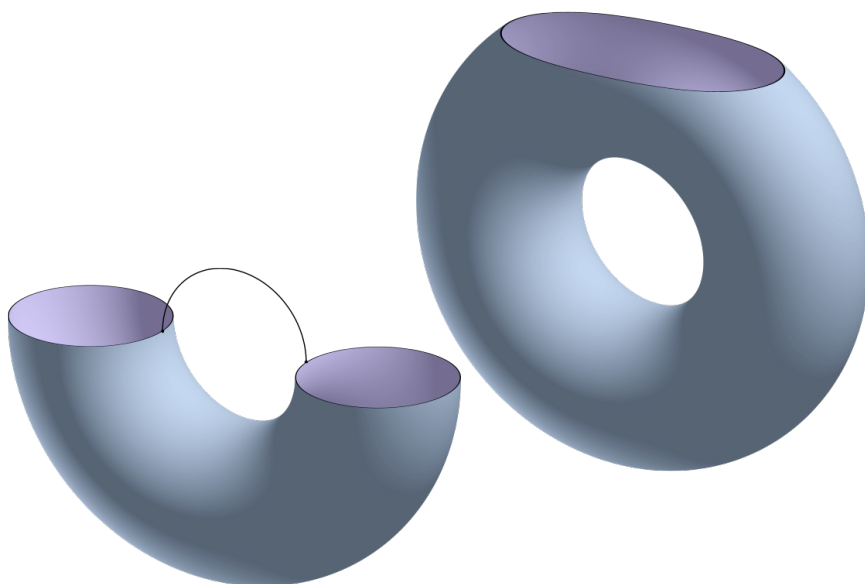


# סיכומי הרצאות בתורת מורס

אביב 2021, הטכניון

הרצאותיו של מיכאל חנבסקי  
סוכמו על ידי אלעד צורני



חלקים שקולים הומוטופית של הטורוס.

עדכון אחרון 17 ביוני 2021

# תוכן העניינים

iii	הקדמה
iii	הבהרה
iii	ספרות מומלצת
1	1 מבוא
1	1.1 מוטיבציה
4	1.2 נקודות קריטיות
6	1.3 הדבקת ידיות
6	1.3.1 פונקציות מורס
8	1.3.2 הלמה של מורס
13	1.3.3 שקילות של משטחים
14	1.3.4 הוספת נקודה קריטית
17	1.3.5 מעבר עד כדי דיפאומורפיזם
18	1.3.6 הוספת מספר נקודות קריטיות
18	1.3.7 שימושים
19	1.4 קיום פונקציות מורס
21	1.5 תתי-רעועות יציבות
26	1.6 קומפלקסי CW ותנאי Morse-Smale
28	1.6.1 הומולוגיית מורס
38	1.6.2 חישובי הומולוגיה
38	1.6.3 אי-תלות של $HM_*(F, \rho)$ ב- $(F, \rho)$
42	1.6.4 שימושים
45	1.7 קוהומולוגיית מורס
47	1.7.1 מכפלה בהומולוגיה
52	1.8 שימושים
52	1.8.1 נוסחת Künneth
53	1.9 הכללות של תורת מורס
54	1.10 הומולוגיית מורס עם מקדמים ב- $\mathbb{Z}$
56	2 תורת minimax

# הקדמה

## הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה מלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות. להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל [tzorani.elad@gmail.com](mailto:tzorani.elad@gmail.com). אלעד צורני.

## ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

**J. Milnor:** Morse Theory

**A. Banyaga, D. Hurtubise:** Lectures on Morse Homology

**M. Audin, M. Damian:** Morse Theory and Floer Homology

## ציין

הציין בקורס ינתן עבור מבחן בית שעשוי (ועשוי לא) לכלול מעבר בעל פה על הפתרונות.

## דרישות קדם

דרישת הקדם לקורס היא יריעות דיפרנציאביליות. היכרות עם טופולוגיה אלגברית מועילה אך אינה חיונית.



# פרק 1

## מבוא

### 1.1 מוטיבציה

**דוגמה 1.1.1.** באיור 1.1 הנקודות המסומנות מאדום הן הנקודות הקריטיות של  $F$ . נסמן

$$\mathbb{T}^a := \{p \in \mathbb{T}^2 \mid F(p) < a\}$$

• עבור  $a \leq F(m)$  נקבל  $\mathbb{T}^a = \emptyset$ .

• עבור  $F(m) < a \leq F(x)$  נקבל  $\mathbb{T}^a \cong D^2$ . ראו איור 1.2.

• עבור  $F(x) < a \leq F(y)$  נקבל  $\mathbb{T}^a \cong S^1 \times (0, 1)$ . ראו איור

• עבור  $F(y) < a \leq F(M)$  נקבל  $\mathbb{T}^a \cong \mathbb{T}^2 \setminus D^2$ .

• עבור  $F(M) < a$  נקבל  $\mathbb{T}^a = \mathbb{T}^2$ .

**מסקנה 1.1.2.** אם ב־ $[a, b]$  אין ערכים קריטיים אז  $\mathbb{T}^a \cong \mathbb{T}^b$ .

נשאל איך משתנה הטופולוגיה במעבר בנקודות הקריטיות.

• במעבר דרך  $F(m)$  יש הוספת דיסק.

• כאשר  $a = x - \varepsilon$  עבור  $\varepsilon$  מספיק קטן, קו הגובה יראה באיור 1.4 אם נדביק את  $\mathbb{T}^a$  על פס כבאיור 1.5 נקבל יריעה דיפאומורפית ל־ $\mathbb{T}^x + \varepsilon$ .

• כאשר  $a = y + \varepsilon$  עבור  $\varepsilon$  מספיק קטן נקבל כי  $\mathbb{T}^a$  כבאיור 1.6. אם נדביק את העיגולים באידומים באיור על פס כבאיור 1.7 נקבל יריעה דיפאומורפית ל־ $\mathbb{T}^a$  עבור  $a = y + \varepsilon$ .

• במעבר דרך  $F(M)$  יש הדבקה של  $D^2$  לשפה של  $\mathbb{T}^{F(M)-\varepsilon}$ .

ראינו שבמקרה של הטורוס יש לנקודות הקריטיות חשיבות רבה במבנה של היריעה. אנחנו נראה בקורס שאפשר לשחזר אינווריאנטים כמו ההומולוגיה של יריעה בעזרת הבנה של הנקודות הקריטיות. במקרה של הטורוס, מתקיים

$$H_0(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\langle m \rangle$$

$$H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}\langle x, y \rangle$$

$$H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\langle M \rangle$$

נדבר על דרך כללית להבין הומולוגיה וקוהומולוגיה של יריעות בעזרת נקודות קריטיות. נדבר על דואליות פואנקרה, על מבנה של כפל בקוהומולוגיה, על העתקות טבעיות, על מקדמים בחוגים שונים, וכו'. בין היתרונות של תורת מורס הם שהיא נותנת את ה(קו)הומולוגיות הסטנדרטיות של יריעות, ושהיא עובדת עבור אובייקטים אינסוף-מימדיים.

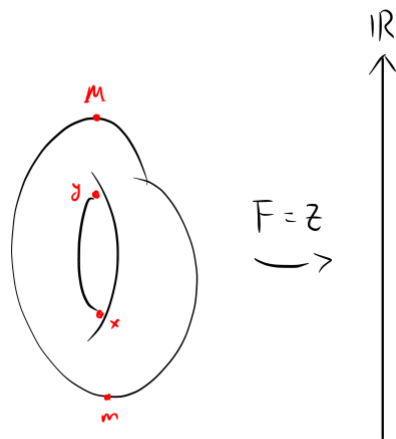
**דוגמה 1.1.3 (Path-Space).** תהי  $M$  יריעה רימנית ויהי

$$\mathcal{P}(x, y) = \left\{ \gamma: [0, 1] \rightarrow M \mid \begin{matrix} \gamma(0)=x \\ \gamma(1)=y \end{matrix} \right\}$$

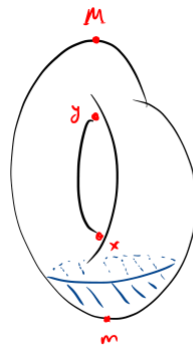
על מרחב זה אפשר להגדיר כל מני פונקציות, למשל

$$\text{len}: \mathcal{P}(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$$

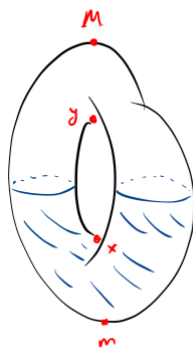
$$\gamma \mapsto \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| ds$$



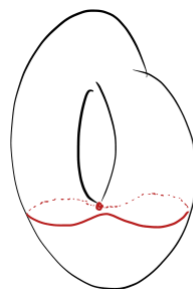
איור 1.1: העתקת גובה מהטורוס, והנקודות הקריטיות שלה.



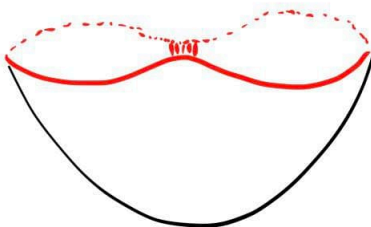
איור 1.2: חתך של הטורוס שדיפאומורפי ל- $D^2$ .



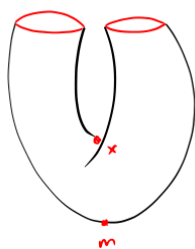
איור 1.3: חתך של הטורוס שדיפאומורפי ל- $S^1 \times (0, 1)$ .



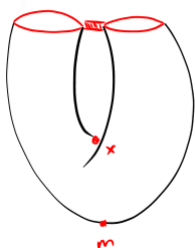
איור 1.4: קו גובה על הטורוס קרוב לנקודת אוקף.



איור 1.5: הדבקת חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוקף.



איור 1.6: חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוקף.



איור 1.7: הדבקת חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוקף.

אפשר לנסות לעבוד עם תורת מורס על פונקציה כזאת ולהבין את המרחב  $\mathcal{P}(x, y)$  בעזרת הנקודות הקריטיות של  $\text{len}$ . במקרה הזה, הנקודות הקריטיות הן קווים גיאודזיים. הן אינן מבודדות וקשה להסיק דברים על המרחב. במקרה של

$$\varphi(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|^2 ds$$

הנקודות הקריטיות יהיו קווים גיאודזיים עם מהירות קבועה. אז הנקודות הקריטיות בדרך כלל יהיו מבודדות, ויהיה אפשר להשתמש בתורת מורס.

## 1.2 נקודות קריטיות

במהלך הקורס נניח כי כל המבנים חלקים. התוצאות נכונות באופן כללי יותר עבור יריעות  $\mathcal{C}^2$ , שדות וקטוריים  $\mathcal{C}^1$  ופונקציות דיפרנציאביליות  $\mathcal{C}^2$ .

**הגדרה 1.2.1 (נקודה קריטית).** תהי  $F: M \rightarrow N$  העתקה חלקה בין יריעות חלקות. נקודה  $p \in M$  נקראת קריטית אם  $Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  אינה על.

**הערה 1.2.2.** 1. במסגרת הקורס נדון בפונקציות  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ . אז  $p \in M$  נקודה קריטית אם ורק אם

$$DF_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$$

אינה על. כיוון ש- $T_{f(p)} \mathbb{R}$  מרחב לינארי חד־מימדי זה שקול לכך שמתקיים  $DF_p = 0$ .

2. ניתן לזהות  $\mathbb{R} \cong T_{f(p)} \mathbb{R}$  בדרך קנונית. נגדיר את ההרכבה של העתקה זאת על  $DF_p$  להיות הנגזרת החיצונית של  $F$  בנקודה  $p$ . נראה זאת בדיאגרמה הבאה.

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{DF_p} & T_{f(p)}(\mathbb{R}) \\ & \searrow dF_p & \downarrow \wr \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

נקבל כי  $p \in M$  נקודה קריטית אם ורק אם  $dF_p = 0$ .

זאת תהיה ההגדרה שנעבוד איתה במשך רוב הקורס.

3. אם נפתח את ההגדרה של הנגזרת החיצונית נקבל כי  $p \in M$  נקודה קריטית אם ורק אם  $\frac{\partial F}{\partial v}(0) := dF_p(v) = 0$  לכל  $v \in T_p M$ . מכך נסיק כי נקודות מינימום ומקסימום הן נקודות קריטיות. כמו כן, ניתן לראות מכך כי נקודות אוסף הן נקודות קריטיות.

**דוגמה 1.2.3.** יהי  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  משטח ותהי  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית גובה. נגדיר

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

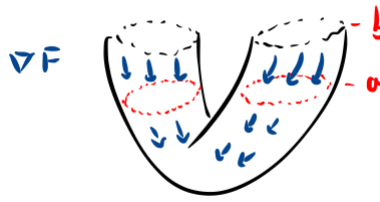
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$$

$$\text{אז } F = f|_M$$

$$\text{אז } df = dz \text{ ומתקיים}$$

$$dF_p = df|_{T_p M} = dz|_{T_p M}$$





איור 1.8: זרימה על הטורוס לאורך הגרדיאנט.

אז

$$\begin{aligned} dF_p = 0 &\iff dz|_{T_p M} = 0 \\ &\iff T_p M = \ker(dz) \\ &\iff T_p M \parallel \text{Span}(x, y) \end{aligned}$$

$$\iff T_p M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp$$

$$T_p M^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בדוגמה באיור 1.1 נקבל שהנקודות הקריטיות הן בדיקן אלו המסומנות. אלו הנקודות בהן הנורמל למישור הוא כפולה של  $z$ .

כעת נרצה לעבוד עם שדות וקטוריים במקום נגזרות חיצוניות. במקרה זה אפשר להסתכל על זרימות לאורך שדה ועל הומוטופיות, מה שחסר במקרה של הנגזרת החיצונית. נתחיל בהגדרה של גרדיאנט ובקשר שלו לנגזרת החיצונית.

**הגדרה 1.2.4 (גרדיאנט).** תהי  $(M, g)$  יריעה רימנית. ותהי  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חלקה. לכל  $g, p \in M$  משרה איזומורפיזם

$$\begin{aligned} g: T_p M &\xrightarrow{\sim} T_p^* M \\ v &\mapsto g(v, \cdot) \end{aligned}$$

הגרדיאנט של  $F$  שנשמנו  $\nabla_g F$  או בדרך כלל  $\nabla F$  מוגדר להיות השדה היחיד המקיים

$$g(\nabla F, \cdot) = dF$$

**הערה 1.2.5.** הגרדיאנט  $\nabla F$  תלוי בבחירת  $g$ !

**הערה 1.2.6.** מתקיים

$$dF_p = 0 \iff \nabla_g F(p) = 0$$

וזה בלתי-תלוי בבחירת  $g$ .

נקבל מכך כי  $p \in M$  נקודה קריטית עבור  $F$  אם ורק אם  $\nabla F(p) = 0$ .

**טענה 1.2.7.** תהי  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  ויהיו  $a < b$  כך שקיים  $\varepsilon > 0$  עבורו הקטע  $(a - \varepsilon, b)$  אינו מכיל ערכים קריטיים. לדוגמה ראו איור 1.8.

אז יש דיפאומורפיזם  $M^a \cong M^b$ .

הוכחה. נרצה לנרמל את הגרדיאנט כדי שמהירות הזרימה תהיה אחידה. כדי לא לחלק באפס, נאפס את השדה מתחת לגובה  $a - \varepsilon$ .

תהי  $g$  מטריקה רימנית על  $M$ . נסמן  $X = -\nabla_g F$ . עבור  $p \in M^b$  נסתכל על  $\frac{X_p}{\|X_p\|^2}$ . זה מגדיר שדה וקטורי שלאורכו  $F$  יורדת במהירות 1.1.<sup>1</sup> תהי

$$\rho: (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

חלקה עבודה

$$\begin{aligned} \rho|_{-\infty, a-\varepsilon} &\equiv 0 \\ \rho|_{(a,b)} &\equiv 1 \\ \rho' &\geq 0 \end{aligned}$$

אז נוכל להגדיר

$$X' = \frac{\rho X_p}{\|X_p\|^2}$$

לכל  $F(p) \in (a - \varepsilon, b)$  ונרחיב את  $X'$  מתחת לגובה  $a - \varepsilon$  עם אפסים. למד"ר המוגדרת על ידי  $X'$  יש פתרונות לכל  $t \geq 0$ .

תהי  $\varphi_t: M^b \rightarrow M^b$  זרימה של  $X'$ . אז  $\varphi_{b-a}: M^b \xrightarrow{\sim} M^a$  דיפאומורפיזם. ■

## 1.3 הדבקת ידיות

### 1.3.1 פונקציות מורס

נרצה כעת להבין מה קורה איך היריעות  $M^a, M^b$  משתנות כאשר עברו מ- $a$  ל- $b$  דרך נקודה קריטית. זה דבר מסובך מאוד באופן כללי ולכן ניאלץ לצמצם את הדיון לנקודות קריטיות שאינן מנוונות.

**הגדרה 1.3.1 (הסיאן).** תהי  $M$  יריעה רימנית ותהי  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה. לכל  $p \in M$  נגדיר

$$\text{Hess}_p(F): T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

על ידי  $\text{Hess}(F) = \nabla dF$  כאשר  $\nabla$  הוא ה-[Levi-Civita Connection](#). הגדרה מפורשת יותר היא

$$\begin{aligned} \text{Hess}_p(F)(X_p, Y_p) &= \langle \nabla_X \text{grad}(F_p), Y_p \rangle \\ &= L_X L_Y(F) - dF_p(\nabla_X Y) \end{aligned}$$

עבור שני שדות וקטוריים  $X, Y$  שמוגדרים סביב  $p$ .

**הערה 1.3.2.** הבחירה של ההסיאן תלויה בבחירה של המטריקה הרימנית. במקרה הפרטי ש- $p$  נקודה קריטית מתקיים  $dF_p = 0$  ואז

$$\text{Hess}_p(F)(X_p, Y_p) = L_X L_Y(F)$$

בפרט, הערך של ההסיאן בנקודה הקריטית אינו תלוי בבחירה של המטריקה הרימנית.

**הערה 1.3.3.** אם  $p$  נקודה קריטית של  $F$  נוכל להגדיר את ההסיאן כהעתקה  $\mathbb{R} \rightarrow T_p M \times T_p M$  באופן הבא. יהיו  $X, Y \in T_p M$ . נרחיב את  $X, Y$  לשדות לוקליים  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  סביב  $p$ . אז

$$\text{Hess}_p(F)(X, Y) := L_{\tilde{X}} L_{\tilde{Y}}(F)(p)$$

**הגדרה 1.3.4 (נגזרת לי).** עבור שדה וקטורי  $\tilde{Y}$  ונקודה  $p \in M$  נגדיר

$$\begin{aligned} L_{\tilde{Y}}(F)(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f(\varphi_{\tilde{Y}}^t(p)) - f(p))}{t} \\ &= dF_p(\tilde{Y}_p) \\ &= \frac{\partial F}{\partial \tilde{Y}}(p) \end{aligned}$$

כאשר  $\varphi_{\tilde{Y}}$  הזרימה לפי  $\tilde{Y}$ .

<sup>1</sup> גיאומטריה, וקטור יחידה שמצביע בכיוון בו  $F$  עולה הכי מהר, ומהירות העליה לאורכו היא  $\|X\|$ . לכן כדי שהמהירות תהיה קבועה חלקנו ב- $\|X_p\|^2$ .

### הערה 1.3.5. נקבל מההגדרה כי

$$\begin{aligned}(L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}})(p) &= d(L_{\tilde{Y}}F)_p(\tilde{X}_p) \\ &= d(L_{\tilde{Y}}F)_p(X)\end{aligned}$$

ולכן  $\text{Hess}_p(F)$  אינו תלוי בבחירת ההרחבה  $\tilde{X}$  של  $X$ .

נראה שההסימן סימטרי ב- $X, Y$  ונקבל מכך כי ההסימן אינו תלוי בבחירת ההרחבה  $\tilde{Y}$  של  $Y$ .

### טענה 1.3.6

$$\text{Hess}_p(F)(X, Y) = \text{Hess}_p(F)(Y, X)$$

הוכחה. מתקיים

$$\begin{aligned}\text{Hess}_p(F)(X, Y) - \text{Hess}_p(F)(Y, X) &= L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}}(F)_p - L_{\tilde{Y}}L_{\tilde{X}}(F)_p \\ &= L_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]}F_p \\ &= dF_p\left(\left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right]_p\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

■

### מסקנה 1.3.7. $\text{Hess}_p(F)(X, Y)$ אינה תלויה בבחירת ההרחבות $\tilde{X}, \tilde{Y}$ .

### תרגיל 1. בקואורדינטות מקומיות סביב $p$

$$\hat{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

מתקיים

$$\text{Hess}_{\hat{p}}(\hat{F}): T_{\hat{p}}U \times T_{\hat{p}}U \rightarrow \mathbb{R}$$

אם נזהה  $\mathbb{R} \cong T_{\hat{p}}U$  נקבל העתקה  $\mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^n)^2$ . העתקה זאת מיוצגת על ידי המטריצה

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{p})\right)_{i,j \in [n]}$$

כמו בקורסי אינפי.

### סימון 1.3.8. נסמן ב- $\text{Crit}(F)$ את אוסף הנקודות הקריטיות של $F$ .

**הגדרה 1.3.9 (נקודה קריטית לא־מנוונת).**  $p \in \text{Crit}(F)$  לא מנוונת non-degenerate אם  $\text{Hess}_p(F)$  תבנית לא מנוונת (באופן שקול, אם  $\ker(\text{Hess}_p) = \{0\}$ , ובאופן שקול אם 0 אינו ערך עצמי).

### דוגמה 1.3.10. תהי

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ותהי

$$F: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$$

תהי  $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . זאת נקודה קריטית כי הנורמל לספירה ב- $p$  מצביע למעלה.

נבחר קבוצה פתוחה  $U$  קטנה סביב  $p$ , ומפת קואורדינטות

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

אז הצגה מקומית היא

$$\hat{F}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

ואז

$$\text{Hess}_0(\hat{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x^2}(0) & \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x \partial y}(0) \\ \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial y \partial x}(0) & \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial y^2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

לא מנוונת.  
באופן דומה

$$\text{Hess}_\delta(\hat{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**הגדרה 1.3.11 (פונקציית מורס).**  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה היא פונקציית מורס אם כל הנקודות הקריטיות שלה אינן מנוונות.

### 1.3.2 הלמה של מורס

עבור  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  נוכל לקחת פיתוח טיילור של הצגה מקומית של  $F$ .

$$\begin{aligned} \hat{F}(x + \Delta x) &= \hat{F}(x) + \sum_{i \in [n]} \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in [n]} \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + o(\|\Delta x\|^3) \\ &= \hat{F}(x) + D\hat{F}(\Delta x) + \text{Hess}_x \hat{F}(\Delta x, \Delta x) + o(\|\Delta x\|^3) \end{aligned}$$

אם  $x$  נקודה קריטית לא־מנוונת של  $\hat{F}$  אז

$$D\hat{F}(\Delta x) = 0$$

הלמה של מורס אומרת שבמקרה זה אפשר לבחור קואורדינטות סביב  $x$  עבורן

$$o(\|\Delta x\|^3) = 0$$

זאת אומרת,

$$\hat{F}(x + \Delta x) = \hat{F}(x) + \text{Hess}_x(\hat{F})(\Delta x, \Delta x)$$

נפעיל את משפט סילבסטר כדי להביא את ההסימן לצורה קנונית ונקבל מערכת קואורדינטות  $y$  לפיה

$$\hat{F}(y + \Delta y) = \hat{F}(y) - \sum_{i \in [k]} y_i^2 + \sum_{i=k+1}^n y_i^2$$

**משפט 1.3.12 (הלמה של מורס).** תהי  $x \in M_n$  נקודה קריטית לא־מנוונת של  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה. קיימת מפת קואורדינטות  $(U, \varphi)$  סביב  $x$  כך שמתקיים  $\varphi(x) = 0$  ושעבור

$$\hat{F} = F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

מתקיים

$$\hat{F}(y) = \hat{F}(0) - \sum_{j \in [i]} y_j^2 + \sum_{j=i+1}^n y_j^2$$

הוכחה. נבחר מפה כלשהי  $(U, \psi)$  סביב  $x$ . בלי הגבלת הכלליות נניח כי  $\psi(x) = 0$ . שינוי לינארי של הקואורדינטות משרה את אותו השינוי על  $T_p \mathbb{R}^n$  לכל  $p \in \psi(U)$ . כלומר, אם

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto Ay \end{aligned}$$

לינארית עבור  $A \in M_n(\mathbb{R})$  אז

$$Df_p: T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_p\mathbb{R}^n$$

$$v \mapsto Av$$

לפי משפט סילבסטר קיימת מטריצה מעבר  $A \in M_n(\mathbb{R})$  שמלכסנת את  $\text{Hess}_0(\hat{F})$ . אם נפעיל על  $\psi(U)$  החלפת קואורדינטות  $y \mapsto Ay$  נקבל מפה חדשה  $(U, A \cdot \psi)$  עבורה  $A \cdot \psi(x) = 0$  וגם

$$\text{Hess}_0(\hat{F})$$

מטריצה אלכסונית ללא אפסים ע האלכסון, כאשר  $\hat{F}$  הצגה של  $F$  לפי  $\psi \cdot A$ . מכאן, נניח בלי הגבלת הכלליות שבחרנו מפה  $\psi$  לפיה  $\text{Hess}_0(\hat{F})$  אלכסונית. נמשיך את ההוכחה באינדוקציה על המימד.

**בסיס,  $n = 1$ :** נסתכל על הצגה מקומית

$$\hat{F}(y) = \hat{F}(0) + \frac{1}{2}\hat{F}''(0)y^2 + r(y)$$

עבור  $r(y) \in o(\|y\|^3)$ . אנו יודעים כי  $r(y)$  פונקציה חלקה כצירוף פונקציות חלקות. כיוון ששתי הנגזרות הראשונות שלה מתאפסות ב־0 נקבל כי גם  $\frac{r(y)}{y^2}$  פונקציה חלקה. אז נוכל לכתוב

$$\hat{F}(y) = \hat{F}(0) \pm Ky^2(1 + \varepsilon(y))$$

כאשר

$$K = \left| \frac{1}{2}\hat{F}''(0) \right| > 0$$

וכאשר

$$\varepsilon(y) = \frac{r(y)}{y^2 K} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

נגדיר

$$y_1 = \Theta(y) := y\sqrt{K(1 + \varepsilon(y))}$$

אז  $\Theta: y \rightarrow y_1$  מוגדרת היטב סביב  $y = 0$ , וגם  $\Theta'(0) = \sqrt{K} \neq 0$ . לכן  $\Theta$  דיפאומורפיזם מקומי סביב  $y = 0$ . נקבל כי

$$\begin{aligned}\hat{F} \circ \Theta^{-1}(y_1) &= \hat{F}(y) \\ &= \hat{F}(0) \pm Ky^2(1 + \varepsilon(y)) \\ &= \hat{F}(0) \pm y_1^2\end{aligned}$$

וזאת הצורה הרצויה.

**צעד:** מתקיים  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . נכתוב קואורדינטות מתאימות  $y = (a, b)$  כאשר  $a \in \mathbb{R}$  ו־ $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ . נכתוב

$$\hat{F}(a, b) = \hat{F}_b(a)$$

ונפתח לטור טיילור לפי המשתנה  $a$ .

$$\hat{F}(a, b) = \hat{F}_b(0) + \hat{F}'_b(0) \cdot a + \frac{1}{2}\hat{F}''_b(0) \cdot a^2 + r_b(a)$$

נניח לרגע כי  $F'_b(0) = 0$  אז

$$\hat{F}(a, b) = \hat{F}_b(0) \pm K_b a^2(1 + \varepsilon_b(a))$$

עבור

$$K_b := \left| \frac{1}{2}\hat{F}''_b(0) \right| > 0$$

זה חיובי ממש כי

$$\hat{F}''_0(0) = \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial a^2}(a, b) \neq 0$$

אז

$$\Theta(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 = a\sqrt{K_b(1 + \varepsilon_b(a))} \\ b_1 = b \end{pmatrix}$$

דיפאומורפיזם לוקלי בסביבת  $(0, 0)$ . כעת

$$\hat{F} \circ \Theta^{-1}(a_1, b_1) = \hat{F}(0, b_1) \pm a_1^2$$

הפונקציה  $\hat{F}(0, b_1)$  תלויה ב־ $n - 1$  קואורדינטות ונקבל את התוצאה מהנחת האינדוקציה. כעת ניתן להסביר למה אכן ניתן להניח  $\hat{F}'_b(0) = 0$ . נחפש נקודה קריטית של  $\hat{F}_b$ , כלומר נקודה  $a$  עבורה

$$\Phi(a, b) := \frac{\partial \hat{F}(a, b)}{\partial a}(a, b) = \frac{d\hat{F}_b}{da}(a) = 0$$

מתקיים

$$\frac{\partial \Phi(0, 0)}{\partial a} = \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial a^2}(0, 0) \neq 0$$

כי זה האיבר ה־ $(1, 1)$  ב־ $\text{Hess}_0(\hat{F})$ . מתקיים גם  $\Phi(0, 0) = 0$ . לפי משפט הפונקציה הסתומה, ליד  $(0, 0)$  הפתרון של  $\Phi(a, b) = 0$  הוא גרף של פונקציה חלקה  $g: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה  $a = g(b)$ . לפי המשפט, מתקיים גם

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial b}(0) &= \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial a}(0) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial b}(0) \\ &= \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial a}(0) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial a \partial b}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

כאשר הביטוי המתואר מתאפס כיוון ש־ $\text{Hess}_0(\hat{F})$  מטריצה אלכסונית. נעשה החלפת קואורדינטות

$$\chi: (a, b) \mapsto (a + g(b), b)$$

מתקיים

$$D\chi_{(0,0)} = \mathbb{1}$$

לפי משפט הפונקציה הפוכה,  $\chi$  דיפאומורפיזם מקומי בסביבת  $(0, 0)$ . אחרי החלפת קואורדינטות,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{F} \circ \chi}{\partial a}(0, b) &= \dots = 0 \\ \frac{\partial^2 (\hat{F} \circ \chi)}{\partial y_j \partial y_k}(0, 0) &= \dots = \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial y_j \partial y_k}(0, 0) \end{aligned}$$

כעת ניתן להפעיל את צעד האינדוקציה עבור  $\hat{F} \circ \chi$ , כאשר נשתמש בזה שמתקיים

$$\text{Hess}_0(\hat{F} \circ \chi) = \text{Hess}_0(\hat{F})$$

■

מטריצה אלכסונית בלי אפסים על האלכסון.

**הגדרה 1.3.13 (מפת מורס).** מפה  $(U, \varphi)$  כמו במשפט נקראת חפת מורס (Morse chart) סביב הנקודה הקריטית  $x$ .

**מסקנה 1.3.14.** נקודות קריטיות לא מנוונות הן מבודדות. בפרט, אם  $M$  קומפקטית, יתכן רק מספר סופי של נקודות קריטיות שאינן מנוונות.

הוכחה. לפונקציה

$$\hat{F} = a - \sum_{j=1}^i y_j^2 + \sum_{j=i+1}^n y_j^2$$

■

אין נקודות קריטיות פרט ל־ $y = 0$ .

**הגדרה 1.3.15 (אינדקס מורס).** נסמן ב- $i$  את מספר הקואורדינטות השליליות בהצגה המקומית הסטנדרטית של  $F$ .

זה גם האינדקס (מספר האיברים השליליים על האלכסון) של  $\text{Hess}_x(F)$ .  
 זה גם מימד התת-מרחב המקסימלי של  $T_x M$  עליו  $\text{Hess}_x(F)$  מוגדרת שלילית.  
 נקרא למספר זה אינדקס מורס של  $F$  בנקודה  $x \in \text{Crit}(F)$ . נסמנו לפעמים  $\text{ind}(x)$  או  $\text{ind}_F(x)$ .

**דוגמה 1.3.16.** תהי  $x = \min(F)$ . במפת מורס מתקיים

$$\hat{F}(y) = F(x) + \sum_{j=1}^n y_j^2$$

במקרה זה,  $\text{ind}(x) = 0$ .  
 נסתכל על משטחי גובה. כאשר  $F(y) = F(x) + \varepsilon$  עבור  $\varepsilon$  קבוע קטן מספיק, נקבל ספירות קוצנטריות סביב הנקודה  $x$ .  
 נבחר מטריקה רימנטית "אוקלידית" ב- $\mathcal{U}$  לפיה

$$\hat{g} = dy_1^2 + \dots + dy_n^2$$

במפת מורס נקבל

$$\nabla_g \hat{F}(y) = (2y_1, \dots, 2y_n) = 2\vec{y}$$

אז  $-\nabla \hat{F}$  שדה כיוונים הזורם לראשית ופרופורציונלי למרחק ממנה. נפתור את המד"ר ונקבל

$$y(t) = 2y(0)e^{-t}$$

כאן יש התכנסות אקספוננציאלית ל- $y = 0$ .

**דוגמה 1.3.17.** כאשר  $x \in M$  נקודת מקסימום של  $F$  נקבל במפת מורס  $\text{ind}(x) = n$  וגם

$$\hat{F}(y) = F(x) - \sum_{j=1}^n y_j^2$$

באופן דומה.

**הערה 1.3.18.** אם  $x \in \text{Crit}(F)$  אז  $x \in \text{Crit}(-F)$ . מתקיים

$$\text{ind}_{-F}(x) = n - \text{ind}_F(x)$$

ניתן לראות זאת מכך שמפת מורס של  $F$  היא גם מפת מורס עבור  $-F$ .

**דוגמה 1.3.19.** נעניין בנקודת אוקף  $x \in M$  של  $F$  במקרה  $n = 2$ . במפת מורס מתקיים

$$\hat{F}(y) = F(x) - y_1^2 + y_2^2$$

קווי הגובה עבור  $\hat{F} = F(x)$  הם שני הישרים  $y_1 = \pm y_2$ . כאשר  $\hat{F} = F(x) \pm \varepsilon$  קווי הגובה מתוארים באיור 1.9. מתקיים

$$D\hat{F} = 2(-y_1, y_2)$$

ואז

$$y(y) = (2y_1(0)e^t, 2y_2(0)e^{-t})$$

קווי הזרימה מתוארים באיור 1.10 ואילו קווים היפרבוליים אסימפטוטיים לצירים.  
 נסתכל גם על המקרה  $n > 2$ . כעת

$$\hat{F} = F(x) - y_1^2 - \dots - y_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2$$

נסמן

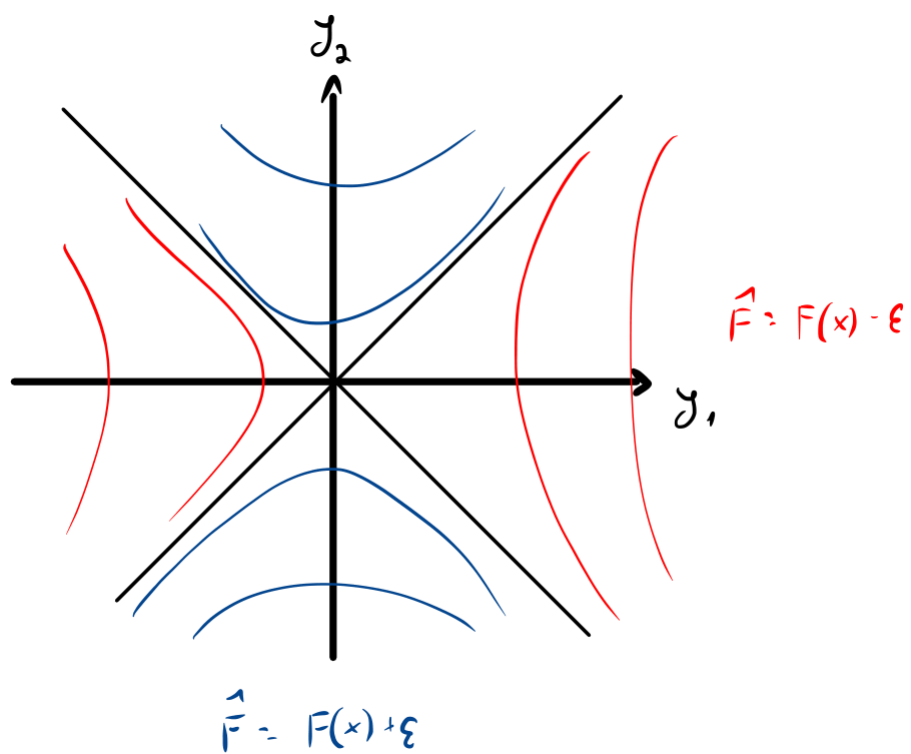
$$y_I := (y_1, \dots, y_i)$$

$$y_J := (y_{i+1}, \dots, y_n)$$

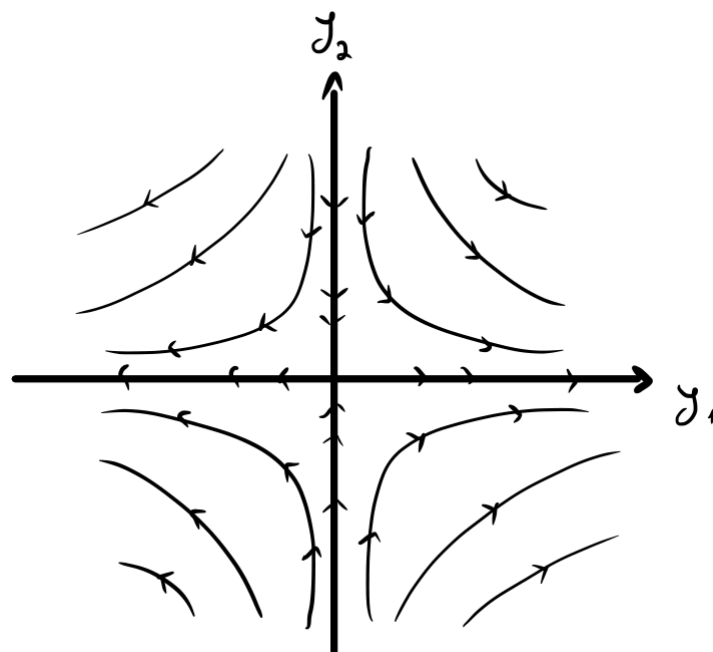
ואז

$$\hat{F} = F(x) - \|y_I\|^2 + \|y_J\|^2$$

אז האיורים הנ"ל יהיו חתכים דו-מימדיים של היפרבולואידים.

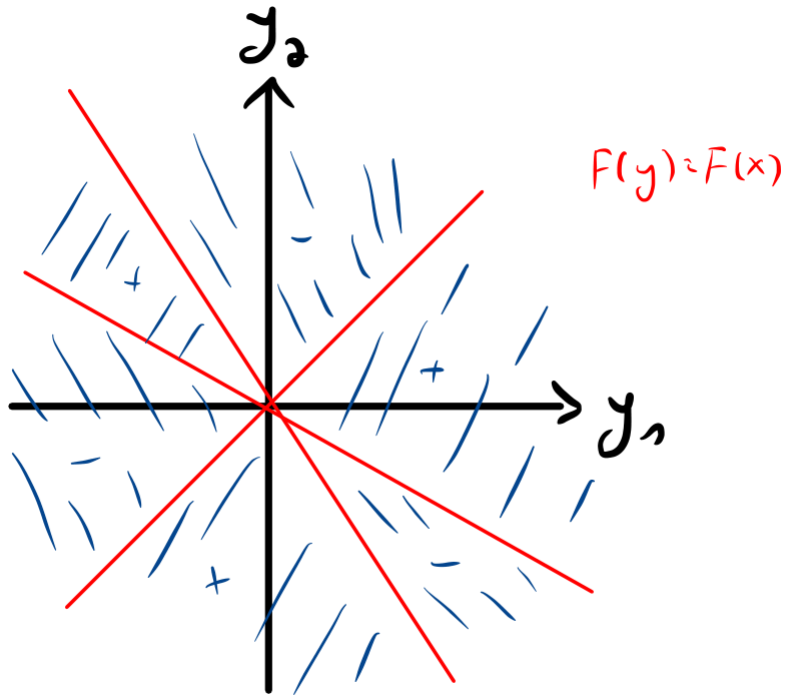


איור 1.9: קווי גובה בסביבת מורס.



איור 1.10: קווי זרימה בסביבת מורס.





איור 1.11: קווי הגובה מראים כי הנקודה הקריטית מנונת.

**דוגמה 1.3.20.** נסתכל על  $F$  עם קווי גובה כמתואר באיור 1.11 אז לפי התיאור הנ"ל הנקודה הקריטית אינה מינימום, מקסימום או אוקף, ולכן הינה מנונת.

**הערה 1.3.21.** אם  $F \in C^r(M)$  או  $M$  יריעה דיפרנציאבילית  $C^r$  עבור  $r \geq 3$ , עדיין ניתן להפעיל את הלמה של מורס, אך המפה לא תהיה מתואמת עם האטלס החלק על  $M$ .

**תרגיל 2.** תהי  $(M, g)$  יריעה רימנית סגורה ותהי  $F$  פונקציית מורס. יהי  $\dot{\gamma}(t) = -\nabla F(\gamma(t))$  מסלול זרימה.

1. הראו כי

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \gamma_+ \in \text{Crit}(F)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = \gamma_- \in \text{Crit}(F)$$

2. הראו כי

$$F(\gamma_+) < F(\gamma_-)$$

3. הראו שההתכנסות אל  $\gamma_{\pm}$  אקספוננציאלית, אך

$$\gamma_{\pm} \notin \{\gamma(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$$

### 1.3.3 שקילות של משטחים

**הגדרה 1.3.22 (ריטרקציה).** (i) יהי  $X$  מרחב טופולוגי ויהי  $Y \subseteq X$ . העתקה רציפה  $F: X \rightarrow Y$  היא ריטרקציה אם  $F|_Y = \mathbb{1}_Y$ .

(ii) אם קיימת  $F_t: X \rightarrow X$  עבורה

$$F_0 = \mathbb{1}_X$$

$$F_t|_Y = \mathbb{1}_Y$$

ו- $F_1: X \rightarrow Y$  ריטרקציה אז  $Y$  היא ריטרקציה דפורמטיבית (deformation retract) של  $X$ .

**הגדרה 1.3.23 (ריטרקציה).** יהי  $X$  מרחב טופולוגי ויהי  $Y \subseteq X$ . העתקה רציפה  $F: X \rightarrow Y$  היא ריטרקציה אם  $F|_Y = \mathbb{1}_Y$ .

**הגדרה 1.3.24 (שקילות הומוטופית).** מרחבים טופולוגיים  $X, Y$  שקולים טופולוגית אם קיימות

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ g: Y &\rightarrow X \end{aligned}$$

והומוטופיות

$$\begin{aligned} f \circ g &\approx \mathbb{1}_Y \\ g \circ f &\approx \mathbb{1}_X \end{aligned}$$

**דוגמה 1.3.25.** אם  $Y$  הוא ריטרקציה דפורמטיבית של  $X$  ומתקיים  $f = F_1, g = \mathbb{1}_Y$  אז

$$\begin{aligned} f \circ g &= \mathbb{1}_Y \\ g \circ f &= \mathbb{1}_Y \circ F_1 = F_1 \approx F_0 = \mathbb{1}_X \end{aligned}$$

אז  $Y$  שקולה הומוטופית ל- $X$ .

**דוגמה 1.3.26.** כדור סגור  $\bar{B}^n$  שקול הומוטופית לנקודה.

**דוגמה 1.3.27.** אין ריטרקציה דפורמטיבית  $B^n(1) \rightarrow B^n(2)$ . באופן כללי, עשויות להיות התנהגויות לא רצויות במקרה של קבוצות פתוחות.

**דוגמה 1.3.28.** תהי  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  בלי ערכים קריטיים בקטע  $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ . ראינו כי  $M^a \approx M^b$ . נוכל לחשוב על כך בדרך מעט אחרת. תהי  $g$  מטריקה רימנית שריוחיתת ויהי  $X = -\nabla_g F$ . נגדיר

$$Y(p) := \begin{cases} \frac{X(p)}{|L_X F(p)|} & F(p) \geq a \\ 0 & F(p) < a \end{cases}$$

זה שדה וקטורי לא רציף אך ניתן להגדיר זרימה לאורכו. נסמנה

$$\varphi_t: M \leq b \rightarrow M^{\leq a}$$

וזאת העתקה שאינה הפיכה או חלקה, אך כן רציפה. היא מגדירה רטרקציה דפורמטיבית מ- $M^{\leq b}$  ל- $M^{\leq a}$  ובפרט שני מרחבים אלה שקולים טופולוגית.

**הערה 1.3.29.** במקרה של הטורוס והנקודה  $x$  מאיור 1.1 המרחב  $M^{\leq x}$  אינו יריעה. כשנתעניין בשקילות דיפאומורפית נסתכל בינתיים על תנאי פתוח, וכשנתעניין בשקילות הומוטופית נסתכל על תנאי סגור, כבדוגמא האחרונה.

### 1.3.4 הוספת נקודה קריטית

תהי  $M$  יריעה חלקה סגורה, תהי  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית מורס, תהי  $c \in \text{Crit}(F)$  עם ערך קריטי  $a := F(c)$ . נניח ש- $c$  נקודה קריטית יחידה עם ערך קריטי בקטע  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . נעיין ראשית במקרה בו  $c$  מינימום מקומי. במפת מורס סביב  $c$  מתקיים

$$\hat{F}(x) = a + \sum_{j=1}^n x_j^2$$

במעבר מ- $M^{a-\varepsilon}$  ל- $M^{a+\varepsilon}$  הוספנו כדור

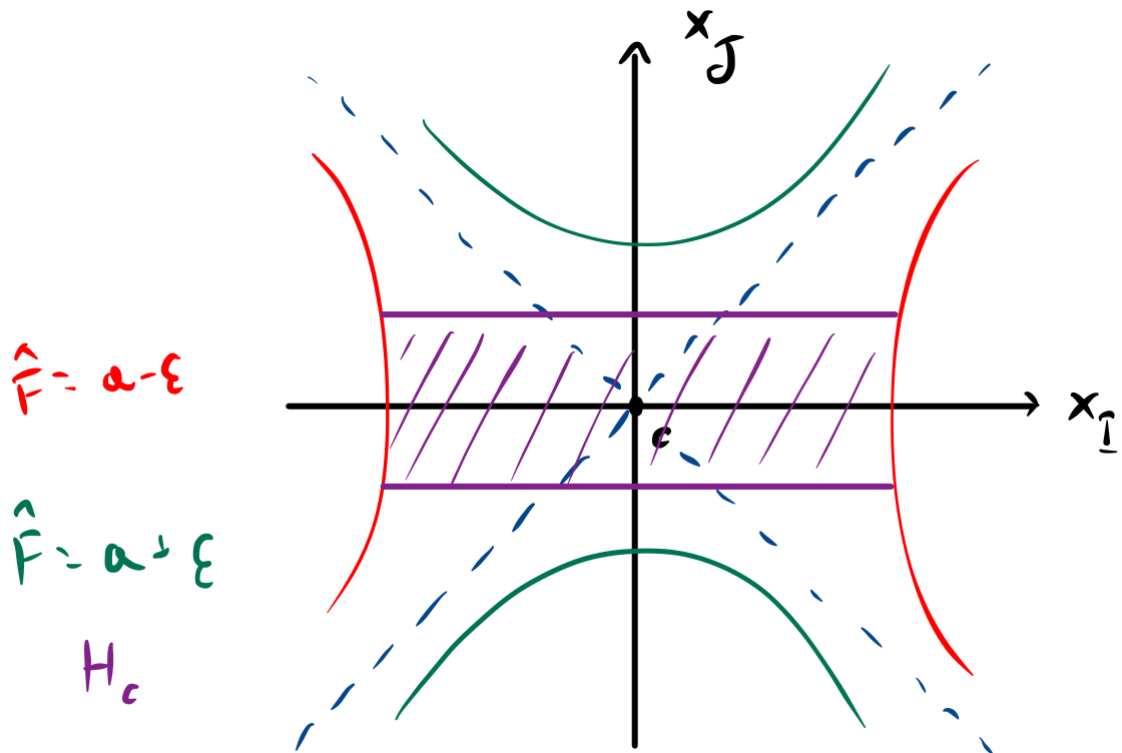
$$\sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \varepsilon$$

כרכיב קשירות נפרד.

באופן דומה, במקרה בו  $c$  מקסימום מקומי, במעבר מ- $M^{a-\varepsilon}$  ל- $M^{a+\varepsilon}$  יש הדבקה של כדור  $n$ -מימדי

$$\bar{B}_c = \left\{ \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \varepsilon \right\}$$

לשפה  $M^{a-\varepsilon}$ , כלומר  $M^{a+\varepsilon}$  הדבקה של  $\bar{B}_c \sqcup M^{a-\varepsilon}$  לאורך חיתוך  $\{F = a - \varepsilon\}$  עם מפת מורס סביב  $c$ .



איור 1.12: הדבקת ידית בסביבת מורס.

נסתכל כעת על המקרה בו  $x = c$  נקודות אוקף. אז

$$\hat{F}(x) = a - \sum_{j=1}^i x_j^2 + \sum_{j=i+1}^n x_j^2 a - \|x_I\|^2 + \|x_J\|^2$$

נבנה מטריקה רימנית  $g$  על  $M$  עבורה  $\hat{g}$  אוקלידית במפת מורס, כלומר

$$\hat{g} = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$$

נסתכל על

$$H_c = \left\{ \hat{F} \geq a - \varepsilon \mid \|x_J\|^2 < \delta \ll \varepsilon \right\}$$

ראו איורים 1.12, 1.13. מתקיים

$$H_c \cong \overline{B^i} \times B^{n-i}$$

**טענה 1.3.30.** 1. קיים הומיאומורפיזם

$$M^{a+\varepsilon} \cong M^{a-\varepsilon} \cup H_c$$

2.  $M^{\leq a-\varepsilon} \cup \overline{H_c}$  היא ריטרקציה דפורמטיבית של  $M^{\leq a+\varepsilon}$ .

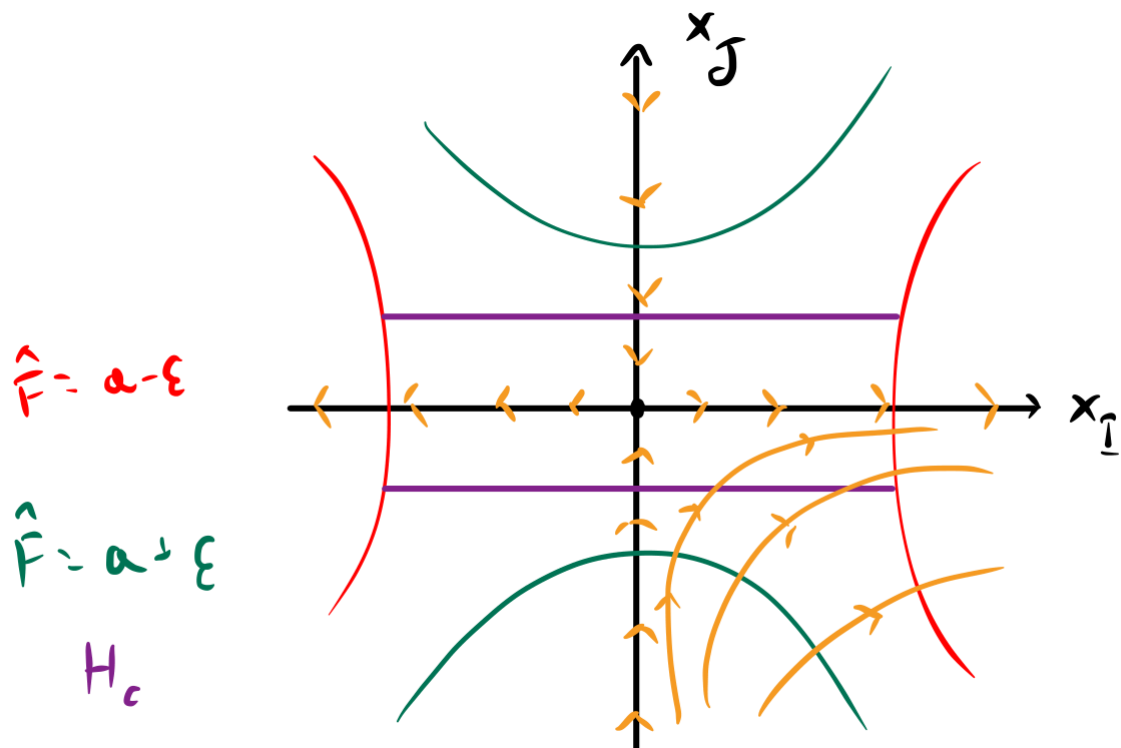
הוכחה. נסתכל על קווי הזרימה של  $-\nabla F$ . קווי הזרימה נותנים התאמה חד-חד ערכית ועל בין  $\{F = a + \varepsilon\}$  לבין  $\partial(M^{a-\varepsilon} \cup H_c)$ . כמו מקודם, ניתן לעשות רפרמטריזציה של  $-\nabla F$  כך שהזרימה תביא את  $\{F = a + \varepsilon\}$  ל- $\partial(M^{a-\varepsilon} \cup H_c)$ . בזמן  $t = 1$  נקבל מכך הומיאומורפיזם בין  $M^{a+\varepsilon}$  ל- $M^{a-\varepsilon} \cup H_c$ . נקבל מכך גם ריטרקציה דפורמטיבית מ- $M^{\leq a+\varepsilon}$  ל- $M^{a-\varepsilon} \cup \overline{H_c}$  על ידי חתיכת השדה באופן שאינו רציף, כמקודם. ■

**הערה 1.3.31.** נסתכל על הסימונים מהוכחת הטענה ונגדיר

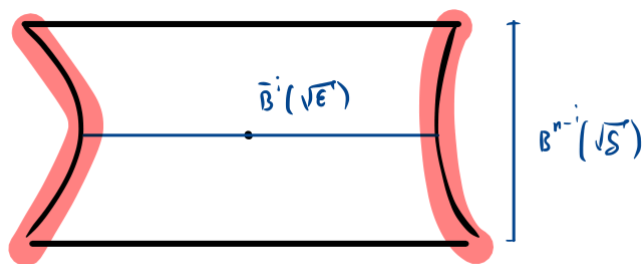
$$Y_{(p)} = T_{(p)}(-\nabla_g F) \cdot \nu(p)$$

כאשר  $T_{(p)}$  הזמן הדרוש עבור קו הזרימה דרך  $p$  לנוע מ- $\{F = a + \varepsilon\}$  למשטח הנתון וכאשר  $\nu$  היא cutoff function ליד השפה של  $M^{a-\varepsilon} \cup H_c$ . אם קו דרך  $p$  אינו חוצה את שני המשטחים, נגדיר  $Y_{(p)} = 0$ . נסמן את הזרימה של  $Y$  על ידי

$$\varphi_t: M^{a+\varepsilon} \rightarrow M^{a+\varepsilon}$$



איור 1.13: זרימה בסביבת מורס.



איור 1.14: ידית הומיאומורפית למכפלה של כדור פתוח וכדור סגור.

ואז

$$\varphi_1: M^{a+\varepsilon} \rightarrow M^{a-\varepsilon} \cup H_c$$

הומיאומורפיזם אבל לא דווקא דיפאומורפיזם. באופן כללי, ההומיאומורפיזם בהוכחה אינו חייב להיות דיפאומורפיזם, ודרושים תיקונים על מנת לקבל דיפאומורפיזם.

**הערה 1.3.32.** בהוספת הידית  $H_c$  נדביק את  $H_c$  על החלק האדום באיור 1.14 ל- $\{\hat{F} = a - \varepsilon\}$ . אם נזהה

$$H_c \cong \bar{B}^i(\sqrt{\varepsilon}) \times B^{n-i}(\sqrt{\delta})$$

הדבקה זאת היא לאורך

$$\partial B^i(\sqrt{\varepsilon}) \times B^{n-i}(\sqrt{\delta})$$

ראינו דוגמא לכך במקרה של הטורוס. ראו איורים 1.5, 1.7.

**דוגמה 1.3.33.** תהי  $M^3$  יריעה 3-מימדית. ידית מאינדקס 1 נראית כמו

$$\bar{B}^1(\sqrt{\varepsilon}) \times B^2(\sqrt{\delta}) \cong [0, 1] \times D$$

מודבקת למשטח לאורך  $\partial[0, 1] \times D^2$ .



איור 1.15: ריטרקציה מהידית לשפה.

ידית מאינדקס 2 נראית כמו

$$\bar{B}^2(\sqrt{\varepsilon}) \times B^1(\sqrt{\delta}) \cong \bar{D}^2 \times (0, 1)$$

ומוזבקת למשטח לאורך  $\partial D^2 \times (0, 1)$ . במקרה של הטורוס מתקבלות שתי תוצאות שונות (עד כדי הומיאומורפיזם) בהתאם למקום ההדבקה.

אין נקודה קריטית מאינדקס 3 כיוון שלשם כך יהיה צורך להדביק כדור לאורך  $S^2$  על השפה של הטורוס, אך אין תת־יריעה הומיאומורפית ל־ $S^2$  על השפה.

ראינו שאם בקטע  $[a, b]$  אין נקודות קריטיות, אז  $M^{\leq a} \approx M^{\leq b}$ . אם יש נקודה קריטית בודדת  $c$  עבורה  $FF(c) = a$  נסתכל על  $M^{\leq a \pm \varepsilon}$ . אז במעבר מ־ $M^{\leq a - \varepsilon}$  ל־ $M^{\leq a + \varepsilon}$  נוסף הדבקה של ידית

$$\bar{H}_c = \left\{ \|x_j\|^2 \leq \delta < \varepsilon \atop a_\varepsilon \leq F(p) \right\} \cong \bar{B}^i(\sqrt{\varepsilon}) \times \bar{B}^{n-i}(\sqrt{\delta})$$

לאורך  $\partial B^i \times \bar{B}^{n-i}$ . נגדיר שדה וקטורי

$$Y = \begin{cases} T_{(p)} \cdot (-\Delta_g F) & F(p) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon] \\ & p \notin \bar{H}_c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

שדה זה אינו רציף, אך הוא רציף למקוטעין. נסמן ב־

$$\varphi_t: M^{\leq a + \varepsilon} \rightarrow M^{\leq a + \varepsilon}$$

את הזרימה של  $Y$ . זאת אינו הפיכה אך כן רציפה. מתקיים

$$\text{Im } \varphi_1 \subseteq M^{\leq a - \varepsilon} \cup \bar{H}_c$$

ו־ $\varphi_1$  ריטרקציה. אז  $\varphi_t$  ריטרקציה דפורמטיבית. קיימת ריטרקציה דפורמטיבית  $\varphi_t$  של  $\bar{H}_c$  ל־

$$\bar{B}^i \times \{0\} \cup \partial B^i \times \bar{B}^{n-i}$$

ניתן להרחיב אותה ל־ $M^{\leq a - \varepsilon}$  להעתקת הזהות. נקבל כך ריטרקציה דפורמטיבית בין  $M^{\leq a + \varepsilon}$  ל־ $B^i \cup M^{\leq a - \varepsilon}$ . ראו איור 1.15. נקבל ריטרקציות דפורמטיביות

$$M^{\leq a + \varepsilon} \approx M^{\leq a - \varepsilon} \cup \bar{H}_c \approx M^{\leq a - \varepsilon} \cup B^i$$

**הערה 1.3.34.** עם מאמץ נוסף ניתן לתת ל־ $M$  מבנה של קומפלקס CW. נדון בכך בהמשך.

### 1.3.5 מעבר עד כדי דיפאומורפיזם

כאשר הראנו הומיאומורפיזם במעבר דרך נקודה קריטית, הגדרנו שדה לאורכו בנינו זרימה, אך שדה זה לא היה חלקי, ולכן קיבלנו רק הומיאומורפיזם ולא דיפאומורפיזם. כדי לתקן זאת, נבצע תיקון על ידי "החלקה" של הפינות. ראו איור 1.16.

נגדיר

$$H_c = \bigcup \{y\} \times B^{n-i}(r(y))$$

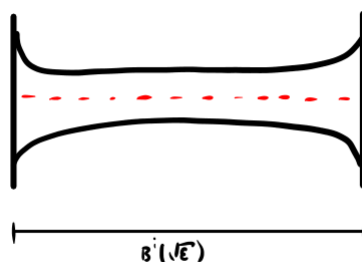
עבור  $r(y)$  פונקציה עולה עם  $r'(y) \rightarrow \infty$  כאשר  $y \rightarrow \partial B^i(\sqrt{\varepsilon})$ . נגדיר

$$Y = \begin{cases} \nu(p) \cdot T_{(p)} \cdot (-\nabla_g F) \\ 0 \end{cases}$$

כמקודם ונסמן ב־ $\varphi_t$  את הזרימה שלה. אז

$$\varphi_1: M^{\leq a + \varepsilon} \rightarrow M^{\leq a - \varepsilon} \cup H_c$$

דיפאומורפיזם.



איור 1.16: ידית לאחר החלקת הפינות.

### עבור יריעות חלקות

1. בקטגוריה של יריעות חלקות הידית  $H_c$  יותר מורכבת.
2. אם עובדים עם פונקציה דיפרנציאבילית או יריעה דיפרנציאבילית  $r$  פעמים התוצאה היא דיפאומורפיזם עד כדי  $C^{r-2}$  כיוון שמפת מורס אינה מתואמת עם האטלס של  $M$ .
3. חשוב לדעת לא רק איפה מדביקים את  $H_c$  אלא גם איך אנחנו מדביקים את הידית ל- $M^{\leq a-\epsilon}$ . נראה דוגמא בהמשך.

### 1.3.6 הוספת מספר נקודות קריטיות

- נניח כעת שיש מספר נקודות קריטיות ב- $\{a - \epsilon < F < a + \epsilon\}$ .
- אם הנקודות הקריטיות בגבהים שונים, ניתן להפריד אותן על ידי הקטנת  $\epsilon$ .
  - אם יש כמה נקודות קריטיות באותו גובה, נבחר סביבות מורס זרות לכל נקודה ונעשה בנייה באופן לוקלי. נקבל
- $$M^{\leq a+\epsilon} \cong M^{\leq a-\epsilon} \cup H_{c_1} \cup \dots \cup H_{c_k}$$

### 1.3.7 שימושים

**משפט 1.3.35 (Reeb).** תהי  $N^n$  יריעה סגורה עם פונקציית מורס  $F: N \rightarrow \mathbb{R}$  בעלת שתי נקודות קריטיות. אז יש הומיאומורפיזם  $M \cong S^n$ .

הוכחה. נסמן ב- $m$  את נקודת המינימום וב- $M$  את נקודת המקסימום. בלי הגבלת הכלליות נניח  $F(m) = 0$ ,  $F(M) = 1$ . במעבר נקודת המינימום, שהינה מאינדקס 0, נוסף כדור  $n$ -מימדי, ולכן

$$N^{\leq 1-\epsilon} \cong N^{\leq \epsilon} \cong B^n$$

כאשר אלו דיפאומורפיזמים. נקבל דיפאומורפיזמים

$$\partial N^{\leq 1-\epsilon} \cong \partial N^{\leq \epsilon} \cong \partial B^n \cong S^{n-1}$$

אז נקבל

$$\begin{aligned} N &= N^{\leq 1-\epsilon} \cup N^{\geq 1-\epsilon} \\ &\cong \bar{B}_1^n \sqcup_{\varphi} \bar{B}_2^n \end{aligned}$$

כאשר  $\partial B_1^n \rightarrow \partial B_2^n$  פונקציית הדבקה. נראה כי

$$\varphi: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

דיפאומורפיזם. נסתכל על  $\{F = 1 - \epsilon\}$ . מפת מורס סביב  $M$  מעבירה קבוצה זאת ל- $S^{n-1} \cong \partial B^n(\sqrt{\epsilon})$ . מצד שני, דיפאומורפיזם מקבוצה זאת ל-

$$\{F = \epsilon\} \cong \partial B^n(\sqrt{\epsilon}) \cong S^{n-1}$$

כאשר הדיפאומורפיזם הראשון מגיע ממפת מורס סביב  $m$ . אז הרכבה של דיפאומורפיזמים ולכן דיפאומורפיזם.

נבנה הומיאומורפיזם

$$h: \underbrace{\bar{B}_1^n \amalg_{S^{n-1}} \bar{B}_2^n}_{S^n} \rightarrow \underbrace{\bar{B}_1^n \amalg_N \bar{B}_2^n}_N$$

על ידי

$$h(x) = \begin{cases} x & x \in \bar{B}_1^n \\ \|x\| \cdot \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & x \in \bar{B}_2 \setminus \{0\} \\ 0 \in \bar{B}_2 & 0 \in \bar{B}_2 \end{cases}$$

ניתן לבדוק כי זה אכן הומיאומורפיזם. ■

**הערה 1.3.36.** הפונקציה  $h$  בהוכחה אינה חלקה. היא לא חייבת להיות חלקה או גזירה ב־ $0 \in \bar{B}_2$  והיא בדרך כלל לא תהיה דיפאומורפיזם. זאת בעיה עקרונית ובמקרה זה אין תמיד דיפאומורפיזם.

**הגדרה 1.3.37 (ספירה אקזוטית).** יריעה  $N$  נקראת ספירה אקזוטית אם יש הומיאומורפיזם  $S^n \cong N$  אבל אין דיפאומורפיזם  $N \amalg S^n$ .

**עובדה 1.3.38 (מילנור).** יש 28 מבנים חלקים שונים על  $S^7$ .

**עובדה 1.3.39.** כל ספירה אקזוטית שהומיאומורפית ל־ $S^n$  עבור  $n \geq 7$  ניתן לבנות על ידי

$$N = \bar{B}_1^n \amalg \bar{B}_2^n$$

**הערה 1.3.40.** חשוב לדעת מה פונקציית ההדבקה  $\varphi$  כי זה משנה את  $M^{\leq a+\varepsilon}$  עד כדי דיפאומורפיזם.

## 1.4 קיום פונקציות מורס

**משפט 1.4.1.** תהי  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  תת־יריעה חלקה. כמעט לכל (לפי מידת לבג על הספירה) ישר  $\ell_v = \text{Span}(v)$  ההטלה האורתוגונלית על  $\ell_v$  היא פונקציית מורס.

**הערה 1.4.2.** למרות שהמשפט הנ"ל פשוט, הוא פחות נוח כאשר נתונה יריעה אבסטרקטית, שכן יש צורך קודם לשכן אותה, ואין בהכרח דרך נוחה לעשות זאת.

**מסקנה 1.4.3.** כל יריעה סגורה  $M^n$  ניתנת לשיכון ב־ $\mathbb{R}^N$ . לכן קיימות (לפחות  $2^{\aleph_0}$ ) פונקציות מורס על כל יריעה סגורה  $M$ .

**מסקנה 1.4.4.** פונקציית הגובה  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  היא פונקציית מורס.

הוכחה. כמעט לכל כיוון, ההטלה על  $\ell_v$  היא פונקציית מורס. אבל, הספירה סימטרית ולכן כל הטלה כזאת היא פונקציית מורס. ■

**משפט 1.4.5.** תהי  $M^m \subseteq \mathbb{R}^N$  תת־יריעה סגורה וחלקה. כמעט לכל  $x \in \mathbb{R}^N$  הפונקצייה

$$F_x: M \rightarrow \mathbb{R} \\ p \mapsto \|p - x\|^2$$

היא פונקציית מורס.

הוכחה למשפט זה קיימת בפרק 6 בספר של מילנור ובטענה 1.2.1 בספר של דמיאן. נראה סקיצה של ההוכחה.

הוכחה (אינטואיציה פיזיקלית).  $p \in M$  נקודה קריטית של  $F_x$  אם ורק אם  $x - p \perp T_p M$ .

• נקבע  $p \in M$ . נסתכל על  $v \in T_p M^\perp$  וקטור יחידה ונבחר  $x = p + sv$  עבור  $s \geq 0$ . בדרך זאת נקבל את כל ה־ $x \in \mathbb{R}^N$  עבורן  $p$  היא נקודה קריטית. קיימים  $r_1, \dots, r_k \geq 0$  עם  $k \leq \dim M$ , עבורן  $p$  נקודה קריטית מנוונת עבור  $F_x$ , אם ורק אם  $s \in \{r_1, \dots, r_k\}$ .  $s \in \{r_1, \dots, r_k\}$  תלויים ב־ $(p, v)$ , אם ורק אם  $s = r_i = \|x - p\|$ .

$r_1, \dots, r_k$  הם ה־principal radii  $\frac{1}{\text{pr.curvature}}$  בנקודה  $p$  בכיוון  $v$ .

• "ספירת מימדים": אוסף הנקודות  $x = p + sv$  ה"רעות" מקיים: אם  $p \in M$ ,  $\dim T_p M^\perp = \dim M - m$  ואז  $\dim \mathcal{U}(T_p M^\perp) = N - m - 1$  ולכן  $\dim \mathcal{U}(T_p M^\perp) = N - m - 1$  ואז  $N - m - 1 = m + (N - m - 1)$  קבוצת הזוגות היא  $(p, v)$  קבוצת הזוגות היא  $N - 1$  למימדית לכל היותר. לכל זוג יש קבוצה דיסקרטית (סיממטית) של נקודות אסורות, ולכן סך המימד הוא  $N - 1$ . לכן המידה היא 0. ■

הוכחה (הוכחה פורמלית). • נגדיר

$$T = \left\{ (p, \nu) \in M \times \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} p \in M \\ \nu \perp T_p M \end{array} \right\}$$

ונקרא לו האגד הנורמלי של  $M$  ב- $\mathbb{R}^N$ .

• תהי

$$\begin{aligned} E: T &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (p, \nu) &\mapsto p + \nu \end{aligned}$$

הנקודות הקריטיות של  $E$  מהוות קבוצה זניחה, ממשפט סארד.

**משפט 1.4.6.** תהי  $M$  יריעה קומפקטית. אז פונקציות מורס צפופות ב- $C^\infty(M, \mathbb{R})$  בטופולוגיה

$$C^k(M, \mathbb{R})$$

לכל  $k \geq 1$ .

הוכחה. תהי  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית חלקה. נסתכל על  $\iota: M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ , שקיים לפי משפט Whitney. נבנה שיכון חדש

$$\begin{aligned} h: M &\rightarrow \mathbb{R}^{N+1} \\ p &\mapsto (F(p), \iota(p)) \end{aligned}$$

נמעט לכל  $x = (-c + \varepsilon, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{N+1})$  עבור  $c \in \mathbb{R}$  ועבור  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N+1} \ll 1$  הפונקציה

$$\begin{aligned} f_x: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \|x - h(p)\|^2 \end{aligned}$$

היא פונקציית מורס. אז גם

$$g_x := \frac{f_x - c^2}{2c}$$

פונקציית מורס. חישוב נותן

$$\begin{aligned} g_x(p) &= \frac{1}{2c} \left( (-c + \varepsilon_1 - F(p))^2 + (i_1(p) - \varepsilon_2)^2 + \dots + (i_N(p) - \varepsilon_{N+1})^2 - c^2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2c} \left( c^2 + \varepsilon_1^2 + F(p)^2 + 2cF(p) + 2\varepsilon_1(-c - F(p)) - c + \sum_{k \in [N]} i_k(p)^2 + \sum_{k=2}^{N+1} \varepsilon_k^2 - 2 \sum_{k \in [N]} i_k(p) \varepsilon_{k+1} \right) \\ &= F(p) + \frac{F(p)^2}{2c} + \frac{2\varepsilon_1}{2c}(-c - F(p)) + \frac{1}{2c} \sum_{k \in [N]} i_k(p)^2 + \frac{1}{2c} \sum_{k \in [N+1]} \varepsilon_k^2 - \frac{1}{c} \sum_{k \in [N]} i_k(p) \varepsilon_{k+1} \\ &\xrightarrow[\varepsilon_j \rightarrow 0]{c \rightarrow \infty} F \end{aligned}$$

כנדרש.

**תרגיל 3.** הראו שפונקציות מורס מהוות קבוצה פתוחה ב- $C^\infty(M, \mathbb{R})$  בטופולוגיה  $C^2(M, \mathbb{R})$ . בפרט זאת קבוצה פתוחה בטופולוגיה  $C^k(M, \mathbb{R})$  לכל  $k \geq 2$  כולל  $k = \infty$ .

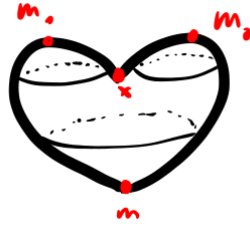
**מסקנה 1.4.7.** פונקציות מורס מהוות קבוצה פתוחה וצפופה בטופולוגיה  $C^k(M, \mathbb{R})$ .

**הערה 1.4.8.** המשפט הנ"ל עובד גם עבור  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ . במשפט הקודם קיבלנו

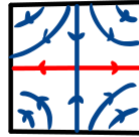
$$g_x(p) = F(p) + \frac{F(p)^2}{2c} + \frac{\varepsilon_1}{2c}(-2c - 2F(p)) + \frac{1}{2c} \sum_{k \in [N]} i_k(p)^2 + \dots$$

במשפט Whitney אין שליטה על הנגזרות הגבוהות, ולכן ההוכחה הנ"ל לא תעבוד עבור המשפט. קיימות בניית אחרות של קירוב של  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי פונקציות מורס, שכן מראות צפיפות גם בטופולוגיה  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ .





איור 1.17: שיכון לא סטנדרטי של הספירה ב- $\mathbb{R}^3$ .



איור 1.18: קווי הזרימה בנקודת אוקף של הספירה.

## 1.5 תתייריעות יציבות

**הגדרה 1.5.1.** תהי  $M^n$  יריעה סגורה, תהי  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית מורס ותהי  $g$  מטריקה רימנית. תהי  $\varphi_t: M \rightarrow M$  זרימה עבור  $-\nabla_g F$ . תהי  $p \in \text{Crit}(F)$ . נגדיר את תתייריעה היציבה של  $M$  ב- $p$  על ידי

$$W^S(p) = \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = p \right\}$$

נגדיר את תתייריעה הבלתייציבה של  $M$  ב- $p$  על ידי

$$W^U(p) = \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = p \right\}$$

**הערה 1.5.2.** עבור  $x \in M$  הנקודות

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi_t(x)$$

קריטיות. בפרט, לכל  $x \in M$  קיימות יחידות נקודות קריטיות  $p, q \in \text{Crit}(F)$  עבורן  $x \in W^U(p), W^S(q)$ . בפרט,

$$M = \coprod_{p \in \text{Crit}(F)} W^U(p) = \coprod_{q \in \text{Crit}(F)} W^S(q)$$

**דוגמה 1.5.3.** נסתכל על פונקציית גובה של  $S^N \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ . יש לספירה שתי נקודות קריטיות, קוטב "צפוני"  $N$  ו"דרומי"  $S$ . כאן  $W^S(S) = S^N \setminus \{N\}$  וגם  $W^S(N) = \{N\}$ . כמו כן,  $W^U(S) = \{S\}$  וגם  $W^U(N) = S^N \setminus \{S\}$ .

**הערה 1.5.4.** אם  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית מורס אז גם  $-F$ . מתקיים  $\text{Crit}(F) = \text{Crit}(-F)$  וקווי הזרימה שווים אך עם אוריינטציה הפוכה. לכן

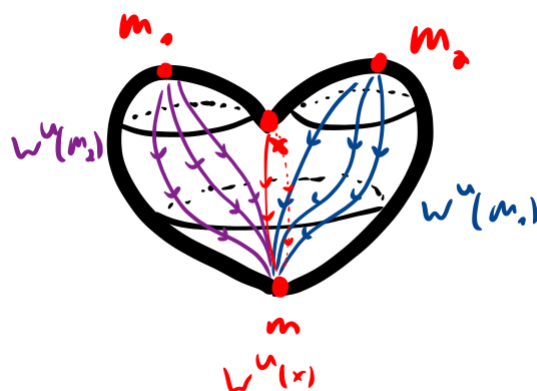
$$\begin{aligned} W_F^U(p) &= W_{-F}^S(p) \\ W_F^S(p) &= W_{-F}^U(p) \end{aligned}$$

לכל  $p \in \text{Crit}(F)$ .

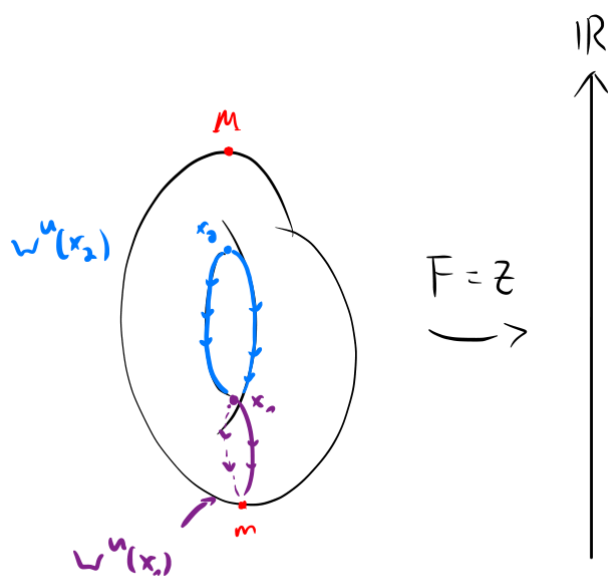
**הגדרה 1.5.5.** נסתכל על שיכון  $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  כמתואר באיור 1.17. מתקיים  $W^U(m) = \{m\}$  (ובדומה לכל נק' מינימום לוקלית). במפת מור

$$\hat{F} = F(x) - y - 1^2 + y_2^2$$

בסביבה של נקודת האוקף  $x$  קווי הזרימה מתוארים באיור 1.18. נקבל כי  $W^U(x)$  המשך של הקווים האדומים באיור, ובאופן דומה נקבל את  $W^U(M_i)$  כמתואר באיור 1.19.



איור 1.19: קווי זרימה על שיכון לא סטנדרטי של הספירה.



איור 1.20: יריעות יציבות ובלתי־יציבות על הטורוס.

**דוגמה 1.5.6.** נסתכל על פונקציית הגובה מהטורוס. ראו איור 1.20. מתקיים  $W^U(m) = \{m\}$ , הקבוצה  $W^U(x_1)$  היא עותק של  $S^1$  כמתואר באיור, ו- $W^U(M)$  היא כל שאר הטורוס.

**הערה 1.5.7.** בכל הדוגמאות,  $W^U(p)$  תת־יריעה של  $M$  שדיפאומורפית ל- $B^{\mu(p)}$  כאשר  $\mu(p)$  אינדקס מורס ב- $p$ .

**משפט 1.5.8.** תהי  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית מורס ותהי  $p \in \text{Crit}(F)$ .

1. קיים פיצול  $T_p M = T_p^S F \oplus T_p^U F$  כאשר  $\text{Hess}_p$  מוגדר חיובית על  $T_p^S F$  ושלילית על  $T_p^U F$ .

2. קיימים שיכונים חלקים

$$\begin{aligned} E^S &\hookrightarrow T_p^S F \rightarrow M \\ E^U &\hookrightarrow T_p^U F \rightarrow M \end{aligned}$$

עבורם

$$\begin{aligned} W^U(p) &= \text{Im}(E^U) \\ W^S(p) &= \text{Im}(E^S) \end{aligned}$$

3. מתקיים

$$\begin{aligned} T_p W^U(p) &= T_p^U F \\ T_p W^S(p) &= T_p^S F \end{aligned}$$

4.  $\text{Hess}_p(F)$  מוגדר חיובית על  $T_p W^S(p)$  ומוגדר שלילית על  $T_p W^U(p)$ .

5. בפרט, קיים דיפאומורפיזם

$$W^U(p) \cong T_p^U F \cong \mathbb{R}^{\mu(p)} \cong B^{\mu(p)}$$

ובאותו אופן

$$W^S(p) \cong B^{\dim M - \mu(p)}$$

נציג הוכחה חלקית של המשפט. עבור הוכחה מפורטת ראו banyaga.

הוכחה. • נניח שבסביבת מורס  $U$  של  $p$  מתקיים

$$\hat{F} = F(p) - \|x_I\|^2 + \|x_J\|^2$$

ולפיה  $\hat{g}$  מטריקה אוקלידית. תחת המפה מתקיים

$$\begin{aligned} W^U(p) \cap U &= \mathbb{R}^i \times \{0\} \cap U \\ W^S(p) \cap U &= \{0\} \times \mathbb{R}^{n-i} \cap U \end{aligned}$$

וכן

$$T_p M = \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^i \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-i}) = T_p W^U(p) \oplus T_p W^S(p)$$

• נגדיר

$$B_1 = \{(X_I, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-i} \mid \|x_I\|^2 < \varepsilon\} = W^U(p) \cap \{F > F(p) - \varepsilon\} \cong B^i$$

נגדיר גם  $B_N = \varphi_N(B_1)$  כאשר  $\varphi_t$  הזרימה של  $-\nabla F$ . ניתן לבדוק שמתקיים

(i) יש דיפאומורפיזם

$$B_N \cong B^i$$

(ii)

$$W^U(p) = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$$

(iii) יש אימרסיה מ- $B_N$  ל- $M$ .

(iv) יש שיכון מ- $B_N$  ל- $M$ .

(v)  $\bigcup_{N=1}^{\infty} B_n \cong B^i$

אפשר לעשות הכל באופן דומה עבור  $W^S(p)$ .

• בסביבת מורס  $U$  של  $p$  מתקיים

$$\hat{g} = \sum g_{k,\ell} dx_k dx_\ell$$

כאשר זאת תבנית קבועה עם  $g_{k,\ell}$  שאינה תלויה ב- $p$ . אז

$$\hat{F} = F(p) + x^t \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} x$$

ונקבל 2 תבניות בילינאריות סימטריות על  $\mathbb{R}^n$ , שאחת מהן מכפלה פנימית.

מאלגברה לינארית, קיים שינוי קואורדינטות לינארי

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto y = Ax$$

שמלכסן סימולטנית את שתי התבניות. יתר על כן,

$$\hat{g} = \sum_{k \in [n]} dy_k^2$$

$$\hat{F} = F(p) + y^t \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -\lambda_i & & \\ & & & \lambda_{i+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} y$$

אז בקואורדינטות לפי  $y$  מתקיים

$$\hat{F} = F(p) - \sum_{k=1}^i \lambda_k y_k^2 + \sum_{k=i+1}^n \lambda_k y_k^2$$

$$\hat{g} = \sum_{k \in [n]} dy_k^2$$

כמו מקודם, נקבל

$$W^U(p) \cap \{F > F(p) - \varepsilon\} = \left\{ (y_I, 0) \mid \sum_{k=1}^i \lambda_k y_k^2 < \varepsilon \right\} \cong B^i$$

• במקרה הכללי, מתקיים בסביבת מורס

$$\hat{F} = F(p) - \|x_I\|^2 + \|x_J\|^2$$

$$\hat{g}_{(x)} = \sum g_{k,\ell}(x) dx_k dx_\ell$$

וכמו במקרה הקודם ניקח שינוי קואורדינטות עבורו

$$\hat{g}(0) = \sum dy_k^2$$

אז

$$\hat{F} = F(p) - \sum_{k=1}^i \lambda_k y_k^2 + \sum_{k=i+1}^n \lambda_k y_k^2$$

$$\hat{g} = \sum g'_{k,\ell}(y) dy_k dy_\ell$$

$$g'_{k,\ell} = \delta_{k,\ell}$$

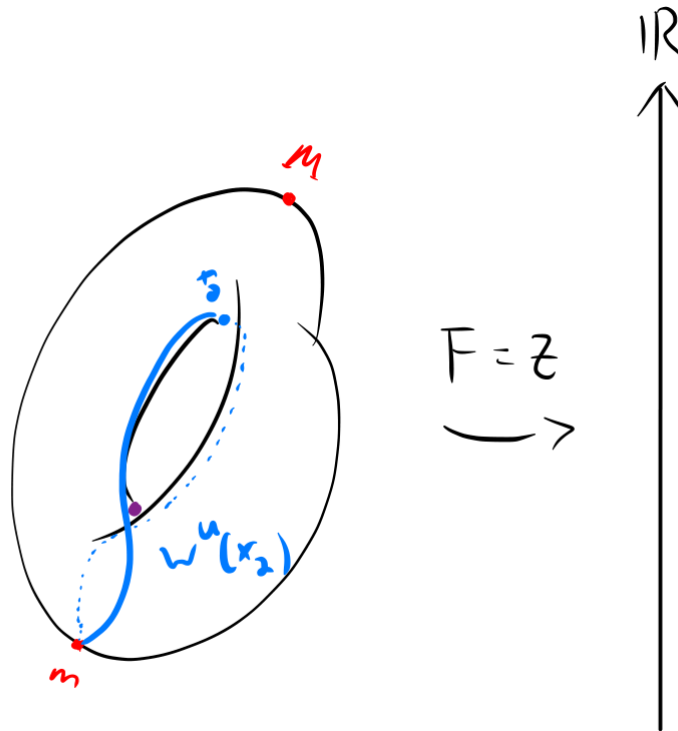
בסביבת 0, והמטריקה היא דפורמציה קטנה של המטריקה הסטנדרטית.

אז שדה הגרדיאנט הוא דפורמציה קטנה של המקרה הקודם ואז  $W^U(p)$  הוא דפורמציה קטנה של קבוצת הפתרונות במקרה הקודם. (עדיין מתקיים

$$T_p W^U(p) = \mathbb{R}^I \times \{0\}$$

כאשר  $W^U(p)$  הוא גרף של  $f: \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^J$ .

■



איור 1.21: שיכון של הטורוס בזווית.

קיבלנו

$$M = \coprod_{f_p p \in \text{Crit}(F)} W^U(p)$$

עבור פונקציות הדבקה  $M \rightarrow \partial B^{\mu(p)}$ ,  $f_p$ . אז כל יריעה נראית כמו קומפלקס CW. **הגדרה 1.5.9 (קומפלקס CW)**. מרחב טופולוגי הוא קומפלקס CW אם קיימת סדרה

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X^N$$

עבורה

(i)  $X^0$  קבוצת נקודות מבודדות.

(ii)  $X^{N+1}$  מתקבל מ- $X^N$  על ידי הדבקות כדורים במימד  $N+1$ :

$$X^N \cup X^{N-1} \cup_{f_1^N} B_1^N \cup \dots \cup_{f_k^N} B_k^N \cup \dots$$

עבור  $B_i^N \cong B^N$  כדורים פתוחים ועבור  $f_i^N: \partial B_i^N \rightarrow X^{N-1}$  עם תמונה שמוכלת במספר סופי של תאים.

קבוצה  $U \subseteq X$  פתוחה אם ורק אם כל  $U \cap B_i^N$  פתוחה. הקבוצה  $X^i$  נקראת השלד ה- $i$  מימדי.

**הערה 1.5.10**. הפירוק  $M = \coprod W_{(p)}^U$  לא תמיד מתאים לקומפלקס CW. בדוגמא שבאיור 1.20 השפה של  $W^U(x_2) \cong B^1$  מודבקת ל- $B^1 \cong W^U(x_1)$ , מה שהורס את המבנה של הקומפלקס CW. אבל, אם נסובב מעט את הטורוס נקבל כי הזרימה מ- $x^2$  מפספסת את  $x^1$ . אז

$$\partial W^U(x_2) \rightarrow \{m\} \cong W^U(m) \cong B^0$$

ונקבל שהשפה של  $W^U(x_2) \cong B^1$  מודבקת ל- $B^0$ , מה שמסתדר עם המבנה של הקומפלקס. ראו איור 1.21. במקרה זה הבעיה הייתה שקווי הזרימה מ- $x_2$  הגיעו לנקודה עם אינדקס לא מתאים. אם  $\gamma$  קו גרדיאנט שמחבר בין  $x_2, x_1$  אז  $\mu(x_1) = \mu(x_2)$  או לכל  $x \in \gamma$  מתקיים

$$x \in W^U(x_2) \cap W^S(x_1)$$

כלומר,

$$\gamma \subseteq W^U(x_2) \cap W^S(x_1)$$

מתקיים  $B^1 \cong W^S(q) \cap W^U(x_2)$  והיינו מצפים שהחיתוך של שני כדורים 1-מימדיים יהיה 0-מימדי. כדי לפתור זאת, נרצה שהחיתוך בין התת-יריעות יהיה טרנסוורסלי.

כאשר נדרוש  $W^U(p) \cap W^S(q) \neq \emptyset$  לכל  $p, q \in \text{Crit}(F)$ , נקבל כי  $W^U(p) \cap W^S(q)$  תת־יריעה. אז מתקיים

$$\dim(W^U(p) \cap W^S(q)) = (\mu(p) + n - \mu(q)) - n = \mu(p) - \mu(q)$$

אם  $W^U(p) \cap W^S(q) \neq \emptyset$  נקבל כי  $\dim(W^U(p) \cap W^S(q)) \geq 1$ , כי יש קו זרימה בפנים. אז

$$\mu(p) \geq \mu(q) + 1$$

נקבל מכך כי  $\mu$  קטן ממש בין קצוות של קו זרימה.

## 1.6 קומפלקסי CW ותנאי Morse-Smale

**הגדרה 1.6.1.** תהי  $F$  פונקציית מורס ותהי  $g$  מטריקה רימנית. הזוג  $(F, g)$  נקרא Morse-Smale אם  $W^U(p) \cap W^S(q) = \emptyset$  לכל  $p, q \in \text{Crit}(M)$ .

**מסקנה 1.6.2.** 1. אם  $W^U(p) \cap W^S(q) \neq \emptyset$  (או באופן שקול, אם יש עקום בחיתוך) אז  $\mu(p) > \mu(q)$ .

2. כדי שיהיה מבנה של קומפלקס CW על  $M$ , נסתכל על  $\partial W^U(p)$ . אז יש  $q \in M$  עבורה  $x \in W^U(q)$ . נדרוש במקרה זה  $\mu(q) < \mu(p)$ .

**טענה 1.6.3.** אם במקרה הנ"ל גם  $q \in \overline{W^U(p)}$  אז גם

$$W^U(q) \subseteq \overline{W^U(p)}$$

וקו הזרימה  $\gamma: p \rightarrow q$  מוכל ב־ $W^U(p) \cap W^S(q)$ . בתנאי Morse-Smale גם מתקיים  $\mu(q) < \mu(p)$  ואז מתקבל מבנה של קומפלקס CW.

**הערה 1.6.4.** התאים בקומפלקס ה־CW הם  $W^U(p)$  עבור  $p \in \text{Crit}(F)$ . נקבל כי

$$\dim H_*(\text{CW-complex}) \leq \#\{\text{cells}\} = \#\text{Crit}(F)$$

נראה זאת בדרך נוספת כאשר נדון בהומולוגיית מורס.

**הערה 1.6.5.** הפירוק  $M = \coprod W^U(p)$  קרוב מאוד לבנייה של  $M$  (עד כדי שקילות הומוטופית) תוך הנקודות הקריטיות, שראינו בתחילת הקורס.

**הגדרה 1.6.6 (קבוצה גנרית).** יהי  $X$  מרחב טופולוגי. קבוצה  $A \subseteq X$  נקראת גנרית אם היא מכילה חיתוך בן־מנייה של קבוצות פתוחות וצפופות.

**הגדרה 1.6.7 (מרחב Baire).** מרחב טופולוגי נקרא Baire אם כל קבוצה גנרית בו היא צפופה.

**משפט 1.6.8 (Kupka-Smale).** זוגות Morse-Smale מהווים קבוצה גנרית במרחב  $\text{RM}(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$  כאשר  $\text{RM}(M)$  מרחב המטריקות הרימניות על  $M$ .

**הערה 1.6.9.** למשפט הנ"ל מספר גרסאות אחרות.

1. תהי  $g$  מטריקה רימנית על  $M$ . פונקציית מורס  $F$  עבורן  $(F, g)$  זוג Morse-Smale הן קבוצה גנרית ב־ $C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

2. תהי  $F$  פונקציית מורס. אזי

$$\{g \mid (F, g) \text{ Morse-Smale is}\}$$

קבוצה גנרית ב־ $\text{RM}(M)$ .

3. תהי  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית מורס ותהי  $\{U_p\}_{p \in \text{Crit}(F)}$  סביבות זרות של הנקודות הקריטיות, עם מטריקות רימניות  $g_p$ . אז

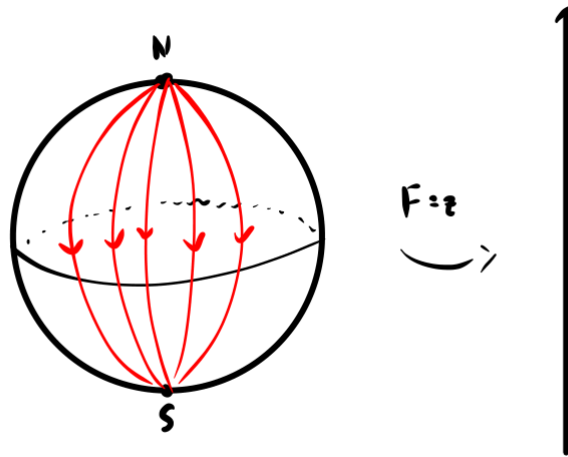
$$\left\{ g \mid \begin{array}{l} (F, g) \text{ Morse-Smale is} \\ g|_{U_p} = g_p \end{array} \right\}$$

קבוצה גנרית ב־

$$\{g \mid g|_{U_p} = g_p\}$$

**סימון 1.6.10.** עבור  $p, q \in \text{Crit}(F)$  נסמן

$$\mu(p, q) := W^U(p) \cap W^S(q) = \left\{ x \in M \mid \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = p \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = q \end{array} \right\}$$



איור 1.22: שיון סטנדרטי של הספירה.

**הערה 1.6.11.** בתנאי Morse-Smale,  $\mu(p, q)$  תת־יריעה ממימד  $\mu(p) - \mu(q) \geq 1$  (כאשר החיתוך לא ריק ועבור  $p \neq q$ ).

**הערה 1.6.12.**  $\mathbb{R}$  פועלת על  $\mu(p, q)$  לפי

$$t \cdot x = \varphi^t(x)$$

מסלולי הפעולה הם קווי הזרימה.  
נסמן

$$\hat{\mu}(p, q) := \mu(p, q) / \mathbb{R}$$

וזאת קבוצת קווי הזרימה בין  $p, q$ .

**תרגיל 4.** על  $\hat{\mu}(p, q)$  יש מבנה טבעי של יריעה.

**פתרון. דרך 1:**  $\mathbb{R}$  פועלת חופשית על  $\mu(p, q)$  לכן מתורת חבורות לי מקבלים כי המנה  $\hat{\mu}(p, q)$  היא יריעה.

**דרך 2:** נבחר  $c \in (F(p), F(q))$  ערך רגולרי. אז  $\mu(p, q) \cap F^{-1}(c)$  תת־יריעה ממימד  $\mu(p, q) - 1$ . כיוון שהזרימה מונוטונית יורדת נקבל התאמה 1:1

$$\hat{\mu}(p, q) \leftrightarrow \mu(p, q) \cap F^{-1}(c)$$

זאת משרה מבנה של יריעה על  $\hat{\mu}(p, q)$ . בדקו כי מבנה זה אינו תלוי (עד כדי דיפאומורפיזם) בערך  $c$ .

**תרגיל 5.** 1. מתקיים

$$\dim \hat{\mu}(p, q) = \dim \mu(p, q) \stackrel{M.S.}{\mu}(p) - \mu(q) - 1$$

2. אם  $\hat{\mu}(p, q)$  ממימד 0, ומתקיים תנאי Morse-Smale, אז  $\hat{\mu}(p, q)$  קבוצה סופית.

**דוגמה 1.6.13.** נסתכל על הספירה עם פונקציית הגובה. ראו איור 1.22. אז  $\mu(N, S) = S^n \setminus \{N, S\}$  מתקיים

$$\dim \mu(N, S) = n = \underbrace{\mu(N)}_{=n} - \underbrace{\mu(S)}_{=0}$$

לפי ההתאמה שראינו, אפשר לזהות את  $\mu(N, S)$  עם קו־גובה של  $\mu(S, N)$ . אז  $\hat{\mu}(N, S) \cong S^{n-1}$  קו המשווה, והמימד הוא  $\mu(N) - \mu(S) - 1$ .

**דוגמה 1.6.14.** נענין באיור 1.19. מתקיים

$$\dim \mu(M_2, x) = 1$$

$$\dim \mu(M_1, x) = 1$$

$$\dim \mu(x, m) = 1$$

כאשר בשתי הקבוצות הראשונות קו זרימה יחיד ובשלישית שניים. אז  $\hat{\mu}(x, m) = \{\gamma_1, \gamma_2\}$  במקרה השלישי. מתקיים גם כי  $\mu(M_2, m)$  החצי הימני של הספירה, שהינו ממימד 2. אז  $\hat{\mu}(M_2, m)$  קטע פתוח, לפי הסתכלות על קו גובה, וזה ממימד 1.

**דוגמה 1.6.15.** באיור 1.20  $\mu(x_2, x_1)$  איחוד שני קטעים פתוחים, והינו ממימד 1. זה לא שווה ל־ $\mu(x_2) - \mu(x_1)$ , כיוון שלא מתקיים תנאי Morse-Smale.

## 1.6.1 הומומולוגיית מורס

**סימון 1.6.16.** נסמן ב- $\text{Crit}_k(F)$  את הנקודות הקריטיות מאינדקס  $k$  של  $F$ .

**הגדרה 1.6.17 (קומפלקס מורס).** תהי  $M$  יריעה עם זוג Morse-Smale  $(F, g)$ .

1. נגדיר

$$C_k := C_k(F) = \mathbb{Z}_2 \langle \text{Crit}_k(F) \rangle$$

2. נגדיר

$$\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$$

על יוצרים באופן הבא. עבור  $p \in \text{Crit}_k(F)$  נגדיר

$$\partial_k(p) = \sum_{q \in \text{Crit}_{k-1}(F)} n_2(p, q) \cdot q$$

עבור

$$n_2(p, q) = \# \hat{\mu}(p, q) \pmod{2}$$

מספר קווי הגרדינט בין  $p, q$  מודולו 2.

**משפט 1.6.18.** עבור יריעה  $M$  ממימד  $n$  הסדרה

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0$$

מקיימת  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0: C_k \rightarrow C_{k-2}$  לכל  $k$ .

לאור משפט זה, ניתן להגדיר הומומולוגיה באופן הבא.

**הגדרה 1.6.19 (הומומולוגיית מורס).** נגדיר את ההומומולוגיה ה- $k$ ית של  $M$  לפי  $(F, g)$  על ידי

$$H_k(F, g; \mathbb{Z}_2) := \ker(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})$$

**הגדרה 1.6.20.** נגדיר

$$H_*(F, g; \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{i=0}^n H_i(F, g; \mathbb{Z}_2)$$

**דוגמה 1.6.21.** באיור 1.22 נסתכל על  $g$  המטריקה האוקלידית. אז  $\mu(S) = n, \mu(N) = 0$ . מתקיים לכן

$$C_n = \mathbb{Z}_2 \langle N \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\forall 0 < k < n: C_k = 0$$

$$C_0 = \mathbb{Z}_2 \langle S \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

אם  $n \geq 2$  נקבל  $\partial_k = 0$  לכל  $k$  ואז

$$C_k = H_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k \in \{0, n\} \\ 0 & k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

אם  $n = 1$  נקבל

$$0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

כאשר  $C_0, C_1 \cong \mathbb{Z}_2$ . אז

$$\partial_1(N) = n_2(N, S) \cdot S$$

כאשר

$$n_2(N, S) = \# \hat{\mu}(N, S) = 2 \equiv 0 \pmod{2}$$

אז  $\partial_1 = 0$  וגם כאן

$$H_k = C_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k \in \{0, 1\} \\ 0 & k \notin \{0, 1\} \end{cases}$$



**דוגמה 1.6.22.** נענין באיור 1.19. כאן

$$\begin{aligned}C_2 &= \mathbb{Z}_2 \langle M_1, M_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2^2 \\C_1 &\cong \mathbb{Z}_2 \\C_0 &\cong \mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

מתקיים

$$\partial_2(M_1) = n_2(M, x) \cdot x = x$$

כי יש מסלול יחיד מ־ $M_2$  ל־ $x$ . באותו אופן,  $\partial_1(M_2) = x$ . מתקיים  $\partial_1(x) = 2 \cdot m = 0$  כי יש שני מסלולים מ־ $x$  ל־ $m$ .  
כעת,

$$\begin{aligned}H_2 &= \ker \partial_2 / \text{Im } \partial_3 \\&= \ker \partial_2 \\&= \{0, M_1 + M_2\} \\&\cong \mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

לפי אלגברה לינארית. גם

$$\begin{aligned}H_1 &= \ker \partial_1 / \text{Im } \partial_2 \\&= 0\end{aligned}$$

כי

$$\ker \partial_1 \supseteq \text{Im } \partial_2 = c_1 \supseteq \ker \partial_1$$

לבסוף,

$$H_0 = \ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1 \cong C_0 \cong \mathbb{Z}_2$$

לסיכום,

$$H_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k = 2 \\ 0 & k = 1 \\ \mathbb{Z}_2 & k = 0 \end{cases}$$

נשים ♥ שזה גם מה שקיבלנו בספירה לפי המטריקה האוקלידית, ואכן ההומולוגיה אינה תלויה בבחירת המטריקה הרימנית.

**דוגמה 1.6.23.** באיור 1.23 נשים לב כי כל קווי הזרימה באים בזוגות. לכן  $n_2 = 0$  ולכן  $\hat{\mu}(x, y) = 0$  לכל  $x, y$ . אז  $\partial_* = 0$  ונקבל כי

$$H_k = C_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k = 2 \\ \mathbb{Z}_2^2 & k = 1 \\ \mathbb{Z}_2 & k = 0 \end{cases}$$

**דוגמה 1.6.24.** בדוגמא האחרונה קווי הזרימה נהיים די מסובכים. אפשר במקרה זה לחשב את ההומולוגיה בדרך אחרת. נכתוב  $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$  ותהי

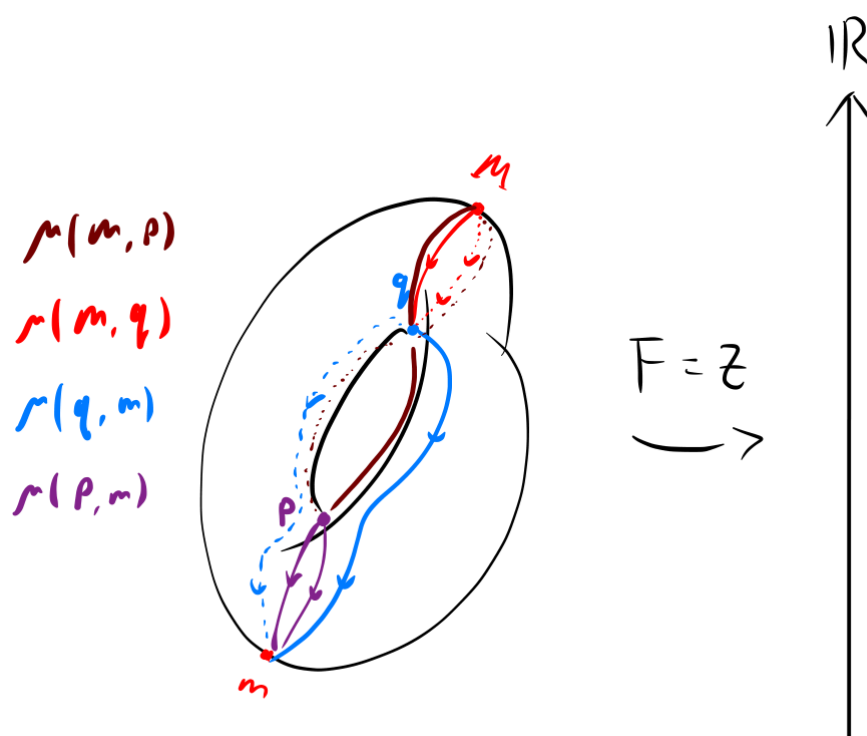
$$\begin{aligned}F: \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\(x, y) &\mapsto f(x) + f(y)\end{aligned}$$

כאשר  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית גובה עם השיכון של  $S^1$  ב־ $\mathbb{R}^2$  כבאיור 1.24 ניתן לראות שמתקיים

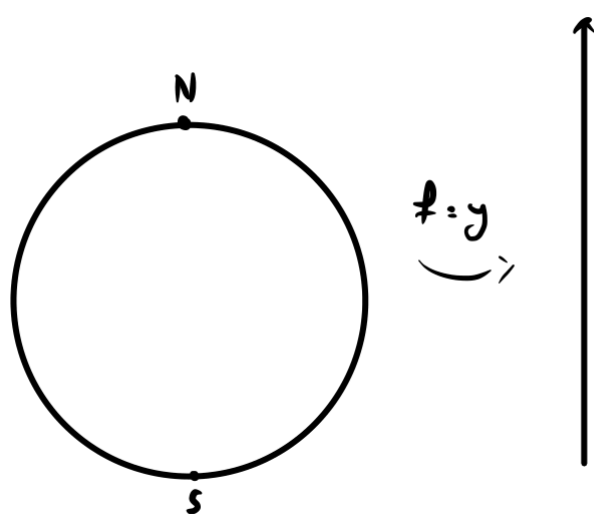
$$\text{Crit}(F) = \text{Crit}(f) \times \text{Crit}(f) = \{(N, N), (S, S), (N, S), (S, N)\}$$

מתקיים

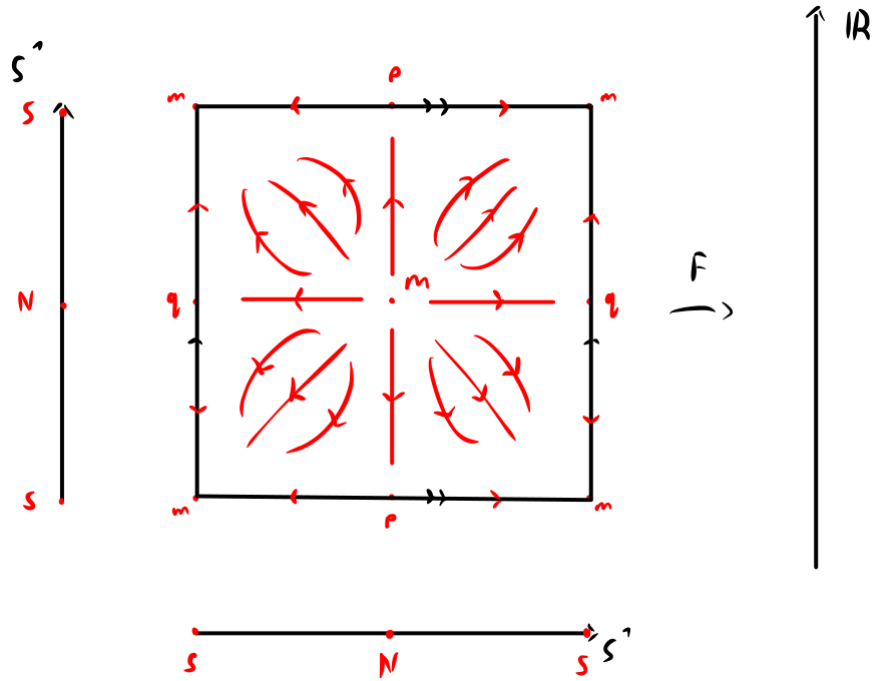
$$\begin{aligned}\mu((N, N)) &= 2 \\ \mu((S, S)) &= 0 \\ \mu((N, S)) &= \mu((S, N)) = 1\end{aligned}$$



איור 1.23: שיכון של הטורוס בזווית.



איור 1.24: שיכון סטנדרטי של  $S^1$  ב- $\mathbb{R}^2$ .



איור 1.25: קווי זרימה על הטורוס.

נוכל לאייר את קווי הזרימה על ההצגה הסטנדרטית של הטורוס. ראו איור 1.25. בו קווי הזרימה מתוארים באדום. ניתן גם כאן לראות כי כל קווי הזרימה מגיעים הזוגות, ולכן  $\partial_* = 0$  ונקבל

$$H_k = C_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k = 2 \\ \mathbb{Z}_2^2 & k = 1 \\ \mathbb{Z}_2 & k = 0 \end{cases}$$

במקרה הזה קל יותר לבדוק כי הזוג  $(F, g)$  הוא Morse-Smale. כדי לראות זאת, נזיז את הנקודות באיור ונציג את הטורוס כבאיור 1.26 תחת פרטורביצה קטנה, קווי הזרימה שאנו סופרים מגיעים לאותם מקומות. אז עדיין  $\partial_* = 0$  ונקבל את אותן הומומולוגיות. אז יתקיים תנאי Morse-Smale ואכן ניתן לחשב את ההומומולוגיה.

**דוגמה 1.6.25.** נסתכל על משטח  $\Sigma_g$  מגנוס  $g$  כמתואר באיור 1.27 וכאשר נחשוב על המצולע היסודי כמצולע היפרבולי. נגדיר פונקציה

$$F: \Sigma_g \rightarrow \mathbb{R}$$

עם נקודת מינימום  $m$ , נקודת מקסימום  $M$  ונקודות אופך  $x_i, y_i$  על ידי כך שנגדיר את הפונקציה בסביבת כל  $x_i, y_i$  ונדביק הכל בעזרת פיצול יחידה. מתקיים

$$\begin{aligned} C_2 &= \mathbb{Z}_2 \langle M \rangle \\ C_1 &= \mathbb{Z}_2 \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g \rangle \\ C_0 &= \mathbb{Z}_2 \langle m \rangle \end{aligned}$$

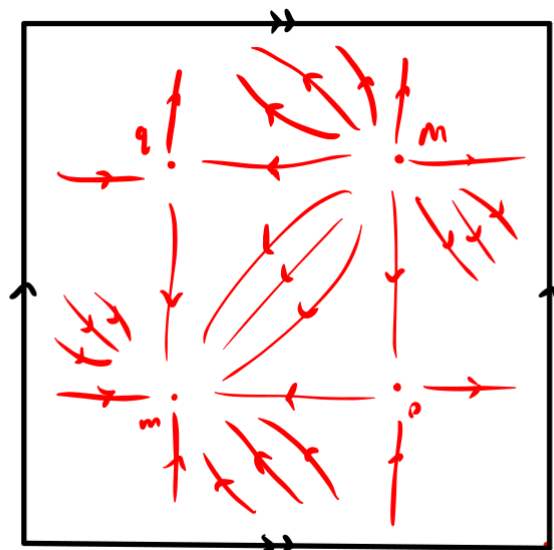
וגם  $\partial M = 0$ , לכן  $\partial x_i, \partial y_i = 0$  ונקבל כי  $\partial_* = 0$ . אז

$$H_k = C_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k \in \{0, 2\} \\ \mathbb{Z}_2^{2g} & k = 1 \end{cases}$$

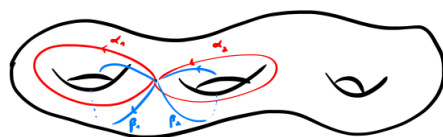
**תרגיל 6.** חשבו את ההומומולוגיה בעזרת פונקציית גובה של שיקון  $\mathcal{U}: \Sigma_g \rightarrow \mathbb{R}^g$ .

**תרגיל 7.** נסתכל על  $\mathbb{CP}^n$  ונגדיר פונקציה

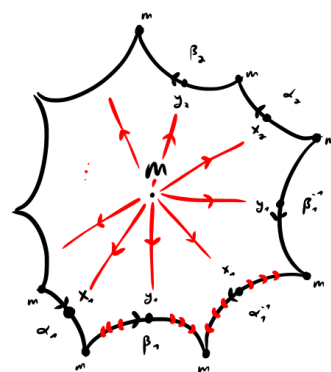
$$\begin{aligned} f: \mathbb{CP}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ [z_0 : \dots : z_n] &\mapsto \frac{\sum_{j=0}^n j |z_j|^2}{\sum_{j=0}^n |z_j|^2} \end{aligned}$$



איור 1.26: קווי זרימה על הטורוס.



(ב) משטח מגנוס g.



(א) קווי זרימה על התחום היסודי של משטח מגנוס g.

איור 1.27

בדקו כי  $f$  פונקציית מורס וכי

$$\text{Crit}_\mu(F) = \begin{cases} [1 : 0 : \dots : 0] & \mu = 0 \\ [0 : 1 : 0 : \dots : 0] & \mu = 2 \\ \vdots & \\ [0 : \dots : 0 : 1] & \mu = 2n \end{cases}$$

הסיקו כי  $\partial = 0$  וכי אז

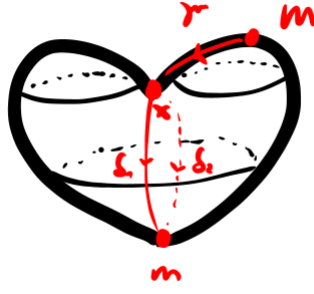
$$H_k = C_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k \in \{0, 2, \dots, 2n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

**תרגיל 8.** הגדרנו

ומתקיים

לכן

$$\dim H_k(F, g) \leq \dim C_k(F, g) = \#\text{Crit}_k(F)$$



איור 1.28: טרקטוריות על הספירה.

בפרט,

$$\# \text{Crit}(F) \geq \dim H_*(M)$$

ניתן לקבל מכך למשל כי על  $\mathbb{T}^2$  לכל פונקציית מורס יש לפחות 4 נקודות קריטיות ולפחות 2 נקודות אוקף.

### תרגיל 9. בנו

$$f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

חלקה עם 3 נקודות קריטיות בלבד.

**טענה 1.6.26.** מתקיים  $\partial \circ \partial = 0$ .

נתחיל בהסבר אינטואיטיבי לכך שמתקיים  $\partial^2 = 0$ . נסתכל על  $p \in \text{Crit}_k(F)$  ונרצה להראות שמתקיים  $\partial_{k-1} \circ \partial_k(p) = 0$  מתקיים

$$\begin{aligned} \partial_{k-1} \circ \partial_k(p) &= \partial_{k-1} \left( \sum_{z \in \text{Crit}_{k-1}(F)} n_2(p, z) \cdot z \right) \\ &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-1}} n_2(p, z) \partial_{k-1}(z) \\ &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-1}} n_2(p, z) \cdot \left( \sum_{q \in \text{Crit}_{k-2}} n_2(z, q) \cdot q \right) \\ &= \sum_{\substack{z \in \text{Crit}_{k-1} \\ q \in \text{Crit}_{k-2}}} n_2(p, z) \cdot n_2(z, q) \cdot q \end{aligned}$$

ולכן די להראות שמתקיים

$$\sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}} n_2(p, z) \cdot n_2(z, q)$$

לכל  $q \in \text{Crit}_{k-2}$ . המספר  $n_2(p, z) \cdot n_2(z, q)$  הוא מספר זוגות המסלולים שמתחילים ב־ $p$ , עוצרים ב־ $z$  וממשיכים ל־ $q$ . זוג כזה טרקטוריה שבורה broken gradient trajectory.

### דוגמה 1.6.27. באיור 1.28 מתקיים

$$n_2(M, x) \cdot n_2(x, m) = \# \{ \delta_1 * \gamma, \delta_2 * \gamma \} = 2 \equiv 0 \pmod{2}$$

נסביר למה זה קורה. נחתוך את הלב לשניים ונסתכל על החצי הימני שלו כמתואר באיור 1.29. כעת,

$$\dim \mu(M, m) = \mu(M) - \mu(m) = 2 \dim \hat{\mu}(M, m) = 1$$

וניתן לראות כי

$$\hat{\mu}(M, m) \cong (0, 1)$$

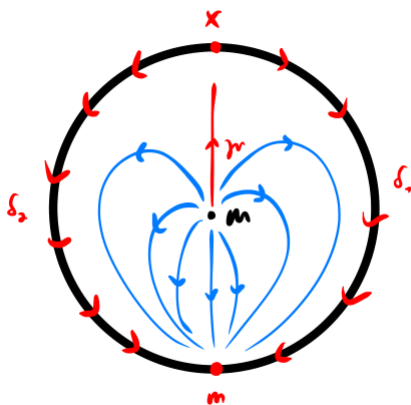
בשפה של  $\hat{\mu}$  רואים את  $\gamma \cup \delta_i$  בשני הקצוות.

### דוגמה 1.6.28. נסתכל באיור 1.25. מתקיים

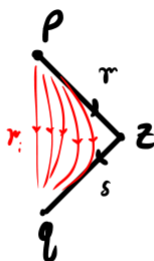
$$\partial(\hat{\mu}(M, m)) = \partial^2(M) = 8 \cdot m \equiv 0 \pmod{2}$$

כאשר  $\hat{\mu}(M, m)$  דיפאומורפי לאיחוד של 4 קטעים פתוחים.

נראה בהמשך שיש התאמה בין טרקטוריות שבורות לבין נקודות שפה של  $\hat{\mu}(p, q)$ , ונקבל מכך ש־ $n_2(p, z) \cdot n_2(z, q)$  זוגי.



איור 1.29: קווי זרימה על חצי ספירה.



איור 1.30: טרקטוריות שמתכנסות לשתי מסילות שונות.

קומפקטיפיקציה של  $\hat{\mu}(p, q)$ 

**הגדרה 1.6.29 (טופולוגיה על קווי זרימה).** תהי  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  סדרה של קווי זרימה  $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow M$  עם

$$\frac{\partial}{\partial s} \gamma_i = \nabla F(\gamma_i(s))$$

נגיד ש- $\gamma \rightarrow \gamma_i$  אם  $\gamma_i \rightarrow \gamma$  במידה שווה על קבוצות קומפקטיות. כלומר, אם  $K \subseteq \mathbb{R}$  קומפקטית אז

$$\gamma_i|_K \xrightarrow{C^\ell} \gamma|_K$$

במידה שווה, לכל  $\ell \geq 0$  (אבל לאו דווקא עבור  $\ell = \infty$ ).

**תרגיל 10.** יש דיפאומורפיזם בין  $\mu(p, q)$  למרחב הטרקטוריות  $M(p, q)$ . אם  $\gamma_i, \gamma \in M(p, q)$ , ההתכנסות  $\gamma_i \rightarrow \gamma$  שקולה להתכנסות בטופולוגיה שהגדרנו על  $\mu(p, q)$ .

**הערה 1.6.30.** ההתכנסות במידה שווה על קבוצות קומפקטיות היא בעלת משמעות גם כאשר נקודות הקצה של  $\gamma$  שונות מאלה של  $\gamma_i$ . זה נכון כיוון שאנו מסתכלים על מסילות עם פרמטריזציה. למשל, באיור 1.30 המסילות  $\gamma_i$  יכולות להתכנס ל- $\gamma$  או  $\delta$ , תלוי בפרמטריזציה. לשם כך, נגדיר התכנסות שאינה תלויה בפרמטריזציה. אז המסילות  $\gamma_i$  יתכנסו גם ל- $\gamma$  וגם ל- $\delta$ .

## הגדרה 1.6.31 (מסילה בלי פרמטריזציה). ניזכר כי

$$\hat{\mu}(p, q) = \mu(p, q)/\mathbb{R}$$

עבור מסילה  $\gamma: M \rightarrow \mathbb{R}$  נסתכל על מחלקת השקילות  $\hat{\gamma} \in \hat{\mu}(p, q)$  ונקרא לה מסילה בלי פרמטריזציה.

**הערה 1.6.32.** מסילה בלי פרמטריזציה הינה תלויה בפרמטריזציה, אך לא בבחירת הזמן  $t = 0$ .

**הגדרה 1.6.33 (התכנסות של מסילות בלי פרמטריזציה).** עבור מסילות  $\gamma, \gamma_i$ , נגיד שיש התכנסות של מסילות בלי פרמטריזציה  $\hat{\gamma}_i \rightarrow \hat{\gamma}$  אם קיימות הזזות  $s_i, s_0 \in \mathbb{R}$  עבורן

$$\gamma_i(\cdot - s_i) \rightarrow \gamma(\cdot - s_0)$$

במידה שווה על קבוצות קומפקטיות.

**הערה 1.6.34.** מרחב המסילות בלי פרמטריזציה, עם ההתכנסות שהגדרנו, אינו האוסדורף, כפי שתיארנו בהערה הקודמת.

**הערה 1.6.35.** ראינו דרך נוספת להגדיר טופולוגיה על  $\hat{\mu}(p, q)$ , בעזרת חתך על קו גובה. אם נרחיב טופולוגיה זאת ל- $F^{-1}(c) \cap \overline{\hat{\mu}(p, q)}$ , נקבל  $\hat{\gamma} \rightarrow \hat{\gamma}_i$  או אם נבחר קו גובה אחר  $c'$  נקבל  $\hat{\delta} \rightarrow \hat{\gamma}_i$ .

**הגדרה 1.6.36 (טרקטוריה שבורה (broken trajectory)).** טרקטוריה שבורה בין נקודות  $x, y \in \text{Crit}(F)$  היא סדרה של מסלולים

$$(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_k) \in \hat{\mu}(z_0 = x, z_1) \times \hat{\mu}(z_1, z_2) \times \dots \times \hat{\mu}(z_{k-1}, z_k = y)$$

עבור

$$k \geq 2$$

ונקודות קריטיות  $z_i$ .

**הגדרה 1.6.37.** נגדיר

$$\hat{\mu}(p, q) := \hat{\mu}(p, q) \coprod_{z \in \text{Crit}(F)} (\hat{\mu}(p, z) \times \hat{\mu}(z, q)) \coprod_{z_1, z_2 \in \text{Crit}(F)} \hat{\mu}(p, z_1) \times \hat{\mu}(z_1, z_2) \times \hat{\mu}(z_2, q) \coprod \dots$$

זה איחוד  $\hat{\mu}(p, q)$  עם הטרקטוריות השבורות בין  $p, q$ .

**הערה 1.6.38.** בתנאי Morse-Smale מתקיים

$$\mu(p) > \mu(z_1) > \mu(z_2) > \dots > \mu(q)$$

אז יתכנו לכל היותר  $\mu(p) - \mu(q) - 1$  נקודות שבירה.

**הערה 1.6.39.**  $\bar{\mu}(p, q)$  נותנת קומפקטיפיקציה של  $\hat{\mu}(p, q)$ . זאת יריעה עם פינות. מתקיים,

$$\dim \left( \coprod_{z \in \text{Crit}(F)} (\hat{\mu}(p, z)) \right) = \mu(p) - \mu(z) - 1 + \mu(z) - \mu(q) - 1 = \mu(p) - \mu(q) - 2$$

ובאופן כללי כל נקודה שבירה שנוסיף תפחית את המימד ב-1.

**הגדרה 1.6.40 (התכנסות).** תהי  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \hat{\mu}(p, q)$ . נאמר שהיא מתכנסת ב- $\bar{\mu}(p, q)$  אם

$$\hat{\gamma}_i \rightarrow \hat{\gamma} \in \hat{\mu}(p, q)$$

במידה שווה על קבוצות קומפקטיות או שקיימת טרקטוריה שבורה  $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_k)$  מ- $p$  ל- $q$  עבורה

$$\forall j \in [k] : \hat{\gamma}_i \rightarrow \hat{\delta}_j$$

**משפט 1.6.41.**  $\bar{\mu}(p, q)$  קומפקטי סדרתית.

**מסקנה 1.6.42.**  $\bar{\mu}(p, q)$  מטריוזבילי, לכן מהמשפט גם קומפקטי.

הוכחה למשפט נמצאת במאמר U. Foodar, A Functional Analytic Approach to Morse Homology, שמתמכת על Homology Morse של M. Shwarz. נציג את ראשי הפרקים של ההוכחה.

הוכחה. 1. נבחר סדרה  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mu(p, q)$ . אז קיימת תת-סדרה  $\gamma_{n_k} \rightarrow v \in C^\infty(\mathbb{R}, M)$ , כפי שנובע ממשפט Arzela-Ascoli.

2. נבחר סדרה  $\hat{\gamma}_i \in \hat{\mu}(p, q)$ . נראה שיש תת־סדרה מתכנסת ל־ $\hat{\delta} \in \bar{\mu}(p, q)$ . נבחר פרמטריזציה כלשהי ונקבל מהסעיף הקודם סדרה  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mu(p, q)$  עבודה

$$\gamma_i \rightarrow v \in C^\infty(\mathbb{R}, M)$$

אם  $v \in \mu(p, q)$  סיימנו.

אחרת, ממשפט Arzela-Ascoli יש התכנסות  $\gamma_i \rightarrow v$  בטופולוגיה  $C^\ell$ , במידה שווה על קבוצות קומפקטיות. אז  $\gamma'_i(s) \rightarrow v'(s)$  ולכן

$$v'(s) = -DF(v(s))$$

נקבל כי  $v$  הוא קו זרימה. כמו כן,  $\gamma_i(s) \rightarrow v(s)$  ולכן  $F(z) \leq v(s) \leq F(p)$  לכל  $s \in \mathbb{R}$ . כעת,  $F(v(s))$  מונוטונית יורדת, כי  $v$  קו זרימה, ולכן

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} v'(s) \rightarrow 0$$

נקבל כי

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} v(s) \in \text{Crit}(F)$$

ואז  $v \in \mu(w, z)$ . נניח בלי הגבלת הכלליות כי  $z \neq q$ . נבחר  $c \in (F(q), F(z))$ , ואז לכל  $\gamma_i$  קיים זמן  $s_i$  עבורו  $F(\gamma_i(s_i)) = c$  נגדיר

$$\gamma_i^1(\cdot) = \gamma_i(\cdot + s_i)$$

לפי השלב הקודם, נקבל תת־סדרה

$$\gamma_i^1 \rightarrow v^1 \in C^\infty(\mathbb{R}, M)$$

לפי רציפות,

$$F(v^1(0)) = \lim_{i \rightarrow \infty} F(\gamma_i^1(0)) = c$$

נטען כי  $v^1(s^1) \in \mathbb{R}$  לכל  $s^1 \in \mathbb{R}$ . אחרת,

$$F(v(s)) = F(v^1(s^1))$$

אבל אז

$$v(s) = \lim \gamma_i(s)$$

$$v^1(s^1) = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i^1(s^1) = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i(s^1 + s^i)$$

גורר כי

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F(\gamma_i(s)) = \lim_{i \rightarrow \infty} F(\gamma_i(s^1 + s^i))$$

ואז  $v(s) = v^1(s^1)$ . נקבל כי  $v, v^1$  שני קווי זרימה שעוברים דרך אותה נקודה, בסתירה.

אם

$$\overline{F(v \cup c^1)} = [F(q), F(p)]$$

סיימנו. אחרת נמשיך בתהליך, שיעצור אחרי מספר סופי של צעדים כי יש מספר סופי של נקודות קריטיות. נקבל תת־סדרה  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  עבודה

$$\hat{\gamma}_i \rightarrow (\hat{v}^0, \hat{v}^1, \dots, \hat{v}^k)$$

אם נסדר את  $(\hat{v}^0, \dots, \hat{v}^k)$  לפי גובה נקבל

$$\hat{v}^i \in \mu(w_i, z_i)$$

$$F(p) = F(w_0)$$

$$F(w_1) = F(z_0)$$

$$F(w_2) = F(z_1)$$

$$\vdots$$

$$F(w_k) = F(z_{k-1})$$

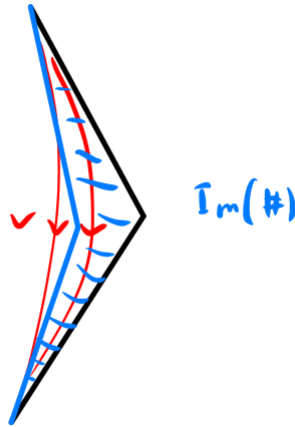
$$F(z_k) = F(q)$$

נרצה להראות שהקצוות של ה־ $v_i$  מתאימים. אכן,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} v_j(s) = \lim \gamma_i(s_i) = \lim_{s \rightarrow -\infty} v_{j+1}(s)$$

ולכן  $v_j, v_{j+1}$  מתחברות. אז מתקבלת טרקטוריה שבורה. לכן, לכל סדרה  $\hat{\gamma}_i \in \hat{\mu}(p, q)$  קיימת תת־סדרה עם גבול ב־ $\bar{\mu}$ .





איור 1.31: התמונה של # מכילה סביבה של הטרכטוריה השבורה.

3. אם יש סדרה שמורכבת מטרקטוריות שבורות, ניתן לעבור לתת-סדרה בה כל מסלול נשבר בדיוק באותן נקודות קריטיות. על ידי הפעלת השלב הקודם לכל אחד מהרכיבים מקבלים תת-סדרה שמתכנסת בכל רכיב, ואז תת-סדרה שמתכנסת בכל הרכיבים. לכן  $\hat{\mu}$  קומפקטי סדרתית. ■

**משפט 1.6.43 (הדבקה).** עבור מכפלה  $\hat{\mu}(p, z) \times \hat{\mu}(z, q)$ , קיים  $\rho > 0$  ושיכון חלק

$$\#: \hat{\mu}(p, z) \times \hat{\mu}(z, q) \times [\rho, \infty) \rightarrow \hat{\mu}(p, q)$$

עבור

(i)

$$\#(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$$

(ii) כל סדרה  $(\hat{\gamma}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  עבורה

$$\hat{\gamma}_i \rightarrow (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) \in \hat{\mu}(p, z) \times \hat{\mu}(z, q)$$

נמצאת בתמונה של # החל ממקום מסוים.

**הערה 1.6.44.** התנאי השני במשפט שקול לכך ש- $\text{Im}(\#)$  סביבה פתוחה של  $\hat{\mu}(p, z) \times \hat{\mu}(z, q)$  ב- $\hat{\mu}(p, q)$ . כלומר,  $\text{Im}(\#)$  כוללת את כל המסלולים שנמצאים מספיק קרוב לטרקטוריות השבורות. ראו איור 1.31.

נציג הוכחה בראשי פרקים.

הוכחה. 1. **קדם-הדבקה:** ניתן לקרב את  $\gamma_2 * \gamma_1$  על ידי עקום חלקי. נקבל משפחה

$$\hat{\delta}_\rho \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$$

2. יהי

$$\mathcal{F} := \left\{ \delta \in C^\infty(\mathbb{R}, M) \mid \begin{matrix} \delta(-\infty)=p \\ \delta(+\infty)=q \end{matrix} \right\}$$

זהו מרחב בנך עם תת-יריעה  $\mu(p, q) \subseteq \mathbb{F}$ . נציין כעובדה את המשפט הבא.

**משפט 1.6.45.** עבור  $pg1$  קיימת הטלה יחידה של  $\delta_\rho$  ל- $\mu(p, q)$ .

3. נקבל כי # שיכון.

4. קיימים  $s_i, t_i$  עבורם

$$\gamma_i(\cdot - s_i) \rightarrow \gamma_1$$

$$\gamma_i(\cdot - t_i) \rightarrow \gamma_2$$

■ נבצע קדם-הדבקה ונטיל על  $\mu(p, q)$ , ונקבל מסלול בתמונה של #, שמיחידות חייב להיות  $\hat{\gamma}_i$ .

**מסקנה 1.6.46.** מקומפקטיות והדבקה, יש התאמה  $1 : 1$  בין מסלולים שבורים ונקודות שפה של  $\hat{\mu}(p, q)$ . עבור  $\mu(p) = \mu(q) + 2$  מתקיים  $\dim \hat{\mu}(p, q) = 1$  ולכן  $\hat{\mu}$  אוסף מעגלים וקטעים. נקבל כי

$$\partial \hat{\mu}(p, q) = \coprod_{\mu(z)=\mu(q)+1} \hat{\mu}(p, z) \times \hat{\mu}(z, q)$$

וכי כל מסלול שבור  $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$  מופיע רק פעם אחת כנקודת שפה של  $(p, q)$ . אחרת היינו יכולים לבנות סדרה מתכנסת שאינה בתמונה של  $\#$ .

### מסקנה 1.6.47

$$\partial^2(x) = \sum_{\substack{\mu(q)+2=\mu(p) \\ \mu(z)+1=\mu(p)}} n_2(p, z) \cdot n_2(z, q) \cdot q \equiv 0 \pmod{2}$$

כיוון ש-

$$n_2(p, z) \cdot n_2(z, q) = \#(\hat{\mu}(p, z) \cdot \hat{\mu}(z, q))$$

מספר נקודות קצה של יריעה 1-מימדית.

קיימת גירסה של הדבקה גם עבור מספר נקודות שבירה. יש מפה

$$\#: \hat{\mu}(p, z_1) \times \hat{\mu}(z_1, z_2) \times \dots \times \hat{\mu}(z_k, q) \times [\rho_1, \infty) \times \dots \times [\rho_{k-1}, \infty) \rightarrow \hat{\mu}(p, q)$$

כמו מקודם. אפשר לבצע קדם-הדבקה והטלה כמו מקודם, ולקבל על  $\hat{\mu}(p, q)$  מבנה של יריעה עם פינות.

## 1.6.2 חישובי הומולוגיה

**תרגיל 11.** תהי  $(F, \rho)$  זוג Morse-Smale ותהיינה  $p, z$  נקודות קריטיות עם  $\mu(z) < \mu(p)$  וכאשר  $z \in W^U(p)$ . אז  $W^U(z) \subseteq \partial W^U(p)$ .

**תרגיל 12.** ראינו

$$M = \coprod_{p \in \text{Crit}(F)} W^U(p)$$

נגדיר

$$C_*^{\text{CW}} = \mathbb{Z}_2 \langle W^U(p) \rangle$$

וגם

$$\partial_*^{\text{CW}} : C_*^{\text{CW}} \rightarrow C_{*-1}^{\text{CW}}$$

שסופרת את הדרגה של פונקציית ההדבקה. עבור  $U$  תא  $k$ -מימדי עם הדבקה

$$f: \partial U \rightarrow U_{k-1}^1 \cup \dots \cup U_{k-1}^n \cup \{\text{cells lower-dimensional}\}$$

נגדיר

$$\partial_k^{\text{CW}}(U) = \sum_{j \in [n]} \deg_2(f, U_{k-1}^j) U_{k-1}^j$$

אז יש איזומורפיזם של קומפלקסים  $CM_* \cong C_*^{\text{CW}}$  בין קומפלקס מורס לקומפלקס ה-CW. אז יש איזומורפיזם בין ההומולוגיות המתאימות,

$$HM_* \cong H_*^{\text{CW}} \cong H_*^{\text{sing}}$$

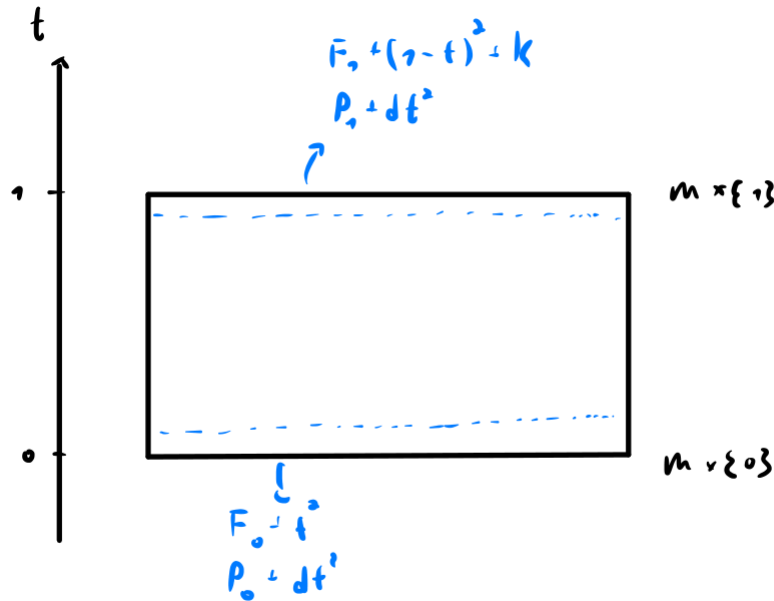
כדי להראות שהומולוגיית מורס אינה תלויה בבחירות. במקרים פרטיים, נקבל זאת מכך שהומולוגיית מורס איזומורפית להומולוגיה אחרת. במקרה הכללי, ולמשל במקרה האינסוף-מימדי, זה לא עובד ויש צורך בהוכחה אחרת.

## 1.6.3 איתלות של $HM_*(F, \rho)$

**טענה 1.6.48.** יהיו  $(F_0, \rho_0), (F_1, \rho_1)$  זוגות Morse-Smale על  $M$ . קיימת

$$\Phi^{F_1, F_0} : CM_*^{F_1} \rightarrow CM_*^{F_0}$$

העתקה של קומפלקסים.



איור 1.32

הוכחה. נסתכל על  $M \times [0, 1]$ . נגדיר בסביבה של  $M \times \{0\}$  פונקציה  $F_0 + t^2$  ומטריקה  $\rho_0 + dt^2$  ובסביבה של  $M \times \{1\}$  פונקציה  $F_1 + (1-t)^2$  ומטריקה  $\rho_1 + dt^2$ . נקבל שאין נקודות קריטיות נוספות בשתי הסביבות האלה. כדי שלא יהיו נקודות קריטיות נוספות באופן גלובלי, נרצה שההומוטופיה תהיה עולה ממש. לשם כך בסביבת  $M \times \{1\}$  נגדיר בעצם פונקציה  $F_1 + (1-t)^2 + K$ , מה שלא משנה את הזרימה. נקבל פונקציה  $\bar{F}(\rho, t)$  עולה ממש עם  $t$ , בעזרת אינטרפולציה (למשל, אינטרפולציה ריבועית), ונקבל הרחבה כלשהי  $\rho$  של המטריקה הרימנית. על ידי פרטורבציה מתאימה של  $\rho$  נקבל זוג Morse-Smale  $(\bar{F}, \bar{\rho})$  על  $M \times [0, 1]$ , שנקרא לזוג Morse Data. ראו איור 1.32.

נקבל

$$\text{Crit}(\bar{F}) = \text{Crit}(F_0) \times \{0\} \cup \text{Crit}(F_1) \times \{1\}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned}\mu((x, 0)) &= \mu(x) \\ \mu((y, 1)) &= \mu(y) + 1\end{aligned}$$

עבור  $y \in \text{Crit}_k(F_1)$  נגדיר

$$\Phi^{F_1, F_0}(y) = \sum_{x \in \text{Crit}_k(F_0)} n_2((y, 1), (x, 0)) \cdot x$$

ונקבל מכך העתקה

$$\Phi^{F_0, F_1}: CM_*(F_1, \rho_1) \rightarrow CM_*(F_0, \rho_0)$$

לינארית. נראה שהיא העתקה של קומפלקסים ונקבל מכך גם שהיא משרה העתקה בהומוטופיה. נסתכל על  $\bar{\partial}$  דיפרנציאל מורס על  $M \times [0, 1]$ . מתקיים

$$\begin{aligned}\bar{\partial}((x, 0)) &= (\partial^0(x), 0) \\ \bar{\partial}((y, 1)) &= (\partial^1(y), 1) + (\Phi^{F_1, F_0}(y), 0)\end{aligned}$$

וכמו קודם,  $\bar{\partial}^2 = 0$  אז

$$\begin{aligned}0 &= \bar{\partial}^2((y, 1)) \\ &= \bar{\partial}((\partial^1(y), 1) + (\Phi^{F_1, F_0}(y), 0)) \\ &= ((\partial^1)^2(y), 1) + (\Phi^{F_1, F_0}(\partial^1(y)), 0) + (\partial^0(\Phi^{F_1, F_0}(y)), 0)\end{aligned}$$

ולכן

$$\Phi^{F_1, F_0} \circ \partial^1 + \partial^0 \circ \Phi^{F_1, F_0} = 0$$

וכיוון שאנו עובדים מעל  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  נקבל

$$\Phi^{F_1, F_0} \circ \partial^1 = \partial^0 \circ \Phi^{F_1, F_0}$$

כנדרש.

**הערה 1.6.49.** קיבלנו זוג Morse-Smale  $(\bar{F}, \bar{\rho})$  על  $M \times [0, 1]$  וראינו כי  $\bar{\partial}^2 = 0$ . אז ניתן לחשב הומוולוגיה, אך זאת לא הומוולוגיה של יריעה עם שפה. כדי להגדיר הומוולוגיה של יריעה עם שפה אפשר לשים את הנקודות הקריטיות בפנים ולדאוג שהגרדיאנט מצביע החוצה על השפה כדי לחשב הומוולוגיה של יריעה עם שפה.

**טענה 1.6.50.** עבור אינטרפולציה מתאימה,  $\Phi^{F_0, F_0} = \mathbb{1}$ .

הוכחה. נגדיר  $\bar{\rho} = \rho_0 + dt^2$  על כל  $M \times [0, 1]$ . בסביבת  $M \times \{0\}$  נגדיר  $F_0 + t^2$  ובסביבת  $M \times \{1\}$  נגדיר  $F_0 + (1-t)^2 + K$ . נבחר  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה ומונוטונית עולה עבורה  $\varphi(0) = 0$  וגם  $\varphi(t) = K + (1-t)^2$  עבור  $t$  קרוב מספיק ל-1. אז נגדיר  $\bar{F}(x, t) = F_0(x) + \varphi(t)$ . חישוב נותן

$$-\nabla_{\bar{\rho}} \bar{F} = (\nabla_{\rho_0} F_0, \varphi^1)$$

אז ההטלה  $M \times [0, 1] \rightarrow M$  שומרת על  $\nabla$  ולכן גם על מסלולים של  $-\nabla$ .

**תרגיל 13.** הזוג  $(\bar{F}, \bar{\rho})$  מקיים את תנאי Morse-Smale.

נבחר  $x \in \text{Crit}_k(F_0)$  ואז

$$\Phi^{F_0, F_0}(x) = \sum_{y \in \text{Crit}_k(F_0)} n_2((x, 1), (y, 0)) \cdot y$$

נניח שיש  $y$  עבורו  $n_2((x, 1), (y, 0)) \neq 0$ . אז  $\hat{\mu}((x, 1)(y, 0)) \neq \emptyset$  נפעיל את  $\pi$  ונקבל  $\hat{\mu}(x, y) \neq \emptyset$  אבל  $\mu(x) = \mu(y) = k$ , ולכן זה לא יתכן עבור  $x \neq y$  כי ראינו שבמקרה זה אין טרקטוריה מ- $x$  ל- $y$ . לכן,  $x = y$ , ואז הטרקטוריה היחידה היא הטרקטוריה  $(x, 0) \rightarrow (x, 1)$  בסיב של  $x$ . נקבל כי  $\Phi^{F_0, F_0} = \mathbb{1}$  כהעתקה בין קומפלקסים, ולכן גם בהומוולוגיה.

**טענה 1.6.51.**  $\Phi^{F_2, F_0} = \Phi^{F_1, F_0} \circ \Phi^{F_2, F_1}$  מגדריות את אותה העתקה בהומוולוגיה.

הוכחה. נבנה

$$\bar{F}: M \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

ו- $\bar{\rho}$  הרחבה של המטריקה הרימנית. ראוי איור 1.33. נרחיב את  $\rho$  באופן גנרי בנקודות הפנימיות ו- $\bar{F}$  כך ש- $\bar{F}(x, s, t)$  מונוטונית עולה ב- $t$ , בלי נקודות קריטיות באמצע. הנקודות קריטיות של  $\bar{F}$  מתוארות באיור 1.34. אם נשתמש ב- $\bar{\partial}^2 = 0$  נקבל

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\partial}^2(x, 1, 1) \\ &= \dots \\ &= \Phi^{F_2, F_0} + \Phi^{F_1, F_0} \circ \Phi^{F_2, F_1} \\ &= S \circ \partial^2 + \partial^0 \circ S \end{aligned}$$

עבור

$$\begin{aligned} S: C_*(F_2, \rho_2) &\rightarrow C_{*+1}(F_0, \rho_0) \\ x \in \text{Crit}_k(F_2) &\mapsto \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(F_0)} n_2((x, 1, 1), (y, 0, 0)) \cdot y \end{aligned}$$

כאן  $S$  היא chain homotopy בין  $\Phi^{F_2, F_0}$ ,  $\Phi^{F_1, F_0} \circ \Phi^{F_2, F_1}$  ולכן הן משרות את אותה העתקה בהומוולוגיה.

**מסקנה 1.6.52.**

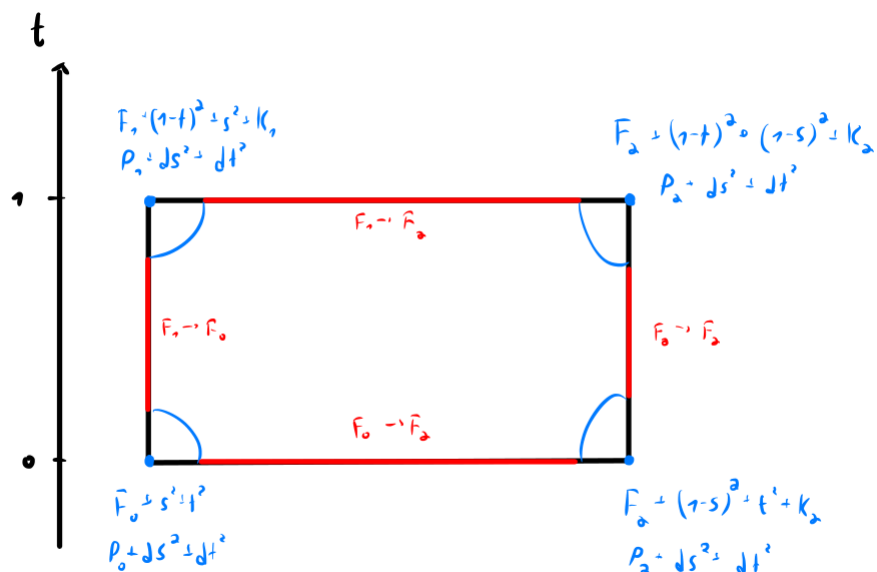
$$\Phi^{F_1, F_0}: HM_*(F_1, \rho_1) \rightarrow HM_*(F_0, \rho_0)$$

איזומורפיזם.

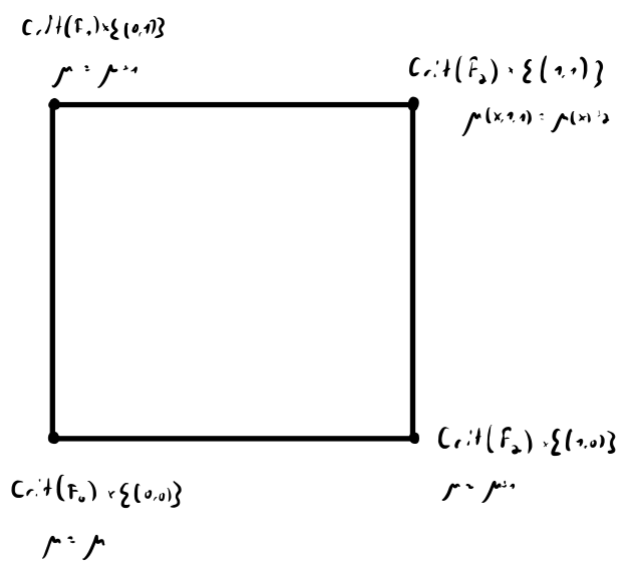
הוכחה. נסתכל על ההרכבה

$$HM_*(F_1, \rho_1) \xrightarrow{\Phi_*^{F_1, F_0}} HM_*(F_0, \rho_0) \xrightarrow{\Phi_*^{F_0, F_1}} HM_*(F_0, \rho_0)$$

ההרכבה היא  $\Phi_*^{F_0, F_0} = \mathbb{1}$  ולכן  $\Phi_*^{F_1, F_0}$  חד-חד ערכית ו- $\Phi_*^{F_0, F_1}$  על. אם נחליף את סדר ההרכבה נקבל את התכונות החסרות, ולכן  $\Phi_*^{F_1, F_0}$  חד-חד ערכית ועל, ולכן איזומורפיזם.



איור 1.33



איור 1.34

**הגדרה 1.6.53 (מספרי Betty).** נגדיר את מספר Betty ה־ $i$  של  $M$  על ידי  $\beta_i := \dim(HM_i(F, \rho))$  עבור זוג Morse-Smale  $(F, \rho)$ .

**מסקנה 1.6.54.** מספר Betty אינם תלויים ב־ $(F, \rho)$ , ומתקיים  $\text{Crit}_i(F) \geq \beta_i$ .

**תרגיל 14.** האיזומורפיזם

$$\Phi^{F_1, F_0} : HM_*(F_1, \rho_1) \rightarrow HM_*(F_0, \rho_0)$$

קבוצתי ואינו תלוי בהומוטופיה בין  $(F_1, \rho_1)$ ,  $(F_0, \rho_0)$ .

## 1.6.4 שימושים

### סיווג של יריעות

**תרגיל 15.** אם  $f : M_1 \rightarrow M_2$  דיפאומורפיזם אז  $HM_*(M_1) \cong HM_*(M_2)$ .

**פתרון.** ניקח  $(F, \rho)$  זוג Morse-Smale על  $M_1$  ונדחוף אותו לזוג על  $M_2$ . הדחיפה מעתיקה נקודות קריטיות לנקודות קריטיות, את המטריקה הרימנית למטריקה הרימנית, ושומרת על האינדקסים, לכן ניתן לראות שיש איזומורפיזם

$$f_* : (C_*(M; F, \rho), \partial^1) \rightarrow (C_*(M_2; f_*F, f_*\rho), \partial^2_*)$$

של קומפלקסים, שמשרה איזומורפיזם בין ההומולוגיות.

### תתי-יריעות איזוטופיות

- אם  $L_1, L_2 \subseteq M$  תתי-יריעות סגורות, נרצה לשאול מתי קיימת איזוטופיה שלוקחת את  $L_1$  ל־ $L_2$ . ניתן להתאים הומולוגיה  $[L_1], [L_2] \in H_*(M)$  כך שאם  $[L_1] \neq [L_2]$  אין איזוטופיה כזאת, שהיא "מעבר רציף", בין  $L_1, L_2$ . אצלנו, עבור  $L_i$  ניקח  $F_i, \rho_i$  מתאימות ונקבל

$$[L_i] \in HM_*(M; F_i, \rho_i)$$

ואלו איברים בהומולוגיות שונות. כדי להשוות את  $[L_1], [L_2]$  ניעזר בכך שיש איזומורפיזם קבוצתי שמקשר בין ההומולוגיות.

- אם  $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  נקבל דיפאומורפיזמים

$$\begin{aligned} f_A, f_B : \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ x &\mapsto Ax \\ &\quad \cdot \quad x \mapsto Bx \end{aligned}$$

**טענה 1.6.55.** אם  $A \neq B$ , ההעתקות  $f_A, f_B$  אינן איזוטופיות.

הוכחה. מתקיים

$$\begin{aligned} (f_A)_* : H_1(\mathbb{T}^2) &\rightarrow H_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2 \langle a, b \rangle \\ &\cdot \quad x \mapsto Ax \end{aligned}$$

כאשר  $A, B$  שונות, אם קיימת איזוטופיה קיים מעביר רציף בין ההעתקות בהומולוגיה, אבל העתקות אלו הן איברים שונים בקבוצה דיסקרטית, בסתירה. ■

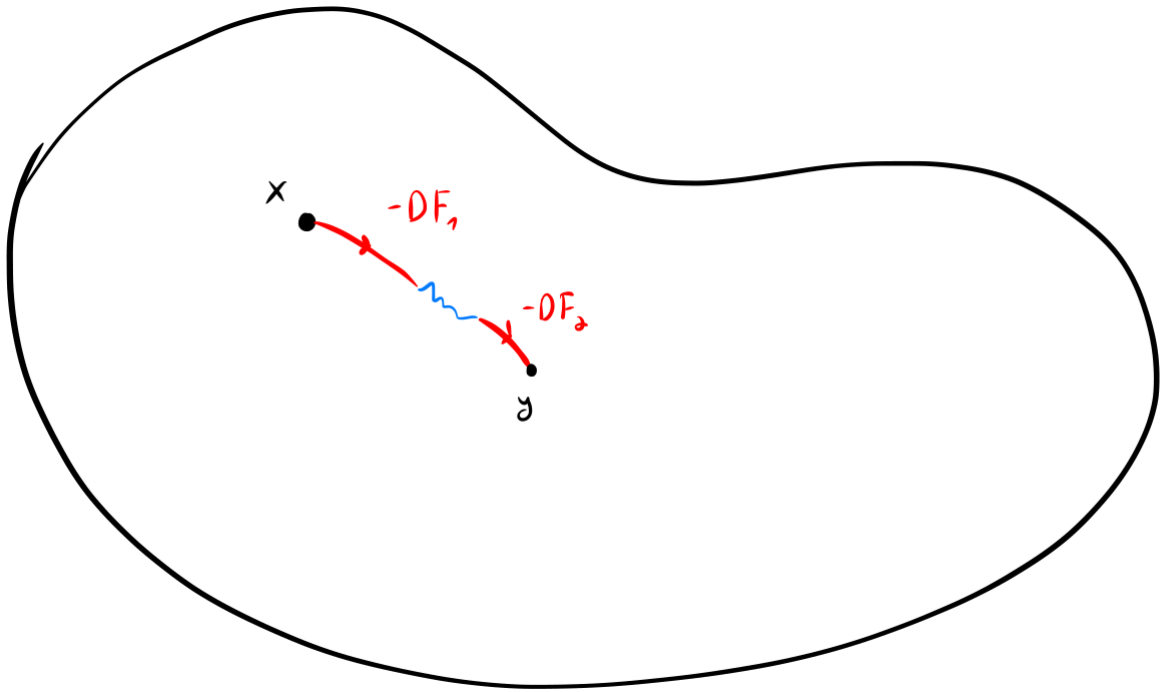
נרצה לתרגם הוכחה זאת להוכחה בעזרת תורת מורס עם הכלים שבנינו.

תהי  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . נגדיר

$$\begin{aligned} (f_A)_* : HM_1(M; F, \rho) &\xrightarrow{\sim} HM_1(M; (f_A)_*(F), (f_A)_*(\rho)) \\ (f_B)_* : HM_1(M; F, \rho) &\xrightarrow{\sim} HM_1(M; (f_B)_*(F), (f_B)_*(\rho)) \end{aligned}$$

כמקודם. במקרה זה נגיד שההעתקות מתאמות אם המשולש

$$\begin{array}{ccc} & HM_1(M; (f_A)_*(F), (f_A)_*(\rho)) & \\ \nearrow (f_A)_* & \downarrow \Phi^{(f_A)_* F, (f_B)_* F} & \\ HM_1(M; F, \rho) & & \\ \searrow (f_B)_* & \downarrow & \\ & HM_1(M; (f_B)_*(F), (f_B)_*(\rho)) & \end{array}$$



איור 1.35: טרקטוריות שמחוברות על ידי פרטורבציה.

קומוטטיבי.

אבל, הגדרת  $\Phi^{F_1, F_0}$  לא נוחה לצורך חישוב. ראינו ש- $\Phi^{F_1, F_0}$  אינה תלויה באינטרפולציה, לכן נסתכל על אינטרפולציה בה המטריקה הרימנית מהצורה  $\rho_t + dt^2$  ובה  $F_t$  פונקציה נתונה. מתקיים

$$-\nabla = (-\nabla_{\rho_1} F_1, -2(1-t))$$

נשאיף  $K \rightarrow \infty$  ואז הזרימה  $x \rightarrow y$  תעבור את שכבת האינטרפולציה בפרק זמן ששואף לאפס. בגבול, החלק של האינטרפולציה יעלם אחרי ההטלה. ראו איורים 1.35, 1.36. נקבל העתקה

$$\hat{\Phi}^{F_1, F_0}(x) = \sum_{y \in \text{Crit}(F_0)} \# \mathcal{P}(x, y) \cdot y$$

עבור

$$\mathcal{P}(x, y) := \left\{ (\gamma_1, \gamma_2) \left| \begin{array}{l} \gamma_1 : (-\infty, 0] \rightarrow M \\ \gamma_2 : [0, \infty) \rightarrow M \\ \gamma'_1 = -D_{\rho_1} F_1 \\ \gamma'_2 = -D_{\rho_0} F_0 \\ \gamma_1(s) \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} x \\ \gamma_2(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} y \end{array} \right. \right\}$$

תחת הדרישה  $W_{F_1}^U(x) \cap W_{F_0}^S(y) \neq \emptyset$ , לכל  $x, y$ , שמתקיימת במקרה הגנרי. אז נוכל לזהות

$$\mathcal{P}(x, y) \cong W_{F_1}^U(x) \cap W_{F_0}^S(y)$$

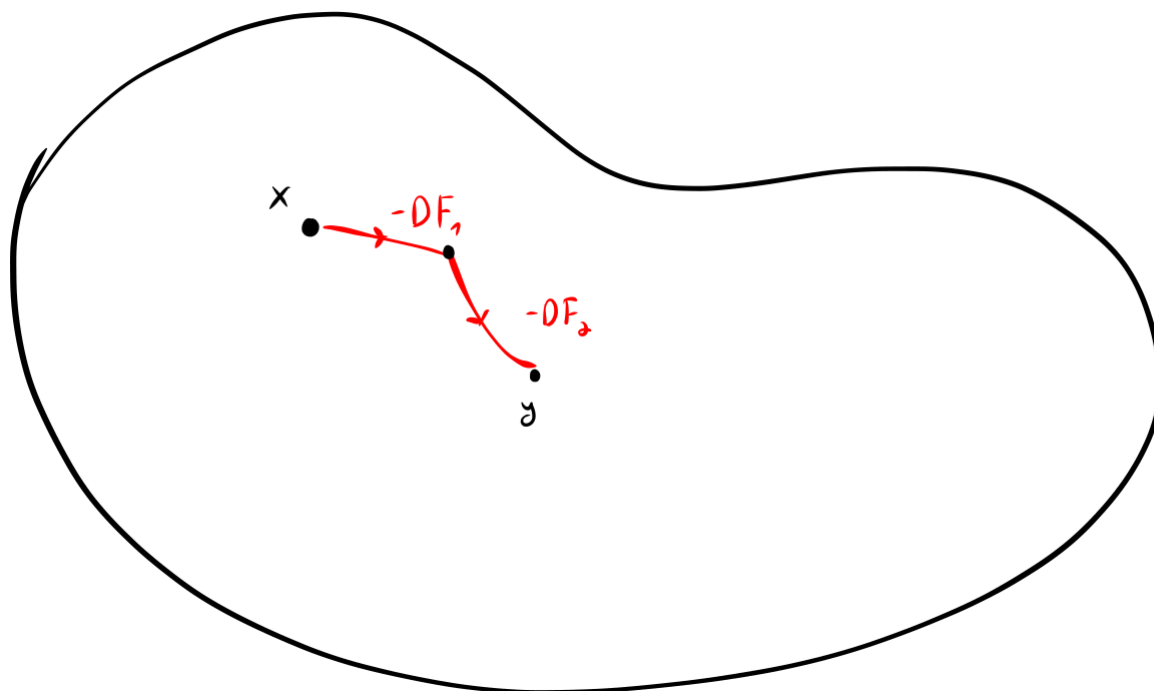
מתקיים

$$\dim \mathcal{P}(x, y) = \mu(x) - \mu(y)$$

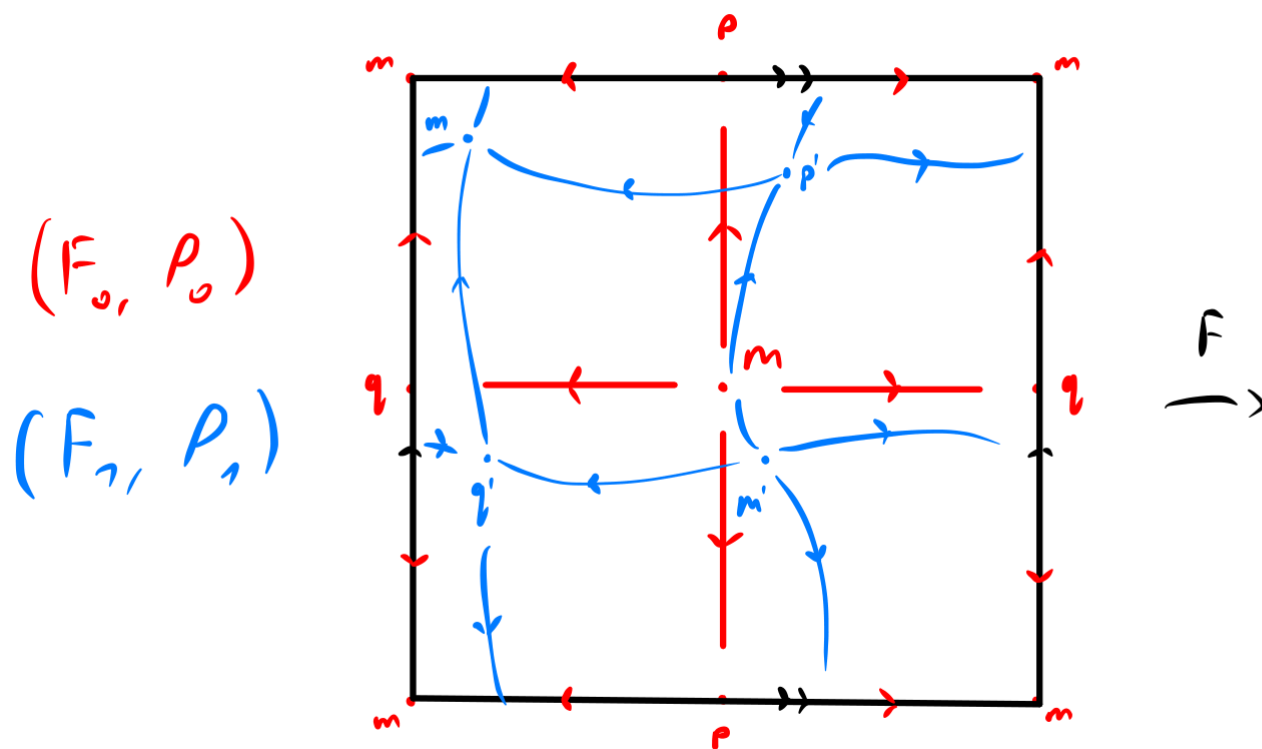
נציג את אופן החישוב בדוגמה הבאה.

**דוגמה 1.6.56.** יהי  $\mathbb{T}^2$  הטורוס כמתואר באיור 1.25 ונסמן את הפונקציה והמטריקה המתאימות  $(F_0, \rho_0)$ . לאחר פרטורבציה מתאימה אפשר לקבל זוג Morse-Smale נוסף שנשמנו  $(F_1, \rho_1)$ . ראו איור 1.37. מספיק לחשב את  $\hat{\Phi}^{F_1, F_0}$  על יוצרים. למשל, מתקיים

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^{F_1, F_0}(M') &= \sum_{p \in \text{Crit}_2(F_0)} \#_2 \mathcal{P}(M', p) \cdot [p] \\ &= \#_2 \mathcal{P}(M', M) \cdot M \end{aligned}$$



איור 1.36: בגבול הטרקטוריות מתחברות ואין פרטורבציה.



איור 1.37



והמספר  $\# \mathcal{P}(M', M)$  הוא מספר הטרקטוריות השבורות מ' $M'$  ל' $M$ . אבל, טרטוריה ל' $M$  היא בהכרח הטרקטוריה הקבועה, ולכן אלו טרקטוריות מ' $M'$  ל' $M$ . יש טרקטוריה יחידה כזו, ממשפט היחידות. אז  $\hat{\Phi}^{F_1, F_0}(M') = M$  מתקיים גם

$$\hat{\Phi}^{F_1, F_0}(x') = \#_2 \mathcal{P}(x', x) \cdot x + \#_2 \mathcal{P}(x', y) \cdot y$$

מתקיים

$$\begin{aligned} \#_2 \mathcal{P}(x', x) \cdot x &= \#_2 W^U(x') \cap W^S(x) = 1 \\ \#_2 \mathcal{P}(x', y) \cdot y &= \#_2 W^U(x') \cap W^S(y) = \#_2 \emptyset = 0 \end{aligned}$$

ולכן  $\hat{\Phi}^{F_1, F_0}(x') = x$  ניתן להמשיך את החישוב ולראות שמתקיים

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}: HM_*(F_1, \rho_1) &\rightarrow HM_*(F_0, \rho_0) \\ M' &\mapsto M \\ x' &\mapsto x \\ y' &\mapsto y \\ m' &\mapsto m \end{aligned}$$

## 1.7 קוהומומולוגיית מורס

נסתכל על קומפלקס  $C_* = \bigoplus C_k$  עבור  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -מודולים  $C_k$  ונסתכל על העתקות

$$\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$$

עבור  $\partial^2 = 0$ . נגדיר קומפלקס קוהומומולוגיה על ידי

$$C^k := \text{Hom}(C_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (C_k)^*$$

נסתכל על ההעתקות

$$(\partial_{k+1}): (C_k)^* \rightarrow (C_{k+1})^*$$

שמשרה העתקה

$$\begin{aligned} d_k: C^k &\rightarrow C^{k+1} \\ f &\mapsto f \circ \partial_{k+1} \end{aligned}$$

**תרגיל 16.** אם  $\partial^2 = 0$  אז  $d^2 = 0$ .

**הגדרה 1.7.1 (קומפלקס קוהומומולוגיה).** נגדיר את קומפלקס הקוהומומולוגיה על ידי

$$\begin{aligned} C^* &= \bigoplus C^k \\ d_*: C^* &\rightarrow C^{*+1} \end{aligned}$$

**הגדרה 1.7.2 (קוהומומולוגיה).** נגדיר את הקוהומומולוגיה על ידי

$$H^*(C_*, \partial_*) := H(C^*, d_*)$$

אצלנו, נסתכל על יריעה  $M$  עם זוג Morse-Smale  $(F, \rho)$ . הגדרנו

$$C_k = \mathbb{Z}_2 \langle \text{Crit}_k F \rangle$$

ואז

$$C^k = \text{Hom}(C_k, \mathbb{Z}_2) = (C_k)^* = \mathbb{Z}_2 \langle \text{Crit}_k(F)^* \rangle$$

עבור הבסיס הדואלי

$$\text{Crit}_k(F)^* = \{x^* \mid x \in \text{Crit}_k(F)\} \subseteq (C_k)^*$$

ותחת ההגדרה  $x^*(y) = \delta_{x,y}$ .

נחשב את  $d_k: C^k \rightarrow C^{k+1}$ . נבחר  $y \in \text{Crit}_k(F)$  ונרצה לחשב את  $d_k(y^\bullet) \in C^{k+1}$ . עבור  $x \in C_{k+1}$  מתקיים

$$\begin{aligned} (d_k(y^\bullet))(x) &= y^\bullet(\partial_{k+1}(x)) \\ &= y^\bullet\left(\sum_{z \in \text{Crit}_k(F)} n_2(x, z) \cdot z\right) \\ &= n_2(x, y) \cdot y \end{aligned}$$

נקבל שמתקיים

$$d_k(y^\bullet) = \sum_{x \in \text{Crit}_{k+1}(F)} n_2(x, y) \cdot x$$

נשים לב שכאן הספירה היא של טרקטוריות שמסיימות ב־ $y$ , בניגוד לחישוב של  $\partial$ . אז חישוב הקוהומומולוגיה יהיה זהה לחישוב ההומומולוגיה, רק עם ספירה של טרקטוריות בכיוון ההפוך. מתקיים  $-\nabla F = \nabla(-F)$ , ולכן ספירת קווי הזרימה של  $F$  ב־ $d_k$  מזדהה עם ספירת קווי הזרימה של  $-F$  ב־ $\partial_k$ . נקבל כי

$$(C^*, d_*)_{(F, \rho)} \cong (C^*, \partial_*)_{(-F, \rho)}$$

### 1.7.3 מסקנה • מתקיים $d^2 = 0$

• הקוהומומולוגיה אינה תלויה ב־ $(F, \rho)$  ויש איזומורפיזמים קנוניים כמו בהומומולוגיה.

• יש העתקה, שנקראת pairing / evaluation map

$$C^k(F, \rho) \times C_k(F, \rho) \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

נקבל העתקה

$$HM^k(F, \rho) \times HM_k(F, \rho) \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

יש איזומורפיזם קנוני  $HM_k(F, \rho) \cong HM_k(F', \rho')$  ולכן נקבל העתקה

$$HM^*(F, \rho) \times HM_k(F', \rho') \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

ניקח  $y \in \text{Crit}_k(F)$ ,  $x \in \text{Crit}_k(F')$  אם נעבור על ההגדרות נקבל בהעתקה זאת

$$y^\bullet(x) = \#_2 \mathcal{P}(x, y)$$

### 1.7.4 מסקנה • אם $x \in \text{Crit}(F)$ אם ורק אם $x \in \text{Crit}_{n-k}(-F)$ . לכן

$$HM^k(F, \rho) \cong H_{n-k}(-F, \rho) \cong H_{n-k}(F, \rho)$$

איזומורפיזם זה קנוני. נקבל כי יש איזומורפיזם קנוני

$$HM^k(M) \cong HM_{n-k}(M)$$

מסקנה זאת נקראת דואליות פואנקרה.

**הערה 1.7.5.** משפט מאלגברה הומומולוגית אומר שמעל שדה כללי,  $HM^k(M) \cong HM_k(M)$  עבור קומפלקסים נוצרים סופית. זה נובע למשל ממשפט המקדמים האוניברסלי. איזומורפיזם זה אינו בהכרח קנוני. נקבל כי

$$HM_k(M) \cong HM_{n-k}(M)$$

אבל איזומורפיזם זה אינו בהכרח קנוני. בפרט, מתקיים  $\beta_k = \beta_{n-k}$ .

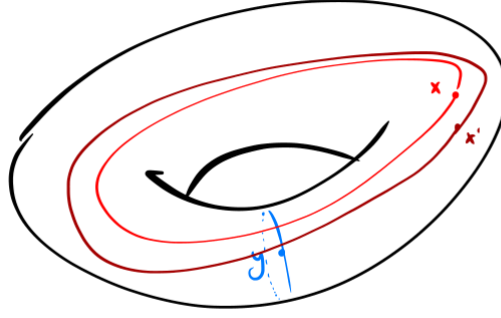
תהי  $L^k \subseteq M^n$  תתי־ריעה סגורה ממימד  $k$ . יש העתקה  $L \mapsto [L] \in HM_k(M)$  שמוגדרת באופן הבא. נבחר זוג Morse-Smale  $(F, \rho)$ . נגדיר

$$L \mapsto \sum_{x \in \text{Crit}_k(F)} \#_2 \mathcal{P}(L, x) \cdot x$$

עבור

$$\mathcal{P}(L, x) := \left\{ \gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \gamma(0) \in L \\ \gamma \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x \\ \gamma' = -\nabla F \end{array} \right\} \cong L \cap W^s(x)$$

כאשר החיתוכים  $L \cap W^s(x)$  טרנסוורסליים.



איור 1.38: יריעות יציבות ובלתי יציבות על הטורוס.

### 1.7.1 מכפלה בהומולוגיה

#### מכפלה בהומולוגיה כללית

עבור יריעות יש העתקה שנקראת intersection product עם

$$H_k(M) \times H_m(M) \rightarrow H_{k+m-n}(M)$$

$$[L_1^k] \times [L_2^m] \mapsto [L_1 \cap L_2]$$

עבור  $L_1 \pitchfork L_2$ . במקרה שאין טרנסוורסליות, נוכל לבצע פרטורבציה קטנה, ששומרת על מחלקות ההומולוגיה, ולקבל את אותה נוסחא.

במקרה של הטורוס, אם ניקח את הנקודות  $a, b$  באיור 1.38 נקבל  $[a] \times [b] = [\text{pt}]$ . עבור  $[a] \times [a]$ , נזיז עותק אחד של  $a$  כדי לקבל טרנסוורסליות, ונקבל  $0 = [a] \times [a]$ . נקבל גם  $[L] \times [L] = [\mathbb{T}^2]$  ובאופן כללי  $[\mathbb{T}^2]$  איבר יחידה. עבור  $L \subseteq \mathbb{T}^2$  מתקיים  $0 = [L] \times [L]$ . נקבל מבנה של חוג על  $H_*(M)$  עם איבר יחידה  $[M]$  כאשר  $M$  אוריינטבילית.

#### מכפלה בהומולוגיית מורס

נגדיר

$$\rho: C_k(F_1, \rho_1) \times C_m(F_2, \rho_2) \rightarrow C_{k+m-n}(F_3, \rho_3)$$

עבור

$$x \in \text{Crit}(F_1)$$

$$y \in \text{Crit}(F_2)$$

$$z \in \text{Crit}(F_3)$$

נגדיר

$$\mu(x, y; z) := \left\{ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \left| \begin{array}{l} \gamma_1, \gamma_2: (-\infty, 0] \rightarrow M \\ \gamma_3: [0, \infty) \rightarrow M \\ \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_3(0) \\ \gamma'_i = -\nabla F_i \end{array} \right. \right\}$$

אז נגדיר

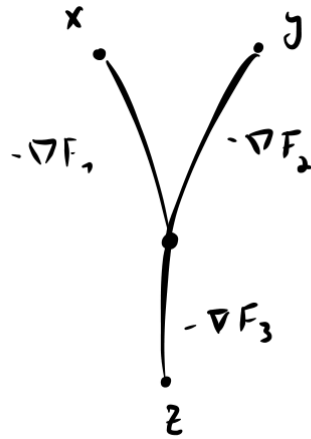
$$\rho(x, y) = \sum_{z \in \text{Crit}_{k+m-n}(F_3)} \#_2 \mu(x, y; z) \cdot z$$

ונרחיב לינאריות כדי לקבל העתקה בין הקומפלקסים.

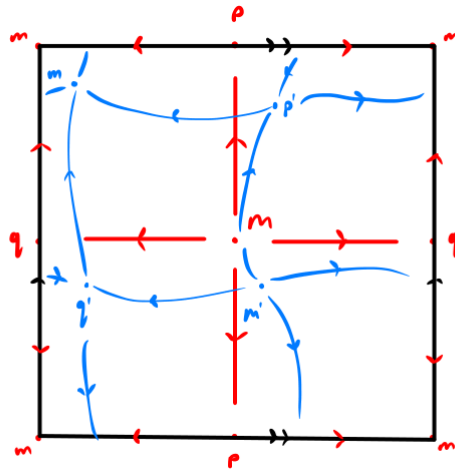
**הערה 1.7.6.** הקבוצה  $\mu(x, y; z)$  היא מספר השלשות של טרקטוריות כמתואר באיור 1.39 ויש התאמה

$$\mu(x, y; z) \cong W_{F_1}^U(x) \cap W_{F_2}^U(y) \cap W_{F_3}^S(z)$$

כמו מקודם, נדרוש שכל החיתוכים הנ"ל טרנסוורסליים, מה שמתקיים עבור בחירה גנרית של מידע מורס. זה מתקיים גם עבור בחירה גנרית תחת ההנחה  $(F_1, \rho_1) = (F_3, \rho_3)$  או  $(F_2, \rho_2) = (F_3, \rho_3)$ .



איור 1.39



איור 1.40

## הערה 1.7.7. מתקיים

$$\begin{aligned} \dim(\mu(x, y; z)) &= (\mu(x) + \mu(y) - n) + (n - \mu(z)) - n \\ &= \mu(x) + \mu(y) - \mu(z) - n \end{aligned}$$

דוגמה 1.7.8. נסתכל על  $\mathbb{T}^2$  כבאיור 1.40.

- נחשב את  $\rho(x, y)$  כאשר  $x = M, y = p'$ . כאשר  $z = q$  מתקיים  $\mu(M, q) \cap W^U(p') = \emptyset$  ולכן  $\# \mu(M, p'; q) = 0$ . כאשר  $z = p$  מתקיים  $\# \mu(M, p'; p) = 1$  לכן

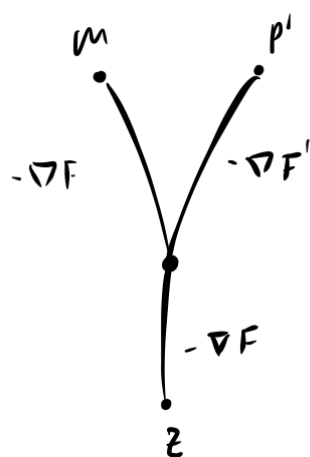
$$\rho(M, p') = p$$

$$\rho(M, q') = q$$

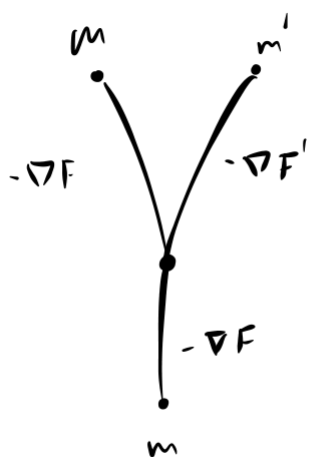
נרצה לחשב את  $\rho(M, M')$ . זה מספר "מזלגות" מ- $M, M'$  שמסתיימים בנקודה מאינדקס 2, שחייבת להיות  $M$ . כיוון ש- $M$  נקודת מקסימום, זה מספר המסלולים  $M' \rightarrow M$ , ששווה 1. נקבל  $\rho(M, M') = M$ .

נרצה לחשב את  $\rho(M, m')$ . נצטרך לחשב טרקטוריות שבורות מהצורה באיור 1.42 אבל, אלו בדיוק הטרקטוריות השבורות מ- $M$  ל- $m'$  שעוברות ב- $m'$  לפי  $(F, \rho)$ . מספר זה שווה בדיוק 1 לפי קיום יחידות, לכן  $\rho(M, m') = m$ .

- נחשב את  $\rho(q, q')$  על ידי הסתכלות על חיתוך בין המסלולים, כמו מקודם, ונקבל  $\rho(q, q') = 0$ . מתקיים  $\rho(s, p') = q$ .



איור 1.41



איור 1.42

**תרגיל 17.** בדוגמא הנ"ל, העתקת ההשוואה שולחת

$$\begin{aligned}x &\mapsto x' \\ y &\mapsto y' \\ m &\mapsto m' \\ \mathcal{M} &\mapsto \mathcal{M}'\end{aligned}$$

נקבל כי  $\mathcal{M}$  איבר היחידה, תחת הזיהוי.

**הערה 1.7.9.** עבור ה־intersection product באיור 1.38 ראינו כי

$$\begin{aligned}[\mathbb{T}^2] \cdot * &= * \\ [x] \cdot [x] &= 0 \\ [y] \cdot [y] &= 0 \\ [x] \cdot [y] &= [\text{pt}]\end{aligned}$$

וקיבלנו את אותו המבנה האלגברי כמו בחישוב הנוכחי.

**דוגמה 1.7.10.** עבור  $\mathbb{CP}^n$  מתקיים

$$H_* = \bigoplus_{k \in 2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \langle e_0, \dots, e_{2n} \rangle$$

כאשר המכפלה היא

$$e_{2m} \cdot e_{2k} = e_{2m+2k-2n}$$

נקבל כי

$$H_* = \mathbb{Z}_2 \langle e_{2n-2}^0, e_{2n-2}^1, e_{2n-2}^2, \dots \rangle$$

זה חוג הנוצר על ידי  $e_{2n-2}$ . המבנה של חוג ההומומולוגיה לפי ה־intersection product ולפי  $\rho$  איזומורפי באופן טבעי.

**הערה 1.7.11.** כאשר מוגדר ה־intersection product הוא מתקבל על ידי ה־cup product על ידי דואליות פואנקרה. ה־cap product הוא ה־intersection product.

**טענה 1.7.12.** 1. מתקיים

$$\rho(\partial_1(-), -) + \rho(-, \partial_2(-)) + \partial_3\rho(-, -) = 0$$

2. חשרה פעולה

$$\rho: HM_*(F_1, \rho_1) \times HM_*(F_2, \rho_2) \rightarrow HM_*(F_3, \rho_3)$$

3.  $\rho$  מתנהגת טוב ביחס להעתקות זיהוי, ואז מתקבלת העתקה

$$\rho: HM_*(M) \times HM_*(M) \rightarrow HM_*(M)$$

נציג סקיצה להוכחה.

הוכחה. 1. נסתכל על משפחה חד־מימדית של קונפיגורציות  $\mu(x, y; z)$ . נבצע קומפקטיפיקציה והדבקה כמו במקרה של  $\mu(x, y)$  ונקבל כי  $\partial\mu(x, ; z)$  מסווגת טריפודים שבורים. על כל נקודת שבר שנוסיף המימד יפחת באחת, ולכן מחשבון מימדים תיתכן נקודת שבר אחת  $w$ , שיכולה להיות על הרגל שסמוכה ל־ $x$ , ל־ $y$  או ל־ $z$ . נקבל

$$0 = \#_2\partial\mu(x, y; z) = \sum_w \#\hat{\mu}(x, w) \cdot \#\mu(w, y; z) + \sum_w \#\hat{\mu}(y, w) \cdot \#\mu(x, w; z) + \sum_w \#\hat{\mu}(w, z) \cdot \#\mu(x, y; w)$$

כאשר הסכום האגף ימין שווה

$$\#\rho(\partial x, y) + \#\rho(x, \partial_2 y) + \#\partial_3\rho(x, y)$$

2. עבור  $x \in \ker \partial_1, y \in \ker \partial_2$  מתקיים

$$\begin{aligned}\partial_3\rho(x, y) &= \rho(\partial_1 x, y) + \rho(x, \partial_2 y) \\ &= \rho(0, y) + \rho(x, 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\rho(x, y) \in \ker(\partial_3)$$

נניח כעת כי  $x = \partial_1 x' \in \text{Im } \partial_1$  וכי  $y \in \ker \partial_2$ . נרצה להראות כי  $\rho(\partial x', y) \in \text{Im } \partial_3$  כדי שההעתקה תהיה מוגדרת בהומומולוגיה. אכן

$$\rho(\partial x', y) = \rho(x', \partial y) + \partial \rho(x', y) = \partial \rho(x', y) \in \text{Im } \partial_3$$

לכן

$$\rho: HM_*(F_1, \rho_1) \times HM_*(F_2, \rho_2) \rightarrow HM_*(F_3, \rho_3)$$

מוגדרת היטב.

- 3. צריכים לבנות הומוטופיה בין זוגות מורס השונים ולספור רכיבי שפה של משפחות חד-מימדיות.

**הערה 1.7.13.** עבור  $L \subseteq M$  תת־יריעה, ניתן להתאים איבר  $[L] \in HM_*(M)$  על ידי

$$[L] = \sum_{x \in \text{Crit}(F)} \# \mu(L, x) \cdot x$$

כאשר הסכום עבור ביטויים  $\# \mu(L, x)$  סופיים. מתקיים

$$\rho(x, y) = \sum_z \# (W^U(x) \cap W^U(y)) \cap W^S(z) \cdot z = [W^U(x) \cdot W^U(y)]_{C(F_3, \rho_3)}$$

כאשר הכפל באגף ימין הוא ה־intersection product.

**דוגמה 1.7.14.** תהי  $M$  יריעה, ונסתכל על

$$\Delta = \{(p, p) \mid p \in M\} \subseteq M \times M$$

ניתן להגדיר את מאפיין אוילר של  $M$  על ידי

$$\chi(M) \cdot [\text{pt}] = [\Delta] \cdot [\Delta]$$

נסתכל על  $M = S^1$ . ידוע מטופולוגיה אלגברית כי  $\chi(M) = \beta_0 - \beta_1 = 0$ . נבדוק שזה מסתדר עם החישוב שלנו, כלומר שמתקיים  $[\Delta] \cdot [\Delta] = 0$ . נעבוד ב־ $M \times M = S^1 \times S^1$ . נבחר  $F, F': S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  עם

$$\text{Crit}(F) = \{N, S\}$$

$$\text{Crit}(F') = \{N', S'\}$$

נקבל

$$F + F': S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

ומטריקה רימנית סטנדרטית  $\rho_1 + \rho_2$ . נשאל מיהו  $[\Delta] \in HM_*(F + F', \rho_1 + \rho_2)$ . מתקיים

$$[\Delta] = \sum_{(p, q) \in \text{Crit}(F) \times \text{Crit}(F')} \# \mu(\Delta, (p, q)) \cdot (p, q)$$

ראו איור 1.43.

כמו כן,

$$\begin{aligned} \dim \mu(L, (p, q)) &= \dim(L \cap W^U(p, q)) \\ &= \dim L + (2 - \mu(p) - \mu(q)) - 2 \\ &= \dim L - \mu(p) - \mu(q) \end{aligned}$$

כאשר אצלנו  $\dim L = \dim \Delta = 1$  ולכן נרצה לספור נקודות קריטיות  $(p, q)$  עבורן  $\mu(p) + \mu(q) = 1$ . אז אחת הנקודות  $p, q$  היא מינימום והשנייה היא מקסימום. יש שני זוגות כאלה,  $(N, S')$ ,  $(S, N')$ . נסתכל על  $(N, S')$ . מתקיים  $-\nabla(F + F') = (-\nabla F, -\nabla F')$  ולכן מספר המסילות מ־ $L$  ל־ $(N, S')$  הוא מספר זוגות המסילות מ־ $p$  ל־ $N$  ומ־ $p'$  ל־ $S'$ . כדי שזה יתאפשר, צריך שיתקיים  $p = N$  כי  $N$  נקודת מקסימום. נקבל כי

$$\# \mu(\Delta, (N, S')) = 1$$

וחישוב דומה נותן

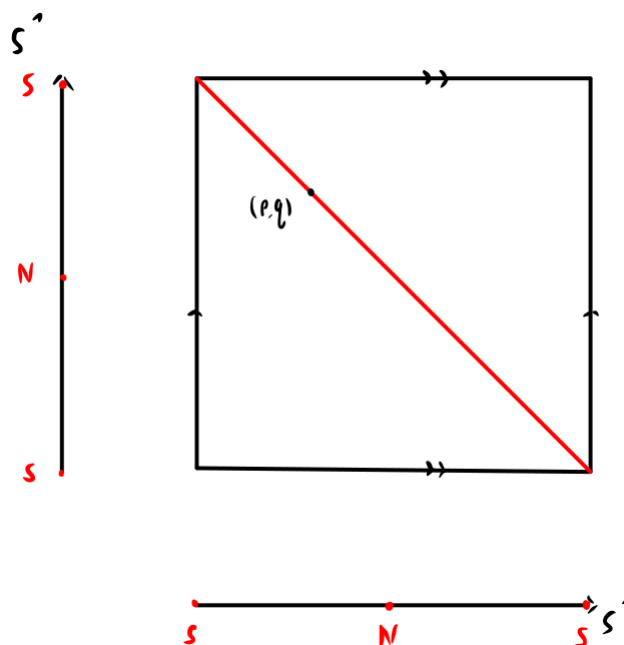
$$\# \mu(\Delta, (S, N')) = 1$$

אז מתקיים

$$[\Delta] = (N, S') + (S, N')$$

בסימונים קודמים, כתבנו  $p = (N, S')$ ,  $q = (S, N')$  וראינו כי  $p^2 = q^2 = 0$  וכי  $p \cdot q = q \cdot p = 1$ . אז

$$[\Delta] \cdot [\Delta] = p^2 + p \cdot q + q \cdot p + q^2 = 2 \cdot [\text{pz}] \equiv 0 \pmod{2}$$



איור 1.43

## 1.8 שימושים

### 1.8.1 נוסחת Künneth

משפט 1.8.1 (נוסחת Künneth). חתקיים

$$HM_k(M \times N) = \bigoplus_{i+j=k} HM_i(M) \otimes HM_j(N)$$

הוכחה. נבחר זוגות מורס  $(F, \rho)$  עבור  $M$  ו-  $(G, \rho')$  עבור  $N$ , שמקיימים את תנאי Morse-Smale. נקבל זוג  $(F + G, \rho + \rho')$  הכולל את  $M \times N$ , שמקיים את תנאי Morse-Smale לפי בדיקה ישירה. מתקיים

$$\varphi_{M \times N}^t(x, y) = (\varphi_M^t(x), \varphi_N^t(y))$$

וגם

$$\mu_{M \times N}((x, x'), (y, y')) = \mu_M(x, y) \times \mu_N(x', y')$$

כדי לחשב את  $\partial$  נרצה מרחב חד-מימדי כדי שזה יהיה מורכב ממספר סופי של טרקטוריות. כלומר, נדרוש  $\dim(\mu_{M \times N})((x, x'), (y, y')) = 1$ . אז  $\dim \mu_M(x, y) = 1$  או  $\dim \mu_N(x', y') = 0$  או  $\dim \mu_M(x, y) = 0$  ו-  $\dim \mu_N(x', y') = 1$ . נניח בלי הגבלת הכלליות שמתקיים המקרה הראשון.  $\mu_M(x, y)$  מספר המסלולים שנספרים ב-  $\partial_M^-$  ו-  $\mu_N(x', y') = \mu(x) - \mu(y)$ , מה שמתאפשר בתנאי Morse-Smale רק כאשר  $x' = y'$ . אז יש נקודה בודדת. נקבל כי

$$\partial_{M \times N}(x, x') = (\partial_M(x), x') + (x, \partial_N(x'))$$

אז

$$\partial_{M \times N} \partial_M \otimes \mathbb{1}_N + \mathbb{1}_M \otimes \partial_N$$

נקבל העתקה

$$C_*^M(F) \otimes C_*^N(G) \xrightarrow{\sim} C_*^{M \times N}(F + G)$$

$$x \otimes y \mapsto (x, y) \in \text{Crit}(F + G)$$

ששולחת את  $\partial_{M \times N}$  ל-  $\partial_M \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \partial_N$ . זה איזומורפיזם של קומפלקסים ולכן משרה איזומורפיזם בהומולוגיה,

$$H_*(C_*(F) \otimes C_*(G)) \cong H_*(C_*(F + G))$$

אם פותחים את ההגדרות מקבלים מכך את הנדרש.

■



**טענה 1.8.2.** תהי  $M$  יריעה עם פונקציית מורס  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  ללא נקודות קריטיות מאינדקס 1. אז  $M$  פשוטת קשר.

הוכחה. תהי  $\gamma: S^1 \rightarrow M$  עבור  $x \in \text{Crit}_k(M)$  נסתכל על  $\gamma \cap W^S(x)$ . מתקיים  $\dim W^S(x) = \dim M - \mu(x)$  ולכן

$$\dim(\gamma \cap W^S(x)) = 1 - \mu(x).$$

במקרה הגנרי בו  $\gamma \not\subset W^S(x)$  נקבל  $\gamma \cap W^S(x) = \emptyset$  לכל  $\mu(x) \geq 2$ . הנחנו שאין נקודות קריטיות מאינדקס 1, ולכן נותרו רק נקודות קריטיות מאינדקס 0. אם  $\gamma \cap W^S(x) \neq \emptyset$  נקבל כי  $\mu(x) = 0$  ואז  $x$  מינימום מקומי. מתקיים

$$M = \coprod_{x \in \text{Crit}(F)} W^S(x)$$

וגם

$$\gamma \subseteq \coprod_{\mu(x)=0} W^S(x) \cong \coprod_{\mu(x)} B^{\dim(M)}$$

אז  $\gamma$  מוכלת באיחוד זר של קבוצות פתוחות ב- $M$ . כיוון שהאיחוד זר, ו- $\gamma$  קשירה, נקבל  $\gamma \subseteq W^S(x_0)$  עבור  $x_0$  מינימום מקומי כלשהו. אז נוכל להגדיר הומוטופיה לפי הזרימה

$$\varphi^t(\gamma) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_0$$

■

לכן  $\gamma$  כוויצה.

**הערה 1.8.3.** אם אין נקודות קריטיות מאינדקס 1, ההומומולוגיה הראשונה מתאפסת, והטענה הנ"ל נובעת מכך שההומומולוגיה הראשונה היא האבליניזציה של החבורה היסודית.

**הערה 1.8.4.** הזוג  $(F, \rho)$  נדרש כדי לבנות שדה וקטורי  $-\nabla_\rho F$ . מהשדה נקבל זרימה  $\varphi^t$ . הנקודות הקריטיות  $\text{Crit}$  הן האפסים של  $-\nabla F$ . מספיק להשתמש ב- $-\nabla F$  בכדי לעשות את כל החישובים, ולשכוח את  $(F, \rho)$ . למעשה, ניתן לבנות את תורת מורס עם שימוש בשדות וקטוריים בלבד, בלי זוג מורס  $(F, \rho)$ . נדרוש משדה וקטורי  $X$  כזה את התכונות הבאות.

(i)  $X$  מתנהג כמו  $-\nabla F$  ליד האפסים שלו.

(ii)  $X$  אין לולאות. אין מסלולים מעגליים ואין לולאות שבורות.

**הגדרה 1.8.5 (Pseudo-gradient Vector Field).**  $X \in \text{Vect}(M)$  עבורו יש  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת את התכונות הבאות נקרא Pseudo-gradient Vector Field.

(i)  $X = -\nabla_\rho F$  ליד האפסים של  $X$ , לפי  $\rho$  כלשהי.

(ii)  $L_X F < 0$  בכל  $M$ .

במקרה של Pseudo-gradient Vector Field ניתן לבנות את כל תורת מורס, כמו מקודם.

**דוגמה 1.8.6.** נסתכל על משטח מגנוס 3 עם נקודות אוכף  $x, y, z$  באותו גובה. נוכל לעשות פרטורבציה של  $F$  תוך כדי שמירה של השדה הוקטורי  $X$ , מה שמאפשר להתייחס בצורה נוחה לחישובים במקרים דומים.

## 1.9 הכללות של תורת מורס

1. את התנאי  $L_X F < 0$  אפשר לכתוב גם  $dF(x) < 0$ . במקום התבנית  $dF \in \Omega^1(M)$  נוכל לעבוד עם תבנית  $\omega \in \Omega^1(M)$  ולדרוש  $\omega(X) < 0$ . נוכל ככה להחליש את התנאי של אין לולאות.

2. בתורת Morse-Bott אפשר לדבר גם על מקרים בהם יש תת-יריעות קריטיות. אצלנו,  $\partial x = \sum n_2(x, y) \cdot y$ , כאשר אפשר לזהות

$$n_2: \mathbb{Z}_2 \langle x \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_2 \langle y \rangle$$

בתורת Morse-Bott באופן דומה אפשר להגדיר

$$n(L_1, L_2): H_*(L_1) \rightarrow H_*(L_2)$$

ואז

$$\partial L_1 = \sum_{L_2} n(L_1, L_2) \cdot L_2$$

## 1.10 הומוטופיה מורס עם מקדמים ב- $\mathbb{Z}$

לאורך הדיון, תהי  $M$  יריעה סגורה עם אוריינטציה ועם זוג Morse-Smale  $(F, \rho)$ .

**הגדרה 1.10.1.** עבור  $k \in \mathbb{N}$  נגדיר

$$C_k^{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} \langle \text{Crit}_k(F) \rangle$$

לכל נקודה  $x \in \text{Crit}(F)$  נבחר אוריינטציה של  $W^U(x)$  (באופן שרירותי). עבור  $W^S(x)$  נקבע אוריינטציה באופן הבא. יהי  $B^U(x)$  בסיס חיובי של  $T_x W^U(x)$  ויהי  $B^S(x)$  בסיס כלשהו של  $T_x W^S(x)$ . אם

$$B_x^M = (B^U(x), B^S(x))$$

בסיס חיובי של  $M$ , נאמר כי  $B^S(x)$  בסיס חיובי של  $W^S(x)$ . כיוון ש-

$$T_x M = T_x W^U(x) \oplus T_x W^S(x)$$

זה מגדיר היטב אוריינטציה.

עבור החיתוכים  $W^U(x) \cap W^S(y)$  נקבע אוריינטציה בדרך סטנדרטית עבור חיתוכים טרנסוורסליים. תהי  $p \in W^U(x) \cap W^S(y)$ . נבחר בסיס  $(u_1, \dots, u_k)$  של  $T_p(W^U \cap W^S)$ . נרחיב אותו לבסיסים חיוביים

$$(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l)$$

$$(u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s)$$

של  $T_p W^U(x)$  ושל  $T_p W^S(y)$  בהתאמה. נקרא לבסיס  $(u_1, \dots, u_k)$  בסיס חיובי אם  $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_s)$  בסיס חיובי של  $T_p M$ . אחרת נגיד ש- $(u_1, \dots, u_k)$  בסיס שלילי.

**תרגיל 18.** בידקו שהאוריינטציה בהגדרה הנ"ל מוגדרת היטב.

**הגדרה 1.10.2.** עבור  $x \in \text{Crit}_k(F)$  נגדיר

$$\partial_k^{\mathbb{Z}}(x) = \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(F)} n(x, y) \cdot y$$

עבור

$$n(x, y) := \# \hat{\mu}(x, y) = \# \mu(x, y) / \mathbb{R}$$

**הערה 1.10.3.** כל איבר ב- $\mathbb{R} \mu(x, y)$  הוא מסלול זרימה, כלומר תתי-יריעה חד-מימדית מתוך  $W^U(x) \cap W^S(y)$ . אם  $-\nabla F(p)$  בסיס חיובי של  $T_p(W^U(x) \cap W^S(y))$  נספור את המסילה עם סימן +, אחרת עם סימן -.

**דוגמה 1.10.4.** נסתכל על הטורוס  $\mathbb{T}^2 := M$  כמתואר באיור 1.26. נחשב את  $\partial_1^{\mathbb{Z}}(p)$ . נבחר אוריינטציות של  $W^U(m)$ ,  $W^U(p)$ ,  $W^S(m)$ .  $W^U(p)$  קטע פתוח (בין  $p$  ו- $m$ ). נבחר אוריינטציה עבורה  $\frac{\partial}{\partial x}$  בסיס חיובי. הקבוצה  $W^U(m) = \{m\}$  היא נקודה בודדת עם מרחב משיק  $T_m m = \{0\}$  עם בסיס  $\emptyset$ . נצטרך להחליט האם זה בסיס חיובי או שלילי, ונבחר שזה בסיס חיובי.  $m$ -ל- $m$  נקבל מסלול אחד חיובי ואחד שלילי, לכן סכום המסלולים עם הסימון שווה 0. אבל, צריך להסתכל על מסלולים אלו לפי האוריינטציה של  $W^S(m)$ . תתי-יריעה זאת היא איחוד של שני הקטעים הפתוחים, עם אוריינטציה שהגדרנו על החיתוך. נחשב את האוריינטציה של  $W^S(m)$ . נצטרך להשלים את  $\emptyset$  לבסיס חיובי של  $T_m M$ . לכן, האוריינטציה מסכימה עם זאת של  $M$ .

עבור  $s$  בקטע הימני,  $-\nabla F(s)$  בסיס חיובי של  $T_s W^U(p)$ . נקבל כי  $(-\nabla F(s), \frac{\partial}{\partial y})$  בסיס חיובי של  $T_s M$ . אז  $(-\nabla F(s))$  בסיס חיובי של  $T_p(W^U \cap W^S)$ . עבור  $t$  בקטע השמאלי, נסתכל על  $(\nabla F(t))$  וזה בסיס חיובי של  $W^U(p)$ . נשלים לבסיס חיובי  $(\nabla F(t), \frac{\partial}{\partial y})$  של  $T_t W^S(m)$ . נסיק כי  $\nabla F(t)$  בסיס חיובי של  $(W^U(p) \cap W^S(m))$ . אז  $T_t(W^U(p) \cap W^S(m))$  בסיס חיובי של  $T_t M$ . לכן, נספור את המסילה הימנית בסימן + ואת השמאלית בסימן -. נקבל כי

$$\partial_1^{\mathbb{Z}}(p) = (1 - 1) \cdot m = 0$$

כמו במקרה של  $\mathbb{Z}_2$  נקבל גם כאן  $\partial_* = 0$  ואז

$$HM_*(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \cong C_* \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & k = 1 \\ \mathbb{Z} & k = 2 \end{cases}$$

**הערה 1.10.5.** נוכל לחשב הומוטופיה עבור חוג כללי (קומוטטיבי עם יחידה) בדומה לחישוב ההומוטופיה מעל  $\mathbb{Z}$ .

### טענה 1.10.6. מתקיים $\partial^2 = 0$ .

הוכחה. תהיינה  $x \in \text{Crit}_k(F)$  ו-  $y \in \text{Crit}_{k-2}(F)$ . נרצה להראות שמתקיים

$$\sum_{z \in \text{Crit}_{k-1}(F)} \# \hat{\mu}(x, z) \cdot \# \hat{\mu}(z, y) = 0$$

כמו מקודם, נסתכל על מסילות שבורות מ-  $x$  ל-  $y$ . ראו איור מספיק להראות כי

$$\text{sgn}(\gamma_1) \cdot \text{sgn}(\gamma_2) + \text{sgn}(\delta_1) \cdot \text{sgn}(\delta_2) = 0$$

זה נובע מבדיקה ישירה.

■

## פרק 2

### תורת minimax

עד כה השתמשנו במידע מורס כדי להסיק על אינווריאנטים של היריעה. כעת, ניעזר באינווריאנטים של היריעה כדי להגיד דברים על פונקציות על יריעה.

ראינו בהקשר זה את אישויוני מורס. עבור  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית מורס, מתקיים

$$\# \text{Crit}_k(F) \geq \dim H_k(M)$$

אם נעבוד עם כלים מתאימים, נוכל להגיד הרבה יותר. ראינו גם עבור  $M$  סגורה שלכל  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  יש נקודת מינימום ומקסימום, ויש אלגוריתם לחישוב  $F(m)$ ,  $F(M)$  עבור נקודות מינימום ומקסימום  $m, M$ , למשל לפי שיטת ניוטון. נרצה לדעת איך להגיע למידע גם עבור נקודות אוקף.

נניח תחילה כי  $\dim M = 2$ . נדון בקיום נקודות אוקף. מתקיים:

$$1. \# \text{Crit}_1(F) \geq \beta_1$$

2. יש חסם שמשתמש בהתנהגות של  $F$  ולא רק בטופולוגיה של  $M$ :

$$\# \text{Crit}_2(F) - \# \text{Crit}_1 + \# \text{Crit}_0 = \chi := \beta_2 - \beta_1 + \beta_0$$

אכן

$$\begin{aligned} \chi &= \dim \ker(\partial_2) - (\dim \ker(\partial_1) - \dim \text{Im}(\partial_2)) + (\dim C_0 - \dim \text{Im}(\partial_1)) \\ &= \dim C_2 - \dim C_1 + \dim C_0 \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שמתקיים

$$\dim C_i = \dim \ker(\partial_i) + \dim \text{Im}(\partial_i)$$

3. אם  $M$  יריעה סגורה וקשירה, מתקיים  $\# \text{crit}_1 \geq \# \text{Crit}_0 - 1$

נסתכל על  $M^{F < a}$ . כאשר  $a$  עובר דרך ערך קריטי, יש הרבה של ידית/ידיות. לכל נקודה קריטית מאינדקס  $k$  נדביק  $B^k \times B^{m-k}$  לאורך  $\partial B^k \times B^{m-k}$ . אם  $k \geq 2$ , ההדבקה היא לאורך קבוצה קשירה  $S^{k-1} \times B^{m-k}$  ואז הידית נדבקת לאותו רכיב קשירות. לכן, מספר רכיבי הקשירות יקטן רק עבור  $k = 1$ . אז הידית היא  $B^1 \times B^{m-1} = I \times B^{m-1}$  ומודבקת לאורך  $\partial I \times B^{m-1}$ . לכן  $\# \text{Crit}_1$ , מספר נקודות הקריטיות, הוא לפחות מספר נקודות המינימום פחות 1. אם נסדר את נקודות הקריטיות של  $F$  לפי הגובה,  $p_1, \dots, p_k \in \text{Crit}_0(F)$ , יהיו נקודות קריטיות  $q_1, \dots, q_{k-1} \in \text{Crit}_1(F)$  כאשר  $F(q_i) \geq F(q_{i+1})$ .

ניתן להוכיח זאת גם עם הומוולוגיה, כמתואר בתרגיל הבא.

**תרגיל 19.** 1. תהי  $M$  יריעה קשירה ויהיו  $x, y \in \text{Crit}_0(F)$  ו  $[x] = [y] \in HM_0(F)$ .

2. אם

$$\begin{aligned} \alpha: C_0 &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ \sum a_i x_i &\mapsto \sum a_i \end{aligned}$$

$$\text{Im}(\partial_1) = \ker \alpha$$

3. מתקיים

$$HM_0(F) = \ker(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) \cong \mathbb{Z}_2$$

4. הסיקו שמתקיים

$$\dim C_0 - 1 = \dim \operatorname{Im}(\partial_1) \leq \dim C_1$$

ולכן

$$\#\operatorname{Crit}_0 - 1 \leq \dim \operatorname{Crit}_1$$

**משפט 2.0.1 (Mountain Pass Theorem).** נסתכל על מסילות  $M$  על  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  עם

$$\gamma(0) = x$$

$$\gamma(1) = y$$

עבור  $x, y$  בסביבת נקודת אוסף  $p$  מתקיים

$$F(p) = \inf_{\gamma} \max_{z \in \gamma} F(z)$$

ההוכחה הבאה מתוך הספר Riemannian Geometry & Geometric Analysis של Jost.

הוכחה. נניח כי  $M$  יריעה / יריעת הילברט (אנלוג אינסוף-מימדי של יריעה) קשירה מסילתית ותהי  $F \in C^1(M, \mathbb{R})$ . נניח שפתרון המד"ר המוגדרת על ידי  $-\nabla F$  קיים לכל  $x \in M$  ולכל  $t \geq 0$ . נסתכל על  $MF < a$  ונניח כי יש לה שני רכיבי קשירות שונים  $A, B$ . נניח גם ש- $F$  מקיימת את תנאי Palais-Smale שנתאר בהמשך. אז קיימת נקודה קריטית  $p$  של  $F$  עברה

$$F(p) = K = \inf_{\substack{\gamma \in C^0([0,1], M) \\ \gamma(0) \in A \\ \gamma(1) \in B}} \max_{z \in \gamma} F(z) \geq a$$

■

**הגדרה 2.0.2 (תנאי Palais-Smale).**  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  פונקצייה  $C^1$  מקיימת את תנאי Palais-Smale אם לכל סדרה  $x_1, \dots, x_n, \dots \in M$  עברה

$$|F(x_i)| \leq C \quad 1.$$

$$\|dF(x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad 2.$$

קיימת תת-סדרה מתכנסת ב- $M$ .

**הערה 2.0.3.** עבור יריעה סגורה או קומפקטית, תנאי Palais-Smale מתקיים לכל פונקציה, ולכן נובע משפט ה-Mountain-Pass. התנאי מתקיים גם כאשר  $M$  אינה קומפקטית אך  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  העתקה proper. כאשר  $M$  אינסוף-מימדית (ולכן לא קומפקטית, גם מקומית), תנאי Palais-Smale מהווה תחליף לתכונות של קומפקטיות.

נמשיך את הוכחת המשפט.

הוכחה. • נראה ש- $K$  ערך קריטי של  $F$ . נבחר סדרה  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_+} \subseteq M$  עברה  $F(x_i) \rightarrow K$ .

אם  $\|dF(x_i)\| \rightarrow 0$  לפי Palais-Smale יש תת-סדרה מתכנסת ל- $x_{i_k}$  אז

$$F(x_0) = \lim F(x_{i_k}) = k$$

$$dF(x_0) = \lim dF(x_{i_k}) = 0$$

ואז הנקודה הנדרשת. אחרת, לכל סדרה כזאת לא מתקיים  $dF(x_i) \rightarrow 0$ . אז יש  $\alpha, \eta > 0$  עבור  $\|dF(x)\| > \alpha$  לכל  $|F(x) - K| < \eta$ .

• נבחר  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  עם  $\gamma(0) \in A, \gamma(1) \in B$  ו- $\max_{z \in \gamma} F(z) \leq K + \eta$ . נפעיל את הזרימה של  $-\nabla F$  על  $\gamma$ . נקבל

$$\frac{d}{dt} (F(\Phi^t(x))) = \dots$$

$$= -\|dF(\Phi^t(x))\|^2$$

$$\leq -\alpha^2$$

כאשר  $t_0 = \frac{2\eta}{\alpha^2}$  עבור  $K - \eta \leq F \leq K + \eta$ .

$$F(\Phi^{t_0}(\gamma)) \leq K - \eta$$

■

וזאת סתירה לשלב הקודם.