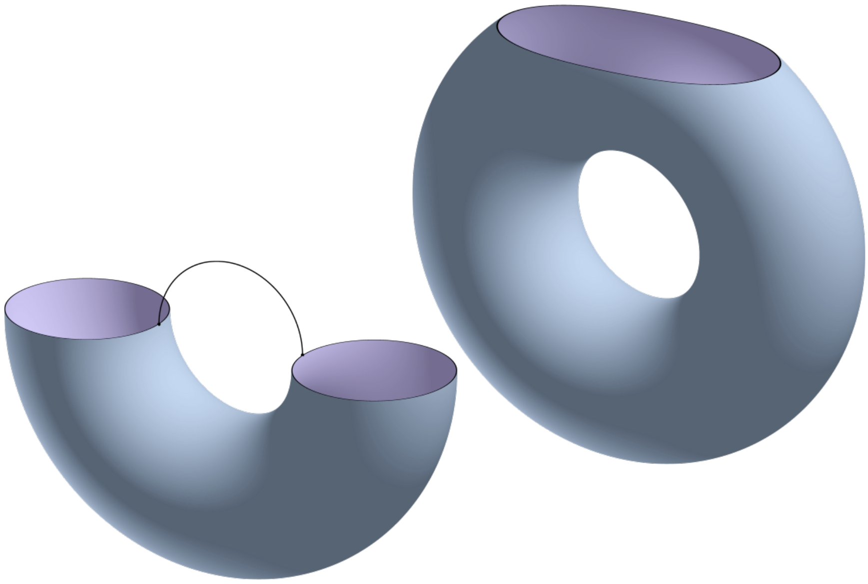
סיכומי הרצאות בתורת מורס
אביב 2021, הטכניון

הרצאותיו של מיכאל חנבסקי
סוכמו על ידי אלעד צורני



חלקים שקולים הומוטופית של הטורוס.

עדכון אחרון 5 במאי 2021

תוכן העניינים

הקדמה

הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות.
להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל tzorani.elad@gmail.com.
אלעד צורני.

ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

J. Milnor: Morse Theory

A. Banyaga, D. Hurtubise: Lectures on Morse Homology

M. Audin, M. Damian: Morse Theory and Floer Homology

ציון

הציון בקורס ינתן עבור מבחן בית שעשוי (ועשוי לא) לכלול מעבר בעל פה על הפתרונות.

דרישות קדם

דרישת הקדם לקורס היא יריעות דיפרנציאביליות. היכרות עם טופולוגיה אלגברית מועילה אך אינה חיונית.

פרק 1

מבוא

1.1 מוטיבציה

דוגמה 1.1.1. באיור 1.1 הנקודות המסומנות מאדום הן הנקודות הקריטיות של F. נסמן

$$\mathbb{T}^a \coloneqq \left\{p \in \mathbb{T}^2 \;\middle|\; F(p) < a\right\}.$$

- עבור $a \leq F(m)$ נקבל $\mathbb{T}^a = \varnothing$.
- עבור $F(m) < a \leq F(x)$ נקבל $\mathbb{T}^a \cong D^2$. ראו איור 1.2.
- עבור $F(x) < a \leq F(y)$ נקבל $\mathbb{T}^a \cong S^1 \times (0,1)$. ראו איור
- עבור $F(y) < a \leq F(M)$ נקבל $\mathbb{T}^a \cong \mathbb{T}^2 \setminus D^2$.
- עבור $F(M) < a$ נקבל $\mathbb{T}^a = \mathbb{T}^2$.

מסקנה 1.1.2. אם ב־$[a,b)$ אין ערכים קריטיים אז $\mathbb{T}^a \cong \mathbb{T}^b$.

נשאל איך משתנה הטופולוגיה במעבר בנקודות הקריטיות.

- במעבר דרך $F(m)$ יש הוספת דיסק.
- כאשר $a = x - \varepsilon$ עבור ε מספיק קטן, קו הגובה יראה באיור 1.4 אם נדביק את $\mathbb{T}^a$ על פס כבאיור 1.5 נקבל יריעה דיפאומורפית ל־$\mathbb{T}^x + \varepsilon$.
- כאשר $a = y + \varepsilon$ עבור ε מספיק קטן נקבל כי $\mathbb{T}^a$ כבאיור 1.6. אם נדביק את העיגולים באידומים באיור על פס כבאיור 1.7 נקבל יריעה דיפאומורפית ל־$\mathbb{T}^a$ עבור $a = y + \varepsilon$.
- במעבר דרך $F(M)$ יש הדבקה של D^2 לשפה של $\mathbb{T}^{F(M)-\varepsilon}$.

ראינו שבמקרה של הטורוס יש לנקודות הקריטיות חשיבות רבה במבנה של היריעה. אנחנו נראה בקורס שאפשר לשחזר אינווריאנטים כמו ההומולוגיה של יריעה בעזרת הבנה של הנקודות הקריטיות. במקרה של הטורוס, מתקיים

$$\begin{aligned} H_0\left(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}\right) &= \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\left\langle m \right\rangle \\ H_1\left(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}\right) &= \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}\left\langle x, y \right\rangle \\ H_2\left(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}\right) &= \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\left\langle M \right\rangle. \end{aligned}$$

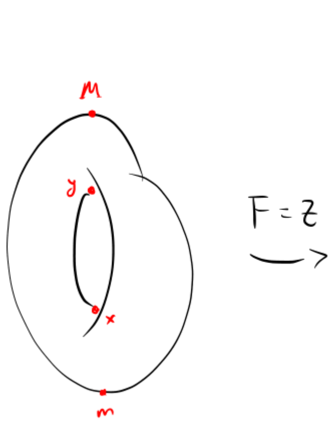
נדבר על דרך כללית להבין הומולוגיה וקוהומולוגיה של יריעות בעזרת נקודות קריטיות. נדבר על דואליות פואנקרה, על מבנה של כפל בקוהומולוגיה, על העתקות טבעיות, על מקדמים בחוגים שונים, וכו'.
בין היתרונות של תורת מורס הם שהיא נותנת את ה(קו)הומולוגיות הסטנדרטיות על יריעות, ושהיא עובדת עבור אוביקטים אינסוף־מימדיים.

דוגמה 1.1.3 (Path-Space). תהי M יריעה רימנית ויהי

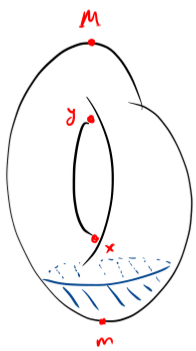
$$\mathcal{P}(x,y) = \left\{\gamma\colon\ [0,1] \to M \;\middle|\; \substack{\gamma(0)=x \\ \gamma(1)=y}\right\}.$$

על מרחב זה אפשר להגדיר כל מני פונקציות, למשל

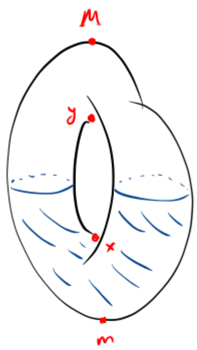
$$\begin{aligned} \mathsf{len}\colon \mathcal{P}(x,y) &\to \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \int_0^1 \left\|\dot{\gamma}\right\| \mathsf{d}s. \end{aligned}$$



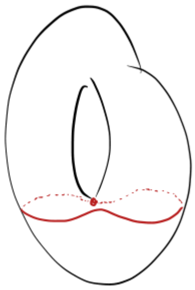
איור 1.1: העתקת גובה מהטורוס, והנקודות הקריטיות שלה.



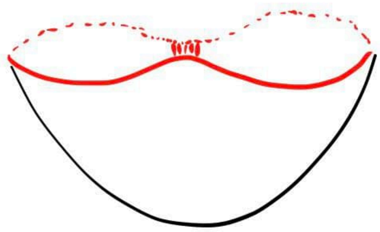
איור 1.2: חתך של הטורוס שדיפאומורפי ל־D^2.



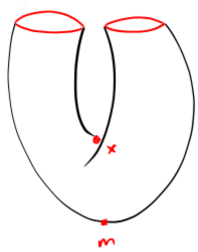
איור 1.3: חתך של הטורוס שדיפאומורפי ל־$S^1 \times (0,1)$.



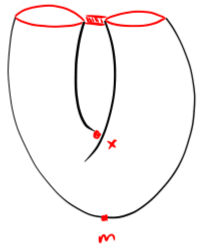
איור 1.4: קו גובה על הטורוס קרוב לנקודת אוכף.



איור 1.5: הדבקת חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוכף.



איור 1.6: חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוכף.



איור 1.7: הדבקת חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוכף.

אפשר לנסות לעבוד עם תורת מורס על פונקציה כזאת ולהבין את המרחב $\mathcal{P}\left(x,y\right)$ בעזרת הנקודות הקריטיות של len. במקרה הזה, הנקודות הקריטיות הן קווים גיאודזיים. הן אינן מבודדות וקשה להסיק דברים על המרחב.
במקרה של

$$\varphi\left(\gamma\right)=\int_0^1\left\|\dot{\gamma}\right\|^2\mathsf{d}s$$

הנקודות הקריטיות יהיו קווים גיאודזים עם מהירות קבועה. אז הנקודות הקריטיות בדרך כלל יהיו מבודדות, ויהיה אפשר להשתמש בתורת מורס.

1.2 נקודות קריטיות

במהלך הקורס נניח כי כל המבנים חלקים. התוצאות נכונות באופן כללי יותר עבור יריעות $\mathcal{C}^2$, שדות וקטוריים $\mathcal{C}^1$ ופונקציות דיפרנציאביליות $\mathcal{C}^2$.

הגדרה 1.2.1 (נקודה קריטית). תהי $F\colon M\to N$ העתקה חלקה בין יריעות חלקות. נקודה $p\in M$ נקראת קריטית אם $Df_p\colon T_pM\to T_{f(p)}N$ אינה על.

הערה 1.2.2. 1. במסגרת הקורס נדון בפונקציות $F\colon M\to\mathbb{R}$. אז $p\in M$ נקודה קריטית אם ורק אם

$$DF_p\colon T_pM\to T_{f(p)}\mathbb{R}$$

אינה על. כיוון ש־$T_{f(p)}\mathbb{R}$ מרחב לינארי חד־מימדי זה שקול לכך שמתקיים $DF_p=0$.

2. ניתן לזהות $T_{f(p)}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$ בדרך קנונית. נגדיר את ההרכבה של העתקה זאת על DF_p להיות הנגזרת החיצונית של F בנקודה p. נראה זאת בדיאגרמה הבאה.

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "DF_p"] \arrow[dr, dotted, "\mathsf{d}F_p"'] & T_{f(p)}\left(\mathbb{R}\right) \arrow[d, "\wr"'] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

נקבל כי $p\in M$ נקודה קריטית אם ורק אם $\mathsf{d}F_p=0$.

זאת תהיה ההגדרה שנעבוד איתה במשך רוב הקורס.

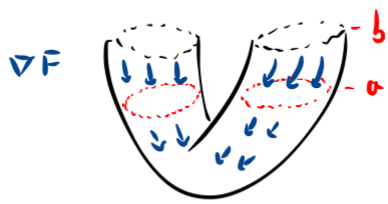
3. אם נפתח את ההגדרה של הנגזרת החיצונית נקבל כי $p\in M$ נקודה קריטית אם ורק אם $\frac{\partial F}{\partial v}\left(0\right):=\mathsf{d}F_p\left(v\right)=0$ לכל $v\in T_pM$. מכך נסיק כי נקודות מינימום ומקסימום הן נקודות קריטיות. כמו כן, ניתן לראות מכך כי נקודות אוכף הן נקודות קריטיות.

דוגמה 1.2.3. יהי $M\subseteq\mathbb{R}^3$ משטח ותהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ פונקציית גובה. נגדיר

$$f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto z$$

ואז $F=f|_M$.
אז $\mathsf{d}f=\mathsf{d}z$ ומתקיים

$$\mathsf{d}F_p=\mathsf{d}f|_{T_pM}=\mathsf{d}z|_{T_pM}\,.$$



איור 1.8: זרימה על הטורוס לאורך הגרדיאנט.

אז

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_p = 0 &\iff \mathrm{d}z|_{T_pM} = 0 \\ &\iff T_pM = \ker(\mathrm{d}z) \\ &\iff T_pM \parallel \mathrm{Span}(x,y) \\ &\iff T_pM = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp} \end{aligned}$$

$$T_pM^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

בדוגמה באיור 1.1 נקבל שהנקודות הקריטיות הן בדיוק אלו המסומנות. אלו הנקודות בהן הנורמל למישור הוא כפולה של z.

כעת נרצה לעבוד עם שדות וקטוריים במקום נגזרות חיצוניות. במקרה זה אפשר להסתכל על זרימות לאורך שדה ועל הומוטופיות, מה שחסר במקרה של הנגזרת החיצונית. נתחיל בהגדרה של גרדיאנט ובקשר שלו לנגזרת החיצונית.

הגדרה 1.2.4 (גרדיאנט). תהי (M,g) יריעה רימנית. ותהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה. לכל $p \in M$, g משרה איזומורפיזם

$$\begin{aligned} g\colon T_pM &\xrightarrow{\sim} T_p^*M \\ v &\mapsto g(v,\cdot) \end{aligned}.$$

הגרדיאנט של F שנסמנו $\nabla_g F$ או בדרך כלל ∇F מוגדר להיות השדה היחיד המקיים

$$g(\nabla F,\cdot) = \mathrm{d}F.$$

הערה 1.2.5. הגרדיאנט ∇F תלוי בבחירת g!

הערה 1.2.6. מתקיים

$$\mathrm{d}F_p = 0 \iff \nabla_g F_{(p)} = 0$$

וזה בלתי־תלוי בבחירת g.
נקבל מכך כי $p \in M$ נקודה קריטית עבור F אם ורק אם $\nabla F_{(p)} = 0$.

טענה 1.2.7. תהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ ויהיו $a < b$ כך שקיים $\varepsilon > 0$ עבורו הקטע $(a-\varepsilon, b)$ אינו מכיל ערכים קריטיים. לדוגמא ראו איור **??**.
אז יש דיפאומורפיזם $M^a \cong M^b$.

הוכחה. נרצה לנרמל את הגרדיאנט כדי שמהירות הזרימה תהיה אחידה. כדי לא לחלק באפס, נאפס את השדה מתחת לגובה $a-\varepsilon$.

תהי g מטריקה רימנית על M. נסמן $X=-\nabla_g F$. עבור $p\in M^b$ נסתכל על $\frac{X_p}{\|X_p\|^2}$. זה מגדיר שדה וקטורי שלאורכו F יורדת במהירות 1.[1]
תהי

$$\rho\colon\ (-\infty,b)\to\mathbb{R}$$

חלקה עבורה

$$\begin{aligned}\rho|_{-\infty,a-\varepsilon}&\equiv 0\\ \rho|_{(a,b)}&\equiv 1\\ \rho'&\geq 0\end{aligned}\quad.$$

אז נוכל להגדיר

$$X'=\frac{\rho X_p}{\|X_p\|^2}$$

לכל $F(p)\in(a-\varepsilon,b)$ ונרחיב את X' מתחת לגובה $a-\varepsilon$ עם אפסים. למד"ר המוגדרת על ידי X' יש פתרונות לכל זמן $t\geq 0$.
תהי $\varphi_t\colon M^b\to M^b$ זרימה של X'. אז $\varphi_{b-a}\colon M^b\xrightarrow{\sim}M^a$ דיפאומורפיזם. ■

1.3 הדבקת ידיות

1.3.1 פונקציות מורס

נרצה כעת להבין מה קורה איך היריעות M^a,M^b משתנות כאשר עברו מ־a ל־b דרך נקודה קריטית. זה דבר מסובך מאוד באופן כללי ולכן ניאלץ לצמצם את הדיון לנקודות קריטיות שאינן מנוונות.

הגדרה 1.3.1 (הסיאן). תהי M יריעה רימנית ותהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה. לכל $p\in$ נגדיר

$$\mathsf{Hess}_p\left(F\right):T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$$

על ידי $\mathsf{Hess}\left(F\right)=\nabla\,\mathsf{d}F$ כאשר ∇ הוא ה־Levi-Civita Connection.
הגדרה מפורשת יותר היא

$$\begin{aligned}\mathsf{Hess}_p\left(F\right)\left(X_p,Y_p\right)&=\left\langle\nabla_X\mathsf{grad}\left(F_p\right),Y_p\right\rangle\\&=L_XL_Y\left(F\right)-\mathsf{d}F_p\left(\nabla_XY\right)\end{aligned}$$

עבור שני שדות וקטוריים X,Y שמוגדרים סביב p.

הערה 1.3.2. הבחירה של ההסיאן תלויה בבחירה של המטריקה הרימנית.
במקרה הפרטי ש־p נקודה קריטית מתקיים $\mathsf{d}F_p=0$ ואז

$$.\mathsf{Hess}_p\left(F\right)\left(X_p,Y_p\right)=L_XL_Y\left(F\right)$$

בפרט, הערך של ההסיאן בנקודה הקריטית אינו תלוי בבחירה של המטריקה הרימנית.

הערה 1.3.3. אם p נקודה קריטית של F נוכל להגדיר את ההסיאן כהעתקה $T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ באופן הבא. יהיו $X,Y\in T_pM$. נרחיב את X,Y לשדות לוקליים $\tilde{X},\tilde{Y}$ סביב p. אז

$$.\mathsf{Hess}_p\left(F\right)\left(X,Y\right):=L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}}\left(F\right)\left(p\right)$$

הגדרה 1.3.4 (נגזרת לי). עבור שדה וקטורי $\tilde{Y}$ ונקודה $p\in M$ נגדיר

$$\begin{aligned}L_{\tilde{Y}}\left(F\right)\left(p\right)&=\lim_{t\to0}\frac{\left(f\left(\varphi_{\tilde{Y}}^t\left(p\right)\right)-f\left(p\right)\right)}{t}\\&=dF_p\left(\tilde{Y}_p\right)\\&=\frac{\partial F}{\partial\tilde{Y}}\left(p\right)\end{aligned}$$

כאשר $\varphi_{\tilde{Y}}$ הזרימה לפי $\tilde{Y}$.

[1] גיאומטרית, $\frac{X}{\|X\|}$ וקטור יחידה שמצביע בכיוון בו F עולה הכי מהר, ומהירות העליה לאורכו היא $\|X\|$. לכן כדי שהמהירות תהיה קבועה חלקנו ב־$\|X_p\|^2$.

הערה 1.3.5. נקבל מההגדרה כי

$$\begin{aligned}(L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}})(p) &= \mathsf{d}\left(L_{\tilde{Y}}F\right)_p\left(\tilde{X}_p\right)\\ &= \mathsf{d}\left(L_{\tilde{Y}}F\right)_p(X)\end{aligned}$$

ולכן $\mathsf{Hess}_p(F)$ אינו תלוי בבחירת ההרחבה $\tilde{X}$ של X.

נראה שההסיאן סימטרי ב־X,Y ונקבל מכך כי ההסיאן אינו תלוי בבחירת ההרחבה $\tilde{Y}$ של Y.

טענה 1.3.6.

$$\mathsf{Hess}_p(F)(X,Y) = \mathsf{Hess}_p(F)(Y,X).$$

הוכחה. מתקיים

$$\begin{aligned}\mathsf{Hess}_p(F)(X,Y) - \mathsf{Hess}_p(F)(Y,X) &= L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}}(F)_p - L_{\tilde{Y}}L_{\tilde{X}}(F)_p\\ &= L_{\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]}F_p\\ &= \cancelto{0}{\mathsf{d}F_p}\left(\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]_p\right)\\ &= 0\end{aligned}.$$

■

מסקנה 1.3.7. $\mathsf{Hess}_p(F)(X,Y)$ אינה תלויה בבחירת ההרחבות $\tilde{X},\tilde{Y}$.

תרגיל 1. בקואורדינטות מקומיות סביב p

$$\hat{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

מתקיים

$$\mathsf{Hess}_{\hat{p}}\left(\hat{F}\right) : T_{\hat{p}}U \times T_{\hat{p}}U \to \mathbb{R}.$$

אם נזהה $T_{\hat{p}}U \cong \mathbb{R}$ נקבל העתקה $(\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$. העתקה זאת מיוצגת על ידי המטריצה

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{p})\right)_{i,j\in[n]}$$

כמו בקורסי אינפי.

סימון 1.3.8. נסמן ב־$\mathsf{Crit}(F)$ את אוסף הנקודות הקריטיות של F.

הגדרה 1.3.9 (נקודה קריטית לא־מנוונת). $p \in \mathsf{Crit}(F)$ לא מנוונת *non-degenerate* אם $\mathsf{Hess}_p(F)$ תבנית לא מנוונת (באופן שקול, אם $\ker(\mathsf{Hess}_p) = \{0\}$, ובאופן שקול אם 0 אינו ערך עצמי).

דוגמה 1.3.10. תהי

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

ותהי

$$\begin{aligned}F\colon S^2 &\to \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &\mapsto z\end{aligned}.$$

תהי $p = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. זאת נקודה קריטית כי הנורמל לספירה ב־p מצביע למעלה.

נבחר קבוצה פתוחה U קטנה סביב p, ומפת קואורדינטות

$$\begin{aligned}\varphi\colon U &\to \mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}.$$

אז הצגה מקומית היא

$$\begin{aligned}\hat{F}\colon \varphi\left(U\right) &\to \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} &\mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}\end{aligned}$$

ואז

$$\mathrm{Hess}_0\left(\hat{F}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x^2}\left(0\right) & \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x\partial y}\left(0\right)\\ \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial y\partial x}\left(0\right) & \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial y^2}\left(0\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

לא מנוונת.
באופן דומה

$$\mathrm{Hess}_{\hat{s}}\left(\hat{F}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

הגדרה 1.3.11 (פונקציית מורס). $F\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה היא פונקציית מורס אם כל הנקודות הקריטיות שלה אינן מנוונות.

1.3.2 הלמה של מורס

עבור $F\colon M\to\mathbb{R}$ נוכל לקחת פיתוח טיילור של הצגה מקומית של F.

$$\begin{aligned}\hat{F}\left(x+\Delta x\right)&=\hat{F}\left(x\right)+\sum_{i\in[n]}\frac{\partial\hat{F}}{\partial x_i}\partial x_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j\in[n]}\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x_i\partial x_j}\Delta x_i\Delta x_j+O\left(\left\|\Delta x\right\|^3\right)\\ &=\hat{F}\left(x\right)+D\hat{F}\left(\Delta x\right)+\mathrm{Hess}_x\hat{F}\left(\Delta x,\Delta x\right)+O\left(\left\|\Delta x\right\|^3\right)\end{aligned}$$

אם x נקודה קריטית לא־מנוונת של $\hat{F}$ אז

$$D\hat{F}\left(\Delta x\right)=0.$$

הלמה של מורס אומרת שבמקרה זה אפשר לבחור קואורדינטות סביב x עבורן

$$O\left(\left\|\Delta x\right\|^3\right)=0.$$

זאת אומרת,

$$\hat{F}\left(x+\Delta x\right)=\hat{F}\left(x\right)+\mathrm{Hess}_x\left(\hat{F}\right)\left(\Delta x,\Delta x\right).$$

נפעיל את משפט סילבסטר כדי להביא את ההסיאן לצורה קנונית ונקבל מערכת קואורדינטות y לפיה

$$\hat{F}\left(y+\Delta y\right)=\hat{F}\left(y\right)-\sum_{i\in[k]}y_i^2+\sum_{i=k+1}^{n}y_i^2.$$

משפט 1.3.12 (הלמה של מורס). תהי $x\in Mn$ נקודה קריטית לא־מנוונת של $F\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה. קיימת מפת קואורדינטות $\left(U,\varphi\right)$ סביב x כך שמתקיים $\varphi\left(x\right)=0$ ושעבור

$$\hat{F}=F\circ\varphi^{-1}\colon\varphi\left(U\right)\to\mathbb{R}$$

מתקיים

$$\hat{F}\left(y\right)=\hat{F}\left(0\right)-\sum_{j\in[i]}y_j^2+\sum_{j=i+1}^{n}y_j^2.$$

הוכחה. נבחר מפה כלשהי $\left(U,\psi\right)$ סביב x. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $\psi\left(x\right)=0$. שינוי לינארי של הקואורדינטות משרה את אותו השינוי על $T_p\mathbb{R}^n$ לכל $p\in\psi\left(U\right)$. כלומר, אם

$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}^n\\ y&\mapsto Ay\end{aligned}$$

לינארית עבור $A\in M_n(\mathbb{R})$ אז

$$\begin{aligned} Df_p\colon T_p\mathbb{R}^n &\to T_p\mathbb{R}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}.$$

לפי משפט סילבסטר קיימת מטריצה מעבר $A\in M_n(\mathbb{R})$ שמלכסנת את $\text{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$. אם נפעיל על $\psi(U)$ החלפת קואורדינטות $y\mapsto Ay$ נקבל מפה חדשה $(U,A\cdot\psi)$ עבורה $A\cdot\psi(x)=0$ וגם

$$\text{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$$

מטריצה אלכסונית ללא אפסים ע האלכסון, כאשר $\hat{F}$ הצגה של F לפי $A\cdot\psi$. מכאן, נניח בלי הגבלת הכלליות שבחרנו מפה ψ לפיה $\text{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$ אלכסונית.
נמשיך את ההוכחה באינדוקציה על המימד.

בסיס, $n=1$**:** נסתכל על הצגה מקומית

$$\hat{F}(y)=\hat{F}(0)+\frac{1}{2}\hat{F}''(0)\,y^2+r(y)$$

עבור $r(y)\in O\left(\|y\|^3\right)$. אנו יודעים כי $r(y)$ פונקיה חלקה כצירוף פונקציות חלקות. כיוון ששתי הנגזרות הראשונות שלה מתאפסות ב־0 נקבל כי גם $\frac{r(y)}{y^2}$ פונקציה חלקה. אז נוכל לכתוב

$$\hat{F}(y)=\hat{F}(0)\pm Ky^2(1+\varepsilon(y))$$

כאשר

$$K=\left|\frac{1}{2}\hat{F}''(0)\right|>0$$

וכאשר

$$\varepsilon(y)=\frac{r(y)}{y^2K}\xrightarrow{y\to0}0.$$

נגדיר

$$y_1=\Theta(y)\coloneqq y\sqrt{K(1+\varepsilon(y))}.$$

אז $\Theta\colon y\to y_1$ מוגדרת היטב סביב $y=0$, וגם $\Theta'(0)=\sqrt{K}\neq0$. לכן Θ דיפאומורפיזם מקומי סביב $y=0$. נקבל כי

$$\begin{aligned} \hat{F}\circ\Theta^{-1}(y_1) &= \hat{F}(y) \\ &= \hat{F}(0)\pm Ky^2(1+\varepsilon(y)) \\ &= \hat{F}(0)\pm y_1^2 \end{aligned}$$

וזאת הצורה הרצויה.

צעד: אחרי פסח... ■