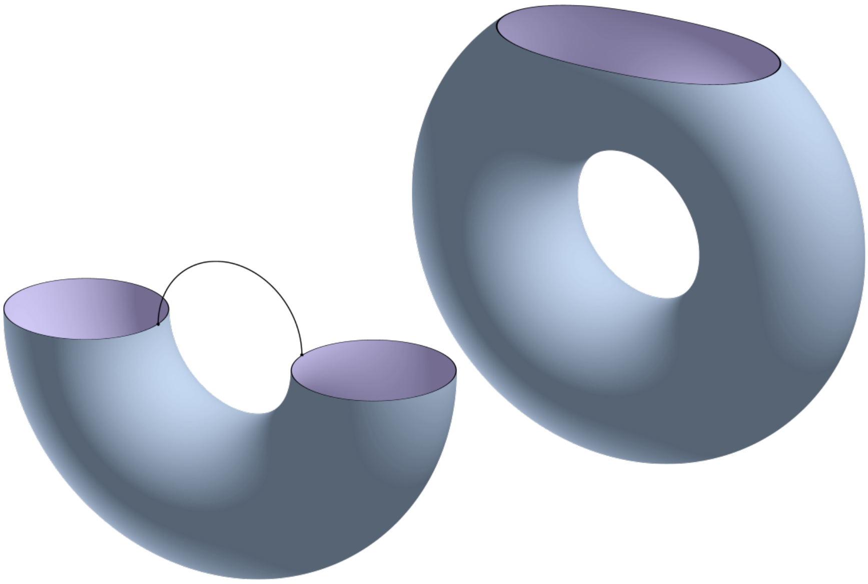
סיכומי הרצאות בתורת מורס
אביב 2021, הטכניון

הרצאותיו של מיכאל חנבסקי
סוכמו על ידי אלעד צורני



חלקים שקולים הומוטופית של הטורוס.

עדכון אחרון 23 במאי 2021

תוכן העניינים

הקדמה

הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות.
להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל tzorani.elad@gmail.com.
אלעד צורני.

ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

J. Milnor: Morse Theory

A. Banyaga, D. Hurtubise: Lectures on Morse Homology

M. Audin, M. Damian: Morse Theory and Floer Homology

ציון

הציון בקורס ינתן עבור מבחן בית שעשוי (ועשוי לא) לכלול מעבר בעל פה על הפתרונות.

דרישות קדם

דרישת הקדם לקורס היא יריעות דיפרנציאביליות. היכרות עם טופולוגיה אלגברית מועילה אך אינה חיונית.

פרק 1

מבוא

1.1 מוטיבציה

דוגמה 1.1.1. באיור 1.1 הנקודות המסומנות מאדום הן הנקודות הקריטיות של F. נסמן

$$\mathbb{T}^a := \left\{p \in \mathbb{T}^2 \;\middle|\; F(p) < a\right\}.$$

- עבור $a \le F(m)$ נקבל $\mathbb{T}^a = \varnothing$.
- עבור $F(m) < a \le F(x)$ נקבל $\mathbb{T}^a \cong D^2$. ראו איור 1.2.
- עבור $F(x) < a \le F(y)$ נקבל $\mathbb{T}^a \cong S^1 \times (0,1)$. ראו איור
- עבור $F(y) < a \le F(M)$ נקבל $\mathbb{T}^a \cong \mathbb{T}^2 \setminus D^2$.
- עבור $F(M) < a$ נקבל $\mathbb{T}^a = \mathbb{T}^2$.

מסקנה 1.1.2. אם ב־$[a,b)$ אין ערכים קריטיים אז $\mathbb{T}^a \cong \mathbb{T}^b$.

נשאל איך משתנה הטופולוגיה במעבר בנקודות הקריטיות.

- במעבר דרך $F(m)$ יש הוספת דיסק.
- כאשר $a = x - \varepsilon$ עבור ε מספיק קטן, קו הגובה יראה באיור 1.4 אם נדביק את $\mathbb{T}^a$ על פס כבאיור 1.5 נקבל יריעה דיפאומורפית ל־$\mathbb{T}^x + \varepsilon$.
- כאשר $a = y + \varepsilon$ עבור ε מספיק קטן נקבל כי $\mathbb{T}^a$ כבאיור 1.6. אם נדביק את העיגולים באידומים באיור על פס כבאיור 1.7 נקבל יריעה דיפאומורפית ל־$\mathbb{T}^a$ עבור $a = y + \varepsilon$.
- במעבר דרך $F(M)$ יש הדבקה של D^2 לשפה של $\mathbb{T}^{F(M)-\varepsilon}$.

ראינו שבמקרה של הטורוס יש לנקודות הקריטיות חשיבות רבה במבנה של היריעה. אנחנו נראה בקורס שאפשר לשחזר אינווריאנטים כמו ההומולוגיה של יריעה בעזרת הבנה של הנקודות הקריטיות. במקרה של הטורוס, מתקיים

$$\begin{aligned} H_0\left(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}\right) &= \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\langle m\rangle \\ H_1\left(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}\right) &= \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}\langle x, y\rangle \\ H_2\left(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}\right) &= \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\langle M\rangle. \end{aligned}$$

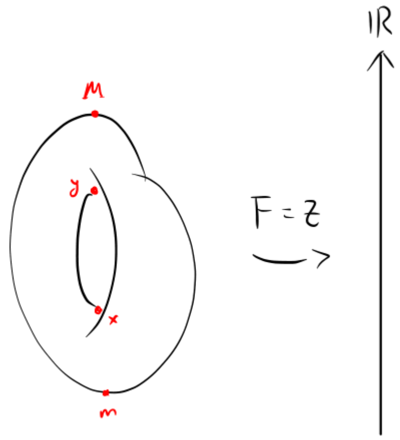
נדבר על דרך כללית להבין הומולוגיה וקוהומולוגיה של יריעות בעזרת נקודות קריטיות. נדבר על דואליות פואנקרה, על מבנה של כפל בקוהומולוגיה, על העתקות טבעיות, על מקדמים בחוגים שונים, וכו'.
בין היתרונות של תורת מורס הם שהיא נותנת את ה(קו)הומולוגיות הסטנדרטיות על יריעות, ושהיא עובדת עבור אוביקטים אינסוף־מימדיים.

דוגמה 1.1.3 (Path-Space). תהי M יריעה רימנית ויהי

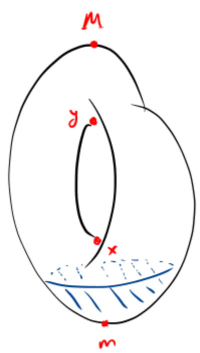
$$\mathcal{P}(x,y) = \left\{\gamma\colon [0,1] \to M \;\middle|\; {\scriptstyle \gamma(0)=x \atop \gamma(1)=y}\right\}.$$

על מרחב זה אפשר להגדיר כל מני פונקציות, למשל

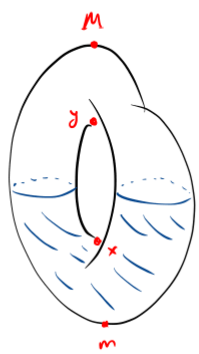
$$\begin{aligned} \text{len}\colon \mathcal{P}(x,y) &\to \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \int_0^1 \|\dot\gamma\|\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$



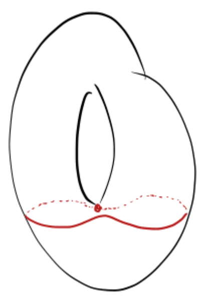
איור 1.1: העתקת גובה מהטורוס, והנקודות הקריטיות שלה.



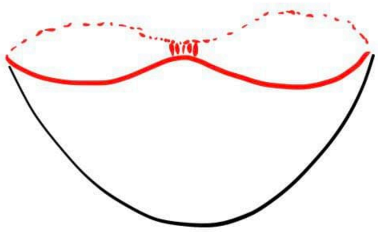
איור 1.2: חתך של הטורוס שדיפאומורפי ל־D^2.



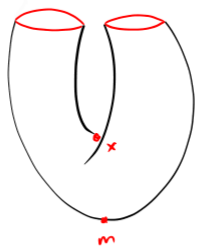
איור 1.3: חתך של הטורוס שדיפאומורפי ל־$S^1 \times (0,1)$.



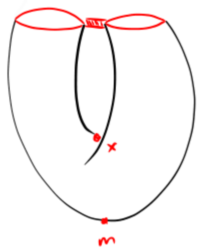
איור 1.4: קו גובה על הטורוס קרוב לנקודת אוכף.



איור 1.5: הדבקת חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוכף.



איור 1.6: חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוכף.



איור 1.7: הדבקת חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוכף.

אפשר לנסות לעבוד עם תורת מורס על פונקציה כזאת ולהבין את המרחב $\mathcal{P}\left(x,y\right)$ בעזרת הנקודות הקריטיות של len. במקרה הזה, הנקודות הקריטיות הן קווים גיאודזיים. הן אינן מבודדות וקשה להסיק דברים על המרחב.
במקרה של

$$\varphi\left(\gamma\right)=\int_0^1\left\|\dot{\gamma}\right\|^2\mathsf{d}s$$

הנקודות הקריטיות יהיו קווים גיאודזים עם מהירות קבועה. אז הנקודות הקריטיות בדרך כלל יהיו מבודדות, ויהיה אפשר להשתמש בתורת מורס.

1.2 נקודות קריטיות

במהלך הקורס נניח כי כל המבנים חלקים. התוצאות נכונות באופן כללי יותר עבור יריעות $\mathcal{C}^2$, שדות וקטוריים $\mathcal{C}^1$ ופונקציות דיפרנציאביליות $\mathcal{C}^2$.

הגדרה 1.2.1 (נקודה קריטית). תהי $F\colon M\to N$ העתקה חלקה בין יריעות חלקות. נקודה $p\in M$ נקראת קריטית אם $Df_p\colon T_pM\to T_{f(p)}N$ אינה על.

הערה 1.2.2. 1. במסגרת הקורס נדון בפונקציות $F\colon M\to\mathbb{R}$. אז $p\in M$ נקודה קריטית אם ורק אם

$$DF_p\colon T_pM\to T_{f(p)}\mathbb{R}$$

אינה על. כיוון ש־$T_{f(p)}\mathbb{R}$ מרחב לינארי חד־מימדי זה שקול לכך שמתקיים $DF_p=0$.

2. ניתן לזהות $T_{f(p)}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$ בדרך קנונית. נגדיר את ההרכבה של העתקה זאת על DF_p להיות הנגזרת החיצונית של F בנקודה p. נראה זאת בדיאגרמה הבאה.

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "DF_p"] \arrow[dr, dotted, "\mathsf{d}F_p"'] & T_{f(p)}\left(\mathbb{R}\right) \arrow[d, "\wr"'] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

נקבל כי $p\in M$ נקודה קריטית אם ורק אם $\mathsf{d}F_p=0$.

זאת תהיה ההגדרה שנעבוד איתה במשך רוב הקורס.

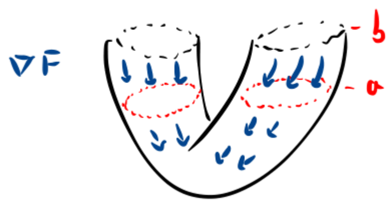
3. אם נפתח את ההגדרה של הנגזרת החיצונית נקבל כי $p\in M$ נקודה קריטית אם ורק אם $\frac{\partial F}{\partial v}\left(0\right)\coloneqq\mathsf{d}F_p\left(v\right)=0$ לכל $v\in T_pM$. מכך נסיק כי נקודות מינימום ומקסימום הן נקודות קריטיות. כמו כן, ניתן לראות מכך כי נקודות אוכף הן נקודות קריטיות.

דוגמה 1.2.3. יהי $M\subseteq\mathbb{R}^3$ משטח ותהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ פונקציית גובה. נגדיר

$$\begin{aligned} f\colon\mathbb{R}^3&\to\mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&\mapsto z\end{aligned}$$

ואז $F=f|_M$.
אז $\mathsf{d}f=\mathsf{d}z$ ומתקיים

$$\mathsf{d}F_p=\mathsf{d}f|_{T_pM}=\mathsf{d}z|_{T_pM}\,.$$



איור 1.8: זרימה על הטורוס לאורך הגרדיאנט.

אז

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_p = 0 &\iff \mathrm{d}z|_{T_pM} = 0 \\ &\iff T_pM = \ker(\mathrm{d}z) \\ &\iff T_pM \parallel \mathrm{Span}(x,y) \\ &\iff T_pM = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp} \end{aligned}$$

$$T_pM^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

בדוגמה באיור 1.1 נקבל שהנקודות הקריטיות הן בדיוק אלו המסומנות. אלו הנקודות בהן הנורמל למישור הוא כפולה של z.

כעת נרצה לעבוד עם שדות וקטוריים במקום נגזרות חיצוניות. במקרה זה אפשר להסתכל על זרימות לאורך שדה ועל הומוטופיות, מה שחסר במקרה של הנגזרת החיצונית. נתחיל בהגדרה של גרדיאנט ובקשר שלו לנגזרת החיצונית.

הגדרה 1.2.4 (גרדיאנט). תהי (M,g) יריעה רימנית. ותהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה. לכל $p \in M$, g משרה איזומורפיזם

$$\begin{aligned} g\colon T_pM &\xrightarrow{\sim} T_p^*M \\ v &\mapsto g(v,\cdot) \end{aligned}.$$

הגרדיאנט של F שנסמנו $\nabla_g F$ או בדרך כלל ∇F מוגדר להיות השדה היחיד המקיים

$$g(\nabla F, \cdot) = \mathrm{d}F.$$

הערה 1.2.5. הגרדיאנט ∇F תלוי בבחירת g!

הערה 1.2.6. מתקיים

$$\mathrm{d}F_p = 0 \iff \nabla_g F_{(p)} = 0$$

וזה בלתי־תלוי בבחירת g.

נקבל מכך כי $p \in M$ נקודה קריטית עבור F אם ורק אם $\nabla F_{(p)} = 0$.

טענה 1.2.7. תהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ ויהיו $a < b$ כך שקיים $\varepsilon > 0$ עבורו הקטע $(a-\varepsilon, b)$ אינו מכיל ערכים קריטיים. לדוגמא ראו איור 1.8.

אז יש דיפאומורפיזם $M^a \cong M^b$.

הוכחה. נרצה לנרמל את הגרדיאנט כדי שמהירות הזרימה תהיה אחידה. כדי לא לחלק באפס, נאפס את השדה מתחת לגובה $a-\varepsilon$.

תהי g מטריקה רימנית על M. נסמן $X=-\nabla_g F$. עבור $p\in M^b$ נסתכל על $\frac{X_p}{\|X_p\|^2}$. זה מגדיר שדה וקטורי שלאורכו F יורדת במהירות 1.[1]
תהי

$$\rho\colon(-\infty,b)\to\mathbb{R}$$

חלקה עבורה

$$\begin{aligned}\rho|_{-\infty,a-\varepsilon}&\equiv 0\\ \rho|_{(a,b)}&\equiv 1\\ \rho'&\geq 0\end{aligned}\quad.$$

אז נוכל להגדיר

$$X'=\frac{\rho X_p}{\|X_p\|^2}$$

לכל $F(p)\in(a-\varepsilon,b)$ ונרחיב את X' מתחת לגובה $a-\varepsilon$ עם אפסים. למד"ר המוגדרת על ידי X' יש פתרונות לכל זמן $t\geq 0$.
תהי $\varphi_t\colon M^b\to M^b$ זרימה של X'. אז $\varphi_{b-a}\colon M^b\xrightarrow{\sim}M^a$ דיפאומורפיזם. ■

1.3 הדבקת ידיות

1.3.1 פונקציות מורס

נרצה כעת להבין מה קורה איך היריעות M^a,M^b משתנות כאשר עברו מ־a ל־b דרך נקודה קריטית. זה דבר מסובך מאוד באופן כללי ולכן ניאלץ לצמצם את הדיון לנקודות קריטיות שאינן מנוונות.

הגדרה 1.3.1 (הסיאן). תהי M יריעה רימנית ותהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה. לכל $p\in$ נגדיר

$$\text{Hess}_p\left(F\right):T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$$

על ידי $\text{Hess}\left(F\right)=\nabla\,\mathrm{d}F$ כאשר ∇ הוא ה־Levi-Civita Connection.
הגדרה מפורשת יותר היא

$$\begin{aligned}\text{Hess}_p\left(F\right)\left(X_p,Y_p\right)&=\left\langle\nabla_X\text{grad}\left(F_p\right),Y_p\right\rangle\\ &=L_XL_Y\left(F\right)-\mathrm{d}F_p\left(\nabla_XY\right)\end{aligned}$$

עבור שני שדות וקטוריים X,Y שמוגדרים סביב p.

הערה 1.3.2. הבחירה של ההסיאן תלויה בבחירה של המטריקה הרימנית.
במקרה הפרטי ש־p נקודה קריטית מתקיים $\mathrm{d}F_p=0$ ואז

$$\text{Hess}_p\left(F\right)\left(X_p,Y_p\right)=L_XL_Y\left(F\right).$$

בפרט, הערך של ההסיאן בנקודה הקריטית אינו תלוי בבחירה של המטריקה הרימנית.

הערה 1.3.3. אם p נקודה קריטית של F נוכל להגדיר את ההסיאן כהעתקה $T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ באופן הבא. יהיו $X,Y\in T_pM$. נרחיב את X,Y לשדות לוקליים $\tilde{X},\tilde{Y}$ סביב p. אז

$$\text{Hess}_p\left(F\right)\left(X,Y\right):=L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}}\left(F\right)\left(p\right).$$

הגדרה 1.3.4 (נגזרת לי). עבור שדה וקטורי $\tilde{Y}$ ונקודה $p\in M$ נגדיר

$$\begin{aligned}L_{\tilde{Y}}\left(F\right)\left(p\right)&=\lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left(\varphi^t_{\tilde{Y}}\left(p\right)\right)-f\left(p\right)\right)}{t}\\ &=dF_p\left(\tilde{Y}_p\right)\\ &=\frac{\partial F}{\partial\tilde{Y}}\left(p\right)\end{aligned}$$

כאשר $\varphi_{\tilde{Y}}$ הזרימה לפי $\tilde{Y}$.

[1] גיאומטרית, $\frac{X}{\|X\|}$ וקטור יחידה שמצביע בכיוון בו F עולה הכי מהר, ומהירות העליה לאורכו היא $\|X\|$. לכן כדי שהמהירות תהיה קבועה חלקנו ב־$\|X_p\|^2$.

הערה 1.3.5. נקבל מההגדרה כי

$$\begin{aligned}\left(L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}}\right)(p) &= \mathsf{d}\left(L_{\tilde{Y}}F\right)_p\left(\tilde{X}_p\right)\\ &= \mathsf{d}\left(L_{\tilde{Y}}F\right)_p(X)\end{aligned}$$

ולכן $\mathsf{Hess}_p(F)$ אינו תלוי בבחירת ההרחבה $\tilde{X}$ של X.

נראה שההסיאן סימטרי ב־X,Y ונקבל מכך כי ההסיאן אינו תלוי בבחירת ההרחבה $\tilde{Y}$ של Y.

טענה 1.3.6.

$$\mathsf{Hess}_p(F)(X,Y) = \mathsf{Hess}_p(F)(Y,X).$$

הוכחה. מתקיים

$$\begin{aligned}\mathsf{Hess}_p(F)(X,Y) - \mathsf{Hess}_p(F)(Y,X) &= L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}}(F)_p - L_{\tilde{Y}}L_{\tilde{X}}(F)_p\\ &= L_{\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]}F_p\\ &= \overset{0}{\cancel{\mathsf{d}F_p}}\left(\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]_p\right)\\ &= 0\end{aligned}.$$

■

מסקנה 1.3.7. $\mathsf{Hess}_p(F)(X,Y)$ אינה תלויה בבחירת ההרחבות $\tilde{X},\tilde{Y}$.

תרגיל 1. בקואורדינטות מקומיות סביב p

$$\hat{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

מתקיים

$$\mathsf{Hess}_{\hat{p}}\left(\hat{F}\right) : T_{\hat{p}}U \times T_{\hat{p}}U \to \mathbb{R}.$$

אם נזהה $T_{\hat{p}}U \cong \mathbb{R}$ נקבל העתקה $\left(\mathbb{R}^n\right)^2 \to \mathbb{R}$. העתקה זאת מיוצגת על ידי המטריצה

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{p})\right)_{i,j\in[n]}$$

כמו בקורסי אינפי.

סימון 1.3.8. נסמן ב־$\mathsf{Crit}(F)$ את אוסף הנקודות הקריטיות של F.

הגדרה 1.3.9 (נקודה קריטית לא־מנוונת). $p \in \mathsf{Crit}(F)$ לא מנוונת *non-degenerate* אם $\mathsf{Hess}_p(F)$ תבנית לא מנוונת (באופן שקול, אם $\ker\left(\mathsf{Hess}_p\right) = \{0\}$, ובאופן שקול אם 0 אינו ערך עצמי).

דוגמה 1.3.10. תהי

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

ותהי

$$\begin{aligned}F\colon S^2 &\to \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &\mapsto z\end{aligned}.$$

תהי $p = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. זאת נקודה קריטית כי הנורמל לספירה ב־p מצביע למעלה.

נבחר קבוצה פתוחה U קטנה סביב p, ומפת קואורדינטות

$$\begin{aligned}\varphi\colon U &\to \mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}.$$

אז הצגה מקומית היא

$$\begin{aligned}\hat{F}\colon \varphi\left(U\right) &\to \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} &\mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}\end{aligned}$$

ואז

$$\mathsf{Hess}_0\left(\hat{F}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x^2}\left(0\right) & \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x\partial y}\left(0\right)\\ \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial y\partial x}\left(0\right) & \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial y^2}\left(0\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

לא מנוונת.
באופן דומה

$$\mathsf{Hess}_{\hat{s}}\left(\hat{F}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

הגדרה 1.3.11 (פונקציית מורס). $F\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה היא פונקציית מורס אם כל הנקודות הקריטיות שלה אינן מנוונות.

1.3.2 הלמה של מורס

עבור $F\colon M\to\mathbb{R}$ נוכל לקחת פיתוח טיילור של הצגה מקומית של F.

$$\begin{aligned}\hat{F}\left(x+\Delta x\right)&=\hat{F}\left(x\right)+\sum_{i\in[n]}\frac{\partial\hat{F}}{\partial x_i}\partial x_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j\in[n]}\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x_i\partial x_j}\Delta x_i\Delta x_j+o\left(\left\|\Delta x\right\|^3\right)\\ &=\hat{F}\left(x\right)+D\hat{F}\left(\Delta x\right)+\mathsf{Hess}_x\hat{F}\left(\Delta x,\Delta x\right)+o\left(\left\|\Delta x\right\|^3\right)\end{aligned}$$

אם x נקודה קריטית לא־מנוונת של $\hat{F}$ אז

$$D\hat{F}\left(\Delta x\right)=0.$$

הלמה של מורס אומרת שבמקרה זה אפשר לבחור קואורדינטות סביב x עבורן

$$o\left(\left\|\Delta x\right\|^3\right)=0.$$

זאת אומרת,

$$\hat{F}\left(x+\Delta x\right)=\hat{F}\left(x\right)+\mathsf{Hess}_x\left(\hat{F}\right)\left(\Delta x,\Delta x\right).$$

נפעיל את משפט סילבסטר כדי להביא את ההסיאן לצורה קנונית ונקבל מערכת קואורדינטות y לפיה

$$\hat{F}\left(y+\Delta y\right)=\hat{F}\left(y\right)-\sum_{i\in[k]}y_i^2+\sum_{i=k+1}^{n}y_i^2.$$

משפט 1.3.12 (הלמה של מורס). תהי $x\in Mn$ נקודה קריטית לא־מנוונת של $F\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה. קיימת מפת קואורדינטות (U,φ) סביב x כך שמתקיים $\varphi\left(x\right)=0$ ושעבור

$$\hat{F}=F\circ\varphi^{-1}\colon\varphi\left(U\right)\to\mathbb{R}$$

מתקיים

$$\hat{F}\left(y\right)=\hat{F}\left(0\right)-\sum_{j\in[i]}y_j^2+\sum_{j=i+1}^{n}y_j^2.$$

הוכחה. נבחר מפה כלשהי (U,ψ) סביב x. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $\psi\left(x\right)=0$. שינוי לינארי של הקואורדינטות משרה את אותו השינוי על $T_p\mathbb{R}^n$ לכל $p\in\psi\left(U\right)$. כלומר, אם

$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}^n\\ y&\mapsto Ay\end{aligned}$$

לינארית עבור $A \in M_n(\mathbb{R})$ אז

$$\begin{aligned} Df_p \colon T_p\mathbb{R}^n &\to T_p\mathbb{R}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned} \quad .$$

לפי משפט סילבסטר קיימת מטריצה מעבר $A \in M_n(\mathbb{R})$ שמלכסנת את $\text{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$. אם נפעיל על $\psi(U)$ החלפת קואורדינטות $y \mapsto Ay$ נקבל מפה חדשה $(U, A\cdot\psi)$ עבורה $A\cdot\psi(x) = 0$ וגם

$$\text{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$$

מטריצה אלכסונית ללא אפסים ע האלכסון, כאשר $\hat{F}$ הצגה של F לפי $A\cdot\psi$. מכאן, נניח בלי הגבלת הכלליות שבחרנו מפה ψ לפיה $\text{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$ אלכסונית.
נמשיך את ההוכחה באינדוקציה על המימד.

בסיס, $n=1$**:** נסתכל על הצגה מקומית

$$\hat{F}(y) = \hat{F}(0) + \frac{1}{2}\hat{F}''(0)\,y^2 + r(y)$$

עבור $r(y) \in o\left(\|y\|^3\right)$. אנו יודעים כי $r(y)$ פונקיה חלקה כצירוף פונקציות חלקות. כיוון ששתי הנגזרות הראשונות שלה מתאפסות ב־0 נקבל כי גם $\frac{r(y)}{y^2}$ פונקציה חלקה. אז נוכל לכתוב

$$\hat{F}(y) = \hat{F}(0) \pm Ky^2\left(1+\varepsilon(y)\right)$$

כאשר

$$K = \left|\frac{1}{2}\hat{F}''(0)\right| > 0$$

וכאשר

$$\varepsilon(y) = \frac{r(y)}{y^2K} \xrightarrow{y\to 0} 0.$$

נגדיר

$$y_1 = \Theta(y) \coloneqq y\sqrt{K\left(1+\varepsilon(y)\right)}.$$

אז $\Theta\colon y \to y_1$ מוגדרת היטב סביב $y=0$, וגם $\Theta'(0) = \sqrt{K} \neq 0$. לכן Θ דיפאומורפיזם מקומי סביב $y=0$. נקבל כי

$$\begin{aligned} \hat{F}\circ\Theta^{-1}(y_1) &= \hat{F}(y) \\ &= \hat{F}(0) \pm Ky^2\left(1+\varepsilon(y)\right) \\ &= \hat{F}(0) \pm y_1^2 \end{aligned}$$

וזאת הצורה הרצויה.

צעד: מתקיים $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$. נכתוב קואורדינטות מתאימות $y=(a,b)$ כאשר $a\in\mathbb{R}$ ו־$b\in\mathbb{R}^{n-1}$. נכתוב

$$\hat{F}(a,b) = \hat{F}_b(a)$$

ונפתח לטור טיילור לפי המשתנה a.

$$\hat{F}(a,b) = \hat{F}_b(0) + \hat{F}_b'(0)\cdot a + \frac{1}{2}\hat{F}_b''(0)\cdot a^2 + r_b(a)$$

נניח לרגע כי $F_b'(0) = 0$. אז

$$\hat{F}(a,b) = \hat{F}_b(0) \pm K_b a^2\left(1+\varepsilon_b(a)\right)$$

עבור

$$K_b \coloneqq \left|\frac{1}{2}\hat{F}_b''(0)\right| > 0.$$

זה חיובי ממש כי

$$\hat{F}_0''(0) = \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial a^2}(a,b) \neq 0.$$

אז

$$\Theta\left(a,b\right)\mapsto\begin{pmatrix}a_1=a\sqrt{K_b\left(1+\varepsilon_b\left(a\right)\right)}\\ b_1=b\end{pmatrix}$$

דיפאומורפיזם לוקלי בסביבת $(0,0)$. כעת

$$\hat{F}\circ\Theta^{-1}\left(a_1,b_1\right)=\hat{F}\left(0,b_1\right)\pm a_1^2.$$

הפונקציה $\hat{F}\left(0,b_1\right)$ תלויה ב־$n-1$ קואורדינטות ונקבל את התוצאה מהנחת האינדוקציה.
כעת ניתן להסביר למה אכן ניתן להניח $\hat{F}_b'\left(0\right)=0$. נחפש נקודה קריטית של $\hat{F}_b$, כלומר נקודה a עבורה

$$\Phi\left(a,b\right)\coloneqq\frac{\partial\hat{F}\left(a,b\right)}{\partial a}\left(a,b\right)=\frac{\mathsf{d}\hat{F}_b}{\mathsf{d}a}\left(a\right)=0.$$

מתקיים

$$\frac{\partial\Phi\left(0,0\right)}{\partial a}=\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial a^2}\left(0,0\right)\neq0$$

כי זה האיבר ה־$(1,1)$ ב־$\mathsf{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$. מתקיים גם $\Phi\left(0,0\right)=0$. לפי משפט הפונקציה הסתומה, ליד $(0,0)$ הפתרון של $\Phi\left(a,b\right)=0$ הוא גרף של פונקציה חלקה $g\colon\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ עבורה $a=g\left(b\right)$. לפי המשפט, מתקיים גם

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial b}\left(0\right)&=\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial a}\left(0\right)\right)^{-1}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial b}\left(0\right)\\&=\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial a}\left(0\right)\right)^{-1}\cdot\cancelto{0}{\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial a\partial b}}\left(0\right)\\&=0\end{aligned}$$

כאשר הביטוי המתואר מתאפס כיוון ש־$\mathsf{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$ מטריצה אלכסונית.
נעשה החלפת קואורדינטות

$$\chi\colon\ \left(a,b\right)\mapsto\left(a+g\left(b\right),b\right).$$

מתקיים

$$D\chi_{(0,0)}=\mathbb{1}.$$

לפי משפט הפונקציה הפוכה, χ דיפאומורפיזם מקומי בסביבת $(0,0)$. אחרי החלפת קואורדינטות,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{F}\circ\chi}{\partial a}\left(0,b\right)&=\cdots=0\\ \frac{\partial^2\left(\hat{F}\circ\chi\right)}{\partial y_j\partial y_k}\left(0,0\right)&=\cdots=\frac{\partial^2\hat{F}\left(0,0\right)}{\partial y_j\partial y_k}.\end{aligned}$$

כעת ניתן להפעיל את צעד האינדוקציה עבור $\hat{F}\circ\chi$, כאשר נשתמש בזה שמתקיים

$$\mathsf{Hess}_0\left(\hat{F}\circ\chi\right)=\mathsf{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$$

מטריצה אלכסונית בלי אפסים על האלכסון. ■

הגדרה 1.3.13 (מפת מורס). מפה (U,φ) כמו במשפט נקראת מפת מורס *(Morse chart)* סביב הנקודה הקריטית x.

מסקנה 1.3.14. נקודות קריטיות לא מנוונות הן מבודדות. בפרט, אם M קומפקטית, יתכן רק מספר סופי של נקודות קריטיות שאינן מנוונות.

הוכחה. לפונקציה

$$\hat{F}=a-\sum_{j=1}^{i}y_j^2+\sum_{j=i+1}^{n}y_j^2$$

אין נקודות קריטיות פרט ל־$y=0$. ■

הגדרה 1.3.15 (אינדקס מורס). נסמן ב־i את מספר הקואורדינטות השליליות בהצגה המקומית הסטנדרטית של F.
זה גם האינדקס (מספר האיברים השליליים על האלכסון) של $\mathsf{Hess}_x\left(F\right)$.
זה גם מימד התת־מרחב המקסימלי של T_xM עליו $\mathsf{Hess}_x\left(F\right)$ מוגדרת שלילית.
נקרא למספר זה אינדקס מורס של F בנקודה $x\in\mathsf{Crit}\left(F\right)$. נסמנו לפעמים $\mathsf{ind}\left(x\right)$ או $\mathsf{ind}_F\left(x\right)$.

דוגמה 1.3.16. תהי $x=\min\left(F\right)$. במפת מורס מתקיים

$$\hat{F}\left(y\right)=F\left(x\right)+\sum_{j=1}^{n}y_j^2.$$

במקרה זה, $\mathsf{ind}\left(x\right)=0$.
נסתכל על משטחי גובה. כאשר $F\left(y\right)=F\left(x\right)+\varepsilon$ עבור ε קבוע קטן מספיק, נקבל ספירות קוצנטריות סביב הנקודה x.
נבחר מטריקה רימנטית "אוקלידית" ב־$\varphi\left(\mathcal{U}\right)$ לפיה

$$\hat{g}=\mathsf{d}y_1^2+\ldots+\mathsf{d}y_n^2.$$

במפת מורס נקבל

$$\nabla_g\hat{F}\left(y\right)=\left(2y_1,\ldots,y2_n\right)=2\vec{y}.$$

אז $-\nabla\hat{F}$ שדה כיוונים הזורם לראשית ופרופורציונלי למרחק ממנה. נפתור את המד"ר ונקבל

$$y\left(t\right)=2y\left(0\right)e^{-t}.$$

כאן יש התכנסות אקספוננציאלית ל־$y=0$.

דוגמה 1.3.17. כאשר $x\in M$ נקודת מקסימום של F נקבל במפת מורס $\mathsf{ind}\left(x\right)=n$ וגם

$$\hat{F}\left(y\right)=F\left(x\right)-\sum_{j=1}^{n}y_j^2,$$

באופן דומה.

הערה 1.3.18. אם $x\in\mathsf{Crit}\left(F\right)$ אז $x\in\mathsf{Crit}\left(-F\right)$. מתקיים

$$\mathsf{ind}_{-F}\left(x\right)=n-\mathsf{ind}_F\left(x\right).$$

ניתן לראות זאת מכך שמפת מורס של F היא גם מפת מורס עבור $-F$.

דוגמה 1.3.19. נעיין בנקודת אוכף $x\in M$ של F במקרה $n=2$. במפת מורס מתקיים

$$\hat{F}\left(y\right)=F\left(x\right)-y_1^2+y_2^2.$$

קווי הגובה עבור $\hat{F}=F\left(x\right)$ הם שני הישרים $y_1=\pm y_2$. כאשר $\hat{F}=F\left(x\right)\pm\varepsilon$ קווי הגובה מתוארים באיור מתקיים

$$D\hat{F}=2\left(-y_1,y_2\right)$$

ואז

$$y\left(y\right)=\left(2y_1\left(0\right)e^t,2y_2\left(0\right)e^{-t}\right).$$

קווי הזרימה מתוארים באיור ואלו קווים היפרבוליים אסימפטוטיים לצירים.
נסתכל גם על המקרה $n>2$. כעת

$$\hat{F}=F\left(x\right)-y_1^2-\ldots-y_i^2+y_{i+1}^2+\ldots+y_n^2.$$

נסמן

$$y_I\coloneqq\left(y_1,\ldots,y_i\right)$$
$$y_J\coloneqq\left(y_{i+1},\ldots,y_n\right)$$

ואז

$$\hat{F}=F\left(x\right)-\left\Vert y_I\right\Vert^2+\left\Vert y_J\right\Vert^2.$$

אז האיורים הנ"ל יהיו חתכים דו־מימדיים של היפרבולואידים.

דוגמה 1.3.20. נסתכל על F עם קווי גובה כמתואר באיור אז לפי התיאור הנ"ל הנקודה הקריטית אינה מינימום, מקסימום או אוכף, ולכן הינה מנוונת.

הערה 1.3.21. אם $F\in\mathcal{C}^{r}\left(M\right)$ או M יריעה דיפרנציאבילית $\mathcal{C}^{r}$ עבור $r\geq3$, עדיין ניתן להפעיל את הלמה של מורס, אך המפה לא תהיה מתואמת עם האטלס החלק על M.

תרגיל 2. תהי $\left(M,g\right)$ יריעה רימנית סגורה ותהי F פונקציית מורס. יהי $\dot{\gamma}\left(t\right)=-\nabla F\left(y\right)$ מסלול זרימה.

1. הראו כי

$$\lim_{t\to+\infty}y\left(y\right)=y_{t}\in\mathrm{Crit}\left(F\right)$$
$$\lim_{t\to-\infty}y\left(t\right)=y_{-}\in\mathrm{Crit}\left(F\right)$$

2. הראו כי

$$F\left(y_{+}\right)<F\left(y_{-}\right).$$

3. הראו שההתכנסות אל $y_{\pm}$ אקספוננציאלית, אך

$$y_{\pm}\notin\left\{ y\left(t\right)\right\} _{t\in\mathbb{R}}.$$

1.3.3 שקילות של משטחים

הגדרה 1.3.22 (ריטרקציה). (i) יהי X מרחב טופולוגי ויהי $Y\subseteq X$. העתקה רציפה $F\colon X\to Y$ היא ריטרקציה אם $F|_{Y}=\mathbb{1}_{Y}$.

(ii) אם קיימת $F_{t}\colon X\to X$ עבורה

$$F_{0}=\mathbb{1}_{X}$$
$$F_{t}|_{Y}=\mathbb{1}_{Y}$$

ו־$F_{1}\colon X\to X$ ריטרקציה $X\to Y$ אז Y היא ריטרקציה דפורמטיבית *(deformation retract)* של X.

הגדרה 1.3.23 (ריטרקציה). יהי X מרחב טופולוגי ויהי $Y\subseteq X$. העתקה רציפה $F\colon X\to Y$ היא ריטרקציה אם $F|_{Y}=\mathbb{1}_{Y}$.

הגדרה 1.3.24 (שקילות הומוטופית). מרחבים טופולוגיים X,Y שקולים טופולוגית אם קיימות

$$f\colon X\to Y$$
$$g\colon Y\to X$$

והומוטופיות

$$f\circ g\approx\mathbb{1}_{Y}$$
$$g\circ f\approx\mathbb{1}_{X}.$$

דוגמה 1.3.25. אם Y הוא ריטרקציה דפורמטיבית של X ומתקיים $f=F_{1},g=\mathbb{1}_{Y}$ אז

$$f\circ g=\mathbb{1}_{Y}$$
$$g\circ f=\mathbb{1}_{Y}\circ F_{1}=F_{1}\approx F_{0}=\mathbb{1}_{X}.$$

אז Y שקולה הומוטופית ל־X.

דוגמה 1.3.26. כדור סגור $\bar{B}^{n}$ שקול הומוטופית לנקודה.

דוגמה 1.3.27. אין ריטרקציה דפורמטיבית $B^{n}\left(2\right)\to B^{n}\left(1\right)$. באופן כללי, עשויות להיות התנהגויות לא רצויות במקרה של קבוצות פתוחות.

דוגמה 1.3.28. תהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ בלי ערכים קריטיים בקטע $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$. ראינו כי $M^a\approx M^b$. נוכל לחשוב על כך בדרך מעט אחרת. תהי g מטריקה רימנית שרירותית ויהי $X=-\nabla_g F$. נגדיר

$$Y(p):=\begin{cases}\frac{X_{(p)}}{\left|L_X F_{(p)}\right|} & F(p)\geq a\\ 0 & F(p)<a\end{cases}.$$

זה שדה וקטורי לא רציף אך ניתן להגדיר זרימה לאורכו. נסמנה

$$\varphi_t\colon M\leq b\to M^{\leq a}$$

וזאת העתקה שאינה הפיכה או חלקה, אך כן רציפה. היא מגדירה רטרקציה דפורמטיבית מ־$M^{\leq b}$ ל־$M^{\leq a}$ ובפרט שני מרחבים אלה שקולים טופולוגית.

הערה 1.3.29. במקרה של הטורוס והנקודה x מאיור 1.1 המרחב $M^{\leq x}$ אינו יריעה.
כשנתעניין בשקילות דיפאומורפית נסתכל בינתיים על תנאי פתוח, וכשנתעניין בשקילות הומוטופית נסתכל על תנאי סגור, כבדוגמא האחרונה.

1.3.4 הוספת נקודה קריטית

תהי M יריעה חלקה סגורה, תהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ פונקציית מורס, תהי $c\in\mathsf{Crit}(F)$ עם ערך קריטי $a:=F(c)$. נניח ש־c נקודה קריטית יחידה עם ערך קריטי בקטע $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.
נעיין ראשית במקרה בו c מינימום מקומי. במפת מורס סביב c מתקיים

$$\hat{F}(x)=a+\sum_{j=1}^{n}x_j^2.$$

במעבר מ־$M^{a-\varepsilon}$ ל־$M^{a+\varepsilon}$ הוספנו כדור

$$\sum_{j=1}^{n}x_j^2\leq\varepsilon$$

כרכיב קשירות נפרד.
באופן דומה, במקרה בו c מקסימום מקומי, במעבר מ־$M^{a-\varepsilon}$ ל־$M^{a+\varepsilon}$ יש הדבקה של כדור n־מימדי

$$\bar{B}_c=\left\{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\leq\varepsilon\right\}$$

לשפה $M^{a-\varepsilon}$, כלומר $M^{a+\varepsilon}$ הדבקה של $Ma-\varepsilon\sqcup\bar{B}_c$ לאורך חיתוך $\{F=a-\varepsilon\}$ עם מפת מורס סביב c.
נסתכל כעת על המקרה בו $x=c$ נקודות אוכף. אז

$$\hat{F}(x)=a-\sum_{j=1}^{i}x_j^2+\sum_{j=i+1}^{n}x_j^2 a-\|x_I\|^2+\|x_J\|^2.$$

נבנה מטריקה רימנית g על M עבורה $\hat{g}$ אוקלידית במפת מורס, כלומר

$$\hat{g}=\mathsf{d}x_1^2+\ldots+\mathsf{d}x_n^2.$$

נסתכל על

$$H_c=\left\{\substack{\hat{F}\geq a-\varepsilon\\ \|x_J\|^2<\delta\ll\varepsilon}\right\}.$$

ראו איור מתקיים

$$H_c\cong\overline{B^i}\times B^{n-i}.$$

טענה 1.3.30. 1. קיים הומיאומורפיזם

$$M^{a+\varepsilon}\cong M^{a-\varepsilon}\cup H_c.$$

2. $M^{\leq a-\varepsilon}\cup\overline{H_c}$ היא ריטרקציה דפורמטיבית של $M^{\leq a+\varepsilon}$.

הוכחה. נסתכל על קוי הזרימה של $-\nabla F$. קווי הזרימה נותנים התאמה חד־חד ערכית ועל בין $\{F=a+\varepsilon\}$ לבין $\partial(M^{a-\varepsilon}\cup H_c)$. כמו מקודם, ניתן לעשות רפרמטריזציה של $-\nabla F$ כך שהזרימה תביא את $\{F=a+\varepsilon\}$ ל־$\partial(M^{a-\varepsilon}\cup H_c)$ בזמן $t=1$. נקבל מכך הומיאומורפיזם בין $M^{a+\varepsilon}$ ל־$Ma-\varepsilon\cup H_c$. נקבל מכך גם ריטרקציה דפורמטיבית מ־$M^{\leq a+\varepsilon}$ ל־$M^{a-\varepsilon}\cup\overline{H_c}$ על ידי חתיכת השדה באופן שאינו רציף, כמקודם. ■

הערה 1.3.31. נסתכל על הסימונים מהוכחת הטענה ונגדיר

$$Y_{(p)} = T_{(p)}\left(-\nabla_g F\right)\cdot \nu\left(p\right)$$

כאשר $T_{(p)}$ הזמן הדרוש עבור קו הזרימה דרך p לנוע מ־$\{F=a+\varepsilon\}$ למשטח הנתון וכאשר ν היא cutoff function ליד השפה של $M^{a-\varepsilon}\cup H_c$. אם קו דרך p אינו חוצה את שני המשטחים, נגדיר $Y_{(p)}=0$. נסמן את הזרימה של Y על ידי

$$\varphi_t\colon M^{a+\varepsilon}\to M^{a+\varepsilon}$$

ואז

$$\varphi_1\colon M^{a+\varepsilon}\to M^{a-\varepsilon}\cup H_c$$

הומיאומורפיזם אבל לאו דווקא דיפאומורפיזם.
באופן כללי, ההומיאומורפיזם בהוכחה אינו חייב להיות דיפאומורפיזם, ודרושים תיקונים על מנת לקבל דיפאומורפיזם.

הערה 1.3.32. בהוספת הידית H_c נדביק את H_c על החלק האדום באיור ל־$\left\{\hat{F}=a-\varepsilon\right\}$. אם נזהה

$$H_c\cong \bar{B}^i\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\times B^{n-i}\left(\sqrt{\delta}\right)$$

הדבקה זאת היא לאורך

$$.\partial B^i\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\times B^{n-i}\left(\sqrt{\delta}\right)$$

ראינו דוגמא לכך במקרה של הטורוס. ראו איורים 1.5, 1.7.

דוגמה 1.3.33. תהי M^3 יריעה 3־מימדית.
ידית מאינדקס 1 נראית כמו

$$\bar{B}^1\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\times B^2\left(\sqrt{\delta}\right)\cong[0,1]\times D$$

מודבקת למשטח לאורך $\partial\,[0,1]\times D^2$.
ידית מאינדקס 2 נראית כמו

$$\bar{B}^2\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\times B^1\left(\sqrt{\delta}\right)\cong\overline{D^2}\times(0,1)$$

ומודבקת למשטח לאורך $\partial D^2\times(0,1)$. במקרה של הטורוס מתקבלות שתי תוצאות שונות (עד כדי הומיאומורפיזם) בהתאם למקום ההדבקה.
אין נקודה קריטית מאינדקס 3 כיוון שלשם כך יהיה צורך להדביק כדור לאורך S^2 על השפה של הטורוס, אך אין תת־יריעה הומיאומורפית ל־S^2 על השפה.

ראינו שאם בקטע $[a,b)$ אין נקודות קריטיות, אז $M^{\le a}\approx M^{\le b}$. אם יש נקודה קריטית בודדת c עבורה $FF\left(c\right)=a$ נסתכל על $M^{\le a\pm\varepsilon}$. אז במעבר מ־$M\le\, a-\varepsilon$ ל־$M^{\le a+\varepsilon}$ נוסיף הדבקה של ידית

$$\bar{H}_c=\left\{\begin{smallmatrix}\|x_J\|^2\le\delta<\varepsilon\\ a_\varepsilon\le F(p)\end{smallmatrix}\right\}\cong\bar{B}^i\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\times\bar{B}^{n-i}\left(\sqrt{\delta}\right)$$

לאורך $\partial B^i\times\bar{B}^{n-i}$. נגדיר שדה וקטורי

$$.Y=\begin{cases}T_{(p)}\cdot\left(-\Delta_g F\right) & \begin{smallmatrix}F(p)\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon]\\ p\notin\bar{H}_c\end{smallmatrix}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

שדה זה אינו רציף, אך הוא רציף למקוטעין. נסמן ב־

$$\varphi_t\colon M^{\le a+\varepsilon}\to M^{\le a+\varepsilon}$$

את הזרימה של Y. זאת אינו הפיכה אך כן רציפה. מתקיים

$$\operatorname{Im}\varphi_1\subseteq M^{\le a-\varepsilon}\cup\bar{H}_c$$

ו־φ_1 ריטרקציה. אז φ_t ריטרקציה דפורמטיבית.
קיימת ריטרקציה דפורמטיבית φ_t של $\bar{H}_c$ ל־

$$.\bar{B}^i\times\{0\}\cup\partial B^i\times\bar{B}^{n-i}$$

ניתן להרחיב אותה ל־$M\le\, a-\varepsilon$ להעתקת הזהות. נקבל כך ריטרקציה דפורמטיבית בין $M^{\le a+\varepsilon}$ ל־$M^{\le a-\varepsilon}\cup B^i$.
ראו איור נקבל ריטרקציות דפורמטיביות

$$.M^{\le a+\varepsilon}\approx M^{\le a-\varepsilon}\bar{H}_c\approx M^{\le a-\varepsilon}\cup B^i$$

הערה 1.3.34. עם מאמץ נוסף ניתן לתת ל־M מבנה של קומפלקס CW. נדון בכך בהמשך.

1.3.5 מעבר עד כדי דיפאומורפיזם

כאשר הראנו הומיאומורפיזם במעבר דרך נקודה קריטית, הגדרנו שדה לאורכו בנינו זרימה, אך שדה זה לא היה חלק, ולכן קיבלנו רק הומיאומורפיזם ולא דיפאומורפיזם. כדי לתקן זאת, נבצע תיקון על ידי "החלקה" של הפינות. ראו איור
נגדיר

$$H_c = \bigcup \{y\} \times B^{n-i}\left(r\left(y\right)\right)$$

עבור $r\left(y\right)$ פונקציה עולה עם $\infty \to r'\left(y\right)$ כאשר $y \to \partial B^i\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$. נגדיר

$$Y = \begin{cases} \nu\left(p\right) \cdot T_{(p)} \cdot \left(-\nabla_g F\right) \\ 0 \end{cases}$$

כמקודם ונסמן ב־φ_t את הזרימה שלה. אז

$$\varphi_1 \colon M^{\leq a+\varepsilon} \to M^{\leq a-\varepsilon} \cup H_c$$

דיפאומורפיזם.

עבור יריעות חלקות

1. בקטגוריה של יריעות חלקות הידית H_c יותר מורכבת.
2. אם עובדים עם פונקציה דיפרנציאבילית או יריעה דיפרנציאבילית r פעמים התוצאה היא דיפאומורפיזם עד כדי $\mathcal{C}^{r-2}$ כיוון שמפת מורס אינה מתואמת עם האטלס של M.
3. חשוב לדעת לא רק איפה מדביקים את H_c אלא גם איך אנחנו מדביקים את הידית ל־$M^{\leq a-\varepsilon}$. נראה דוגמא בהמשך.

1.3.6 הוספת מספר נקודות קריטיות

נניח כעת שיש מספר נקודות קריטיות ב־$\{a-\varepsilon < F < a+\varepsilon\}$.

- אם הנקודות הקריטיות בגבהים שונים, ניתן להפריד אותן על ידי הקטנת ε.
- אם יש כמה נקודות קריטיות באותו גובה, נבחר סביבות מורס זרות לכל נקודה ונעשה בנייה באופן לוקלי. נקבל

$$M^{\leq a+\varepsilon} \cong M^{\leq a-\varepsilon} \cup H_{c_1} \cup \ldots \cup H_{c_k}.$$

1.3.7 שימושים

משפט 1.3.35 (*Reeb*). תהי N^n יריעה סגורה עם פונקציית מורס $F \colon N \to \mathbb{R}$ בעלת שתי נקודות קריטיות. אז יש הומיאומורפיזם $M \cong S^n$.

הוכחה. נסמן ב־m את נקודת המינימום וב־M את נקודת המקסימום. בלי הגבלת הכלליות נניח $F\left(m\right) = 0, F\left(M\right) =$
1. במעבר נקודת המינימום, שהינה מאינדקס 0, נוסיף כדור n־מימדי, ולכן

$$N^{\leq 1-\varepsilon} \cong N^{\leq \varepsilon} \cong B^n$$

כאשר אלו דיפאומורפיזמים. נקבל דיפאומורפיזמים

$$\partial N^{\leq 1-\varepsilon} \cong \partial N^{\leq \varepsilon} \cong \partial B^n \cong S^{n-1}.$$

אז נקבל

$$\begin{aligned} N &= N^{\leq 1-\varepsilon} \cup N^{\geq 1-\varepsilon} \\ &\cong \bar{B}_1^n \sqcup_\varphi \bar{B}_2^n \end{aligned}$$

כאשר $\varphi \colon \partial B_1^n \to \partial B_2^n$ פונקציית הדבקה.
נראה כי

$$\varphi \colon S^{n-1} \to S^{n-1}$$

דיפאומורפיזם. נסתכל על $\{F = 1-\varepsilon\}$. מפת מורס סביב M מעבירה קבוצה זאת ל־$\partial B^n\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \cong S^{n-1}$. מצד שני, φ_1 דיפאומורפיזם מקבוצה זאת ל־

$$\{F = \varepsilon\} \cong \partial B^n\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \cong S^{n-1}$$

כאשר הדיפאומורפיזם הראשון מגיע ממפת מורס סביב m. אז φ הרכבה של דיפאומורפיזמים ולכן דיפאומורפיזם.
נבנה הומיאומורפיזם

$$h\colon \underbrace{\bar{B}_1^n \amalg_{\mathbb{1}_{S^{n-1}}} \bar{B}_2^n}_{S^n} \to \underbrace{\bar{B}_1^n \amalg_{\varphi} \bar{B}_2^n}_{N}.$$

על ידי

$$h(x) = \begin{cases} x & x \in \bar{B}_1^n \\ \|x\| \cdot \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & x \in \bar{B}_2 \setminus \{0\} \\ 0 \in \bar{B}^2 & 0 \in \bar{B}_2 \end{cases}.$$

ניתן לבדוק כי זה אכן הומיאומורפיזם. ■

הערה 1.3.36. הפונקציה h בהוכחה אינה חלקה. היא לא חייבת להיות חלקה או גזירה ב־$0 \in \bar{B}_2$ והיא בדרך כלל לא תהיה דיפאומורפיזם. זאת בעיה עקרונית ובמקרה זה אין תמיד דיפאומורפיזם.

הגדרה 1.3.37 (ספירה אקזוטית). יריעה N נקראת ספירה אקזוטית אם יש הומיאומורפיזם $N \cong S^n$ אבל אין דיפאומורפיזם $N \amalg S^n$.

עובדה 1.3.38 (מילנור). יש 28 מבנים חלקים שונים על S^7.

עובדה 1.3.39. כל ספירה אקזוטית שהומיאומורפית ל־S^n עבור $n \geq 7$ ניתן לבנות על ידי

$$N = \bar{B}_1^n \amalg_{\varphi} \bar{B}_2^n.$$

הערה 1.3.40. חשוב לדעת מה פונקציית ההדבקה φ כי זה משנה את $M^{\leq a+\varepsilon}$ עד כדי דיפאומורפיזם.

1.4 קיום פונקציות מורס

משפט 1.4.1. תהי $M \subseteq \mathbb{R}^N$ תת־יריעה חלקה. כמעט לכל (לפי מידת לבג על הספירה) ישר $\ell_v = \text{Span}(v)$ ההטלה האורתוגונלית על ℓ_v היא פונקציית מורס.

הערה 1.4.2. למרות שהמשפט הנ"ל פשוט, הוא פחות נוח כאשר נתונה יריעה אבסטרקטית, שכן יש צורך קודם לשכן אותה, ואין בהכרח דרך נוחה לעשות זאת.

מסקנה 1.4.3. כל יריעה סגורה M^n ניתנת לשיכון ב־$\mathbb{R}^N$. לכן קיימות (לפחות $2^{\aleph_0}$) פונקציות מורס על כל יריעה סגורה M.

מסקנה 1.4.4. פונקציית הגובה $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ היא פונקציית מורס.

הוכחה. כמעט לכל כיוון, ההטלה על ℓ_v היא פונקציית מורס. אבל, הספירה סימטרית ולכן כל הטלה כזאת היא פונקציית מורס. ■

משפט 1.4.5. תהי $M^m \subseteq \mathbb{R}^N$ תת־יריעה סגורה וחלקה. כמעט לכל $x \in \mathbb{R}^N$ הפונקצייה

$$\begin{aligned} F_x\colon M &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \|p-x\|^2 \end{aligned}$$

היא פונקציית מורס.

הוכחה למשפט זה קיימת בפרק 6 בספר של מילנור ובטענה 1.2.1 בספר של דמיאן. נראה סקיצה של ההוכחה.

הוכחה (אינטואיציה פיזיקלית).
- $p \in M$ נקודה קריטית של F_x אם ורק אם $T_pM \perp x-p$.
- נקבע $p \in M$. נסתכל על $\nu \in T_pM^{\perp}$ וקטור יחידה ונבחר $x = p + s\nu$ עבור $s \geq 0$. בדרך זאת נקבל את כל ה־$x \in \mathbb{R}^N$ עבורן p היא נקודה קריטית. קיימים $r_1, \ldots, r_k \geq 0$ עם $k \leq \dim M$, עבורן p נקודה קריטית מנוונת עבור F_x, אם ורק אם $s \in \{r_1, \ldots, r_k\}$. ($r_1, \ldots, r_k$ תלויים ב־$(p, \nu$), אם ורק אם $s = r_i = \|x-p\|$.
  $r_1, \ldots, r_k$ הם ה־principalradii $= \frac{1}{\text{pr.curvature}}$ בנקודה p בכיוון ν.

- "ספירת מימדים": אוסף הנקודות $x=p+s\nu$ ה"רעות" מקיים: אם $p\in M$, $\dim M=m$ אז $\dim T_pM^{\perp}=N-m$ ואז $\dim\mathcal{U}\left(T_pM^{\perp}\right)=N-m-1$ ולכן (p,ν) קבוצת הזוגות היא $m+(N-m-1)=N-1$־מימדית לכל היותר. לכל זוג יש קבוצה דיסקרטית (0־מימדית) של נקודות אסורות, ולכן סך המימד הוא $N-1$. לכן המידה היא 0. ■

הוכחה (הוכחה פורמלית).
- נגדיר

$$T=\left\{(p,\nu)\in M\times\mathbb{R}^n\ \middle|\ {\scriptstyle p\in M \atop \nu\perp T_pM}\right\}$$

ונקרא לו האגד הנורמלי של M ב־$\mathbb{R}^N$.
- תהי

$$\begin{aligned}E\colon T&\to\mathbb{R}^N\\(p,\nu)&\mapsto p+\nu\end{aligned}.$$

הנקודות הקריטיות של E מהוות קבוצה זניחה, ממשפט סארד. ■

משפט 1.4.6. תהי M יריעה קומפקטית. אז פונקציות מורס צפופות ב־$\mathcal{C}^{\infty}(M,\mathbb{R})$ בטופולוגיה

$$\mathcal{C}^k(M,\mathbb{R})$$

לכל $k\geq1$.

הוכחה. תהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ פונקצייה חלקה. נסתכל על $\iota\colon M\hookrightarrow\mathbb{R}^N$, שקיים לפי משפט WHitney. נבנה שיכון חדש

$$\begin{aligned}h\colon M&\to\mathbb{R}^{N+1}\\p&\mapsto(F(p),\iota(p))\end{aligned}.$$

כמעט לכל $x=(-c+\varepsilon,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{N+1})$ עבור $c\in\mathbb{R}$ ועבור $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{N+1}\ll1$ הפונקציה

$$\begin{aligned}f_x\colon M&\to\mathbb{R}\\p&\mapsto\|x-h(p)\|^2\end{aligned}$$

היא פונקציית מורס. אז גם

$$g_x\coloneqq\frac{f_x-c^2}{2c}$$

פונקציית מורס. חישוב נותן

$$\begin{aligned}g_x(p)&=\frac{1}{2c}\left((-c+\varepsilon_1-F(p))^2+(i_1(p)-\varepsilon_2)^2+\ldots+(i_N(p)-\varepsilon_{N+1})-c^2\right)^2\\&=\frac{1}{2c}\left(c^2+\varepsilon_1^2+F(p)^2+2cF(p)+2\varepsilon_1(-c-F(p))-c+\sum_{k\in[N]}i_k(p)^2+\sum_{k=2}^{N+1}\varepsilon_k^2-2\sum_{k\in[N]}i_k(p)\varepsilon_{k+1}\right)\\&=F(p)+\frac{F(p)^2}{2c}+\frac{2\varepsilon_1}{2c}(-c-F(p))+\frac{1}{2c}\sum_{k\in[N]}i_k(p)^2+\frac{1}{2c}\sum_{k\in[N+1]}\varepsilon_k^2-\frac{1}{c}\sum_{k\in[N]}i_k(p)\varepsilon_{k+1}\\&\xrightarrow[\substack{c\to\infty\\\varepsilon_j\to0}]{\mathcal{C}^j}F\end{aligned}$$

כנדרש. ■

תרגיל 3. הראו שפונקציות מורס מהוות קבוצה פתוחה ב־$\mathcal{C}^{\infty}(M,\mathbb{R})$ בטופולוגיה $\mathcal{C}^2(M,\mathbb{R})$. בפרט זאת קבוצה פתוחה בטופולוגיה $\mathcal{C}^k(M,\mathbb{R})$ לכל $k\geq2$ כולל $k=\infty$.

מסקנה 1.4.7. פונקציות מורס מהוות קבוצה פתוחה וצפופה בטופולוגיה $\mathcal{C}^k(M,\mathbb{R})$.

הערה 1.4.8. המשפט הנ"ל עובד גם עבור $\mathcal{C}^{\infty}(M,\mathbb{R})$. במשפט הקודם קיבלנו

$$g_x(p)=F(p)+\frac{F(p)^2}{2c}+\frac{\varepsilon_1}{2c}(-2c-2F(p))+\frac{1}{2c}\sum_{k\in[N]}i_k(p)^2+\ldots.$$

במשפט Whitney אין שליטה על הנגזרות הגבוהות, ולכן ההוכחה הנ"ל לא תעבוד עבור המשפט. קיימות בניות אחרות של קירוב של $F\colon M\to\mathbb{R}$ על ידי פונקציות מורס, שכן מראות צפיפות גם בטופולוגיה $\mathcal{C}^{\infty}(M,\mathbb{R})$.

1.5 תת־יריעות יציבות

הגדרה 1.5.1. תהי M^n יריעה סגורה, תהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ פונקציית מורס ותהי g מטריקה רימנית. תהי $\varphi_t\colon M\to M$ זרימה עבור $-\nabla_g F$. תהי $p\in\mathrm{Crit}\left(F\right)$.
נגדיר את תת־היריעה היציבה של M ב־p על ידי

$$W^S\left(p\right)=\left\{x\in M\;\middle|\;\lim_{t\to+\infty}\varphi_t\left(x\right)=p\right\}.$$

נגדיר את תת־היריעה הבלתי־יציבה של M ב־p על ידי

$$W^U\left(p\right)=\left\{x\in M\;\middle|\;\lim_{t\to-\infty}\varphi_t\left(x\right)=p\right\}.$$

הערה 1.5.2. עבור $x\in M$ הנקודות

$$\lim_{t\to\pm\infty}\varphi_t\left(x\right).$$

קריטיות. בפרט, לכל $x\in M$ קיימות ויחידות נקודות קריטיות $p,q\in\mathrm{Crit}\left(F\right)$ עבורן $x\in W^U\left(p\right),W^S\left(q\right)$. בפרט,

$$M=\coprod_{p\in\mathrm{Crit}(F)}W^U\left(p\right)=\coprod_{q\in\mathrm{Crit}(F)}W^S\left(q\right).$$

דוגמה 1.5.3. נסתכל על פונקציית גובה של $S^N\subseteq\mathbb{R}^{N+1}$. יש לספירה שתי נקודות קריטיות, קוטב "צפוני" N ו"דרומי" S. כאן $W^S\left(S\right)=S^N\setminus\left\{N\right\}$ וגם $W^S\left(N\right)=\left\{N\right\}$. כמו כן, $W^U\left(S\right)=\left\{S\right\}$ וגם $W^U\left(N\right)=S^N\setminus\left\{S\right\}$.

הערה 1.5.4. אם $F\colon M\to\mathbb{R}$ פונקציית מורס אז גם $-F$. מתקיים $\mathrm{Crit}\left(F\right)=\mathrm{Crit}\left(-F\right)$ וקווי הזרימה שווים אך עם אוריינטציה הפוכה. לכן

$$W_F^U\left(p\right)=W_{-F}^S\left(p\right)$$
$$W_F^S\left(p\right)=W_{-F}^U\left(p\right)$$

לכל $p\in\mathrm{Crit}\left(F\right)$.

הגדרה 1.5.5. נסתכל על שיכון $S^2\hookrightarrow\mathbb{R}^3$ כמתואר באיור מתקיים $W^U\left(m\right)=\left\{m\right\}$ (ובדומה לכל נק' מינימום לוקלית). במפת מור

$$\hat{F}=F\left(x\right)-y-1^2+y_2^2$$

בסביבה של נקודת האוכף x קווי הזרימה מתוארים באיור נקבל כי $W^U\left(x\right)$ המשך של הקווים האדומים באיור, ובאופן דומה נקבל אתת $W^U\left(M_i\right)$, כמתואר באיור

דוגמה 1.5.6. נסתכל על פונקציית הגובה מהטורוס. ראו איור מתקיים $W^U\left(m\right)=\left\{m\right\}$, הקבוצה $W^U\left(x_1\right)$ היא עותק של S^1 כמתואר באיור, ו־$W^U\left(M\right)$ היא כל שאר הטורוס.

הערה 1.5.7. בכל הדוגמאות, $W^U\left(p\right)$ תת־יריעה של M שדיפאומורפית ל־$B^{\mu(p)}$ כאשר $\mu\left(p\right)$ אינדקס מורס ב־p.

משפט 1.5.8. תהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ פונקציית מורס ותהי $p\in\mathrm{Crit}\left(F\right)$.

1. קיים פיצול $T_pM=T_p^SF\oplus T_p^UF$ כאשר Hess_p מוגדר חיובית על T_p^SF ושלילית על T_p^UF.
2. קיימים שיכונים חלקים

$$E^S\hookrightarrow T_p^SF\to M$$
$$E^U\hookrightarrow T_p^UF\to M$$

עבורם

$$W^U\left(p\right)=\mathrm{Im}\left(E^U\right)$$
$$W^S\left(p\right)=\mathrm{Im}\left(E^S\right).$$

3. מתקיים

$$T_pW^U\left(p\right)=T_p^UF$$
$$T_pW^S\left(p\right)=T_p^SF.$$

4. $\text{Hess}_p\left(F\right)$ מוגדר חיובית על $T_pW^S\left(p\right)$ ומוגדר שלילית על $T_pW^U\left(p\right)$.
5. בפרט, קיים דיפאומורפיזם
$$W^U\left(p\right)\cong T_p^UF\cong\mathbb{R}^{\mu(p)}\cong B^{\mu(p)}$$
ובאותו אופן
$$W^S\left(p\right)\cong B^{\dim M-\mu(p)}.$$