left(\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)\right)$$
ולכן
$$\mathfrak{g} \subseteq \text{Lie}\left(\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)\right).$$
נרצה לתאר את $\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)$ באופן יותר קונקרטי ונרצה להראות במובן מסוים שהיא לא גדולה מדי.

מכך ש-$\exp\left(X\right) = \exp\left(\frac{1}{k}X\right)^k$ נובע שלכל סביבה $U \in \mathfrak{g}$ של 0 מתקיים
$$\Gamma\left(\mathfrak{g}\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} \exp\left(U\right)^k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} \exp\left(\bar{U}\right)^k.$$
נרצה להיפטר מהחזקות ולשם כך נוכל לכתוב
$$\Gamma\left(\mathfrak{g}\right) = \bigcup_{g\in\Gamma(\mathfrak{g})} g\cdot\exp\left(\bar{U}\right).$$
נרצה להיות מסוגלים לכתוב את $\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)$ כאיחוד בן מניה באופן דומה. זה מתאפשר, וינבע מהמהות של נוסחת Baker-Cambell-Hausdorff, מזה שקיימת העתקה
$$C\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$
מוגדרת בסביבת אפס.

ראינו כי עבור G חבורת מטריצות קשירה מתקיים
$$G = \Gamma\left(\text{Lie}\left(G\right)\right).$$
נרצה בעצם תיאור כלשהו של כל G על ידי $\exp$. ראינו שמתקיים
$$\Gamma\left(\mathfrak{g}\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} \exp\left(U\right)^k.$$
עבור $U \subseteq \mathfrak{g}$ סביבה פתוחה של 0.

ניזכר שעבור $X, Y \in \mathfrak{g}$ מתקיים
$$C\left(X,Y\right) = \log\left(\exp\left(X\right)\exp\left(Y\right)\right) \in \mathfrak{g}$$
כאשר זה מוגדר. נגדיר
$$I_X\left(Y\right) \coloneqq C\left(X,Y\right)$$
ואז $I_0\left(Y\right) = Y$. לכן מתקיים
$$\left(\text{d}\left(I_0\right)\right)_0 = \text{id}.$$
מרציפות נקבל כי $\left(\text{d}I_X\right)_0$ הפיכה עבור X מספיק קטן. ממשפט הפונקציה ההפוכה קיימת סביבה $U \subseteq \mathfrak{g}$ של 0 כך שעבור X מספיק קטן הקבוצה
$$I_X\left(U\right) = C\left(X,U\right)$$
פתוחה (בדקו למה U אחידה לכל X מספיק קטן).

תהי
$$V \coloneqq C\left(U,U\right)$$
ותהי
$$V' = C\left(\bar{U},\bar{U}\right).$$
אז V' קומפקטית כתמונה רציפה של קבוצה קומפקטית $\bar{U}\times\bar{U}$. מתקיים
$$V' \subseteq \bigcup_{X\in V'} C\left(X,U\right)$$
אם בוחרים V' מספיק קטנה, וזה איחוד של קבוצות פתוחות ולכן פתוח. מקומפקטיות, קיימת קבוצה סופית $\{X_i \mid i\in[n]\} \subseteq V'$ כך שמתקיים
$$V' \subseteq \bigcup_{i\in[n]} C\left(X_i,U\right).$$

לכל $i \in [n]$ נסמן $a_i = \exp(X_i)$. על ידי לקיחת אקספוננט נקבל

$$\exp(\bar{U})\exp(\bar{U}) \subseteq \bigcup_{i\in[n]} a_i \cdot \exp(\bar{U}).$$

אם נמשיך באינדוקציה נקבל

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \exp(\bar{U})^k \subseteq \bigcup_b b \cdot \exp(\bar{U})$$

כאשר b רץ על מילים באותיות $\{a_i \mid i \in [n]\}$.

משפט 3.1.27. *לכל אלגברת לי $\mathfrak{g}$ של מטריצות מתקיים $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\Gamma(\mathfrak{g}))$.*

הוכחה. עבור $X \in \mathfrak{g}$ יש מסילה

$$\gamma(t) = \exp(tx) \in \Gamma(\mathfrak{g})$$

עם

$$X = \gamma'(0) \in \mathrm{Lie}(\Gamma(\mathfrak{g})).$$

לכן $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Lie}(\Gamma(\mathfrak{g}))$.
להכלה ההפוכה, נראה שקיימת סביבה פתוחה $U \subseteq \mathfrak{g}$ של 0 וקיים $c \in \Gamma(\mathfrak{g})$ כך שהקבוצה $c\exp(U)$ פתוחה בטופולוגיה של $\Gamma(\mathfrak{g})$. אכן, $\Gamma(\mathfrak{g})$ מרחב טופולוגי קומפקטי מקומית והאוסדורף שהוא איחוד בן מנייה של קבוצות סגורות מהצורה $c \cdot \exp(\bar{U})$. לפי משפט הקטגוריה של בייר, אחת הקבוצות $c \cdot \exp(\bar{U})$ עם פנים לא ריק. אפשר להניח (בדקו!) ש־$c \cdot \exp(U)$ צפופה ופתוחה בתוך $c \cdot \exp(\bar{U})$ ומכאן $c \cdot \exp(U)$ פתוחה בעצמה ב־$\Gamma(\mathfrak{g})$.
אפשר להניח ש־$c \cdot \exp(U) \subseteq B(c,\varepsilon)$ עבור c,ε כך שמתקיים שהאקספוננט הומאומורפיזם לתמונה. אז $U \subseteq \mathrm{Lie}(\Gamma(\mathfrak{g}))$ פתוחה כי $\exp$ הומיאומורפיזם, אבל אם $\mathfrak{g}$ תת־מרחב ממימד קטן יותר זה לא יכול לקרות (כי תת־מרחב לא יכול להכיל קבוצה פתוחה). ■

משפט 3.1.28. *בהינתן חבורת מטריצות G קיימת התאמה חד־חד ערכית בין אוסף כל התת־חבורות הקשירות $H \leq G$ לבין אוסף כל התת־אלגבראות לי $\mathfrak{h} \leq \mathrm{Lie}(G)$.*

הוכחה. זה נובע מכך שההתאמה שהראנו בין אלגבראות לי לחבורות שומרת על סדר הכלה. ■

טענה 3.1.29. *תהי $G \leq \mathrm{GL}_n(k)$ ונניח שמתקיים $G = G^\circ$. יש התאם בין תת־אלגבראות לי $\mathfrak{h} \leq \mathrm{Lie}(G)$ שמקיימות*

$$[\mathrm{Lie}(G), \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$$

(ונקראות אידאלים), לבין תת-חבורות נורמליות קשירות $H \trianglelefteq G$.

הוכחה. נניח כי H ו־$\mathfrak{h}$ קשורות בהתאמת לי.
נניח כי H ת"ח נורמלית. אז

$$\forall X \in \mathrm{Lie}(G)\, \forall Y \in \mathfrak{h}\colon\ [X,Y] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{Ad}(\exp(tx))(Y)\right)\Big|_{t=0}$$

כי

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp(tx)\, Y \exp(-tX)\right) = X\exp(tX)\, Y\exp(-tX) + \exp(tX)\, Y\exp(-tX)(-X)$$

וב־$t=0$ מקבלים $XY - YX$. מתקיים

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))\colon H \to H$$

וגם

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$$

לכן מהנ"ל $[X,Y] \in \mathfrak{h}$.
בכיוון השני, אם $\mathfrak{h}$ אידאל, מספיק לבדוק שמתקיים

$$\forall X \in \mathrm{Lie}(G)\, \forall Y \in \mathfrak{h}\colon\ \mathrm{Ad}(\exp(X))(\exp(Y)) \in H.$$

מתקיים $G = G^\circ, H = H^\circ$ ולכן G, H נוצרות על ידי $\exp$. לכן

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp(X))(\exp(Y)) &= \exp(\mathrm{Ad}(\exp(X))(Y)) \\ &= \exp(\exp(\mathrm{ad}(X))(Y))\end{aligned}$$

אבל כיוון שמתקיים $\mathrm{ad}(X)(Y) \in \mathfrak{h}$ נובע $\exp(\mathrm{ad}(X))(Y) \in \mathfrak{h}$, ולכן

$$.\exp(\exp(\mathrm{ad}(X))(Y)) \in H$$ ■

3.2 הומומורפיזמים

3.2.1 הגדרה

בהינתן הומומורפיזם גזיר $\varphi\colon G\to H$ בין חבורות מטריצות, הנגזרת

$$(\mathsf{d}\varphi)_I$$

היא העתקה לינארית

$$\mathsf{Lie}\,(G)\to\mathsf{Lie}\,(H).$$

ביתר פירוט, אם

$$\gamma\colon\ (-\varepsilon,\varepsilon)\to G$$

מקיימת

$$\begin{aligned}\gamma\,(0)&=I\\ \gamma'\,(0)&=X\in\mathsf{Lie}\,(G)\end{aligned}$$

אז

$$\varphi\,(\gamma\,(0))=\varphi\,(I)=I\in H$$

ומתקיים

$$(\varphi\circ\gamma)'\,(0)=(\mathsf{d}\varphi)_I\,(\gamma'\,(0))=(\mathsf{d}\varphi)_I\,(X)\in\mathsf{Lie}\,(H)\,,\ .$$

אז φ מעבירה וקטורים משיקים ב־G לוקטורים משיקים ב־H. נסמן העתקה זאת בין המשיקים

$$\mathsf{d}\varphi\colon\ \mathsf{Lie}\,(G)\to\mathsf{Lie}\,(H)\ .$$

טענה 3.2.1. *$\mathsf{d}\varphi$ הוא הומומורפיזם של אלגבראות לי. כלומר, מתקיים*

$$\forall X,Y\in\mathsf{Lie}\,(G):\ [\mathsf{d}\varphi\,(X)\,,\mathsf{d}\varphi\,(Y)]=\mathsf{d}\varphi\,([X,Y])$$

וגם

$$\forall X\in\mathsf{Lie}\,(G):\varphi\,(\exp\,(X))=\exp\,(\mathsf{d}\varphi\,(X)).$$

את המשוואה השנייה נציג על ידי הדיאגרמה הקומוטטיבית הבאה.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\ \varphi\ } & H\\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\exp}\\ \mathsf{Lie}\,(G) & \xrightarrow[\mathsf{d}\varphi]{} & \mathsf{Lie}\,(H)\end{array}$$

הוכחה. לכל $X\in\mathsf{Lie}\,(G)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\,(\varphi\,(\exp\,(tX)))&=\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\,\left(\varphi\,(\exp\,((t+s)\,X))\right)_{s=0}\\ &=\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\,\left(\varphi\,(\exp\,(tX))\,\varphi\,(\exp\,(sX))\right)_{s=0}\\ &=\varphi\,(\exp\,(tX))\cdot\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\,\left(\varphi\,(\exp\,(sX))\right)_{s=0}\\ &=\varphi\,(\exp\,(tX))\cdot\mathsf{d}\varphi\,(X)\end{aligned}$$

ולפי טענת המד"ר בתחילת הקורס נובע

$$\varphi\,(\exp\,(tX))=\exp\,(t\cdot\mathsf{d}\varphi\,(X)).$$

כאשר $t=1$ אנו מקבלים את המשוואה.
נראה כעת כי $\mathsf{d}\varphi$ הוא הומומורפיזם. לכל $X,Y\in\mathsf{Lie}\,(G)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\varphi\,(\mathsf{Ad}\,(\exp\,(tX))\,(\exp\,(sY)))&=\mathsf{Ad}\,(\varphi\,(\exp\,(tX)))\,(\varphi\,(\exp\,(sY)))\\ &=\mathsf{Ad}\,(\exp\,(t\,\mathsf{d}\varphi\,(X)))\,(\exp\,(s\,\mathsf{d}\varphi\,(Y)))\end{aligned}$$

ולאחר גזירה ב־$s=0$ נקבל

$$\mathsf{d}\varphi\,(\mathsf{Ad}\,(\exp\,(tX))\,(Y))=\mathsf{Ad}\,(\exp\,(t\,\mathsf{d}\varphi\,(X)))\,(\mathsf{d}\varphi\,(Y))\ .$$

נגזור כעת ב־$t=0$ ונקבל שאגף שמאל שווה

$$\mathsf{d}\varphi\left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\,(\mathsf{Ad}\,(\exp\,(tX))\,(Y))_{t=0}\right)=\mathsf{d}\varphi\,([X,Y])\ .$$

אגף ימין שווה $[\mathsf{d}\varphi\,(X)\,,\mathsf{d}\varphi\,(Y)]$ באותו טיעון, ולכן נקבל את התוצאה. ■

הערה 3.2.2. למעשה, קיבלנו ש־

$$\mathsf{Lie}\colon \textbf{Mat-Grp} \to \textbf{Lie-Alg}$$

הוא פנקטור מהקטגוריה של חבורות לקטגוריה של אלגבראות לי כשעל מורפיזמים הוא מוגדר $\mathsf{Lie}(\varphi) = \mathsf{d}\varphi$. העובדה

$$\mathsf{Lie}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \mathsf{Lie}(\varphi_1) \circ \mathsf{Lie}(\varphi_2)$$

היא כלל השרשרת.

נרצה לדעת מתי

$$\mathsf{d}\colon \mathsf{Hom}(G,H) \to \mathsf{Hom}(\mathsf{Lie}(G), \mathsf{Lie}(H))$$

הוא חד־חד ערכי, ומתי הוא על. אם הוא חד־חד ערכי ועל, הדבר קרוב להיות שקילות בין קטגוריות.
כדי לבדוק מתי d חד־חד ערכי, נבדוק מתי φ נקבע ביחידות על ידי $\mathsf{d}\varphi$. מתקיים

$$\varphi(\exp(X)) = \exp(\mathsf{d}\varphi(X))$$

ולכן φ נקבע ביחידות על $G^\circ = \Gamma(\mathsf{Lie}(G))$. לכן אם G קשירה נובע ש־d חד־חד ערכי. בפרט, אם נביט על תת־קטגוריה של חבורות מטריצות קשירות נקבל שהפנקטור Lie חד־חד ערכי על מורפיזמים, כלומר *נאמן*.
נשאל כעת מתי d על. זאת השאלה מתי אפשר להרים הומומורפיזם של אלגבראות לי. אם $\psi\colon \mathsf{Lie}(G) \to \mathsf{Lie}(H)$, מתי קיים $\varphi\colon G \to H$ כך ש־$\mathsf{d}\varphi = \psi$. לזה יש תשובה טופולוגית, והתשובה היא כן בפרט כאשר G פשוטת קשר.

הערה 3.2.3. תהי G חבורת מטריצות ונסמן $\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}(G)$. אם $g \in G$ אפשר לחשוב על $\mathsf{Ad}(g) : G \to G$ כאוטומורפיזם של G. נקבל העתקה

$$\mathsf{Ad}\colon G \to \mathsf{Aut}(G)\ .$$

נוכל להרכיב ולקבל

$$G \underset{\mathsf{Ad}}{\longrightarrow} \mathsf{Aut}(G) \underset{\mathsf{d}}{\to} \mathsf{Aut}(\mathfrak{g}) \leq \mathsf{GL}(\mathfrak{g}).$$

נסמן הרכבה זאת (with abuse of notation)

$$\mathsf{Ad}(g) = (\mathsf{d} \circ \mathsf{Ad})(g) \in \mathsf{Aut}(\mathfrak{g})\ .$$

אם נסמן זאת $\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}$ נקבל

$$\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}\colon G \to \mathsf{Aut}(\mathfrak{g})\ .$$

נוכל גם לגזור ולקבל

$$\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}(g) = \mathsf{d}(\mathsf{Ad}_G(g)) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\ .$$

כעת, $\mathsf{Aut}(\mathfrak{g})$ חבורת מטריצות ומתקיים

$$\mathsf{d}(\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}) : \mathfrak{g} \to \mathsf{Lie}(\mathsf{Aut}(\mathfrak{g})) \leq \mathsf{End}(\mathfrak{g})\ .$$

העתקה זאת מסומנת ad ומתקיים

$$\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}(\exp(X)) = \exp(\mathsf{ad}(X))$$

לכל $X \in \mathfrak{g}$.

קיבלנו חבורת מטריצות חדשה

$$G\big/\mathsf{ker}(\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}) \cong \mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}(G) \leq \mathsf{GL}(\mathfrak{g}).$$

את הגרעין הזה אנחנו לא מבינים ישר. מתקיים

$$\mathsf{ker}(\mathsf{Ad}_G) = Z(G)$$

וגם $\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}} = \mathsf{d} \circ \mathsf{Ad}_G$ ולכן אנחנו כן יודעים $Z(G) \leq \mathsf{ker}(\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}})$. על פניו, מלחתכילה לא ידוע לנו ש־$G\big/Z(G)$ חבורת מטריצות, אך נראה זאת.

הערה 3.2.4. דיברנו על גזירות וחלקות של הומומורפיזמים $\varphi\colon G \to H$ כאשר G, H חבורות מטריצות, והגדרנו את $\mathsf{d}\varphi$ כנגזרת של φ ב־I. הכוונה היא שאם ניקח סביבה $B_{I,\varepsilon} \subseteq G$ של I שמוגדרת על ידי

$$\left\{ \exp(X) \;\middle|\; \substack{X \in \mathsf{Lie}(G) \\ \|X\| < \varepsilon} \right\},$$

וניקח סביבה $B'_{I,\varepsilon} \subseteq H$ של I, נקבל שההעתקת המעבר $\exp|_V^{-1} \circ \varphi \circ \exp|_U$ גזירה/חלקה ו־$\mathsf{d}\varphi$ הנגזרת של הרכבה זאת. בפרט, $\mathsf{d}\varphi$ לא תלויה במימוש של G כחבורת מטריצות. למעשה גם הטופולוגיה שהגדרנו על G, והחלקות של φ אינן תלויות במימוש.
בהמשך נגדיר חבורות לי כלליות שאינן בהכרח חבורות מטריצות, באופן שאינו תלוי במימוש.

עולות לנו כמה שאלות על ההתאמה

$$\mathsf{Lie}\colon \mathsf{Hom}(G,H) \to \mathsf{Hom}(\mathsf{Lie}(G), \mathsf{Lie}(H)).$$

שאלה 3.2.5. מה אומרות התכונות של $\mathsf{d}\varphi$ על אלו של φ? אם $\mathsf{d}\varphi$ איזומורפיזם, מה זה אומר על φ?

שאלה 3.2.6. בהינתן $f \in \mathsf{Hom}\left(\mathsf{Lie}\left(G\right), \mathsf{Lie}\left(H\right)\right)$, האם אפשר להרים אותו להומומורפיזם $\varphi\colon G \to H$ שמקיים $\mathsf{d}\varphi = f$?

דוגמה 3.2.7. נסתכל על $G = \left(\mathbb{C}, +\right), H = \left(\mathbb{C}^{\times}, \cdot\right)$. אז

$$G \cong \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}\right\} \leq \mathsf{GL}_2\left(\mathbb{C}\right) .H \cong \mathsf{GL}_1\left(\mathbb{C}\right)$$

נקבל

$$\mathsf{Lie}\left(G\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}\right\}$$
$$\mathsf{Lie}\left(H\right) = \mathbb{C}$$

ואכן מתקיים

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

תהי

$$f\colon \mathsf{Lie}\left(G\right) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Lie}\left(G_2\right)$$
$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \left(a\right)$$

ונחפש הרמה

$$\varphi\colon G \to H.$$

נדרוש

$$\varphi\left(\exp_{G_1}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp_{G_2}\left(f\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

אז

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{a}.$$

נרצה לדעת האם אפשר להרים את f^{-1}. התשובה היא לא, כי $\log$ לא מוגדר על כל $\mathbb{C}^{\times}$. עדיין, $\log$ מוגדר מקומית.

3.2.2 הצגות של טורוסים

נסתכל על טורוס n־מימדי

$$\mathbb{T}^n \coloneqq \left\{\mathsf{diag}\left(z_1, \ldots, z_n\right) \mid \left|z_i\right| = 1\right\} \cong \left(S^1\right)^n.$$

נניח כי

$$\varphi\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}^{\times} = \mathsf{GL}_1\left(\mathbb{C}\right).$$

נסמן $\mathfrak{t}^n \coloneqq \mathsf{Lie}\left(\mathbb{T}^n\right)$ ומתקיים

$$\mathfrak{t}^n = \left\{\mathsf{diag}\left(2\pi i\theta_1, \ldots, 2\pi i\theta_n\right) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

מתקיים כי $\mathfrak{t}^n$ אלגברה קומוטטיבית ו־$\mathsf{d}\varphi$ הומומורפיזם כללי. נכתוב

$$\forall X \in \mathfrak{t}^n\colon \varphi\left(\exp\left(X\right)\right) = e^{\mathsf{d}\varphi\left(X\right)}.$$

אם $X = \left(2\pi i\theta_1, \ldots, 2\pi i\theta_n\right)$ מתקיים

$$\mathsf{d}\varphi\left(X\right) = 2\pi i\left(\ell_1\theta_1 + \ldots + \ell_n\theta_n\right)$$

עבור $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathbb{C}$. ככה נראים פונקציונלית $\mathbb{R}$־לינאריים $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
אם $\theta_1, \ldots, \theta_N \in \mathbb{Z}$ אז $\exp\left(X\right) = I$. לכן במקרה זה $e^{\mathsf{d}\varphi\left(X\right)} = 1$ ואז $\mathsf{d}\varphi\left(X\right) = 2\pi ik$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. בפרט, אם ניקח $X = 2\pi ie_j$ נקבל

$$\mathsf{d}\varphi\left(X\right) = 2\pi i\ell_j \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

ואז $\ell_j \in \mathbb{Z}$. אז

$$\varphi\left(\mathsf{diag}\left(1, \ldots, 1, e^{2\pi i\theta}, 1, \ldots, 1\right)\right) = e^{2\pi i\ell_j\theta}$$

כאשר ה־$e^{2\pi i\theta}$ מופיע במקום ה־j. אז

$$\varphi\left(\mathsf{diag}\left(1, \ldots, z, \ldots, 1\right)\right) = z^{\ell_j}.$$

נצרף את כל ערכי j ונקבל

$$\varphi\left(\mathsf{diag}\left(z_1, \ldots, z_n\right)\right) = z_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\ell_n}$$

עבור $\ell_i \in \mathbb{Z}$.

אכן, כל בחירה של שלמים $\ell_1,\dots,\ell_n$ מגדירה הומומורפיזם $\mathbb{T}^n\to\mathbb{C}^\times$ לפי הנוסחה הזאת.
יתרה מכך, אם

$$\varphi\colon\mathbb{T}^n\to\mathsf{GL}\left(V\right)$$

הצגה מרוכבת של טורוס (כלומר, הומומורפיזם, כאשר V מ"ו מעל $\mathbb{C}$) אז

$$\mathsf{d}\varphi\colon\mathfrak{t}^n\to\mathsf{End}\left(V\right)$$

העתקה לינארית. נסמן

$$E_j=\mathsf{d}\varphi\left(2\pi ie_j\right)\in\mathsf{End}\left(V\right)$$

ונקבל $\exp E_j=I$. E_j כזאת חייבת להיות לכסינה עם ע"ע שהם כפולות שלמות של $2\pi i$. בבסיס B ל־V בו E_j אלסונית מתקיים

$$\left[\varphi\left(1,\dots,z,\dots,1\right)\right]_B=\exp\left[E_j\right]_B=\mathsf{diag}\left(z^{\ell_{j,1}},\dots,z^{\ell_{j,n}}\right)$$

כאשר $n=\dim\left(V\right)$ וכאשר

$$\left[E_j\right]=\mathsf{diag}\left(2\pi i\ell_{j,1},\dots,2\pi i\ell_{j,n}\right).$$

מתקיים

$$\left[E_{j,1},E_{j_2}\right]=\mathsf{d}\varphi\left(\left[t_1,t_2\right]\right)=\mathsf{d}\varphi\left(0\right)=0$$

עבור $t_j=2\pi ie_j$ וכיוון ש־$\mathfrak{t}^n$ אלגברה קומוטטיבית. לכן $E_1,\dots,E_n$ מטריצות מתחלפות בזוגות. במצב כזה, קיים בסיס B ל־V שבו כל $E_1,\dots,E_n$ אלכסוניות. כלומר

$$\left[\varphi\left(z_1,\dots,z_n\right)\right]_B=\mathsf{diag}\left(z_1^{\ell_{1,1}}\cdot\ldots\cdot z_n^{\ell_{n,1}},\dots,z_1^{\ell_{1,m}}\cdot\ldots z_n^{\ell_{n,m}}\right)$$

ואכם כך בלחרה של שלמים $\left\{\ell_{r,s}\right\}_{\substack{r\in[n]\\ s\in[m]}}$ תיתן הומומורפיזם כזה.
במילים אחרות, פירקנו את V לסכום ישר

$$V=\bigoplus_{i\in[m]}V_i$$

כל שכל V_i הוא מרחב חד־מימדי של וקטורים עצמיים ל־$\varphi\left(\mathbb{T}^n\right)$.

3.2.3 טורי פורייה

פורייה ניסה לפתור מד"ח (משוואת החום) עם תנאי התחלה מחזוריים. תנאי ההתחלה הוא פונקציה רציפה $f\colon S^1\to\mathbb{C}$. הוא שם לב שקל יותר לפתור את הבעיה אם מפרקים את f לטור

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nz^n.$$

בשפה מודרנית, f היא וקטור בתוך מרחב הפונקציות על $\mathbb{T}\cong S^1$, שהיא חבורה. נסמן ב־$\mathcal{C}\left(\mathbb{T}\right)$ את הפונקציות הרציפות $\mathbb{T}\to\mathbb{C}$. יש הומומורפיזם טבעי

$$\varphi\colon\mathbb{T}\to\mathbb{GL}\left(\mathcal{C}\left(\mathbb{T}\right)\right).$$

זאת נקראת ההצגה הרגולרית של $\mathbb{T}$ ומוגדרת על ידי

$$\varphi\left(g\right)\left(f\right)=\varphi\left(g\right)\left(f\right)\left(z\right)=f\left(g^{-1}z\right).$$

אם $\mathcal{C}\left(\mathbb{T}\right)$ מתפרק (כמו במקרה הסוף מימדי) לסכום ישר של מרחבים עצמיים חד־מימדיים זה בדיוק יתן פירוק לטור פורייה, כי הפונקציות z^n הן בדיוק הוקטורים העצמיים של $\varphi\left(\mathbb{T}\right)$.

3.2.4 גרעין ותמונה

טענה 3.2.8. *יהי $\varphi\colon G\to H$ הומומורפיזם של חבורות מטריצות.*

1. $\mathsf{Lie}\left(\ker\left(\varphi\right)\right)=\ker\left(\mathsf{d}\varphi\right)$.
2. $\mathsf{Lie}\left(\mathsf{Im}\,\varphi\right)=\mathsf{Im}\left(\mathsf{d}\varphi\right)$ *אם* G/G° *בת־מניה.*

הוכחה. 1. מתקיים $X\in\mathsf{Lie}\left(\ker\varphi\right)$ אם ורק אם $\exp\left(tX\right)\in\ker\varphi$ לכל t מספיק קטן, אם ורק אם

$$\exp\left(t\,\mathsf{d}\varphi\left(X\right)\right)=\varphi\left(\exp\left(tX\right)\right)=I_H$$

לכל t מספיק קטן, אם ורק אם $\mathsf{d}\varphi\left(X\right)=0$ אם ורק אם $X\in\ker\left(\mathsf{d}\varphi\right)$.

2. תהי $X \in \text{Lie}(G)$. אז
$$\exp(t\,\mathrm{d}\varphi(X)) = \varphi(\exp(tX)) \in \operatorname{Im}\varphi$$
ולכן $\mathrm{d}\varphi(X) \in \text{Lie}(\operatorname{Im}\varphi)$. אז $\operatorname{Im}(\mathrm{d}\varphi) \subseteq \text{Lie}(\operatorname{Im}\varphi)$.
בכיוון ההפוך, מתקיים
$$G^\circ = \Gamma(\text{Lie}(G)) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} a_k \cdot \exp(\bar{U})$$
עבור ערכים $a_k \in G^\circ$. תהי $U \subseteq \text{Lie}(G)$ סביבה פתוחה של 0. אז
$$G = \bigcup a_k \exp(\bar{U})$$
איחוד בן מניה עבור ערכים $a_k \in G$. אז
$$\operatorname{Im}\varphi = \bigcup \varphi(a_k)\,\varphi(\exp([\bar{U}]))\,.$$
$\bar{U}$ קומפקטית לכן $\varphi(\exp(\bar{U}))$ קומפקטית ובפרט סגורה. כמו בהוכחה מקודם, אם נפעיל את משפט בייר
$$\varphi(a_k)\,\varphi\left(\exp\left(\bar{U}\right)\right) = \varphi(a_k)\exp\left(\mathrm{d}\varphi\left(\bar{U}\right)\right)$$
עם פנים פתוח. כמו בהוכחה קודמת, נקבל ש־$\mathrm{d}\varphi(\bar{U})$ מכילה קבוצה פתוחה ב־$\text{Lie}(\operatorname{Im}\varphi)$. לכן
$$.\,(\operatorname{Im}\varphi)\ \text{Lie}\ \mathrm{d}\varphi(\text{Lie}(G)) = \quad \blacksquare$$

מסקנה 3.2.9. *אם φ חד־חד ערכית / על, $\mathrm{d}\varphi$ חד־חד ערכית / על, בהתאמה.*

תהי G חבורת מטריצות ותהי $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. ראינו שמתקיים $\mathrm{d}(\text{Ad}_G(a)) = \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(a)$ וגם
$$\ker \text{Ad}_G(a) = Z(a)\,.$$
כעת נקבל מהטענה שמתקיים
$$\text{Lie}(Z(a)) = \ker(\mathrm{d}(\text{Ad}_G(a))) = \ker(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(a)) = \{X \in \mathfrak{g} \mid aX = Xa\}$$
ונסמן את הביטוי האחרון $\mathfrak{z}(a)$. אז
$$\begin{aligned} a \in \ker(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}) &\iff \mathfrak{z}(a) = \mathfrak{g} \\ &\iff \text{Lie}(Z(a)) = \mathfrak{g} \\ &\iff Z(a)^\circ = G^\circ \\ &\iff G^\circ \le Z(a) \end{aligned}$$
ואם G קשירה נקבל
$$\ker(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}) = Z(G)\,.$$
נקבל באופן כללי יותר
$$Z(G) \le \ker(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}) = Z_G(G^\circ) = \{a \in G \mid \forall g \in G^\circ : ag = ga\}.$$
אז
$$\text{Lie}(\ker \text{Ad}_{\mathfrak{g}}) = \ker(\mathrm{d}(\text{Ad}_{\mathfrak{g}})) = \ker(\text{ad}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall Y \in \mathfrak{g} :\ [X,Y] = 0\} = \mathfrak{g}(\mathfrak{g})$$
ואם G קשירה נקבל
$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \text{Lie}(Z(G)).$$
במקרה זה נקבל גם
$$\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(G) \cong G/\ker(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}) = G/Z(G)\,.$$

עובדה 3.2.10. *אם $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ הומומורפיזם של אלגבראות לי, אז*
$$\operatorname{Im} f \cong \mathfrak{g}/\ker f$$
כאלגבראות לי.

לפי העובדה, מתקיים
$$\text{Lie}(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)) = \Im(\text{ad}_{\mathfrak{g}}) \cong \mathfrak{g}/\ker(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$
כאשר G קשירה. במקרה זה גם $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$ קשירה ולכן
$$\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(G) = \Gamma\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\right)\,.$$
זה לא תלוי ב־G אל רק ב־$\mathfrak{g}$.

הגדרה 3.2.11 (אלגברת לי). *אלגברת לי* היא מרחב וקטורי $\mathfrak{g}$ מעל שדה $\mathbb{F}$ יחד עם פעולה $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ בילינארית, אסוציאטיבית, אנטיאסוציאטיבית (כלומר $[x,y]=-[y,x]$) ושמקיימת את זהו יעקובי:

$$[x,[y,z]]+[z,[x,y]]+[Y,[z,x]]\,.$$

עם הגדרה זאת לפעמים יותר קל לעבוד. למשל, אפשר להגדיר כך מנה של אלגברת לי. אם $\mathfrak{h}\trianglelefteq\mathfrak{g}$ אידאל (תת־מרחב שמקיים $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{h}$), נוכל להגדיר $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ביחד עם

$$[X+\mathfrak{h},Y+\mathfrak{h}]\coloneqq[X,Y]+\mathfrak{h}\,.$$

בחזרה לדיון הקודם, מתקיים

$$\mathsf{ad}\left(\mathfrak{g}\right)\cong\mathfrak{g}\Big/\mathsf{ker}\left(\mathsf{ad}\right)=\mathfrak{g}/z\mathfrak{z}prs\mathfrak{g}$$

כאשר

$$\mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)\left(X\in\mathfrak{g}\right)\forall Y\in\mathfrak{g}\colon\ [X,Y]=0.$$

זה איזומורפיזם של אלגבראות לי, ומתקיים גם

$$\mathsf{Lie}\left(G\Big/Z\left(G\right)\right)\mathfrak{g}\Big/\mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right).$$

הערה 3.2.12. גם אם $\mathfrak{g}$ מראש הייתה נלקחת כאלגברה אבסטרקטית אז עדיין $\mathsf{ad}\left(\mathfrak{g}\right)$ אלגברה של מטריצות עבור

$$\mathsf{ad}\colon\mathfrak{g}\to\mathsf{End}\left(\mathfrak{g}\right)\,.$$

כלומר, $\mathfrak{g}\Big/\mathfrak{z}\left(\mathfrak{g}\right)$ אלגברת מטריצות גם עבור $\mathfrak{g}$ אבסטרקטית.

ממשפט אדו, למעשה $\mathfrak{g}$ עצמה גם בהכרח ניתנת לשיכון כמטריצות.

קיבלנו גם שעבור G חבורת מטריצות קשירה, $G\Big/Z\left(G\right)$ גם היא חבורת מטריצות. עבור $H\trianglelefteq G$ תת־חבורה נורמלית סגורה, G/H לא בהכרח חבורת מטריצות. זאת אחת המוטיבציות להגדיר חבורות לי אסטרקטיות.

דוגמה 3.2.13. מתקיים $\mathsf{PGL}_n\left(\mathbb{C}\right)=\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}\left(\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)\right)$. ידוע כי $\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ קשירה. אפשר לראות זאת על ידי צורת ז'ורדן. הראו כתרגיל שאפשר לחבר כל איבר במסילה רציפה ליחידה.

מתקיים גם

$$Z\left(\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)\right)\cong\mathbb{C}^\times$$
$$\mathsf{PGL}_n\left(\mathbb{C}\right)\cong\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)\Big/\mathbb{C}^\times$$
$$\mathsf{Lie}\left(\mathsf{PGL}_n\left(\mathbb{C}\right)\right)\cong M_n\left(\mathbb{C}\right)\Big/\mathbb{C}.$$

גם

$$\begin{aligned}\varphi\colon\mathfrak{sl}_n\left(\mathbb{C}\right)&\to\mathsf{Lie}\left(\mathsf{PGL}_n\left(\mathbb{C}\right)\right)\\X&\to X\end{aligned}$$

איזומורפיזם.

כל $X\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ ניתן לכתיבה כ־

$$X=X_0+\alpha I$$

עבור $X_0\in\mathfrak{sl}_n\left(\mathbb{C}\right)$ ו־$\alpha=\frac{\mathsf{tr}\,X}{n}$. ב־$M_n\left(\mathbb{C}\right)\Big/\mathbb{C}$ מתקיים $X=X_0$ ולכן φ על.

נראה ש־φ חד־חד ערכית. יהי $X\in\mathsf{ker}\,\varphi$. אז $X=\alpha I$ ומתקיים $n\alpha=\mathsf{tr}\,X=0$ לכן $X=0$.

מתקיים גם

$$\mathsf{PSL}_n\left(\mathbb{C}\right)=\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}\left(\mathsf{SL}_n\left(\mathbb{C}\right)\right)=\mathsf{SL}_n\left(\mathbb{C}\right)\Big/\mu_n\cdot I$$

כאשר

$$\mu_n\coloneqq\left\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\right\}.$$

גם $\mathsf{SL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ קשירה מאותן סיבות. מתקיים

$$\mathfrak{z}\left(\mathfrak{sl}_n\left(\mathbb{C}\right)\right)=\{0\}$$

וגם

$$\mathsf{ad}\left(\mathfrak{sl}_n\left(\mathbb{C}\right)\right)=\mathfrak{sl}_n\left(\mathbb{C}\right)\,.$$

אז

$$\mathsf{PSL}_n\left(\mathbb{C}\right)\cong\mathsf{PGL}_n\left(\mathbb{C}\right).$$

3.2.5 מרחבי כיסוי

הגדרה 3.2.14 (הומאומורפיזם לוקלי). נאמר שהומומורפיזם

$$\pi\colon \tilde{G}\to G$$

הוא *הומאומורפיזם לוקלי* אם לכל $x\in\tilde{G}$ יש סביבה פתוחה U כך ש־$\pi(U)$ פתוחה וש־$\pi|_U$ הומאומורפיזם לתמונה.

הגדרה 3.2.15 (העתקת כיסוי). אם $\tilde{G},G$ קשירות, נקרא להומאומורפיזם לוקלי $\pi\colon\tilde{G}\to G$ *העתקת כיסוי*.

דוגמה 3.2.16. נסתכל על $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{T}$ המוגדרת על ידי $\theta\mapsto e^{2\pi i\theta}$. אז $\ker\varphi=\mathbb{Z}$. נגדיר $\varphi_n\colon\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ על ידי $z\mapsto z^n$ ואז φ_n גם העתקות כיסוי, וגם $\varphi_n\circ\varphi$ כאלה כהרכבות של כיסויים. מתקיים $\ker(\varphi_n\circ\varphi)=\frac{1}{n}\mathbb{Z}$.

טענה 3.2.17. *1. תהי*

$$\pi\colon\tilde{G}\to G$$

העתקת כיסוי. אז π על כי יש סביבה פתוחה $\pi(U)$ של I. G° נוצרת תמיד על ידי סביבה פתוחה של G° (תרגיל) ומתקיים

$$G=G^\circ\subseteq\operatorname{Im}\pi.$$

2. $\ker\pi\leq\tilde{G}$ חבורה דיסקרטית. אם $e\in\ker\pi$ יש סביבה U של e כך שמתקיים

$$U\cap\ker\pi=\{e\}.$$

3. מתקיים $\ker\pi\leq Z\left(\tilde{G}\right)$. יהי $e\in\ker\pi$. עבור $a\in\tilde{G}$ ניקח מסילה רציפה $\tilde{a}(t)$ עם $\tilde{a}(0)=I$ ועם $\tilde{a}(1)=a$. תהי

$$\gamma(t)\coloneqq\tilde{a}(t)\cdot e\cdot\tilde{a}(t)^{-1}\in\ker\pi.$$

אז

$$\gamma(0)=e,\quad\gamma(1)=aea^{-1}$$

וזאת מסילה בתוך $\ker\pi$ דיסקרטית. אז

$$e=\gamma(0)=\gamma(1)=aea^{-1}.$$

4. G היא מנה של $\tilde{G}$ בחבורה דיסקרטית במרכז.

למה 3.2.18. *יהי $\varphi\colon G\to H$ הומומורפיזם.*
φ העתקת כיסוי אם ורק אם $\mathrm{d}\varphi$ איזומורפיזם.

הערה 3.2.19. ההגדרה שלנו להעתקת כיסוי שקולה למושג הכללי יותר של העתקת כיסוי מטופולוגיה. עבור כל $g\in G$ ונקודה $g'\in\pi^{-1}(g)$ עם סביבה פתוחה U מספיק קטנה כך שמתקיים $V=\pi(U)$, נקבל

$$\pi^{-1}(V)=U\cdot\ker\pi=\bigcup_{e\in\ker\pi}Ue=\bigsqcup_{e\in\ker\pi}Ue.$$

אפשר לקחת U מספייק קטנה כך שהאיחוד זר, כי $\ker\pi$ חבורה דיסקרטית.

דוגמה 3.2.20. תהי

$$\pi\colon\ (0,3)\to\mathbb{T}\leq\mathbb{C}^\times$$

המוגדרת על ידי

$$\pi(a)=e^{i\pi a}.$$

זאת העתקת כיסוי במובן הטופולוגי כי זה הומיאומורפיזם מקומי. אבל, למשל אם $-1\in U\subseteq\mathbb{T}$ עבור U מספיק קטנה אז $\pi^{-1}(U)=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)\cup(3-\varepsilon,3)$.

למה 3.2.21. *יהי $\varphi\colon G\to H$ הומומורפיזם בין חבורות מטריצות. אז φ העתקת כיסוי אם ורק אם $\mathrm{d}\varphi$ איזומורפיזם.*

הוכחה. נניח כי φ העתקת כיסוי. אנו יודעים

$$\ker\mathrm{d}\varphi=\operatorname{Lie}(\ker\varphi)=\{0\}$$

כאשר השוויון השני נכון כי $\ker\varphi$ דיסקרטית. אז

$$\operatorname{Im}\mathrm{d}\varphi=\operatorname{Lie}(\varphi(G))=\operatorname{Lie}(H)$$

לכן $\mathrm{d}\varphi$ איזומורפיזם.
בכיוון השני, נניח כי $\mathrm{d}\varphi$ איזומורפיזם. ממשפט הפונקציה ההפוכה φ איזומורפיזם מקומי ב־I. לכן קיימת $U\subseteq G$ סביבה פתוחה של I עבורה $\varphi\colon U\to\varphi(U)$ הומיאומורפיזם ו־$\varphi(U)$ פתוחה. אז $\varphi(U)\subseteq H$ סביבה פתוחה של I. H קשירה ולכן נוצרת על ידי $\varphi(U)$, ואז $\operatorname{Im}\varphi=H$. לכל $g\in G$ ניקח את הסביבה gU של g ואז

$$\varphi(gU)=\varphi(g)\cdot\varphi(U)$$

ונקבל כי $\varphi|_{gU}$ הומיאומורפיזם. ■

דוגמה 3.2.22. ראינו כי יש

$$\varphi\colon \mathsf{U}(2)\to \mathsf{SO}(3)$$

כך ש־$\mathsf{d}\varphi$ איזומורפיזם. לכן הומומורפיזם זה הוא העתקת כיסוי.

תרגיל 8. הומומורפיזם כיסוי הוא תמיד על.

דוגמה 3.2.23. ראינו כי עבור

$$\exp\colon (\mathbb{C},+)\to \mathsf{GL}_1(\mathbb{C})$$

שראינו, ההעתקה $d(\exp)$ היא איזומורפיזם. למעשה זאת דוגמא דומה לכיסוי $\mathbb{T}\to\mathbb{R}$.
מתקיים

$$\mathbb{C}^\times \cong \mathsf{GL}_1(\mathbb{C})\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}.$$

משפט 3.2.24 (משפט ההרמה). *נניח כי $\mathfrak{g}=\mathsf{Lie}(G),\mathfrak{h}=\mathsf{Lie}(H)$ ותהי $f\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$. אם G קשירה, קיימת העתקת כיסוי*

$$\pi\colon\tilde{G}\to G$$

וקיים הומומורפיזם

$$\varphi\colon\tilde{G}\to H$$

כך שמתקיים

$$\mathsf{d}\varphi=f\circ\mathsf{d}\pi\,.$$

הוכחה. נביט ב־$G\times H$ כחבורת מטריצות המשוכנת ב־$\mathsf{GL}_{n+k}(\mathbb{R})$ כשהשיכון הוא כבלוקים. $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})\times\mathsf{GL}_k(\mathbb{R})\le$ מתקיים

$$\mathsf{Lie}(G\times H)\cong\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$$

כאשר $\mathfrak{g}=\mathsf{Lie}(G)$ ו־$\mathfrak{h}=\mathsf{Lie}(\mathbb{H})$. תהי

$$\tilde{\mathfrak{g}}\coloneqq\{(X,Y)\in\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}\mid f(X)=Y\}\le g\oplus\mathfrak{h}$$

כאשר זאת אלגברת לי. מתקיים

$$[(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)]=([X_1,X_2],[Y_1,Y_2])\in\tilde{g}$$

כיוון ש־

$$f([X_1,X_2])=[f(X_1),f(X_2)]=[Y_1,Y_2].$$

ניקח את ההטלות

$$p_1\colon\tilde{\mathfrak{g}}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{g}p_2\colon\tilde{\mathfrak{g}}\qquad\to h$$

כשמתקיים $p_2=f\circ p_1$. ניקח $\tilde{G}\coloneqq\Gamma(\tilde{\mathfrak{g}})\le G\times H$ ביחד עם ההטלות

$$p\colon\tilde{G}\to G$$
$$\varphi\colon\tilde{G}\to H.$$

הנגזרת של הטלה היא הטלה ואז $\mathsf{d}p=p_1,\mathsf{d}\varphi=p_2$. בפרט $\mathsf{d}p$ איזומורפיזם לכן p כיסוי, ומתקיים $\mathsf{d}\varphi=f\circ\mathsf{d}p.$ ■

דוגמה 3.2.25. תהיינה $G=H=\mathbb{T}$ ואז $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}=\mathbb{R}$. יהי

$$L_\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\alpha x$$

הומומורפיזם ויהי

$$\exp\colon\mathbb{R}\to\mathbb{T}$$
$$x\mapsto e^{ix}.$$

היינו רוצים להרים את L_α להומומורפיזם

$$\varphi\colon\mathbb{T}\to\mathbb{T}$$
$$e^{ix}\mapsto e^{i\alpha x}.$$

באופן כללי, נוכל להביט בכיסוי $\mathbb{R}$ של $\mathbb{T}$ על ידי $\pi\colon a\mapsto e^{ia}$. אז $\mathsf{d}\varphi\circ(\mathsf{d}\pi)^{-1}=L_\alpha$.
מהוכחת המשפט, אפשר למצוא את הכיסוי $\mathbb{R}$ בתוך $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$,
אם α אי־רציונלי מתקיים

$$\mathbb{R}\cong\left\{\left(e^{ia},e^{i\alpha a}\right)\;\middle|\;a\in\mathbb{R}\right\}$$

והכרנו שיכון זה של $\mathbb{R}$.

אם α שלם, ראינו שהחבורה הזאת איזומורפית ל־$\mathbb{T}$ ואז קיים הומומורפיזם

$$\begin{aligned}\varphi_n\colon \mathbb{T} &\to \mathbb{T}\\ z &\mapsto z^n\end{aligned}$$

עבורו $\mathrm{d}\left(\varphi_n\right) = L_\alpha$. בדקו איך עובדת ההוכחה ומהם φ, π עבור α רציונלי כללי.

הערה 3.2.26. אם G_1, G_2 חבורות מטריצות קשירות עבורן $\mathrm{Lie}\left(G_1\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}\left(G_2\right)$, המשפט נותן בפרט כיסוי משותף

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ G_2 & & G_1 \end{tikzcd}$$

כאשר $\mathrm{d}\varphi$ איזומורפיזם.

עדיין נותרנו עם השאלה מתי ל־$f \in \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Lie}\left(G\right), \mathrm{Lie}\left(H\right)\right)$ נתון קיים $\varphi \in \mathrm{Hom}\left(G, H\right)$ עבורו $\mathrm{d}\varphi = f$.
התשובה לא פשוטה, אבל אם G פשוטת קשר, קיים φ כזה לכל f כי אז G היא הכיסוי האוניברסלי של עצמה, ואין לה כיסויים שאינם הומאומורפיזם.

דוגמה 3.2.27. מרחבים פשוטים קשר הם למשל קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^n$, הספירות S^n עבור $n \geq 2$.

דוגמה 3.2.28. על ידי גרם-שמידט, כל איבר $g \in \mathrm{SL}_2\left(\mathbb{C}\right)$ ניתן לכתיבה כ־$g = k \cdot \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}$ עבור $k \in \mathrm{SU}\left(2\right)$ וכאשר $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}, \beta \in \mathbb{C}$ ביחידות. כמרחב טופולוגי מתקיים

$$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{C}\right) \cong \mathrm{SU}\left(2\right) \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{C} \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$$

ואז זה מרחב פשוט־קשר כמכפלה של כאלה.

דוגמה 3.2.29. S^1 לא פשוטת קשר כי יש כיסוי $R \to S^1$.

דוגמה 3.2.30. יש כיסוי $\mathrm{SU}\left(2\right) \to \mathrm{SO}\left(3\right)$ לכן $\mathrm{SO}\left(3\right)$ אינה פשוטת קשר.

דוגמה 3.2.31. באופן דומה ל־$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{C}\right)$ מתקיים

$$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{R}\right) \cong \mathrm{SO}\left(2\right) \times \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix} \;\middle|\; \substack{\alpha \in \mathbb{R}_{>0}\\ \beta \in \mathbb{R}}\right\}$$

כאשר כמרחבים טופולוגיים המכפלה האחרונה הומאומורפית ל־$S^1 \times \mathbb{R}^2$ וזה אינו מרחב פשוט קשר. לכן $\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{R}\right)$ אינה פשוטת קשר.

מסקנה 3.2.32. *אם G חבורה פשוטת קשר אז*

$$\mathrm{Hom}\left(G, H\right) \cong \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Lie}\left(G\right), \mathrm{Lie}\left(H\right)\right).$$

הוכחה. ראינו שכל הומומורפיזם ניתן להרמה לכיסוי $\varphi\colon \tilde{G} \to H$ כאשר $\pi\colon \tilde{G} \to G$ הומיאומורפיזם כי G פשוטת קשר. אז $\varphi \circ \pi^{-1}$ ההרמה. ∎

הערה 3.2.33. למעשה, לכל חבורה קשירה G קיים כיסוי $\pi\colon \tilde{G} \to G$ פשוט־קשר שנקרא *הכיסוי האוניברסלי של G*. $\tilde{G}$ לא בהכרח חבורת מטריצות. נגדיר בהמשך חבורות לי כלליות ואז זה יהיה ברור. הכיסוי האוניברסלי יחיד עד כדי איזומורפיזם (יחיד) של חבורות לי.

הערה 3.2.34 (כיסוי אוניברסלי). עבור מרחב טופולוגי X מספיק נחמד אפשר לבנות כיסוי אוניברסלי $\tilde{X} \to X$, כלומר כיסוי כאשר $\tilde{X}$ פשוט־קשר. ניתן להגדיר זאת על ידי

$$\tilde{X} \coloneqq \left\{\gamma\colon \left[0,1\right] \to X \mid \gamma\left(0\right) = x_0\right\} / \sim$$

עבור $x_0 \in X$ וכאשר השקילות היא שקילות של הומוטופיה שמשאירה את הקצוות קבועים.

דוגמה 3.2.35. נסתכל על $X = \mathbb{C}^\times$ כאשר כמרחב טופולוגי מתקיים $X \cong \mathbb{R} \times S^1$. נקודות ב־$\widetilde{\mathbb{C}^\times}$ הן מסילות ב־$\mathbb{C}^\times$ שמתחילות ב־1 עד כדי הומוטופיה. אפשר לקחת מסילות שונות לא הומוטופיות למשל מ־1 ל־i, לפי מספר הסיבובים סביב 0. אבל, ההטלה של כולם תהיה i.

הערה 3.2.36. אם G חבורה, קל לראות מבנה של חבורה על $\tilde{G}$. אם $\gamma_1, \gamma_2 \in \tilde{G}$ נקבל כי אם γ_1 מסילה מ־1 ל־h ו־γ_2 ל־g אז $\gamma_2 \cdot \gamma_1 = g\gamma_1 \circ \gamma_2$ מגדיר כפל בחבורה. אם G חבורת מטריצות, אין שום סיבה ש־$\tilde{G}$ תהיה כזאת. מאידך, לא קשה לראות שזו חבורת לי.

הערה 3.2.37 (פנקטורים צמודים). הפנקטור

$$\mathfrak{g} \mapsto \widetilde{\Gamma\left(\gamma\right)}$$

צמוד שמאלי לפנקטור Lie.

הערה 3.2.38 (שקילות קטגורית). הקטגוריה של חבורות פשוטות־קשר שקולה לקטגוריה של אלגבראות לי.

דוגמה 3.2.39. בדוגמאות עד כה ראינו כי

$$\widetilde{S^1} = \mathbb{R}$$
$$\widetilde{\mathsf{SO}(3)} = \mathsf{SU}(2) \cong S^3$$

חבורות מטריצות. ראינו גם $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R}) \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$ כמרחבים טופולוגיים, וניתן לראות כי $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ אינה פשוטת־קשר.

טענה 3.2.40. *$\widetilde{\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})}$ אינה חבורת מטריצות.*

הוכחה. נניח בשלילה שיש שיכון

$$i\colon \widetilde{\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})} \to \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$$

ותהי

$$p\colon \widetilde{\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})} \to \mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$$

העתקת הכיסוי. נסמן $\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}\left(\widetilde{\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})}\right)$. אז

$$\mathsf{d}p\colon \mathsf{Lie}\left(\widetilde{\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})}\right) \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$

איזומורפיזם. מתקיים

$$\mathsf{d}i\colon \mathfrak{g} \to M_n(\mathbb{R})$$

ונסמן

$$j = \mathsf{d}i \circ (\mathsf{d}p)^{-1} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}).$$

נגדיר

$$\begin{aligned} f\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) &\to M_n \\ A + iB &\mapsto j(A) + ij(B) \end{aligned}$$

כאשר $A, B \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. ראינו כי $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$ פשוטת־קשר. אז קיים

$$\varphi\colon \mathsf{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$$

כך שמתקיים

$$\mathsf{d}\varphi = f, \quad \mathsf{d}\varphi|_{\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})} = j.$$

אז

$$\mathsf{d}i = j \circ \mathsf{d}p = \mathsf{d}\varphi \circ \mathsf{d}p = \mathsf{d}(\varphi \circ p).$$

$\widetilde{\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})}$ קשירה, לכן נובע $i = \varphi \circ p$. i חד־חד ערכי, אבל p כיסוי לא טריוויאלי, לכן יש סתירה. ■

הערה 3.2.41. אם G חבורת מטריצות קשירה ו־$\tilde{G}$ הכיסוי האוניברסלי שלה, אז

$$G \cong \tilde{G}\big/Z$$

כאשר $Z = \ker p \cong \pi_1(G)$ זאת חבורה דיסקרטית בתוך $Z\left(\tilde{G}\right)$.

עובדה 3.2.42. *תהי G חבורת מטריצות קשירה ויהי $f \in \mathsf{Hom}(\mathsf{Lie}(G), \mathsf{Lie}(H))$.*
... אשלים כשתעלה ההקלטה.

עבור אלגברת לי $\mathfrak{g}$ של מטריצות ראינו ש־$\Gamma(\mathfrak{g})$ תלוי בשיכון של $\mathfrak{g}$ כאלגברת מטריצות. אבל, הכיסוי האוניברסלי של החבורה מוגדר היטב עד כדי איזומורפיזם. זאת אולי לא חבורת מטריצות.

3.3 חבורות לי כלליות

3.3.1 חבורות לי כלליות

נרצה להגדיר חבורות לי ואלגבראות לי כלליות, ולהגדיר התאמת לי כללית.

3.3.2 קטגוריות

ראינו כי יש התאמה חד־חד ערכית ועל בין חבורות לי קשירות פשוטות קשר עד כדי איזומורפיזם לבין אלגבראות לי עד כדי איזומורפיזם.

$$G \mapsto \mathsf{Lie}(G)$$
$$\widetilde{\Gamma(\mathfrak{g})} \leftarrow \mathfrak{g}$$

ראינו גם שעבור G,H חבורות לי פשוטות קשר יש התאמה

$$\mathsf{Hom}(G,H) \leftrightarrow \mathsf{Hom}(\mathsf{Lie}(G), \mathsf{Lie}(H)).$$

זאת בעצם שקילות שנקראת *שקילות קטגורית* שנתאר בהמשך.

הגדרה 3.3.1 (קטגוריה). *קטגוריה* (קטנה) $\mathcal{C}$ היא אוסף אוביקטים $\mathsf{ob}(\mathcal{C})$ כך שלכל $X,Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ יש קבוצה $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, ביחד עם העתקות *הרכבה*

$$\circ\colon \mathsf{Hom}(Y,Z) \times \mathsf{Hom}(X,Y) \to \mathsf{Hom}(X,Z)$$

אסוציאטיביות ולכל אוביקט X מורפיזם $\mathsf{id}_X \in \mathsf{Hom}(X,X)$ אדיש להרכבה משני הכיוונים.

דוגמה 3.3.2. בקטגוריה **Set** של קבוצות, האובייקטים הם קבוצות והמורפיזמים הם העתקות בין קבוצות.

דוגמה 3.3.3. יהי k שדה. אז $\mathbf{Vec}_k$ היא הקטגוריה בה אובייקטים הם מרחבים וקטוריים מעל k והמורפיזמים הם העתקות לינאריות.

דוגמה 3.3.4. בקטגוריה **Grps** האובייקטים הם חבורות והמורפיזמים הם הומומורפיזמים.

דוגמה 3.3.5. בקטגוריה **Top** האובייקטים הם מרחבים טופולוגיים והמורפיזמים הם העתקות רציפות.

דוגמה 3.3.6. נוכל להגדיר קטגוריה $\mathcal{C}$ עם אובייקטים $\{1,2\}$, מורפיזמים $\mathsf{Hom}(1,2)=\{\alpha\}, \mathsf{Hom}(2,1)=\beta, \mathsf{Hom}(1,1)=\{\mathsf{id}_1\}, \mathsf{Hom}(2,2)=\{\mathsf{id}_2\}$, ואז מתקיים $\alpha\circ\beta=\mathsf{id}_1, \beta\circ\alpha=\mathsf{id}_2$.

דוגמה 3.3.7. נוכל להסתכל על הקטגוריה של חבורות מטריצות עם מורפיזמים שהם העתקות חלקות.
נוכל להסתכל על אלגבראות לי עם הומומורפיזמים ש אלגבראות לי.

הגדרה 3.3.8 (פנקטור). תהיינה $\mathcal{C},\mathcal{D}$ שתי קטגוריות. פנקטור

$$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

הוא העתקה

$$F\colon \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Ob}(\mathcal{D})$$

ולכל $X,Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ העתקה

$$F = F_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

שמקיימת

$$F(f\circ g) = F(f)\circ F(g)$$

וגם

$$F(\mathsf{id}_X) = \mathsf{id}_{F(X)}.$$

דוגמה 3.3.9. אם יש לנו קטגוריה של אוביקטים שהם גם קבוצות ושההעתקות בינם הן פונקציות עם אולי תנאי נוסף, יש פנקטור *שוכח* לקבוצות, שמסתכל על הכל כקבוצות. למשל

$$F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}.$$

הגדרה 3.3.10 (קטגוריה דואלית). עבור קטגוריה $\mathcal{C}$ נגדיר קטגוריה $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ עם אותם אובייקטים ועם חצים הפוכים:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}}}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

דוגמה 3.3.11 (מרחב דואלי). נגדיר

$$F\colon \mathbf{Vec}_k \to \mathbf{Vec}_k^{\mathsf{op}}$$

על ידי

$$F(V) = V^*.$$

אם $T \in \mathsf{Hom}_{\mathbf{Vec}_k}(X,Y)$ אז

$$F(T^*) = T^* \in \mathsf{Hom}_{\mathbf{Vec}_k}(Y^*, X^*) = \mathsf{Hom}_{\mathbf{Vec}^{\mathsf{op}}}(F(X), F(Y))$$

ומתקיים

$$(T\circ S)^* = S^*\circ T^*.$$

דוגמה 3.3.12. ניתן להגדיר
$$F = \mathsf{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(-,\mathbb{R}\right) : \mathbf{Top}^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$$
ששולח מרחב טופולוגי למרחב הפונקציות הרציפות ממנו ל־$\mathbb{R}$ והעתקה $f\colon X\to Y$ להעתקה $\varphi \mapsto f\circ\varphi$ ב־$\mathsf{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}}\left(F\left(Y\right),F\left(X\right)\right)$.

דוגמה 3.3.13. אצלנו Lie הוא פנקטור מחבורות מטריצות לאלגבראות לי.

הגדרה 3.3.14 (מורפיזם הופכי). יהי $f\colon X\to Y$ מורפיזם בקטגוריה ויהיו $g,h\colon X\to Y$ שני מורפיזמים. אם $g\circ f=\mathsf{id}_X$ נקרא ל־g *הופכי משמאל* ל־f ואם $f\circ h=\mathsf{id}_Y$ נקרא ל־h *הופכי מימין* ל־f.
אם g הופכי משמאל ומימין ל־f נקרא ל־g *הופכי* ל־f.

הגדרה 3.3.15 (איזומורפיזם). מורפיזם $f\colon X\to Y$ בקטגוריה נקרא *איזומורפיזם* אם יש לו הופכי $g\colon Y\to X$. במקרה זה נסמן $g=f^{-1}$.

הערה 3.3.16. אם נסתכל על ההגדרה של איזומורפיזם נקבל הגדרה של איזומורפיזם בין קטגוריות כפנקטור $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ כך שיש פנקטור $G\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ כך שההרכבות $F\circ G, G\circ F$ נותנות את הזהות על $\mathcal{D},\mathcal{C}$.
הגדרה זאת לא "טובה". היינו רוצים להשוות לא את האובייקטים $\mathsf{Ob}\left(\mathcal{C}\right)$ אלא את האובייקטים עד כדי יחס שקילות של איזומורפיזם.

הגדרה 3.3.17 (שקילות קטגורית). נאמר שפנקטור $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ הוא *שקילות קטגורית* אם

F **נאמן ומלא:** לכל $X,Y\in\mathsf{Ob}\left(\mathcal{C}\right)$ ההעתקה
$$F_{X,Y}\colon\ \mathsf{Hom}\left(X,Y\right)\to\mathsf{Hom}\left(F\left(X\right),F\left(Y\right)\right)$$
היא חח"ע ועל.

F **מהותית על** כל $Z\in\mathsf{Ob}\left(\mathcal{D}\right)$ איזומורפי ל־$F\left(X\right)$ עבור $X\in\mathsf{Ob}\left(\mathcal{C}\right)$ כלשהו.

תרגיל 9. אם יש שקילות
$$F\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$$
יש גם שקילות
$$G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}.$$

תרגיל 10. שקילות קטגורית היא יחס שקילות על קטגוריות.

הערה 3.3.18. אפשר להסתכל על פנקטורים כמורפיזמים בקטגוריה של קטגוריות (קטנות, צריכים דרישה תורת־קבוצתית כדי לדבר על הקטגוריה של הקטגוריות).
פנקטור $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ מעביר אוביקטים לאוביקטים ומורפזמים ב־$\mathcal{C}$ למורפמיזמים ב־$\mathcal{D}$.

הערה 3.3.19. הרבה קטגוריות $\mathcal{C}$ באות עם פנקטור קנוני $F\colon\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$.

דוגמה 3.3.20. בחשבון דיפרנציאלי, רוצים להגיד שנגזרת מתנהגת כמו פנקטור, בגלל כלל השרשרת
$$\mathsf{d}\left(f\circ g\right)_x=\mathsf{d}\left(f\right)_{f(x)}\circ\mathsf{d}\left(g\right)_x.$$

דוגמה 3.3.21. תהי $\mathcal{C}$ הקטגוריה עם $\mathsf{Ob}\left(\mathcal{C}\right)=\left\{\mathbb{R}^n\mid n\in\mathbb{N}_+\right\}$ ועם מורפיזמים שהם פונקציות גזירות המקיימות $f\left(0\right)=0$.
נגזרת ב־0 היא פנקטור
$$F\colon C\to\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$$
עם
$$F\left(\mathbb{R}^n\right)=\mathbb{R}^n$$
$$F\left(f\right)=\left(\mathsf{d}f\right)_0.$$

דוגמה 3.3.22. כל הומומורפיזם בין חבורות מטריצות $f\colon G\to H$ מקיים $f\left(I\right)=I$, לכן גזירה ב־I נותנת פנקטור לתוך מרחבים וקטוריים.
במצב הכללי, אנחנו מגדירים את Lie ואם $\varphi\colon\ \mathsf{Hom}\left(G,H\right)$ הגדרנו את $\mathsf{d}\varphi$ להיות הנגזרת שלו ב־I 5, ומתקיים
$$\mathsf{d}\varphi\in\mathsf{Hom}\left(\mathsf{Lie}\left(G\right),\mathsf{Lie}\left(H\right)\right).$$

דוגמה 3.3.23. תהי $\mathcal{C}$ הקטגוריה שהאובייקטים בה הם $\mathbb{N}$ והמורפיזמים $\mathsf{Hom}\left(k,\ell\right)$ הם מורפיזמים $[k]\to[\ell]$.
$\mathcal{C}$ שקולה לקטגוריה $\mathbf{Set}^{\mathsf{fin}}$ של קבוצות סופיות, ויש שיכון
$$F\left(k\right)=\left\{1,\ldots,k\right\}$$
מ־C ל־$\mathbf{Set}^{\mathsf{fin}}$ כאשר כאן ההעתקה על מורפיזמים ברורה (בדקו שאתם יודעים מה היא).

דוגמה 3.3.24. יהי k שדה ותהי $\mathcal{C}_k$ הקטגוריה שהאוביקטים בה הם $\mathbb{N}$ והמורפיזמים הם $\mathsf{Hom}\left(m,n\right)=M_{m,n}\left(k\right)$ כך שהרכבת מורפיזמים היא כפל מטריצות.
המשפט הבסיסי באלגברה לינארית אומר ש־$\mathcal{C}_k$ ו־$\mathbf{Vec}_k^{\mathsf{fin}}$ (הקטגוריה של מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל k) שקולות. שקילות היא
$$F\colon\mathcal{C}_k\to\mathbf{Vec}_k^{\mathsf{fin}}$$
$$F\left(n\right)=k^n.$$

טענה 3.3.25. *תהי $\mathcal{C}$ הקטגוריה של חבורות לי פשוטות־קשר ותהי **algLie** הקטגוריה של אלגבראות לי. אז $\mathsf{Lie}\colon\mathcal{C}\to\mathbf{algLie}$ היא שקילות קטגורית. השקילות בכיוון ההפוך לוקחת אלגברת לי $\mathfrak{g}$ ל־$\widetilde{\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)}$.*

פרק 4

חבורות לי כלליות

4.1 יריעות חלקות

4.1.1 הגדרות

הגדרה 4.1.1 (חבורת לי). חבורת לי היא חבורה G שיש לה מבנה של יריעה חלקה וכך שהעתקות הכפל וההופכי חלקות.

הערה 4.1.2 (לאנשי תורת־הקטגוריות). בשפה קטגורית, חבורת לי היא אוביקט חבורה בקטגוריה של חבורות חלקות.

הגדרה 4.1.3 (יריעה חלקה). יריעה חלקה M ממימד n היא מרחב טופולוגי האוסדורף עם בסיס בן־מנייה עם אטלס חלק:
כיסוי $\mathcal{A}$ של M ולכל $U \in \mathcal{A}$ הומיאומורפיזם $\varphi_U : U \to \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ מ־U לקבוצה פתוחה $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ וכך שההרכבות $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi_V (U \cap V) \xrightarrow{\sim} \varphi_U (U \cap V)$ חלקות לכל U, V (נובע מכך שגם ההופכיות חלקות, ולכן ההעתקות הן דיפאומורפיזמים).

הערה 4.1.4. אפשר לדבר על יריעה אנליטית, עם העתקות מעבר אנליטיות (שניתנות לפיתוח לטור חזקות) ושאינן רק אנליטיות. במקרה של חבורות לי שני הדברים שקולים.

הגדרה 4.1.5 (העתקה חלקה). העתקה $f : M \to N$ בין יריעות חלקות תיקרא *חלקה* אם לכל בחירת מפות (U, φ) של M ו־(V, ψ) של N, ההרכבה $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ חלקה על תחום ההגדרה שלה.

דוגמה 4.1.6. $\mathbb{R}^n$ יריעה חלקה. כל הומאומורפיזם חלק $\varphi : U \to V$ נותן מפה.

הערה 4.1.7. באופן כללי, לרוב מניחים שהאטלס הוא מקסימלי (כל אטלס מוכל באטלס מקסימלי כפי שניתן להוכיח בעזרת הלמה של צורן).
כלומר, כל הומיאומורפיזם $\varphi : U \to \hat{U}$ שהוא חלק הוא מפה בעצמו באטלס.

דוגמה 4.1.8. תהי $G \leq \mathsf{GL}_n (\mathbb{R})$. ראינו שיש סביבות פתוחות $U \subseteq \mathsf{Lie}(G) \cong \mathbb{R}^n$ של 0 כל שההעתקות $u \mapsto g \cdot \exp(u)$ לתוך $g \cdot U$ הן הומיאומורפיזמים לכל $g \in G$, ביחס לטופולוגיה שהגדרנו על G. כלומר, $g \cdot U = U_g \xrightarrow{\varphi_g} U'$ היא מפה.
העתקות המעבר נתונות על ידי

$$u \mapsto \log\left(g_2^{-1} g_1 \exp(u)\right).$$

נובע כי $\log, \exp$ אנליטיות בתחום הגדרתן, וכך גם ההעתקה $x \mapsto gx$. נעזרנו בכך ש־G° חיה בתוך מרחב לינארי.
כלומר, לרוב חבורות מטריצות הן חבורות לי עם המבנה שיצרנו. ההנחה של בסיס בן־מנייה לא תמיד תהיה נכונה וכדי שיהיה בסיס כזה G/G° צריכה להיות בת־מנייה.

הערה 4.1.9. לפעמים לא דורשים בסיס בן־מנייה עבור ההגדרה של יריעה חלקה ואז כל חבורת מטריצות היא חבורת לי.

עובדה 4.1.10. *קבוצה פתוחה בתוך יריעה היא יריעה חלקה מאותו המימד.*

עובדה 4.1.11. *אם M, N יריעות חלקות, גם $M \times N$ עם טופולוגיית המכפלה היא יריעה חלקה והמימד שלה הוא* $\dim M + \dim N$.

הערה 4.1.12. העובדה הנ"ל נותנת משמעות לדרישה בחבורות לי שהכפל $G \times G \to G$ חלק.

הערה 4.1.13. חבורות לי הן יריעות הומוגניות. כלומר, לכל $g_1, g_2 \in G$ קיים דיפאומורפיזם $\varphi : G \to G$ עבורו $\varphi(g_1) = g_1$.

הגדרה 4.1.14. עבור $g \in G$ יש העתקה $\ell_g : G \to G$ המוגדרת על ידי $\ell_g(h)$.

4.1.2 מרחבים משיקים

עבור נקודה $p \in M$ נרצה להגדיר מרחב משיק של M בנקודה p, ולהיות מסוגלים לגזור פונקציות לפי כל כיוון.

ב־$\mathbb{R}^n$ יכולנו לקחת מסילה $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ עם $\gamma(0) = p, \gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$ כאשר הנגזרת היא הכיוון של המסילה.

ביריעה כללית, נוכל לקחת מפה $\varphi\colon U \to \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ואז לקחת מסילה $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ עם p עם $\gamma(0) = p$. אז הכיוון של γ יהיה $(\varphi \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^n$. לכל נקודה $p \in M$ מגדירים מרחב וקטורי $\dim(M)$־מימדי T_pM שאיבריו הם מסילות חלקות דרך 0 תחת השקילות $\gamma \sim \rho \iff \gamma'(0) = \rho'(0)$.

כל מפה $\varphi\colon U \to \tilde{U}$ כך ש־$p \in U$ מגדירה בסיס סדור

$$B = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i\in[n]} \in T_pM.$$

בבסיס הזה

$$[\gamma'(0)]_B = (\varphi\circ\gamma)'(0).$$

מקבלים שמתקיים

$$\begin{aligned}[\gamma'(0)]_B &= (\varphi\circ\gamma)'(0)\\ &= \mathrm{d}_{\varphi(p)}(\varphi)\circ(\varphi\circ\gamma)'(0)\\ &= \mathrm{d}_{\varphi(p)}(\varphi)\cdot[\gamma'(0)]_B\end{aligned}.$$

לכל העתקה חלקה $f\colon M \to N$ ונקודה $p \in M$ מתקבלת העתקה לינארית

$$\mathrm{d}_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N.$$

עבור מסילה $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ כך ש־$\gamma(0) = p, \gamma'(0) = x \in T_pM$ נגדיר

$$\mathrm{d}_pf(x) = (f\circ\gamma)'(0) \in T_{f(p)}N.$$

בקואורדינטות

$$[\mathrm{d}_pf]_{B(p)}^{B(f(p))} = \mathrm{d}_{\varphi(p)}\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right).$$

הגדרה 4.1.15. עבור חבורת לי G נגדיר $\mathrm{Lie}(G) = T_eG$.

כיוון ש־G הומוגנית, יש איזומורפיזם קנוני $\ell_g\colon G \to G$ עם $\mathrm{d}_e(\ell_g)\colon T_eG \to T_gG$ איזומורפיזם מ־$\mathrm{Lie}(G)$ ל־T_gG. כל הומומורפיזם $\varphi\colon G \to H$ חלק נותן $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}_e\varphi\colon T_eG \to T_eH$ כאשר $\varphi(e) = e$.

הערה 4.1.16. אם $f\colon M \to \mathbb{R}$ חלקה ו־$p \in M$, אפשר לכתוב

$$\mathrm{d}_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}.$$

לרוב נחשוב על d_pf כעל העתקה לתוך $\mathbb{R}$ כאשר זאת הנגזרת של $f\circ\gamma$ כאשר $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ מסילה עם $\gamma'(0) = v$.

נשאל למה $\mathrm{Lie}(G)$ זאת אלגברת לי.

כל $g \in G$ מגדיר

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(g)\colon G &\to G\\ h &\mapsto ghg^{-1}\end{aligned}$$

חלקה עם $\mathrm{Ad}(g)(e) = e$. מתקיים

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(g) = \mathrm{d}_e(\mathrm{Ad}(g))\colon \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$$

עבור $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. כאן $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$ הומומורפיזם חלק. נקבל העתקה

$$\mathrm{ad}\colon \mathrm{d}(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}})\colon \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))) \cong \mathrm{End}(\mathrm{Lie}(G)).$$

עבור $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ נגדיר $[X,Y] \coloneqq \mathrm{ad}(X)(Y) \in \mathrm{Lie}(G)$.

הערה 4.1.17. לחבורות מטריצות ראינו שהבנייה הנ"ל מתלכדת עם ההגדה של $[X,Y]$ כקומוטטור.

יש גם הגדרה יותר קונקרטית עבור $[X,Y]$. לשם כך נצטרך לדון בשדות וקטוריים.

4.1.3 שדות וקטוריים

הגדרה 4.1.18 (שדה וקטורי). ראינו שלכל $p \in M$ יש מרחב משיק T_pM. שדה וקטורי ρ הוא בחירה של כיוון $\rho_p \in T_pM$ לכל $p \in M$, שמשתנה באופן חלק ב־p. כלומר, לכל מפה (U, φ) ההעתקה $\rho^\varphi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ עם

$$\rho^\varphi (u) = \left[\rho_{\varphi^{-1}(u)}\right]_{B(\varphi^{-1}(u))}$$

היא פונקציה חלקה.

הערה 4.1.19. מתקיים

$$\rho^\varphi (u) = \left[\rho\left(\varphi^{-1}(u)\right)\right]_{B^U} \left(\varphi^{-1}(u)\right).$$

אפשר גם לכתוב

$$\rho^\varphi (p) = \sum_{i \in [n]} a_i^U (p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i^U}$$

וחלקות שקולה לכך שכל ה־a_i^U פונקציות חלקות.

שדות וקטוריים משמשים לגזירת פונקציות חלקות $f : M \to \mathbb{R}$. אם X שדה וקטורי נגדיר $X(f) : M \to \mathbb{R}$ על ידי

$$X(f)(p) = \mathsf{d}_p f(X(p))$$

ואז

$$X(f)(p) = \sum_{i \in [n]} a_i (p) \frac{\partial f}{\partial x_i} (p).$$

הגדרה 4.1.20 (מרחב משיק). עבור יריעה M ונקודה $p \in M$ נגדיר את T_pM כמרחב הפונקציונלים הלינאריים

$$X : \mathcal{C}^\infty \to \mathbb{R}$$

שמקיימים את כלל לייבניץ:

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X(g)$$

פונקציונלים כאלה נקראים דריבציות (derivations).

הערה 4.1.21. ראינו שפונקציונל לינארי X כנ"ל, המקיים את כלל לייבניץ, הוא גזירה של f בכיוון נתון.

הערה 4.1.22. שדה וקטורי X מגדיר העתקה

$$X : \mathcal{C}^\infty (M) \to \mathcal{C}^\infty (M)$$

עם $X(f) \in \mathcal{C}^\infty (M)$ וכך שמתקיים $X(f)(p) = X(p)(f)$ כש־$X(p) \in T_pM$.

אפשר לחשוב על שדות וקטוריים כאופרטורים דיפרנציאליים. בפרט עבור 2 שדות וקטוריים X, Y מוגדר אופרטור $X \circ Y$. מסתבר שהאופרטור־$X \circ Y - Y \circ X$ נתון על ידי שדה וקטורי שנסמנו $[X, Y] \coloneqq X \circ Y - Y \circ X$.

דוגמה 4.1.23. תהי $M = \mathbb{R}^2$. כאן

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = 0.$$

מתקיים גם

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial y}.$$

דוגמה 4.1.24. תהי G חבורת לי. כל $g \in G$ מגדיר העתקה $\ell_g : G \to G$ על ידי $\ell_g (h) = gh$. זה נגדיר איזומורפיזם קנוני

$$d_e (\ell_g) : \mathsf{Lie}(G) \xrightarrow{\sim} T_gG.$$

מכאן, כל $X \in \mathsf{Lie}(G)$ מגדיר שדה וקטורי L_X על ידי $g \cdot X \coloneqq L_X (g) = d_e (\ell_g)(X) \in T_gG$. ההעתקה $X \mapsto L_X$ לינארית. מקבלים

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$$

לכל $X, Y \in \mathsf{Lie}(G)$ ויכולנו להגדיר

$$[X, Y] = [L_X, L_Y](e).$$

כרגע לא הסברנו למה ההגדרות מתלכדות.

דוגמה 4.1.25. אם $G = \mathsf{GL}_n (\mathbb{R})$, זאת קבוצה פתוחה ב־$M_n (\mathbb{R})$ כלומר G באה עם מפה אחת שמכסה את כל החבורה. יש זיהוי טבעי $T_gG \cong M_n (\mathbb{R})$ ואז אם $X \in \mathsf{Lie}(G)$ אז $g \cdot X \in T_gG$ נתון פשוט על ידי מכפלת המטריצות g, X כשמזהים את T_gG עם מטריצות.

הגדרה 4.1.26 (זרימה על יריעה). שדה וקטורי X על יריעה M מגדיר *זרימה על* M שמסומנת Φ_X.
קיימת קבוצה פתוחה $M \subseteq \mathbb{R} \subseteq A$ כך ש־$A \cap R \times \{p\} = (a_p, b_p) \times \{p\}$ ופונקציה חלקה $\Phi_X : A \to M$ כך ש־

$$\Phi_X(0,p) = p$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_X(t,p)) = X(\Phi_X(t,p)).$$

במילים, המסילה $t \mapsto \Phi_X(t,p)$ יוצאת בזמן $t = 0$ מ־p והולכת לפי הכיוונים שנתונים על ידי X.

משפט 4.1.27 (קיום ויחידות). *יהי X שדה וקטורי על יריעה M ותהי $p \in M$. נחפש מסילה $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ שתקיים*

$$\gamma(0) = p$$
$$\forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon) : \gamma'(t) = X(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M.$$

יש γ יחידה כזאת ויש ε מקסימלי עליה היא מוגדרת.

הגדרה 4.1.28 (אקספוננט). נסמן

$$\exp(tX)\, p \coloneqq \Phi_X(t,p).$$

כאן $\exp(tX) : M \to M$ בהנחה שזה מוגדר עבור t נתון.

הערה 4.1.29. מתקיים $\exp(0 \cdot X) = \mathrm{id}$ ובנקודות שבהן המשוואה מוגדרת מתקיים

$$\exp((t+s)X) = \exp(tX) \circ \exp(sX)$$

מיחידות הפתרון.

הערה 4.1.30. הסימון tX מוצדק כי

$$\exp(t \cdot (\alpha X)) = \exp((t \cdot \alpha)X).$$

בדקו זאת.

הגדרה 4.1.31. בחבורת לי G עבור כל $X \in \mathrm{Lie}(G)$ נגדיר

$$\exp(tX) \coloneqq \exp(tL_X)(e) \in G.$$

משפט 4.1.32. *תהי G חבורת לי. לכל $X \in \mathrm{Lie}(G)$, $\exp(tL_X)$ מוגדר לכל $t \in \mathbb{R}$.*
זאת ההעתקה האנליטית יחידה $\exp\colon \mathrm{Lie}(G) \to G$ כך שמתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tX)) = \exp(tX)\cdot(X) = (X)\cdot\exp(tX) \in T_{\exp(tX)}G.$$

הוכחה. נניח תחילה כי

$$\exp(tX) \coloneqq \exp(tL_X)(e) \in G$$

מוגדר לכל $t \in \mathbb{R}$. כשנציב $t = 1$ נקבל את $\exp(X)$. מתקיים לפי המד"ר

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tX)) = L_X(\exp(tL_X)) = \exp(tL_X)\cdot(X) = \exp(tX)(X).$$

השוויון האחרון נשאר כתרגיל, יחידות נובעת מהיחידות במשפט הקיום והיחידות, ואנליטיות נשארת כתרגיל.
נוכיח עכשיו כי $\exp(tX)$ מוגדר לכל $t \in \mathbb{R}$. נביט במסילה $\gamma_X(T)$ ונרצה להראות שהיא מוגדרת לכל $t \in \mathbb{R}$. נניח כי היא מוגדרת עבור $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ וכי $\gamma_X(t_0)$ מוגדר. תהי $g \coloneqq \gamma_X(t_0)$ ונגדיר

$$\gamma_g(t) = g \cdot \gamma(t).$$

זאת מסילה $\gamma_g(-\varepsilon,\varepsilon) \to G$. מתקיים $\gamma_g(0) = g$ וגם

$$\gamma_g'(t) = (d_E\ell_g)(\gamma_X'(t)) = g\cdot\gamma_X'(t) = g\cdot(L_X(\gamma_X(t))) = g\cdot(\gamma_X(t)\cdot(X)) = \gamma_g(t)(X) = L_X(\gamma_g(t)).$$

כלומר,

$$\gamma_g(t) = \exp(tL_X)(g) = \exp(tL_X)\cdot\exp(t_0L_X)(e)$$

ומיחידות נקבל

$$\gamma_g(t) = \exp((t_0+t)L_X)(e) = \gamma_X(t_0+t).$$

כלומר, לכל t_0 שבה γ_X מוגדרת, היא מוגדרת בקטע $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ ולכן היא מוגדרת לכל $t \in \mathbb{R}$. ■

הערה 4.1.33. לכל $X \in \mathsf{Lie}(G)$ קיבלנו הומומורפיזם של חבורות

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to G\\ t &\mapsto \exp(tX).\end{aligned}$$

הומומורפיזם זה נקרא *חבורה חד־פרמטרית*.

הערה 4.1.34. קל לחשב את

$$d_0(\exp)\colon \mathsf{Lie}(G) \to \mathsf{Lie}(G).$$

עבור $tX \in \mathsf{Lie}(G)$ מתקיים

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\exp(tX)(e) = X$$

ואז

$$d_0(\exp)(X) = X.$$

ממשפט הפונקציה ההפוכה, יש סביבה פתוחה $U \subseteq \mathsf{Lie}(G)$ סביב 0 כך ש־$U \cong \exp(U) \subseteq G$ הומיאומורפיזם של קבוצות פתוחות. כלומר, קיבלנו מפה (chart) אקספוננציאלית סביב $e \in G$. לכל $g \in G$ יש גם מפה $U \cong g \cdot \exp(U)$.
קיבלנו אטלס מיוחד על כל חבורת לי לחבורת מטריצות בעצם הגדרנו באמצעותו את המבנה החלק.

4.2 התאמת לי כללית

הגדרה 4.2.1 (תת־חבורת לי). תהי G חבורת לי. $H \leq G$ תיקרא תת־חבורת לי אם יש על H כקבוצה מבנה של חבורת לי, וההכלה $i\colon H \to G$ היא הומומורפיזם חלק ביחס לאותו מבנה.

הערה 4.2.2. תת־חבורת לי H קשירה נקראת לפעמים תת־חבורה *אנליטית*.

הערה 4.2.3. באופן כללי, $i\colon H \to G$ חח״ע, לכן נקבל העתקה לינארית חח״ע $\mathsf{d}i\colon \mathsf{Lie}(H) \hookrightarrow \mathsf{Lie}(G)$. כלומר, כל ת״ח לי נותנת תת־אלגברת לי.

הגדרה 4.2.4 (אלגברת לי של תת־חבורה). אם G חבורת לי ו־$H \leq G$ היא ת״ח אבסטרקטית, כמו במקרה של מטריצות נוכל להגדיר

$$\mathsf{Lie}(H) \coloneqq \{\gamma'(0) \in \mathsf{Lie}(G) \mid \gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to H \text{smooth as a path in } G\}.$$

וזאת תת־אלגברת לי של $\mathsf{Lie}(G)$.

תרגיל 11. הוכיחו כי עבור $X \in \mathsf{Lie}(H)$ מתקיים $\exp(X) \in H$, כמו במקרה של חבורות מטריצות.

מסקנה 4.2.5. *תת־חבורה $H \leq G$ מקבלת אטלס אקספוננציאלי וכמעט מבנה של חבורת לי. אולי H/H° לא בן־מנייה. אם דרישה זאת כן מתקיימת, H היא חבורת לי.*

הערה 4.2.6. נקבל שיש לחבורה G ״הרבה תת־חבורות לי״ ו״מעט תת־חבורות אנליטיות״.

הגדרה 4.2.7 (אקספוננטים של תת־אלגברה). תהי G חבורת לי ותהי $\mathfrak{h} \leq \mathsf{Lie}(G)$ תת־אלגברת לי. נגדיר את $\Gamma(\mathfrak{h})$ להיות תת־החבורה של G שנוצרת על ידי $\exp(X)$ עבור $X \in \mathfrak{h}$.

תרגיל 12. $\Gamma(\mathsf{Lie}(H)) \leq H$ ומתקיים $\mathsf{Lie}(\Gamma(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$ כמו במקרה של חבורות מטריצות.

משפט 4.2.8 ($Chevalley$). *תהי G חבורת לי. קיימת התאמה חח״ע בין תת־חבורות אנליטיות של G ותת־אלגבראות לי של $\mathsf{Lie}(G)$. ההתאמה נתונה על ידי Γ, Lie.*

נרצה להבין תת־חבורות אנליטיות.

הגדרה 4.2.9 (תת־יריעה). עבור יריעה חלקה M, תת־קבוצה $N \leq M$ נקראת תת־יריעה (משוכנת, embedded) ממימד n אם לכל $p \in N$ קיימת מפה φ_U של M כך ש־$p \in U$ ושמתקיים

$$\varphi_U(U \cap N) = U \cap (\mathbb{R}^n \oplus \{0\}).$$

הערה 4.2.10. תת־יריעה $N \leq M$ היא יריעה עם הצמצום של המפות מ־M ל־N.

משפט 4.2.11 (משפט התת־חבורה הסגורה). *תהי G חבורת לי ותהי $H \leq G$ תת־חבורה אבסטרקטית. H היא תת־יריעה אם ורק אם H סגורה.*

הערה 4.2.12. תת־חבורה שהיא תת־יריעה היא תת־חבורת לי עם המבנה החלק כתת־יריעה. כלומר, תת־חבורה שהיא סגורה וקשירה בטופולוגיה של G היא אנליטית.

דוגמה 4.2.13. תהי

$$H_a \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & \\ & e^{iat} \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

עבור $a \in \mathbb{Q}$ זאת תת־חבורה סגורה וקשירה, ולכן אנליטית. עבור $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ היא אינה סגורה, אך עדיין אנליטית.

הוכחה. נניח כי $H \leq G$ תת־יריעה. קיימת סביבה פתוחה $U \subset G$ של e כך ש־$U \cap H$ סגורה ב־U.
$\bar{H}$ גם תת־חבורה אבסטרקטית (כי הכפל רציף). תהי $y \in \bar{H}$ ואז yU פתוחה. מתקיים

$$x \in yU \cap H, \quad \varnothing \neq yU \cap H$$

ולכן

$$y^{-1}x \in U \cap y^{-1}\bar{H} = U \cap \bar{H} = U \cap H \subseteq H$$

ומכיוון ש־$x \in H$ נקבל $y \in H$.
בכיוון ההפוך, נניח כי H תת־חבורה סגורה ונכתוב $\mathfrak{h} \coloneqq \mathsf{Lie}\,(H) \leq \mathsf{Lie}\,(G)$. נבחר תת־מרחב משלים

$$\mathsf{Lie}\,(G) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$$

ונביט בהעתקה

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathsf{Lie}\,(G) &\to G \\ (X, Y) &\mapsto \exp(X)\exp(Y) \end{aligned}$$

כאשר $X \in \mathfrak{h},\ Y \in \mathfrak{s}$. אפשר לבדוק שעדיין $d_0\psi = \mathrm{id}$. ממשפט הפונקציה ההפוכה יש סביבה $U' \subseteq \mathsf{Lie}\,(G)$ של 0 שבה $\psi \colon U' \xrightarrow{\sim} U \subseteq G$ הומיאומורפיזם לקבוצה פתוחה, ומתקיים $\psi\,(U' \cap \mathfrak{h}) \subseteq H$.
נראה להראות שמתקיים

$$\psi\,(U' \cap \mathfrak{h}) = U \cap H.$$

במילים אחרות, אנו רוצים להראות שלא קיים

$$(X, Z_1) \in (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}) \cap U$$

כך ש־$Z_1 \neq 0$ וגם

$$\exp(X)\exp(Z_1) \in H,$$

או באופן שקול $\exp(Z_1) \in H$.
נניח בשלילה שקיים $Z_1 \in \mathfrak{s}$ כזה שונה מאפס ושקיים Z כזה בכל סביבה קטנה ב־$\mathfrak{s}$ סביב 0. כלומר, קיימים $Z_k \in \mathfrak{s} \setminus \{0\}$ כך ש־$\exp(Z_k) \in H$ ושמתקיים $\lim_{k\to\infty} Z_k = 0$. הסדרה $\left(\frac{Z_k}{\|Z_k\|}\right) \subseteq S^1$ מוכלת בקבוצה קומפקטית ולכן נוכל להניח שהיא מתכנסת ל־$Y \in S^1$. נקבע $t \in \mathbb{R}$ ונבחר שלמים n_k כך שמתקיים

$$\lim_{k\to\infty} n_k \|Z_k\| = t$$

ואז

$$\exp(Z_k)^{n_k} = \exp\left(n_k \|Z_k\| \cdot \frac{Z_k}{\|Z_k\|}\right) \xrightarrow{k\to\infty} \exp(t \cdot Y)$$

כאשר זהו גבול של איברים ב־H ולכן ב־H כי H סגורה. לכן $\exp(tY) \in H$ לכל $t \in \mathbb{R}$ ולכן $Y \in \mathsf{Lie}\,(H)$. זאת סתירה כי $\mathfrak{s}$ נבחר כמשלים של $\mathfrak{h}$. ■

מסקנה 4.2.14. *תהי G חבורת לי ותהי $H \leq G$ תת־חבורה סגורה. אוסף הקוסטים G/H עם טופולוגיית המנה מ־*

$$\begin{aligned} \pi \colon G &\to G/H \\ g &\mapsto gH \end{aligned}$$

הוא יריעה חלקה ממימד $\dim G - \dim H$.

הוכחה. H סגורה לכן G/H האוסדורף. מההוכחה הקודמת נראה שאם ניקח פירוק $\mathsf{Lie}\,(G) = \mathsf{Lie}\,(H) \oplus \mathfrak{s}$ קיימת סביבה $U \subseteq \mathfrak{s}$ של אפס כך שההעתקה

$$\begin{aligned} \varphi \colon U \times H &\hookrightarrow G \\ (u, h) &\mapsto \exp(u) \cdot h \end{aligned}$$

היא הומיאומורפיזם חלק לתמונה. תהי

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} \colon U &\to G/H \\ u &\mapsto \pi\,(\varphi\,(u, e)) \end{aligned}$$

שנותנת מפה ב־G/H סביב eH. לכל $a_0 H \in G/H$ הקבוצה $a_0 \exp(U) \cdot H$ הומיאומורפית ל־U והיא מפה באטלס על G/H. ■

מסקנה 4.2.15. *אם $N\trianglelefteq G$ תת־חבורה נורמלית סגורה בחבורת לי G, המנה $G/_N$ היא חבורת לי.*

מסקנה 4.2.16. *תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי. $G=\widetilde{\Gamma\left(\mathfrak{g}\right)}$ היא חבורה פשוטת־קשר וקשירה.*
אוסף החבורות לי שאלגברת לי שלהן היא $\mathfrak{g}$ נתון על ידי $G/_\Lambda$ כאשר $\Lambda\le Z\left(G\right)$ תת־חבורות דיסקטריות.

הוכחה. ראינו בדיון על כיסויים שכל חבורות לי הנ"ל הן מהצורה $G/_\Lambda$. עכשיו רואים שבכיוון ההפוך Λ כזו מגדירה חבורת לי: כיוון ש־Λ דיסקרטית במרכז היא נורמלית, ועבור $\pi\colon G\to G/_\Lambda$ הדיפרנציאל $\mathrm{d}\pi$ הוא איזומורפיזם. ■

4.3 חבורות לי קומפקטיות

4.3.1 דוגמאות

נרצה לחקור חבורות לי שכמרחב טופולוגי הן קומפקטיות.

דוגמה 4.3.1
- טורוסים, $\left(S^1\right)^n$.
- $O\left(n\right)=\left\{A\in\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)\mid AA^t=I\right\}$.
- $U\left(n\right)=\left\{A\in\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)\;\middle|\;A\bar{A}^t=I\right\}$.
- תת־חבורות סגורות שהאיברים שלהן חסומים בנורמה על $\mathbb{R}^{n^2}$.
-

4.3.2 מוטיבציה

קומפקטיות זאת הנחה חזקה מספיק בשביל להבין הרבה מהמבנה של חבורות לי. בפרט, אפשר להתקרב להבנה של מהן כל החבורות ממחלקה זאת על ידי סיווגן.
חבורה סופית, למשל, היא חבורת לי קומפקטית (כיריעה ממימד 0) ומתקיים בה $G^\circ=\{e\}$. חבורות קומפקטיות מכלילות הרבה מהתורה של חבורות סופיות.
הנחה מספיקה חלשה בשביל לחשוף חלק גדול מסימטריות בטבע. יותר במדויק, יש קשר הדוק בין חבורות לי קומפקטיות לאלגבראות לי פשוטות־למחצה שידועות כמסוואגות הרבה מבנים באלגברה, גיאומטריה, תורת המספרים, פיזיקה וכו'.

משפט 4.3.2 (Peter-Weyl). *כל חבורת לי קומפקטית איזומורפית לחבורת מטריצות.*

הערה 4.3.3. גרסה חזקה יותר של המשפט נוגעת לכל חבורה טופולוגית קומפקטית.
לא נוכיח את המשפט שהוכחתו מערבת כלים מאנליזה פונקציונלית. מראים תכונות של אופרטורים על מחרב הילברט של הפונקציות על החבורה.
בהמשך נניח את נכונות המשפט בלי הוכחה.

תהי G חבורת לי קומפקטטית ויהי
$$i\colon G\hookrightarrow\mathsf{GL}_n\left(k\right)$$
שיכון עבור $k\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, שקיים לפי Peter-Weyl. מקומפקטיות נובע $G\cong i\left(G\right)$ וכי $i\left(G\right)\le\mathsf{GL}_n\left(k\right)$ היא סגורה. לכן נניח מעכשיו כי $G\le\mathsf{GL}_n\left(k\right)$ תת־חבורה סגורה.

הערה 4.3.4. יש שיכונים $\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)\le\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ וגם $\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)\le\mathsf{GL}_{2n}\left(\mathbb{R}\right)$. למשל, יש שיכון
$$\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)\to\mathsf{GL}_{2n}\left(\mathbb{R}\right)$$
$$a_{kj}+b_{kj}\mapsto\begin{pmatrix}{}_{kj}a & -b_{kj}\\ {}_{kj}b & a_{k_j}\end{pmatrix}.$$

מתקיים גם
$$O\left(n\right)=\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)\cap U\left(n\right)\le\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$$
$$U\left(n\right)=\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)\cap O\left(2n\right)\le\mathsf{GL}_{2n}\left(\mathbb{R}\right).$$

משפט 4.3.5. *חבורות לי קומפקטיות הן בדיוק תת־חבורות לי של $O\left(n\right)$ עבור $n\in\mathbb{N}$.*

הוכחה. **עבור G סופית:** נחשוב על $G \leq \mathsf{GL}(V)$ כאשר V מרחב וקטורי סוף־מימדי ממשי. ניקח מכפלה פנימית עליו $\langle , \rangle$. נגדיר תבנית בילינארית

$$\begin{aligned} B\colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (v,w) &\mapsto \sum_{g\in G} \langle g(V), g(w)\rangle \end{aligned}.$$

זאת מכפלה פנימית כי $B(v,v)$ סכום של מספרים אי־שליליים שאחד מהם $\langle v,v\rangle$.
מתקיים

$$\begin{aligned} \forall g \in G\colon B(g(v), g(w)) &= \sum_{h\in G} \langle h(g(v))\, h(g(w))\rangle \\ &= \sum_{h\in G} \langle h(v), h(w)\rangle \\ &= B(v,w) \end{aligned}$$

ולכן B היא G־אינווריאנטית. אם נקבע בסיס אורתונורמלי ל־B ונזהה לפי $V \cong \mathbb{R}^n$ נקבל

$$B(g(v), w) = B\left(v, g^{-1}(w)\right)$$

ואז $G \cong G' \leq O(n)$. ■

הערה 4.3.6. עבור $G \leq \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ אפשר לעשות את אותה הוכחה עם מכפלה פנימית מרוכבת ולקבל

$$\mathsf{Ad}(a)(G) \leq U(n).$$

כאשר מדובר ב־G קומפקטית כללית את הסכום $\sum_{g\in G}$ מחליף אינטגרל. רוצים פעולה שאם נזיז בה את סדר הסכימה הסכום לא ישתנה. זאת נקראת מידה אינווריאנטית.

דוגמה 4.3.7. ב־$(\mathbb{R}^n,+)$ אינטרגל רימן־לבג מקיים

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathsf{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x'+y)\,\mathsf{d}x.$$

ב־$(\mathbb{R}^n,\cdot)$ אותו אינטגרל לא אינווריאנטי כי מתקיים

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathsf{d}x = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(ax')\,\mathsf{d}x'$$

ועבור $a \neq 1$ אין שוויון. במקרה זה המידה האינווריאנטית היא $\frac{\mathsf{d}x}{x}$ ומתקיים

$$\int_0^\infty f(x)\,\frac{\mathsf{d}x}{x} = \int_0^\infty f(ax')\,\frac{\mathsf{d}x'}{x'}.$$

הגדרה 4.3.8. עבור מרחב טופולוגי X נגדיר

$$\mathcal{C}_c(G) = \{f\colon G \to \mathbb{R} \mid f(g) \text{ for all } g \text{ outside of a compact set }\}.$$

הערה 4.3.9. אם G קומפקטית, $\mathcal{C}_c(G) = \mathcal{C}(G)$.

הגדרה 4.3.10 (מידת האר). *מידת האר על G* היא העתקה לינארית

$$m\colon \mathcal{C}_c(G) \to \mathbb{R}$$

שונה מאפס כך ש־$m(f) \geq 0$ עבור $f \geq 0$ וכך שאם ל־$g \in G$, $f \in \mathcal{C}_c(G)$ נגדיר $fg(x) := f\left(g^{-1}\cdot x\right)$ אז

$$\forall g \in G\colon m(f) = m(fg).$$

משפט 4.3.11 (האר). *לכל חבורת לי קיימת מידת האר שמאלית והיא יחידה עד כדי סקלר חיובי.*

הוכחה. 4.3.5 כמו במקקרה הסופי, ניקח

$$B(v,w) := m(f_{v,w}).$$

כאשר עבור $v,w \in V$ נגדיר $f_{v,w}(g) = \langle g\cdot v, g\cdot w\rangle$.
מתיים $f_{v,w} \in \mathcal{C}_c(G)$ ואז

$$\begin{aligned} B(g(v), g(w)) &= m\left(f_{g(v),g(w)}\right) \\ &= m\left(f_{v,w}^{g^{-1}}\right) \\ &= m(f_{v,w}). \\ &= B(v,w) \end{aligned}$$

■

הערה 4.3.12. בעצם הוכחנו שכל הומומורפיזם $\varphi\colon G\to \mathsf{GL}(V)$ מקיים $\varphi(G)\subseteq O_B(V)$ כאשר B מכפלה פנימית על V.

נרצה עכשיו לראות שכל חבורה קומפקטית $G\leq \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ היא *אלגברית*, מה שפחות או יותר אומר שהיא מוגדרת על ידי פולינומים. זאת עובדה שקשורה להשקפה קטגורית. תהיה קטגוריה של הצגות שהיא דואלית ל־G. זאת דואליות Tannaka-Krein.

דוגמה 4.3.13. מתקיים
$$O(n)=\left\{A\in M_n(\mathbb{R})\;\middle|\;AA^t=I\right\}.$$
אם $A\in M_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$ נוכל לכתוב את הדרישה $A\in O(n)$ בקורדינטות:
$$\sum_{j\in[n]}a_{i_1,j}a_{i_2,j}=\delta_{i_1,i_2}$$
אלו הם פולינומים ב־n^2 משתנים וממעלה 2. $O(n)$ היא תת־קבוצה של $M_n(\mathbb{R})$ שהיא קבוצת האפסים של הפולינומים הנתונים.

4.3.3 גיאומטריה אלגברית

יהי k שדה ונגדיר את
$$A_k^n=k[x_1,\dots,x_n].$$
זהו חוג קומוטטיבי.

עבור קבוצה $S\subseteq\mathbb{A}_k^n$ נגדיר
$$V(S)\coloneqq\{x\in A_k^n\mid\forall f\in S\colon f(x)=0\}\subseteq k^n.$$
קבוצות אלו נקראות *קבוצות אלגבריות סגורות* ולמעשה ניתן להגדיר טופולוגיה אחרת על $\mathbb{A}_k^n$ על ידי הכרזה על אלו כקבוצות הסגורות. זאת נקראת *טופולוגיית זריצקי* על k^n.

דוגמה 4.3.14. ב־$\mathbb{C}$ הקבוצות הסגורות זריצקי היחידות הן הקבוצות הסופיות.

בכיוון השני, עבור $Y\subseteq k^n$ נגדיר
$$I(Y)=\left\{p\in A_n^k\;\middle|\;\forall y\in Y\colon p(y)=0\right\}\leq A_k^n.$$

דוגמה 4.3.15. נסתכל על $xy\in A_{\mathbb{R}}^2$. אז $V(xy)\subseteq\mathbb{R}^2$ זה איחוד הצירים.

נגדיר גם
$$A_k^{n,n}=k[x_{i,j}]_{i,j\in[n]}\cong A_k^{n^2}.$$
עבור $Y\subseteq M_n(k)$ פולינום $f\in A_k^{n,n}$ מגדיר פונקציה $\tilde{f}\colon Y\to k$ על ידי הצבה של y ב־f.

אם $A=(a_{i,j})_{i,j\in[n]}\in Y$ אפשר לכתוב $a_{i,j}=r_{i,j}(a)$ כאשר $r_{i,j}\colon Y\to k$ הצבה בפולינום $x_{i,j}$.

ניתן לחשוב על $\tilde{f}$ כפעולה אלגברית על פולינומים בפונקציות $r_{i,j}$.

דוגמה 4.3.16. אם נכתוב
$$G=\mathsf{GL}_2(\mathbb{R}),$$
$a+b$ זאת פונקציה על G שניתן לחשוב עליה כהצבה של $r_{1,1},r_{1,2}$ בפולינום $x_{1,1}+x_{1,2}$.

משפט 4.3.17. *תהי $G\leq\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ קומפקטית. אז G סגורה זריצקי.*

הוכחה.

הערה 4.3.18. יש חבורות מטריצות שאינן אלגבריות. למשל
$$\left\{\begin{pmatrix}{}^{it}e & 0\\ 0 & e^{iat}\end{pmatrix}\in\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}$$
כאשר $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ אינה סגורה ולכן אינה אלגברית.

אפשר להסתכל גם על
$$\left\{\begin{pmatrix}1&\theta&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\theta&\sin\theta\\0&0&\sin(-\theta)&\cos\theta\end{pmatrix}\;\middle|\;\theta\in\mathbb{R}\right\}$$
וזאת חבורה סגורה שאינה אלגברית. אפשר להסתכל על זאת כעל שיכון של גרף של
$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{R}&\to\mathbb{C}\\ \theta&\mapsto{}^{i\theta}\end{aligned}$$
ב־$\mathbb{R}^3$.

4.3.4 עוד על מידות האר

עבור G קומפקטית והומומורפיזם $\pi\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ נגדיר לכל $v \in V$:

$$w = \int_G \pi(g) \cdot v \, \mathsf{d}g \in V$$
$$A_\pi = \pi(g) \, \mathsf{d}g \in \mathsf{End}(V).$$

אז $w = A_\pi(v)$.

אפשר לקחת בסיס ל־V ולחשוב על $\pi(g)$ כמטריצות. אז אפשר להפעיל את אינטגרל האר על כל מקדם של המטריצות בתמונה.

אפשר לעשות זאת בדרך אחרת. עבור $v^* \in V^*$ נביט בפונקציה

$$w\colon v^* \mapsto m(f_{v,v^*})$$

כשמתקיים $f_{v,v^*}(g) = v^*(\pi(g)v)$. הגדרנו העתקה לינארית $w\colon V^* \to \mathbb{R}$ ואז $w \in V^{**} \cong V$ ונוכל לזהות את w עם איבר ב־V. ולהסתכל על $v^*(w) = m(f_{v,v^*})$. זה מגדיר את

$$w = \int_G \pi(g) v \, \mathsf{d}g.$$

עבור $v^* \in V^*$ מתקיים

$$\begin{aligned} v^*(\pi(h)w) &= (v^* \circ \pi(h))(w) \\ &= m\left(f_{v,v^* \circ \pi(h)}\right) \\ &= m\left(f^h_{v,v^*}\right) \\ &= v^*(w) \end{aligned}$$

ואז $\pi(h) w = w$.

משפט 4.3.19 (משפט הקירוב של ויירשטראס). *פונקציה ממשית רציפה $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ניתנת לקירוב במידה שווה על ידי פולינומים.*

משפט 4.3.20 (סטון-ויירשטראס). *יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי ויהי $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ מרחב הפונקציות הממשיות הרציפות על $\mathbb{R}$. תהי $B \leq \mathbb{C}(X,\mathbb{R})$ תת־אלגברה שמכילה את הפונקציות הקבועות ושמפרידה נקודות (לכל $x, y \in X$ שונים קיימת $f \in B$ כך ש־$f(x) \neq f(y)$).*

4.3.5 אלגבריות של חבורות קומפקטיות

הגדרה 4.3.21 (חבורה אלגברית ממשית). תהי $S \subseteq A^{n,n}_{\mathbb{R}}$. הקבוצות $V(S)$ הן הקבוצות הסגורות בטופולוגיית זריצקי על $M_n(\mathbb{R})$. אם $V(S) = G \leq \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ היא חבורה, היא תיקרא *חבורה אלגברית ממשית*.

משפט 4.3.22. *תהי $G \leq \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ חבורה קומפקטית. אז G חבורה אלגברית ממשית.*
באופן שקול, G סגורה בטופולוגיית זריצקי.

הוכחה. ניקח $X \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ כך ש־$X \notin G$ ונמצא פולינום $\tilde{Q} \in A^{n,n}_{\mathbb{R}}$ כך ש־$\tilde{Q}\big|_G = 0$ אבל $\tilde{Q}(X) \neq 0$.

נביט בקבוצה $Y \coloneqq G \sqcup Gx \subseteq \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. נוכל למצוא פונקציה רציפה

$$f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

כך ש־$f(G) = 0$ ו־$f(Gx) = 1$. מסטון-ויירשטראס קיים פולינום $P \in A^{n,n}_{\mathbb{R}}$ כך שלכל $g \in G$ מתקיים

$$p(g) \leq \frac{1}{3}, \quad p(gx) \geq \frac{2}{3}.$$

נרצה למצע את P על פני G. נביט ב־$V \leq A^{n,n}_{\mathbb{R}}$ תת־מרחב של פולינומים מדרגה לכל היותר $\deg(P)$ כאשר הדרגה של פולינום היא סכום חזקות המקדמים המקסימלי במונום. אז $\dim V < \infty$.

עבור $p \in A^{n,n}_{\mathbb{R}}$ נגדיר $p^g(x) = p\left(g^{-1}x\right)$ ואז $p^g \in A^{n,n}_{\mathbb{R}}$ ומתקיים $\deg(p^g) \leq \deg(p)$. נקבל הומומורפיזם

$$\pi\colon G \to \mathsf{GL}(V)$$
$$\pi(g) p = p^g.$$

ניקח

$$Q = \int_G \pi(g) p \, \mathsf{d}g \in V.$$

כל $A \in M_n(\mathbb{R})$ נותנת פונקציונל לינארי $v_A \in V^*$ על ידי $v_A(p) = p(A)$. אז

$$Q(A) = v_A Q = \int v_A(p^g) \, \mathsf{d}g = \int_G p\left(g^{-1}A\right) \mathsf{d}g.$$

כיוון ש־$\mathrm{d}g$ מידת האר, נקבל שלכל $h \in G$ מתקיים

$$Q\left(h\right) = Q\left(e\right) = \int_G p\left(g^{-1}\right) \mathrm{d}g.$$

לכן Q קבוע על G עם ערך $a \coloneqq Q\left(e\right)$. נגדיר $\tilde{Q} = Q - a$ ואז $Q|_G = 0$. מתקיים גם

$$\tilde{Q}\left(x\right) = \int_G p\left(g^{-1}x\right) \mathrm{d}g \geq \frac{2}{3}$$

לכן

$$\tilde{Q}\left(x\right) \geq \frac{2}{3} - a > 0.$$

הסיבה ש־Q פולינום היא ש־V סוף־מימדי. ■

המשפט שציינו הוא גירסה כלשהי של דואליות Krein-Tannaka.

4.4 קומפלקסיפיקציה של חבורות אלגבריות

הגדרה 4.4.1 (סגור זריצקי). עבור $Y \subseteq \mathbb{C}^m$ אפשר לדבר על *סגור זריצקי של* Y שמוגדר להיות

$$V_{\mathbb{C}}\left(I_{\mathbb{C}}\left(Y\right)\right) \subseteq \mathbb{C}^m$$

כאשר $I_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}$ ההעתקות שלוקחות אידאל פולינומים מתאפסים וקבוצת אפסים, בהתאמה.

הערה 4.4.2. אם $Y \subseteq \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{C}^m$ נפריד בין $Y \subseteq \bar{Y}^{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{Y}^{\mathbb{C}}$.
נרצה להגיד שהסגור של חבורה $G \leq \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ הוא חבורה. זה לא ממש נכון, למשל כי $\overline{\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)} = M_n\left(\mathbb{C}\right)$. במקום זה נגדיר את ההגדרה הבאה.

הגדרה 4.4.3 (סגור יחסי). עבור $G \leq \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ נגדיר את *הסגור היחסי של* G להיות

$$G_{\mathbb{C}} \coloneqq \bar{G}^{\mathbb{C}} \cap \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right).$$

דוגמה 4.4.4. בהסתכלות אחרת, נגדיר שיכון $\varphi\colon \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right) \hookrightarrow \mathsf{GL}_{n+1}\left(\mathbb{C}\right)$ כבלוק $n \times n$ וכאשר $\varphi\left(A\right)_{n+1,n+1} = \frac{1}{\det(A)}$.
ככה $\mathbb{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ היא קבוצה סגורה־זריצקי ב־$M_{n+1}\left(\mathbb{C}\right)$. בשיכון זה מתקיים

$$G_{\mathbb{C}} = \bar{G}^{\mathbb{C}} \leq M_{n+1}\left(\mathbb{C}\right).$$

למה 4.4.5. *עבור $H \leq \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ חבורה, גם $H_{\mathbb{C}}$ חבורה.*

הוכחה. יהי $x \in H$ ונכתוב $H = xH$. יהי $P \in I\left(H\right)$. אז $p\left(xH\right) = 0$ ולכן $p^{x^{-1}} \in I\left(H\right)$. לכל $y \in H_{\mathbb{C}}$ ולכל $p \in I\left(H\right)$ מתקיים

$$0 = p^{x^{-1}}\left(y\right) = p\left(xy\right)$$

לכן $xH_{\mathbb{C}} \subseteq H_{\mathbb{C}}$ כלומר $H \cdot H_{\mathbb{C}} \subseteq H_{\mathbb{C}}$.
אם $y \in H_{\mathbb{C}}$, y הפיך. אז $H_{\mathbb{C}} \cdot y^{-1}$ סגורה זריצקי. מ־$H \cdot H_{\mathbb{C}} \subseteq H_{\mathbb{C}}$ נובע $Hy \subseteq H_{\mathbb{C}}$ ולכן $H \subseteq H_{\mathbb{C}}y^{-1}$. אז מכך ש־$H_{\mathbb{C}} \cdot y^{-1}$ סגורה זריצקי נובע $H_{\mathbb{C}} \subseteq H_{\mathbb{C}}y^{-1}$. נקבל $H_{\mathbb{C}}y \subseteq H_{\mathbb{C}}$ ולכן $H_{\mathbb{C}} \cdot H_{\mathbb{C}} \subseteq H_{\mathbb{C}}$, מה שמראה סגירות לכפל.
כעת, $H = H^{-1} \subseteq H_{\mathbb{C}}^{-1}$ לכן $H_{\mathbb{C}} \subseteq H_{\mathbb{C}}^{-1}$ ולכן $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{C}}^{-1}$. ■

הערה 4.4.6. אפשר לחשוב על $\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ כקבוצה סגורה זריצקי ב־$M_{n+1}\left(\mathbb{C}\right)$, ואז $\bar{G}^{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}$.

אפשר לעשות אותו דיון עם $\mathbb{R}$ (או כל שדה אחר) ולקבל עבור $G \leq \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)$ חבורה $G \leq G_{\mathbb{R}} \leq \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)$. אם נביט בשיכון $G \leq \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right) \leq \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ נקבל

$$G \leq G_{\mathbb{R}} \leq G_{\mathbb{C}}.$$

אז $I = I_{\mathbb{R}}\left(G\right) \subseteq A_{\mathbb{R}}^{n,n}$.
ראינו קודם שעבור $G \leq \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)$ קומפקטית מתקיים $G = G_{\mathbb{R}}$.

דוגמה 4.4.7. 1. מתקיים

$$O\left(n\right)_{\mathbb{C}} = O_n\left(\mathbb{C}\right) = \left\{A \in \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{C}\right) \;\middle|\; AA^t = I\right\}$$

וזאת אינה חבורה קומפקטית.

2. הרבה דוגמאות מוכרות מוגדרות כחבורות אלגבריות, עבור שדות שונים. למשל,

$$\mathsf{SL}_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathsf{SL}_n(\mathbb{C})$$
$$\mathsf{Sp}_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathsf{Sp}_n(\mathbb{C}).$$

תרגיל 13. עבור

$$O(n,k) = \left\{A \in \mathsf{GL}_{n+k}(\mathbb{R}) \;\middle|\; AI_{n,k}A^t = I_{n,k}\right\}$$

כאשר $I_{n,k} = \begin{pmatrix} {}_nI & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix}$ מתקיים

$$O(n,k)_{\mathbb{C}} \cong O_n(\mathbb{C}).$$

הערה 4.4.8. יש חבורות אלגבריות ממשיות שונות עם אותו המרכוב. למשל,

$$S^1_{\mathbb{C}} = \mathsf{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathsf{GL}_1(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}.$$

הערה 4.4.9. באופן כללי, $G_{\mathbb{C}}$ לא תלויה בשיכון, עד כדי איזומורפיזם.

דוגמה 4.4.10. מתקיים

$$S^1 = U(1) \le \mathsf{GL}_1(\mathbb{C}) \le \mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$$

ובשיכון שראינו

$$i(I(1)) = \mathsf{SO}(2) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2+b^2=1\right\}.$$

נקבל

$$I(\mathsf{SO}(2)) = \left\{r_{1,1}^2 + r_{1,2}^2 = 1, r_{1,1} = r_{2,2}, r_{1,2} = -r_{2,1}\right\}.$$

בשיכון $U(1) \hookrightarrow \mathsf{GL}_2(\mathbb{R}) \le \mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$ אם נבצע שינוי לינארי

$$x = a+ib, \quad y = a-ib$$

נקבל

$$a^2+b^2=1 \leftrightarrow xy=1.$$

זה מתרחב להסבר אלגברי לכך שמתקיים

$$U(n)_{\mathbb{C}} = \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

4.5 חזרה לחבורות קומפקטיות

תהי $G \le \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ קומפקטית. ראינו שאפשר להניח $G \le \mathsf{O}(n)$ עד כדי איזומורפיזם. אז $G = G_{\mathbb{R}}$ ומתקיים $G_{\mathbb{C}} \le O(n)_{\mathbb{C}} = O_n(\mathbb{C})$.
מתקיים

$$O_n(\mathbb{C}) \cap U(n) = \left\{A \in M_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; \hat{A} = \left(A^t\right)^{-1} = A\right\} = \mathsf{O}(n).$$

נובע מכך כי $G_{\mathbb{C}} \cap U(n) = G$.
יתרה מכך, אם $p \in I_{\mathbb{C}}(G) \le A_{\mathbb{C}}^{n,n}$, לכל $g \in G \le \mathsf{GL}_{n(\mathbb{R})}$ מתקיים

$$\bar{p}(g) = \overline{p(g)} = \bar{0} = 0$$

לכן $\bar{p} \in I_{\mathbb{C}}(G)$. לכן לכל $h \in G_{\mathbb{C}}$ מתקיים

$$p\left(\bar{h}\right) = \overline{\bar{p}(h)} = \bar{0} = 0$$

לכן $\hat{h} \in G_{\mathbb{C}}$. נקבל כי $G_{\mathbb{C}}$ סגורה תחת הצמדת מטריצות.
מכך נובע גם שאם $h \in G_{\mathbb{C}}$ אז $\hat{h}^t = h^* \in G_{\mathbb{C}}$, כי יודעים ש־$G_{\mathbb{C}} \le O_n(\mathbb{C})$. לכן $h^t = h^{-1} \in G_{\mathbb{C}}$. לסיכום, הצמדה מרוכבת $\sigma(A) = (A^*)^{-1}$ מצטמצמת להומומורפיזם $G_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ שהיא אינוולוציה, ומתקייה

$$G_{\mathbb{C}}^{\sigma} = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid \sigma(g) = g\} = G_{\mathbb{C}} \cap U(n) = G.$$

הערה 4.5.1. באופן כללי ניתן להניח $G \le U(n)$. עדיין מתקיים $G_{\mathbb{C}} \le \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$. עדיין מתקיים במקרה זה $G_{\mathbb{C}} \le \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ ו־$G_{\mathbb{C}}$ עדיין סגורה תחת σ. גם מתקיים $G_{\mathbb{C}}^{\sigma} = G_{\mathbb{C}} \cap U(n) = G$.

4.6 חבורות רדוקטיביות

הגדרה 4.6.1 (חבורה רדוקטיבית). תהי $G \leq \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$. נגדיר כי G חבורה אלגברית רדוקטיבית אם היא סגורה תחת $A \mapsto A^*$ או איזומורפית לחבורה כזאת.

ראינו שעבור G קומפקטית, $G_{\mathbb{C}}$ אלגברית מרוכבת רדוקטיבית.

דוגמה 4.6.2.
1. $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$
2. $\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})$
3. $\mathsf{SO}_n(\mathbb{C})$
4. נסמן
$$\mathsf{Sp}_n(\mathbb{C}) = \left\{X \in \mathsf{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^t J + JX = 0\right\} = \left\{X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \,\middle|\, A^t = -D, B^t = B, C^t = C\right\}$$
כאשר $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ {}_n{-I} & 0 \end{pmatrix}$, ונקרא לה החבורה הסימפלקטית.
5. תהי
$$G = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathsf{GL}_{n+k}(\mathbb{C}) \,\middle|\, \det(AB) = 1\right\}.$$
6. חוץ מהמשפחות הנ"ל יש

הערה 4.6.3. מרכוב הוא שקילות קטגורית בין הקטגוריה של חבורות לי קומפקטיות מעל $\mathbb{R}$ לבין זאת של חבורות לי אלגבריות מרוכבות רדוקטיביות (ומורפיזמים שלהן כיריעות מרוכבות).
לא הגדרנו את $\varphi_{\mathbb{C}} \colon G_{\mathbb{C}} \to H_{\mathbb{C}}$.

הערה 4.6.4. יכולנו לא לדון בגיאומטריה אלגברית. תהי G קומפקטית קשירה ומשוכנת כמו קודם ב־$O(n)$ או $U(n)$. נכתוב $\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}(G)$ כאשר $i\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g} = \{0\}$. יכולנו להגדיר $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$. באופן כללי יותר, עבור אלגברת לי $\mathfrak{g}$ נוכל לבנות
$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}.$$
אז נוכל לקחת
$$G_{\mathbb{C}} := \Gamma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \leq \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$$
וראינו שזה בהכרח המרכוב כפי שהגדרנו אותו.

הערה 4.6.5. עבור $G \leq \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ שאינה קומפקטית, לא תמיד נקבל $G_{\mathbb{C}}$ שבלתי־תלויה בשיכון.

4.7 אלגבראות לי של חבורות קומפקטיות

ראינו שקומפקטיות היא תכונה די חזקה. נרצה לשאול האם אפשר לאפיין קומפקטיות של G בעזרת תכונות של $\mathfrak{g} := \mathsf{Lie}(G)$. נרצה לשאול גם האם אפשר לסווג אלגבראות לי של חבורות קומפקטיות.
אצלנו $\mathsf{Lie}(G)$ הייתה מרחב וקטורי ממשי, אבל אפשר לדבר גם על אלגבראות לי מרוכבות. נסתכל על אלגברת לי $\mathfrak{g}$ מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
נזכיר שתת־מרחב $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$ נקרא אידאל אם $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$.
נכתוב $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ אם יש פירוק כמרחבים וקטוריים ו־g_1, g_2 תת־אלגבראות. אם $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ כאשר $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \trianglelefteq \mathfrak{g}$, מתקיים
$$[(X, 0), (0, Y)] = ([X, 0], [0, Y]) = (0, 0) = 0.$$

הגדרה 4.7.1 (אלגברת לי רדוקטיבית). אלגברת לי $\mathfrak{g}$ תיקרא *רדוקטיבית* אם לכל אידאל $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ קיים אידאל $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ כך ש־$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.

הערה 4.7.2. עבור V מרחב וקטורי ו־$W \leq V$ הדבר הטבעי לעשות במקום לקחת משלום הוא להסתכל על V/W. אבל, אם V מרחב מכפלה פנימית זה איזומורפי ל־$W^{\perp} \leq V$. נחשוב על אלגבראות לי רדוקטיביות כאנלוג לאלגבראות לי.

דוגמה 4.7.3. תהי
$$\mathfrak{g} = \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\right\}$$
ויהי
$$\mathfrak{a} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\right\}.$$
אפשר לבדוק שאין משלים ישר ל־$\mathfrak{a}$.

תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי רדוקטיבית. ניקח $\mathfrak{a}_1 \leq \mathfrak{g}$ אידאל מינימלי שונה מאפס. נכתוב $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}$ ונמשיך וניקח $\mathfrak{a}_2 \leq \mathfrak{b}$ אידאל מינימלי. אז $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{b}'$ (בדקו או תקנו).
נבחר

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{b}' = \mathfrak{a}_2 \oplus (\mathfrak{b}' \oplus \mathfrak{a}_1) \oplus (\mathfrak{b}' \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b})$$

ונמשיך כל כדי לקבל

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_k$$

כאשר $\mathfrak{a}_i$ אידאלים מינימליים.

עובדה 4.7.4. *הפירוק הנ"ל יחיד עד כדי איזומורפיזם.*

הערה 4.7.5. יכולנו להגדיר באופן שקול שאלגברת לי רדוקטיבית היא סכום ישר של אלגבראות לי שאין להן אידאלים לא טריוויאליים. אלו לא בדיוק אלגבראות לי פשוטות למחצה כי ל־$\mathbb{F}$ אין אידאלים לא טריוויאליים, אבל היא אבלית ולכן אינה פשוטה.

טענה 4.7.6. *תהי G חבורת לי קומפקטית. אז $\mathsf{Lie}\,(G)$ רדוקטיבית.*

הוכחה. תהי $\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}\,(G)$ ויהי

$$\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}} \colon G \to \mathsf{GL}\,(\mathfrak{g})\,.$$

אז $\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}\,(G)$ חבורת לי קומפקטית. לכן קיימת מכפלה פנימית על $\mathfrak{g}$ כמרחב ממשי כך שמתקיים

$$\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}\,(G) \leq O_{\langle\cdot,\cdot\rangle}\,(\mathfrak{g})\,.$$

אז

$$\mathsf{ad}\,(\mathfrak{g}) = \mathsf{Lie}\,(\mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}\,(G)) \leq O_{\langle\cdot,\cdot\rangle}\,(\mathfrak{g}) \cong \mathsf{Lie}\,(O\,(n))$$

ולכל $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ נקבל

$$\langle \mathsf{ad}\,(X)\,(Y)\,, Z\rangle = \langle Y, -\,\mathsf{ad}\,(X)\,(Z)\rangle\,.$$

עבור אידאל $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$ מתקיים $\mathsf{ad}\,(\mathfrak{g})\,(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$. ניקח $\mathfrak{a}^{\perp} \leq \mathfrak{g}$ להיות המשלים האורתוגונלי ביחס למכפלה הפנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle$. נקבל

$$\mathsf{ad}\,(\mathfrak{g})\,\left(\mathfrak{a}^{\perp}\right) \subseteq \mathfrak{a}^{\perp}\,.$$

אז $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ פירוק לאידאלים. ■

טענה 4.7.7. *תהי $\mathfrak{g} \leq M_n\,(\mathbb{C})$ אלגברת לי שסגורה תחת $X \mapsto X^*$. אז $\mathfrak{g}$ רדוקטיבית.*

הוכחה. יהי $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ אידאל. אפשר להגדיר על $M_n\,(\mathbb{C})$ מכפלה פנימית

$$\langle X, Y\rangle = \begin{cases} \Re\,(\mathsf{tr}\,(XY^*)) & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \mathsf{tr}\,(XY^*) & \mathbb{F} = \mathbb{C} \end{cases}\,.$$

זאת מצטמצמת למכפלה פנימית גם על $\mathfrak{g}$. מתקיים

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{ad}\,(Z)\,X, Y\rangle &= \mathsf{tr}\,(ZXY^* - XZY^*) \\ &= \mathsf{tr}\,(XY^*Z - XZY^*) \\ &= \mathsf{tr}\,(X\,[Y^*, Z]) \\ &= \mathsf{tr}\left(X\,[Y, Z^*]^*\right) \\ &= \langle X, -\,\mathsf{ad}\,(Z^*)\,(Y)\rangle \end{aligned}$$

ומסיימים כמו בהוכחה הקודמת על ידי לקיחת $\mathfrak{a}^{\perp}$. ■

הערה 4.7.8. עבור G אלגברית מרוכבת רדוקטיבית, נקבל שגם $\mathsf{Lie}\,(G)$ רדוקטיבית. ההיך למעשה גם נכון. עבור $\mathfrak{g}$ מרוכבת רדוקטיבית יש G אלגברית מרוכבת רדוקטיבית כך ש־$\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}\,(G)$.

הערה 4.7.9. אם נסתכל על חבורת לי אבלית, למשל $G = \left(S^1\right)^n$, נקבל אלגברת לי אבלית, במקרה שלנו $\mathsf{Lie}\,\left(\left(S^1\right)^n\right) \cong \mathbb{R}^n$. כאן זאת אלגברת לי רדוקטיבית כי כל תת־מרחב הוא אידאל, אבל $\mathsf{Lie}\,((\mathbb{R}^n, +)) \cong \mathbb{R}^n$. אין סיכוי לזהות את החבורה מאלגברת לי שלה.

4.8 אלגבראות פשוטות־למחצה ותבנית Killing

הגדרה 4.8.1 (אלגברת לי פשוטה). אלגברת לי $\mathfrak{g}$ תיקרא *פשוטה* אם היא לא אבלית ואין לה אידאלים לא טריוויאליים.

הגדרה 4.8.2 (אלגברת לי פשוטה למחצה). אלגברת לי $\mathfrak{g}$ נקראת *פשוטה למחצה* אם היא איזומורפית לסכום ישר $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_k$ כך שכל $\mathfrak{a}_i$ פשוטה.

מסקנה 4.8.3. *אם $\mathfrak{g}$ רדוקטיבית, אפשר לכתוב $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathsf{ss}} \oplus Z(\mathfrak{g})$ כאשר $\mathfrak{g}_{\mathsf{ss}}$ פשוטה למחצה וכאשר*

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] = 0\}.$$

הוכחה. נכתוב

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_k \oplus \mathfrak{a}_{k+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$$

כאשר $\mathfrak{a}_i$ לא אבלי כאשר $i \leq k$ ואיזומורפי ל־$\mathbb{F}$ עבור $i > k$. מתקיים

$$Z(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in [n]} Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}_i$$

ו־$Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}_i \trianglelefteq \mathfrak{a}_i$. נקבל

$$Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}_i = \begin{cases} {}_i\mathfrak{a} i > k \\ \{0\} i \leq k \end{cases}.$$

נכתוב $Z(g) = \bigoplus_{i>k} \mathfrak{a}_i$ וגם

$$_i\mathfrak{g}_{\mathsf{ss}} = \bigoplus_{i \in [k]} \mathfrak{a}.$$

■

מסקנה 4.8.4. *$\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה אם ורק אם $\mathfrak{g}$ רדוקטיבית וגם $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$.*

הגדרה 4.8.5 (תבנית Killing). עבור אלגברת לי $\mathfrak{g}$ נגדיר תבנית בילינארית סימטרית

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathbb{F} \\ (X, Y) &\mapsto \mathsf{tr}(\mathsf{ad}(X)\,\mathsf{ad}(Y)) \end{aligned}.$$

הערה 4.8.6. מתקיים

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}}([Z, X], Y) &= \mathsf{tr}([\mathsf{ad}(Z), \mathsf{ad}(X)]\,\mathsf{ad}(Y)) \\ &= B_{\mathfrak{g}}(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

ובפרט

$$\mathsf{rad}(\mathfrak{g}) \coloneqq \left\{X \in \mathfrak{g} \mid B_{\mathfrak{g}(X, \mathfrak{g})=0}\right\} \trianglelefteq \mathfrak{g}.$$

משפט 4.8.7 (קריטריון Cartan). *$\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה אם ורק אם $\mathsf{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, כלומר אם ורק אם $B_{\mathfrak{g}}$ לא־מנוונת.*

הוכחה. אם $B_{\mathfrak{g}}$ היא תבנית לא־מנוונת נוכיח ש־$\mathfrak{g}$ רדוקטיבית באותה טכניקה כמו בהוכחות הקודמות, עם שימוש בתבנית $B_{\mathfrak{g}}$. מכך ש־$Z(\mathfrak{g}) \leq \mathsf{rad}(\mathfrak{g})$ נובע $Z(g) = \{0\}$.
בכיוון ההפוך מספיק להוכיח עבור $\mathfrak{g}$ פשוטה שמתקיים $\mathsf{rad}(\mathfrak{g}) \in \{0, \mathfrak{g}\}$ כלומר ש־$B_{\mathfrak{g}} \neq 0$, מה שלא נעשה. ■

נזכיר כי עבור אלגברת לי $\mathfrak{g}$ מתקיים $\mathsf{ad}(\mathfrak{g}) \leq \mathsf{End}(\mathfrak{g})$. נסמן

$$G_{\mathsf{ad}}(\mathfrak{g}) \coloneqq \Gamma(\mathsf{ad}(\mathfrak{g})) \leq \mathsf{GL}(\mathfrak{g})$$

ואז $\mathsf{Lie}(G_{\mathsf{ad}}(\mathfrak{g})) = \mathsf{ad}(\mathfrak{g})$. ראינו שלכל G קשירה כך שמתקיים $\mathsf{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ מתקיים גם

$$G / Z(G) \cong G_{\mathsf{ad}}(\mathfrak{g}).$$

אז מתקיים

$$G_{\mathsf{ad}}(\mathfrak{g}) = \mathsf{Ad}_{\mathfrak{g}}(G).$$

הגדרה 4.8.8 (הומומורפיזם של אלגבראות לי). תהיינה $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ אלגבראות לי. $\varphi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ יקרא הומומורפיזם של אלגבראות לי אם הוא לינארי וגם $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ לכל $X, Y \in \mathfrak{g}$.

סימון 4.8.9. נסמן $\text{Aut}(\mathfrak{g})=\text{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ ונקרא לאיברי קבוצה זאת אוטומורפיזמים של $\mathfrak{g}$.

הערה 4.8.10. $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ חבורה סגורה זריצקי.

טענה 4.8.11. *עבור $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה מתקיים* $G_{\text{ad}}(\mathfrak{g})=\text{Aut}(\mathfrak{g})^{\circ}$.

מסקנה 4.8.12. *עבור $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה מתקיים $Z(\mathfrak{g})=\{0\}$ ולכן $\text{ad}(\mathfrak{g})\cong\mathfrak{g}$. לכן כל G עם $\text{Lie}(G)\cong\mathfrak{g}$ היא כיסוי של* $\text{Aut}(\mathfrak{g})^{\circ}$.

הוכחה. יהי
$$\text{Der}(\mathfrak{g}):=\{\delta\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\mid\delta[X,Y]=[\delta X,Y]+[X,\delta Y]\}\le\text{End}(\mathfrak{g})$$
אוסף הדריבציות על $\mathfrak{g}$.
ראינו בתרגיל בית שמתקיים $\text{Der}(\mathfrak{g})=\text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{g}))$ וגם $\text{ad}(\mathfrak{g})\le\text{Der}(\mathfrak{g})$. אם נראה שוויון נקבל
$$\Gamma(\text{ad}(\mathfrak{g}))=\text{Aut}(\mathfrak{g})^{\circ}.$$
תהי $\delta\in\text{Der}(\mathfrak{g})$ ויהי $v_\delta\in\mathfrak{g}^*$. אז
$$\forall Y\in\mathfrak{g}\colon v_\delta(Y)=\text{tr}(\delta\circ\text{ad}(Y)).$$
ניתן לבדוק כי מתקיים $[\delta,\text{ad}(Y)]=\text{ad}(\delta(Y))$. מאי־ניוון של $B_{\mathfrak{g}}$ קיים $X\in\mathfrak{g}$ כך ש־$v_\delta(Y)=B_{\mathfrak{g}}(X,Y)$. אז $v_\delta=B_{\mathfrak{g}}(X,\cdot)$.
לכן מתקיים
$$\begin{aligned}B_{\mathfrak{g}}(\text{ad}(X)(Y),Z)&=B_{\mathfrak{g}}(X,[Y,Z])\\&=v_\delta([Y,Z])\\&=\text{tr}([\delta,\text{ad}(Y)]\,\text{ad}(Z))\\&=\text{tr}(\text{ad}(\delta(Y))\,\text{ad}(Z))\\&=B_{\mathfrak{g}}(\delta(Y),Z)\end{aligned}$$
ומאי־ניוון נקבל $\text{ad}(X)(Y)=\delta(Y)$ כלומר $\text{ad}(X)=\delta$. אז
$$\text{ad}(\mathfrak{g})=\text{Der}(\mathfrak{g}).$$
■

4.8.1 חזרה לחבורות קומפקטיות

טענה 4.8.13. *תהי G חבורת לי קומפקטית. עבור $\mathfrak{g}=\text{Lie}(G)$ מתקיים כי $B_{\mathfrak{g}}$ מוגדרת אי־חיובית. כלומר, היא שקולה לתבנית שמוגדרת על ידי מטריצה* $\text{diag}(-1,\dots,-1,0,\dots,0)$.

הוכחה. יהי $X\in\mathfrak{g}$. ראינו ש־$\text{ad}(X)^t=-\text{ad}(X)$. אז
$$(i\,\text{ad}(X))^*=i\,\text{ad}(X)$$
ולכן $i\,\text{ad}(X)$ הרמיטית. אז
$$-(\text{ad}(X))^2=(i\,\text{ad}(X))(i\,\text{ad}(X))^*$$
מוגדרת אי־שלילית. אז $B_{\mathfrak{g}}(X,X)\le0.$ ■

הערה 4.8.14. אם $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ אפשר לכתוב $B_{\mathfrak{g}}=B_{\mathfrak{g}_1}\oplus B_{\mathfrak{g}_2}$, כלומר
$$B_{\mathfrak{g}}((X_1,X_2),(Y_1,Y_2))=B_{\mathfrak{g}_1}(X_1,Y_1)+B_{\mathfrak{g}_2}(X_2,Y_2).$$

מסקנה 4.8.15. *תהי G קומפקטית ותהי*
$$\mathfrak{g}=\text{Lie}(G)=Z(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}_{\text{ss}}.$$
אז $B_{\mathfrak{g}_{\text{ss}}}$ אינה מנוונת, ולכן מוגדרת שלילית.
בפרט, אם G קומפקטית ו־$\mathfrak{g}=\text{Lie}(G)$ פשוטה למחצה, אז $B_{\mathfrak{g}}$ מוגדרת שלילית.

טענה 4.8.16. *עבור $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה, אם $B_{\mathfrak{g}}$ מוגדרת שלילית, $G_{\text{ad}}(\mathfrak{g})$ קומפקטית.*

הוכחה. נסמן $\langle x,y\rangle=-B_{\mathfrak{g}}(x,y)$. זאת מכפלה פנימית על $\mathfrak{g}$ ומתקיים $\text{ad}(\mathfrak{g})\le\text{Lie}\left(O_{\langle\cdot,\cdot\rangle}\right)$. אז $G_{\text{ad}}(\mathfrak{g})\le O_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ וזאת תת־חבורה סגורה ולכן קומפקטית. ■

משפט 4.8.17 (Weyl). *עבור $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה עם $G_{\text{ad}}(\mathfrak{g})$ קומפקטית, $\pi_1(G_{\text{ad}}(\mathfrak{g}))$ סופית.*

טענה 4.8.18. *כל G עם $\text{Lie}(G)\cong\mathfrak{g}$ היא כיסוי $\varphi\colon G\to G_{\text{ad}}(\mathfrak{g})$ עם $\ker\varphi$ סופי. אז G קומפקטית.*

מסקנה 4.8.19. *עבור G חבורת לי קשירה עם $\mathfrak{g}=\mathsf{Lie}\left(G\right)$ וגם $Z\left(\mathfrak{g}\right)=\left\{0\right\}$ מתקיים כי G קומפקטית אם ורק אם $B_{\mathfrak{g}}$ מוגדרת שלילית.*

לסיכום, תהי $\mathfrak{g}$ פשוטה־למחצה עם $B_{\mathfrak{g}}$ מוגדרת שלילית. הכיסוי פשוט־הקשר $G_{\mathsf{sc}}\left(\mathfrak{g}\right)$ של $G_{\mathsf{ad}}\left(\mathfrak{g}\right)$ הוא קומפקטי (ממשפט Weyl). אז אפשר לכתוב

$$\mathfrak{g}=\biguplus_{i\in[\ell]}\mathfrak{g}_i$$

עבור $\mathfrak{g}_i$ פשוטות. אז

$$G_{\mathsf{sc}}\left(\mathfrak{g}\right)\cong\prod_{i\in[\ell]}G_{\mathsf{sc}}\left(\mathfrak{g}_i\right)$$

מרחב פשוט־קשר כמכפלה של כאלו, מהיחידות.

אם G חבורת לי קומפקטית קשירה כללית, ניתן לכתוב

$$\mathsf{Lie}\left(G\right)\cong Z\left(\mathsf{Lie}\left(G\right)\right)\oplus\bigoplus_{i\in[\ell]}\mathfrak{g}_i$$

כאשר $\dim Z\left(\mathfrak{g}\right)=m$ ו־$\mathfrak{g}_i$ פשוטות. יהי

$$.\tilde{G}\to G$$

הכיסוי האוניברסלי. מתקיים

$$.\tilde{G}\cong\mathbb{R}^m\times\prod_{i\in[\ell]}G_{\mathsf{sc}}\left(\mathfrak{g}_i\right)$$

אז G מנה של $\tilde{G}$ כזו ב־$Z\le Z\left(\tilde{G}\right)$ דיסקרטית.

נשארנו עם סיווג $\mathfrak{g}$ פשוטות עבורן $B_{\mathfrak{g}}$ מוגדרת־שלילית.

הבחנה 4.8.20. עבור $\mathfrak{g}$ ממשית מתקיים

$$.B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}\big|_{\mathfrak{g}}=B_{\mathfrak{g}}$$

אז $\mathfrak{g}$ פשוטה־למחצה אם ורק אם $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ פשוטה־למחצה.

משפט 4.8.21. *לכל $\mathfrak{g}$ מרוכבת פשוטה־למחצה קיימת $\mathfrak{g}_0$ פשוטה־למחצה עם $B_{\mathfrak{g}_0}$ מוגדרת־שלילית כך שמתקיים $.(\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}$*

מסקנה 4.8.22. *אם נדע לסווג את $\mathfrak{g}$ אלגבראות לי מרוכבות פשוטות־למחצה, נדע מהן כל חבורות לי הקומפקטיות הקשירות, עד כדי כיסויים.*

דוגמה 4.8.23. $\mathsf{SU}\left(n\right)$ פשוטת־קשר עם אלגברת לי פשוטה.

דוגמה 4.8.24. $\mathsf{SO}\left(n\right)$ עם אלגברת לי פשוטה.

דוגמה 4.8.25. $\mathsf{Sp}\left(n\right)$ פשוטת קשר ועם אלגברת לי פשוטה.

הערה 4.8.26. עד כדי כיסויים, אלה כל החבורות הקשירות הקומפקטיות ה"קלאסיות" עם אלגברת לי פשוטה. יש עוד 5 אלגברות לי פשוטות שיש להן חבורה קומפקטית.

דוגמה 4.8.27. על מרחב־ממשי 8־מימדי V אפשר להגדיר העתקה $*\colon V\times V\to V$ שנותן ־V מבנה של אלגברה לא־אסוציאטיבית שנקראת האוקטוניונים. נגדיר

$$.G=\left\{A\in\mathsf{GL}\left(V\right)\mid A\left(v\right)*A\left(w\right)=A\left(v*w\right)\right\}$$

חבורה זאת מסומנת G_2 והיא חבורת האוטומורפיזמים של האוקטוניונים.