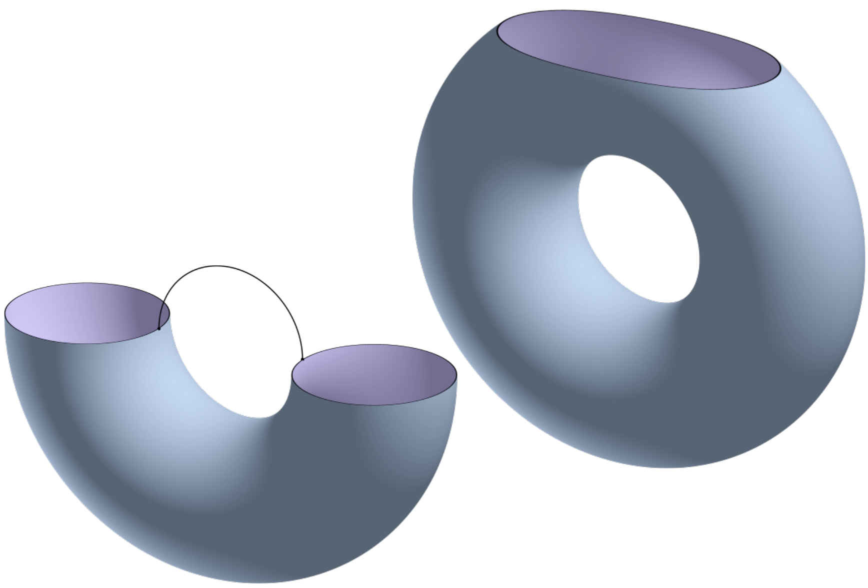
סיכומי הרצאות בתורת מורס
אביב 2021, הטכניון

הרצאותיו של מיכאל חנבסקי
סוכמו על ידי אלעד צורני



חלקים שקולים הומוטופית של הטורוס.

עדכון אחרון 1 ביולי 2021

תוכן העניינים

הקדמה

הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות.
להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל tzorani.elad@gmail.com.
אלעד צורני.

ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

J. Milnor: Morse Theory

A. Banyaga, D. Hurtubise: Lectures on Morse Homology

M. Audin, M. Damian: Morse Theory and Floer Homology

ציון

הציון בקורס ינתן עבור מבחן בית שעשוי (ועשוי לא) לכלול מעבר בעל פה על הפתרונות.

דרישות קדם

דרישת הקדם לקורס היא יריעות דיפרנציאביליות. היכרות עם טופולוגיה אלגברית מועילה אך אינה חיונית.

פרק 1

מבוא

1.1 מוטיבציה

דוגמה 1.1.1. באיור 1.1 הנקודות המסומנות מאדום הן הנקודות הקריטיות של F. נסמן

$$\mathbb{T}^a := \left\{p \in \mathbb{T}^2 \mid F(p) < a\right\}.$$

- עבור $a \le F(m)$ נקבל $\mathbb{T}^a = \varnothing$.
- עבור $F(m) < a \le F(x)$ נקבל $\mathbb{T}^a \cong D^2$. ראו איור 1.2.
- עבור $F(x) < a \le F(y)$ נקבל $\mathbb{T}^a \cong S^1 \times (0,1)$. ראו איור
- עבור $F(y) < a \le F(M)$ נקבל $\mathbb{T}^a \cong \mathbb{T}^2 \setminus D^2$.
- עבור $F(M) < a$ נקבל $\mathbb{T}^a = \mathbb{T}^2$.

מסקנה 1.1.2. אם ב־$[a,b]$ אין ערכים קריטיים אז $\mathbb{T}^a \cong \mathbb{T}^b$.

נשאל איך משתנה הטופולוגיה במעבר בנקודות הקריטיות.

- במעבר דרך $F(m)$ יש הוספת דיסק.
- כאשר $a = x - \varepsilon$ עבור ε מספיק קטן, קו הגובה יראה באיור 1.4 אם נדביק את $\mathbb{T}^a$ על פס כבאיור 1.5 נקבל יריעה דיפאומורפית ל־$\mathbb{T}^x + \varepsilon$.
- כאשר $a = y + \varepsilon$ עבור ε מספיק קטן נקבל כי $\mathbb{T}^a$ כבאיור 1.6. אם נדביק את העיגולים באידומים באיור על פס כבאיור 1.7 נקבל יריעה דיפאומורפית ל־$\mathbb{T}^a$ עבור $a = y + \varepsilon$.
- במעבר דרך $F(M)$ יש הדבקה של D^2 לשפה של $\mathbb{T}^{F(M)-\varepsilon}$.

ראינו שבמקרה של הטורוס יש לנקודות הקריטיות חשיבות רבה במבנה של היריעה. אנחנו נראה בקורס שאפשר לשחזר אינווריאנטים כמו ההומולוגיה של יריעה בעזרת הבנה של הנקודות הקריטיות. במקרה של הטורוס, מתקיים

$$\begin{aligned} H_0\left(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}\right) &= \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\langle m\rangle \\ H_1\left(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}\right) &= \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}\langle x, y\rangle \\ H_2\left(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}\right) &= \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\langle M\rangle. \end{aligned}$$

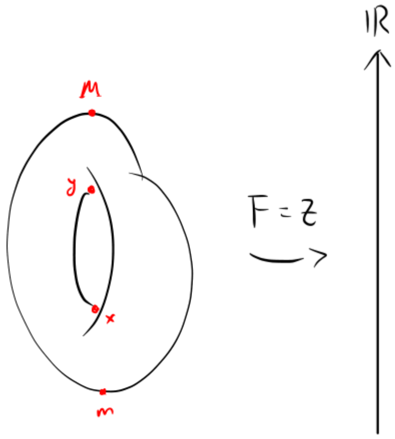
נדבר על דרך כללית להבין הומולוגיה וקוהומולוגיה של יריעות בעזרת נקודות קריטיות. נדבר על דואליות פואנקרה, על מבנה של כפל בקוהומולוגיה, על העתקות טבעיות, על מקדמים בחוגים שונים, וכו'.
בין היתרונות של תורת מורס הם שהיא נותנת את ה(קו)הומולוגיות הסטנדרטיות על יריעות, ושהיא עובדת עבור אוביקטים אינסוף־מימדיים.

דוגמה 1.1.3 (Path-Space). תהי M יריעה רימנית ויהי

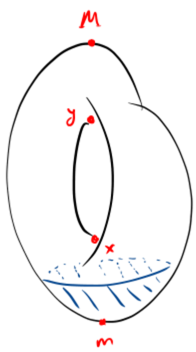
$$\mathcal{P}(x,y) = \left\{\gamma\colon [0,1] \to M \;\middle|\; {\scriptstyle \gamma(0)=x \atop \gamma(1)=y}\right\}.$$

על מרחב זה אפשר להגדיר כל מני פונקציות, למשל

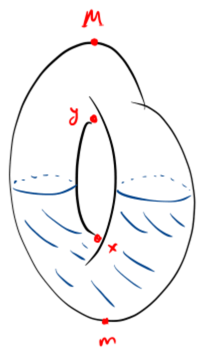
$$\begin{aligned} \mathrm{len}\colon \mathcal{P}(x,y) &\to \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \int_0^1 \|\dot\gamma\|\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$



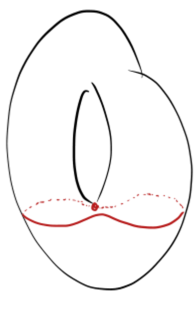
איור 1.1: העתקת גובה מהטורוס, והנקודות הקריטיות שלה.



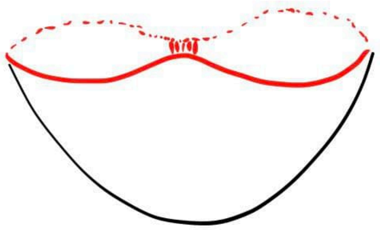
איור 1.2: חתך של הטורוס שדיפאומורפי ל-D^2.



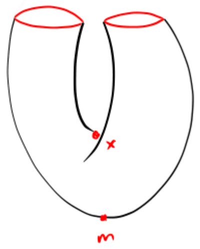
איור 1.3: חתך של הטורוס שדיפאומורפי ל-$S^1 \times (0,1)$.



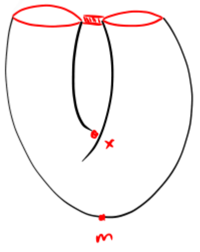
איור 1.4: קו גובה על הטורוס קרוב לנקודת אוכף.



איור 1.5: הדבקת חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוכף.



איור 1.6: חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוכף.



איור 1.7: הדבקת חתך של הטורוס קרוב לנקודת אוכף.

אפשר לנסות לעבוד עם תורת מורס על פונקציה כזאת ולהבין את המרחב $\mathcal{P}(x,y)$ בעזרת הנקודות הקריטיות של len. במקרה הזה, הנקודות הקריטיות הן קווים גיאודזיים. הן אינן מבודדות וקשה להסיק דברים על המרחב.
במקרה של

$$\varphi(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|^2 \, \mathrm{d}s$$

הנקודות הקריטיות יהיו קווים גיאודזים עם מהירות קבועה. אז הנקודות הקריטיות בדרך כלל יהיו מבודדות, ויהיה אפשר להשתמש בתורת מורס.

1.2 נקודות קריטיות

במהלך הקורס נניח כי כל המבנים חלקים. התוצאות נכונות באופן כללי יותר עבור יריעות C^2, שדות וקטוריים C^1 ופונקציות דיפרנציאביליות C^2.

הגדרה 1.2.1 (נקודה קריטית). תהי $F\colon M \to N$ העתקה חלקה בין יריעות חלקות. נקודה $p \in M$ נקראת קריטית אם $Df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ אינה על.

הערה 1.2.2. 1. במסגרת הקורס נדון בפונקציות $F\colon M \to \mathbb{R}$. אז $p \in M$ נקודה קריטית אם ורק אם

$$DF_p\colon T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$$

אינה על. כיוון ש־$T_{f(p)}\mathbb{R}$ מרחב לינארי חד־מימדי זה שקול לכך שמתקיים $DF_p = 0$.

2. ניתן לזהות $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ בדרך קנונית. נגדיר את ההרכבה של העתקה זאת על DF_p להיות הנגזרת החיצונית של F בנקודה p. נראה זאת בדיאגרמה הבאה.

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "DF_p"] \arrow[dr, dotted, "\mathrm{d}F_p"'] & T_{f(p)}(\mathbb{R}) \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

נקבל כי $p \in M$ נקודה קריטית אם ורק אם $\mathrm{d}F_p = 0$.

זאת תהיה ההגדרה שנעבוד איתה במשך רוב הקורס.

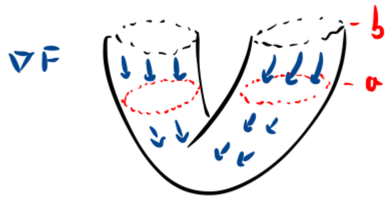
3. אם נפתח את ההגדרה של הנגזרת החיצונית נקבל כי $p \in M$ נקודה קריטית אם ורק אם $\frac{\partial F}{\partial v}(0) := \mathrm{d}F_p(v) = 0$ לכל $v \in T_pM$. מכך נסיק כי נקודות מינימום ומקסימום הן נקודות קריטיות. כמו כן, ניתן לראות מכך כי נקודות אוכף הן נקודות קריטיות.

דוגמה 1.2.3. יהי $M \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח ותהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ פונקציית גובה. נגדיר

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$$

ואז $F = f|_M$.
אז $\mathrm{d}f = \mathrm{d}z$ ומתקיים

$$\mathrm{d}F_p = \mathrm{d}f|_{T_pM} = \mathrm{d}z|_{T_pM}\,.$$



איור 1.8: זרימה על הטורוס לאורך הגרדיאנט.

אז

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_p = 0 &\iff \mathrm{d}z|_{T_pM} = 0 \\ &\iff T_pM = \ker(\mathrm{d}z) \\ &\iff T_pM \parallel \mathrm{Span}(x, y) \\ &\iff T_pM = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp} \end{aligned}$$

$$T_pM^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

בדוגמה באיור 1.1 נקבל שהנקודות הקריטיות הן בדיוק אלו המסומנות. אלו הנקודות בהן הנורמל למישור הוא כפולה של z.

כעת נרצה לעבוד עם שדות וקטוריים במקום נגזרות חיצוניות. במקרה זה אפשר להסתכל על זרימות לאורך שדה ועל הומוטופיות, מה שחסר במקרה של הנגזרת החיצונית. נתחיל בהגדרה של גרדיאנט ובקשר שלו לנגזרת החיצונית.

הגדרה 1.2.4 (גרדיאנט). תהי (M, g) יריעה רימנית. ותהי $F \colon M \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה. לכל $p \in M$, g משרה איזומורפיזם

$$\begin{aligned} g \colon T_pM &\xrightarrow{\sim} T_p^*M \\ v &\mapsto g(v, \cdot) \end{aligned} .$$

הגרדיאנט של F שנסמנו $\nabla_g F$ או בדרך כלל ∇F מוגדר להיות השדה היחיד המקיים

$$g(\nabla F, \cdot) = \mathrm{d}F .$$

הערה 1.2.5. הגרדיאנט ∇F תלוי בבחירת g!

הערה 1.2.6. מתקיים

$$\mathrm{d}F_p = 0 \iff \nabla_g F_{(p)} = 0$$

וזה בלתי־תלוי בבחירת g.
נקבל מכך כי $p \in M$ נקודה קריטית עבור F אם ורק אם $\nabla F_{(p)} = 0$.

טענה 1.2.7. תהי $F \colon M \to \mathbb{R}$ ויהיו $a < b$ כך שקיים $\varepsilon > 0$ עבורו הקטע $(a - \varepsilon, b)$ אינו מכיל ערכים קריטיים. לדוגמא ראו איור 1.8.
אז יש דיפאומורפיזם $M^a \cong M^b$.

הוכחה. נרצה לנרמל את הגרדיאנט כדי שמהירות הזרימה תהיה אחידה. כדי לא לחלק באפס, נאפס את השדה מתחת לגובה $a - \varepsilon$.

תהי g מטריקה רימנית על M. נסמן $X=-\nabla_g F$. עבור $p\in M^b$ נסתכל על $\frac{X_p}{\|X_p\|^2}$. זה מגדיר שדה וקטורי שלאורכו F יורדת במהירות 1.[1]
תהי

$$\rho\colon\ (-\infty,b)\to\mathbb{R}$$

חלקה עבורה

$$\begin{aligned}\rho|_{-\infty,a-\varepsilon}&\equiv 0\\ \rho|_{(a,b)}&\equiv 1\\ \rho'&\geq 0\end{aligned}\ .$$

אז נוכל להגדיר

$$X'=\frac{\rho X_p}{\left\|X_p\right\|^2}$$

לכל $F(p)\in(a-\varepsilon,b)$ ונרחיב את X' מתחת לגובה $a-\varepsilon$ עם אפסים. למד"ר המוגדרת על ידי X' יש פתרונות לכל זמן $t\geq 0$.
תהי $\varphi_t\colon M^b\to M^b$ זרימה של X'. אז $\varphi_{b-a}\colon M^b\xrightarrow{\sim}M^a$ דיפאומורפיזם. ∎

1.3 הדבקת ידיות

1.3.1 פונקציות מורס

נרצה כעת להבין מה קורה איך היריעות M^a,M^b משתנות כאשר עברו מ־a ל־b דרך נקודה קריטית. זה דבר מסובך מאוד באופן כללי ולכן ניאלץ לצמצם את הדיון לנקודות קריטיות שאינן מנוונות.

הגדרה 1.3.1 (הסיאן). תהי M יריעה רימנית ותהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה. לכל $p\in$ נגדיר

$$\mathrm{Hess}_p(F):T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$$

על ידי $\mathrm{Hess}(F)=\nabla\,\mathrm{d}F$ כאשר ∇ הוא ה־Levi-Civita Connection.
הגדרה מפורשת יותר היא

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}_p(F)\left(X_p,Y_p\right)&=\left\langle\nabla_X\mathrm{grad}\left(F_p\right),Y_p\right\rangle\\&=L_XL_Y(F)-\mathrm{d}F_p\left(\nabla_XY\right)\end{aligned}$$

עבור שני שדות וקטוריים X,Y שמוגדרים סביב p.

הערה 1.3.2. הבחירה של ההסיאן תלויה בבחירה של המטריקה הרימנית.
במקרה הפרטי ש־p נקודה קריטית מתקיים $\mathrm{d}F_p=0$ ואז

$$\mathrm{Hess}_p(F)\left(X_p,Y_p\right)=L_XL_Y(F).$$

בפרט, הערך של ההסיאן בנקודה הקריטית אינו תלוי בבחירה של המטריקה הרימנית.

הערה 1.3.3. אם p נקודה קריטית של F נוכל להגדיר את ההסיאן כהעתקה $T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ באופן הבא. יהיו $X,Y\in T_pM$. נרחיב את X,Y לשדות לוקליים $\tilde{X},\tilde{Y}$ סביב p. אז

$$\mathrm{Hess}_p(F)(X,Y):=L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}}(F)(p).$$

הגדרה 1.3.4 (נגזרת לי). עבור שדה וקטורי $\tilde{Y}$ ונקודה $p\in M$ נגדיר

$$\begin{aligned}L_{\tilde{Y}}(F)(p)&=\lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left(\varphi^t_{\tilde{Y}}(p)\right)-f(p)\right)}{t}\\&=dF_p\left(\tilde{Y}_p\right)\\&=\frac{\partial F}{\partial\tilde{Y}}(p)\end{aligned}$$

כאשר $\varphi_{\tilde{Y}}$ הזרימה לפי $\tilde{Y}$.

[1] גיאומטרית, $\frac{X}{\|X\|}$ וקטור יחידה שמצביע בכיוון בו F עולה הכי מהר, ומהירות העליה לאורכו היא $\|X\|$. לכן כדי שהמהירות תהיה קבועה חלקנו ב־$\left\|X_p\right\|^2$.

הערה 1.3.5. נקבל מההגדרה כי

$$\begin{aligned}\left(L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}}\right)(p) &= \mathrm{d}\left(L_{\tilde{Y}}F\right)_p\left(\tilde{X}_p\right)\\ &= \mathrm{d}\left(L_{\tilde{Y}}F\right)_p(X)\end{aligned}$$

ולכן $\mathrm{Hess}_p(F)$ אינו תלוי בבחירת ההרחבה $\tilde{X}$ של X.

נראה שההסיאן סימטרי ב־X,Y ונקבל מכך כי ההסיאן אינו תלוי בבחירת ההרחבה $\tilde{Y}$ של Y.

טענה 1.3.6.

$$\mathrm{Hess}_p(F)(X,Y) = \mathrm{Hess}_p(F)(Y,X).$$

הוכחה. מתקיים

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}_p(F)(X,Y) - \mathrm{Hess}_p(F)(Y,X) &= L_{\tilde{X}}L_{\tilde{Y}}(F)_p - L_{\tilde{Y}}L_{\tilde{X}}(F)_p\\ &= L_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}F_p\\ &= \overset{0}{\cancel{\mathrm{d}F_p}}\left(\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]_p\right)\\ &= 0\end{aligned}.$$

■

מסקנה 1.3.7. $\mathrm{Hess}_p(F)(X,Y)$ אינה תלויה בבחירת ההרחבות $\tilde{X},\tilde{Y}$.

תרגיל 1. בקואורדינטות מקומיות סביב p

$$\hat{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

מתקיים

$$\mathrm{Hess}_{\hat{p}}\left(\hat{F}\right)\colon T_{\hat{p}}U \times T_{\hat{p}}U \to \mathbb{R}.$$

אם נזהה $T_{\hat{p}}U \cong \mathbb{R}$ נקבל העתקה $(\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$. העתקה זאת מיוצגת על ידי המטריצה

$$\left(\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x_i\partial x_j}(\hat{p})\right)_{i,j\in[n]}$$

כמו בקורסי אינפי.

סימון 1.3.8. נסמן ב־$\mathrm{Crit}(F)$ את אוסף הנקודות הקריטיות של F.

הגדרה 1.3.9 (נקודה קריטית לא־מנוונת). $p\in\mathrm{Crit}(F)$ לא מנוונת non-degenerate אם $\mathrm{Hess}_p(F)$ תבנית לא מנוונת (באופן שקול, אם $\ker\left(\mathrm{Hess}_p\right)=\{0\}$, ובאופן שקול אם 0 אינו ערך עצמי).

דוגמה 1.3.10. תהי

$$S^2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

ותהי

$$\begin{aligned}F\colon S^2 &\to \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &\mapsto z\end{aligned}.$$

תהי $p=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. זאת נקודה קריטית כי הנורמל לספירה ב־p מצביע למעלה.

נבחר קבוצה פתוחה U קטנה סביב p, ומפת קואורדינטות

$$\begin{aligned}\varphi\colon U &\to \mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}.$$

אז הצגה מקומית היא

$$\begin{aligned}\hat{F}\colon \varphi(U) &\to \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &\mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}\end{aligned}$$

ואז

$$\mathrm{Hess}_0\left(\hat{F}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x^2}(0) & \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x\partial y}(0)\\ \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial y\partial x}(0) & \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial y^2}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

לא מנוונת.
באופן דומה

$$\mathrm{Hess}_{\hat{s}}\left(\hat{F}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

הגדרה 1.3.11 (פונקציית מורס). $F\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה היא פונקציית מורס אם כל הנקודות הקריטיות שלה אינן מנוונות.

1.3.2 הלמה של מורס

עבור $F\colon M\to\mathbb{R}$ נוכל לקחת פיתוח טיילור של הצגה מקומית של F.

$$\begin{aligned}\hat{F}(x+\Delta x) &= \hat{F}(x)+\sum_{i\in[n]}\frac{\partial\hat{F}}{\partial x_i}\partial x_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j\in[n]}\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x_i\partial x_j}\Delta x_i\Delta x_j+o\left(\|\Delta x\|^3\right)\\ &= \hat{F}(x)+D\hat{F}(\Delta x)+\mathrm{Hess}_x\hat{F}(\Delta x,\Delta x)+o\left(\|\Delta x\|^3\right)\end{aligned}$$

אם x נקודה קריטית לא־מנוונת של $\hat{F}$ אז

$$D\hat{F}(\Delta x)=0.$$

הלמה של מורס אומרת שבמקרה זה אפשר לבחור קואורדינטות סביב x עבורן

$$o\left(\|\Delta x\|^3\right)=0.$$

זאת אומרת,

$$\hat{F}(x+\Delta x)=\hat{F}(x)+\mathrm{Hess}_x\left(\hat{F}\right)(\Delta x,\Delta x).$$

נפעיל את משפט סילבסטר כדי להביא את ההסיאן לצורה קנונית ונקבל מערכת קואורדינטות y לפיה

$$\hat{F}(y+\Delta y)=\hat{F}(y)-\sum_{i\in[k]}y_i^2+\sum_{i=k+1}^{n}y_i^2.$$

משפט 1.3.12 (הלמה של מורס). תהי $x\in Mn$ נקודה קריטית לא־מנוונת של $F\colon M\to\mathbb{R}$ חלקה. קיימת מפת קואורדינטות (U,φ) סביב x כך שמתקיים $\varphi(x)=0$ ושעבור

$$\hat{F}=F\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U)\to\mathbb{R}$$

מתקיים

$$\hat{F}(y)=\hat{F}(0)-\sum_{j\in[i]}y_j^2+\sum_{j=i+1}^{n}y_j^2.$$

הוכחה. נבחר מפה כלשהי (U,ψ) סביב x. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $\psi(x)=0$. שינוי לינארי של הקואורדינטות משרה את אותו השינוי על $T_p\mathbb{R}^n$ לכל $p\in\psi(U)$. כלומר, אם

$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}^n\\ y&\mapsto Ay\end{aligned}$$

לינארית עבור $A \in M_n(\mathbb{R})$ אז

$$\begin{aligned} Df_p : T_p\mathbb{R}^n &\to T_p\mathbb{R}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}.$$

לפי משפט סילבסטר קיימת מטריצה מעבר $A \in M_n(\mathbb{R})$ שמלכסנת את $\mathrm{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$. אם נפעיל על $\psi(U)$ החלפת קואורדינטות $y \mapsto Ay$ נקבל מפה חדשה $(U, A\cdot\psi)$ עבורה $A\cdot\psi(x) = 0$ וגם

$$\mathrm{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$$

מטריצה אלכסונית ללא אפסים ע האלכסון, כאשר $\hat{F}$ הצגה של F לפי $A\cdot\psi$. מכאן, נניח בלי הגבלת הכלליות שבחרנו מפה ψ לפיה $\mathrm{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$ אלכסונית.
נמשיך את ההוכחה באינדוקציה על המימד.

בסיס, $n=1$: נסתכל על הצגה מקומית

$$\hat{F}(y) = \hat{F}(0) + \frac{1}{2}\hat{F}''(0)\,y^2 + r(y)$$

עבור $r(y) \in o\left(\|y\|^3\right)$. אנו יודעים כי $r(y)$ פונקיה חלקה כצירוף פונקציות חלקות. כיוון ששתי הנגזרות הראשונות שלה מתאפסות ב־0 נקבל כי גם $\frac{r(y)}{y^2}$ פונקציה חלקה. אז נוכל לכתוב

$$\hat{F}(y) = \hat{F}(0) \pm Ky^2\left(1+\varepsilon(y)\right)$$

כאשר

$$K = \left|\frac{1}{2}\hat{F}''(0)\right| > 0$$

וכאשר

$$\varepsilon(y) = \frac{r(y)}{y^2K} \xrightarrow{y\to 0} 0.$$

נגדיר

$$y_1 = \Theta(y) := y\sqrt{K\left(1+\varepsilon(y)\right)}.$$

אז $\Theta : y \to y_1$ מוגדרת היטב סביב $y=0$, וגם $\Theta'(0) = \sqrt{K} \neq 0$. לכן Θ דיפאומורפיזם מקומי סביב $y=0$.
נקבל כי

$$\begin{aligned} \hat{F}\circ\Theta^{-1}(y_1) &= \hat{F}(y) \\ &= \hat{F}(0) \pm Ky^2\left(1+\varepsilon(y)\right) \\ &= \hat{F}(0) \pm y_1^2 \end{aligned}$$

וזאת הצורה הרצויה.

צעד: מתקיים $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$. נכתוב קואורדינטות מתאימות $y=(a,b)$ כאשר $a\in\mathbb{R}$ ו־$b\in\mathbb{R}^{n-1}$. נכתוב

$$\hat{F}(a,b) = \hat{F}_b(a)$$

ונפתח לטור טיילור לפי המשתנה a.

$$\hat{F}(a,b) = \hat{F}_b(0) + \hat{F}_b'(0)\cdot a + \frac{1}{2}\hat{F}_b''(0)\cdot a^2 + r_b(a)$$

נניח לרגע כי $F_b'(0) = 0$. אז

$$\hat{F}(a,b) = \hat{F}_b(0) \pm K_b a^2\left(1+\varepsilon_b(a)\right)$$

עבור

$$K_b := \left|\frac{1}{2}\hat{F}_b''(0)\right| > 0.$$

זה חיובי ממש כי

$$\hat{F}_0''(0) = \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial a^2}(a,b) \neq 0.$$

אז

$$\Theta(a,b) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 = a\sqrt{K_b\left(1+\varepsilon_b(a)\right)} \\ b_1 = b \end{pmatrix}$$

דיפאומורפיזם לוקלי בסביבת $(0,0)$. כעת

$$.\hat{F} \circ \Theta^{-1}(a_1, b_1) = \hat{F}(0, b_1) \pm a_1^2$$

הפונקציה $\hat{F}(0,b_1)$ תלויה ב־$n-1$ קואורדינטות ונקבל את התוצאה מהנחת האינדוקציה.

כעת ניתן להסביר למה אכן ניתן להניח $\hat{F}_b'(0) = 0$. נחפש נקודה קריטית של $\hat{F}_b$, כלומר נקודה a עבורה

$$.\Phi(a,b) := \frac{\partial \hat{F}(a,b)}{\partial a}(a,b) = \frac{\mathrm{d}\hat{F}_b}{\mathrm{d}a}(a) = 0$$

מתקיים

$$\frac{\partial \Phi(0,0)}{\partial a} = \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial a^2}(0,0) \neq 0$$

כי זה האיבר ה־$(1,1)$ ב־$\mathrm{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$. מתקיים גם $\Phi(0,0) = 0$. לפי משפט הפונקציה הסתומה, ליד $(0,0)$ הפתרון של $\Phi(a,b) = 0$ הוא גרף של פונקציה חלקה $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ עבורה $a = g(b)$. לפי המשפט, מתקיים גם

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial b}(0) &= \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial a}(0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial b}(0) \\ &= \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial a}(0)\right)^{-1} \cdot \cancelto{0}{\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial a \partial b}(0)} \\ &= 0\end{aligned}$$

כאשר הביטוי המתואר מתאפס כיוון ש־$\mathrm{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$ מטריצה אלכסונית.

נעשה החלפת קואורדינטות

$$.\chi\colon\ (a,b) \mapsto (a + g(b), b)$$

מתקיים

$$.D\chi_{(0,0)} = \mathbb{1}$$

לפי משפט הפונקציה הפוכה, χ דיפאומורפיזם מקומי בסביבת $(0,0)$. אחרי החלפת קואורדינטות,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{F} \circ \chi}{\partial a}(0,b) &= \cdots = 0 \\ .\frac{\partial^2 \left(\hat{F} \circ \chi\right)}{\partial y_j \partial y_k}(0,0) &= \cdots = \frac{\partial^2 \hat{F}(0,0)}{\partial y_j \partial y_k}\end{aligned}$$

כעת ניתן להפעיל את צעד האינדוקציה עבור $\hat{F} \circ \chi$, כאשר נשתמש בזה שמתקיים

$$\mathrm{Hess}_0\left(\hat{F} \circ \chi\right) = \mathrm{Hess}_0\left(\hat{F}\right)$$

מטריצה אלכסונית בלי אפסים על האלכסון. ■

הגדרה 1.3.13 (מפת מורס). מפה (U,φ) כמו במשפט נקראת מפת מורס (Morse chart) סביב הנקודה הקריטית x.

מסקנה 1.3.14. נקודות קריטיות לא מנוונות הן מבודדות. בפרט, אם M קומפקטית, יתכן רק מספר סופי של נקודות קריטיות שאינן מנוונות.

הוכחה. לפונקציה

$$\hat{F} = a - \sum_{j=1}^{i} y_j^2 + \sum_{j=i+1}^{n} y_j^2$$

אין נקודות קריטיות פרט ל־$y = 0$. ■

הגדרה 1.3.15 (אינדקס מורס). נסמן ב־i את מספר הקואורדינטות השליליות בהצגה המקומית הסטנדרטית של F.
זה גם האינדקס (מספר האיברים השליליים על האלכסון) של $\mathrm{Hess}_x(F)$.
זה גם מימד התת־מרחב המקסימלי של T_xM עליו $\mathrm{Hess}_x(F)$ מוגדרת שלילית.
נקרא למספר זה אינדקס מורס של F בנקודה $x \in \mathrm{Crit}(F)$. נסמנו לפעמים $\mathrm{ind}(x)$ או $\mathrm{ind}_F(x)$.

דוגמה 1.3.16. תהי $x = \min(F)$. במפת מורס מתקיים

$$\hat{F}(y) = F(x) + \sum_{j=1}^{n} y_j^2.$$

במקרה זה, $\mathrm{ind}(x) = 0$.
נסתכל על משטחי גובה. כאשר $F(y) = F(x) + \varepsilon$ עבור ε קבוע קטן מספיק, נקבל ספירות קוצנטריות סביב הנקודה x.
נבחר מטריקה רימנטית "אוקלידית" ב־$\varphi(\mathcal{U})$ לפיה

$$\hat{g} = \mathrm{d}y_1^2 + \ldots + \mathrm{d}y_n^2.$$

במפת מורס נקבל

$$\nabla_g \hat{F}(y) = (2y_1, \ldots, y2_n) = 2\vec{y}.$$

אז $\nabla \hat{F}-$ שדה כיוונים הזורם לראשית ופרופורציונלי למרחק ממנה. נפתור את המד"ר ונקבל

$$y(t) = 2y(0)\,e^{-t}.$$

כאן יש התכנסות אקספוננציאלית ל־$y = 0$.

דוגמה 1.3.17. כאשר $x \in M$ נקודת מקסימום של F נקבל במפת מורס $\mathrm{ind}(x) = n$ וגם

$$\hat{F}(y) = F(x) - \sum_{j=1}^{n} y_j^2,$$

באופן דומה.

הערה 1.3.18. אם $x \in \mathrm{Crit}(F)$ אז $x \in \mathrm{Crit}(-F)$. מתקיים

$$\mathrm{ind}_{-F}(x) = n - \mathrm{ind}_F(x).$$

ניתן לראות זאת מכך שמפת מורס של F היא גם מפת מורס עבור $-F$.

דוגמה 1.3.19. נעיין בנקודת אוכף $x \in M$ של F במקרה $n = 2$. במפת מורס מתקיים

$$\hat{F}(y) = F(x) - y_1^2 + y_2^2.$$

קווי הגובה עבור $\hat{F} = F(x)$ הם שני הישרים $y_1 = \pm y_2$. כאשר $\hat{F} = F(x) \pm \varepsilon$ קווי הגובה מתוארים באיור 1.9. מתקיים

$$D\hat{F} = 2(-y_1, y_2)$$

ואז

$$y(y) = \left(2y_1(0)\,e^{t}, 2y_2(0)\,e^{-t}\right).$$

קווי הזרימה מתוארים באיור 1.10 ואלו קווים היפרבוליים אסימפטוטיים לצירים.
נסתכל גם על המקרה $n > 2$. כעת

$$\hat{F} = F(x) - y_1^2 - \ldots - y_i^2 + y_{i+1}^2 + \ldots + y_n^2.$$

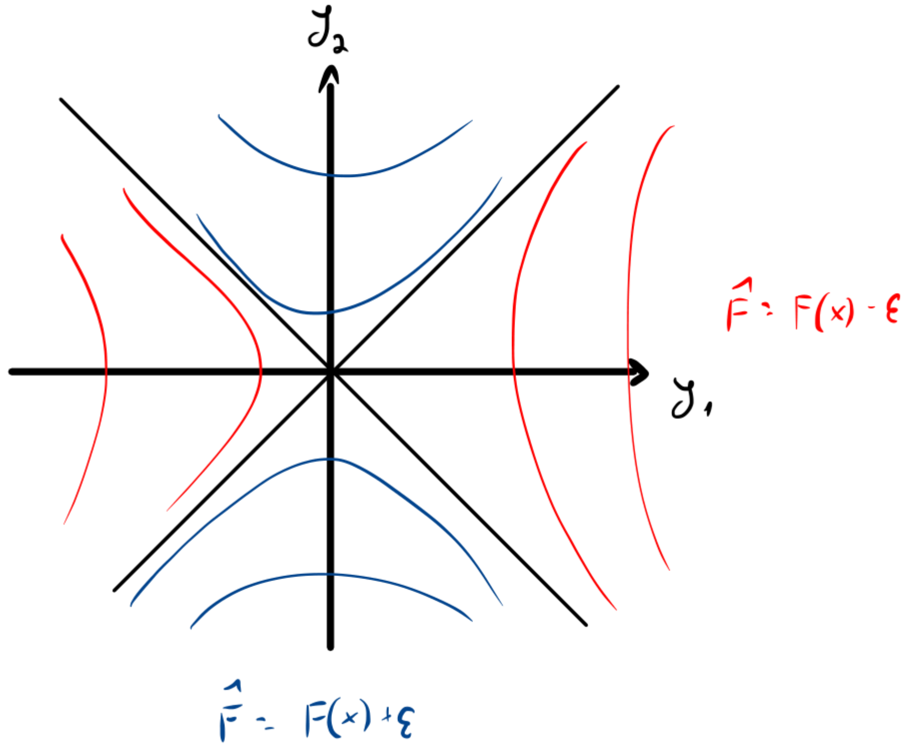
נסמן

$$y_I := (y_1, \ldots, y_i)$$
$$y_J := (y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

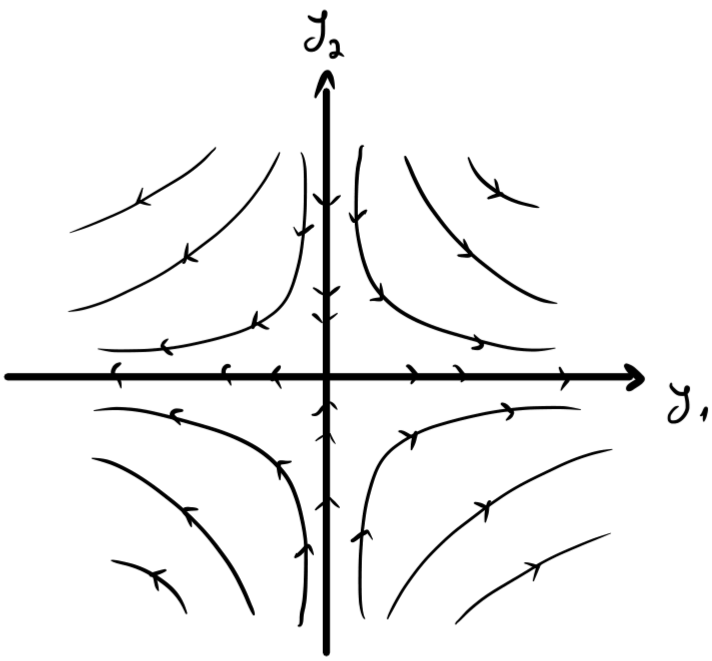
ואז

$$\hat{F} = F(x) - \|y_I\|^2 + \|y_J\|^2.$$

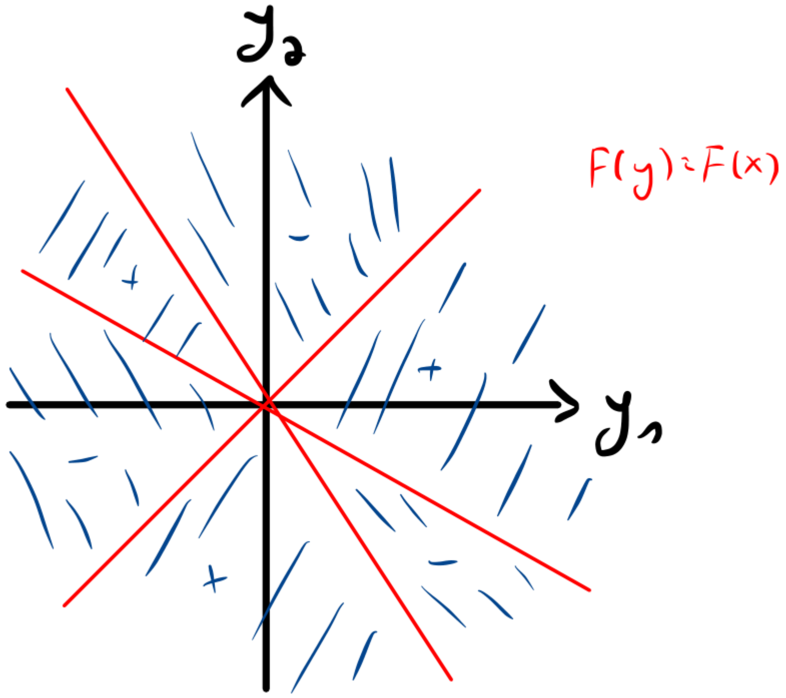
אז האיורים הנ"ל יהיו חתכים דו־מימדיים של היפרבולואידים.



איור 1.9: קווי גובה בסביבת מורס.



איור 1.10: קווי זרימה בסביבת מורס.



איור 1.11: קווי הגובה מראים כי הנקודה הקריטית מנוונת.

דוגמה 1.3.20. נסתכל על F עם קווי גובה כמתואר באיור 1.11 אז לפי התיאור הנ"ל הנקודה הקריטית אינה מינימום, מקסימום או אוכף, ולכן הינה מנוונת.

הערה 1.3.21. אם $F \in C^r(M)$ או M יריעה דיפרנציאבילית C^r עבור $r \geq 3$, עדיין ניתן להפעיל את הלמה של מורס, אך המפה לא תהיה מתואמת עם האטלס החלק על M.

תרגיל 2. תהי (M, g) יריעה רימנית סגורה ותהי F פונקציית מורס. יהי $\dot{\gamma}(t) = -\nabla F(y)$ מסלול זרימה.

1. הראו כי

$$\lim_{t \to +\infty} y(y) = y_t \in \mathrm{Crit}(F)$$
$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = y_- \in \mathrm{Crit}(F)$$

2. הראו כי

$$F(y_+) < F(y_-).$$

3. הראו שההתכנסות אל $y_\pm$ אקספוננציאלית, אך

$$y_\pm \notin \{y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

1.3.3 שקילות של משטחים

הגדרה 1.3.22 (ריטרקציה). (i) יהי X מרחב טופולוגי ויהי $Y \subseteq X$. העתקה רציפה $F: X \to Y$ היא ריטרקציה אם $F|_Y = \mathbb{1}_Y$.

(ii) אם קיימת $F_t: X \to X$ עבורה

$$F_0 = \mathbb{1}_X$$
$$F_t|_Y = \mathbb{1}_Y$$

ו־$F_1: X \to X$ ריטרקציה $Y \to X$ אז Y היא ריטרקציה דפורמטיבית (deformation retract) של X.

הגדרה 1.3.23 (ריטרקציה). יהי X מרחב טופולוגי ויהי $Y \subseteq X$. העתקה רציפה $F: X \to Y$ היא ריטרקציה אם $F|_Y = \mathbb{1}_Y$.

הגדרה 1.3.24 (שקילות הומוטופית). מרחבים טופולוגיים X, Y שקולים טופולוגית אם קיימות

$$f\colon X \to Y$$
$$g\colon Y \to X$$

והומוטופיות

$$f \circ g \approx \mathbb{1}_Y$$
$$.g \circ f \approx \mathbb{1}_X$$

דוגמה 1.3.25. אם Y הוא ריטרקציה דפורמטיבית של X ומתקיים $f = F_1, g = \mathbb{1}_Y$ אז

$$f \circ g = \mathbb{1}_Y$$
$$.g \circ f = \mathbb{1}_Y \circ F_1 = F_1 \approx F_0 = \mathbb{1}_X$$

אז Y שקולה הומוטופית ל־X.

דוגמה 1.3.26. כדור סגור $\bar{B}^n$ שקול הומוטופית לנקודה.

דוגמה 1.3.27. אין ריטרקציה דפורמטיבית $B^n(1) \to B^n(2)$. באופן כללי, עשויות להיות התנהגויות לא רצויות במקרה של קבוצות פתוחות.

דוגמה 1.3.28. תהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ בלי ערכים קריטיים בקטע $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$. ראינו כי $M^a \approx M^b$. נוכל לחשוב על כך בדרך מעט אחרת. תהי g מטריקה רימנית שרירותית ויהי $X = -\nabla_g F$. נגדיר

$$.Y(p) := \begin{cases} \frac{X_{(p)}}{|L_X F_{(p)}|} & F(p) \geq a \\ 0 & F(p) < a \end{cases}$$

זה שדה וקטורי לא רציף אך ניתן להגדיר זרימה לאורכו. נסמנה

$$\varphi_t\colon M{\leq}\, b \to M^{\leq a}$$

וזאת העתקה שאינה הפיכה או חלקה, אך כן רציפה. היא מגדירה רטרקציה דפורמטיבית מ־$M^{\leq b}$ ל־$M^{\leq a}$ ובפרט שני מרחבים אלה שקולים טופולוגית.

הערה 1.3.29. במקרה של הטורוס והנקודה x מאיור 1.1 המרחב $M^{\leq x}$ אינו יריעה.
כשנתעניין בשקילות דיפאומורפית נסתכל בינתיים על תנאי פתוח, וכשנתעניין בשקילות הומוטופית נסתכל על תנאי סגור, כבדוגמא האחרונה.

1.3.4 הוספת נקודה קריטית

תהי M יריעה חלקה סגורה, תהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ פונקציית מורס, תהי $c \in \mathrm{Crit}(F)$ עם ערך קריטי $a := F(c)$. נניח ש־c נקודה קריטית יחידה עם ערך קריטי בקטע $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.
נעיין ראשית במקרה בו c מינימום מקומי. במפת מורס סביב c מתקיים

$$.\hat{F}(x) = a + \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

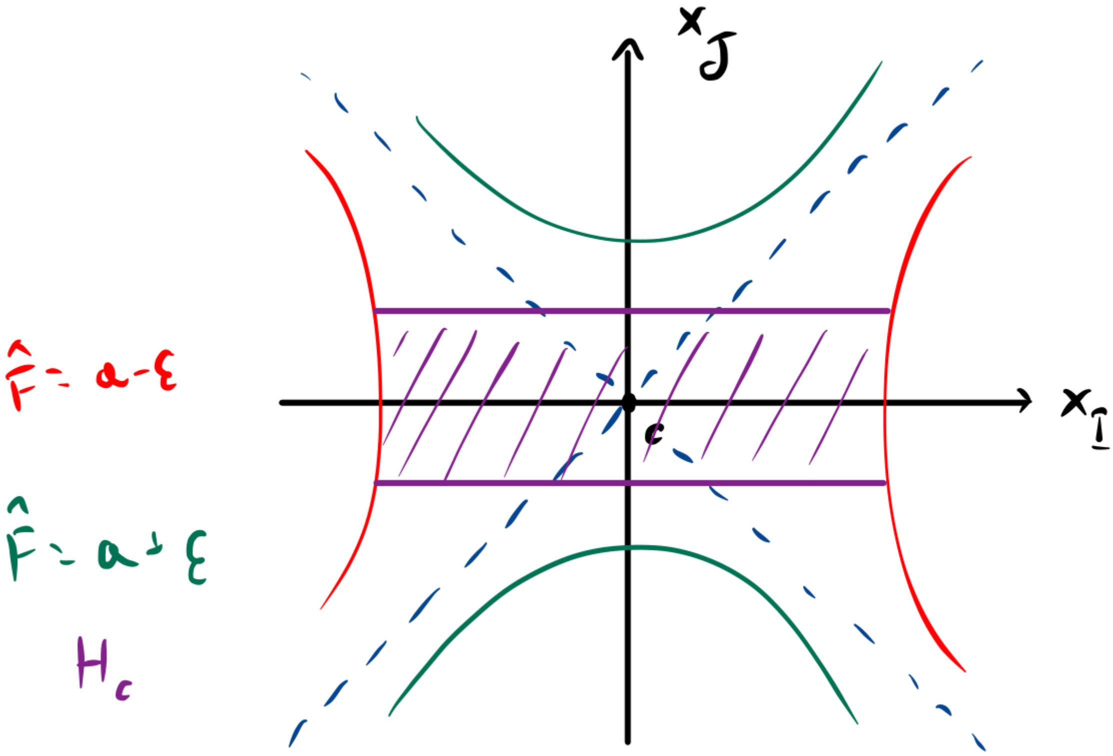
במעבר מ־$M^{a-\varepsilon}$ ל־$M^{a+\varepsilon}$ הוספנו כדור

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \varepsilon$$

כרכיב קשירות נפרד.
באופן דומה, במקרה בו c מקסימום מקומי, במעבר מ־$M^{a-\varepsilon}$ ל־$M^{a+\varepsilon}$ יש הדבקה של כדור n־מימדי

$$\bar{B}_c = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \varepsilon \right\}$$

לשפה $M^{a-\varepsilon}$, כלומר $M^{a+\varepsilon}$ הדבקה של $\bar{B}_c \sqcup Ma-\varepsilon$ לאורך חיתוך $\{F = a - \varepsilon\}$ עם מפת מורס סביב c.



איור 1.12: הדבקת ידית בסביבת מורס.

נסתכל כעת על המקרה בו $x = c$ נקודות אוכף. אז

$$\hat F(x) = a - \sum_{j=1}^{i} x_j^2 + \sum_{j=i+1}^{n} x_j^2 a - \|x_I\|^2 + \|x_J\|^2.$$

נבנה מטריקה רימנית g על M עבורה $\hat g$ אוקלידית במפת מורס, כלומר

$$\hat g = \mathrm{d}x_1^2 + \ldots + \mathrm{d}x_n^2.$$

נסתכל על

$$H_c = \left\{ {\hat F \ge a-\varepsilon \atop \|x_J\|^2 < \delta \ll \varepsilon} \right\}.$$

ראו איורים 1.12, 1.13. מתקיים

$$H_c \cong \overline{B^i} \times B^{n-i}.$$

טענה 1.3.30. 1. קיים הומיאומורפיזם

$$M^{a+\varepsilon} \cong M^{a-\varepsilon} \cup H_c.$$

2. $M^{\le a-\varepsilon} \cup \overline{H_c}$ היא ריטרקציה דפורמטיבית של $M^{\le a+\varepsilon}$.

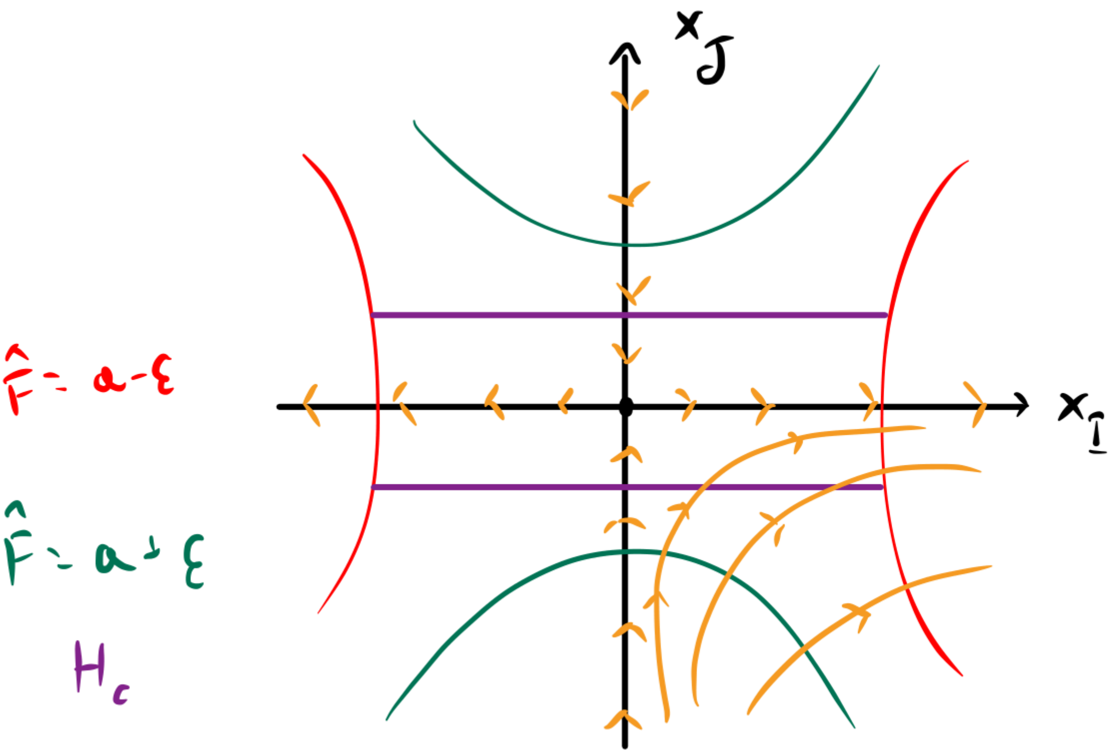
הוכחה. נסתכל על קוי הזרימה של $-\nabla F$. קווי הזרימה נותנים התאמה חד־חד ערכית ועל בין $\{F = a+\varepsilon\}$ לבין $\partial(M^{a-\varepsilon} \cup H_c)$. כמו מקודם, ניתן לעשות רפרמטריזציה של $-\nabla F$ כך שהזרימה תביא את $\{F = a+\varepsilon\}$ ל־$\partial(M^{a-\varepsilon} \cup H_c)$ בזמן $t = 1$. נקבל מכך הומיאומורפיזם בין $M^{a+\varepsilon}$ ל־$Ma - \varepsilon \cup H_c$. נקבל מכך גם ריטרקציה דפורמטיבית מ־$M^{\le a+\varepsilon}$ ל־$M^{a-\varepsilon} \cup \overline{H_c}$ על ידי חתיכת השדה באופן שאינו רציף, כמקודם. ■

הערה 1.3.31. נסתכל על הסימונים מהוכחת הטענה ונגדיר

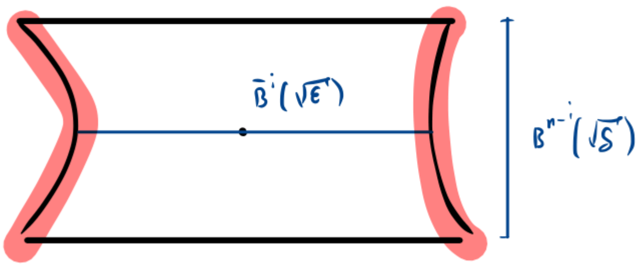
$$Y_{(p)} = T_{(p)} \left(-\nabla_g F\right) \cdot \nu(p)$$

כאשר $T_{(p)}$ הזמן הדרוש עבור קו הזרימה דרך p לנוע מ־$\{F = a+\varepsilon\}$ למשטח הנתון וכאשר ν היא cutoff function ליד השפה של $M^{a-\varepsilon} \cup H_c$. אם קו דרך p אינו חוצה את שני המשטחים, נגדיר $Y_{(p)} = 0$. נסמן את הזרימה של Y על ידי

$$\varphi_t \colon M^{a+\varepsilon} \to M^{a+\varepsilon}$$



איור 1.13: זרימה בסביבת מורס.



איור 1.14: ידית הומיאומורפית למכפלה של כדור פתוח וכדור סגור.

ואז

$$\varphi_1 : M^{a+\varepsilon} \to M^{a-\varepsilon} \cup H_c$$

הומיאומורפיזם אבל לאו דווקא דיפאומורפיזם.
באופן כללי, ההומיאומורפיזם בהוכחה אינו חייב להיות דיפאומורפיזם, ודרושים תיקונים על מנת לקבל דיפאומורפיזם.

הערה 1.3.32. בהוספת הידית H_c נדביק את H_c על החלק האדום באיור 1.14 ל־$\{\hat{F} = a - \varepsilon\}$. אם נזהה

$$H_c \cong \bar{B}^i\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \times B^{n-i}\left(\sqrt{\delta}\right)$$

הדבקה זאת היא לאורך

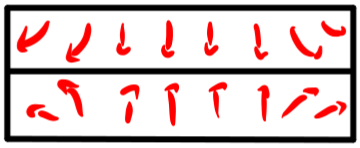
$$\partial B^i\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \times B^{n-i}\left(\sqrt{\delta}\right).$$

ראינו דוגמא לכך במקרה של הטורוס. ראו איורים 1.5, 1.7.

דוגמה 1.3.33. תהי M^3 יריעה 3־מימדית.
ידית מאינדקס 1 נראית כמו

$$\bar{B}^1\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \times B^2\left(\sqrt{\delta}\right) \cong [0,1] \times D$$

מודבקת למשטח לאורך $\partial\,[0,1] \times D^2$.



איור 1.15: ריטרקציה מהידית לשפה.

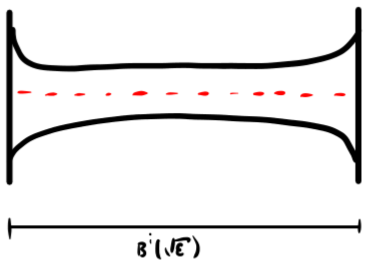
ידית מאינדקס 2 נראית כמו
$$\bar{B}^2\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\times B^1\left(\sqrt{\delta}\right)\cong\overline{D^2}\times(0,1)$$
ומודבקת למשטח לאורך $\partial D^2\times(0,1)$. במקרה של הטורוס מתקבלות שתי תוצאות שונות (עד כדי הומיאומורפיזם) בהתאם למקום ההדבקה.
אין נקודה קריטית מאינדקס 3 כיוון שלשם כך יהיה צורך להדביק כדור לאורך S^2 על השפה של הטורוס, אך אין תת־יריעה הומיאומורפית ל־S^2 על השפה.

ראינו שאם בקטע $[a,b)$ אין נקודות קריטיות, אז $M^{\leq b}\approx M^{\leq a}$. אם יש נקודה קריטית בודדת c עבורה $FF(c)=a$ נסתכל על $M^{\leq a\pm\varepsilon}$. אז במעבר מ־$M\leq a-\varepsilon$ ל־$M^{\leq a+\varepsilon}$ נוסיף הדבקה של ידית
$$\bar{H}_c=\left\{\begin{smallmatrix}\|x_J\|^2\leq\delta<\varepsilon\\ a_\varepsilon\leq F(p)\end{smallmatrix}\right\}\cong\bar{B}^i\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\times\bar{B}^{n-i}\left(\sqrt{\delta}\right)$$
לאורך $\partial B^i\times\bar{B}^{n-i}$. נגדיר שדה וקטורי
$$Y=\begin{cases}T_{(p)}\cdot\left(-\Delta_g F\right) & \begin{smallmatrix}F(p)\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon]\\ p\notin\bar{H}_c\end{smallmatrix}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}.$$
שדה זה אינו רציף, אך הוא רציף למקוטעין. נסמן ב־
$$\varphi_t:\ M^{\leq a+\varepsilon}\to M^{\leq a+\varepsilon}$$
את הזרימה של Y. זאת אינו הפיכה אך כן רציפה. מתקיים
$$\operatorname{Im}\varphi_1\subseteq M^{\leq a-\varepsilon}\cup\bar{H}_c$$
ו־φ_1 ריטרקציה. אז φ_t ריטרקציה דפורמטיבית.
קיימת ריטרקציה דפורמטיבית φ_t של $\bar{H}_c$ ל־
$$\bar{B}^i\times\{0\}\cup\partial B^i\times\bar{B}^{n-i}.$$
ניתן להרחיב אותה ל־$M\leq a-\varepsilon$ להעתקת הזהות. נקבל כך ריטרקציה דפורמטיבית בין $M^{\leq a+\varepsilon}$ ל־$M^{\leq a-\varepsilon}\cup B^i$. ראו איור 1.15. נקבל ריטרקציות דפורמטיביות
$$M^{\leq a+\varepsilon}\approx M^{\leq a-\varepsilon}\bar{H}_c\approx M^{\leq a-\varepsilon}\cup B^i.$$

הערה 1.3.34. עם מאמץ נוסף ניתן לתת ל־M מבנה של קומפלקס CW. נדון בכך בהמשך.

1.3.5 מעבר עד כדי דיפאומורפיזם

כאשר הראנו הומיאומורפיזם במעבר דרך נקודה קריטית, הגדרנו שדה לאורכו בנינו זרימה, אך שדה זה לא היה חלק, ולכן קיבלנו רק הומיאומורפיזם ולא דיפאומורפיזם. כדי לתקן זאת, נבצע תיקון על ידי "החלקה" של הפינות. ראו איור 1.16.
נגדיר
$$H_c=\bigcup\{y\}\times B^{n-i}(r(y))$$
עבור $r(y)$ פונקציה עולה עם $r'(y)\to\infty$ כאשר $y\to\partial B^i\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$. נגדיר
$$Y=\begin{cases}\nu(p)\cdot T_{(p)}\cdot\left(-\nabla_g F\right)\\ 0\end{cases}$$
כמקודם ונסמן ב־φ_t את הזרימה שלה. אז
$$\varphi_1:\ M^{\leq a+\varepsilon}\to M^{\leq a-\varepsilon}\cup H_c$$
דיפאומורפיזם.



איור 1.16: ידית לאחר החלקת הפינות.

עבור יריעות חלקות

1. בקטגוריה של יריעות חלקות הידית H_c יותר מורכבת.
2. אם עובדים עם פונקציה דיפרנציאבילית או יריעה דיפרנציאבילית r פעמים התוצאה היא דיפאומורפיזם עד כדי C^{r-2} כיוון שמפת מורס אינה מתואמת עם האטלס של M.
3. חשוב לדעת לא רק איפה מדביקים את H_c אלא גם איך אנחנו מדביקים את הידית ל־$M^{\leq a-\varepsilon}$. נראה דוגמא בהמשך.

1.3.6 הוספת מספר נקודות קריטיות

נניח כעת שיש מספר נקודות קריטיות ב־$\{a-\varepsilon < F < a+\varepsilon\}$.

- אם הנקודות הקריטיות בגבהים שונים, ניתן להפריד אותן על ידי הקטנת ε.
- אם יש כמה נקודות קריטיות באותו גובה, נבחר סביבות מורס זרות לכל נקודה ונעשה בנייה באופן לוקלי. נקבל
$$M^{\leq a+\varepsilon} \cong M^{\leq a-\varepsilon} \cup H_{c_1} \cup \ldots \cup H_{c_k}.$$

1.3.7 שימושים

משפט 1.3.35 (Reeb)**.** תהי N^n יריעה סגורה עם פונקציית מורס $F\colon N \to \mathbb{R}$ בעלת שתי נקודות קריטיות. אז יש הומיאומורפיזם $M \cong S^n$.

הוכחה. נסמן ב־m את נקודת המינימום וב־M את נקודת המקסימום. בלי הגבלת הכלליות נניח $F(m)=0, F(M)=1$. במעבר נקודת המינימום, שהינה מאינדקס 0, נוסיף כדור n־מימדי, ולכן

$$N^{\leq 1-\varepsilon} \cong N^{\leq \varepsilon} \cong B^n$$

כאשר אלו דיפאומורפיזמים. נקבל דיפאומורפיזמים

$$\partial N^{\leq 1-\varepsilon} \cong \partial N^{\leq \varepsilon} \cong \partial B^n \cong S^{n-1}.$$

אז נקבל

$$\begin{aligned} N &= N^{\leq 1-\varepsilon} \cup N^{\geq 1-\varepsilon} \\ &\cong \bar{B}^n_1 \sqcup_\varphi \bar{B}^n_2 \end{aligned}$$

כאשר $\varphi\colon \partial B^n_1 \to \partial B^n_2$ פונקציית הדבקה.
נראה כי

$$\varphi\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$$

דיפאומורפיזם. נסתכל על $\{F = 1-\varepsilon\}$. מפת מורס סביב M מעבירה קבוצה זאת ל־$\partial B^n\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \cong S^{n-1}$. מצד שני, φ_1 דיפאומורפיזם מקבוצה זאת ל־

$$\{F=\varepsilon\} \cong \partial B^n\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \cong S^{n-1}$$

כאשר הדיפאומורפיזם הראשון מגיע ממפת מורס סביב m. אז φ הרכבה של דיפאומורפיזמים ולכן דיפאומורפיזם.

נבנה הומיאומורפיזם

$$.h\colon \underbrace{\bar{B}_1^n \amalg_{\mathbb{1}_{S^{n-1}}} \bar{B}_2^n}_{S^n} \to \underbrace{\bar{B}_1^n \amalg_\varphi \bar{B}_2^n}_{N}$$

על ידי

$$.h(x) = \begin{cases} x & x \in \bar{B}_1^n \\ \|x\| \cdot \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & x \in \bar{B}_2 \setminus \{0\} \\ 0 \in \bar{B}^2 & 0 \in \bar{B}_2 \end{cases}$$

ניתן לבדוק כי זה אכן הומיאומורפיזם. ■

הערה 1.3.36. הפונקציה h בהוכחה אינה חלקה. היא לא חייבת להיות חלקה או גזירה ב־$0 \in \bar{B}_2$ והיא בדרך כלל לא תהיה דיפאומורפיזם. זאת בעיה עקרונית ובמקרה זה אין תמיד דיפאומורפיזם.

הגדרה 1.3.37 (ספירה אקזוטית). יריעה N נקראת ספירה אקזוטית אם יש הומיאומורפיזם $N \cong S^n$ אבל אין דיפאומורפיזם $.N \amalg S^n$

עובדה 1.3.38 (מילנור). יש 28 מבנים חלקים שונים על $.S^7$

עובדה 1.3.39. כל ספירה אקזוטית שהומיאומורפית ל־S^n עבור $n \geq 7$ ניתן לבנות על ידי

$$.N = \bar{B}_1^n \amalg_\varphi \bar{B}_2^n$$

הערה 1.3.40. חשוב לדעת מה פונקציית ההדבקה φ כי זה משנה את $M^{\leq a+\varepsilon}$ עד כדי דיפאומורפיזם.

1.4 קיום פונקציות מורס

משפט 1.4.1. תהי $M \subseteq \mathbb{R}^N$ תת־יריעה חלקה. כמעט לכל (לפי מידת לבג על הספירה) ישר $\ell_v = \operatorname{Span}(v)$ ההטלה האורתוגונלית על ℓ_v היא פונקציית מורס.

הערה 1.4.2. למרות שהמשפט הנ"ל פשוט, הוא פחות נוח כאשר נתונה יריעה אבסטרקטית, שכן יש צורך קודם לשכן אותה, ואין בהכרח דרך נוחה לעשות זאת.

מסקנה 1.4.3. כל יריעה סגורה M^n ניתנת לשיכון ב־$\mathbb{R}^N$. לכן קיימות (לפחות $2^{\aleph_0}$) פונקציות מורס על כל יריעה סגורה $.M$

מסקנה 1.4.4. פונקציית הגובה $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ היא פונקציית מורס.

הוכחה. כמעט לכל כיוון, ההטלה על ℓ_v היא פונקציית מורס. אבל, הספירה סימטרית ולכן כל הטלה כזאת היא פונקציית מורס. ■

משפט 1.4.5. תהי $M^m \subseteq \mathbb{R}^N$ תת־יריעה סגורה וחלקה. כמעט לכל $x \in \mathbb{R}^N$ הפונקצייה

$$\begin{aligned} F_x\colon M &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \|p-x\|^2 \end{aligned}$$

היא פונקציית מורס.

הוכחה למשפט זה קיימת בפרק 6 בספר של מילנור ובטענה 1.2.1 בספר של דמיאן. נראה סקיצה של ההוכחה.

הוכחה (אינטואיציה פיזיקלית). • $p \in M$ נקודה קריטית של F_x אם ורק אם $.T_pM \perp x-p$

- נקבע $.p \in M$ נסתכל על $v \in T_pM^\perp$ וקטור יחידה ונבחר $x = p + sv$ עבור $.s \geq 0$ בדרך זאת נקבל את כל ה־$x \in \mathbb{R}^N$ עבורן p היא נקודה קריטית. קיימים $r_1, \ldots, r_k \geq 0$ עם $k \leq \dim M$, עבורן p נקודה קריטית מנוונת עבור F_x, אם ורק אם $.s \in \{r_1, \ldots, r_k\}$ ($r_1, \ldots, r_k$ תלויים ב־$(p,v$), אם ורק אם $.s = r_i = \|x-p\|$

  $r_1, \ldots, r_k$ הם ה־$\text{principalradii} = \frac{1}{\text{pr.curvature}}$ בנקודה p בכיוון $.v$
- "ספירת מימדים": אוסף הנקודות $x = p + sv$ ה"רעות" מקיים: אם $p \in M$, $\dim M = m$ אז $\dim T_pM^\perp = N-m$ ואז $\dim \mathcal{U}\left(T_pM^\perp\right) = N-m-1$ ולכן (p,v) קבוצת הזוגות היא $N-1 = m + (N-m-1)$־מימדית לכל היותר. לכל זוג יש קבוצה דיסקרטית (0־מימדית) של נקודות אסורות, ולכן סך המימד הוא $.N-1$ לכן המידה היא 0. ■

הוכחה (הוכחה פורמלית). • נגדיר

$$T = \left\{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; {}_{v \perp T_p M}^{p \in M}\right\}$$

ונקרא לו האגד הנורמלי של M ב־$\mathbb{R}^N$.

• תהי

$$\begin{aligned} E\colon T &\to \mathbb{R}^N \\ (p, v) &\mapsto p + v \end{aligned}.$$

הנקודות הקריטיות של E מהוות קבוצה זניחה, ממשפט סארד. ∎

משפט 1.4.6. תהי M יריעה קומפקטית. אז פונקציות מורס צפופות ב־$C^\infty(M, \mathbb{R})$ בטופולוגיה

$$C^k(M, \mathbb{R})$$

לכל $k \geq 1$.

הוכחה. תהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ פונקצייה חלקה. נסתכל על $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, שקיים לפי משפט WHitney. נבנה שיכון חדש

$$\begin{aligned} h\colon M &\to \mathbb{R}^{N+1} \\ p &\mapsto (F(p), \iota(p)) \end{aligned}.$$

כמעט לכל $x = (-c + \varepsilon, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{N+1})$ עבור $c \in \mathbb{R}$ ועבור $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{N+1} \ll 1$ הפונקציה

$$\begin{aligned} f_x\colon M &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \|x - h(p)\|^2 \end{aligned}$$

היא פונקציית מורס. אז גם

$$g_x := \frac{f_x - c^2}{2c}$$

פונקציית מורס. חישוב נותן

$$\begin{aligned} g_x(p) &= \frac{1}{2c}\left((-c + \varepsilon_1 - F(p))^2 + (i_1(p) - \varepsilon_2)^2 + \ldots + (i_N(p) - \varepsilon_{N+1}) - c^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{2c}\left(c^2 + \varepsilon_1^2 + F(p)^2 + 2cF(p) + 2\varepsilon_1(-c - F(p)) - c + \sum_{k \in [N]} i_k(p)^2 + \sum_{k=2}^{N+1} \varepsilon_k^2 - 2\sum_{k \in [N]} i_k(p)\,\varepsilon_{k+1}\right) \\ &= F(p) + \frac{F(p)^2}{2c} + \frac{2\varepsilon_1}{2c}(-c - F(p)) + \frac{1}{2c}\sum_{k \in [N]} i_k(p)^2 + \frac{1}{2c}\sum_{k \in [N+1]} \varepsilon_k^2 - \frac{1}{c}\sum_{k \in [N]} i_k(p)\,\varepsilon_{k+1} \\ &\xrightarrow[\substack{c \to \infty \\ \varepsilon_j \to 0}]{C^j} F \end{aligned}$$

כנדרש. ∎

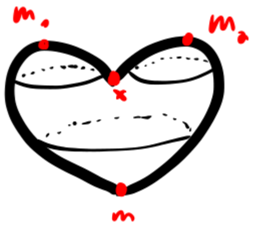
תרגיל 3. הראו שפונקציות מורס מהוות קבוצה פתוחה ב־$C^\infty(M, \mathbb{R})$ בטופולוגיה $C^2(M, \mathbb{R})$. בפרט זאת קבוצה פתוחה בטופולוגיה $C^k(M, \mathbb{R})$ לכל $k \geq 2$ כולל $k = \infty$.

מסקנה 1.4.7. פונקציות מורס מהוות קבוצה פתוחה וצפופה בטופולוגיה $C^k(M, \mathbb{R})$.

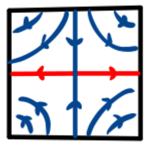
הערה 1.4.8. המשפט הנ"ל עובד גם עבור $C^\infty(M, \mathbb{R})$. במשפט הקודם קיבלנו

$$g_x(p) = F(p) + \frac{F(p)^2}{2c} + \frac{\varepsilon_1}{2c}(-2c - 2F(p)) + \frac{1}{2c}\sum_{k \in [N]} i_k(p)^2 + \ldots.$$

במשפט Whitney אין שליטה על הנגזרות הגבוהות, ולכן ההוכחה הנ"ל לא תעבוד עבור המשפט. קיימות בניות אחרות של קירוב של $F\colon M \to \mathbb{R}$ על ידי פונקציות מורס, שכן מראות צפיפות גם בטופולוגיה $C^\infty(M, \mathbb{R})$.



איור 1.17: שיכון לא סטנדרטי של הספירה ב־$\mathbb{R}^3$.



איור 1.18: קווי הזרימה בנקודת אוכף של הספירה.

1.5 תת־יריעות יציבות

הגדרה 1.5.1. תהי M^n יריעה סגורה, תהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ פונקציית מורס ותהי g מטריקה רימנית. תהי $\varphi_t\colon M \to M$ זרימה עבור $-\nabla_g F$. תהי $p \in \mathrm{Crit}\,(F)$.
נגדיר את תת־היריעה היציבה של M ב־p על ידי

$$W^S\,(p) = \left\{x \in M \,\middle|\, \lim_{t \to +\infty} \varphi_t\,(x) = p\right\}.$$

נגדיר את תת־היריעה הבלתי־יציבה של M ב־p על ידי

$$W^U\,(p) = \left\{x \in M \,\middle|\, \lim_{t \to -\infty} \varphi_t\,(x) = p\right\}.$$

הערה 1.5.2. עבור $x \in M$ הנקודות

$$\lim_{t \to \pm\infty} \varphi_t\,(x).$$

קריטיות. בפרט, לכל $x \in M$ קיימות ויחידות נקודות קריטיות $p, q \in \mathrm{Crit}\,(F)$ עבורן $x \in W^U\,(p)\,, W^S\,(q)$. בפרט,

$$M = \coprod_{p \in \mathrm{Crit}(F)} W^U\,(p) = \coprod_{q \in \mathrm{Crit}(F)} W^S\,(q).$$

דוגמה 1.5.3. נסתכל על פונקציית גובה של $S^N \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$. יש לספירה שתי נקודות קריטיות, קוטב "צפוני" N ו"דרומי" S. כאן $W^S\,(S) = S^N \setminus \{N\}$ וגם $W^S\,(N) = \{N\}$. כמו כן, $W^U\,(S) = \{S\}$ וגם $W^U\,(N) = S^N \setminus \{S\}$.

הערה 1.5.4. אם $F\colon M \to \mathbb{R}$ פונקציית מורס אז גם $-F$. מתקיים $\mathrm{Crit}\,(F) = \mathrm{Crit}\,(-F)$ וקווי הזרימה שווים אך עם אוריינטציה הפוכה. לכן

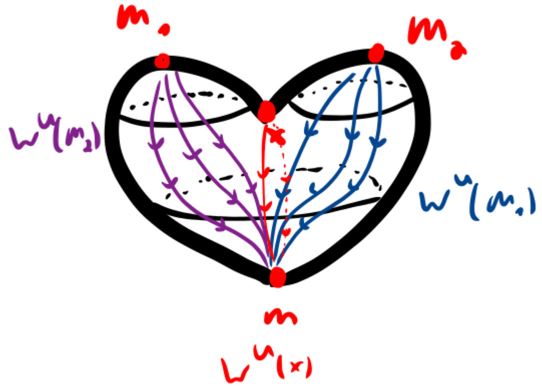
$$W_F^U\,(p) = W_{-F}^S\,(p)$$
$$W_F^S\,(p) = W_{-F}^U\,(p)$$

לכל $p \in \mathrm{Crit}\,(F)$.

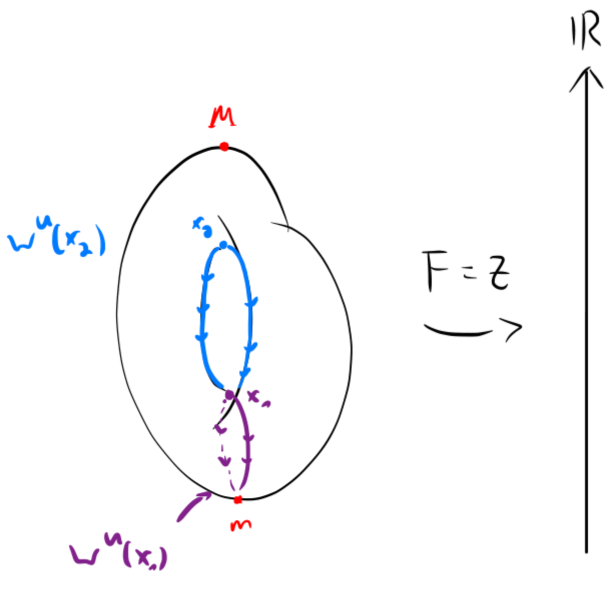
הגדרה 1.5.5. נסתכל על שיכון $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ כמתואר באיור 1.17. מתקיים $W^U\,(m) = \{m\}$ (ובדומה לכל נק' מינימום לוקלית). במפת מור

$$\hat{F} = F\,(x) - y - 1^2 + y_2^2$$

בסביבה של נקודת האוכף x קווי הזרימה מתוארים באיור 1.18. נקבל כי $W^U\,(x)$ המשך של הקווים האדומים באיור, ובאופן דומה נקבל אתת $W^U\,(M_i)$, כמתואר באיור 1.19.



איור 1.19: קווי זרימה על שיכון לא סטנדרטי של הספירה.



איור 1.20: יריעות יציבות ובלתי־יציבות על הטורוס.

דוגמה 1.5.6. נסתכל על פונקציית הגובה מהטורוס. ראו איור 1.20. מתקיים $W^U(m) = \{m\}$, הקבוצה $W^U(x_1)$ היא עותק של S^1 כמתואר באיור, ו־$W^U(M)$ היא כל שאר הטורוס.

הערה 1.5.7. בכל הדוגמאות, $W^U(p)$ תת־יריעה של M שדיפאומורפית ל־$B^{\mu(p)}$ כאשר $\mu(p)$ אינדקס מורס ב־p.

משפט 1.5.8. תהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ פונקציית מורס ותהי $p \in \mathrm{Crit}(F)$.

1. קיים פיצול $T_pM = T_p^S F \oplus T_p^U F$ כאשר Hess_p מוגדר חיובית על $T_p^S F$ ושלילית על $T_p^U F$.
2. קיימים שיכונים חלקים
$$E^S \hookrightarrow T_p^S F \to M$$
$$E^U \hookrightarrow T_p^U F \to M$$
עבורם
$$W^U(p) = \mathrm{Im}\left(E^U\right)$$
$$W^S(p) = \mathrm{Im}\left(E^S\right).$$
3. מתקיים
$$T_pW^U(p) = T_p^U F$$
$$T_pW^S(p) = T_p^S F.$$
4. $\mathrm{Hess}_p(F)$ מוגדר חיובית על $T_pW^S(p)$ ומוגדר שלילית על $T_pW^U(p)$.
5. בפרט, קיים דיפאומורפיזם
$$W^U(p) \cong T_p^U F \cong \mathbb{R}^{\mu(p)} \cong B^{\mu(p)}$$
ובאותו אופן
$$W^S(p) \cong B^{\dim M - \mu(p)}.$$

נציג הוכחה חלקית של המשפט. עבור הוכחה מפורטת ראו banyaga.

הוכחה.
- נניח שבסביבת מורס U של p מתקיים
$$\hat{F} = F(p) - \|x_I\|^2 + \|x_J\|^2$$
ולפיה $\hat{g}$ מטריקה אוקלידית. תחת המפה מתקיים
$$W^U(p) \cap U = \mathbb{R}^i \times \{0\} \cap U$$
$$W^S(p) \cap U = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-i} \cap U$$
וכן
$$T_pM = \mathbb{R}^n = \left(\mathbb{R}^i \times \{0\}\right) \oplus \left(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-i}\right) = T_pW^U(p) \oplus T_pW^S(p).$$
- נגדיר
$$B_1 = \left\{(X_I, 0) \in \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-i} \;\middle|\; \|x_I\|^2 < \varepsilon\right\} = W^U(p) \cap \{F > F(p) - \varepsilon\} \cong B^i.$$
נגדיר גם $B_N = \varphi_N(B_1)$ כאשר φ_t הזרימה של $-\nabla F$. ניתן לבדוק שמתקיים
(i) יש דיפאומורפיזם
$$B_N \cong B^i.$$
(ii)
$$W^U(p) = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$$
(iii) יש אימרסיה מ־$\bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$ ל־M.
(iv) יש שיכון מ־$\bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$ ל־M.
(v) $\bigcup_{N=1}^{\infty} B_n \cong B^i$.

אפשר לעשות הכל באופן דומה עבור $W^S(p)$.

- בסביבת מורס U של p מתקיים

$$\hat{g} = \sum g_{k,\ell}\,\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x_\ell$$

כאשר זאת תבנית קבועה עם $g_{k,\ell}$ שאינה תלויה ב־p. אז

$$\hat{F} = F(p) + x^t \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} x$$

ונקבל 2 תבניות בילינאריות סימטריות על $\mathbb{R}^n$, שאחת מהן מכפלה פנימית.
מאלגברה לינארית, קיים שינוי קואורדינטות לינארי

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto y = Ax \end{aligned}$$

שמלכסן סימולטנית את שתי התבניות. יתר על כך,

$$\hat{g} = \sum_{k\in[n]} \mathrm{d}y_k^2$$

$$\hat{F} = F(p) + y^t \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -\lambda_i & & & \\ & & & \lambda_{i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} y.$$

אז בקואורדינטות לפי y מתקיים

$$\hat{F} = F(p) - \sum_{k=1}^{i} \lambda_k y_k^2 + \sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k y_k^2$$
$$\hat{g} = \sum_{k\in[n]} \mathrm{d}y_k^2$$

כמו מקודם, נקבל

$$W^U(p) \cap \{F > F(p-\varepsilon)\} = \left\{ (y_I, 0) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{i} \lambda_k y_k^2 < \varepsilon \right\} \cong B^i.$$

- במקרה הכללי, מתקיים בסביבת מורס

$$\hat{F} = F(p) - \|x_I\|^2 + \|x_J\|^2$$
$$\hat{g}_{(x)} = \sum g_{k,\ell}(x)\,\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x_\ell$$

וכמו במקרה הקודם ניקח שינוי קואורדינטות עבורו

$$\hat{g}(0) = \sum \mathrm{d}y_k^2.$$

אז

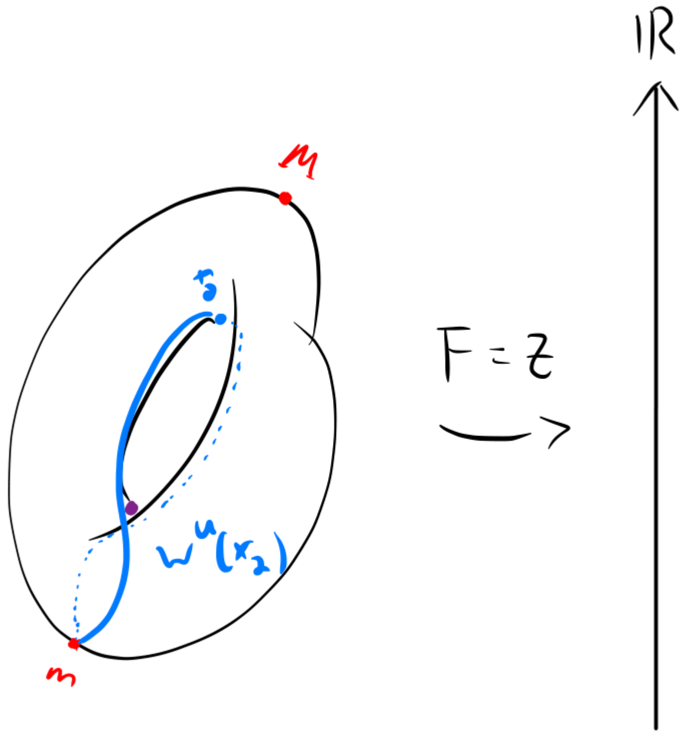
$$\hat{F} = F(p) - \sum_{k=1}^{i} \lambda_k y_k^2 + \sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k y_k^2$$
$$\hat{g} = \sum g'_{k,\ell}(y)\,\mathrm{d}y_k\,\mathrm{d}y_\ell$$
$$g'_{k,\ell} = \delta_{k,\ell}$$

בסביבת 0, והמטריקה היא דפורמציה קטנה של המטריקה הסטנדרטית.

אז שדה הגרדיאנט הוא דפורמציה קטנה של המקרה הקודם ואז $W^U(p)$ הוא דפורמציה קטנה של קבוצת הפתרונות במקרה הקודם. (עדיין מתקיים

$$T_p W^U(p) = \mathbb{R}^I \times \{0\}$$

כאשר $W^U(p)$ הוא גרף של $f : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^J$). ■



איור 1.21: שיכון של הטורוס בזווית.

קיבלנו
$$M=\coprod_{f_p p\in \mathrm{Crit}(F)} W^U(p)$$
עבור פונקציות הדבקה $f_p:\partial B^{\mu(p)}\to M$. אז כל יריעה נראית כמו קומפלקס CW.

הגדרה 1.5.9 (קומפלקס CW). מרחב טופולוגי הוא קומפלקס CW אם קיימת סדרה
$$X^0\subseteq X^1\subseteq\ldots\subseteq X=\bigcup_{N\in\mathbb{N}} X^N$$
עבורה

(i) X^0 קבוצת נקודות מבודדות.

(ii) X^{N+1} מתקבל מ־X^N על ידי הדבקת כדורים במימד $N+1$:
$$X^N X^{N-1}\cup_{f_1^N} B_1^N\cup\ldots\cup_{f_k^N} B_k^N\cup\ldots.$$

עבור $B_i^N\cong B^N$ כדורים פתוחים ועבור $f_i^N:\partial B_i^N\to X^{N-1}$ עם תמונה שמוכלת במספר סופי של תאים.

קבוצה $U\subseteq X$ פתוחה אם ורק אם כל $U\cap B_i^N$ פתוחה. הקבוצה X^i נקראת השלד ה־i מימדי.

הערה 1.5.10. הפירוק $M=\coprod W^U_{(p)}$ לא תמיד מתאים לקומפלקס CW. בדוגמא שבאיור 1.20 השפה של $W^U(x_2)\cong B^1$ מודבקת ל־B^1, $W^U(x_1)\cong B^1$, מה שהורס את המבנה של הקומפלקס CW. אבל, אם נסובב מעט את הטורוס נקבל כי הזרימה מ־x^2 מפספסת את x^1. אז
$$\partial W^U(x_2)\to\{m\}\cong W^U(m)\cong B^0$$
ונקבל שהשפה של $W^U(x_2)\cong B^1$ מודבקת ל־B^0, מה שמסתדר עם המבנה של הקומפלקס. ראו איור 1.21.

במקרה זה הבעיה הייתה שקווי הזרימה מ־x_2 הגיעו לנקודה עם אינדקס לא מתאים. אם γ קו גרדיאנט שמחבר בין x_2,x_1 אז $\mu(x_1)=\mu(x_2)$. אז לכל $x\in\gamma$ מתקיים
$$x\in W^U(x_2)\cap W^S(x_1).$$
כלומר,
$$\gamma\subseteq W^U(x_2)\cap W^S(x_1).$$
מתקיים $W^U(x_2), W^S(q)\cong B^1$ והיינו מצפים שהחיתוך של שני כדורים 1־מימדיים יהיה 0־מימדי. כדי לפתור זאת, נרצה שהחיתוך בין התת־יריעות יהיה טרנסוורסלי.

כאשר נדרוש $W^U(p) \pitchfork W^S(q)$ לכל $p, q \in \mathrm{Crit}(F)$, נקבל כי $W^U(p) \cap W^S(q)$ תת־יריעה. אז מתקיים

$$\dim\left(W^U(p) \cap W^S(q)\right) = (\mu(p) + n - \mu(q)) - n = \mu(p) - \mu(q).$$

אם $W^U(p) \cap W^S(q) \neq \varnothing$ נקבל כי $\dim\left(W^U(p) \cap W^S(q)\right) \geq 1$, כי יש קו זרימה בפנים. אז

$$\mu(p) \geq \mu(q) + 1.$$

נקבל מכך כי μ קטן ממש בין קצוות של קו זרימה.

1.6 קומפלקסי CW ותנאי Morse-Smale

הגדרה 1.6.1. תהי F פונקציית מורס ותהי g מטריקה רימנית. הזוג (F, g) נקרא Morse-Smale אם $W^U(p) \pitchfork W^S(q)$ לכל $p, q \in \mathrm{Crit}(M)$.

מסקנה 1.6.2. 1. אם $W^U(p) \cap W^S(q)$ (או באופן שקול, אם יש עקום בחיתוך) אז $\mu(p) > \mu(q)$.

2. כדי שיהיה מבנה של קומפלקס CW על M, נסתכל על $x \in \partial W^U(p)$. אז יש $q \in M$ עבורה $x \in W^U(q)$. נדרוש במקרה זה $\mu(q) < \mu(p)$.

טענה 1.6.3. אם במקרה הנ"ל גם $q \in \overline{W^U(p)}$ אז גם

$$W^U(q) \subseteq \overline{W^U(p)}$$

וקו הזרימה $\gamma\colon p \to q$ מוכל ב־$W^U(p) \cap W^S(q)$. בתנאי Morse-Smale גם מתקיים $\mu(q) < \mu(p)$ ואז מתקבל מבנה של קומפלקס CW.

הערה 1.6.4. התאים בקומפלקס ה־CW הם $W^U(p)$ עבור $p \in \mathrm{Crit}(F)$. נקבל כי

$$\dim H_*(\text{CW-complex}) \leq \#\{\text{cells}\} = \#\mathrm{Crit}(F).$$

נראה זאת בדרך נוספת כאשר נדון בהומולוגיית מורס.

הערה 1.6.5. הפירוק $M = \coprod W^U(p)$ קרוב מאוד לבנייה של M (עד כדי שקילות הומוטופית) תוך הנקודות הקריטיות, שראינו בתחילת הקורס.

הגדרה 1.6.6 (קבוצה גנרית). יהי X מרחב טופולוגי. קבוצה $A \subseteq X$ נקראת גנרית אם היא מכילה חיתוך בן־מנייה של קבוצות פתוחות וצפופות.

הגדרה 1.6.7 (מרחב Baire). מרחב טופולוגי נקרא Baire אם כל קבוצה גנרית בו היא צפופה.

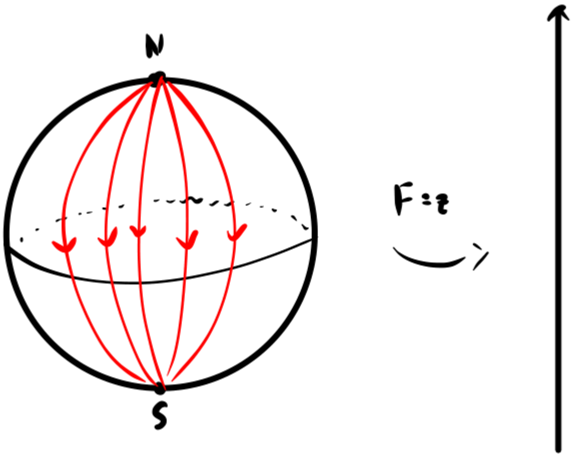
משפט 1.6.8 (Kupka-Smale). זוגות Morse-Smale מהווים קבוצה גנרית במרחב $C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathrm{RM}(M)$ כאשר $\mathrm{RM}(M)$ מרחב המטריקות הרימניות על M.

הערה 1.6.9. למשפט הנ"ל מספר גרסאות אחרות.

1. תהי g מטריקה רימנית על M. פונקציות מורס F עבורן (F, g) זוג Morse-Smale הן קבוצה גנרית ב־$C^\infty(M, \mathbb{R})$.
2. תהי F פונקציית מורס. אזי
$$\{g \mid (F, g) \text{ Morse-Smale is }\}$$
קבוצה גנרית ב־$\mathrm{RM}(M)$.
3. תהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ פונקציית מורס ותהיינה $\{U_p\}_{p \in \mathrm{Crit}(F)}$ סביבות זרות של הנקודות הקריטיות, עם מטריקות רימניות g_p. אז
$$\left\{g \,\middle|\, \substack{(F,g)\text{Morse-Smale is} \\ g|_{U_p} = g_p}\right\}$$
קבוצה גנרית ב־
$$\left\{g \,\middle|\, g|_{U_p} = g_p\right\}.$$

סימון 1.6.10. עבור $p, q \in \mathrm{Crit}(F)$ נסמן

$$\mu(p, q) := W^U(p) \cap W^S(q) = \left\{x \in M \,\middle|\, \substack{\lim_{t\to-\infty} \varphi^t(x) = p \\ \lim_{t\to+\infty} \varphi^t(x) = q}\right\}.$$



איור 1.22: שיכון סטנדרטי של הספירה.

הערה 1.6.11. בתנאי Morse-Smale, $\mu(p,q)$ תת־יריעה ממימד $\mu(p)-\mu(q)\geq 1$ (כאשר החיתוך לא ריק ועבור $p\neq q$).

הערה 1.6.12. $\mathbb{R}$ פועלת על $\mu(p,q)$ לפי

$$t\cdot x=\varphi^{t}(x).$$

מסלולי הפעולה הם קווי הזרימה.
נסמן

$$\hat{\mu}(p,q):=\mu(p,q)\big/\mathbb{R}$$

וזאת קבוצת קווי הזרימה בין p,q.

תרגיל 4. על $\hat{\mu}(p,q)$ יש מבנה טבעי של יריעה.

פתרון. **דרך 1:** $\mathbb{R}$ פועלת חופשית על $\mu(p,q)$ לכן מתורת חבורות לי מקבלים כי המנה $\hat{\mu}(p,q)$ היא יריעה.

דרך 2: נבחר $c\in(F(q),F(p))$ ערך רגולרי. אז $\mu(p,q)\cap F^{-1}(c)$ תת־יריעה ממימד $\mu(p,q)-1$. כיוון שהזרימה מונוטונית יורדת נקבל התאמה 1:1

$$\hat{\mu}(p,q)\leftrightarrow\mu(p,q)\cap F^{-1}(c).$$

זאת משרה מבנה של יריעה על $\hat{\mu}(p,q)$. בדקו כי מבנה זה אינו תלוי (עד כדי דיפאומורפיזם) בערך c.

תרגיל 5. 1. מתקיים

$$\dim\hat{\mu}(p,q)=\dim\mu(p,q)\overset{\text{M.S}}{\mu}(p)-\mu(q)-1.$$

2. אם $\hat{\mu}(p,q)$ ממימד 0, ומתקיים תנאי Morse-Smale, אז $\hat{\mu}(p,q)$ קבוצה סופית.

דוגמה 1.6.13. נסתכל על הספירה עם פונקציית הגובה. ראו איור 1.22.
אז $\mu(N,S)=S^{n}\setminus\{N,S\}$. מתקיים

$$\dim\mu(N,S)=n=\underbrace{\mu(N)}_{=n}-\underbrace{\mu(S)}_{=0}.$$

לפי ההתאמה שראינו, אפשר לזהות את $\mu(N,S)$ עם קו־גובה של $\mu(S,N)$. אז $\hat{\mu}(N,S)\cong S^{n-1}$ קו המשווה, והמימד הוא $\mu(N)-\mu(S)-1$.

דוגמה 1.6.14. נעיין באיור 1.19. מתקיים

$$\dim\mu(M_2,x)=1$$
$$\dim\mu(M_1,x)=1$$
$$\dim\mu(x,m)=1$$

כאשר בשתי הקבוצות הראשונות קו זרימה יחיד ובשלישית שניים. אז $\hat{\mu}(x,m)=\{\gamma_1,\gamma_2\}$ במקרה השלישי. מתקיים גם כי $\mu(M_2,m)$ החצי הימני של הספירה, שהינו ממימד 2. אז $\hat{\mu}(M_2,m)$ קטע פתוח, לפי הסתכלות על קו גובה, וזה ממימד 1.

דוגמה 1.6.15. באיור 1.20 $\mu(x_2,x_1)$ איחוד שני קטעים פתוחים, והינו ממימד 1. זה לא שווה ל־$\mu(x_2)-\mu(x_1)$, כיוון שלא מתקיים תנאי Morse-Smale.

1.6.1 הומולוגיית מורס

סימון 1.6.16. נסמן ב־$\mathrm{Crit}_k(F)$ את הנקודות הקריטיות מאינדקס k של F.

הגדרה 1.6.17 (קומפלקס מורס). תהי M יריעה עם זוג Morse-Smale (F, g).

1. נגדיר
$$C_k := C_k(F) = \mathbb{Z}_2 \langle \mathrm{Crit}_k(F) \rangle.$$

2. נגדיר
$$\partial_k \colon C_k \to C_{k-1}$$
על יוצרים באופן הבא. עבור $p \in \mathrm{Crit}_k(F)$ נגדיר
$$\partial_k(p) = \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{k-1}(F)} n_2(p, q) \cdot q$$
עבור
$$n_2(p, q) = \#\hat{\mu}(p, q) \pmod 2$$
מספר קווי הגרדינט בין p, q מודולו 2.

משפט 1.6.18. עבור יריעה M ממימד n הסדרה
$$0 \to C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$
מקיימת $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 \colon C_k \to C_{k-2}$ לכל k.

לאור משפט זה, ניתן להגדיר הומולוגיה באופן הבא.

הגדרה 1.6.19 (הומולוגיית מורס). נגדיר את ההומולוגיה ה־k־ית של M לפי (F, g) על ידי
$$H_k(F, g; \mathbb{Z}_2) := \ker(\partial_k) \big/ \mathrm{Im}(\partial_{k+1}).$$

הגדרה 1.6.20. נגדיר
$$H_*(F, g; \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{i=0}^{n} H_k(F, g; \mathbb{Z}_2).$$

דוגמה 1.6.21. באיור 1.22 נסתכל על g המטריקה האוקלידית. אז $\mu(N) = n, \mu(S) = 0$. מתקיים לכן
$$C_n = \mathbb{Z}_2 \langle N \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$
$$\forall 0 < k < n \colon C_k = 0$$
$$C_0 = \mathbb{Z}_2 \langle S \rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$
אם $n \geq 2$ נקבל $\partial_k = 0$ לכל k ואז
$$C_k = H_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k \in \{0, n\} \\ 0 & k \notin \{0, n\} \end{cases}.$$
אם $n = 1$ נקבל
$$0 \to C_1 \to C_0 \to 0$$
כאשר $C_0, C_1 \cong \mathbb{Z}_2$. אז
$$\partial_1(N) = n_2(N, S) \cdot S$$
כאשר
$$n_2(N, S) = \#\hat{\mu}(N, S) = 2 \equiv 0 \pmod 2.$$
אז $\partial_1 = 0$ וגם כאן
$$H_k = C_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k \in \{0, 1\} \\ 0 & k \notin \{0, 1\} \end{cases}.$$

דוגמה 1.6.22. נעיין באיור 1.19. כאן

$$C_2 = \mathbb{Z}_2 \langle M_1, M_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2^2$$
$$C_1 \cong \mathbb{Z}_{\yen}$$
$$.C_0 \cong \mathbb{Z}_2$$

מתקיים

$$\partial_2 (M_1) = n_2 (M, x) \cdot x = x$$

כי יש מסלול יחיד מ־M_2 ל־x. באותו אופן, $\partial_1 (M_2) = x$. מתקיים $\partial_1 (x) = 2 \cdot m = 0$ כי יש שני מסלולים מ־x ל־m.
כעת,

$$\begin{aligned} H_2 &= {}^{\ker \partial_2}\big/_{\operatorname{Im} \partial_3} \\ &= \ker \partial_2 \\ &= \{0, M_1 + M_2\} \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

לפי אלגברה לינארית. גם

$$\begin{aligned} H_1 &= {}^{\ker \partial_1}\big/_{\operatorname{Im} \partial_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

כי

$$.\ker \partial_1 \supseteq \operatorname{Im} \partial_2 = c_1 \supseteq \ker \partial_1$$

לבסוף,

$$.H_0 = {}^{\ker \partial_0}\big/_{\operatorname{Im} \partial_1} \cong C_0 \cong \mathbb{Z}_2$$

לסיכום,

$$.H_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k = 2 \\ 0 & k = 1 \\ \mathbb{Z}_2 & k = 0 \end{cases}$$

נשים ♥ שזה גם מה שקיבלנו בספירה לפי המטריקה האוקלידית, ואכן ההומולוגיה אינה תלויה בבחירת המטריקה הרימנית.

דוגמה 1.6.23. באיור 1.23 נשים לב כי כל קוי הזרימה באים בזוגות. לכן $n_2 = 0$ ולכן $\hat{\mu} (x, y) = 0$ לכל x, y. אז $\partial_* = 0$ ונקבל כי

$$.H_k = C_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k = 2 \\ \mathbb{Z}_2^2 & k = 1 \\ \mathbb{Z}_2 & k = 0 \end{cases}$$

דוגמה 1.6.24. בדוגמא האחרונה קווי הזרימה נהיים די מסובכים. אפשר במקרה זה לחשב את ההומולוגיה בדרך אחרת. נכתוב $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$ ותהי

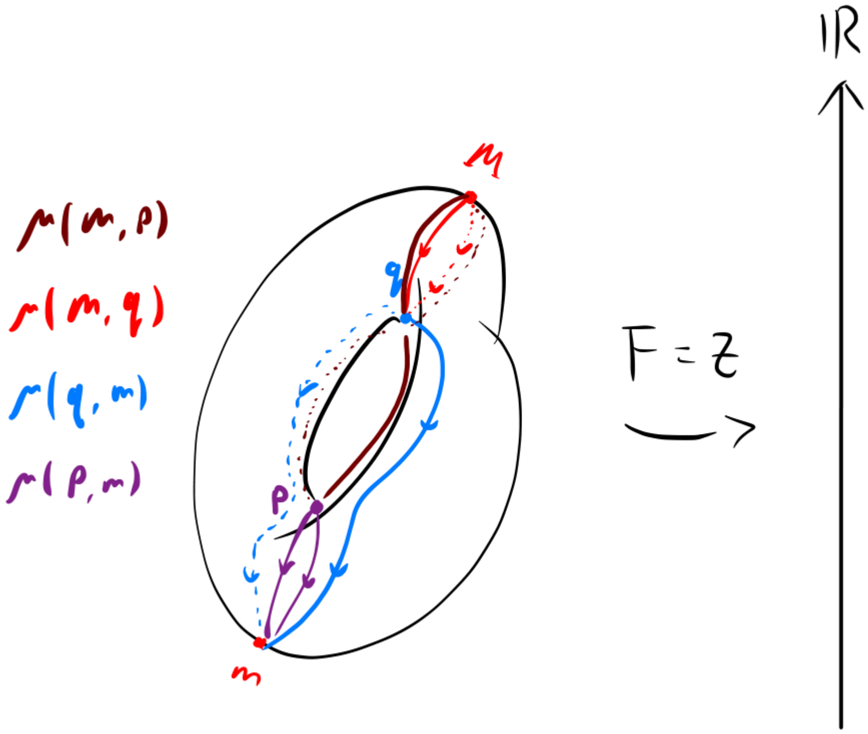
$$\begin{aligned} F &: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto f (x) + f (y) \end{aligned}$$

כאשר $f : S^1 \to \mathbb{R}$ פונקציית גובה עם השיכון של S^1 ב־$\mathbb{R}^2$ כבאיור 1.24 ניתן לראות שמתקיים

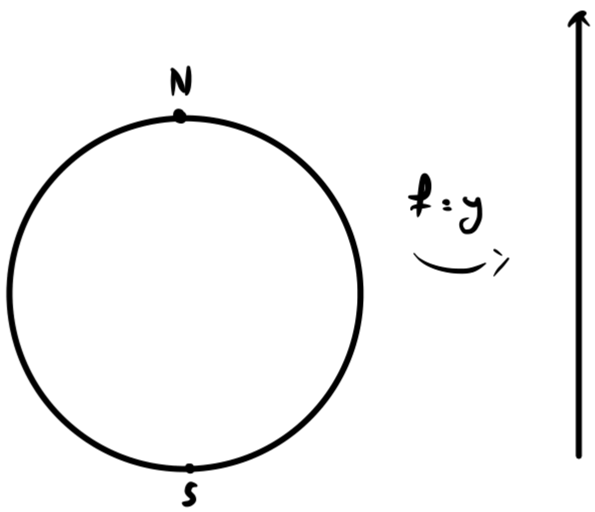
$$.\operatorname{Crit} (F) = \operatorname{Crit} (f) \times \operatorname{Crit} (f) = \{(N, N), (S, S), (N, S), (S, N)\}$$

מתקיים

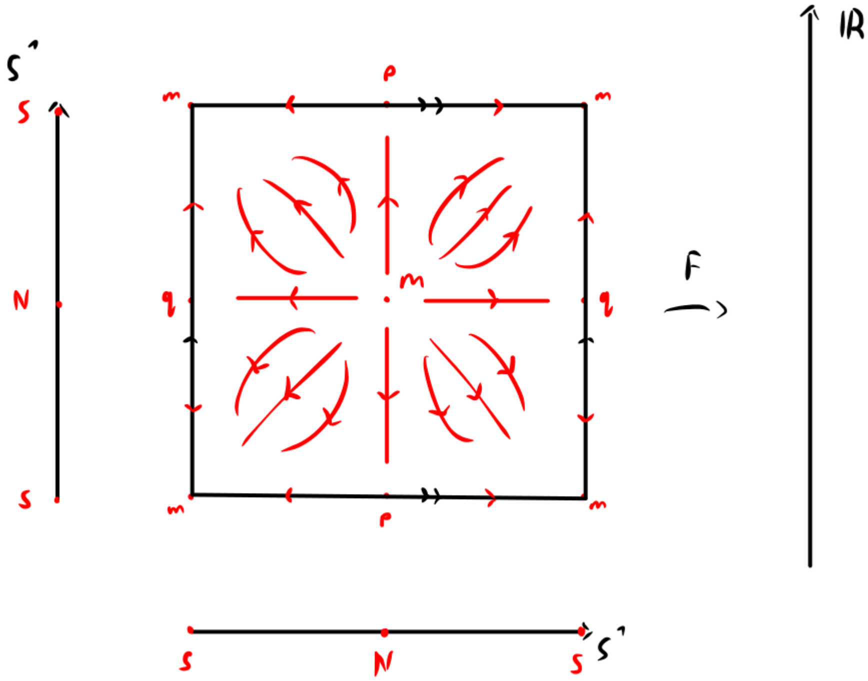
$$\mu ((N, N)) = 2$$
$$\mu ((S, S)) = 0$$
$$.\mu ((N, S)) = \mu ((S, N)) = 1$$



איור 1.23: שיכון של הטורוס בזווית.



איור 1.24: שיכון סטנדרטי של S^1 ב־$\mathbb{R}^2$.



איור 1.25: קווי זרימה על הטורוס.

נוכל לאייר את קווי הזרימה על ההצגה הסטנדרטית של הטורוס. ראו איור 1.25. בו קווי הזרימה מתוארים באדום. ניתן גם כאן לראות כי כל קווי הזרימה מגיעים הזוגות, ולכן $\partial_* = 0$ ונקבל

$$H_k = C_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k = 2 \\ \mathbb{Z}_2^2 & k = 1 \\ \mathbb{Z}_2 & k = 2 \end{cases}.$$

במקרה הזה קל יותר לבדוק כי הזוג (F, g) הוא Morse-Smale. כדי לראות זאת, נזיז את הנקודות באיור ונציג את הטורוס כבאיור 1.26 תחת פרטורבציה קטנה, קווי הזרימה שאנו סופרים מגיעים לאותם מקומות. אז עדיין $\partial_* = 0$ ונקבל את אותן הומולוגיות. אז יתקיים תנאי Morse-Smale ואכן ניתן לחשב את ההומולוגיה.

דוגמה 1.6.25. נסתכל על משטח Σ_g מגנוס g כמתואר באיור 1.27 וכאשר נחשוב על המצולע היסודי כמצולע היפרבולי. נגדיר פונקציה

$$F\colon \Sigma_g \to \mathbb{R}$$

עם נקודת מינימום m, נקודת מקסימום M ונקודות אוכף x_i, y_i על ידי כך שנגדיר את הפונקציה בסביבת כל x_i, y_i ונדביק הכל בעזרת פיצול יחידה. מתקיים

$$\begin{aligned} C_2 &= \mathbb{Z}_2 \langle M \rangle \\ C_1 &= \mathbb{Z}_2 \left\langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g \right\rangle \\ C_0 &= \mathbb{Z}_2 \langle m \rangle \end{aligned}$$

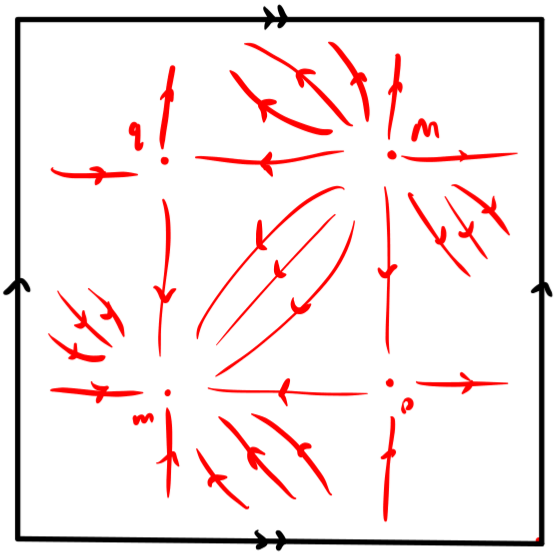
וגם $\partial M = 0$, לכן $\partial x_i, \partial y_i = 0$ ונקבל כי $\partial = 0$. אז

$$H_k = C_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k \in \{0, 2\} \\ \mathbb{Z}_2^{2g} & k = 1 \end{cases}.$$

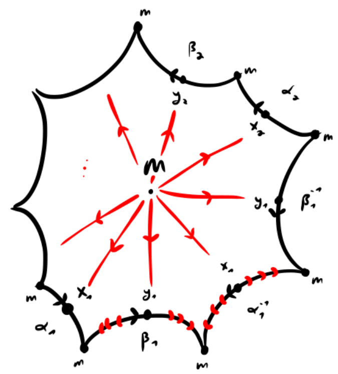
תרגיל 6. חשבו את ההומולוגיה בעזרת פונקציית גובה של שיכון $\iota\colon \Sigma_g \to \mathbb{R}^g$.

תרגיל 7. נסתכל על $\mathbb{CP}^n$ ונגדיר פונקציה

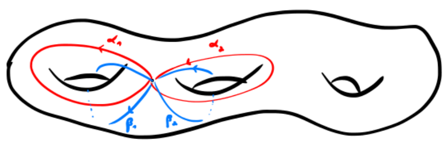
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{CP}^n &\to \mathbb{R} \\ [z_0 : \ldots : z_n] &\mapsto \frac{\sum_{j=0}^n j \left|z_j\right|^2}{\sum_{i=0}^n \left|z_j\right|^2} \end{aligned}.$$



איור 1.26: קווי זרימה על הטורוס.



(א) קווי זרימה על התחום היסודי של משטח מגנוס g.



(ב) משטח מגנוס g.

איור 1.27

בדקו כי f פונקציית מורס וכי

$$\mathrm{Crit}_{\mu}(F) = \begin{cases} [1:0:\ldots:0] & \mu = 0 \\ [0:1:0:\ldots:0] & \mu = 2 \\ \vdots & \\ [0:\ldots:0:1] & \mu = 2n \end{cases}.$$

הסיקו כי $\partial = 0$ וכי אז

$$H_k = C_k = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k \in \{0, 2, \ldots, 2n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

תרגיל 8. הגדרנו

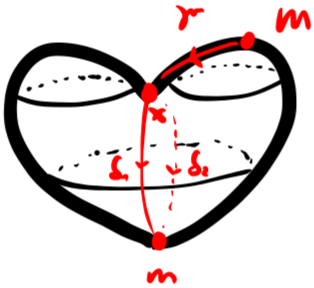
$$H_k(F, g) = {\ker \partial_k}\big/{\mathrm{Im}\, \partial_{k+1}}$$

ומתקיים

$$\ker \partial_k \leq C_k(F, g) = \mathbb{Z}_2 \langle \mathrm{Crit_k} \rangle$$

לכן

$$\dim H_k(F, g) \leq \dim C_k(F, g) = \#\mathrm{Crit}_k(F).$$



איור 1.28: טרקטוריות על הספירה.

בפרט,

$$\#\text{Crit}(F) \geq \dim H_*(M).$$

ניתן לקבל מכך למשל כי על $\mathbb{T}^2$ לכל פונקציית מורס יש לפחות 4 נקודות קריטיות ולפחות 2 נקודות אוכף.

תרגיל 9. בנו

$$f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$$

חלקה עם 3 נקודות קריטיות בלבד.

טענה 1.6.26. מתקיים $\partial \circ \partial = 0$.

נתחיל בהסבר אינטואיטיבי לכך שמתקיים ∂^2. נסתכל על $p \in \text{Crit}_k(F)$ ונרצה להראות שמתקיים $\partial_{k-1} \circ \partial_k(p) = 0$. מתקיים

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1} \circ \partial_k(p) &= \partial_{k-1}\left(\sum_{z \in \text{Crit}_{k-1}(F)} n_2(p,z) \cdot z\right) \\
&= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-1}} n - 2(p,z)\, \partial_{k-1}(z) \\
&= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-1}} n_2(p,z) \cdot \left(\sum_{q \in \text{Crit}_{k-2}} n_2(z,q) \cdot q\right) \\
&= \sum_{\substack{z \in \text{Crit}_{k-1} \\ q \in \text{Crit}_{k-2}}} n_2(p,z) \cdot n_2(z,q) \cdot q
\end{aligned}$$

ולכן די להראות שמתקיים

$$\sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}} n_2(p,z) \cdot n_2(z,q)$$

לכל $q \in \text{Crit}_{k-2}$. המספר $n_2(p,z) \cdot n_2(z,q)$ הוא מספר זוגות המסלולים שמתחילים ב־p, עוצרים ב־z וממשיכים ל־q. זוג כזה טרקטוריה שבורה broken gradient trajectory.

דוגמה 1.6.27. באיור 1.28 מתקיים

$$n_2(M,x) \cdot n_2(x,m) = \#\{\delta_1 * \gamma, \delta_2 * \gamma\} = 2 \equiv 0 \pmod 2.$$

נסביר למה זה קורה. נחתוך את הלב לשניים ונסתכל על החצי הימני שלו כמתואר באיור 1.29. כעת,

$$\dim \mu(M,m) = \mu(M) - \mu(m) = 2 \dim \hat{\mu}(M,m) = 1$$

וניתן לראות כי

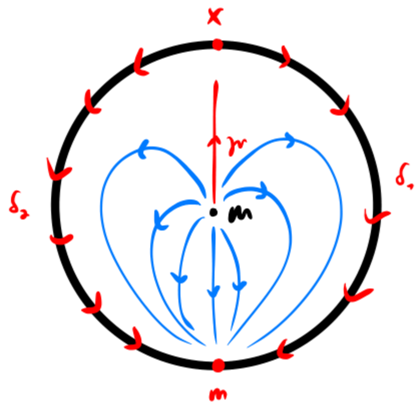
$$\hat{\mu}(M,m) \cong (0,1).$$

בשפה של $\hat{\mu}$ רואים את $\gamma \cup \delta_i$ בשני הקצוות.

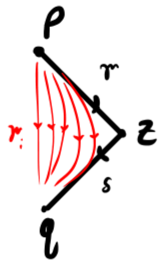
דוגמה 1.6.28. נסתכל באיור 1.25. מתקיים

$$\partial(\hat{\mu}(M,m)) = \partial^2(M) = 8 \cdot m \equiv 0 \pmod 2$$

כאשר $\hat{\mu}(M,m)$ דיפאומורפי לאיחוד של 4 קטעים פתוחים.
נראה בהמשך שיש התאמה בין טרקטוריות שבורות לבין נקודות שפה של $\hat{\mu}(p,q)$, ונקבל מכך ש־$n_2(p,z) \cdot n_2(z,q)$ זוגי.



איור 1.29: קווי זרימה על חצי ספירה.



איור 1.30: טרקטוריות שמתכנסות לשתי מסילות שונות.

קומפקטיפיקציה של $\hat{\mu}(p,q)$

הגדרה 1.6.29 (טופולוגיה על קווי זרימה). תהי $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ סדרה של קווי זרימה $\gamma_i\colon\mathbb{R}\to M$ עם

$$\frac{\partial}{\partial s}\gamma_i=\nabla F(\gamma_i(s)).$$

נגיד ש־$\gamma_i\to\gamma$ אם $\gamma_i\to\gamma$ במידה שווה על קבוצות קומפקטיות. כלומר, אם $K\subseteq R$ קומפקטית אז

$$\gamma_i|_K\xrightarrow{C^\ell}\gamma|_K$$

במידה שווה, לכל $\ell\geq 0$ (אבל לאו דווקא עבור $\ell=\infty$).

תרגיל 10. יש דיפאומורפיזם בין $\mu(p,q)$ למרחב הטרקטוריות מ־p ל־q. אם $\gamma_i,\gamma\in M(p,q)$, ההתכנסות $\gamma_i\to\gamma$ שקולה להתכנסות בטופולוגיה שהגדרנו על $\mu(p,q)$.

הערה 1.6.30. ההתכנסות במידה שווה על קבוצות קומפקטיות היא בעלת משמעות גם כאשר נקודות הקצה של γ שונות מאלה של γ_i. זה נכון כיוון שאנו מסתכלים על מסילות עם פרמטריזציה. למשל, באיור 1.30 המסילות γ_i יכולות להתכנס ל־γ או δ, תלוי בפרמטריזציה.
לשם כך, נגדיר התכנסות שאינה תלויה בפרמטריזציה. אז המסילות γ_i יתכנסו גם ל־γ וגם ל־δ.

הגדרה 1.6.31 (מסילה בלי פרמטריזציה). ניזכר כי

$$\hat{\mu}(p,q)=\mu(p,q)/\mathbb{R}.$$

עבור מסילה $\gamma\colon M\to\mathbb{R}$ נסתכל על מחלקת השקילות $\gamma/\mathbb{R}=\hat{\gamma}\in\hat{\mu}$ ונקרא לה מסילה בלי פרמטריזציה.

הערה 1.6.32. מסילה בלי פרמטריזציה הינה תלויה בפרמטריזציה, אך לא בבחירת הזמן $t=0$.

הגדרה 1.6.33 (התכנסות של מסילות בלי פרמטריזציה). עבור מסילות γ_i, γ, נגיד שיש התכנסות של מסילות בלי פרמטריזציה $\hat{\gamma}_i \to \hat{\gamma}$ אם קיימות הזזות $s_i, s_0 \in \mathbb{R}$ עבורן

$$\gamma_i(\cdot - s_i) \to \gamma(\cdot - s_0)$$

במידה שווה על קבוצות קומפקטיות.

הערה 1.6.34. מרחב המסילות בלי פרמטריזציה, עם ההתכנסות שהגדרנו, אינו האוסדורף, כפי שתיארנו בהערה הקודמת.

הערה 1.6.35. ראינו דרך נוספת להגדיר טופולוגיה על $\hat{\mu}(p,q)$, בעזרת חתך על קו גובה. אם נרחיב טופולוגיה זאת ל־$\overline{\hat{\mu}(p,q)} \cap F^{-1}(c)$, נקבל $\hat{\gamma}_i \to \hat{\gamma}$ או אם נבחר קו גובה אחר c' נקבל $\hat{\gamma}_i \to \hat{\delta}$.

הגדרה 1.6.36 (טרקטוריה שבורה broken trajectory). טרקטוריה שבורה בין נקודות $x, y \in \mathrm{Crit}(F)$ היא סדרה של מסלולים

$$(\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_k) \in \hat{\mu}(z_0 = x, z_1) \times \hat{\mu}(z_1, z_2) \times \ldots \times \hat{\mu}(z_{k-1}, z_k = y)$$

עבור

$$k \geq 2$$

ונקודות קריטיות z_i.

הגדרה 1.6.37. נגדיר

$$\bar{\mu}(p,q) := \hat{\mu}(p,q) \coprod_{z \in \mathrm{Crit}(F)} (\hat{\mu}(p,z) \times \hat{\mu}(z,q)) \coprod_{z_1, z_2 \in \mathrm{Crit}(F)} \hat{\mu}(p,z_1) \times \hat{\mu}(z_1,z_2) \times \hat{\mu}(z_2,q) \coprod \ldots$$

זה איחוד $\hat{\mu}(p,q)$ עם הטרקטריות השבורות בין p, q.

הערה 1.6.38. בתנאי Morse-Smale מתקיים

$$\mu(p) > \mu(z_1) > \mu(z_2) > \ldots > \mu(q).$$

אז יתכנו לכל היותר $\mu(p) - \mu(q) - 1$ נקודות שבירה.

הערה 1.6.39. $\bar{\mu}(p,q)$ נותנת קומפקטיפיקציה של $\hat{\mu}(p,q)$. זאת יריעה עם פינות. מתקיים,

$$\dim\left(\coprod_{z \in \mathrm{Crit}(F)} (\hat{\mu}(p,z))\right) = \mu(p) - \mu(z) - 1 + \mu(z) - \mu(q) - 1 = \mu(p) - \mu(q) - 2$$

ובאופן כללי כל נקודה שבירה שנוסיף תפחית את המימד ב־1.

הגדרה 1.6.40 (התכנסות). תהי $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \hat{\mu}(p,q)$. נאמר שהיא מתכנסת ב־$\bar{\mu}(p,q)$ אם

$$\hat{\gamma}_i \to \hat{\gamma} \in \hat{\mu}(p,q)$$

במידה שווה על קבוצות קומפקטיות או שקיימת טרקטוריה שבורה $\left(\hat{\delta}_1, \ldots, \hat{\delta}_k\right)$ מ־p ל־q עבורה

$$\forall j \in [k] : \hat{\gamma}_i \to \hat{\delta}_j.$$

משפט 1.6.41. $\bar{\mu}(p,q)$ קומפקטי סדרתית.

מסקנה 1.6.42. $\bar{\mu}(p,q)$ מטריזבילי, לכן מהמשפט גם קומפקטי.

הוכחה למשפט נמצאת במאמר A Functional Analytic Approacht to Morse Homology, של U. Foodar שמסתמכת על Homology Morse של M.Shwarrz.
נציג את ראשי הפרקים של ההוכחה.

הוכחה. 1. נבחר סדרה $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mu(p,q)$. אז קיימת תת־סדרה $\gamma_{n_k} \to v \in C^\infty(\mathbb{R}, M)$, כפי שנובע ממשפט Arzela-Ascoly.

2. נבחר סדרה $\hat{\gamma}_i \in \hat{\mu}(p,q)$. נראה שיש תת־סדרה מתכנסת ל־$\hat{\delta} \in \bar{\mu}(p,q)$. נבחר פרמטריזציה כלשהי ונקבל מהסעיף הקודם סדרה $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mu(p,q)$ עבורה

$$\gamma_i \to v \in C^\infty(\mathbb{R}, M).$$

אם $v \in \mu(p,q)$, סיימנו.

אחרת, ממשפט Arzela-Ascoly יש התכנסות $\gamma_i \to v$ בטופולוגיה C^ℓ, במידה שווה על קבוצות קומפקטיות. אז $\gamma_i'(s) \to v'(s)$ ולכן

$$v'(s) = -DF(v(s)).$$

נקבל כי v הוא קו זרימה. כמו כן, $\gamma_i(s) \to v(s)$ ולכן $F(z) \leq v(s) \leq F(p)$, לכל $s \in \mathbb{R}$. כעת, $F(v(s))$ מונוטונית יורדת, כי v קו זרימה, ולכן

$$\lim_{s\to\pm\infty} v'(s) \to 0.$$

נקבל כי

$$\lim_{s\to\pm\infty} v(s) \in \mathrm{Crit}(F)$$

ואז $v \in \mu(w,z)$. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $z \neq q$. נבחר $c \in (F(q), F(z))$, ואז לכל γ_i קיים זמן s_i עבורו $F(\gamma_i(s_i)) = c$. נגדיר

$$\gamma_i^1(\cdot) = \gamma_i(\cdot + s_i).$$

לפי השלב הקודם, נקבל תת־סדרה

$$\gamma_i^1 \to v^1 \in C^\infty(\mathbb{R}, M).$$

לפי רציפות,

$$F\left(v^1(0)\right) = \lim_{i\to\infty} F\left(\gamma_i^1(0)\right) = c.$$

נטען כי $F(v(s)) > F\left(v^1\left(s^1\right)\right)$ לכל $s, s^1 \in \mathbb{R}$. אחרת,

$$F(v(s)) = F\left(v^1\left(s^1\right)\right)$$

אבל אז

$$v(s) = \lim \gamma_i(s)$$
$$v^1\left(s^1\right) = \lim_{i\to\infty} \gamma_i^1\left(s^1\right) = \lim_{i\to\infty} \gamma_i\left(s^1 + s^i\right)$$

גורר כי

$$\lim_{i\to\infty} F(\gamma_i(s)) = \lim_{i\to\infty} F\left(\gamma_i\left(s^1 + s^i\right)\right)$$

ואז $v(s) = v^1\left(s^1\right)$. נקבל כי v, v^1 שני קווי זרימה שעוברים דרך אותה נקודה, בסתירה.

אם

$$\overline{F(v \cup c^1)} = [F(q), F(p)],$$

סיימנו. אחרת נמשיך בתהליך, שיעצור אחרי מספר סופי של צעדים כי יש מספר סופי של נקודות קריטיות. נקבל תת־סדרה $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ עבורה

$$\hat{\gamma}_i \to \left(\hat{v}^0, \hat{v}^1, \ldots, \hat{v}^k\right).$$

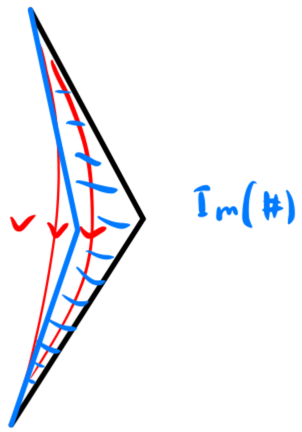
אם נסדר את $\left(\hat{v}, \ldots, \hat{v}^k\right)$ לפי גובה נקבל

$$\hat{v}^i \in \mu(w_i, z_i)$$
$$F(p) = F(w_0)$$
$$F(w_1) = F(z_0)$$
$$F(w_2) = F(z_1)$$
$$\vdots$$
$$F(w_k) = F(z_{k-1})$$
$$F(z_k) = F(q).$$

נרצה להראות שהקצוות של ה־v_i מתאימים. אכן,

$$\lim_{s\to\infty} v_j(s) = \lim \gamma_i(s_i) = \lim_{s\to-\infty} v_{j+1}(s)$$

ולכן v_j, v_{j+1} מתחברות. אז מתקבלת טרקטוריה שבורה. לכן, לכל סדרה $\hat{\gamma}_i \in \hat{\mu}(p,q)$ קיימת תת־סדרה עם גבול ב־$\bar{\mu}$.



איור 1.31: התמונה של # מכילה סביבה של הטרקטוריה השבורה.

3. אם יש סדרה שמורכבת מטרקטוריות שבורות, ניתן לעבור לתת־סדרה בה כל מסלול נשבר בדיוק באותן נקודות קריטיות. על ידי הפעלת השלב הקודם לכל אחד מהרכיבים מקבלים תת־סדרה שמתכנסת בכל רכיב, ואז תת־סדרה שמתכנסת בכל הרכיבים. לכן $\bar{\mu}$ קומפקטי סדרתית. ■

משפט 1.6.43 (הדבקה). עבור מכפלה $\hat{\mu}(p,z)\times\hat{\mu}(z,q)$, קיים $\rho>0$ ושיכון חלק

$$\#:\hat{\mu}(p,z)\times\hat{\mu}(z,q)\times[\rho,\infty)\to\hat{\mu}(p,q)$$

עבורו

(i)

$$\#(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\rho)\xrightarrow{\rho\to\infty}(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2)$$

(ii) כל סדרה $(\hat{\gamma}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ עבורה

$$\hat{\gamma}_i\to(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2)\in\hat{\mu}(p,z)\times\hat{\mu}(z,q)$$

נמצאת בתמונה של # החל ממקום מסוים.

הערה 1.6.44. התנאי השני במשפט שקול לכך ש־$\mathrm{Im}(\#)$ סביבה פתוחה של $\hat{\mu}(p,z)\times\hat{\mu}(z,q)$ ב־$\hat{\mu}(p,q)$. כלומר, $\mathrm{Im}(\#)$ כוללת את כל המסלולים שנמצאים מספיק קרוב לטרקטוריות השבורות. ראו איור 1.31.

נציג הוכחה בראשי פרקים.

הוכחה. 1. **קדם־הדבקה:** ניתן לקרב את $\gamma_2*\gamma_1$ על ידי עקום חלק. נקבל משפחה

$$\hat{\delta}_\rho\xrightarrow{\rho\to\infty}(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2).$$

2. יהי

$$\mathcal{F}:=\left\{\delta\in C^\infty(\mathbb{R},M)\;\middle|\;{\scriptstyle\delta(-\infty)=p \atop \delta(+\infty)=q}\right\}$$

וזה מרחב בנך עם תת־יריעה $\mu(p,q)\subseteq\mathbb{F}$. נציין כעובדה את המשפט הבא.

משפט 1.6.45. עבור $\rho g1$ קיימת הטלה יחידה של δ_ρ ל־$\mu(p,q)$.

3. נקבל כי # שיכון.

4. קיימים s_i,t_i עבורם

$$\gamma_i(\cdot-s_i)\to\gamma_1$$
$$\gamma_i(\cdot-t_i)\to\gamma_2.$$

נבצע קדם־הדבקה ונטיל על $\mu(p,q)$, ונקבל מסלול בתמונה של #, שמיחידות חייב להיות $\hat{\gamma}_i$. ■

מסקנה 1.6.46. מקומפקטיות והדבקה, יש התאמה $1:1$ בין מסלולים שבורים ונקודות שפה של $\hat{\mu}(p,q)$.
עבור $\mu(p) = \mu(q) + 2$ מתקיים $\dim \hat{\mu}(p,q) = 1$ ולכן $\hat{\mu}$ אוסף מעגלים וקטעים. נקבל כי

$$\partial \hat{\mu}(p,q) = \coprod_{\mu(z)=\mu(q)+1} \hat{\mu}(p,z) \times \hat{\mu}(z,q)$$

וכי כל מסלול שבור $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$ מופיע רק פעם אחת כנקודת שפה של $\widehat{(p,q)}$. אחרת היינו יכולים לבנות סדרה מתכנסת שאינה בתמונה של #.

מסקנה 1.6.47.

$$\partial^2(x) = \sum_{\substack{\mu(q)+2=\mu(p)\\ \mu(z)+1=\mu(p)}} n_2(p,z) \cdot n_2(z,q) \cdot q \equiv 0 \pmod 2$$

כיוון ש־

$$n_2(p,z) \cdot n_2(z,q) = \#(\hat{\mu}(p,z) \cdot \hat{\mu}(z,q))$$

מספר נקודות קצה של יריעה 1־מימדית.

קיימת גירסא של הדבקה גם עבור מספר נקודות שבירה. יש מפה

$$\#\colon \hat{\mu}(p,z_1) \times \hat{\mu}(z_1,z_2) \times \ldots \times \hat{\mu}(z_k,q) \times [\rho_1,\infty) \times \ldots \times [\rho_{k-1},\infty) \to \hat{\mu}(p,q)$$

כמו מקודם. אפשר לבצע קדם־הדבקה והטלה כמו מקודם, ולקבל על $\hat{\mu}(p,q)$ מבנה של יריעה עם פינות.

1.6.2 חישובי הומולוגיה

תרגיל 11. תהי (F,ρ) זוג Morse-Smale ותהיינה p,z נקודות קריטיות עם $\mu(z) < \mu(p)$ וכאשר $z \in W^U(p)$. אז $W^U(z) \subseteq \partial W^U(p)$.

תרגיל 12. ראינו

$$M = \coprod_{p \in \mathrm{Crit}(F)} W^U(p).$$

נגדיר

$$C_*^{\mathrm{CW}} = \mathbb{Z}_2 \left\langle W^U(p) \right\rangle$$

וגם

$$\partial_*^{\mathrm{CW}}\colon C_*^{\mathrm{CW}} \to C_{*-1}^{\mathrm{CW}}$$

שסופרת את הדרגה של פונקציית ההדבקה. עבור U תא k-מימדי עם הדבקה

$$f\colon \partial U \to U_{k-1}^1 \cup \ldots \cup U_{k-1}^n \cup \{\text{cells lower-dimensional}\}$$

נגדיר

$$\partial_k^{\mathrm{CW}}(U) = \sum_{j \in [n]} \deg_2\left(f, U_{k-1}^j\right) U_{k-1}^j.$$

אז יש איזומורפיזם של קומפלקסים $CM_* \cong C_*^{\mathrm{CW}}$ בין קומפלקס מורס לקומפלקס ה־CW. אז יש איזומורפיזם בין ההומולוגיות המתאימות,

$$HM_* \cong H_*^{\mathrm{CW}} \cong H_*^{\mathrm{sing}}.$$

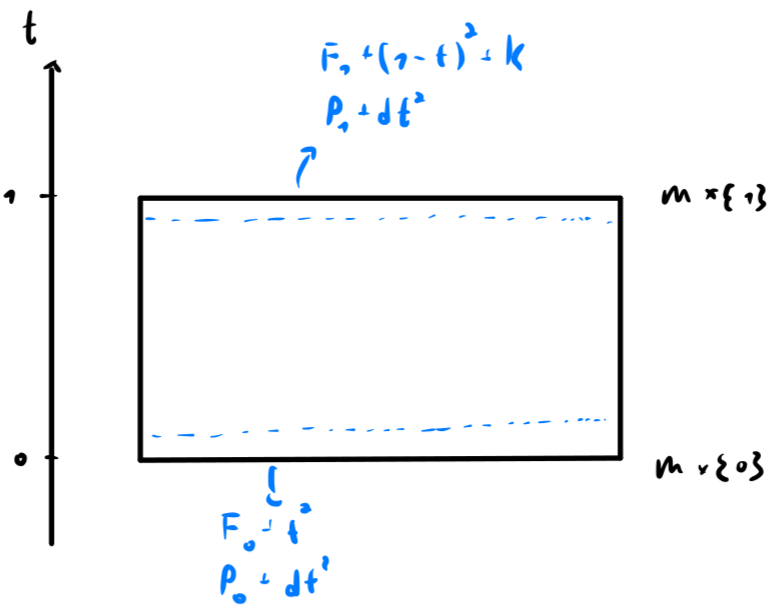
כדי להראות שהומולוגיית מורס אינה תלויה בבחירות. במקרים פרטיים, נקבל זאת מכך שהומולוגיית מורס איזומורפית להומולוגיה אחרת. במקרה הכללי, ולמשל במקרה האינסוף־מימדי, זה לא עובד ויש צורך בהוכחה אחרת.

1.6.3 אי־תלות של $HM_*(F,\rho)$ ב־(F,ρ)

טענה 1.6.48. יהיו $(F_0,\rho_0), (F_1,\rho_1)$ זוגות Morse-Smale על M. קיימת

$$\Phi^{F_1,F_0}\colon CM_*^{F_1} \to CM_*^{F_0}$$

העתקה של קומפלקסים.



איור 1.32

הוכחה. נסתכל על $M\times[0,1]$. נגדיר בסביבה של $M\times\{0\}$ פונקציה F_0+t^2 ומטריקה ρ_0+dt^2, ובסביבה של $M\times\{1\}$ פונקציה $F_1+(1-t)^2$ ומטריקה ρ_1+dt^2. נקבל שאין נקודות קריטיות נוספות בשתי הסביבות האלה. כדי שלא יהיו נקודות קריטיות נוספות באופן גלובלי, נרצה שההומוטופיה תהיה עולה ממש. לשם כך בסביבת $M\times\{1\}$ נגדיר בעצם פונקציה $F_1+(1-t)^2+K$, מה שלא משנה את הזרימה. נקבל פונקציה $\bar{F}(\rho,t)$ עולה ממש עם t, בעזרת אינטרפולציה (למשל, אינטרפולציה ריבועית), ונקבל הרחבה כלשהי ρ של המטריקה הרימנית. על ידי פרטורבציה מתאימה של ρ נקבל זוג Morse-Smale $\left(\bar{F},\bar{\rho}\right)$ על $M\times[0,1]$, שנקרא לו Morse Data. ראו איור 1.32. נקבל

$$\operatorname{Crit}\left(\bar{F}\right)=\operatorname{Crit}(F_0)\times\{0\}\amalg\operatorname{Crit}(F_1)\times\{1\}.$$

כמו כן,

$$\mu((x,0))=\mu(x)$$
$$\mu((y,1))=\mu(y)+1.$$

עבור $y\in\operatorname{Crit}_k(F_1)$ נגדיר

$$\Phi^{F_1,F_0}(y)=\sum_{x\in\operatorname{Crit}_k(F_0)}n_2((y,1),(x,0))\cdot x$$

ונקבל מכך העתקה

$$\Phi^{F_0,F_1}:CM_*(F_1,\rho_1)\to CM_*(F_0,\rho_0)$$

לינארית. נראה שהיא העתקה של קומפלקסים ונקבל מכך גם שהיא משרה העתקה בהומולוגיה. נסתכל על $\bar{\partial}$ דיפרנציאל מורס על $M\times[0,1]$. מתקיים

$$\bar{\partial}((x,0))=\left(\partial^0(x),0\right)$$
$$\bar{\partial}((y_1,1))=\left(\partial^1(y),1\right)+\left(\Phi^{F_1,F_0}(y),0\right)$$

וכמו קודם, $\bar{\partial}^2=0$. אז

$$\begin{aligned}0&=\bar{\partial}^2((y,1))\\&=\bar{\partial}\left(\left(\partial^1(y),1\right)+\left(\Phi^{F_1,F_0}(y),0\right)\right)\\&=\left(\left(\partial^1\right)^2(y),1\right)+\left(\Phi^{F_1,F_0}\left(\partial^1(y)\right),0\right)+\left(\partial^0\left(\Phi^{F_1,F_0}(y)\right),0\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\Phi^{F_1,F_0}\circ\partial^1+\partial^0\circ\Phi^{F_1,F_0}=0$$

וכיוון שאנו עובדים מעל $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ נקבל
$$\Phi^{F_1,F_0}\circ\partial^1=\partial^0\circ\Phi^{F_1,F_0},$$
כנדרש. ■

הערה 1.6.49. קיבלנו זוג Morse-Smale $\left(\bar{F},\bar{\rho}\right)$ על $M\times[0,1]$ וראינו כי $\bar{\partial}^2=0$. אז ניתן לחשב הומולוגיה, אך זאת לא הומולוגיה של יריעה עם שפה.
כדי להגדיר הומולוגיה של יריעה עם שפה אפשר לשים את הנקודות הקריטיות בפנים ולדאוג שהגרדיאנט מצביע החוצה על השפה כדי לחשב הומולוגיה של יריעה עם שפה.

טענה 1.6.50. עבור אינטרפולציה מתאימה, $\Phi^{F_0,F_0}=\mathbb{1}$.

הוכחה. נגדיר $\bar{\rho}=\rho_0+dt^2$ על כל $M\times[0,1]$. בסביבת $M\times\{0\}$ נגדיר F_0+t^2 ובסביבת $M\times\{1\}$ נגדיר $F_0+(1-t)^2+K$.
נבחר $\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ חלקה ומונוטונית עולה עבורה $\varphi(0)=0$ וגם $\varphi(t)=K+(1-t)^2$ עבור t קרוב מספיק ל־1.
אז נגדיר $\bar{F}(x,t)=F_0(x)+\varphi(t)$. חישוב נותן
$$-\nabla_{\bar{\rho}}\bar{F}=\left(\nabla_{\rho_0}F_0,\varphi^1\right).$$
אז ההטלה $\pi\colon M\times[0,1]\to M$ שומרת על ∇ ולכן גם על מסלולים של $-\nabla$.

תרגיל 13. הזוג $\left(\bar{F},\bar{\rho}\right)$ מקיים את תנאי Morse-Smale.

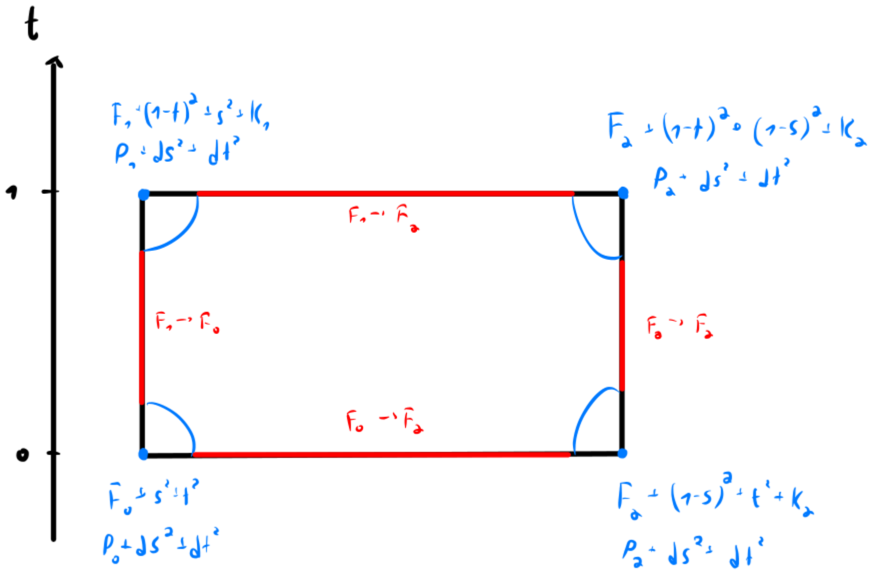
נבחר $x\in\mathrm{Crit}_k(F_0)$ ואז
$$\Phi^{F_0,F_0}(x)=\sum_{y\in\mathrm{Crit}_k(F_0)}n_2\left((x,1),(y,0)\right)\cdot y.$$
נניח שיש y עבורו $n_2\left((x,1),(y,0)\right)\neq 0$. אז $\hat{\mu}\left((x,1)(y,0)\right)\neq\varnothing$. נפעיל את π ונקבל $\hat{\mu}(x,y)\neq\varnothing$. אבל $\mu(x)=\mu(y)=k$, ולכן זה לא יתכן עבור $x\neq y$ כי ראינו שבמקרה זה אין טרקטוריה מ־x ל־y. לכן, $x=y$, ואז הטרקטוריה היחידה היא הטרקטוריה $(x,1)\to(x,0)$ בסיב של x.
נקבל כי $\Phi^{F_0,F_0}=\mathbb{1}$ כהעתקה בין קומפלקסים, ולכן גם בהומולוגיה. ■

טענה 1.6.51. $\Phi^{F_2,F_1}\circ\Phi^{F_1,F_0}$ ו־Φ^{F_2,F_0} מגדירות את אותה העתקה בהומולוגיה.

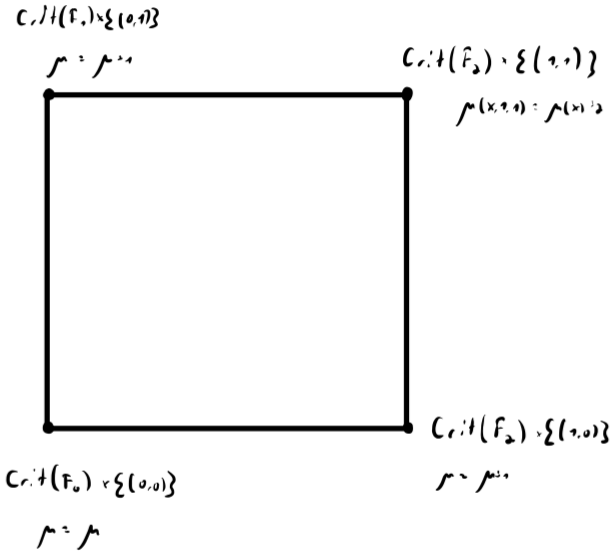
הוכחה. נבנה
$$\bar{F}\colon M\times[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$$
ו־$\bar{\rho}$ הרחבה של המטריקה הרימנית. ראיו איור 1.33. נרחיב את ρ באופן גנרי בנקודות הפנימיות ו־$\bar{F}$ כך ש־$\bar{F}(x,s,t)$ מונוטונית עולה ב־s,t בלי נקודות קריטיות באמצע.
הנקודות קריטיות של $\bar{F}$ מתוארות באיור 1.34. אם נשתמש ב־$\bar{\partial}^2=0$ נקבל
$$\begin{aligned}0&=\bar{\partial}^2(x,1,1)\\&=\ldots\\&=\Phi^{F_2,F_0}+\Phi^{F_1,F_0}\circ\Phi^{F_2,F_0}\\&=S\circ\partial^2+\partial^0\circ S\end{aligned}$$
עבור
$$\begin{aligned}S:C_*\left(F_2,\rho_2\right)&\to C_{*+1}\left(F_0,\rho_0\right)\\x\in\mathrm{Crit}_k\left(F_2\right)&\mapsto\sum_{y\in\mathrm{Crit}_{k-1}(F_0)}n_2\left((x,1,1),(y,0,0)\right)\cdot y\end{aligned}.$$
כאן S היא chain homotopy בין $\Phi^{F_2,F_0},\Phi^{F_1,F_0}\circ\Phi^{F_2,F_0}$ ולכן הן משרות את אותה העתקה בהומולוגיה. ■

מסקנה 1.6.52.
$$\Phi^{F_1,F_0}\colon HM_*\left(F_1,\rho_1\right)\to HM_*\left(F_0,\rho_0\right)$$
איזומורפיזם.

הוכחה. נסתכל על ההרכבה
$$HM_*\left(F_1,\rho_1\right)\xrightarrow{\Phi_*^{F_1,F_0}}HM_*\left(F_0,\rho_0\right)\xrightarrow{\Phi_*^{F_0,F_1}}HM_*\left(F_0,\rho_0\right).$$
ההרכבה היא $\Phi_*^{F_0,F_0}=\mathbb{1}$ ולכן $\Phi_*^{F_1,F_0}$ חד־חד ערכית ו־$\Phi_*^{F_0,F_1}$ על. אם נחליף את סדר ההרכבה נקבל את התכונות החסרות, ולכן $\Phi_*^{F_1,F_0}$ חד־חד ערכית ועל, ולכן איזומורפיזם. ■



איור 1.33



איור 1.34

הגדרה 1.6.53 (מספרי Betty). נגדיר את מספר Betty ה־i של M על ידי $\beta_i := \dim\left(HM_i\left(F,\rho\right)\right)$ עבור זוג Morse-Smale (F,ρ).

מסקנה 1.6.54. מספר Betty אינם תלויים ב־(F,ρ), ומתקיים $\mathrm{Crit}_i\left(F\right) \geq \beta_i$.

תרגיל 14. האיזומורפיזם

$$\Phi^{F_1,F_0}\colon HM_*\left(F_1,\rho_1\right) \to HM_*\left(F_0,\rho_0\right)$$

קנוני ואינו תלוי בהומוטופיה בין $\left(F_1,\rho_1\right), \left(F_0,\rho_0\right)$.

1.6.4 שימושים

סיווג של יריעות

תרגיל 15. אם $f\colon M_1 \to M_2$ דיפאומורפיזם אז $HM_*\left(M_1\right) \cong HM_*\left(M_2\right)$.

פתרון. ניקח זוג Morse-Smale (F,ρ) על M_1 ונדחוף אותו לזוג על M_2. הדחיפה מעתיקה נקודות קריטיות לנקודות קריטיות, את המטריקה הרימנית למטריקה הרימנית, ושומרת על האינדקסים, לכן ניתן לראות שיש איזומורפיזם

$$f_*\colon \left(C_*\left(M;F,p\right), \partial_*^1\right) \to \left(C_*\left(M_2;f_*F,f_*p\right), \partial_*^2\right)$$

של קומפלקסים, שמשרה איזומורפיזם בין ההומולוגיות.

תת־יריעות איזוטופיות

- אם $L_1, L_2 \subseteq M$ תת־יריעות סגורות, נרצה לשאול מתי קיימת איזוטופיה שלוקחת את L_1 ל־L_2. ניתן להתאים הומולוגיה $\left[L_1\right], \left[L_2\right] \in H_*\left(M\right)$ כך שאם $\left[L_1\right] \neq \left[L_2\right]$ אין איזוטופיה כזאת, שהיא "מעבר רציף", בין L_1, L_2.

  אצלנו, עבור L_i ניקח F_i, ρ_i מתאימות ונקבל

  $$\left[L_i\right] \in HM_*\left(M;F_i,\rho_i\right)$$

  ואלו איברים בהומולוגיות שונות. כדי להשוות את $\left[L_1\right], \left[L_2\right]$ ניעזר בכך שיש איזומורפיזם קנוני שמקשר בין ההומולוגיות.

- אם $A, B \in \mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$ נקבל דיפאומורפיזמים

  $$\begin{aligned} f_A, f_B\colon \mathbb{T}^2 &\to \mathbb{T}^2 \\ x &\mapsto Ax \\ x &\mapsto Bx \end{aligned} .$$

  טענה 1.6.55. אם $A \neq B$, ההעתקות f_A, f_B אינן איזוטופיות.

  הוכחה. מתקיים

  $$\begin{aligned} \left(f_A\right)_*\colon H_1\left(\mathbb{T}^2\right) &\to H_1\left(\mathbb{T}^2\right) \cong \mathbb{Z}^2\left\langle a,b\right\rangle \\ x &\mapsto Ax \end{aligned} .$$

  כאשר A, B שונות, אם קיימת איזוטופיה קיים מעביר רציף בין ההעתקות בהומולוגיה, אבל העתקות אלו הן איברים שונים בקבוצה דיסקרטית, בסתירה. ■

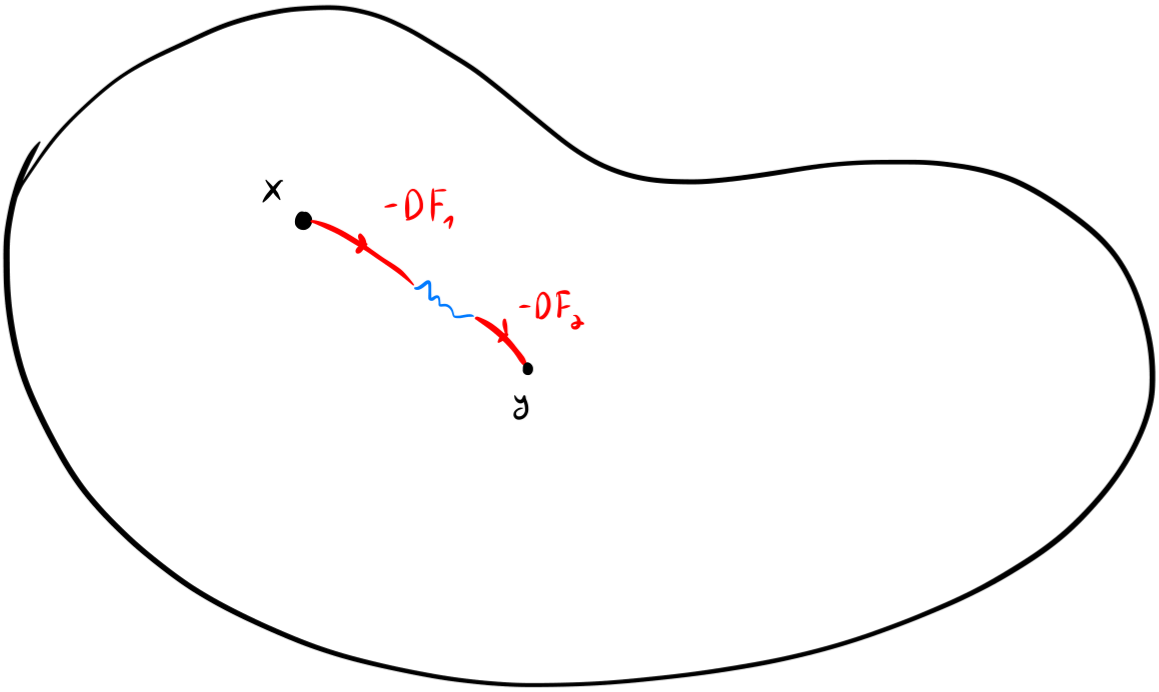
  נרצה לתרגם הוכחה זאת להוכחה בעזרת תורת מורס עם הכלים שבנינו.

  תהי $A \in \mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$. נגדיר

  $$\left(f_A\right)_*\colon HM_1\left(M;F,\rho\right) \xrightarrow{\sim} HM_1\left(M;\left(f_A\right)_*\left(F\right), \left(f_A\right)_*\left(\rho\right)\right)$$
  $$\left(f_B\right)_*\colon HM_1\left(M;F,\rho\right) \xrightarrow{\sim} HM_1\left(M;\left(f_B\right)_*\left(F\right), \left(f_B\right)_*\left(\rho\right)\right)$$

  כמקודם. במקרה זה נגיד שההעתקות מתאומות אם המשולש

$$\begin{tikzcd}
& HM_1\left(M;\left(f_A\right)_*\left(F\right), \left(f_A\right)_*\left(\rho\right)\right) \arrow[dd, "\Phi^{\left(f_A\right)_*F,\left(f_B\right)_*F}"] \\
HM_1\left(M;F,\rho\right) \arrow[ur, "\left(f_A\right)_*"] \arrow[dr, "\left(f_B\right)_*"'] & \\
& HM_1\left(M;\left(f_B\right)_*\left(F\right), \left(f_B\right)_*\left(\rho\right)\right)
\end{tikzcd}$$



איור 1.35: טרקטוריות שמחוברות על ידי פרטורבציה.

קומוטטיבי.

אבל, הגדרת Φ^{F_1,F_0} לא נוחה לצורך חישוב. ראינו ש-Φ^{F_1,F_0} אינה תלויה באינטרפולציה, לכן נסתכל על אינטרפולציה בה המטריקה הרימנית מהצורה $\rho_t + \mathrm{d}t^2$ ובה F_t פונקציה נתונה. מתקיים

$$. - \nabla = \left(-\nabla_{\rho_1} F_1, -2\,(1-t)\right)$$

נשאיף $K \to \infty$ ואז הזרימה $x \to y$ תעבור את שכבת האינטרפולציה בפרק זמן ששואף לאפס. בגבול, החלק של האינטרפולציה יעלם אחרי ההטלה. ראו איורים 1.35, 1.36. נקבל העתקה

$$\hat{\Phi}^{F_1,F_0}(x) = \sum_{y\in\mathrm{Crit}(F_0)} \#\mathcal{P}(x,y)\cdot y$$

עבור

$$.\mathcal{P}(x,y) := \left\{(\gamma_1,\gamma_2) \;\middle|\; \begin{matrix} \gamma_1 : (-\infty,0]\to M \\ \gamma_2 : [0,\infty)\to M \\ \gamma_1' = -D_{\rho_1} F_1 \\ \gamma_1(s) \xrightarrow{s\to-\infty} x \\ \gamma_2' = -D_{\rho_0} F_0 \\ \gamma_2 \xrightarrow{s\to\infty} y \end{matrix} \right\}$$

תחת הדרישה $W^U_{F_1}(x) \pitchfork W^S_{F_0}(y)$, לכל x, y, שמתקיימת במקרה הגנרי. אז נוכל לזהות

$$.\mathcal{P}(x,y) \cong W^U_{F_1}(x) \cap W^S_{F_0}(y)$$

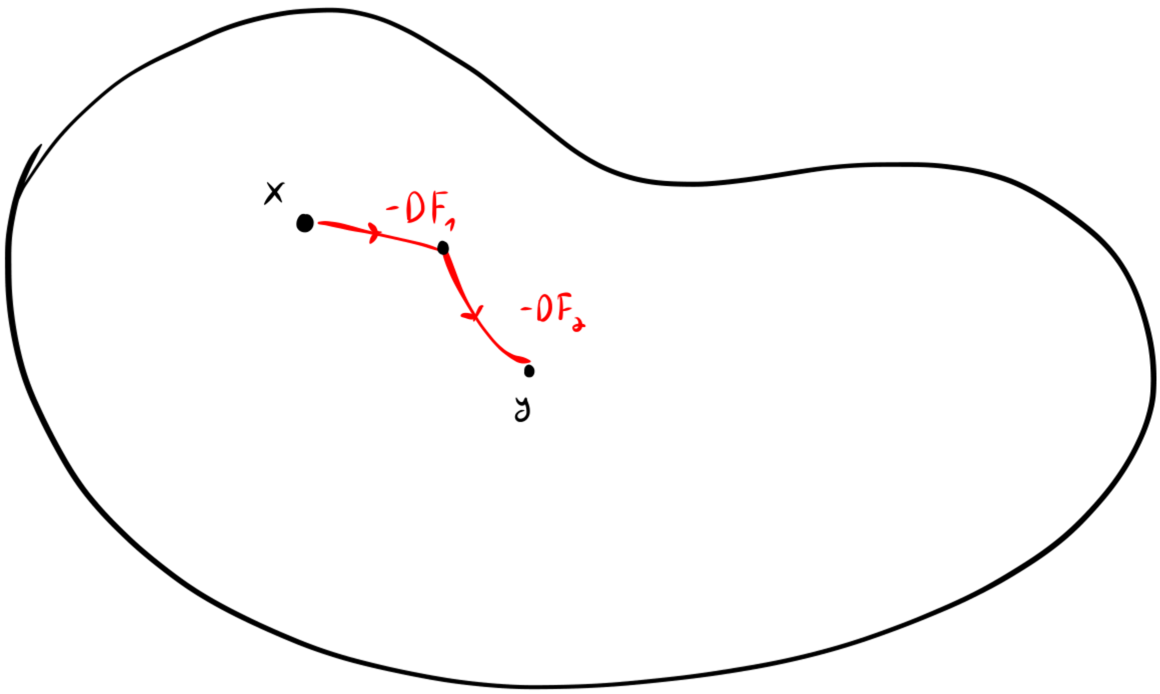
מתקיים

$$. \dim \mathcal{P}(x,y) = ()\, x - \mu(y)$$

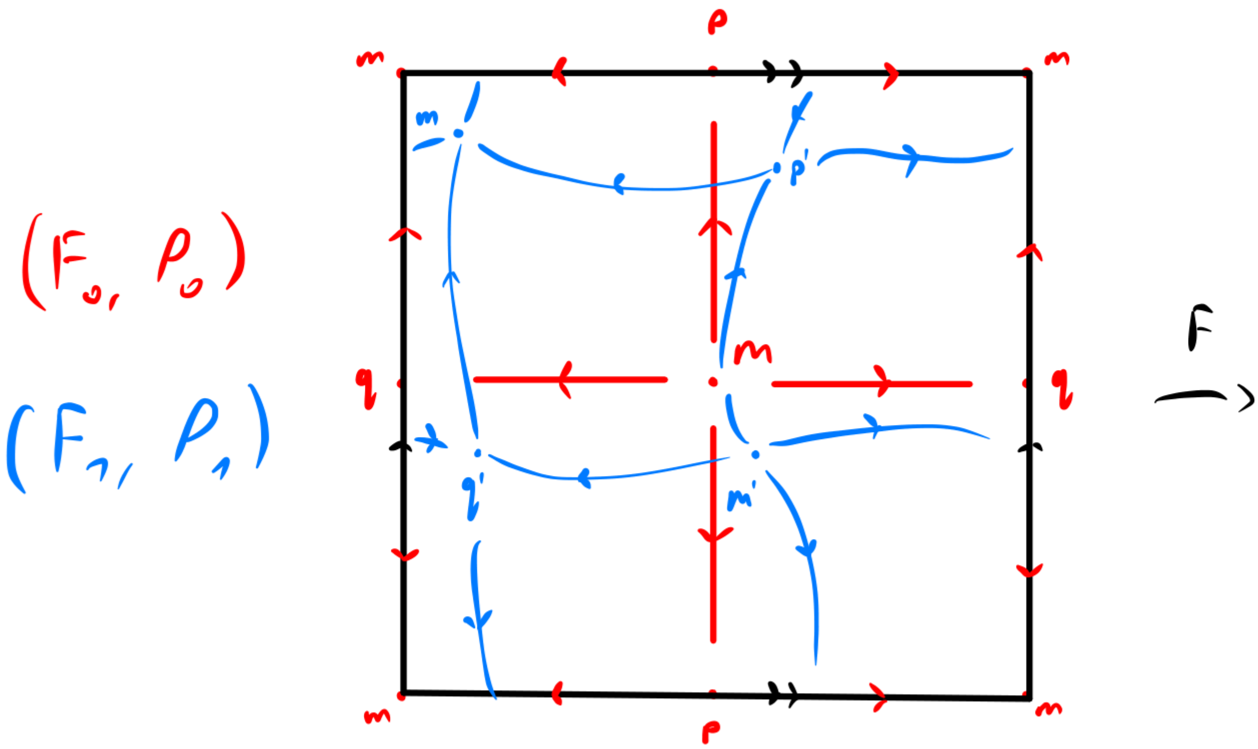
נציג את אופן החישוב בדוגמא הבאה.

דוגמה 1.6.56. יהי $\mathbb{T}^2$ הטורוס כמתואר באיור 1.25 ונסמן את הפונקציה והמטריקה המתאימות (F_0, ρ_0). לאחר פרטורבציה מתאימה אפשר לקבל זוג Morse-Smale נוסף שנסמנו (F_1, ρ_1). ראו איור 1.37. מספיק לחשב את $\hat{\Phi}^{F_1,F_0}$ על יוצרים. למשל, מתקיים

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^{F_1,F_0}(M') &= \sum_{p\in\mathrm{Crit}_2(F_0)} \#_2\mathcal{P}(M',p)\cdot [\\ &= \#_2\mathcal{P}(M',M)\cdot M \end{aligned}$$



איור 1.36: בגבול הטרקטוריות מתחברות ואין פרטורבציה.



איור 1.37

והמספר $\#\mathcal{P}(M',M)$ הוא מספר הטרקטוריות השבורות מ־M' ל־M. אבל, טרטוריה ל־M היא בהכרח הטרקטוריה הקבועה, ולכן אלו טרקטוריות מ־M' ל־M. יש טרקטוריה יחידה כזו, ממשפט היחידות. אז $\hat{\Phi}^{F_1,F_0}(M') = M$.
מתקיים גם

$$\hat{\Phi}^{F_1,F_0}(x') = \#_2\mathcal{P}(x',x)\cdot x + \#_2\mathcal{P}(x',y)\cdot y.$$

מתקיים

$$\#_2\mathcal{P}(x',x)\cdot x = \#_2 W^U(x') \cap W^S(x) = 1$$
$$\#_2\mathcal{P}(x',y)\cdot y = \#_2 W^U(x') \cap W^S(y) = \#_2\varnothing = 0$$

ולכן $\hat{\Phi}^{F_1,F_0}(x') = x$. ניתן להמשיך את החישוב ולראות שמתקיים

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}\colon HM_*(F_1,\rho_1) &\to HM_*(F_0,\rho_0)\\ M' &\mapsto M\\ x' &\mapsto x\\ y' &\mapsto y\\ m' &\mapsto m.\end{aligned}$$

1.7 קוהומולוגיית מורס

נסתכל על קומפלקס $C_* = \bigoplus C_k$ עבור $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$־מודולים C_k ונסתכל על העתקות

$$\partial_k\colon C_k \to C_{k-1}$$

עבורן $\partial^2 = 0$. נגדיר קומפלקס קוהומולוגיה על ידי

$$C^k \coloneqq \mathrm{Hom}(C_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (C_K)^*.$$

נסתכל על ההעתקות

$$(\partial_{k+1})\colon\ (C_k)^* \to (C_{k+1})^*$$

שמשרה העתקה

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_k\colon C^k &\to C^{k+1}\\ f &\mapsto f \circ\partial_{k+1}.\end{aligned}$$

תרגיל 16. אם $\partial^2 = 0$ אז d^2.

הגדרה 1.7.1 (קומפלקס קוהומולוגיה). נגדיר את קומפלקס הקוהומולוגיה על ידי

$$C^* = \bigoplus C^k$$
$$\mathrm{d}_*\colon C^* \to C^{*+1}.$$

הגדרה 1.7.2 (קוהומולוגיה). נגדיר את הקוהומולוגיה על ידי

$$H^*(C_*,\partial_*) \coloneqq H(C^*, d_*).$$

אצלנו, נסתכל על יריעה M עם זוג Morse-Smale (F,ρ). הגדרנו

$$C_k = \mathbb{Z}_2\langle \mathrm{Crit}_k F\rangle$$

ואז

$$C^k = \mathrm{Hom}(C_k,\mathbb{Z}_2) = (C_k)^* = \mathbb{Z}_2\langle \mathrm{Crit}_k(F)^\bullet\rangle$$

עבור הבסיס הדואלי

$$\mathrm{Crit}_k(F)^\bullet = \{x^\bullet \mid x \in \mathrm{Crit}_k(F)\} \subseteq (C_k)^*$$

ותחת ההגדרה $x^\bullet(y) = \delta_{x,y}$.

נחשב את $\mathrm{d}_k : C^k \to C^{k+1}$. נבחר $y \in \mathrm{Crit}_k(F)$ ונרצה לחשב את $\mathrm{d}_k(y^\bullet) \in C^{k+1}$. עבור $x \in C_{k+1}$ מתקיים

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}_k(y^\bullet))(x) &= y^\bullet(\partial_{k+1}(x)) \\ &= y^\bullet\left(\sum_{z\in\mathrm{Crit}_k(F)} n_2(x,z)\cdot z\right) \\ &= n_2(x,y)\cdot y\end{aligned}.$$

נקבל שמתקיים

$$.\ \mathrm{d}_k(y^\bullet) \sum_{x\in\mathrm{Crit}_{k+1}(F)} n_2(x,y)\cdot \bullet x$$

נשים לב שכאן הספירה היא של טרקטוריות שמסיימות ב־y, בניגוד לחישוב של ∂. אז חישוב הקוהומולוגיה יהיה זהה לחישוב ההומולוגיה, רק עם ספירה של טרקטוריות בכיוון ההפוך. מתקיים $-\nabla F = \nabla(-F)$, ולכן ספירת קווי הזרימה של F ב־d_k מזדהה עם ספירת קווי הזרימה של $-F$ ב־∂_k. נקבל כי

$$.\ (C^*, d_*)_{(F,\rho)} \cong (C_*, \partial_*)_{(-F,\rho)}$$

מסקנה 1.7.3.
- מתקיים $\mathrm{d}^2 = 0$.
- הקוהומולוגיה אינה תלויה ב־(F,ρ) ויש איזומורפיזמים קנוניים כמו בהומולוגיה.
- יש העתקה, שנקראת pairing / evaluation map

$$.C^k(F,\rho)\times C_k(F,\rho)\to\mathbb{Z}_2$$

נקבל העתקה

$$.HM^k(F,\rho)\times HM_k(F,\rho)\to\mathbb{Z}_2$$

יש איזומורפיזם קנוני $HM_k(F,\rho)\cong HM_k(F',\rho')$ ולכן נקבל העתקה

$$.HM^*(F,\rho)\times HM_k(F',\rho')\to\mathbb{Z}_2$$

ניקח $x\in\mathrm{Crit}_k(F')$, $y\in\mathrm{Crit}_k(F)$. אם נעבור על ההגדרות נקבל בהעתקה זאת

$$.y^\bullet(x) = \#_2\mathcal{P}(x,y)$$

מסקנה 1.7.4. $x\in\mathrm{Crit}(F)$ אם ורק אם $x\in\mathrm{Crit}_{n-k}(-F)$. לכן

$$.HM^k(F,\rho)\cong H_{n-k}(-F,\rho)\cong H_{n-k}(F,\rho)$$

איזומורפיזם זה קנוני. נקבל כי יש איזומורפיזם קנוני

$$.HM^k(M)\cong HM_{n-k}(M)$$

מסקנה זאת נקראת דואליות פואנקרה.

הערה 1.7.5. משפט מאלגברה הומולוגית אומר שמעל שדה כללי, $HM^k(M)\cong HM_k(M)$ עבור קומפלקסים נוצרים סופית. זה נובע למשל ממשפט המקדמים האוניברסלי. איזומורפיזם זה אינו בהכרח קנוני. נקבל כי

$$HM_k(M)\cong HM_{n-k}(M)$$

אבל איזומורפיזם זה אינו בהכרח קנוני. בפרט, מתקיים $\beta_k=\beta_{n-k}$.

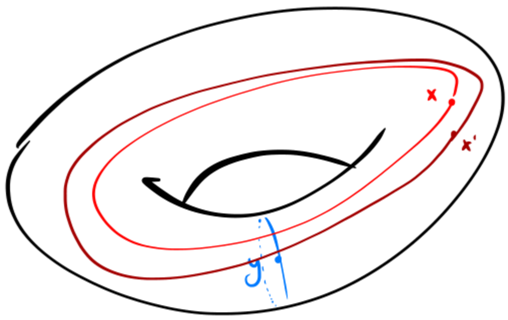
תהי $L^k\subseteq M^n$ תת־יריעה סגורה ממימד k. יש העתקה $L\mapsto[L]\in HM_k(M)$ שמוגדרת באופן הבא. נבחר זוג Morse-Smale (F,ρ). נגדיר

$$L\mapsto\sum_{x\in\mathrm{Crit}_k(F)}\#_2\mathcal{P}(L,x)\cdot x$$

עבור

$$.\mathcal{P}(L,x) := \left\{\gamma\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}\ \middle|\ \substack{\gamma(0)\in L \\ \gamma\xrightarrow{t\to\infty}x \\ \gamma'=-\nabla F}\right\}\cong L\cap W^S(x)$$

כאשר החיתוכים $L\cap W^S(x)$ טרנסוורסליים.



איור 1.38: יריעות יציבות ובלתי־יציבות על הטורוס.

1.7.1 מכפלה בהומולוגיה

מכפלה בהומולוגיה כללית

עבור יריעות יש העתקה שנקראת intersection product עם

$$H_k(M)\times H_m(M)\to H_{k+m-n}(M)$$
$$\left[L_1^k\right]\times\left[L_2^m\right]\mapsto [L_1\cap L_2]$$

עבור $L_1 \pitchfork L_2$. במקרה שאין טרנסוורסליות, נוכל לבצע פרטורבציה קטנה, ששומרת על מחלקות ההומולוגיה, ולקבל את אותה נוסחא.
במקרה של הטורוס, אם ניקח את הנקודות a,b באיור 1.38 נקבל $[a]\times[b]=[\mathrm{pt}]$. עבור $[a]\times[a]$, נזיז עותק אחד של a כדי לקבל טרנסוורסליות, ונקבל $[a]\times[a]=0$. נקבל גם $\left[\mathbb{T}^2\right]\times[L]=[L]$ ובאופן כללי $\left[\mathbb{T}^2\right]$ איבר יחידה. עבור $L\subsetneq\mathbb{T}^2$ מתקיים $[\mathrm{pt}]\times[L]=0$. נקבל מבנה של חוג על $H_*(M)$ עם איבר יחידה $[M]$ כאשר M אוריינטבילית.

מכפלה בהומולוגיית מורס

נגדיר

$$\rho\colon C_k(F_1,\rho_1)\times C_m(F_2,\rho_2)\to C_{k+m-n}(F_3,\rho_3).$$

עבור

$$\begin{gathered}x\in \mathrm{Crit}(F_1)\\ y\in \mathrm{Crit}(F_2)\\ z\in \mathrm{Crit}(F_3)\end{gathered}$$

נגדיר

$$\mu(x,y;z):=\left\{(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\ \middle|\ \begin{smallmatrix}\gamma_1,\gamma_2:\,(-\infty,0]\to M\\ \gamma_3:\,[0,\infty)\to M\\ \gamma_1(0)=\gamma_2(0)=\gamma_3(0)\\ \gamma_i'=-\nabla F_i\end{smallmatrix}\right\}.$$

אז נגדיר

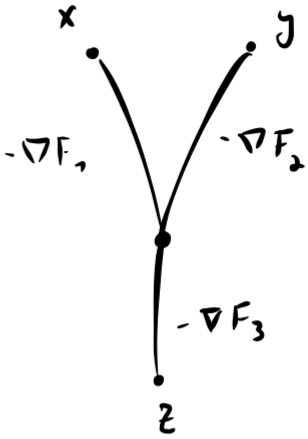
$$\rho(x,y)=\sum_{z\in\mathrm{Crit}_{k+m-n}(F_3)}\#_2\mu(x,y;z)\cdot z$$

ונרחיב לינארית כדי לקבל העתקה בין הקומפלקסים.

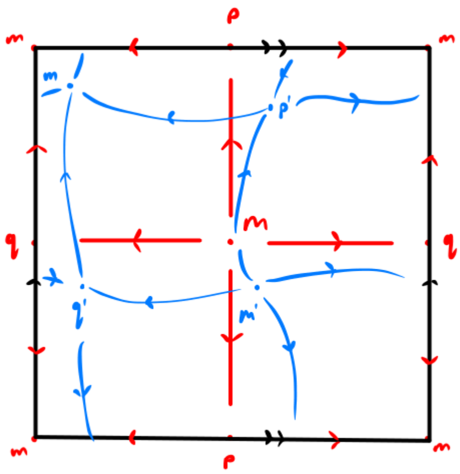
הערה 1.7.6. הקבוצה $\mu(x,y;z)$ היא מספר השלשות של טרקטוריות כמתואר באיור 1.39 ויש התאמה

$$\mu(x,y;z)\cong W^U_{F_1}(x)\cap W^U_{F_2}(y)\cap W^S_{F_3}(z).$$

כמו מקודם, נדרוש שכל החיתוכים הנ"ל טרנסוורסליים, מה שמתקיים עבור בחירה גנרית של מידע מורס. זה מתקיים גם עבור בחירה גנרית תחת ההנחה $(F_1,\rho_1)=(F_3,\rho_3)$ או $(F_2,\rho_2)=(F_3,\rho_3)$.



איור 1.39



איור 1.40

הערה 1.7.7. מתקיים

$$\begin{aligned}\dim(\mu(x,y;z)) &= (\mu(x)+\mu(y)-n)+(n-\mu(z))-n\\ &= \mu(x)+\mu(y)-\mu(z)-n\end{aligned}.$$

דוגמה 1.7.8. נסתכל על $\mathbb{T}^2$ כבאיור 1.40.

- נחשב את $\rho(x,y)$ כאשר $x=M, y=p'$. נקבל כי זה מספר הטרקטוריות השבורות כמתואר באיור 1.41 וכאשר $z\in C_1(F)=\{p,q\}$. כאשר $z=q$ מתקיים $\mu(M,q)\cap W^U(p')=\varnothing$ ולכן $\#\mu(M,p';q)=0$. כאשר $z=p$ מתקיים $\#\mu(M,p';p)=1$. לכן

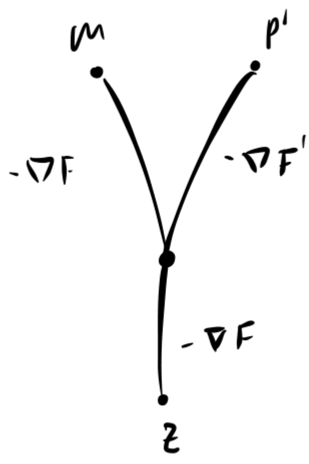
$$\rho(M,p')=p.$$

באופן דומה, $\rho(M,q')=q$.

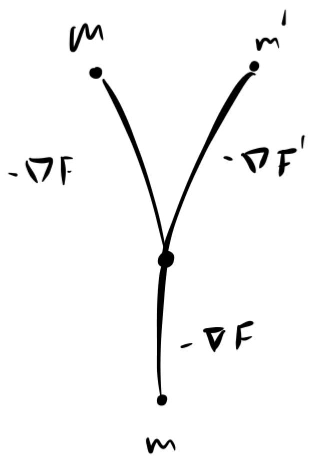
נרצה לחשב את $\rho(M,M')$. זה מספר "מזלגות" מ־M,M' שמסתיימים בנקודה מאינדקס 2, שחייבת להיות M. כיוון ש־M נקודת מקסימום, זה מספר המסלולים $M'\to M$, ששווה 1. נקבל $\rho(M,M')=M$.

נרצה לחשב את $\rho(M,m')$. נצטרך לחשב טרקטוריות שבורות מהצורה באיור 1.42 אבל, אלו בדיוק הטרקטוריות השבורות מ־M ל־m שעוברות ב־m' לפי (F,ρ). מספר זה שווה בדיוק 1 לפי קיום ויחידות, לכן $\rho(M,m')=m$.

- נחשב את $\rho(q,q')$ על ידי הסתכלות על חיתוך בין המסלולים, כמו מקודם, ונקבל $\rho(q,q')=0$. מתקיים $\rho(s,p')=q$.



איור 1.41



איור 1.42

תרגיל 17. בדוגמא הנ"ל, העתקת ההשוואה שולחת

$$\begin{aligned} x &\mapsto x' \\ y &\mapsto y' \\ m &\mapsto m' \\ M &\mapsto M'. \end{aligned}$$

נקבל כי M איבר היחידה, תחת הזיהוי.

הערה 1.7.9. עבור ה־intersection product באיור 1.38 ראינו כי

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{T}^2\right] \cdot * &= * \\ [x] \cdot [x] &= 0 \\ [y] \cdot [y] &= 0 \\ [x] \cdot [y] &= [\mathrm{pt}] \end{aligned}$$

וקיבלנו את אותו המבנה האלגברי כמו בחישוב הנוכחי.

דוגמה 1.7.10. עבור $\mathbb{CP}^n$ מתקיים

$$H_* = \bigoplus_{k \in 2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \left\langle e_0, \ldots, e_{2n} \right\rangle$$

כאשר המכפלה היא

$$e_{2m} \cdot e_{2k} = e_{2m+2k-2n}.$$

נקבל כי

$$H_* = \mathbb{Z}_2 \left\langle e^0_{2n-2}, e^1_{2n-2}, e^2_{2n-2}, \ldots \right\rangle.$$

זה חוג הנוצר על ידי e_{2n-2}. המבנה של חוג ההומולוגיה לפי ה־intersection product ולפי ρ איזומורפי באופן טבעי.

הערה 1.7.11. כאשר מוגדר ה־intersection product הוא מתקבל על ידי ה־cup product על ידי דואליות פואנקרה. ה־cap product הוא ה־intersection product.

טענה 1.7.12.

1. מתקיים
$$\rho\left(\partial_1(-), -\right) + \rho\left(-, \partial_2(-)\right) + \partial_3 \rho(-,-) = 0.$$

2. ρ משרה פעולה
$$\rho\colon HM_*\left(F_1, \rho_1\right) \times HM_*\left(F_2, \rho_2\right) \to HM_*\left(F_3, \rho_3\right).$$

3. ρ מתנהגת טוב ביחס להעתקות זיהוי, ואז מתקבלת העתקה
$$\rho\colon HM_*(M) \times HM_*(M) \to HM_*(M).$$

נציג סקיצה להוכחה.

הוכחה. 1. נסתכל על משפחה חד־מימדית של קונפיגורציות $\mu(x, y; z)$. נבצע קומפקטיפיקציה והדבקה כמו במקרה של $\mu(x, y)$ ונקבל כי $\partial\mu(x, ; z)$ מסוגת טריפודים שבורים. על כל נקודת שבר שנוסיף המימד יפחת באחת, ולכן מחשבון מימדים תיתכן נקודת שבר אחת w, שיכולה להיות על הרגל שסמוכה ל־x, ל־y או ל־z. נקבל

$$0 = \#_2 \partial\mu(x, y; z) = \sum_w \#\hat{\mu}(x, w) \cdot \#\mu(w, y; z) + \sum_w \#\hat{\mu}(y, w) \cdot \#\mu(x, w; z) + \sum_w \#\hat{\mu}(w, z) \cdot \#\mu(x, y; w)$$

כאשר הסכום האגף ימין שווה

$$\#\rho(\partial x, y) + \#\rho(x, \partial_2 y) + \#\partial_3 \rho(x, y).$$

2. עבור $x \in \ker \partial_1, y \in \ker \partial_2$ מתקיים

$$\begin{aligned} \partial_3 \rho(x, y) &= \rho\left(\partial_1 x, y\right) + \rho\left(x, \partial_2 y\right) \\ &= \rho(0, y) + \rho(x, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

.

לכן $\rho(x,y) \in \ker(\partial_3)$.
נניח כעת כי $x = \partial_1 x' \in \operatorname{Im}\partial_1$ וכי $y \in \ker\partial_2$. נרצה להראות כי $\rho(\partial x', y) \in \operatorname{Im}\partial_3$ כדי שההעתקה תהיה מוגדרת בהומולוגיה. אכן

$$\rho(\partial x', y) = \rho(x', \partial y) + \partial\rho(x', y) = \partial\rho(x', y) \in \operatorname{Im}\partial_3.$$

לכן

$$\rho\colon HM_*(F_1,\rho_1) \times HM_*(F_2,\rho_2) \to HM_*(F_3,\rho_3)$$

מוגדרת היטב.

3. צריכים לבנות הומוטופיה בין זוגות מורס השונים ולספור רכיבי שפה של משפחות חד־מימדיות. ■

הערה 1.7.13. עבור $L \subseteq M$ תת־יריעה, ניתן להתאים איבר $[L] \in HM_*(M)$ על ידי

$$[L] = \sum_{x\in \mathrm{Crit}(F)} \#\mu(L,x)\cdot x$$

כאשר הסכום עבור ביטויים $\#\mu(L,x)$ סופיים.
מתקיים

$$\rho(x,y) = \sum_z \#\left(W^U(x) \cap W^U(y)\right) \cap W^S(z)\cdot z = \left[W^U(x)\cdot W^U(y)\right]_{C(F_3,\rho_3)}.$$

כאשר הכפל באגף ימין הוא ה־intersection product.

דוגמה 1.7.14. תהי M יריעה, ונסתכל על

$$\Delta = \{(p,p) \mid p \in M\} \subseteq M\times M.$$

ניתן להגדיר את מאפיין אוילר של M על ידי

$$\chi(M)\cdot[\mathrm{pt}] = [\Delta]\cdot[\Delta].$$

נסתכל על $M = S^1$. ידוע מטופולוגיה אלגברית כי $\chi(M) = \beta_0 - \beta_1 = 0$. נבדוק שזה מסתדר עם החישוב שלנו, כלומר שמתקיים $[\Delta]\cdot[\Delta] = 0$. נעבוד ב־$M \times M = S^1 \times S^1$. נבחר $F, F'\colon S^1 \to \mathbb{R}$ עם

$$\mathrm{Crit}(F) = \{N,S\}$$
$$\mathrm{Crit}(F') = \{N',S'\}.$$

נקבל

$$F + F'\colon S^1\times S^1 \to \mathbb{R}$$

ומטריקה רימנית סטנדרטית $\rho_1 + \rho_2$. נשאל מיהו $[\Delta] \in HM_*(F+F', \rho_1+\rho_2)$. מתקיים

$$[\Delta] = \sum_{(p,q)\in \mathrm{Crit}(F)\times\mathrm{Crit}(F')} \#\mu(\Delta,(p,q))\cdot(p,q).$$

ראו איור 1.43.
כמו כן,

$$\begin{aligned}\dim\mu(L,(p,q)) &= \dim\left(L\cap W^U(p,q)\right)\\ &= \dim L + (2-\mu(p)-\mu(q)) - 2\\ &= \dim L - \mu(p) - \mu(q)\end{aligned}$$

כאשר אצלנו $\dim L = \dim\Delta = 1$ ולכן נרצה לספור נקודות קריטיות (p,q) עבורן $\mu(p)+\mu(q) = 1$. אז אחת הנקודות p,q היא מינימום והשנייה היא מקסימום. יש שני זוגות כאלה, $(N,S'), (S,N')$.
נסתכל על (N,S'). מתקיים $-\nabla(F+F') = (-\nabla F, -\nabla F')$ ולכן מספר המסילות מ־L ל־(N,S') הוא מספר זוגות המסילות מ־p ל־N ומ־p ל־S'. כדי שזה יתאפשר, צריך שיתקיים $p = N$, כי N נקודת מקסימום.
נקבל כי

$$\#\mu(\Delta,(N,S')) = 1$$

וחישוב דומה נותן

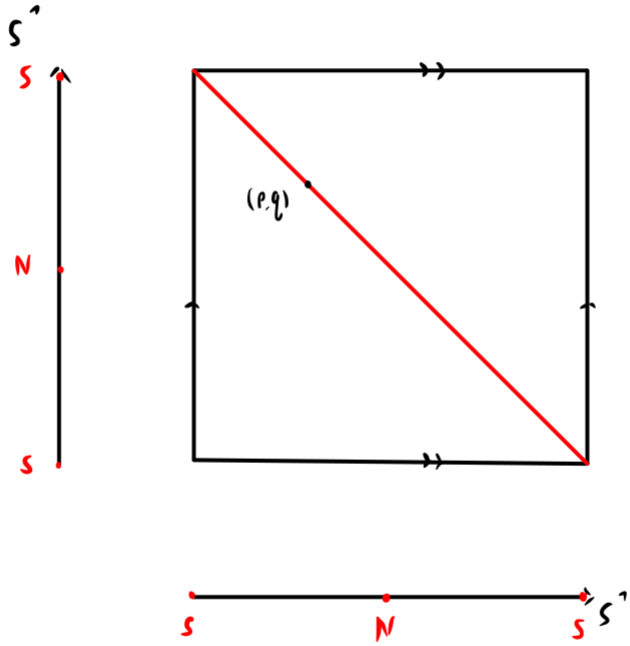
$$\#\mu(\Delta,(S,N')) = 1.$$

אז מתקיים

$$[\Delta] = (N,S') + (S,N').$$

בסימונים קודמים, כתבנו $p = (N,S'), q = (S,N')$ וראינו כי $p^2 = q^2 = 0$ וכי $p\cdot q = q\cdot p = 1$. אז

$$[\Delta]\cdot[\Delta] = p^2 + p\cdot q + q\cdot p + q^2 = 2\cdot[\mathrm{pz}] \equiv 0 \pmod 2.$$



איור 1.43

1.8 שימושים

1.8.1 נוסחאת Künneth

משפט 1.8.1 (נוסחאת Künneth). מתקיים

$$HM_k(M\times N)=\bigoplus_{i+j=k}HM_i(M)\otimes HM_j(N).$$

הוכחה. נבחר זוגות מורס (F,ρ) עבור M ו־(G,ρ') עבור N, שמקיימים את תנאי Morse-Smale. נקבל זוג $(F+G,\rho+\rho')$ על $M\times N$, שמקיים את תנאי Morse-Smale לפי בדיקה ישירה. מתקיים

$$\varphi^t_{M\times N}(x,y)=\left(\varphi^t_M(x),\varphi^t_N(y)\right)$$

וגם

$$\mu_{M\times N}((x,x'),(y,y'))=\mu_M(x,y)\times\mu_N(x',y').$$

כדי לחשב את ∂ נרצה מרחב חד־מימדי כדי שזה יהיה מורכב ממספר סופי של טרקטוריות. כלומר, נדרוש $\dim(\mu_{M\times N})((x,x'),(y,y'))=1$. אז $\dim\mu_M(x,y)=1$ ו־$\dim\mu_N(x',y')=0$ או להיפך. נניח בלי הגבלת הכלליות שמתקיים המקרה הראשון. $\mu_M(x,y)$ מספר המסלולים שנספרים ב־∂_M, ו־$\dim\mu_N(x',y')=\mu(x)-\mu(y)$, מה שמתאפשר בתנאי Morse-Smale רק כאשר $x'=y'$. אז יש נקודה בודדת. נקבל כי

$$\partial_{M\times N}(x,x')=(\partial_M(x),x')+(x,\partial_N(x')).$$

אז

$$\partial_{M\times N}\partial_M\otimes\mathbb{1}_N+\mathbb{1}_M\otimes\partial_N.$$

נקבל העתקה

$$C^M_*(F)\otimes C^N_*(G)\xrightarrow{\sim}C^{M\times N}_*(F+G)$$
$$x\otimes y\mapsto(x,y)\in\mathrm{Crit}(F+G)$$

ששולחת את $\partial_M\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\partial_N$ ל־$\partial_{M\times N}$. זה איזומורפיזם של קומפלקסים ולכן משרה איזומורפיזם בהומולוגיה,

$$H_*(C_*(F)\otimes C_*(G))\cong H_*(C_*(F+G)).$$

אם פותחים את ההגדרות מקבלים מכך את הנדרש. ■

טענה 1.8.2. תהי M יריעה עם פונקציית מורס $F: M \to \mathbb{R}$ ללא נקודות קריטיות מאינדקס 1. אז M פשוטת קשר.

הוכחה. תהי $\gamma: S^1 \to M$. עבור $x \in \mathrm{Crit}_k(M)$ נסתכל על $\gamma \cap W^s(x)$. מתקיים $\dim W^S(x) = \dim M - \mu(x)$ ולכן

$$\dim\left(\gamma \cap W^S(x)\right) = 1 - \mu(x) .$$

במקרה הגנרי בו $\gamma \pitchfork W^S(x)$ נקבל $\gamma \cap W^S(x) = \varnothing$ לכל $\mu(x) \geq 2$. הנחנו שאין נקודות קריטיות מאינדקס 1, ולכן נותרו רק נקודות קריטיות מאינדקס 0. אם $\gamma \cap W^S(x) \neq \varnothing$ נקבל כי $\mu(x) = 0$ ואז x מינימום מקומי. מתקיים

$$M = \coprod_{x \in \mathrm{Crit}(F)} W^S(x)$$

וגם

$$\gamma \subseteq \coprod_{\mu(x)=0} W^S(x) \cong \coprod_{\mu(x)} B^{\dim(M)} .$$

אז γ מוכלת באיחוד זר של קבוצות פתוחות ב־M. כיוון שהאיחוד זר, ו־γ קשירה, נקבל $\gamma \subseteq W^S(x_0)$ עבור x_0 מינימום מקומי כלשהו. אז נוכל להגדיר הומוטופיה לפי הזרימה

$$\varphi^t(\gamma) \xrightarrow{t\to\infty} x_0 .$$

לכן γ כוויצה. ∎

הערה 1.8.3. אם אין נקודות קריטיות מאינדקס 1, ההומולוגיה הראשונה מתאפסת, והטענה הנ"ל נובעת מכך שההומולוגיה הראשונה היא האבליניזציה של החבורה היסודית.

הערה 1.8.4. הזוג (F,ρ) נדרש כדי לבנות שדה וקטורי $-\nabla_\rho F$. מהשדה נקבל זרימה φ^t. הנקודות הקריטיות Crit הן האפסים של $-\nabla F$. מספיק להשתמש ב־$-\nabla F$ בכדי לעשות את כל החישובים, ולשכוח את (F,ρ).
למעשה, ניתן לבנות את תורת מורס עם שימוש בשדות וקטוריים בלבד, בלי זוג מורס (F,ρ). נדרוש משדה וקטורי X כזה את התכונות הבאות.

(i) X מתנהג כמו $-\nabla F$ ליד האפסים שלו.

(ii) ל־X אין לולאות. אין מסלולים מעגליים ואין לולאות שבורות.

הגדרה 1.8.5 (Pseudo-gradient Vector Field). $X \in \mathbf{Vect}(M)$ עבורו יש $F: M \to \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות הבאות נקרא Pseudo-gradient Vector Field.

(i) $X = -\nabla_\rho F$ ליד האפסים של X, לפי ρ כלשהי.

(ii) $L_X F < 0$ בכל M.

במקרה של Pseudo-gradient Vector Field ניתן לבנות את כל תורת מורס, כמו מקודם.

דוגמה 1.8.6. נסתכל על משטח מגנוס 3 עם נקודות אוכף x, y, z באותו גובה. נוכל לעשות פרטורבציה של F תוך כדי שמירה של השדה הוקטורי X, מה שמאפשר להתייחס בצורה נוחה לחישובים במקרים דומים.

1.9 הכללות של תורת מורס

1. את התנאי $L_X F < 0$ אפשר לכתוב גם $\mathrm{d}F(x) < 0$. במקום התבנית $\mathrm{d}F \in \Omega^1(M)$ נוכל לעבוד עם תבנית $\omega \in \Omega^1(M)$ ולדרוש $\omega(X) < 0$. נוכל ככה להחליש את התנאי של אין לולאות.

2. בתורת Morse-Bott אפשר לדבר גם על מקרים בהם יש תת־יריעות קריטיות. אצלנו, $\partial x = \sum n_2(x,y) \cdot y$, כאשר אפשר לזהות

$$n_2 : \mathbb{Z}_2\langle x\rangle \to \mathbb{Z}_2\langle y\rangle .$$

בתורת Morse-Bott באופן דומה אפשר להגדיר

$$n(L_1, L_2) : H_*(L_1) \to H_*(L_2)$$

ואז

$$\partial L_1 = \sum_{L_2} n(L_1, L_2) \cdot L_2 .$$

1.10 הומולוגיית מורס עם מקדמים ב־$\mathbb{Z}$

לאורך הדיון, תהי M יריעה סגורה עם אוריינטציה ועם זוג $\mathrm{Morse\text{-}Smale}$ (F,ρ).

הגדרה 1.10.1. עבור $k\in\mathbb{N}$ נגדיר

$$C_k^{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}\left\langle \mathrm{Crit}_k(F)\right\rangle.$$

לכל נקודה $x\in\mathrm{Crit}(F)$ נבחר אוריינטציה של $W^U(x)$ (באופן שרירותי). עבור $W^S(x)$ נקבע אוריינטציה באופן הבא. יהי $B^U(x)$ בסיס חיובי של $T_xW^U(x)$ ויהי $B^S(x)$ בסיס כלשהו של $T_xW^S(x)$. אם

$$B_x^M = \left(B^U(x), B^S(x)\right)$$

בסיס חיובי של M, נאמר כי $B^S(x)$ בסיס חיובי של $W^S(x)$. כיוון ש־

$$T_xM = T_xW^U(x)\oplus T_xW^S(x)$$

זה מגדיר היטב אוריינטציה.
עבור החיתוכים $W^U(x)\cap W^S(y)$ נקבע אוריינציה בדרך סטנדרטית עבור חיתוכים טרנסוורסליים. תהי $p\in W^U(x)\cap W^S(y)$. נבחר בסיס $(u_1,\dots,u_k)$ של $T_p\left(W^U\cap W^S\right)$. נרחיב אותו לבסיסים חיוביים

$$(u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_t)$$
$$(u_1,\dots,u_k,w_1,\dots,w_s)$$

של $T_pW^U(x)$ ושל $T_pW^S(x)$ בהתאמה. נקרא לבסיס $(u_1,\dots,u_k)$ בסיס חיובי אם $(u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_t,w_1,\dots,w_s)$ בסיס חיובי של T_pM. אחרת נגיד ש־$(u_1,\dots,u_k)$ בסיס שלילי.

תרגיל 18. בידקו שהאוריינטציה בהגדרה הנ"ל מוגדרת היטב.

הגדרה 1.10.2. עבור $x\in\mathrm{Crit}_k(F)$ נגדיר

$$\partial_k^{\mathbb{Z}}(x) = \sum_{y\in\mathrm{Crit}_{k-1}(F)} n(x,y)\cdot y$$

עבור

$$n(x,y) := \#\hat{\mu}(x,y) = \#\mu(x,y)\big/\mathbb{R}.$$

הערה 1.10.3. כל איבר ב־$\mu(x,y)\big/\mathbb{R}$ הוא מסלול זרימה, כלומר תת־יריעה חד־מימדית מתוך $W^U(x)\cap W^S(y)$. אם $-\nabla F_{(p)}$ בסיס חיובי של $T_p\left(W^U(x)\cap W^S(y)\right)$ נספור את המסילה עם סימן $+$, אחרת עם סימן $-$.

דוגמה 1.10.4. נסתכל על הטורוס $M := \mathbb{T}^2$ כמתואר באיור 1.26. נחשב את $\partial_1^{\mathbb{Z}}(p)$. נבחר אוריינטציות של $W^U(p), W^U(m)$. $W^U(p)$ קטע פתוח (בין p ו־m). נבחר אוריינטציה עבורה $\frac{\partial}{\partial x}$ בבסיס חיובי. הקבוצה $W^U(m)=\{m\}$ היא נקודה בודדת עם מרחב משיק $T_mm=\{0\}$, עם בסיס $\varnothing$. נצטרך להחליט האם זה בסיס חיובי או שלילי, ונבחר שזה בסיס חיובי. מ־p ל־m נקבל מסלול אחד חיובי ואחד שלילי, לכן סכום המסלולים עם הסימן שווה 0. אבל, צריך להסתכל על מסלולים אלו לפי האוריינציה של $W^U(p)\cap W^S(m)$. תת־יריעה זאת היא איחוד של שני הקטעים הפתוחים, עם אוריינטציה שהגדרנו על החיתוך. נחשב את האוריינטציה של $W^S(m)$. נצטרך להשלים את $\varnothing$ לבסיס חיובי של T_mM. לכן, האוריינטציה מסכימה עם זאת של M.
עבור s בקטע הימני, $-\nabla F_{(s)}$ בסיס חיובי של $T_sW^U(p)$. נקבל כי $\left(-\nabla F_{(s)},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ בסיס חיובי של T_sM. אז $\left(-\nabla F_{(s)}\right)$ בסיס חיובי של $T_p\left(W^U\cap W^S\right)$. עבור t בקטע השמאלי, נסתכל על $\left(\nabla F_{(t)}\right)$ וזה בסיס חיובי של $W^U(p)$. נשלים לבסיס חיובי $\left(\nabla F_{(t)},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ של $T_tW^S(m)$. נסיק כי $\nabla F_{(t)}$ בסיס חיובי של $T_t\left(W^U(p)\cap W^S(m)\right)$. אז $-\nabla F_{(t)}$ בסיס שלילי. לכן, נספור את המסילה הימנית בסימן $+$ ואת השמאלית בסימן $-$. נקבל כי

$$\partial_1^{\mathbb{Z}}(p) = (1-1)\cdot m = 0.$$

כמו במקרה של $\mathbb{Z}_2$ נקבל גם כאן $\partial_* = 0$ ואז

$$HM_*\left(\mathbb{T}^2;\mathbb{Z}\right)\cong C_*\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & k=0\\ \mathbb{Z}^2 & k=1\\ \mathbb{Z} & k=2\end{cases}.$$

הערה 1.10.5. נוכל לחשב הומולוגיה עבור חוג כללי (קומוטטיבי עם יחידה) בדומה לחישוב ההומולוגיה מעל $\mathbb{Z}$.

טענה 1.10.6. מתקיים $\partial^2 = 0$.

הוכחה. תהיינה $x \in \mathrm{Crit}_k(F)$ ו־$y \in \mathrm{Crit}_{k-2}(F)$. נרצה להראות שמתקיים

$$\sum_{z \in \mathrm{Crit}_{k-1}(F)} \#\hat{\mu}(x, z) \cdot \#\hat{\mu}(z, y) = 0 .$$

כמו מקודם, נסתכל על מסילות שבורות מ־x ל־y. ראו איור מספיק להראות כי

$$\operatorname{sgn}(\gamma_1) \cdot \operatorname{sgn}(\gamma_2) + \operatorname{sgn}(\delta_1) \cdot \operatorname{sgn}(\delta_2) = 0 .$$

זה נובע מבדיקה ישירה. ∎

פרק 2

תורת minimax

עד כה השתמשנו במידע מורס כדי להסיק על אינווריאנטים של היריעה. כעת, ניעזר באינווריאנטים של היריעה כדי להגיד דברים על פונקציות על יריעה.
ראינו בהקשר זה את אי־שוויוני מורס. עבור $F\colon M\to\mathbb{R}$ פונקציית מורס, מתקיים

$$\#\mathrm{Crit}_k\left(F\right)\geq\dim H_k\left(M\right).$$

אם נעבוד עם כלים מתאימים, נוכל להגיד הרבה יותר.
ראינו גם עבור M סגורה שלכל $F\colon M\to\mathbb{R}$ יש נקודת מינימום ומקסימום, ויש אלגוריתם לחישוב $F\left(m\right),F\left(M\right)$ עבור נקודות מינימום ומקסימום m,M, למשל לפי שיטת ניוטון. נרצה לדעת איך להגיע למידע גם עבור נקודות אוכף.
נניח תחילה כי $\dim M=2$. נדון בקיום נקודות אוכף. מתקיים:

1. $\#\mathrm{Crit}_1\left(F\right)\geq\beta_1$.
2. יש חסם שמשתמש בהתנהגות של F ולא רק בטופולוגיה של M:

$$\#\mathrm{Crit}_2\left(F\right)-\#\mathrm{Crit}_1+\#\mathrm{Crit}_0=\chi:=\beta_2-\beta_1+\beta_0.$$

אכן

$$\begin{aligned}\chi&=\dim\ker\left(\partial_2\right)-\left(\dim\ker\left(\partial_1\right)-\dim\mathrm{Im}\left(\partial_2\right)\right)+\left(\dim C_0-\dim\mathrm{Im}\left(\partial_1\right)\right)\\&=\dim C_2-\dim C_1+\dim C_0\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שמתקיים

$$\dim C_i=\dim\ker\left(\partial_i\right)+\dim\mathrm{Im}\left(\partial_i\right).$$

3. אם M יריעה סגורה וקשירה, מתקיים $\#\mathrm{crit}_1\geq\#\mathrm{Crit}_0-1$:

נסתכל על $M^{F<a}$. כאשר a עובר דרך ערך קריטי, יש הרבה של ידית/ידיות. לכל נקודה קריטית מאינדקס k נדביק $B^k\times B^{m-k}$ לאורך $\partial B^k\times B^{m-k}$. אם $k\geq 2$, ההדבקה היא לאורך קבוצה קשירה $S^{k-1}\times B^{m-k}$ ואז הידית נדבקת לאותו רכיב קשירות. לכן, מספר רכיבי הקשירות יקטן רק עבור $k=1$. אז הידית היא $B^1\times B^{m-1}=I\times B^{m-1}$ ומודבקת לאורך $\partial I\times B^{m-1}$. לכן $\#\mathrm{Crit}_1$, מספר נקודות הקריטיות, הוא לפחות מספר נקודות המינימום פחות 1. אם נסדר את נקודות הקריטיות של F לפי הגובה, יהיו $p_1,\ldots,p_k\in\mathrm{Crit}_0\left(F\right)$, נקודות קריטיות $q_1,\ldots,q_{k-1}\in\mathrm{Crit}_1\left(F\right)$ כאשר $F\left(q_i\right)\geq F\left(q_{i+1}\right)$.

ניתן להוכיח זאת גם עם הומולוגיה, כמתואר בתרגיל הבא.

תרגיל 19. 1. תהי M יריעה קשירה ויהיו $x,y\in\mathrm{Crit}_0\left(F\right)$. אז $[x]=[y]\in HM_0\left(F\right)$.

2. אם

$$\begin{aligned}\alpha\colon C_0&\to\mathbb{Z}_2\\\sum a_ix_i&\mapsto\sum a_i\end{aligned}$$

אז $\mathrm{Im}\left(\partial_1\right)=\ker\alpha$.

3. מתקיים

$$HM_0\left(F\right)=\ker\left(\partial_0\right)\big/\mathrm{Im}\left(\partial_1\right)\cong\mathbb{Z}_2.$$

4. הסיקו שמתקיים
$$\dim C_0 - 1 = \dim \mathrm{Im}\,(\partial_1) \le \dim C_1$$
ולכן
$$\#\mathrm{Crit}_0 - 1 \le \dim \mathrm{Crit}_1.$$

משפט 2.0.1 (Mountain Pass Theorem). נסתכל על מסילות $\gamma\colon [0,1] \to M$ עם
$$\gamma(0) = x$$
$$\gamma(0) = y.$$
עבור x, y בסביבת נקודת אוכף p מתקיים
$$F(p) = \inf_{\gamma} \max_{z\in\gamma} F(z).$$

ההוכחה הבאה מתוך הספר Riemannian Geometry & Geometric Analysis של Jost.

למה 2.0.2. נניח כי M יריעה / יריעת הילברט (אנלוג אינסוף־מימדי של יריעה) שלמה וקשירה מסילתית ותהי $F \in C^1(M, \mathbb{R})$. נניח שפתרון המד"ר המוגדרת על ידי $-\nabla F$ קיים לכל $x \in M$ ולכל $t \ge 0$.
נסתכל על $MF < a$ ונניח כי יש לה שני רכיבי קשירות שונים A, B. נניח גם ש־F מקיימת את תנאי Palais-Smale שנתאר בהמשך.
אז קיימת נקודה קריטית p של F עבורה
$$F(p) = K = \inf_{\substack{\gamma\in C^0([0,1],M)\\ \gamma(0)\in A\\ \gamma(1)\in B}} \max_{z\in\gamma} F(z) \ge a.$$

הגדרה 2.0.3 (תנאי Palais-Smale). $F\colon M \to \mathbb{R}$ פונקצייה C^1 מקיימת את תנאי Palais-Smale אם לכל סדרה $x_1, \ldots, x_n, \ldots \in M$ עבורה

1. $|F(x_i)| \le C$
2. $\|\mathrm{d}F(x_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

קיימת תת־סדרה מתכנסת ב־M.

הערה 2.0.4. עבור יריעה סגורה או קומפקטית, תנאי Palais-Smale מתקיים לכל פונקציה, ולכן נובע משפט ה־Mountain-Pass. התנאי מתקיים גם כאשר M אינה קומפקטית אך $F\colon M \to \mathbb{R}$ העתקה proper.
כאשר M אינסוף־מימדית (ולכן לא קומפקטית, גם מקומית), תנאי Palais-Smale מהווה תחליף לתכונות של קומפקטיות.

נוכיח כעת את הלמה, שממנה נובע המשפט.

הוכחה.
- נראה ש־K ערך קריטי של F. נבחר סדרה $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_+} \subseteq M$ עבורה $F(x_i) \to K$.
אם $\|\mathrm{d}F(x_i)\| \to 0$ לפי Palais-Smale יש תת־סדרה מתכנסת x_{i_k} ל־x_0. אז
$$F(x_0) = \lim F(x_{i_k}) = k$$
$$\mathrm{d}F(x_0) = \lim \mathrm{d}F(x_{i_k}) = 0$$
ואז x_0 הנקודה הנדרשת. אחרת, לכל סדרה כזאת לא מתקיים $\mathrm{d}F(x_i) \to 0$. אז יש $\alpha, \eta > 0$ עבורן $\|\mathrm{d}F(x)\| > \alpha$ לכל $|F(x) - K| < \eta$.
- נבחר $\gamma\colon [0,1] \to M$ עם $\gamma(0) \in A$, $\gamma(1) \in B$ ו־$\max_{z\in\gamma} F(z) \le K + \eta$. נפעיל את הזרימה Φ^t של $-\nabla F$ על γ. נקבל
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F\left(\Phi^t(x)\right)\right) = \ldots$$
$$= -\left\|\mathrm{d}F\left(\Phi^t(x)\right)\right\|^2$$
$$\le -\alpha^2.$$
כאשר $K - \eta \le F \le K + \eta$. עבור $t_0 = \frac{2\eta}{\alpha^2}$ נקבל
$$F\left(\Phi^{t_0}(\gamma)\right) \le K - \eta$$
וזאת סתירה לשלב הקודם. ■

דוגמה 2.0.5. תהי $F(x,y)=x\cdot y$ על $\mathbb{R}^2$. היא מקיימת את תנאי Palais-Smale (תרגיל). ב־$M^{<0}$ נקבל שני רכיבי קשירות a,b. נקבל

$$\inf\max F(\gamma)=0=F(0).$$

תרגיל 20. הוכיחו את הגירסא הבאה של משפט ה־Mountain-Pass.

משפט 2.0.6. תהיינה $x\in A, y\in B$ נקודות בשני רכיבי קשירות של $M^{<a}$. אז

$$K=\inf_{\substack{\gamma(0)=x\\ \gamma(1)=y}}\max_{s\in\gamma}F(s)$$

ערך קריטי.

תרגיל 21. הראו שקיימת סדרה $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ וקיימת סדרה $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq[0,1]$ עם

$$\begin{aligned}\gamma_k\colon\ &[0,1]\to M\\ \gamma_k(0)&=x\\ \gamma_k(1)&=y\\ s_k&\to p\in\mathrm{Crit}(F)\\ F(p)&=K.\end{aligned}$$

הערה 2.0.7. F במשפט הנ"ל אינה חייבת להיות פונקציית מורס. מספיק שהיא תהיה C^1.
אם F כן מורס, p אוכף מאינדקס 1.

דוגמה 2.0.8. נסתכל על השיכון הסטנדרטי של S^2 ב־$\mathbb{R}^2$, עם פונקציית הגובה F. אם נוסיף מימדים ונגדיר את F בהתאם, נוכל לקבל שהקוטב הצפוני N הוא נקודת אוכף מאינדקס 2. לא נוכל לקבל מסילה בין שתי נקודות ב־$M^{<a}$ שעוברת במקסימום בעזרת המשפט. ננסח לכן את ההכלה הבאה עבור אוכפים מאינדקס גבוה יותר.

משפט 2.0.9. תהי M קשירה ותהי $F\in C^1(M,\mathbb{R})$. נניח שיש פתרון למד"ר המוגדרת לפי $-\nabla F$. נניח ש־F מקיימת את תנאי Palais-Smale ונניח כי $\varphi\colon S^k\to M^{<a}$ אינה הומוטופית להעתקה הקבועה.
אז קיימת $p\in\mathrm{Crit}(F)$ עבורה

$$F(p)=\inf_{\mathcal{U}\colon D^{k+1}\to M\ \mathcal{U}|_{\partial D}\approx\varphi}\ \max_{s\in\mathcal{U}(D)}F(s).$$

הערה 2.0.10. הלמה עבור המשפט המקורי היא המקרה $k=0$.

הוכחה. כמו במשפט המקורי. ■

גירסא כללית יותר של המשפט היא הבאה.

משפט 2.0.11. תהי M יריעה קשירה, תהי $F\in C^1(M,\mathbb{R})$, ונניח שקיים פתרון למד"ר שמוגדרת על ידי $-\nabla F$ לכל $x\in M, t>0$ וכי F מקיימת את תנאי Palais-Smale. תהי U משפחה של תת־קבוצות של M עבורה $\varphi^t(\mathcal{U})\in U$ לכל $\mathcal{U}\in U$ ולכל $t>0$. נסמן

$$K:=\inf_{\mathcal{U}\in U}\max_{s\in\mathcal{U}}F(s).$$

אם $K>-\infty$, יש נקודה קריטית $p\in\mathrm{Crit}(F)$ עבורה $K=F(p)$.

הערה 2.0.12. הגירסא הקודמת של המשפט נובעת מהבחירה

$$U=\left\{\mathrm{Im}(\mathcal{U})\ \middle|\ {}^{\mathcal{U}\colon D^{k+1}\to M}_{\mathcal{U}|_{\partial D}\approx\varphi}\right\}.$$

הוכחה. כמו במשפט המקורי. ■

דוגמה 2.0.13. ניקח $U=\{\{p\}\}_{p\in M}$. אז

$$K=\inf_{p\in M}\max_{q\in\{p\}}F(q)=\inf(F)$$

ואז אם $K>-\infty$ נקבל $K=\min(F)$ וזה ערך קריטי.

דוגמה 2.0.14. תהי $N=S^k$ (או יריעה אחרת) ותהי $F\colon M\to\mathbb{R}$ חסומה מלמטה. נסתכל על $f\colon N\to M$ חלקות (/ רציפות) ותהי

$$U=\{\mathrm{Im} f\mid f\approx f_0\colon N\to M\}.$$

כאשר $N=S^k$ נקבל

$$U=\left\{\mathrm{Im} f'\ \middle|\ [f']=[f_0]\in\pi_k(M)\right\}.$$

אם $M=N=S^n$ נקבל מהמשפט את הנקודה הקריטית שהיא הקוטב הצפוני.

דוגמה 2.0.15 (דוגמא חשובה- minimax הומולוגי). תהי $F\colon M \to \mathbb{R}$ חסומה מלמטה. תהי $\alpha \in H_*(M)$. תהי $\varphi = \{\varphi_i\colon \Delta_i \to M\}$ שרשרת סגורה עבורה $\alpha = [\varphi]$. נסתכל על כל האפשרויות של φ כזאת.

$$U_\alpha := \{\operatorname{Im}\varphi\}_{[\varphi]=\alpha}.$$

נפעיל את המשפט ונקבל כי

$$K_\alpha = \inf_{[\varphi]=\alpha} \max_{s\in\operatorname{Im}\varphi} F(s)$$

ערך קריטי. נקרא לערך זה ה־spectral invariant / spectral number של F.

נרצה לדעת מה מספר הנקודות הקריטיות שנוכל למצוא בתור K_α. נסתכל על כך בדוגמא הבאה.

דוגמה 2.0.16. נסתכל על הטורוס כבאיור
מתקיים $K_{[a]} = F(x)$ וגם $K_{[b]} = F(y)$. במקרה זה יש רק שתי נקודות אוכף, ולא משנה איזו מחלקת הומולוגיה ניקח נקבל את אחת הנקודות הקריטיות האלו. למשל, $K_{2[a]} = K_{[a]} = F(x)$ וגם $K_{[a+b]} = K_{[a]}$. גם במקרה כללי יותר בו יש יותר נקודות קריטיות מאינדקס 1 נוכל לקבל מצב דומה בו לא כולם מתקבלים באופן זה.

נשאל מתי $K_\alpha \neq K_\beta$. לשם פשטות נניח כי M^n סגורה. נניח ש־$\alpha,\beta \in H_*(M)$ בלתי־תלויים לינארית (אחרת יש להם אותו מספר ספקטרלי). נניח שקיים $a \in H_{<n}(M)$ עבורו $\alpha = \beta \cdot a$ (כאשר זה intersection product).

משפט 2.0.17. נניח של־F יש מספר סופי של נקודות קריטיות (אך יתכן ש־F אינה מורס. אז במצב הנ"ל $K_\alpha < K_\beta$.

הוכחה (רעיון ההוכחה). 1. ניקח שתי פונקציות מורס F', F'' גנריות ונבחר $p \in \operatorname{Crit}(F')$ ו־$q \in \operatorname{Crit}(F'')$. אז

$$\rho(p,q) = \sum_{r\in\operatorname{Crit}(F')} n_2(p,q;r)\cdot r.$$

לכל r כזאת מתקיים $F'(r) \le F'(p)$.
באופן כללי יותר, אם

$$\alpha = \sum a_i p_i$$
$$\beta = \sum b_i q_i$$
$$\gamma = c_i r_i$$

וגם

$$\rho(\alpha,\beta) = \gamma$$

אז

$$\max_{\forall i:\ a_i\neq 0} F'(p_i) \ge \max_{\forall j:\ c_j\neq 0} F'(r_i).$$

2. אם

$$\alpha \in HM_*(F')$$
$$\beta \in HM_*(F')$$
$$a \in HM_*(F'')$$

אז

$$\min_{\alpha=\sum[a_i p_i]} \max_{a_i\neq 0} F'(p_i) \ge \min_{\beta=[\sum b_j q_j]} \max_{b_i\neq 0} F'\left(q_j\right).$$

3. יהיו $\alpha \in H_*(M)$ ו־$\bar\alpha \in HM_*(F,g)$ עבור (F,g) Morse-Smale. תהי

$$\varphi\colon HM_* \to H_*$$
$$\bar\alpha \to \alpha$$

ההעתקה הקנונית. אז

$$K_\alpha = \min_{[\sum a_i p_i]=\bar\alpha} = \max_{a_i\neq 0} F(p_i).$$

כלומר, minimax ההומולוגי זהה לזה של הומולוגיית מורס, מהשלב הקודם.

4. תהיינה $F,G\colon M \to \mathbb{R}$. אז

$$\left|K_\alpha^F - K_\alpha^G\right| \le d_{C^0}(F,G).$$

זה מתקבל מתוך ההגדרה.

5. תהי $F:M\to\mathbb{R}$ כללית. נוכל לקרב את F בטופולוגיית C^0 על ידי פונקציית מורס F'. אז

$$K_{\alpha}^{F'}\le K_{\beta}^{F'}.$$

כאשר $F'\xrightarrow[C^0]{}F$ נקבל $K_{\alpha}^{F}\le K_{\beta}^{F}$. נותר להראות שלא ייתכן שוויון.

6. נסמן את הנקודות הקריטיות עם הערך הקריטי K_β על ידי $p_1,\ldots,p_m$. כיוון שיש מספר סופי של נקודות קריטיות, יש $\chi<F(\beta)$ עבורו לכל $q\in\mathrm{Crit}(F)$ עם $F(q)<K_\beta$ מתקיים $F(q)<\chi$.

נראה כי $K_\alpha\le\chi$. נבחר F'' פונקציית מורס כך ש־$p_1,\ldots,p_m\notin W^U(q_i)$ לכל q_i עם $\mu(q_i)<n$. זה מתקיים עבור F'' גנרית, כי ל־$W^U(q_i)$ יש קו־מימד חיובי.

ניקח פרטורבציה של F ל־F' פונקציית מורס שהיא קרוב ב־C^0 ל־F. כתוצאה, הנקודות הקריטיות $p_1,\ldots,p_m$ עלולות להתפצל למספר נקודות קריטיות בסביבות קטנות של ה־p_i. אם מדובר בפרטורבציה קטנה, $W^U\left(q_j\right)$ יפספסו את הסביבות שבהן מופיעות הנקודות הקריטיות האלה.

נקבל מהגדרת הכפל ρ כי לכל הנציגים של $\beta\cdot a=\left[\sum c_ir_i\right]$ מתקיים $\max F'(r_i)\le\chi$. אז $K_{\beta\cdot a}\le\chi<K_\beta$, ולכן $K_\alpha<K_\beta$, כנדרש. ∎

מסקנה 2.0.18. תהי M יריעה n־מימדית ונניח כי $a_i\in H_{<n}(M)$ מקיימים $a_1\cdot\ldots\cdot A_k\neq 0$. אז

$$K_{a_1\cdot\ldots\cdot a_k}<K_{a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}}<\ldots<K_{a_1}<K_{[M]}.$$

אז יש לפחות $k+1$ נקודות קריטיות לכל $F\in C^1(M,\mathbb{R})$ (גם אם F אינה מורס!).

דוגמה 2.0.19. נסתכל על הטורוס $\mathbb{T}^2$ באיור
מתקיים

$$\alpha\cdot\beta=[\mathrm{pt}]\neq -H_*\left(\mathbb{T}^2\right).$$

אז לכל $F:\mathbb{T}^2\to\mathbb{R}$ יש לפחות 3 נקודות קריטיות שונות.
נסתכל באופן כללי יותר על $\mathbb{T}^n$. מתקיים

$$H_{n-1}=\mathbb{Z}\left\langle T_1,\ldots,T_n\right\rangle$$

עבור $T_i=\left(S^1\right)^{i-1}\times\{p\}\times\left(S^1\right)^{n-i}$ וגם

$$[T_1]\cdot\ldots\cdot[T_n]=[\mathrm{pt}]\neq 0$$

ולכן לכל $F\in C^1(\mathbb{T}^n,\mathbb{R})$ יש במקרה זה לפחות $n+1$ נקודות קריטיות.
להשוואה, $\dim H_*\left(\mathbb{T}^2\right)=4$ ולכן לכל פונקציית מורס $F:\mathbb{T}^2\to\mathbb{R}$ יש לפחות 4 נקודות קריטיות. באופן כללי, $d\,\mathrm{Im}\,H_*(\mathbb{T}^n)=2^n$ ואז לכל $F:\mathbb{T}^n\to\mathbb{R}$ מורס יש לפחות 2^n נקודות קריטיות.

דוגמה 2.0.20. נסתכל על $\mathbb{CP}^n$. מתקיים

$$H_k(\mathbb{CP}^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & k\in 2\mathbb{Z}\cap[0,2n]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

ומעבר לכך

$$H_{2n-2i}=\mathbb{Z}\left\langle a^i\right\rangle$$

כאשר $H_0=\mathbb{Z}\left\langle \mathrm{pt}\right\rangle=\mathbb{Z}\left\langle a^n\right\rangle$. אז

$$H_*(\mathbb{CP}^n)\cong \mathbb{Z}[a]\big/a^{n+1}=0.$$

נקבל כי $a^n\neq 0$ ולכן יש לפחות $n+1$ נקודות קריטיות.
במקרה זה, קיימת פונקציית מורס $F:\mathbb{CP}^n\to\mathbb{R}$ עם $n+1$ נקודות קריטיות בלבד.

הגדרה 2.0.21 (cup-length). עבור יריעה M נגדיר

$$\mathrm{CL}(M):=\max\left\{k\in\mathbb{N}\;\middle|\;\exists w_1,\ldots,w_k\in H^{\ge 1}(M):w_1\cup\ldots\cup w_k\neq 0\in H^*\right\}.$$

הערה 2.0.22. מתקיים $\mathrm{CL}(M)\le\dim M$.

הערה 2.0.23. מדואליות פואנקרה נקבל כי

$$\mathrm{CL}()=\max\left\{k\in\mathbb{N}\mid \exists a_1,\ldots,a_k\in H_{<n}(M):a_1\cdot\ldots a_k\neq 0\right\}.$$

מסקנה 2.0.24. מספר הנקודות הקריטיות של $F\in C^1(M,\mathbb{R})$ הוא לפחות $\mathrm{CL}(M)+1$.

פרק 3

תורת מורס ביריעות אינסוף מימדיות

הגדרה 3.0.1 (מסילה גיאודזית). תהי (M,g) יריעה רימנית. $\gamma\colon I\to M$ מסילה גיאודזית אם היא length-minimizing באופן מקומי.

משפט 3.0.2 (Ltusternik-Fet). תהי M יריעה סגורה. קיימת עקומה גיאודזית סגורה על M.

3.1 הכנות

נרצה להפעיל את תורת מורס על מרחב הלולאות $C^{\infty}\left(S^{1},M\right)$. קו גיאוזי יהיה בדיוק נקודה קריטית של

$$\operatorname{len}(\gamma)=\int_{S'}\|\dot{\gamma}\|\,\mathrm{d}t.$$

הערה 3.1.1. 1. נצטרך לשלב את הנגזרות $\dot{\gamma}$ לתוך המבנה.

2. בדרך כלל, נרצה לחסום מלמעלה את אורך הלולאות. נסתכל על

$$\{\gamma\mid\operatorname{len}(\gamma)\leq K\}.$$

3. נצטרך את מרחב סובולב $\Lambda_0:=H^{1,2}\left(S^{1},M\right)$ שהוא יריעת הילברט.

4. נעבוד עם קוארדינטות מקומיות. עבור מסילה γ ב־M ניקח מפת קוארדינטות $\mathcal{U}$ ל־$\mathbb{R}^n$. נתאר את $\hat{\gamma}\in H^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$ כדי להבין את $H^{1,2}$ לוקלית.

הגדרה 3.1.2. נגדיר

$$H^{1}(I,\mathbb{R}^n)=H^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$$

להיות הסגור של $C^{\infty}(I,\mathbb{R}^n)$ ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle_{1,2}=\int_a^b\langle\gamma_1(t),\gamma_2(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}\,\mathrm{d}t+\int_a^b\langle\dot{\gamma}_1(t),\dot{\gamma}_2(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}\,\mathrm{d}t.$$

זה מגדיר מכפלה פנימית על $H^{1,2}$ שהופכת אותו למרחב הילברט.

משפט 3.1.3 (משפט השיכון של סובולב). כל $\gamma\in H^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$ רציפה.

נניח כי M יריעה רימנית סגורה. נגדיר

$$\Lambda_0:=H^{1,2}\left(S^{1},M\right)=\left\{\gamma\colon S^{1}\to M\;\middle|\;\hat{\gamma}\in H^{1}(I,\mathbb{R}^n)\right\}$$

ואלו מסילות שמקומית שייכות ל־H^{1}.

עובדה 3.1.4. כל $\gamma\in\Lambda_0$ רציפה.

יכולות לעניין אותנו מספר פונקציות. נגדיר

$$\mathrm{len}\colon \Lambda_0 \to \mathbb{R}$$
$$.\gamma \mapsto \int_a^b \left\|\gamma'(ss)\right\| \mathrm{d}s$$

נקודות קריטיות של len הן קווים גיאודזיים סגורים כיוון שהן locally length-minimizing. מסילה ב־Λ_0 היא הומוטופיה של לולאות $\gamma_t\colon S^1 \to M$. וקטור משיק ל־Λ_0 ב־$\gamma_0 \in \Lambda_0$ הוא

$$.\frac{\partial}{\partial t}\gamma_t(s) \in T_{\gamma_0(M)}$$

אם נקבע $s = \mathrm{const}(t)$ נקבל מסילה $\gamma_t(s)$. אז הוקטור המשיק הוא וקטור משיק של מסילה זאת.
נוכל גם לתאר את השדה הוקטורי לאורך γ_0 שמשיק ל־M על ידי $\eta \in T_{\gamma_0}\Lambda_0$ אם ורק אם $\eta\colon S^1 \to TM$ מקיימת $\eta(s) \in T_{\gamma_0(s)}M$ וגם $\eta \in H^{1,2}\left(S^1, TM\right)$. במקרה זה η בפרט רציפה.
נסתכל על נקודת מינימום γ של len. אם $\mathrm{len}(\gamma) = 0$ נקבל כי γ קבועה. אבל, אם $\mathrm{len}(\gamma) > 0$ אז γ קו גיאודזי (לא טריוויאלי). נניח כי M קשירה. נניח גם כי $\pi_1(M,*) \neq \{0\}$. זה שקול לכך ש־$\pi_1(M) \neq \{0\}$ כאשר אלו כל הלולאות הרציפות עד כדי הומוטופיה (בלי נקודת בסיס). אז יש לולאה שאינה כוויצה ב־M.
נקבע $\gamma \in \pi_1(M) \setminus \{0\}$ ונגדיר

$$.\Lambda_\alpha \coloneqq \{\gamma \in \Lambda_0 \mid [\gamma] = \alpha\}$$

len מקיימת את תנאי Palais-Smale. לכן קיימת $\gamma_\alpha \in \alpha$ עבורה

$$.\ \mathrm{len}(\gamma_\alpha) = \inf_{\gamma\in\alpha} \mathrm{len}(\gamma)$$

מתקיים $\mathrm{len}(\gamma_\alpha) > 0$ כי אחרת γ_α קבועה ואז $[\gamma_\alpha] = [\mathrm{const}] = 0$. לכן γ_α נקודת מינימום לא קבועה של len, שהיא לולאה גיאודזית (לא טריוויאלית). ראו איור לכן קיימים קווים גיאודזיים סגורים לכל יריעה M פשוטת קשר. באופן כללי, Λ_0 לאו דווקא קשירה, ומחלקות הקשירות שלה הן $\pi_1(M)$.

שאלה 3.1.5. יהי $n > 1$. איך נמצא קווים גיאודזיים ב־S^n?

משפט 3.1.6 (Birkhoff). לכל מטריקה רימנית על S^n, קיים מסלול גיאודזי סגור ב־S^n.

משפט 3.1.7 (Lyusternik-Shnirelman). לכל מטריקה רימנית על S^n, קיימים לפחות 3 קווים גיאודזיים סגורים ופשוטים.

הערה 3.1.8. $\mathrm{len}\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ בחירה לא מוצלחת. אם $\gamma\colon S^1 \to M$ שייכת ל־$\mathrm{Crit}(\mathrm{len})$, גם כל פרמטריזציה אחרת של γ היא נקודה קריטית של len. בפרט, הנקודות הקריטיות של len מגיעות במשפחות אינסוף מימדיות. אז לא נוכל להיעזר בתורת מורס.

הגדרה 3.1.9 (אנרגיה (Action)). עבור $\gamma \in \Lambda_0(M)$ ומטריקה רימנית g על M נגדיר

$$.E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_{S^1} \left\|\gamma'\right\|_g \mathrm{d}s$$

הערה 3.1.10. נקודות קריטיות של E הן מסילות γ עם פרמטריזציה במהירות קבועה $\|\gamma'\|_g = \mathrm{const}(s)$. הן גם נקודות קריטיות עבור len. אם $\gamma\colon S^1 \to M$ נקודה קריטית של E, גם $\gamma(\cdot+\theta)\colon S^1 \to M$ נקודה קריטית של E.
אבל, זה החופש היחיד כאן ולכן לוקלית יש S^1 פרמטריזציות שונות לכל ערך של E. אז הנקודות הקריטיות מופיעות במשפחות של S^1 ונוכל במקרה זה להיעזר בתורת Morse-Bott.
דרך נוספת תהיה לעשות פרטורבציה של E ולהגיע לפונקציית מורס אמיתית: נגדיר

$$\hat{E} \coloneqq \int_{S^1} \left\|\gamma'\right\|_{g(s)} \mathrm{d}s$$

עבור

$$g_{(s)}\colon S^1 \to \mathrm{RiemannianMetricson}M$$

משפחה רציפה של מטריקות רימניות. זה מתחבר לתורת Floer שמרכזה היא הכללה של תורת מורס למקרה האינסוף־מימדי.

הגדרה 3.1.11 (טופולוגיה על Λ_0). נגדיר טופולוגיה על Λ_0 על ידי $\gamma_n \to \gamma$ אם

1. $\gamma_n \to \gamma$ יוניפורמית. item| $E(\gamma_n) \to E(\gamma)$.

הערה 3.1.12. ההתכנסות הנ"ל שקולה להתכנסות של נציגים מקומיים ב־$\hat{\gamma}$ ב־$\hat{\gamma}_n \to \hat{\gamma}$ ב־$H^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$ בכל מפה של M. בפרט, ניתן במקרה זה למצוא כיסויים $S^1 = \bigcup_{i\in[m]} V_i$ כאשר $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq \bigcup_{i\in[m]} U_i$, כאשר $\gamma(V_i) \subseteq U_i$, וגם ל־$\gamma_k(V_i) \subseteq U_i$ עבור k גדול מספיק.
עבור $\xi \in C^\infty(I,\mathbb{R}^n)$ ועבור $\varepsilon > 0$ קטן מספיק מתקיים

$$\forall s \in V_i:\ \hat{\gamma}(s) + \varepsilon\xi(s) \in \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

נסמן $u := \hat{\gamma}$ נעשה חשבון ווריאציות של $\hat{\gamma}$. מתקיים

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(E(u+\varepsilon\xi)\right)\Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int_I \sum_{i,j} g_{i,j}(u+\varepsilon\xi)_{(s)}\left(u_i'+\varepsilon\xi_i'\right)\left(u_j'+\varepsilon\xi_j'\right)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_I \sum_{i,j}\left(g_{i,j}(u)\,\xi_i'u_j' + g_{i,j}u_i'\xi_j' + \sum_k \xi_k u_i'u_j'\right)\mathrm{d}s \\
&\overset{g_{i,j}=g_{j,i}}{=} \sum_I \sum_{i,j}\left(g_{i,j}(u)\,u_i'\xi_j' + \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k}\xi_k u_i'u_j'\right)\mathrm{d}s \\
&= -\int_I \sum_{i,j}\left(u_i''(s) + \sum_{k,\ell}\Gamma^i_{k,\ell}(u)\,u_k'u_\ell'\right)\cdot g_{i,j}(u)\,\xi_j\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

כאשר $\Gamma^i_{k,\ell}$ סימני קריסטופל. אם u נקודה קריטית של E מתקיים $\frac{\mathrm{d}}{\varepsilon}(E(u+\varepsilon\xi)) = 0$ לכל ξ ואז מהביטוי האחרון נובע כי

$$\forall s\forall i:\ u_i''(s) + \sum_{k,\ell}\Gamma^i_{k,\ell}u_k'u_\ell' = 0.$$

זאת מד"ר שמתארת קו גיאודזי, ודרך אלטרנטיבית להגדיר קו גיאודזי.
בחישוב הנ"ל בעצם השתמשנו בכך ש־u,ξ הן חלקות (מספיק C^2). זה לא המצב עבור $u \in \Lambda_0$ גנרית.

הגדרה 3.1.13. נגדיר

$$DE(u)(\xi) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}E(u+\varepsilon\xi)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

כאשר נסתכל על $u+\varepsilon\xi$ בקואורדינטות מקומיות, תוצאת הגזירה לא תהיה תלויה בבחירת הקואורדינטות.
נגדיר גם

$$\|DE\|(u) = \sup\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}E(u+\varepsilon\xi)\ \Big|\ \exists\mu:\ {\scriptstyle \xi\in H^{1,2}_{\mathrm{comp}}(V_\mu,U_\mu) \atop \int_{V_\mu}\|\xi'\|^2\mathrm{d}s\le 1}\right\}.$$

הערה 3.1.14. מתקיים $\|DE(u)\| = 0$ אם ורק אם $DE(u): T_u\Lambda_0 \to \mathbb{R}$ העתקת האפס, אם ורק אם u נקודה קריטית של E.

למה 3.1.15. אם $DE(u)$ (או באופן שקול, $\|DE(u)\| = 0$) עבור $u \in \Lambda_0$ אז u חלקה C^∞ ולכן (לפי חישוב קודם) היא לולאה גיאודזית.

הוכחה. ראו Jost-Riemannian Geometry & Geometric Analysis. ■

משפט 3.1.16 (Palais-Smale עבור E). תהי $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda_0$ עבורה

$$\begin{aligned}
&\forall i \in \mathbb{N}:\ E(u_i) \le C \\
&\|DE(u_i)\| \to 0 .
\end{aligned}$$

אז יש תת־סדרה מתכנסת $\gamma_{i_k} \to \gamma \in \Lambda_0$ עבורה γ לולאה גיאודזית.

הגדרה 3.1.17. נגדיר gradient flow ∇E על ידי הדרישה

$$\int_{S^1} g_{(u(s))}\left(\nabla E(u)_{(s)}\,\xi(s)\right)\mathrm{d}s = \langle\nabla E(u),\xi\rangle_{\Lambda_0} = DE_{(u)}(\xi)$$

כאשר אגף שמאל מטריקה רימנית על Λ_0. שדות וקטוריים $H^{1,2}$ לאורך מסילה $u \in \Lambda_0$ זה מרחב הילברט ולכן לכל x מתקיים

$$\langle x,\cdot\rangle = DE(\cdot)$$

לפי ריס. אז $\nabla E(u) = x$. נקבל $\Phi_t \in \Lambda_0$ זרימה עם תנאי התחלה $\Phi(0) = \gamma_0 \in \Lambda_0$ ועם קווי זרימה

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi(t)) = -\nabla E(\Phi(t)).$$

משפט 3.1.18. 1. הפתרון $\Phi(t)$ קיים לכל $t > 0$.

2. מתקיים
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(\Phi_t) \leq 0.$$

הוכחה. אנליזה. ∎

3.1.1 שימושים

דוגמה 3.1.19. באיור המסילות האדומות הן לולאות גיאודזיות מאורך מינימלי, אך יש גם לולאה גיאודזית שאינה מינימלית.

משפט 3.1.20. תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda_0$ לולאות גיאודזיות הומוטופיות ב־Λ_0 אך לא ב־$\Lambda_0^{E<\max(E(\gamma_1),E(\gamma_2))+\varepsilon}$. אז קיימת γ_3 קו גיאודזי עבורה $E(\gamma_3) > E(\gamma_1), E(\gamma_2)$.

הוכחה. γ_1, γ_2 שייכים לרכיבי קשירות שונים של $\Lambda_0^{E<\max(E(\gamma_1),E(\gamma_2))+\varepsilon}$. מתקבל מ־minimax אוכף γ_3 עבור E עם $E(\gamma_3) > E(\gamma_1), E(\gamma_2)$, כנדרש. ∎

הערה 3.1.21. הוכחת minimax נותנת דרך מפורשת להגיע ל־γ_3. תהי $\gamma_t \colon S^1 \to M$ הומוטופיה בין γ_1, γ_2. נגדיר $\gamma_t^k = \Phi^k(\gamma_t)$ עבור $k \in \mathbb{N}$. נסמן
$$\gamma_{\max}^k := \left\{\gamma_{t_0}^k\right\} E\left(\gamma_{t_0}^k = \max E\left(\gamma_t^k\right)\right).$$
לסדרה $\gamma_{\max}^k$ יש תת־סדרה מתכנסת ל־γ_3 שהיא קו גיאודזי.

משפט 3.1.22 (Lyusternik-Fet). על כל יריעה רימנית M סגורה יש לולאה גיאודזית לא קבועה.

הוכחה. אם $\{0\} \neq= \pi_1(M)$. אחרת, $\pi_k(M) \neq \{0\}$ עבור $k \geq 2$ כלשהו (זאת מסקנה ממשפט Hurewicz, לכל k יש העתקה $\pi_k(M) \to H_k(M, \mathbb{Z})$. אם $\pi_k = \{0\}$ לכל k גם $H_k = 0$ וזה לא נכון ליריעות אוריינטביליות, שעבורן $H_n(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$). כלומר, יש $\alpha \in \pi_k(M) \setminus \{1\}$ ונכתוב
$$\alpha = \left\{u \colon S^k \to M \,\middle|\, [u] = \alpha\right\}.$$
בפרט, קיימת $u \colon S^k \to M$ שאינה כוויצה. זאת מתאימה להעתקה $\hat{\varphi} \colon S^{k-1} \to \lambda_0(M)$. [ראו הרצאה 12 עבור פירוט]

תרגיל 22. בנו העתקה זאת עבור $k > 2$.

הומוטופיות $\left\{S^k \to M\right\}$ מתאימות להומוטופיות $\left\{S^{k-1} \to \Lambda_0\right\}$. לכן φ אינה כוויצה אם ורק אם $\hat{\varphi}$ אינה כוויצה. לכן $[\hat{\varphi}] \neq 0 \in \pi_{k-1}(\Lambda_0)$. נפעיל minimax ונקבל γ_3 לולאה קריטית של E עם
$$E(\gamma_3) = \inf_{\substack{u \sim \hat{\varphi} \\ u \colon S^{k-1} \to \Lambda_0}} \max_{\xi \in \mathrm{Im}(u)} E(\xi).$$
אם $E(\gamma > 0)$ סיימנו ו־γ_3 קו גיאודזי.
אחרת, $\inf \max = 0$. אז קיימת $u \approx \hat{\varphi}$ עבורה
$$E(\xi) < \varepsilon$$
לכל $\xi \in \mathrm{Im}(u)$. נקבל כי $\mathrm{len}(\xi) < \varepsilon'$ לכל $\xi \in \mathrm{Im}(u)$ עבור ε' שתלוי ב־ε. אז ξ מוכל במפה סביב מסילה קבועה $u(\text{southpole})$. אז $\mathrm{Im}(\hat{\varphi}) = \mathrm{Im}(\varphi)$ מוכלת במפה קטנה סביב $\varphi(\text{southpole})$, ולכן φ כוויצה, בסתירה לבחירה של φ שאינה כוויצה (כי ניתן לבחור מפה דיפאומורפית לכדור). ∎

פרק 4

חיפוש של קווים גיאודזיים לפי Milnor Morse Theory

4.1 אורך ואנרגיה

תהי (M,g) יריעה רימנית סגורה ותהיינה $p,q\in M$. נחפש קווים גיאודזיים שעוברים ב־p,q. נסמן

$$\Lambda(p,q) := \left\{\gamma\in H^{1,2}(I,M)\ \middle|\ {}^{\gamma(0)=p}_{\gamma(1)=q}\right\}.$$

נסמן גם $\Lambda(M)=\bigcup_{p,q\in M}\Lambda(p,q)$. אלו יריעות הילברט, בדומה למרחב הלולאות שדיברנו עליו קודם. כמו קודם נסתכל על פונקציות האורך והאנרגיה

$$\mathrm{len}(\gamma)=\int_I\left\|\gamma'\right\|\mathrm{d}s$$
$$E(\gamma)=\int_I\left\|\gamma'\right\|^2\mathrm{d}s\ .$$

טענה 4.1.1. מינימום של $E\colon\Lambda(p,q)\to\mathbb{R}$ הוא גם מינימום של len ולכן זה קו גיאודזי מינימלי בין p,q.

הערה 4.1.2. אצלנו "קו גיאודזי מינימלי" הוא קו גיאודזי מאורך מינימלי ועם פרמטריזציה במהירות קבועה.

הוכחה. לפי קושי־שוורץ

$$\mathrm{len}(\gamma)^2=\left|\int_I\left\|\gamma'\right\|\mathrm{d}s\right|^2\le\left|\int_I\mathrm{d}s\right|\cdot\left|\int_I\left\|\gamma'\right\|^2\mathrm{d}s\right|=E(\gamma)$$

ויש שוויון אם ורק אם $\|\gamma'\|, 1$ פרופורציונליות, כלומר אם ורק אם ל־γ פרמטריזציה במהירות קבועה.
יהי γ קו גיאודזי מינימלי בין p,q ותהי δ מסילה כלשהי בין p,q. אז $\mathrm{len}(\delta)\ge\mathrm{len}(\gamma)$ ולכן $\mathrm{len}(\delta)^2\ge\mathrm{len}(\gamma)^2$. כיוון שלקו גיאודזי יש פרמטריזציה במהירות קבועה, ומהאי־שוויון הנ"ל נקבל

$$E(\gamma)=\mathrm{len}(\gamma)^2\le\mathrm{len}(\delta)^2\le E(\delta).$$

לכן E מקבלת מינימום ב־γ. אם $E(\delta)=E(\gamma)$ נקבל מכך כי $\mathrm{len}(\delta)=\mathrm{len}(\gamma)$ ולכן δ קו גיאודזי מינימלי (אולי עם פרמטריזציה לא במהירות קבועה). במקרה זה גם $E(\delta)=\mathrm{len}(\delta)^2$ כלומר δ עם פרמטריזציה במהירות קבועה. נקבל יחד כי δ קו גיאודזי מינימלי (עם פרמטריזציה סטנדרטית). לכן, נקודות המינימום הן קווים גיאודזיים מינימליים. ■

הערה 4.1.3. נקודת המינימום אינה תמיד יחידה. אם נסתכל למשל על נקודות אנטיפודליות על הספירה, יש $\aleph$ קווים גיאודזיים מינימליים שונים בין שתי הנקודות. אז המינימום של E (עבור הנקודות) הוא המינימום של len^2.

4.2 שדות יעקובי

למרחב $\Lambda(M)$ יש תת־מרחב $\Lambda_{\mathrm{Geod}}(M)$ של מסילות גיאודזיות. תת־מרחב זה הוא בעצם תת־יריעה ממימד סופי.
תהי $\gamma\in\Lambda_{\mathrm{Geod}}(M)$ ונסתכל על סביבה של γ ב־$\Lambda_{\mathrm{Geod}}(M)$. אם $\gamma\colon p\to q$, כיוון שקו גיאודזי הוא פתרון של מד"ר, נקבל עבור p' קרובה ל־p מסילה γ' שקרובה ל־γ. אם $\dim M=n$ נקבל משפחה n־פרמטרית של נקודות p' שקרובות ל־p, ובחירה של כיוון של המסילה, ולכן המימד של $\Lambda_{\mathrm{Geod}}(M)$ הוא $2n$.
אם $\gamma\colon I\to M$ קו גיאודזי אז $T_\gamma\Lambda(M)$ שדות וקטוריים לאורך γ. איברי התת־מרחב $T_\gamma\Lambda_{\mathrm{Geod}}\subseteq T_\gamma\Lambda(M)$ נקראים שדות יעקובי. לכל שדה יעקובי J לאורך γ קיימת משפחה γ_t של קווים גיאודזיים עבורם $J=\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_t)\big|_{t=0}$.
חישוב מראה ששדה יעקובי הוא פיתרון של מד"ר עם תנאי התחלה $J(0),J'(0)$:

$$\frac{D^2}{\partial s^2}J(s)+R(J(s),\gamma'(s))\gamma'(s)=0.$$

הערה 4.2.1. D, R הם אופרטורים מגיאומטריה דיפרנציאלית.

דוגמה 4.2.2. נסתכל על $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה הסטנדרטית. תהי $\gamma = p + s(q-p)$. כל קו גיאודזי הוא אפיני, ולכן גזירה תיתן שכל שדה יעקובי הוא שדה אפיני

$$J = J_0 + sJ'(0).$$

דוגמה 4.2.3. נסתכל על S^n עם המטריקה האוקלידית. נסתכל על נקודות אנטיפודליות N, S ועל γ בינן. אם נגזור משפחת מסילות γ_t שמתרחקות מ־γ בכיוון מסוים נקבל שדה יעקובי J שהולך לאורך אותו כיוון ושמקיים $J(0) = J(1) = 0$.

יהי γ קו גיאודזי בין p, q. אז $T_\gamma\Lambda(p,q) \subseteq T_\gamma\Lambda(M)$ אוסף השדות X לאורך γ עבורם $X(0) = X(1) = 0$. נקבל בדוגמא של הספירה כי $J \in T_\gamma\Lambda_{\mathrm{Geod}} \cap T_\gamma\Lambda(p,q)$.

הגדרה 4.2.4. יהי γ קו גיאודזי בין p, q. p, q נקראות צמודות $(\mathrm{conjugate}\ /\ \mathrm{focal})$ לאורך γ אם קיים שדה יעקובי J לאורך γ עבורו $J(0) = J(1) = 0$.

הערה 4.2.5. במקרה של $\mathbb{R}^n$ שתי נקודות שונות אף פעם אינן צמודות. במקרה של S^n שתי נקודות אנטיפודליות הן צמודות לאורך הקו הגיאודזי המינימלי המחבר ביניהן.

הערה 4.2.6. אם יש משפחה γ_t של קווים גיאודזיים עם $p \equiv \gamma_t(0)$ וגם $q \equiv \gamma_t(1)$ אז הנגזרת שלה $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\gamma_t$ היא שדה יעקובי המקיים $J(0) = J(1) = 0$, ואז p, q צמודות לאורך γ.
זה לא תנאי שקול ויתכנו נקודות p, q צמודות בלי משפחה כזאת. ראו איור

עובדה 4.2.7. אוסף הזוגות p, q שצמודות לאורך מסילה γ כלשהי ב־M הוא קבוצה זניחה ב־$M \times M$.

הגדרה 4.2.8 (סדר של נקודות צמודות). אם p, q צמודות לאורך γ נגיד שהסדר $(\mathrm{multiplicity})$ של p, q לאורך γ הוא מימד מרחב שדות יעקובי שמתאפסים בקצוות.

דוגמה 4.2.9. במקרה של p, q אנטיפודליות על הספירה, הסדר שלהן הוא $n-1$.

הפונקציונל $E\colon \Lambda(p,q) \to \mathbb{R}$ חסום מלמטה כי היא חסומה מלמטה על ידי len. נסתכל על

$$\Lambda^a := \{\gamma \in \Lambda(p,q) \mid E(\gamma) \le a\}$$

באנלוגיה לדיון בתחילת הקורס. האוסף $\mathrm{Crit}(E)$ הוא אוסף הקווים הגיאודזיים בין p, q. אפשר לשחזר בקונטקסט זה את כל בניית תורת מורס כפי שעשינו אותה בקורס.

הערה 4.2.10. בניגוד למקרה של לולאות, אין במקרה זה בעיה של שינוי פרמטריזציה. לכן נוכל לצפות שהנקודות הקריטיות יהיו מבודדות.

עבור קו גיאודזי $\gamma \in \Lambda(p,q)$ (כלומר $\gamma \in \mathrm{Crit}(E)$)

$$\mathrm{Hess}_\gamma E\colon T_\gamma\Lambda(p,q) \times T_\gamma\Lambda(p,q) \to \mathbb{R}$$

תבנית בילינארית סימטרית. עבור $X, Y \in T_\gamma\Lambda(p,q)$ ניקח הרחבות $\tilde{X}, \tilde{Y}$ לסביבה של γ ונגדיר

$$\mathrm{Hess}_\gamma E(X,Y) = L_{\tilde{X}} L_{\tilde{Y}}(E)_{(\gamma)}.$$

הגדרה 4.2.11. γ לא מנוונת אם $\ker\left(\mathrm{Hess}_\gamma(E)\right) = \{0\}$.

משפט 4.2.12. $\ker \mathrm{Hess}_\gamma(E)$ הוא מרחב שדות יעקובי לאורך γ שמתאפסים ב־p, q.

מסקנה 4.2.13. γ נקודה קריטית מנוונת אם ורק אם p, q צמודות לאורך γ.

הערה 4.2.14. אם נבחר $p, q \in M$ באופן מקרי, הן אינן צמודות לאורך אף קו γ. במקרה זה ל־E אין נקודות קריטיות מנוונות.

הגדרה 4.2.15 (אינדקס). נגדיר את האינדקס של γ להיות

$$\mu(\gamma) = \max \dim V$$

עבור V תת־מרחבים של $T_\gamma\Lambda(p,q)$ שעליהם Hess שלילי.

דוגמה 4.2.16 (מסילה גיאודזית שבורה). ראו הקלטות.

משפט 4.2.17 (מורס). יהי $\gamma \in \mathrm{Crit}\,(E)$ קו גיאודזי לא מנוון (כלומר $p := \gamma\,(0)\,,q := \gamma\,(1)$ אינן צמודות לאורך γ). אזי

1.

$$.\mu\,(\gamma) = \sum_{\substack{r\in\mathrm{Im}\,\gamma \\ \gamma \text{ in focal are } r,p}} \mathrm{mult}\,(p,r)$$

2. $\mu\,(\gamma) < \infty$, ובפרט יש מספר סופי של נקודות r צמודות ל־p לאורך γ.

נוכל כעת לדבר על $-\nabla E$. אם γ נקודה קריטית לא מנוונת אז יש דיפאומורפיזם

$$.W^U\,(\gamma) \cong B^{\mu(\gamma)}$$

מסקנה 4.2.18. נניח כי $p,q \in M$ אינן צמודות לאורך אף γ באורך לכל היותר $\sqrt{a}$ (כאשר נסתכל על a חסם של אנרגיה; זה מתקיים במקרה הגנרי). נסמן ב־$\Phi_t\colon \Lambda^a \to \Lambda^a$ את הזרימה של $-\nabla E$ עבור $t \geq 0$. מתקיים

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_t\,(\Lambda^a) = \bigcup_{\gamma\in\mathrm{Crit}(E)\cap\Lambda^a} W^U\,(\gamma)$$

וזה איחוד של כדורים פתוחים.

טענה 4.2.19. נניח כי $p,q \in M$ אינן צמודות לאורך אף γ באורך לכל היותר $\sqrt{a}$. אז Λ^a שקול הומוטופית לקומפלקס CW סופי עם תא במימד $\mu\,(\gamma)$ לכל קו גיאודזי γ שמחבר בין p,q ומקיים $\mathrm{len}\,(\gamma) \leq \sqrt{a}$.

הערה 4.2.20. על ידי בחירה סדרה עולה $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ נקבל סדרה עולה מתאימה $(\Lambda^{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ שאיחודה הוא $\Lambda := \Lambda\,(p,q)$. נקבל כי כל Λ^{a_n} הומוטופי לקומפלקס CW C_n, כך ש־C_{n+1} הוא הרחבה של C_n לכל $n \in \mathbb{N}$. טופולוגיה אלגברית מראה שבמקרה זה יש קומפלקס C_∞ שמרחיב את כל הקומפלקסים האלו וששקול הומוטופית ל־Λ.

מסקנה 4.2.21 (המשפט היסודי של תורת מורס). תהי (M,g) יריעה רימנית סגורה (מספיק לדרוש יריעה רימנית שלמה). תהיינה $p,q \in M$ שאינן צמודות לאורך אף קו גיאודזי. אז $\Lambda\,(p,q)$ שקולה הומוטופית לקומפלקס CW בן־מנייה עם תא במימד $\mu\,(\gamma)$ לכל קו גיאודזי γ שמחבר בין p,q.

הערה 4.2.22. במימד סופי ראינו שמתקיים

$$.M = \bigcup_{p\in\mathrm{Crit}(F)} W^U\,(p)$$

המסקנה הנ"ל אנלוגית לכך.

דוגמה 4.2.23. נסתכל על S^n עם המטריקה האוקלידית. אם p,q צמודות, הן אנטיפודליות או שוות. בשני המקרים, הסדר של הזוג הוא $n-1$, כפי שניתן לחשב.
ניקח p,q שאינן צמודות. קווים גיאודזיים בין p,q הם קשתות של מעגל גדול. ניקח את γ_0 להיות הקשת הקצרה ואת γ_1 להיות הארוכה. נסמן ב־p',q' את הנקודות האנטיפודליות ל־p,q בהתאמה, שנמצאות על המעגל הגדול. נגדיר $\gamma_2 := \gamma_0 * \gamma_1 * \gamma_0$. נקודות צמודות ל־$p$ הן p,p' והסדר של שני הזוגות הוא $n-1$. מתקיים

$$\mu\,(\gamma_k) = \sum_{r=\gamma(s)} \mathrm{mult}_{\gamma_{[0,s]}}\,(p,r)$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\mu\,(\gamma_0) &= 0\\
\mu\,(\gamma_1) &= \mathrm{mult}\,(p,p') = n-1\\
\mu\,(\gamma_2) &= 2\,(n-1)
\end{aligned}$$

ובאופן כללי $\mu\,(\gamma_k) = k\,(n-1)$.
נקבל מכאן כי $\Lambda\,(p,q)$ שקול הומוטופית לקומפלקס CW עם תא יחיד במימד $k\,(n-1)$ לכל $k \in \mathbb{N}$.

נסמן ב־$\Omega\,(S^n,p)$ את מרחב הלולאות ב־$H^{1,2}\left(S^1,M\right)$ עם נקודת בסיס p (כלומר עם $\gamma\,(0) = p$). אז

$$.\Lambda\,(p,q) \approx \Omega\,(S^n,p)$$

נקבע $\hat{\gamma}$ מ־q ל־p. אז השקילות מוגדרת על ידי

$$\Omega(S^n, p) \approx \Lambda(p, q)$$
$$\gamma * \hat{\gamma} \leftarrow\!\shortmid \gamma$$
$$\delta \mapsto \delta * (-\hat{\gamma}).$$

נקבל כי $\Omega(S^n, p)$ הומוטופי לקומפלקס CW. אם $n - 1 \geq 2$ (כלומר $n \geq 3$) נקבל חישוב של $H_*(\Omega)$ ייתן $\partial = 0$. אז

$$H_*(\Omega) \cong \mathbb{Z}\langle \text{complex CW the of cells} \rangle \cong \mathbb{Z}\langle \text{q to p from geodesics} \rangle.$$

אז

$$H_m(\Omega(S^n, p)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & m = k(n-1), k \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

טענה 4.2.24. תהי $\Lambda^1(p, q)$ אוסף המסילות $\gamma \colon I \to M$ החלקות למקוטעין מ־p ל־q. אז $\Lambda(p, q) \approx \Lambda^1(p, q)$. גם $\Lambda(p, q) \approx \Lambda''(p, q)$ כאשר $\Lambda''(p, q)$ אוסף המסילות הגיאומטריות למקוטעין.

מסקנה 4.2.25. תהי (S^n, g) עם g לא אוקלידית ותהיינה $p, q \in S^n$ שאינן צמודות לאורך אף קו גיאודזי. אז $\Lambda(p, q) \cong \text{complex CW}$. לפונקציה $E_g \colon \Lambda(p, q) \to \mathbb{R}$ אין נקודות קריטיות מנוונות ואז

$$\#\mathrm{crit}\left(E_g\right) \geq \dim H_*(\Lambda(p, q)) = \infty.$$

לכן יש אינסוף קווים גיאודזיים בין p, q ביחס למטריקה g (עם פרמטריזציה, זה לאו דווקא נכון כשמסתכלים על מסילות בלי פרמטריזציה).
יתר על כך, לכל $k \geq 0$ קיימת מסילה גיאודזית γ_k עם $\mu(\gamma_k) = k(n-1)$.