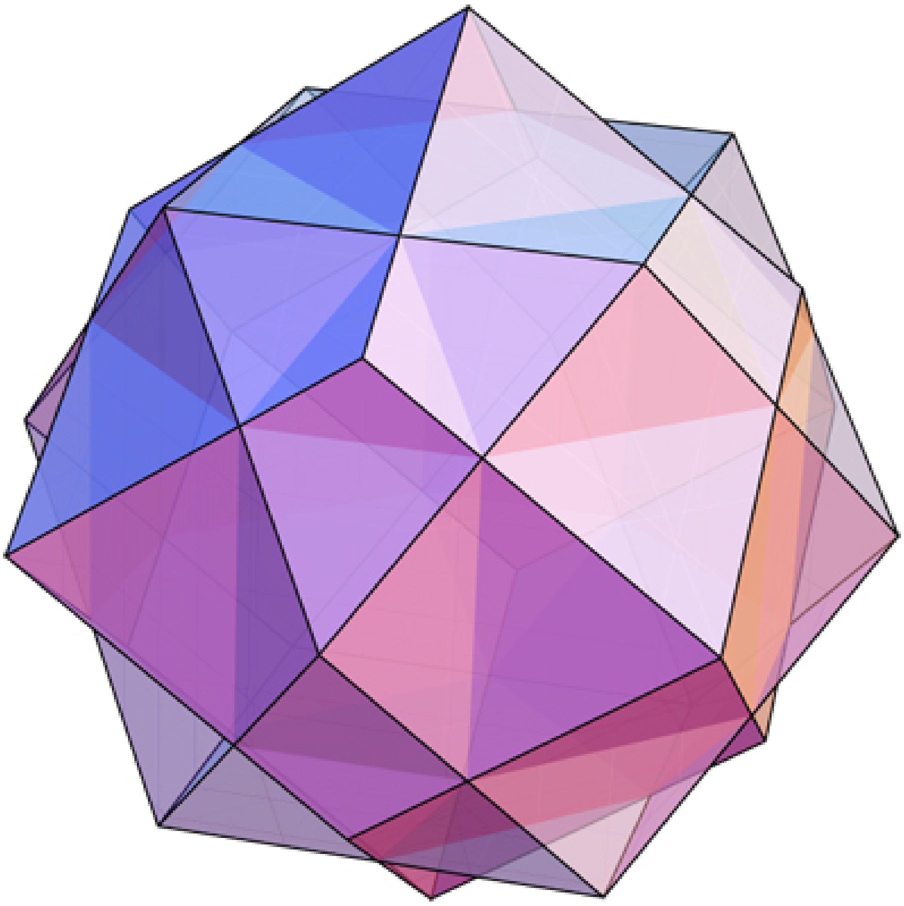
סיכומי הרצאות לשיטות טופולוגיות בקומבינטוריקה
(פיאונים קמורים)
אביב 2021, הטכניון

הרצאותיו של פרופ' רועי משולם

רשימות על ידי אלעד צורני



פוליהדרון קמור בשם Cuboctahedron-Rhombic Dodecahedron Compound.

עדכון אחרון 4 ביולי 2021

תוכן העניינים

הקדמה

הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות.
להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל tzorani.elad@gmail.com.
אלעד צורני.

ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

J. Matoušek, G. M. Ziegler: Around Brouwer's fixed point theorem

J. Matoušek: Using the Borsuk-Ulam Theorem

D. Kozlov, R. Meshulam: Around Helly's Theorem

הקדמה

0.1 תוכן הקורס

0.1.1 פיאונים

נדבר בקורס על קמירות ופיאונים. פיאונים תלת־מימדיים רגולריים הם חמשת הגופים האפלטוניים: האוקטהדר, הקוביה, הסימפלקס, הדודקהדר והאיקוסהדר. קיימות שאלות קשות ופתוחות על פיאונים. אנו נתרכז בדיון בשאלה שהייתה פתוחה עד לפני כחמישים שנה ועוסקת ומספרי הפיאות של פיאונים.
עבור פיאון P נסמן ב־$f_i\left(P\right)$ את מספר הפיאות ה־i־מימדיות של P.
במקרה של P הסימפלקס נקבל

$$\left(f_0, f_1, f_2\right) = \left(4, 6, 4\right).$$

נקרא ל־$\left(f_0, \ldots, f_{d-1}\right)$ ה־f־וקטור ונסמנו f. במקרה של האוקטהדר נקבל $f = \left(6, 12, 8\right)$, ובמקרה של הקוביה נקבל $f\left(8, 12, 6\right)$.
במקרה $d = 2$, פיאון הוא מצולע קמור ומתקיים $f_0\left(P\right) = f_1\left(P\right)$.
במקרה $d = 3$ נוסחאת אוילר אומרת

$$f_0\left(P\right) - f_1\left(P\right) + f_2\left(P\right) = 2.$$

כמו כן, כל צלע משותפת לשתי פיאות. אם $|F|$ מספר הצלעות של פאה F נקבל

$$2f_1\left(P\right) = \sum_F |F| \geq 3 \cdot f_2\left(P\right).$$

נציב זאת בנוסחאת אוילר ונקבל

$$2 = f_0\left(P\right) - f_1\left(P\right) + f_2\left(P\right) \leq f_0\left(P\right) - f_1\left(P\right) + \frac{2}{3}f_1\left(P\right) = f_0\left(P\right) - \frac{1}{3}f_1\left(P\right)$$

ואז

$$f_1\left(P\right) \leq 3\left(f_0\left(P\right) - 2\right).$$

נקבל אז גם

$$f_2\left(P\right) \leq \frac{2}{3}f_1\left(P\right) \leq 2\left(f_0\left(P\right) - 2\right).$$

במקרה בו מספר הצלעות של פאה קבוע, נקבל שוויונים.

0.1.2 בעיית החסם העליון לפיאונים

יהי P פיאון d־מימדי ב־$\mathbb{R}^d$. יהי $f_0\left(P\right)$ מספר קודקודיו.

שאלה 0.1.1. איך אפשר לחסום את $f\left(P\right) = \left(f_1\left(P\right), \ldots, f_{d-1}\left(P\right)\right)$?

שאלה 0.1.2. בהינתן $n := f_0\left(P\right)$ מספר קודקודי P, איך אפשר לתאר את האפשרויות עבור f?

פרק 1

קמירות - גיאומטריה וקומבינטוריקה

1.1 הגדרות

הגדרה 1.1.1 (קטע בין נקודות). עבור $a,b\in\mathbb{R}^d$ נגדיר את הקטע בין a,b להיות
$$[a,b]=\{\lambda a+(1-\lambda)b\mid\lambda\in[0,1]\}\,.$$

הגדרה 1.1.2 (צירוף קמור). יהיו $a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}^d$. צירוף קמור של הם הוא $\sum_{i\in[k]}\lambda_i a_i$ עבור $\lambda_i\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימות $\sum_i\lambda_i=1$.

הגדרה 1.1.3 (קבוצה קמורה). קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^d$ תקרא קמורה אם לכל $a,b\in K$ מתקיים $[a,b]\subseteq K$.

הגדרה 1.1.4 (תת־מרחב אפיני (ישרייה)). $L\subseteq\mathbb{R}^d$ נקרא תת־מרחב אפיני אם $L=v+U$ עבור $U\leq\mathbb{R}^d$ תת־מרחב ועבור $v\in\mathbb{R}^d$.

הגדרה 1.1.5. אם $L=v+U$ כנ"ל נגדיר $\dim L:=\dim U$.

הגדרה 1.1.6 (על־מישור). $L\subseteq\mathbb{R}^d$ נקרא על־מישור אם הוא תת־מרחב אפיני עם $\operatorname{codim}L:=d-\dim L=1$.

הגדרה 1.1.7 (צירוף אפיני). צירוף אפיני של $a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}^d$ הוא צירוף $\sum_{i=1}^k\lambda_i a_i$ כאשר $\sum_{i=1}^k\lambda_i=1$.

תרגיל 1. בהינתן $A\subseteq\mathbb{R}^d$, אוסף הצירופים האפיניים של איברי A, שנסמנו $\operatorname{aff}(A)$, הוא המרחב האפיני המינימלי שמכיל את A.

הגדרה 1.1.8 (קמור של קבוצה). תהי $A\subseteq\mathbb{R}^d$. הקמור של A, שמסומן $\operatorname{conv}(A)$, הוא הקבוצה הקמורה המינימלית שמכילה את A.

טענה 1.1.9. מתקיים
$$\begin{aligned}\operatorname{conv}(A)&=\bigcap_{\substack{K\supseteq A\\ K\text{ is convex}}}K\\&=\left\{\sum_{i\in[[k]}\lambda_i a_i\;\middle|\;\substack{a_1,\ldots,a_k\in A\\ \sum_{i\in[k]}\lambda_i=1\\ \lambda_i\geq 0}\right\}\,.\end{aligned}$$

הוכחה. תהי
$$B:=\left\{\sum_{i\in[[k]}\lambda_i a_i\;\middle|\;\substack{a_1,\ldots,a_k\in A\\ \sum_{i\in[k]}\lambda_i=1\\ \lambda_i\geq 0}\right\}.$$
אז B קמורה כי
$$\begin{aligned}\theta\sum_i\lambda_i a_i+(1-\theta)\sum_i\mu_i a_i&=\sum_i(\theta\lambda_i+(1-\theta)\mu_i)a_i\\&=\sum_i\theta\lambda_i+(1-\theta)\mu_i\end{aligned}$$
וגם
$$1=\theta+1-\theta=\theta\sum_i\lambda_i+(1-\theta)\sum_i\mu_i.$$
B מינימלית כי כל קבוצה קמורה שמכילה את A צריכה להכיל צירופים קמורים של איברי A. ∎

1.2 משפטי הלי, קרתיאודורי ורדון

1.2.1 משפט הלי

משפט 1.2.1 (הלי). נסתכל על $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$. נניח ש־$I_1,\ldots,I_n$ קטעים ב־$\mathbb{R}$ כך ש־$I_i\cap I_j\neq\varnothing$ לכל $i,j\in[n]$. אז

$$\bigcap_{i\in[n]} I_i\neq\varnothing .$$

הוכחה. נוכיח במקרה בו $I_i=[a_i,b_i]$. המקרה הכללי דומה מאוד.
מההנחה, מתקיים

$$c:=\max_{i\in[n]}(a_i)\in\bigcap_{i\in[n]} I_i .$$

■

כעת ננסח את הגרסה המקורית של המשפט.

משפט 1.2.2. יהיו $K_1,\ldots,K_n$ קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ המקיימות

$$\bigcap_{i\in I} K_i\neq\varnothing$$

לכל $I\subseteq[n]$ המקיימת $|I|\leq d+1$. אז

$$\bigcap_{i\in[n]} K_i\neq\varnothing .$$

הלי הוכיח את המשפט בתחילת המאה הקודמת.

1.2.2 משפטי ההפרדה

הגדרה 1.2.3 (). $a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}^d$ יקראו בלתי־תלויות אפינית אם

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i a_i=0\ \wedge\ \sum_{i\in[k]}\lambda_i=0\implies(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=(0,\ldots,0) .$$

טענה 1.2.4. התנאים הבאים שקולים עבור $a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}^d$.

1. $a_1,\ldots,a_k$ בלתי־תלויות אפינית.
2. לכל $i\in[k]$,
$$a_i\notin\operatorname{aff}(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_k) .$$
3. $\dim\operatorname{aff}(a_1,\ldots,a_k)=k-1$.
4. $a_1-a_k,\ldots,a_{k-1}-a_k$ בלתי־תלויים לינארית.
5. $$(a_1,1),\ldots,(a_k,1)$$
בלתי־תלויים לינארית.

הוכחה. **1 גורר 5:** אם $(a_1,1),\ldots,(a_k,1)$ תלויים לינארית, ניתן לכתוב

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i(a_1,1)=0$$

כאשר $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\neq0$. אז

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i a_i=0$$

וגם

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i=0 .$$

בסתירה לאי־תלות אפינית.

5 גורר 1: בדומה לכיוון הקודם.

1 גורר 2: נניח בשלילה שמתקיים $a_k \in \text{aff}\left(a_1, \ldots, a_{k-1}\right)$. אז

$$a_k = \sum_{i\in[k-1]} \lambda_i a_i$$

וגם

$$\sum_{i\in[k-1]} \lambda_i = 1 .$$

אז

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{k-1} a_{k-1} - a_k = 0$$

וסכום המקדמים הוא

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

בסתירה לתלות האפינית של $a_1, \ldots, a_k$.

2 גורר 1: באופן דומה לכיוון הקודם. ■

הגדרה 1.2.5. בהינתן $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ו־$\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר את העל־מישור

$$H_{u,\alpha} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \cdot u = \alpha\right\}$$

כאשר

$$x \cdot u = \sum_{i\in[d]} x_i u_i .$$

נגדיר גם את חצאי המרחב הסגורים

$$H^+_{u,\alpha} \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \cdot u \geq u\right\}$$
$$H^-_{u,\alpha} \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \cdot u \leq u\right\}.$$

משפט 1.2.6 (משפט ההפרדה I). תהי $K \subseteq \mathbb{R}^d$ קמורה וסגורה ותהי $p \in \mathbb{R}^d \setminus K$. קיימים u, α כך ש־$p \in H^+_{u,\alpha}$ ו־$K \subseteq H^-_{u,\alpha}$.

הוכחה. תהי $q \in K$ כך ש־
$$\|p - q\| = \min\left\{\|x - p\| \mid x \in K\right\} .$$
יהי H העל־מישור הניצב ל־$p-q$ ועובר דרך q. מפורשות, $H = H_{p-q,(p-q)\cdot q}$. ראשית, כי $p \in H^+_{p-q,(p-q)\cdot q}$ כי $p \cdot (p-q) > (p-q) \cdot q$ כי $\|p-q\|^2 > 0$.
תהי $x \in K$. לכל $t \in (0,1)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\|p - q\|^2 &\leq \|(1-t)\,q + tx - p\|^2 \\ &= \|(p-q) - t\,(x-q)\|^2 \\ &= \|p-q\|^2 - 2t\,(p-q)\cdot(x-q) + t^2\,\|x-q\|^2 .\end{aligned}$$

לכן

$$2t\,(p-q)\cdot(x-q) \leq t^2\,\|x-q\|^2 .$$

נצמצם t ונשאיף $t \to \infty$. נקבל $(p-q)(x-q) \leq 0$ כלומר $(p-q)\cdot x \leq (p-q)\cdot q$ ולכן $x \in H^-_{p-q,(p-q)\cdot q}$.■

משפט 1.2.7 (משפט ההפרדה II). תהי K קומפקטית קמורה ב־$\mathbb{R}^d$ ותהי L קמורה וסגורה ב־$\mathbb{R}^d$. אם $K \cap L = \varnothing$ קיים $H_{u,\alpha}$ עבורו $K \subseteq H^+_{u,\alpha}$ וגם $L \subseteq H^-_{u,\alpha}$.

הוכחה. נעיין בקבוצה $M = K - L$. זאת קבוצה קמורה וסגורה: אם $x_i - y_i \xrightarrow{i\to\infty} z$ יש תת־סדרה $x_{i_k} \xrightarrow{k\to\infty} x \in K$. אז $y_{i_k} \xrightarrow{k\to\infty} x - z$. L סגורה ולכן $x - z \in L$. אז $z = x - (x-z) \in M$.
$K \cap L = \varnothing$ לכן $0 \notin M$, ולכן אפשר להפריד בין 0 ל־M על ידי על מישור $H_{u,\alpha}$, כלומר

$$0 \in H^+_{u,\alpha}$$
$$M = K - L \subseteq H^-_{u,\alpha} .$$

לכן $0 \geq u \cdot 0 = 0$ ומאידך $0 \geq \alpha \geq u \cdot (x-y)$ לכל $x \in K, y \in L$. לכן $u \cdot y \geq u \cdot x$ לכל $x \in K, y \in L$. ניקח $\beta = \max_{x\in K} u \cdot x$. אז לכל $x \in K$ מתקיים $u \cdot x \leq \beta$ ולכל $y \in L$ מתקיים $u \cdot y \geq \beta$. ■

1.2.3 משפטי קרתיאודורי ורדון

משפט 1.2.8 (קרתיאודורי). תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ותהי $p \in \text{conv}(A)$. קיימים $a_1, \ldots, a_{d+1} \in A$ כך שמתקיים $p \in \text{conv}(a_1, \ldots, a_{d+1})$.

הוכחה. יהי $m \in \mathbb{N}_+$ מינימלי כך שקיימים $a_1, \ldots, a_m \in A$ עבורם $p \in \text{conv}(a_1, \ldots, a_m)$. צריך להראות שמתקיים $m \le d+1$. נניח בשלילה שמתקיים $m \ge d+2$. תהי

$$p = \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i$$

כאשר $\sum_{i \in [m]} \lambda_i = 1$ וגם $\lambda_i \ge 0$ לכל $i \in [m]$. נעיין ב־m הוקטורים $(a_1, 1), \ldots, (a_m, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$. יש כאן $d+2$ וקטורים, לכן קיימת תלות לינארית

$$\sum_{i \in [m]} \alpha_i (a_i, 1) = 0\,.$$

בפרט

$$\sum_{i \in [m]} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i \in [m]} \alpha_i a_i = 0$$

ובה"כ קיים $\alpha_i > 0$. תהי

$$I = \{i \in [m] \mid \alpha_i > 0\}.$$

יהי

$$\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = \min\left\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \;\middle|\; i \in I\right\}.$$

אז

$$\begin{aligned}\sum_{i \in [m]} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \cdot \alpha_i\right) a_i &= \sum_{i \in [n]} \lambda_i a_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \sum_{i \in [m]} \alpha_i a_i \\ &= \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i \\ &= p\end{aligned}\,.$$

מצד שני, זהו צירוף קמור: מתקיים

$$\sum_{i \in [m]} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i\right) = \sum_{i \in [m]} \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \sum_{i \in [m]} \alpha_i = 0\,.$$

אם $\alpha_i \ge 0$ מתקיים

$$\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = \left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\right) \alpha_i \ge 0$$

ואם $\alpha_i \le 0$ מתקיים

$$\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i \ge \lambda_i > 0.$$

אבל, זהו צירוף של $m-1$ איברים כי

$$\lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_{i_0} = 0.$$

■

במקרה $d = 2$ משפט רדון אומר שאם $A \subseteq \mathbb{R}^2$ מקיימת $|A| \ge 4$, ניתן לכתוב $A = B \sqcup C$ כאשר

$$\text{conv}\, B \cap \text{conv}\, C \ne \varnothing\,.$$

משפט 1.2.9 (רדון). אם $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^d$ כאשר $m \ge d+2$, יש חלוקה $I \sqcup J \supseteq \{1, \ldots, m\}$ כך שמתקיים

$$\text{conv}\, \{a_i\}_{i \in I} \cap \text{conv}\, \{a_j\}_{j \in J} \ne \varnothing\,.$$

הוכחה. נעיין ב־$\mathbb{R}^{d+1}$ $(a_1, 1), \ldots, (a_m, 1) \in$. מכיוון שהנחנו $m \geq d+2$ קיימת תלות לינארית לא טריוויאלית

$$\sum_{i \in [m]} \lambda_i (a_i, 1) = 0 .$$

אז

$$\sum_{i \in [m]} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i = 0 .$$

נסמן

$$I \coloneqq \{i \in [m] \mid \lambda_i > 0\}$$
$$J \coloneqq \{i \in [m] \mid \lambda_i < 0\}$$

וגם

$$\lambda \coloneqq \sum_{i \in I} \lambda_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j .$$

אז

$$\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} = -\sum_{j \in J} \frac{\lambda_j}{\lambda} = 1 .$$

כמו כן,

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j a_j$$

לכן

$$\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} a_i = -\sum_{j \in J} \frac{\lambda_j}{\lambda} a_j \in \operatorname{conv}(a_i)_{i \in I} \cap \operatorname{conv}(a_j)_{j \in J} .$$

■

הערה 1.2.10. $d+2$ הוא המספר המינימלי שמבטיח תוצאה כזאת, מפני שאם ניקח $a_1, \ldots, a_{d+1}$ וקטורים בלתי־תלויים אפינית, לכל נקודה ב־$\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_{d+1})$ יש הצגה יחידה כצירוף קמור של $a_1, \ldots, a_{d+1}$. למשל עבור $0, e_1, \ldots, e_d$ אין חלוקת רדון.

1.2.4 משפט הלי הכללי

משפט 1.2.11 (הלי). תהי $\mathcal{K}$ משפחה סופית של קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ כך שלכל $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}$ המקיימת $|G| \leq d+1$ מתקיים

$$\bigcap_{K \in \mathcal{G}} K \neq \varnothing .$$

אז

$$\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \neq \varnothing .$$

הוכחה. נניח בשלילה שלא כל הקבוצות ב־$\mathcal{K}$ נחתכות. נבחר $m \in \mathbb{N}_+$ מינימלי כך שקיימות $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}$ עבורן

$$\bigcap_{i \in [m]} K_i = \varnothing .$$

נרצה להראות שגם

$$\bigcap_{i \in [m]} K_i \neq \varnothing ,$$

מה שיתן סתירה.

מההנחה נובע $m \geq d+2$. לכל $j \in [m]$ נבחר

$$x_j \in \bigcap_{i \in [m] \setminus \{j\}} K_i .$$

לפי משפט רדון, יש חלוקה $[m] = J_1 \sqcup J_2$ עבורה

$$\operatorname{conv}\left(x_j\right)_{j\in J_1} \cap \operatorname{conv}\left(x_j\right)_{j\in J_2} \neq \varnothing \; .$$

תהי $p \in \operatorname{conv}\left(x_j\right)_{j\in J_1} \cap \operatorname{conv}\left(x_j\right)_{j\in J_2}$, נראה שבעצם $p \in \bigcap_{i\in[m]} K_i$.
יהי $i \in [m]$. נניח כי $i \in J_2$ ויהי $j \in J_1$. אז

$$x_j \in \bigcap_{t\in[m]\setminus\{j\}} K_t \subseteq \bigcap_{t\in J_2} K_t \subseteq K_i \, .$$

אז

$$p \in \operatorname{conv}\left(x_j\right)_{j\in J_1} \subseteq K_i$$

מקמירות. מאידך, אם $i \in J_1, j \in J_2$ נקבל

$$x_j \in \bigcap_{t\in[m]\setminus\{j\}} K_t \subseteq \bigcap_{t\in J_1} K_t \subseteq K_i \, .$$

אז

$$p \in \operatorname{conv}\left(x_j\right)_{j\in J_2} \subseteq K_i \, .$$

בסך הכל, $p \in \bigcap_{i\in[m]} K_i$, בסתירה למינימליות m. ■

1.2.5 שימושים למשפט הלי

תהיינה קבוצות סופיות $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$. נרצה לשאול מתי יש $H_{u,\alpha}$ עבורו $A \in \operatorname{int} H^+_{u,\alpha}, B \subseteq \operatorname{int} H^-_{u,\alpha}$. המשפט הבא מתאר איך ניתן לבדוק זאת.

משפט 1.2.12 (קירכנברגר). אם לכל $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B$ כך שמתקיים $|A_0| + |B_0| \leq d+2$ אפשר להפריד בין A_0, B_0 על ידי על מישור, אפשר להפריד גם את A, B על ידי על מישור.

הוכחה. לכל $a \in A$ נגדיר

$$K_a \coloneqq \left\{(u,\alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \;\middle|\; u \cdot a > \alpha\right\} .$$

נוכל לחשוב על זה כעל חצי־המישור

$$\left\{(u,\alpha) \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; (u,\alpha)\cdot(a,-1) > 0\right\} .$$

לכל $b \in B$ נגדיר באופן דומה

$$\begin{aligned} L_b &\coloneqq \left\{(v,\beta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \;\middle|\; v \cdot b < \beta\right\} \\ &= \left\{(v,\beta) \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; (v,\beta)\,(b,-1) < 0\right\} \; . \end{aligned}$$

K_a, L_b קמורות כפנים של חצי־מישור. מתקיים

$$\bigcap_{a\in A} K_a \neq \varnothing$$

כי $(0,-1)$ נמצא בחיתוך. באופן דומה

$$(0,1) \in \bigcap_{b\in B} L_b$$

אז גם חיתוך זה אינו ריק.
נניח כי $|A_0| + |B_0| \leq d+2$ ונטען כי

$$\bigcap_{a\in A_0} K_a \cap \bigcap_{b\in B_0} L_b \neq \varnothing \; .$$

לפי ההנחה, קיים על מישור $H_{u,\alpha}$ שמפריד בין A_0, B_0. אז $a \cdot u > \alpha$ וגם $b \cdot u < \alpha$ לכל $a \in A_0, b \in B_0$. כלומר, $(u,\alpha) \in K_a$ לכל $a \in A_0$ וגם $(u,\alpha) \in L_b$ לכל $b \in B_0$.
לפי משפט הלי נובע כי

$$\bigcap_{a\in A} K_a \cap \bigcap_{b\in B} L_b \neq \varnothing \; .$$

ניקח (u,α) בחיתוך ונקבל

$$\begin{aligned} A &\subseteq \operatorname{int} H^+_{u,\alpha} \\ B &\subseteq \operatorname{int} H^-_{u,\alpha} \, . \end{aligned}$$

■

משפט 1.2.13 (רדון). תהי $C\subseteq\mathbb{R}^d$ חסומה ומדידה לבג. קיימת נקודה $p\in\mathbb{R}^d$ כך שלכל על מישור $H_{u,\alpha}$ דרך p מתקיים

$$\mu\left(H_{u,\alpha}^{+}\cap C\right)\geq\frac{1}{d+1}\mu\left(C\right).$$

הוכחה. ראשית נעיר שמשפט הלי גורר שאם $\left(K_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ קמורות וקומפקטיות ב־$\mathbb{R}^d$ כך שכל $d+1$ מהן נחתכות אז $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}}K_\alpha\neq\varnothing$. זה נובע מכך שאם כל תת־אוסף סופי של קבוצות קומפקטיות נחתך, כולן נחתכות.
יהי $0<\varepsilon<\frac{1}{d+1}$. לכל $u\in S^{d-1}$ ולכל $t\in\mathbb{R}$ נעיין בחיתוך $C\cap H_{u,t}^{+}$. מתקיים

$$\lim_{t\to-\infty}\mu\left(C\cap H_{u,t}^{+}\right)=\mu\left(C\right)$$
$$\lim_{t\to\infty}\mu\left(C\cap H_{u,t}^{+}\right)=0.$$

לכן מרציפות המידה יש $\lambda\left(u\right)\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$\mu\left(C\cap H_{u,\lambda(u)}^{+}\right)=\left(\frac{d}{d+1}+\varepsilon\right)\mu\left(C\right).$$

יהי B כדור שמכיל את C. אז $K_u\coloneqq H_{u,\lambda(u)}^{+}\cap C$ קמורה. נראה שאם $u_1,\ldots,u_{d+1}\in S^{d-1}$ אז

$$K_{u_1}\cap\ldots\cap K_{u_{d+1}}\neq\varnothing.$$

לכל $i\in[d+1]$ מתקיים

$$\left(\frac{d}{d+1}+\varepsilon\right)\mu\left(C\right)\leq\mu\left(H_{u_i,\lambda(u_i)}^{+}\cap C\right)$$

ולכן

$$\left(\frac{1}{d+1}-\varepsilon\right)\mu\left(A\right)\geq\mu\left(H_{u_i,\lambda(u_i)\cap C}^{-}\right).$$

אם $\bigcap_{i\in[d+1]}K_{u_i}=\varnothing$ אז

$$\bigcap_{i\in[d+1]}H_{u_i,\lambda(u_i)}^{+}\cap B=\varnothing$$

ולכן

$$\bigcup_{i\in[d+1]}B\cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-}=B\cap\bigcup_{i\in[d+1]}H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-}=B.$$

אז

$$C=\bigcup_{i\in[d+1]}C\cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-}$$

בסתירה לכך שמתקיים

$$\sum_{i\in[d+1]}\mu\left(C\cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-}\right)\leq\left(d+1\right)\left(\frac{1}{d+1}-\varepsilon\right)\mu\left(C\right)<\mu\left(C\right).$$

לכן $\bigcap_{i\in[d+1]}K_{u_i}\neq\varnothing$ לכל $u_1,\ldots,u_{d+1}\in S^d$, ולפי הלי $\bigcap_{u\in S^{d-1}}K_u\neq\varnothing$. ניקח $p\in\bigcap_{u\in S^{d-1}}K_u$. אם נעביר על מישור $H_{u,\alpha}$ שכיוונו $u\in S^{d-1}$ דרך p, אז

$$\left(H_{u,\alpha}^{-}\cap C\right)\geq\left(\frac{1}{d+1}-\varepsilon\right)\mu\left(C\right).$$

נקבל $H_{u,\alpha}^{+}\subseteq H_{u,\lambda(u)}^{+}$ ואז

$$\begin{aligned}\mu\left(H_{u,\alpha}^{+}\cap C\right)&\leq\mu\left(H_{u,\lambda(u)}^{+}\cap C\right)\\&=\left(\frac{d}{d+1}+\varepsilon\right)\mu\left(C\right).\end{aligned}$$

לכן

$$H^-_{u,\lambda(u)} \cap C \subseteq H^-_{u,\alpha} \cap C$$

ו־

$$\left(\frac{1}{d+1} - \varepsilon\right) \mu\left(C\right) = \mu\left(H_{u,\lambda(u)} \cap C\right) \leq \mu\left(H^-_{u,\alpha} \cap C\right).$$

עתה $p := \lim_{z\to\infty} \frac{p_z}{z}$ תקיים את הדרוש. ■

למשפט הלי יש גרסה שקולה עבור משפחה לאו דווקא סופית של קבוצות קומפקטיות.

משפט 1.2.14 (הלי). תהי $\mathcal{K}$ משפחה של קבוצות קומפקטיות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. אם כל $d+1$ קבוצות מ־$\mathcal{K}$ נחתכות, כל הקבוצות נחתכות.

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ונניח שמתקיים $\text{diam}\left(A\right) = 1$. נרצה לחשוב מהו הרדיוס המינימלי של כדור $B\left(p,r\right)$ המכיל את A. במקרה $d=1$ אפשר להסתכל על A כמוכלת בקטע מאורך 1 ואז $r_1 = \frac{1}{2}$ הרדיוס המינימלי. במקרה $d=2$ נוכל להסתכל על הדוגמה של משולש שווה צלעות. אז הרדיוס המינימלי הוא

$$r_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

נעיין במקרה הכללי ברדיוס המינימלי עבור הסימפלקס ה־d מימדי הרגולרי. יהי

$$H := \left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; \sum_{i\in[d+1]} x_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \cong \mathbb{R}^d.$$

ב־H נעיין בסימפלקס שקודקודיו הם $\frac{e_i}{\sqrt{2}} \in H$ עבור $i \in [d+1]$. מתקיים

$$\left|\frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right| = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

מרכז הכובד של הסימפלקס הוא

$$p = \frac{1}{d+1}\sum_{i\in[d+1]} \frac{e_i}{\sqrt{2}}.$$

אז

$$\frac{e_j}{\sqrt{2}} - p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{e_1}{d+1} + \ldots + \frac{-e_{j-1}}{d+1} + \frac{d}{d+1}e_j + \frac{-e_{j+1}}{d+1} + \ldots + \frac{-e_{d+1}}{d+1}\right)$$

ואז

$$\begin{aligned}\left|\frac{e_j}{\sqrt{2}} - p\right|^2 &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{d+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{d+1}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+1}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d+1}^2 + \frac{d^2}{\left(d+1\right)^2}\right)\\ &= \frac{d}{2\left(d+1\right)}\end{aligned}.$$

נקבל כי $r_d := \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$ רדיוס הכדור החוסם של הסימפלקס הרגולרי באורך צלע 1 ב־$\mathbb{R}^d$.

משפט יונג אומר לנו בעצם מה הרדיוס עבור קבוצה A כללית.

משפט 1.2.15 (יונג). תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מקוטר 1. קיימת $p \in \mathbb{R}^d$ עבורה $A \subseteq B\left(p, r_d\right)$ כאשר $r_d := \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$.

הוכחה. נעיין באוסף הכדורים $\left\{B\left(a, r_d\right)\right\}_{a\in A}$. די להראות כי $\bigcap_{a\in A} B\left(a, r_d\right) \neq \varnothing$.
ממשפט הלי נובע שדי להראות שאם $a_1,\ldots,a_{d+1} \in A$ אז $\bigcap_{i\in[d+1]} B\left(a_i, r_d\right) \neq \varnothing$. כלומר, די להראות שכל $d+1$ נקודות מ־A מוכלות בכדור ברדיוס r_d.
יהי $B\left(p,r\right)$ כדור עם רדיוס מינימלי המכיל את $a_1,\ldots,a_{d+1}$. בלי הגבלת הכלליות יהיו $a_1,\ldots,a_m$ הנקודות הנמצאות על שפת $B\left(p,r\right)$.
נטען כי $p \in \text{conv}\left\{a_1,\ldots,a_m\right\}$. אחרת, $p \notin K := \text{conv}\left\{a_1,\ldots,a_m\right\}$ ולכן יש על־מישור H שמפריד בין p, K. אם נזיז את מרכז הכדור מעט לכיוון הניצב ל־h נקבל שכל $a_1,\ldots,a_{d+1}$ בפנים של כדור מרדיוס r, בסתירה למינימליות.

נראה עתה כי $r \le r_d$ ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $p = 0$. אז יש $\lambda \ge 0$ עבורם

$$\sum_{i\in[m]} \lambda_i a_i = 0$$
$$\sum_{i\in[m]} \lambda_i = 1 \quad .$$

נקבל

$$\begin{aligned} 1 &\ge |a_i - a_j|^2 \\ &= |a_i|^2 + |a_j|^2 - 2a_i \cdot a_j \\ &= r^2 + r^2 - 2a_i \cdot a_j \end{aligned}$$

ולכן $2a_i \cdot a_j \ge 2r^2 - 1$. אז

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \sum_{i\in[m]} \lambda_i a_i \right|^2 \\ &= \sum_{i\in[m]} \lambda_i^2 |a_i|^2 + 2 \sum_{1\le 1<j\le m} \lambda_i \lambda_j a_i \cdot a_j \\ &\ge \sum_{i\in[m]} \lambda_i^2 r^2 + \sum_{1\le i<j\le m} \lambda_i \lambda_j \\ &= r^2 \left(\sum_{i\in[m]} \lambda_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le m} \lambda_i \lambda_j \right) - \sum_{1\le i<j\le m} \lambda_i \lambda_j \\ &= r^2 \left(\sum_{i\in[m]} \lambda_i \right)^2 - \sum_{1\le i<j\le m} \lambda_i \lambda_j \\ &= r^2 - \sum_{1\le i<j\le m} \lambda_i \lambda_j \quad . \end{aligned}$$

נקבל

$$r^2 \le \sum_{1\le i<j\le m} \lambda_i \lambda_j \le \max_{\substack{x_i \ge 0 \\ \sum x_i = 1}} \left(\sum_{1\le i<j\le m} x_i x_j \right).$$

אם נראה שהמקסימום מתקבל כאשר כל ה־x_i בביטוי האחרון שווים נקבל

$$\binom{m}{2} \frac{1}{m^2} = \frac{m(m-1)}{2m^2} = \frac{m-1}{2m} \le \frac{d}{2d+1}$$

ואז $r \le \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}} = r_d$. אכן,

$$\begin{aligned} \sum_{1\le i<j\le m} x_i x_j &= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i\in[m]} x_i \right)^2 - \sum_{i\in[m]} x_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i\in[m]} x_i^2 \right) \end{aligned}$$

כאשר

$$\frac{1}{m} \sum_{i\in[m]} x_i^2 \ge \left(\frac{1}{m} \sum_{i\in[m]} x_i \right)^2$$

מקמירות של $x \mapsto x^2$. אז $\sum_{i\in[m]} x_i^2 \ge \frac{1}{m}$ ונקבל כי

$$\sum_{1\le i<j\le m} x_i x_j = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i\in[m]} x_i^2 \right) \le \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{2} \frac{m-1}{m} \quad .$$

■

1.3 גרסאות מודרניות של משפטי קרתיאודורי והלי

1.3.1 משפט קרתיאודורי הצבעוני

משפט 1.3.1 (קרתיאודורי). יהיו $A_1, \ldots, A_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$ ותהי $p \in \bigcap_{i \in [d+1]} \operatorname{conv}(A_i)$. אז יש נקודות $a_i \in A_i$ לכל $i \in [d+1]$ עבורן $p \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_{d+1})$.

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $|A_i| < \infty$ (לפי 1.2.8 אפשר לקחת $|A_i| \leq d+1$). יהיו $a_1 \in A_1, \ldots, a_{d+1} \in A_{d+1}$ עבורן $\rho := d(p, \operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_{d+1}\})$ מינימלי. עלינו להראות שמתקיים $\rho = 0$. נניח בשלילה ש־$\rho > 0$. תהי $q \in \operatorname{conv}\{a_i \mid i \in [d+1]\}$ כך ש־

$$|p-q| = \min\{\|x-p\| \mid x \in \operatorname{conv}\{a_i \mid i \in [d+1]\}\}\ .$$

אז

$$\operatorname{conv}\{a_i \mid i \in [d+1]\} \subseteq H^-_{p-q,(p-q)\cdot q} =: H$$

כפי שראינו בחישוב קודם. אז

$$q \in H.$$

ממשפט 1.2.8 נובע ש־q בקמור של d נקודות מבין $a_1, \ldots, a_{d+1}$, ובלי הגבלת הכלליות נניח כי $q \in \operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_d\}$. אנו יודעים כי $p \in A_{d+1}$. לכן $A_{d+1} \not\subseteq H$. לכן קיימת נקודה $a_{d+1} \in A_{d+1} \setminus H$. אז

$$\left(a'_{d+1} - q\right) \cdot (p-q) > 0\ .$$

נראה שמתקיים

$$d\left(p, \operatorname{conv}\left\{a_1, \ldots, a_d, a'_{d+1}\right\}\right) < \rho.$$

נעיין בנקודה $(1-t)\,q + ta'_{d+1}$ עבור t קטן. מתקיים

$$\begin{aligned} \left|p - \left((1-t)\,q + ta'_{d+1}\right)\right|^2 &= \left|(p-q) - t\left(a'_{d+1} - q\right)\right|^2 \\ &= |p-q|^2 - 2t\,(p-q)\cdot\left(a'_{d+1} - q\right) + t^2\left|a'_{d+1} - q\right|^2 \end{aligned}\ .$$

כעת, אם $t \in (0,1)$ קטן מספיק אז

$$2t\,(p-q)\cdot\left(a'_{d+1} - q\right) > t\left|a'_{d+1} - q\right|$$

ולכן

$$\left|p - \left((1-t)\,q + ta'_{d+1}\right)\right|^2 < \rho^2$$

בסתירה למינימליות של $\{a_1, \ldots, a_{d+1}\}$. ■

1.3.2 מסקנות מקרתיאודורי צבעוני

משפט 1.3.2 (הלי צבעוני). תהיינה $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_{d+1}$ משפחות של קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. נניח שלכל

$$(K_1, \ldots, K_{d+1}) \in \prod_{i \in [d+1]} \mathcal{K}_i$$

מתקיים

$$\bigcap_{i \in [d+1]} K_i \neq \varnothing\ .$$

אז יש $j \in [d+1]$ כך שכל הקבוצות ב־$\mathcal{K}_j$ נחתכות.

משפט 1.3.3 (טברברג). תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מגודל $(d+1)(k-1)+1$. אז אפשר לכתוב $A = \bigsqcup_{i \in [k]} A_k$ כאשר

$$\bigcap_{i \in [k]} \operatorname{conv}(A_i) \neq \varnothing\ .$$

1.3.3 קרתיאודורי עבור חרוטים

הגדרה 1.3.4. עבור $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ נגדיר את ה־*positive span* של A על ידי

$$\text{pos}\left(A\right) := \left\{ \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i \,\middle|\, a_i \in A,\ \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

הגדרה 1.3.5. קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ נקראת חרוט קמור שקודקודו 0 אם C קמורה ולכל $c \in C$ גם $\lambda c \in C$ לכל $\lambda \geq 0$.

הערה 1.3.6. לכל $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ הקבוצה $\text{pos}\left(A\right)$ היא חרוט קמור ב־$\mathbb{R}^{d+1}$.

משפט 1.3.7 (קריתיאודורי עבור קמור חיובי). תהי $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ותהי $p \in \text{pos}\left(A\right)$. אזי יש $A_0 \subseteq A$ עם $|A_0| \leq d+1$ כך שמתקיים $p \in \text{pos}\left(A_0\right)$.

הוכחה. בדיוק כמו בהוכחת משפט קרתיאודורי, נבחר $A_0 = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq A$ מינימלית עבורה $p \in \text{pos}\{u_1, \ldots, u_n\}$. נכתוב

$$p = \sum_{i \in [n]} \lambda_i u_i$$

עם $\lambda_i \geq 0$, ונראה כי $n \leq d+1$. אחרת, $n \geq d+2$ ולכן יש צירוף לינארי

$$\sum_{i \in [n]} \mu_i u_i = 0$$

שאינו טריוויאלי. תהי

$$\theta := \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \,\middle|\, \mu_i > 0 \right\}$$

(בלי הגבלת הכלליות קיימים $\mu_i > 0$) ויהי $i_0 \in [n]$ עבורו $\theta = \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}$. אז

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i \in [n]} \lambda_i u_i \\ &= \sum_{i \in [n]} \left(\lambda_i - \theta \mu_i\right) u_i \\ &= \sum_{i \neq i_0} \left(\lambda_i - \theta \mu_i\right) u_i + \cancelto{0}{\left(\lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_{i_0}\right)} u_{i_0} \end{aligned}$$

וקיבלנו את p כיצירוף חיובי של פחות מה־u_i. ■

משפט 1.3.8 (קרתיאודורי החיובי עבור קמור חיובי). תהיינה $A_1, \ldots, A_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ותהי $p \in \bigcap_{i \in [d+1]} \text{pos}\left(A_i\right)$. אז יש $a_i \in A_i$ לכל $i \in [d+1]$ עבורן

$$p \in \text{pos}\left\{a_1, \ldots, a_{d+1}\right\}.$$

למה 1.3.9. נניח כי $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^{d+1}$. נגיד שהן מקיימות את תנאי 1 אם $\left(\vec{0}, -1\right) \in \text{pos}\left\{u_1, \ldots, u_m\right\}$. יהיו $H_{u_i,0}$ על־מישורים הניצבים ל־u_i ונסתכל על חצאי המרחבים $H^+_{u_i,0}$. נגיד שה־u_i מקיימות את תנאי 2 אם

$$\bigcap_{i \in [m]} H^+_{u_i,0} \cap \mathbb{R}^d \times \{1\} = \varnothing .$$

נטען כי תנאים 1 ו־2 שקולים.

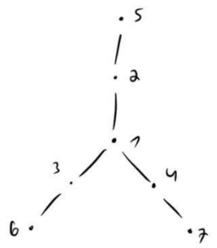
הוכחה.
- נניח שמתקיים תנאי 1 ויהיו $\lambda_i \geq 0$ עבורן

$$\left(\vec{0}, -1\right) = \sum_{i \in [m]} \lambda_i u_i .$$

נניח כי $z \in \bigcap_{i \in [m]} H^+_{u_i,0}$ ונראה כי הקואורדינטה האחרונה של z אי־חיובית. אכן,

$$\begin{aligned} -z_{d+1} &= \left(\vec{0}, -1\right) \cdot z \\ &= \sum_{i \in [m]} \lambda_i \left(u_i \cdot z\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

כלומר $z_{d+1} \leq 0$ ובפרט $z \notin \mathbb{R}^d \times \{1\}$.



איור 1.1: קומפלקס שלא ניתן לקבל כעצב של קבוצת קטעים במישור.

- נניח שתנאי 1 אינו מתקיים ונראה כי תנאי 2 אינו מתקיים. נניח כי

$$\left(\vec{0},-1\right)\notin C\coloneqq \text{pos}\left\{u_1,\ldots,u_m\right\}.$$

נפריד את C מ־$\left(\vec{0},-1\right)$ על ידי על מישור $H_{w,\alpha}$. כלומר,

$$\forall z\in C\colon\ (0,-1)\cdot w<\alpha\leq z\cdot w.$$

מתקיים $0\in C$ לכן $\alpha\leq 0\cdot w=0$ ונקבל $\alpha\leq 0$. אם עבור $i\in[m]$ כלשהו מתקיים $u_i\cdot w<0$ נקבל

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\lambda u_i\right)\cdot w=-\infty<\alpha$$

בסתירה כי $\lambda u_i\in C$ לכל $\lambda\geq 0$.

לכן $\alpha\leq 0$ וגם $u_i\cdot w\geq 0$ לכל $i\in[m]$. נקבל

$$-w_{d+1}=\left(\vec{0},-1\right)\cdot w<\alpha\leq 0$$

ולכן $w_{d+1}>0$. אז $w\in H^{+}_{u_i,0}$ ואז

$$\frac{w}{w_{d+1}}\in\bigcap_{i\in[m]}H^{+}_{u_i,0}\cap\mathbb{R}^d\times\{1\}.$$

לכן תנאי 2 אינו מתקיים. ■

הגדרה 1.3.10 (פיאון קמור). פיאון קמור הוא קמור של מספר סופי של נקודות.

הגדרה 1.3.11 (עצב). בהינתן $K=\left\{K_1,\ldots,K_m\right\}$ משפחה של קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ נגדיר את העצב *(nerve)* של $\mathcal{K}$ על ידי

$$N\left(\mathcal{K}\right)\coloneqq\left\{I\subseteq[m]\ \middle|\ \bigcap_{i\in I}K_i\neq\varnothing\right\}.$$

הערה 1.3.12. העצב של $\mathcal{K}$ מתאר את החיתוכים של קבוצות ב־$\mathcal{K}$. זה קומפלקס סימפליציאלי: אם $\sigma\in N\left(\mathcal{K}\right)$ וגם $\tau\subseteq\sigma$ אז $\tau\in N\left(\mathcal{K}\right)$. העצב של $N\left(\mathcal{K}\right)$ שקול הומוטופית ל־$\bigcup_{K\in\mathcal{K}}K$, אבל נדון בכך בהמשך.

משפט 1.3.13 (הלי במונחי העצב). תהי $\mathcal{K}=\left\{K_1,\ldots,K_m\right\}$ משפחת קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. אם $N\left(\mathcal{K}\right)$ מכיל את כל $\sigma\subseteq[m]$ המקיימת $|\sigma|\leq d+1$ אז $N\left(K\right)=\mathcal{P}\left([m]\right)$ אוסף כל התת־קבוצות של $[m]$.

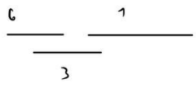
טענה 1.3.14. יהיו $K_1,\ldots,K_m$ קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ ותהי $\mathcal{K}\coloneqq\left\{K_1,\ldots,K_m\right\}$. אז קיימים פיאונים $P_1,\ldots,P_m$ עבורם $P_i\subseteq K_i$ לכל $i\in[m]$ וגם

$$M\left(P\right)=N\left(\mathcal{K}\right)$$

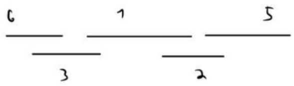
כאשר $\mathcal{P}\coloneqq\left\{P_1,\ldots,P_m\right\}$.

הערה 1.3.15. שאלה מעניינת היא האם אפשר לאפיין את העצבים האפשריים של אוספי קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. בעוד זאת שאלה קשה באופן כללי, יש איפיון במקרה $d=1$. למשל, אנו יודעים שאת הגרף באיור 1.1 אי אפשר לקבל כעצב ב־$\mathbb{R}$.

יהי $\mathcal{K}=\left\{I_i\mid i\in[7]\right\}$ אוסף של שבעה קטעים ב־$\mathbb{R}$. במקרה זה, I_6 חותך את I_3 שחותך את I_1, אבל I_1 לא חותך את I_6 אז נקבל קטעים כמו באיור 1.2. כעת I_2 חותך את I_1 ואת I_5 שזר ל־I_1 לכן נקבל קטעים כמו באיור 1.3. אז I_4 שחותך את I_1 חייב להיות בין I_3,I_2 אבל אז $I_4\subseteq I_!$ ולכן I_7 שחותך את I_4 חותך גם את I_1. ראו איור 1.4.



איור 1.2



איור 1.3

הוכחה. לכל $\sigma \in N(\mathcal{K})$ נבחר $p_\sigma \in \bigcap_{i\in\sigma} K_i$. נגדיר

$$.P_i := \text{conv}\left\{p_\sigma \mid i \in \sigma \in N(\mathcal{K})\right\}$$

נשים לב שאם $i \in \sigma$ אז $p_\sigma \in K_i$. לכן $P_i \subseteq K_i$. לכן $N(\mathcal{P}) \subseteq N(\mathcal{K})$. מאידך, אם $\sigma \in N(\mathcal{K})$ אז $p_\sigma \in \bigcap_{i\in\sigma} P_i$ ולכן $\sigma \in N(\mathcal{P})$. ■

מסקנה 1.3.16. תהיינה $K_1, \ldots, K_m$ קומפקטיות קמורות עבורן $\bigcap_{i\in[m]} K_i = \varnothing$. אזי קיימים חצאי מרחבים $D_1, \ldots, D_m$ כך שמתקיים $K_i \subseteq D_i$ לכל $i \in [m]$, וגם $\bigcap_{i\in[m]} D_i = \varnothing$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על ℓ שקיימים $D_1, \ldots, D_\ell$ עבורם $K_i \subseteq D_i$ וגם

$$.D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+1} \cap \ldots \cap K_m = \varnothing$$

נניח שהוכחנו עבור $\ell < m$ ונוכיח עבור $\ell + 1$ (זה כולל את מקרה הבסיס). אז

$$D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+1} \cap \ldots \cap K_m = \varnothing$$

כלומר

$$K_{\ell+1} \cap (D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \ldots \cap K_m) = \varnothing$$

ולכן קיים $H^+_{u,\alpha}$ עבורו $K_{\ell+1} \subseteq H^+_{,\alpha}$ וגם

$$.D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \ldots \cap K_m \subseteq \text{int} H^-_{u,\alpha}$$

כלומר,

$$.D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \ldots \cap K_m \cap H^+_{u,\alpha} = \varnothing$$

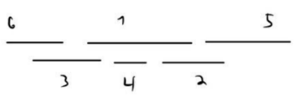
ניקח $D_{\ell+1} := H^+_{,\alpha}$. ■

הוכחה (1.3.2). בלי הגבלת הכלליות, מטענה 1.3.14 אפשר להניח ש־$K_{i,j}$ קומפקטיות לכל $K_{i,j} \in \mathcal{K}_i$. לפי 1.3.16 קיימים חצאי מרחבים $D_{i,j}$ כך ש־$K_{i,j} \subseteq D_{i,j}$ לכל $K_{i,j} \in \mathcal{K}_i$ וכך שמתקיים $\bigcap_j D_{i,j} = \varnothing$. נציג

$$.D_{i,j} = H^+_{u_{i,j},\alpha_{i,j}} = \left\{v \in \mathbb{R}^d \mid v \cdot u_{i,j} \geq \alpha_{i,j}\right\}$$

יהי $w_{i,j} = (u_{i,j}, -\alpha_{i,j}) \in \mathbb{R}^{d+1}$.
נשים לב שמתקיים

$$\bigcap_j H^+_{w_{i,j},0} \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{1\}\right) = \varnothing$$



איור 1.4

אם $v=(v',v_{d+1})$ בחיתוך הנ"ל אז $w_{i,j}\cdot(v',v_{d+1})\geq 0$ ומצד שני $v_{d+1}=1$. אז

$$v'\cdot u_{i,j}+(-\alpha_{i,j})\cdot 1\geq 0$$

ולכן $v'\cdot u_{i,j}\geq\alpha_{i,j}$ לכל j. אז $v'\in D_{i,j}$ לכל j, בסתירה לכך שמתקיים

$$\bigcap_j D_{i,j}=\varnothing.$$

לכן, לפי 1.3.9 מתקיים

$$\left(\vec{0},-1\right)\in\text{pos}\left\{w_{i,j}\right\}_j$$

לכל $i\in[d+1]$. לפי קרתיאודורי הצבעוני עבור pos קיימת בחירה $w_{1,j_1},w_{2,j_2},\dots,w_{d+1,j_{d+1}}$ כך שמתקיים

$$\left(\vec{0},-1\right)\in\text{pos}\left\{w_{i,j_i}\right\}_{i\in[d+1]}.$$

לפי 1.3.9 נקבל כי

$$\bigcap_{i\in[d+1]}H^+_{w_{i,j_i},0}\cap\left(\mathbb{R}^d\times\{1\}\right)=\varnothing.$$

אז

$$\bigcap_{i\in[d+1]}K_{i,j_i}\subseteq\bigcap_{i\in[d+1]}D_{i,j_i}=f\bigcap_{i\in[d+1]}H^+_{u_{i,j_i},\alpha_{i,j_i}}=\varnothing$$

כיוון שאם $z\in\bigcap_{i\in[d]}H^+_{u_{i,j_i},\alpha_{i,j_i}}$ אז $z\cdot u_{i,j_i}\geq\alpha_{i,j_i}$ לכל i ואז

$$\begin{aligned}(z,1)\cdot w_{i,j_i}&=(z,1)\cdot\left(u_{i,j_i},-\alpha_{i,j_i}\right)\\&=z\cdot u_{i,j_i}-\alpha_{i,j_i}>0\end{aligned}$$

ונקבל כי

$$(z,1)\in\bigcap_{i\in[d+1]}H^+_{w_{i,j_i}}\cap\left(\mathbb{R}^d\times\{1\}\right)$$

בסתירה לביטוי קודם. קיבלנו

$$\bigcap_{i\in[d+1]}K_{i,j_i}=\varnothing$$

בסתירה להנחה. ∎

משפט 1.3.17 (רדון). תהיינה $u_1,\dots,u_{d+2}\in\mathbb{R}^d$. קיימת חלוקה $[d+2]=I_1\sqcup I_2$ עבורה

$$\text{conv}\left\{u_i\right\}_{i\in I_1}\cap\text{conv}\left\{u_i\right\}_{i\in I_2}=\varnothing.$$

נשאל מה מספר הנקודות המינימלי m כך שלכל $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^2$ תהיה חלוקה $[m]=I_1\sqcup I_2\sqcup I_3$ עבורה

$$\bigcap_{j\in[3]}\text{conv}\left\{u_i\right\}_{i\in I_j}\neq\varnothing.$$

משפט 1.3.18 (טברברג). אם $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^d$ וגם $m\geq(d+1)(k-1)+1$ אז יש חלוקה $[m]=\bigsqcup_{j\in[k]}I_j$ וגם

$$\bigcap_{j\in[k]}\text{conv}\left\{u_i\right\}_{i\in I_j}\neq\varnothing.$$

הערה 1.3.19. על ידי הסתכלות על $d+1$ קבוצות בגודל $k-1$ של נקודות קרובות (או שוות זאת לזאת, לא הנחנו שה־u_i שונות) ב־$\mathbb{R}^d$ אפשר לראות שהחסם התחתון במשפט טברברג אופטימלי, כיוון שבמקרה זה אין חלוקת k־טברברג.

בהוכחת משפט טברברג נרצה לעבוד במרחב $(k-1)(d+1)$־מימדי. נזכיר כי $\mathbb{R}^k\otimes\mathbb{R}^\ell\cong M_{k\times\ell}(\mathbb{R})$ מרחב ממימד $k\ell$. בהינתן $u\in\mathbb{R}^k,v\in\mathbb{R}^\ell$ נגדיר

$$u\otimes v\coloneqq uv^T=\begin{pmatrix}u_1v_1&\cdots&u_\ell v_\ell\\ \vdots&&\vdots\\ u_kv_1&\cdots&u_kv_\ell\end{pmatrix}.$$

טענה 1.3.20. נניח כי $v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^{k-1}$ מקיימים

$$\sum_{i\in[k]} v_i = 0$$

ושזאת התלות היחידה ביניהם. למשל אפשר לקחת $v_1,\ldots,v_{k-1}$ בסיס ל-$\mathbb{R}^{k-1}$ ו־$v_k=-(v_1+\ldots+v_{k-1})$ (וזה בעצם המקרה הכללי). נניח גם כי $u_1,\ldots,u_k\in\mathbb{R}^N$ מקיימים

$$\sum_{i\in[k]} u_i\otimes v_i = 0\in\mathbb{R}^N\otimes\mathbb{R}^{(k-1)}\cong M_{N\times(k-1)}\,.$$

אז $u_i=u_j$ לכל $i,j\in[k]$.

הערה 1.3.21. ברור שאם $u_i=u_j$ לכל $i,j\in[k]$ אז

$$\sum_{i\in[k]} u_i\otimes v_i = u\otimes\sum_{i\in[k]} v_i = u\otimes 0 = 0\,.$$

הוכחה. יהי $z\in\mathbb{R}^N$. מתקיים

$$0 = z^T\cdot\left(\sum_{i\in[k]} u_i v_i^T\right) = \sum_{i\in[k]}\left(z^T\cdot u_i\right)\cdot v_i^T$$

לכן $z^T\cdot u_i = z^T\cdot u_j$ לכל $i,j\in[k]$. זה נכון לכל $z\in\mathbb{R}^N$ לכן $z^T(u_i-u_j)=0$ לכל $z\in\mathbb{R}^n$ ולכן $u_i=u_j$. ■

הוכחה (1.3.18). על ידי הוספת רכיב לכל u_i אפשר להניח כי $u_1,\ldots,u_m\in\mathbb{R}^{d+1}$ וגם ש־$u_i\cdot\mathbb{1}=1$ כאשר $\mathbb{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{d+1}$. יהיו $v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^{k-1}$ עבורם $\sum_{i\in[k]} v_i=0$ וזאת התלות היחידה ביניהם. נשתמש בקרתיאודורי הצבעוני עבור $\mathbb{R}^{(d+1)(k-1)}\cong M_{(d+1)\times(k-1)}(\mathbb{R})$. לכל $i\in[m]$ תהי

$$A_i=\{u_i\otimes v_j\mid j\in[k]\}\subseteq\mathbb{R}^{(d+1)(k-1)}\,.$$

מתקיים $0\in\bigcap_{i\in[m]}\operatorname{conv}(A_i)$ כי

$$0=u_i\otimes 0=u_i\otimes\left(\frac{1}{k}\sum_{j\in[k]} v_j\right)=\frac{1}{k}\sum_{j\in[k]} u_i\otimes v_j\,.$$

לפי קרתיאודורי הצבעוני, לכל $i\in[m]$ קיים $j_i\in[k]$ כך שמתקיים

$$0\in\operatorname{conv}\{u_i\otimes v_{j_i}\mid i\in[m]\}\,.$$

אז יש $\lambda_i\ge 0$ המקיימות

$$\sum_{i\in[m]}\lambda_i = 1$$

$$\sum_{i\in[m]}\lambda_i\left(u_i\otimes v_{j_i}\right)=0\,.$$

אבל אם נסמן

$$I_j\coloneqq\{i\in[m]\mid j_i=j\}$$

נקבל

$$\sum_{j\in[k]}\left(\sum_{i\in I_j}\lambda_i u_i\right)\otimes v_j=\sum_{i\in[m]}\lambda_i\left(u_i\otimes v_{j_i}\right)=0\,.$$

לפי הטענה, קיים $w \in \mathbb{R}^d$ כך שלכל $j \in [k]$ מתקיים

$$.w = \sum_{i \in I_j} \lambda_i u_i$$

אז

$$w \cdot \mathbb{1} = \sum_{i \in I_j} \lambda_i \cdot (u_i \cdot \mathbb{1}) = \sum_{i \in I_j} \lambda_i$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{w}{w \cdot \mathbb{1}} &= \sum_{i \in I_j} \frac{\lambda_i}{w \cdot \mathbb{1}} \cdot u_i \\ &= \sum_{i \in I_j} \frac{\lambda_i}{\sum_{t \in I_j} \lambda_t} u_i \\ &\in \text{conv}\{u_i\}_{i \in I_j} \end{aligned}$$

כנדרש. ■

1.3.4 משפט הנקודה הכבדה של Barany

משפט 1.3.22 (Barany). לכל $d \geq 1$ יש קבוע $C_d > 0$ כך שלכל $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$ יש $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{d+1}$ עבורה $|\mathcal{F}| > C_d \binom{n}{d+1}$ וכך שקיימת

$$.p \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \text{conv}\{u_i \mid i \in F\}$$

הוכחה. נגדיר את k להיות השלם המקסימלי עבורו $n \leq (k-1)(d+1) + 1$. כלומר, $k = \left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor + 1$.
נניח כי $k \geq d+1$. לפי משפט 1.3.18 נחלק את $[n]$ לקבוצות זרות $I_1, \ldots, I_k$ כך שיש

$$.p \in \bigcap_{j \in [k]} \text{conv}\{u_i\}_{i \in I_j}$$

לכל בחירה $\alpha_1 < \ldots < \alpha_{d+1}$ של איברים ב־$[k]$ מתקיים

$$.p \in \bigcap_{t \in [d+1]} \text{conv}\{u_i \mid i \in I_{\alpha_t}\}$$

לפי קרתיאודורי הצבעוני יש $d+1$ נקודות, אחת מכל $\{u_i\}_{i \in I_{\alpha_t}}$ כך ש־p בקמור שלהן. נסמן את קבוצת האינדקסים של נקודות אלו ב־F_α כאשר $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1})$. אם $\alpha \neq \beta$ נקבל $F_\alpha \neq F_\beta$ ולכן

$$\mathcal{F} := \{F_\alpha \mid 1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_{d+1} \leq k\}$$

קבוצה מגודל $\binom{k}{d+1}$. אז

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}| &= \binom{k}{d+1} \\
&= \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor + 1}{d+1} \\
&\geq \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor}{d+1} \\
&\geq \frac{\left(\left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor - d + 1\right)^{d+1}}{(d+1)!} \\
&\geq \frac{\left(\frac{n-1}{d+1} - d\right)^{d+1}}{(d+1)!} \\
&= \frac{\left(n - d^2 - d - 1\right)^{d+1}}{(d+1)^{d+1}(d+1)!} \\
&\geq \frac{n^{d+1} - (d+1)\left(d^2 + d + 1\right) n^d}{(d+1)^{d+1}(d+1)\,1} \\
&= \frac{1}{(d+1)^{d+1}} \left[\frac{n^{d+1}}{(d+1)!} - \frac{(d+1)\left(d^2+d+1\right)}{(d+1)!} n^d \right] \\
&\geq \frac{1}{(d+1)^{d+1}} \left(\binom{n}{d+1} - \lambda_d n^d \right) \\
&\geq \frac{1}{2(d+1)^{d+1}} \binom{n}{d+1}
\end{aligned}$$

עבור קבוע λ_d וכאשר האי־שוויון האחרון נכון עבור n גדול מספיק. נבחר $C_d = \frac{1}{2(d+1)^{d+1}}$. ■

הערה 1.3.23. בהינתן d אפשר לשאול מה הסופרמום θ_d של ערכים θ עבורם לכל n נקודות ב־$\mathbb{R}^d$ יש p נקודות בלפחות $\theta \cdot \binom{n}{d+1}$ מהסימפלקסים על ידי הנקודות.
עבור $d \in \{1,2\}$ ידועים הערכים של θ_d. עבור $d > 2$ זאת בעיה פתוחה.

1.3.5 רשתות ε חלשות

תהי $\mathcal{K}$ משפחה של קבוצות מדידות במרחב הסתברות (Ω, B, μ). נעיין בקבוצה

$$A_\varepsilon \coloneqq \{K \in \mathcal{K} \mid \mu(K) \geq \varepsilon\}.$$

נרצה למצוא $S \subseteq \Omega$ מגודל מינימלי כך ש־$S \cap K \neq \varnothing$ לכל $K \in A_\varepsilon$.

דוגמה 1.3.24. יהי $\Omega = \mathbb{R}$ עם מידת הסתברות μ המתוארת באופן הבא. יהיו $u_1 \leq \ldots \leq u_n$ נקודות ב־$\mathbb{R}$. נגדיר

$$\mu \coloneqq \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} \delta_{u_i}$$

כאשר δ_{u_i} מידת דיראק של u_i. נשאל האם יש $S \subseteq \Omega$ סופית מגודל קטן מ־$f(\varepsilon)$ עבור $f(\varepsilon)$ קבוע כלשהו התלוי באפסילון וכך שכל $K \in A_\varepsilon$ חותכת את S.
תהי

$$S = \left\{ u_{i\lfloor \varepsilon n \rfloor} \;\middle|\; i \in \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \right\}.$$

אז לכל קטע K עם $\mu(K) \geq \varepsilon$ מתקיים $K \cap S \neq \varnothing$. אבל גם $|S| \leq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$.

משפט 1.3.25. תהא μ מידת הסתברות דיסקרטית על $\mathbb{R}^d$ הנקבעת על ידי $\{u_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathbb{R}^d$ ו־

$$\mu(A) = \frac{1}{n} |\{i \mid u_i \in A\}|.$$

תהא $\mathcal{K}$ משפחת הקבוצות הקמורות ב־$\mathbb{R}^d$. אז יש $S \subseteq \mathbb{R}^d$ עם $|S| \leq \lambda_d \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d+1}$ עבורה $S \cap K \neq \varnothing$ לכל K המקיימת $\mu(K) \geq \varepsilon$.

הוכחה. לכל $K\in\mathcal{K}$ עבורה $\mu(K)\geq\varepsilon$ תהא $I_K\coloneqq\{i\mid u_i\in K\}$. אז $|I_k|\geq\varepsilon n$. לפי משפט הנקודה הכבדה, יש $\mathcal{F}_K\subseteq\binom{I_k}{d+1}$ עם

$$|\mathcal{F}_K|\geq c_d\cdot\binom{|I_k|}{d+1}\geq c_d\binom{\varepsilon n}{d+1}$$

וכך שקיימת

$$p_K\in\bigcap_{F\in\mathcal{F}_K}\operatorname{conv}\{u_i\}_{i\in F}.$$

נבחר משפחה מקסימלית $K_1,\dots,K_r$ מתוך ה־$K\in\mathcal{K}$ המקיימות $\mu(K)\geq\varepsilon$ כך ש־$\mathcal{F}_{K_1},\dots,\mathcal{F}_{K_r}$ זרות בזוגות. אז

1. $S=\coloneqq\{p_{K_1},\dots,p_{K_r}\}$ מקיימת $S\cap K\neq\varnothing$ לכל $K\in\mathcal{K}$ עבורה $\mu(K)\geq\varepsilon$:

   תהא K כזאת. אז ממקסימליות $K_1,\dots,K_r$ נובע שקיים $i\in[r]$ עבורו $\mathcal{F}_K\cap\mathcal{F}_{K_i}\neq\varnothing$. אז קיימת $F\in\mathcal{F}_K\cap\mathcal{F}_{K_i}$. כעת, $\{u_j\mid j\in F\}\subseteq K\cap K_i$. לכן

$$p_{K_i}\in\operatorname{conv}\{u_j\mid j\in F\}\subseteq K.$$

2. נותר להראות ש־r תלוי ב־ε בלבד. מתקיים

$$\bigsqcup_{i\in[r]}\mathcal{F}_{K_i}\subseteq\binom{[n]}{d+1}$$

   לכן

$$\sum_{i\in[r]}|\mathcal{F}_{K_i}|\,leq\binom{n}{d+1}.$$

   אבל

$$r\cdot c_d\binom{\lfloor\varepsilon\rfloor n}{d+1}\leq\sum_{i\in[r]}|\mathcal{F}_{K_i}|\leq\binom{n}{d+1}$$

   ולכן

$$\begin{aligned}r&\leq\frac{\binom{n}{d+1}}{c_d\binom{\lfloor\varepsilon\rfloor n}{d+1}}\\&\leq\frac{\frac{n^{d+1}}{(d+1)!}}{c\quad d}\frac{\left((\varepsilon n-d)^{d+1}\right)}{(d+1)!}\\&=\frac{1}{c_d}\left(\frac{n}{\varepsilon n-d}\right)^{d+1}\\&\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{c_d}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d+1}.\end{aligned}$$

■

פרק 2

פיאונים

2.1 (קו)הומולוגיה

2.1.1 קוהומולוגיה

לפעמים נרצה לפתור מערכת משוואות כאשר מימד מרחב הפתרונות אינסופי. נרצה הרבה פעמים לסנן את הפתרונות הטריוויאליים ולהישאר עם פתרונות אמיתיים.

דוגמה 2.1.1. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום פתוח. נחפש את אוסף השדות הוקטוריים

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

על Ω:

$$W \coloneqq \left\{ (P,Q) \;\middle|\; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \right\}.$$

זה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
בעצם, יש כאן הרבה פתרונות טריוויאליים. מתקיים

$$W \coloneqq \{(P,Q) \mid \nabla \times (P,Q) = 0\}.$$

אז W מכיל את כל השדות המשמרים, $(P,Q) = \nabla g$. כלומר, אם $P = \frac{\partial g}{\partial x}$ וגם $Q = \frac{\partial g}{\partial y}$ אז

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 0.$$

נגדיר

$$W_0 \coloneqq \{\nabla g \mid \omega \text{ on smooth is } g(x,y)\}$$

ונקרא לאלו הפתרונות הטריוויאליים. נרצה לשאול האם יש פתרונות שאינם טריוויאליים. לכל Ω כזה מתקיים $W_{0,\Omega} \subseteq W_\Omega$.

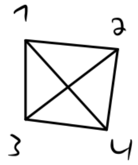
- אם $\Omega = \mathbb{R}^2$ אין פתרונות נוספים.
- אם $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ אז $W_{0,\Omega} \neq W_\Omega$. אכן,

$$(P,Q) = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$$

אינו מהצורה ∇g. אם הוא היה, עבור $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ היינו מקבלים

$$\begin{aligned} 0 &= g(\gamma(2\pi)) - g(\gamma(0)) \\ &= \int_\gamma \nabla g \\ &= \int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \\ &= \int_\gamma \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

בסתירה.



איור 2.1: קומפלקס שלא ניתן לקבל כעצב של קבוצת קטעים במישור.

הגדרה 2.1.2 (קוהומולוגיה ראשונה). מרחב הפתרונות "שאינם טריוויאליים" הוא $H^1(\Omega,\mathbb{R}) := W_\Omega / W_{0,\Omega}$. נקרא למרחב זה הקוהומולוגיה הראשונה של Ω עם מקדמים ב־$\mathbb{R}$. כאן $\dim H^1(\Omega,\mathbb{R})$ יהיה מספר ה"חורים" ב־Ω.

דוגמה 2.1.3. במקרה ש־Ω קבוצה דיסקרטית מגודל 3 נקבל $\dim H^1(\Omega,\mathbb{R})$.

2.1.2 הומולוגיה

עבור מרחב טופולוגי X ושדה $\mathbb{F}$ נרצה להגדיר חבורות הומולוגיה $H_k(X;\mathbb{F})$ שמתאר את החורים ה־k־מימדיים ב־X.

הגדרה 2.1.4 (קומפלקס סימפליציאלי מופשט). קומפלקס סימפליציאלי מופשט הוא קבוצת קודקודים V וקבוצה $X \subseteq \mathcal{P}(V)$ עבורה אם $\sigma \in X$ וגם $\tau \subseteq \sigma$ אז $\tau \in X$. נגדיר את המימד של X להיות

$$\dim X := \max\{\dim \sigma \mid \sigma \in X\}$$

כאשר $\dim \sigma := |\sigma| - 1$.

הגדרה 2.1.5 (סימפלקס גיאומטרי). סימפלקס גיאומטרי ממימד k הוא קבוצה מהצורה $\operatorname{conv}\{u_0,\dots,u_k\}$ כאשר $u_0,\dots,u_k$ בלתי־תלויים אפינית.

הגדרה 2.1.6 (קומפלקס סימפליציאלי גיאומטרי). קומפלקס סימפליציאלי גיאומטרי הוא אוסף Y של סימפלקסים גיאומטריים ב־$\mathbb{R}^N$ כך שמתקיימות התכונות הבאות.

1. אם $\sigma \in Y$ ו־$\tau \leq \sigma$ פאה של σ אז $\tau \in Y$.
2. אם $\sigma_1,\sigma_2 \in Y$ אז $\sigma_1 \cap \sigma_2$ פיאה (אולי ריקה) של σ_1,σ_2.

הגדרה 2.1.7 (מימוש של קומפלקס סימפליציאלי מופשט). קומפלקס סימפליציאלי גיאומטרי Y עם קבוצת קודקודים $u_1,\dots,u_m$ הוא מימוש גיאומטרי של קומפלקס סימפליציאלי מופשט X עם קבוצת קודקודים $v_1,\dots,v_m$ אם קיימת העתקה

$$\begin{aligned}\varphi\colon\ \{u_i \mid i\in[m]\} &\to \{x_i \mid i\in[m]\}\\ v_i &\mapsto u_i\end{aligned}$$

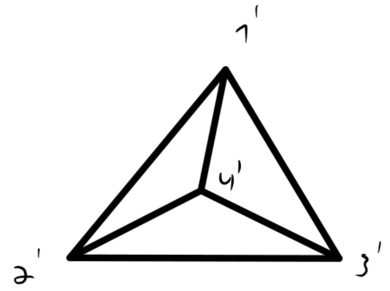
עבורה $\{u_{i_0},\dots,u_{i_k}\} \in X$ אם ורק אם $\operatorname{conv}(u_{i_0},\dots,u_{i_k}) \in Y$.

דוגמה 2.1.8. 1. לגרף K_4 יש מימוש ב־$\mathbb{R}^2$. המרחב באיור אינו מימוש כיוון שחיתוך שני האלכסונים אינו סימפלקס. המרחב באיור לעומת זאת הוא אכן שיכון גיאומטרי.

2. לגרף K_5 אין מימוש ב־$\mathbb{R}^2$, אבל יש מימוש ב־$\mathbb{R}^3$. למעשה, כל גרף אפשר לממש ב־$\mathbb{R}^3$.

טענה 2.1.9. יהי X קומפלקס סימפליציאלי אבסטרקטי על קבוצת קודקודים $[n]$ ונניח כי $\dim X = d$. אזי, יש ל־X מימוש גיאומטרי ב־$\mathbb{R}^{2d+1}$.

הוכחה. נבחר $u_1,\dots,u_m \in \mathbb{R}^{2d+1}$ שהן במצב כללי אפיני, כלומר כל $2d+2$ מהן בלתי־תלויות אפינית. למשל, אם $d=1$, כל 4 קודקודים יוצרים טטרהדר לא־מנוון.
באופן כללי, ב־$\mathbb{R}^N$ יש סדרה (אינסופית) של נקודות $u_1,u_2,\dots$ שכל $N+1$ מהן בלתי־תלויות אפינית. (למשל $u_j = (j,j^2,\dots,j^N)$ סדרה כזאת) נניח שמצאנו את $u_1,\dots,u_n$ שהן במצב כללי אפיני. יש $\binom{n}{N}$ מרחבים אפיניים שנפרשים אפינית על ידי N מתוך ה־$(u_i)_{i\in[n]}$, ולכן אפשר לבחור u_{m+1} שאינה באף אחד מהם.
המימוש הגיאומטרי של X הוא הקומפלקס הגיאומטרי Y שסימפלקסיו הם $\operatorname{conv}\{u_{i_0},\dots,u_{i_p}\}$ לכל $(i_0,\dots,i_p) \in X$.
ניתן אז להראות כי Y מקיים את הדרישות. ■



איור 2.2: קומפלקס שלא ניתן לקבל כעצב של קבוצת קטעים במישור.

הגדרה 2.1.10 (מימוש גיאומטרי של קומפלקס גיאומטרי). עבור קומפלקס גיאומטרי Y נגדיר את המימוש הגיאומטרי שלו על ידי

$$|Y| = \bigcup_{\sigma\in Y} \sigma .$$

טענה 2.1.11. יהי X קומפלקס סימפליציאלי אבסטרקטי עם Y_1, Y_2 מימושים גיאומטריים של X. אז $|Y_1| \cong |Y_2|$.

הוכחה. תהי $X \subseteq \mathcal{P}([n])$ ויהיו Y_1, Y_2 מימושים על קודקודים $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{R}^{N_1}$ ו־$v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{R}^{N_2}$. נגדיר $\varphi\colon Y_1 \to Y_2$ על ידי $\varphi(u_i) = v_i$ ואם $y \in |Y_1|$ נכתוב

$$\sum_{j=0}^{p} \lambda_j u_{i_j} = y \in \operatorname{conv}\{u_{i_0},\ldots,u_{i_p}\}$$

עבור $\lambda_j \geq 0$ המקיימות $\sum_{j=0}^{p} \lambda_j = 1$ ונגדיר

$$\varphi(y) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j v_{i_j} .$$

למשל, במקרה $X = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\}\}$ ההעתקה $\varphi\colon Y_1 \to Y_2$ ממשיכה לינארית מהקטע בין u_1, u_2 לקטע בין v_1, v_2.
אז φ הומיאומורפיזם $Y_1 \cong Y_2$. ■

מסקנה 2.1.12. אפשר לזהות קומפלקס סימפליציאלי אפיני עם מימוש כלשהו שלו ב־$\mathbb{R}^N$ עד כדי הומיאומורפיזם.

מרחבים קומפקטיים סבירים ניתן לשלש במובן שהם הומיאומורפיים לקומפלקסים סימפליציאליים סופיים.

סימון 2.1.13. נסמן $\Delta_{n-1} = 2^{[n]}$ כסימפלקס על $[n]$.

סימון 2.1.14 (השלד ה־k־מימדי). השלד ה־k־מימדי של Δ_{n-1} הוא

$$\Delta_{n-1}^{(k)} \coloneqq \{\sigma \in \Delta_{n-1} \mid \dim \sigma \leq k\} .$$

דוגמה 2.1.15. הספירה S^n ניתנת לשילוש. לכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים

$$S^{n-2} \cong \Delta_{n-1}^{(n-2)} .$$

דוגמה 2.1.16. אפשר לשלש גם את הטורוס $S^1 \times S^1$. נסתכל על הטורוס כהדבקה של ריבוע על הצלעות. ניתן לחלק אותו באופן

הגדרת הומולוגיה סימפליציאלית

יהי X קומפלקס סימפליציאלי (אבסטרקטי) על קודקודים V ונניח כי V קבוצה סדורה לינארית. יהי $X(k)$ אוסף הפיאות ה־k־מימדיות של X. יהי $X^{(k)} \coloneqq \{\sigma \in X \mid \dim \sigma \leq k\}$ השלד ה־k־מימדי של X. נייצג פיאה k־מימדית $\{v_0,\ldots,v_k\}$ על ידי קבוצה סדורה $[v_0,\ldots,v_k]$ כאשר $v_0 < \ldots < v_k$.

הגדרה 2.1.17. יהי $\mathbb{F}$ שדה. נגדיר את $C_n(X,\mathbb{F})$ להיות המרחב הוקטורי מעל $\mathbb{F}$ הנפרש על ידי הסימפלקסים $[v_0,\ldots,v_k] \in X(k)$.

דוגמה 2.1.18. יהי X כבאיור
אז למשל

$$17\left[1\right]+5\left[3\right]-2\left[4\right]\in C_{0}\left(X,\mathbb{F}\right)$$

והמרחב $C_{k}\left(X\right)$ ממימד $\left|X\left(k\right)\right|$. למשל גם $1\cdot\left[3,4\right]+\left(-1\right)\left[2,3\right]$.

הערה 2.1.19. כרגע, נסתכל רק על סימפלקסים $\left[v_{0},\ldots,v_{k}\right]$ כאשר $v_{0}<v_{1}<\ldots<v_{k}$. בהמשך נתייחס גם לשינוי סדר של זה.

הגדרה 2.1.20. נסמן $\left[\varnothing\right]=*$ ונגדיר

$$C_{-1}\left(X\right)=\mathbb{F}\cdot*\cong\mathbb{F}.$$

הגדרה 2.1.21 (העתקת שפה). עבור $k\geq1$ נגדיר את העתקת ה־k־שפה

$$\partial_{k}:C_{k}\left(X\right)\to C_{k-1}\left(X\right)$$

על איברי הבסיס על ידי

$$\delta_{k}\left(\left[v_{0},\ldots,v_{k}\right]\right)=\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{j}\left[v_{0},\ldots,\hat{v}_{j},\ldots,v_{k}\right]$$

כאשר $\hat{v}_{j}$ סימון לכך שזה איבר שמושמט מהביטוי.

דוגמה 2.1.22. נסתכל על הסימפלקס $\left[v_{0},v_{1}\right]$. אז

$$\partial_{1}\left(\left[v_{0},v_{1}\right]\right)=\sum_{j=0}^{1}\left(-1\right)^{j}\left[v_{0},\ldots,\hat{v}_{j},v_{1}\right]=\left[v_{1}\right]-\left[v_{0}\right].$$

דוגמה 2.1.23. נסתכל על $\left[v_{0},v_{1},v_{2}\right]$. אז

$$\partial_{2}\left(\left[v_{0},v_{1},v_{2}\right]\right)=\left[v_{1},v_{2}\right]-\left[v_{0},v_{2}\right]+\left[v_{0},v_{1}\right].$$

ניתן לחשוב על כך כבאיור

הגדרה 2.1.24 (k־מחזורים). נסמן

$$Z_{k}\left(X\right)\coloneqq\left\{ c\in C_{k}\left(X\right)\mid\partial_{k}c=0\right\}.$$

דוגמה 2.1.25. נסתכל על איור מתקיים

$$\begin{aligned}\partial_{2}\left(\left[1,2,3\right]\right) & =\partial_{1}\left(\left[1,2\right]+\left[2,3\right]-\left[1,3\right]\right)\\
 & =\partial_{1}\left[1,2\right]+\partial_{1}\left[2,3\right]-\partial_{1}\left[1,3\right]\\
 & =\left(\left[2\right]-\left[1\right]\right)+\left(\left[3\right]-\left[2\right]\right)-\left(\left[3\right]-\left[1\right]\right)\\
 & =0
\end{aligned}.$$

וניתן לראות כי $Z_{1}\left(X\right)$ הוא מעגלים מכוונים בקומפלקס.

דוגמה 2.1.26. נסתכל על X שילוש של $\mathbb{T}=S^{1}\times S^{1}$. אז

$$\partial_{2}\left(\sum_{\sigma\in X\left(2\right)}\sigma\right)=0$$

כיוון שכל צלע תופיע פעמיים בסימנים הפוכים, וכאשר הסימפלקסים באוריינטציה תואמת.
ניתן בדוגמא זאת לראות גם שמתקיים $\partial_{l}\circ\partial_{k+1}=0$. זה בעצם מתקיים באופן כללי יותר.

טענה 2.1.27. $\partial_{k}\circ\partial_{k+1}=0$ לכל $k\in\mathbb{N}$.

הוכחה. מתקיים

$$
\begin{aligned}
\partial_k \partial_{k+1} [v_0, \ldots, v_{k+1}] &= \partial_k \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1}] \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \partial_k [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1}] \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1}] + \sum_{j=i+1}^{k+1} (-1)^{j-1} [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{k+1}] \right) \\
&= \sum_{\substack{(i,j) \in [k+1]^2 \\ j<i}} (-1)^{i+j} [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, V_{k+1}] + \sum_{\substack{(i,j) \in [k+1]^2 \\ j>i}} (-1)^{i+j-1} [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, V_k
\end{aligned}
$$

אבל אם נחליף את האינדקסים i, j נראה כי הביטוי שווה לעצמו כפול (-1), ולכן שווה 0. ■

סימון 2.1.28. תחת הסימון $C_{k-1}(X) = \mathbb{F} \cdot *$ נסמן את העתקות השפה $\tilde{\partial}$. במקרה זה נסמן

$$\tilde{Z}_k (X) = \ker \left(\tilde{\partial}_k \right)$$

$$.\tilde{B}_k (X) = \operatorname{Im} \left(\tilde{\partial}_{k+1} \right)$$

עבור $i > 0$ מתקיים $\tilde{\partial}_i = \partial_i$.

הגדרה 2.1.29 (הומולוגיה). נגדיר את ההומולוגיה של X עם מקדמים ב־$\mathbb{F}$ על ידי

$$.H_k (X; \mathbb{F}) \coloneqq \tilde{Z}_k (X) / \tilde{B}_k (X)$$

הערה 2.1.30. טופולוגית, ההומולוגיה $H_k (X; \mathbb{F})$ היא המרחב הנפרש על ידי ה־k־חורים "האמיתיים" ב־X.

דוגמה 2.1.31. מתקיים

$$.\tilde{H}_0 (X) = \ker \left(\tilde{\partial}_0 \right) / \operatorname{Im} (\partial_1)$$

כמו כן,

$$.C_0 (X) = \left\{ \sum_{v \in V} a_V [v] \;\middle|\; a_v \in \mathbb{F} \right\}$$

אז

$$.\tilde{\partial}_0 \left(\sum_{v \in V} a_v [v] \right) = \sum_{v \in V} a_v *$$

מתקיים גם

$$\tilde{Z}_0 (X) = \left\{ \sum_{v \in V} a_V [v] \;\middle|\; \sum_{v \in V} a_v = 0 \right\}$$

ו־

$$.\operatorname{Im} \partial_1 = \operatorname{Span} \{ [v] - [u] \mid [u, v] \in X(1) \}$$

אז ההומולוגיה הראשונה אינה תלויה בפיאות ממימד 2 ומעלה.

סימון 2.1.32. עבור $v_0 < \ldots, < v_k$ הגדרנו $[v_0, \ldots, v_k]$ כיוצר של $C_k (X)$. עבור תמורה $\pi \in S_{\{0, \ldots, k\}}$ נסמן

$$.\left[v_{\pi(0)}, \ldots, v_{\pi(k)} \right] \coloneqq \operatorname{sg} (\pi) [v_0, \ldots, v_k]$$

דוגמה 2.1.33. במקרה של הסימפלקס ה־1־מימדי, $[v_1, v_0] = -[v_0, v_1]$.
במקרה של הסימפלקס ה־2־מימדי $[v_0, v_2, v_1] = -[v_0, v_1, v_2]$.

דוגמה 2.1.34. נסתכל על X כבאיור כאן

$$\tilde{Z}_0 = \left\{ \sum a_i [v_i] \;\middle|\; \sum a_i = 0 \right\}$$

$$\tilde{B}_0 = \langle [v_2] - [v_1], [v_3] - [v_1], [v_4] - [v_3], [v_5] - [v_1] \rangle$$

ובמקרה זה $\tilde{B}_0 = \tilde{Z}_0$. נראה כי זה נכון באופן כללי כאשר X קשיר כגרף.

טענה 2.1.35. אם X גרף קשיר, אז
$$\tilde{B}_0(X) = \tilde{Z}_0(X).$$

בפרט
$$H_0(X, \mathbb{F}) = 0.$$

הערה 2.1.36. מתקיים $[v_i] - [v_j] \in \tilde{B}_0$ לכל i, j.
אפשר לקבל זאת על ידי לקיחת שפה של מסלול בין v_i, v_j. למשל, בדוגמא למעלה
$$[v_4] - [v_2] = ([v_4] - [v_3]) + ([v_3] - [v_1]) + ([v_1] - [v_2]).$$

הוכחה. יהי X קשיר ויהי
$$\sum_{i \in [m]} a_i [v_i] \in \tilde{Z}_0(X)$$

ואז
$$\sum_{i \in [m]} a_i = 0.$$

אנו יודעים כי $[v_{i+1}] - [v_i] \in \tilde{B}_0(X)$ ולכן
$$\begin{aligned}
\sum_{i \in [m]} a_i [v_i] &= \sum_{i=2}^{m} \left(\sum_{j=i}^{m} a_j\right) ([v_i] - [v_{i-1}]) \\
&= \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=i}^{m} a_j [v_i] - \sum_{i=2}^{m} \left(\sum_{j=i}^{m} a_j [v_{i-1}]\right) \\
&= \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=i}^{m} a_j [v_i] - \sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{j=i+1}^{m} a_j [v_i]\right) \\
&= a_m [v_m] + \sum_{i=2}^{m-1} \underbrace{\left(\sum_{j=i}^{m} a_j - \sum_{j=i+1}^{m} a_j\right)}_{a_i} [v_i] - \sum_{j=2}^{m} a_j [v_1] \\
&= \sum_{i \in [m]} a_i [v_i].
\end{aligned}$$

לכן $\sum_{i \in [m]} a_i [v_i] \in \tilde{B}_0(X)$, כנדרש. ∎

טענה 2.1.37. אם ל־X יש ℓ רכיבי קשירות אז
$$\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{F}^{\ell-1}.$$

הוכחה. נסמן ב־$V_1, \ldots, V_\ell$ את רכיבי הקשירות. מתקיים
$$\tilde{Z}_0(X) = \left\{ \sum_{v\ inV} a_V [v] \,\middle|\, \sum_{v \in V} a_v = 0 \right\}$$
$$\tilde{B}_0(X) = \left\{ \sum_{v \in V} b_v [v] \,\middle|\, \forall i \in [\ell] : \sum_{v \in V_i} b_v = 0 \right\}.$$

אז
$$\dim \tilde{Z}_0 = n - 1$$

כאשר n מספר הקודקודים של V, ומתקיים
$$\dim \tilde{B}_0 = \sum_{i \in [\ell]} (|V_r| - 1) = n - \ell.$$

אז
$$\dim \tilde{H}_0 = (n-1) - (n - \ell) = \ell - 1,$$

כנדרש. ∎

משפט 2.1.38. אם X_1, X_2 קומפלקסים סימפליציאליים ו־$|X_1| \cong |X_2|$ הומוטופיים אז

$$\forall k \in \mathbb{N} \colon \tilde{H}_k\left(x_1\right) = \tilde{H}_k\left(x_2\right).$$

דוגמה 2.1.39. נסתכל על הסדרה

$$0 \to C_0\left(X\right) = \langle [v] \rangle \xrightarrow{\partial_0} C_{-1}\left(X\right) = \langle * \rangle \to 0.$$

אז

$$\tilde{H}_0\left(\text{pt}\right) = \tilde{H}_{-1}\left(\text{pt}\right) = 0.$$

מסקנה 2.1.40. אם X קומפלקס סימפליציאלי כוויץ אז $\tilde{H}_k\left(X\right) = 0$ לכל $k \in \mathbb{N}$.

דוגמה 2.1.41. יהי $X = \Delta_2$ והסימפלקס ה־2־מימדי על קודקודים v_1, v_2, v_3. נקבל סדרה

$$0 \longrightarrow C_2 = C_2 = \langle [v_1, v_2, v_3] \rangle \longrightarrow C_1 = \langle [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_1, v_3] \rangle \longrightarrow C_0 = \langle [v_1], [v_2], [v_3] \rangle \longrightarrow C_{-1} = \langle * \ .$$

נטען שכל ההומולוגיות שוות 0. מתקיים

$$\partial\left[v_1, v_2, v_3\right] = \left[v_1, v_2\right] + \left[v_@, v_3\right] + \left[v_3, v_1\right] \neq 0$$

לכן $\tilde{Z}_2\left(X\right) = 0$ ולכן $\tilde{H}_2\left(X\right) = 0$. חישוב ישיר נותן

$$\tilde{Z}_1\left(X\right) = \text{Span}\left(\left[v_1, v_2\right] + \left[v_2, v_3\right] + \left[v_3, v_1\right]\right)$$

ולכן $\tilde{H}_1\left(X\right) = 0$.

דוגמה 2.1.42. יהי Δ_{n-1} הסימפלקס ה־$(n-1)$־מימדי. הוא כוויץ ולכן $\tilde{H}_*\left(A_{n-1}\right) = 0$. מתקיים

$$\Delta_{n-1}^{(k)} = \left\{\sigma \in \Delta_{n-1} \mid \dim \sigma \leq k\right\}$$

ולמשל $\Delta_{n-1}^{(n-2)}$ הסימפלקס ה־$n-1$־מימדי כאשר נתעלם מהחלק הפנימי שלו.

טענה 2.1.43. מתקיים

$$\dim \tilde{H}_i\left(\Delta_{n-1}^{(k)}\right) = \begin{cases} \binom{n-1}{k+1} & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

ובפרט

$$\dim \tilde{H}_i\left(\Delta_{n-1}^{(n-2)}\right) = \begin{cases} 1 & i = n-2 \\ 0 & i \neq n-2 \end{cases}.$$

הוכחה. נעיין בקומפלקס

$$0 \to C_{n-1}\left(\Delta_{n-1}\right) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}\left(\Delta_{n-1}\right) \xrightarrow{\partial_{n-2}} \to \cdots \to C_{k+1}\left(\Delta_{n-1}\right) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k\left(\Delta_{n-1}\right) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}\left(\Delta_{n-1}\right) \to \cdots.$$

נראה כי

$$\dim \tilde{Z}_k\left(\Delta_{n+1}\right) = \binom{n-1}{k+1}.$$

נוכיח זאת באינדוקציה יורדת על k.

בסיס: נניח כי $k = n-1$. אז

$$\tilde{Z}_{n-1}\left(\Delta_{n-1}\right) = \tilde{H}_{n-1}\left(\Delta_{n-1}\right) = 0.$$

צעד: נניח את הטענה עבור $k+1 > 0$ ונוכיח אותה עבור k. נסתכל על

$$\cdots \to C_{k+1}\left(\Delta_{n-1}\right) \to C_k\left(\Delta_{n-1}\right) \to C_{k-1}\left(\Delta_{n-1}\right) \to \cdots.$$

מתקיים $\tilde{H}_k\left(\Delta_{n-1}\right) = 0$ ולכן

$$\dim \text{Im}\, \partial_{k+1} = \dim \ker \partial_k = \dim \tilde{Z}_k.$$

ממשפט המימדים ומהנחת האינדוקציה נקבל

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} \partial_{k+1} &= \dim_{C_{k+1}(\Delta_{n-1})} - \dim \ker\left(\partial_{k+1}\right) \\ &= \binom{n}{k+2} - \binom{n-1}{k+1}\end{aligned}$$

ולכן

$$\dim Z_k\left(\Delta_{n-1}\right) = \dim \operatorname{Im} \partial_{k+1} = \binom{n}{k+2} - \binom{n-1}{k+2} = \binom{n-1}{k+1},$$

כנדרש.

לכן

$$\dim \tilde{H}_k\left(\Delta_{n-1}^{(k)}\right) = \dim \tilde{Z}_k\left(\Delta_{n-1}^{(k)}\right) = \binom{n-1}{k+1}$$

ולכל $i < k$ מתקיים

$$\tilde{H}_i\left(\Delta_{n-1}^{(k)}\right) = \tilde{H}_i\left(\Delta_{n-1}\right) = 0.$$

■

הגדרה 2.1.44 (קומפלקס). קומפלקס סימפליציאלי נקרא ריק אם $X = \{\varnothing\}$ ונקרא *void* אם $X = \{\} = \varnothing$.

הגדרה 2.1.45 (מציין אוילר המצומצם). עבור קומפלקס סימפליציאלי X נגדיר את מציין אוילר המצומצם של X להיות

$$\tilde{\chi}(X) = \sum_{i \geq -1} (-1)^i \dim \tilde{H}_i(X).$$

טענה 2.1.46. נסמן ב־$f = (f_{-1}, f_0, f_1, \ldots)$ את וקטור מספרי הפיאות של X. כלומר,

$$f_i(X) = \left|\{\sigma \in X \mid \dim \sigma = i\}\right|.$$

נניח כי $X \ni \varnothing$ ואז $f_{-1} = 1$. אז

$$\tilde{\chi}(X) = \sum_{i \geq -1} (-1)^i f_i.$$

2.2 חזרה לפיאונים

דוגמה 2.2.1 (נוסחאת אוילר). אם X שילוש של S^n אז

$$\begin{aligned}\sum_{i \geq -1} (-1)^i f_i &= \tilde{\chi}(S^n) \\ &= \sum_{i \geq -1} (-1)^i \dim \tilde{H}_i(S^n) \\ &= (-1)^n \cdot 1 \\ &= (-1)^n\end{aligned}.$$

אם $n = 2$ נקבל $-1 + f_0 - f_1 + f_2 = 1$ ואז

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2.$$

הוכחה. נניח שיש קומפלקס

$$0 \to V_n \xrightarrow{\varphi_n} V_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \to V_0 \xrightarrow{\varphi_0} V_{-1} \xrightarrow{\varphi_{-1}} 0,$$

כלומר שמתקיים $\varphi_i \varphi_{i+1} = 0$ לכל $0 \leq i \leq n$. נראה כי

$$\sum (-1)^i \dim V_i = \sum \left(\dim \ker\left(\varphi_i\right) - \dim \operatorname{Im}\left(\varphi_{i+1}\right)\right).$$

במקרה שלנו $\varphi_i = \partial_i$ וגם $V_i = C_i(X)$ ולכן

$$\dim \tilde{H}_i(X) = \dim \ker(\varphi_i) - \dim \operatorname{Im}(\varphi_{i+1})$$

וגם

$$\dim V_i = f_i(X),$$

ולכן נקבל את השוויון.
נותר להראות כי מתקיים

$$\sum (-1)^i \dim V_i = \sum (\dim \ker(\varphi_i) - \dim \operatorname{Im}(\varphi_{i+1})).$$

אכן,

$$\begin{aligned}\sum (-1)^i \dim V_i &= \sum (-1)^i (\dim \ker(\varphi_i) + \dim \operatorname{Im}(\varphi_i)) \\ &= \sum (-1)^i \dim \ker(\varphi_i) + \sum (-1)^i \dim \operatorname{Im}(\varphi_i) \\ &= \sum (-1)^i \dim \ker(\varphi_i) + \sum (-1)^{i+1} \dim \operatorname{Im} \varphi_{i+1} \\ &= \sum (-1)^i (\dim \ker(\varphi_i) - \dim \operatorname{Im}(\varphi_{i+1}))\end{aligned}$$

כאשר האינדקסים מסתדרים בשלב האחרון כי $\operatorname{Im} \varphi_{-1} = 0$ וכי $\ker \varphi_{n+1} = 0$. ■

שאלה 2.2.2. איך נוכל לאפיין את מספרי הפיאות של שילושים של מרחבים מסוימים, בפרט כאלה של S^{d-1}?

הגדרה 2.2.3. בהינתן קומפלקס סימפליציאלי ממימד $\dim(X) \leq d-1$ נגדיר

$$F(t) = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} t^{d-i}.$$

זה מקודד באמצעות פולינום את f.
נגדיר

$$H(t) = F(t-1).$$

נכתוב פולינום זה

$$H(t) = \sum_{k=0}^{d} h_k t^{d-k}.$$

אז $h := (h_0, \ldots, h_d)$ נקרא ה־h־וקטור של X.

הערה 2.2.4. מתקיים

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{d} h_k t^{d-k} &= F(t-1) \\ &= \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} (t-1)^{d-i} \\ &= \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} \sum_{j=0}^{d-i} (-1)^j \binom{d-i}{j} t^{d-i-j} \\ &= \sum_{k=0}^{d} \left(\sum_{i+j=k} f_{i-1} (-1)^j \binom{d-i}{j} \right) t^{d-k} \\ &= \sum_{k=0}^{d} \left(\sum_{i \geq 0} f_{i-1} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} \right) t^{d-k} \\ &= \sum_{k=0}^{d} \left(\sum_{i \geq 0} f_{i-1} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} \right) t^{d-k}\end{aligned}$$

ואז

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} f_{i-1} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k}.$$

נובע כי מתקיים

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= \sum_{i=0}^{1} f_{i-1} \left(-1\right)^{i-1} \binom{d-i}{d-k} = f_0 - d \\ &\vdots \\ h_d &= \sum_{i=0}^{k} f_{i-1} \left(-1\right)^{k-i} \binom{d-i}{0} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} \left(-1\right)^{d-i} = \left(-1\right)^{d-1} \tilde{\chi}\left(X\right). \end{aligned}$$

טענה 2.2.5 (נוסחאת דן־סומרויל). אם X שילוש של S^{d-1} אז

$$h_k = h_{d-k}$$

לכל $0 \leq k \leq d$.

הערה 2.2.6. למשל, עבור $k=0$ נראה כי $h_0 = 1$ וכי

$$\begin{aligned} h_d &= \left(-1\right)^{d-1} \tilde{\chi}\left(X\right) \\ &= \left(-1\right)^{d-1} \tilde{\chi}\left(S^{d-1}\right) \\ &= \left(-1\right)^{d-1} \left(-1\right)^{d-1} \\ &= 1 \end{aligned}.$$

אכן מתקיים $h_0 = h_d$.

הערה 2.2.7. אפשר להגדיר מרחב Y עבורו $h_i = \tilde{H}_i\left(Y\right)$. אז נוסחאת דן־סומרויל נובעת מ־דואליות פואנקרה.

הוכחה. עבור קומפלקס סימפליציאלי Y ועבור $\sigma \in Y$ נגדיר

$$\mathsf{st}\left(Y, \sigma\right) = \left\{\tau \mid \tau \cup \sigma \in Y\right\}.$$

נגדיר גם

$$\mathsf{lk}\left(Y, \sigma\right) = \left\{\tau \in \mathsf{st}\left(Y, \sigma\right) \mid \tau \cap \sigma = \varnothing\right\}.$$

נשים לב כי אם X שילוש של S^{d-1} אז לכל $\sigma \in X$ גם $\mathsf{lk}\left(X, \sigma\right)$ הוא שילוש של $S^{d-2-\dim\sigma}$. אז

$$\tilde{\chi}\left(\mathsf{lk}\left(X, \sigma\right)\right) = \left(-1\right)^{d-2-\dim\sigma}.$$

יהי $\sigma \in X$. אז

$$\begin{aligned} \left(-1\right)^{d-2-k} &= \tilde{\chi}\left(\mathsf{lk}\left(X, \sigma\right)\right) \\ &= \sum_{j \geq 0} f_{j-1}\left(\mathsf{lk}\left(X, \sigma\right)\right) \left(-1\right)^{j-1} \\ &= \sum_{j \geq 0} \left\{\tau \in X \;\middle|\; {}^{\tau \supseteq \sigma}_{|\tau| = k+1+j}\right\} \end{aligned}$$

נסכם על כל $\sigma \in X\left(k\right)$ ונקבל

$$\begin{aligned} \left(-1\right)^{d-2-k} f_k\left(X\right) &= \sum_{\sigma \in X(k)} \sum_{j \geq 0} \left(-1\right)^{j-1} \left|\left\{\tau \in X\left(k+j\right) \mid \tau \supseteq \sigma\right\}\right| \left(-1\right)^{j-1} \\ &= \sum_{j \geq 0} \left|\left\{\left(\sigma, \tau\right) \in X\left(k\right) \times X\left(k+j\right) \mid \sigma \subseteq \tau\right\}\right| \left(-1\right)^{j-1} \\ &= \sum_{j \geq 0} \left(-1\right)^{j-1} \sum_{\tau \in X(k+j)} \binom{k+j+1}{k+1} \\ &= \sum_{j \geq 0} \left(-1\right)^{j-1} \binom{k+j+1}{k+1} f_{k+j}\left(X\right) \end{aligned}.$$

נסיק כי

$$\left(-1\right)^{d-2-k} f_k\left(X\right) = \sum_{j \geq 0} \left(-1\right)^{j-1} \binom{k+j+1}{k+1} f_{k+j}\left(X\right).$$

נובע כי
$$(-1)^{d-1} f_{k-1} = \sum_{j=k-1}^{d-1} (-1)^j \binom{j+1}{k} f_j .$$

אז
$$\begin{aligned}
F(t) &= \sum_{k=0}^{d} f_{k-1} t^{d-k} \\
&= \sum_{k=0}^{d} \left(\sum_{j=k-1}^{d-1} (-1)^{j-d-1} \binom{j+1}{k} f_j \right) t^{d-k} \\
&= \sum_{k=0}^{d} \left(\sum_{j=k}^{d} (-1)^{j-d} \binom{j}{k} f_{j-1} \right) t^{d-k} \\
&= \sum_{j=0}^{d} (-1)^{j-d} f_{j-1} \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} t^{j-k} \right) t^{d-j} \\
&= \sum_{j=0}^{d} (-1)^{j-d} f_{j-1} (1+t)^j t^{d-j} \\
&= \sum_{j=0}^{d} f_{j-1} (-t)^{d-j} (1+t)^j \\
&= (1+t)^d \sum_{j=0}^{d} f_{j-1} \frac{(-t)^{d-j}}{(1+t)^{d-j}} \\
&= (1+t)^d \sum_{j=0}^{d} f_{j-1} \left(\frac{-t}{1+t} \right)^{d-j} \\
&= (1+t)^d F\left(\frac{-t}{1+t} \right) \\
&= (1+t)^d F\left(\frac{1}{1+t} - 1 \right) \\
&= (1+t)^d H\left(\frac{1}{1+t} \right) .
\end{aligned}$$

מצד שני $F(t) = H(t+1)$. נסיק כי
$$H(t) = t^d H\left(\frac{1}{t}\right).$$

אז
$$\sum_{i=0}^{d} h_i t^{d-i} = H(t) = t^d H\left(\frac{1}{t}\right) = t^d \sum_{i=0}^{d} h_i \left(\frac{1}{t}\right)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i t^i = \sum_{i=0}^{d} h_{d-i} t^{d-i}$$

ונקבל את הנדרש. ■

הערה 2.2.8. משפט דן סומרוויל נכון באופן כללי יותר לכל קומפלקס $d-1$־מימדי עבורו
$$\tilde{\chi}(\mathsf{lk}(\mathsf{X}, \sigma)) = (-1)^{d-\dim\sigma-2}.$$

פרק 3

פיאונים

הגדרה 3.0.1. עבור $V \subseteq \mathbb{R}^d$ סופית, $P \subseteq \mathbb{R}^d$ יקרא V־פיאון אם $P = \text{conv}\,(V)$.

דוגמה 3.0.2. הקוביה ה־d־מימדית היא $\text{conv}\left(\{0,1\}^d\right)$.

דוגמה 3.0.3. האוקטהדר ה־d־מימדי הוא

$$\text{conv}\,\{\pm e_i \mid i \in [d]\} \subseteq \mathbb{R}^d\,.$$

זה כדור היחידה ב־ℓ_1.

הגדרה 3.0.4. P יקרא H־פיאון אם

$$P = \bigcap_{i\in[n]} H^-_{u_i,\alpha_i}$$

חסום וגם

$$u_i \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

טענה 3.0.5. P הוא V־פיאון אם ורק אם הוא H־פיאון.

הגדרה 3.0.6 (גוף דואלי קוטבי). עבור $C \subseteq \mathbb{R}^d$ נגדיר את הגוף הדואלי הקוטבי ל־C על ידי

$$C^* = \bigcap_{u\in C} H^-_{u,1} = \{x \mid \forall u \in C\colon x \cdot u \le 1\}.$$

דוגמה 3.0.7. אם $C = B\,(0,R)$ אז

$$C^* = \{y \mid \forall\, |x| \le R\colon y \cdot x \le 1\} = B\left(0, \frac{1}{R}\right).$$

דוגמה 3.0.8. תהי $C = [-1,1]^d$. אז

$$C^* = \text{conv}\,\{\pm e_i \mid i \in [d]\}.$$

טענה 3.0.9.
1. אם $0 \in \text{int}C$ אז C^* חסומה.
2. אם $K \subseteq \mathbb{R}^d$ קמורה וסגורה, וגם $0 \in K$, אז $K^{**} = K$.
3. אם $K = \text{conv}\,(A)$ אז

$$K^* = \bigcap_{a\in A} H^-_{a,1}.$$

הוכחה. 1. אם $0 \in \text{int}\,(C)$ אז $C \supseteq B\,(0,\varepsilon)$ ולכן

$$C^* \subseteq B\,(0,\varepsilon)^* = B\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

2. באופן כללי $K \subseteq K^{**}$ כי אם $x \in K$ וגם $y \in K^*$ אז $y \cdot x \leq 1$ ולכן $x \in K^{**}$.

נניח כעת כי K קמורה, סגורה ומכילה את אפס. נראה כי $K^{**} \subseteq K$. יהי $u \in \mathbb{R}^d \setminus K$. יהי $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ עבורם

$$K \subseteq \text{int} H^-_{v,\alpha}$$
$$u \in \text{int} H^+_{v,\alpha}.$$

כעת $0 \in K$ ולכן $0 = 0 \cdot v < \alpha$. לכל $z \in K$ מתקיים $z \cdot v < \alpha$, לכן $z \cdot \frac{v}{\alpha} < 1$ ולכן $\frac{v}{\alpha} \in K^*$. מצד שני, $v \cdot u > \alpha$, לכן $\frac{v}{\alpha} \cdot u > 1$ ולכן $u \notin K^{**}$.

3. נניח כי $K = \text{conv}(A)$. נרצה להראות כי

$$K^* = \bigcap_{u \in K} H^-_{u,1} = \bigcap_{a \in A} H^-_{a,1} = A^*.$$

מתקיים $A \supseteq K$ ולכן $K^* \subseteq A^*$. נראה את הכיוון השני.

תהיינה $u \in A^*$ ו־$z \in K$. אז

$$\sum_i \lambda_i a_i$$

ואז

$$z \cdot u = \sum \lambda_i a_i \cdot a \leq \sum \lambda_i = 1.$$

■

הוכחה (3.0.5). • יהי $P \subseteq \mathbb{R}^d$ H־פיאון ונכתוב

$$P = \bigcap_{i \in [m]} H^-_{u_i,\alpha_i}.$$

נוכיח את באינדוקציה על $\dim P$ ש־P הוא V־פיאון. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$\dim P = d$ ואז נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות שמתקיים $0 \in \text{int}P$.

לכל $i \in [m]$, $P \cap H_{u_i,\alpha_i}$ הוא H־פיאון ממימד קטן־או־שווה $d-1$. לפי הנחת האינדוקציה

$$F_i \coloneqq P \cap H_{u_i,\alpha_i} = \text{conv}(V_i)$$

עבור V_i סופית.

נראה כי $P = \text{conv}\, V$ עבור $V = \bigcup_{i \in [m]} V_i$. תהי $z \in P$. נעביר דרכה ישר שרירותי ℓ ונסתכל על הקטע $\ell \cap P \coloneqq [a,b]$. נשים לב כי

$$\partial P \subseteq \bigcup_{i \in [m]} F_i = \bigcup_{i \in [m]} (H_{u_i,\alpha_i} \cap P).$$

אחרת, יש

$$z \in P \setminus \bigcup_{i \in [m]} H_{u_i,\alpha_i}$$

ואז $z \cdot u_i < \alpha_i$ לכל i אבל אז $z \in \text{int}(P)$ בסתירה. לכן קיימים $i,j \in [m]$ עבורם $a \in F_i$ וגם $b \in F_j$. אז $a \in \text{conv}(V_i)$ וגם $b \in \text{conv}(V_j)$ ואז

$$z \in \text{conv}\{a,b\} \in \text{conv}(V_i \cup V_j).$$

• נניח כי $P = \text{conv}(V)$ עבור $V = (v_1,\ldots,v_m)$ סופית, ונניח בה"כ כי $0 \in \text{int}(P)$. בפרט P^* חסום. כעת,

$$P^* = \bigcap_{v \in V} H^-_{v,1} = \bigcap_{i \in [m]} H^-_{v_i,1}.$$

לכן P^* הוא H־פיאון, וממה שהראנו הוא גם V־פיאון. אז ניתן וכתוב $P^* = \text{conv}(u_i)_{i \in [N]}$ ונקבל כי

$$P = P^{**} = \bigcap_{j \in [N]} H^-_{u_j,1},$$

כנדרש. ■

מעתה, נדבר על פיאון כללי בלי הבחנה בין H־פיאון ו־V־פיאון.

הגדרה 3.0.10 (פאה של פיאון). יהי P פיאון. פאה של P היא אחד מהבאים.

1. P.
2. אם $P \subseteq H_{u,\alpha}^{-}$ אז $H_{u,\alpha} \cap P$ פיאה.

הגדרה 3.0.11 (נקודה קיצונית). u נקודה קיצונית של קבוצה קמורה C אם $u \notin \text{conv}\left(C \setminus u\right)$.

טענה 3.0.12. אם C פיאון אז נקודות קיצוניות של C הן קודקודים של C.

סימון 3.0.13. נסמן ב־$\text{Ext}\left(P\right)$ את קבוצת נקודות הקיצון של P וב־$\text{Ver}\left(P\right)$ את קבוצת קודקודי P.

טענה 3.0.14. מתקיים

$$\text{Ext}\left(P\right) = \text{Ver}\left(P\right).$$

בפרט מתקיים

$$\text{conv}\left(\text{Ver}\left(P\right)\right) = P.$$

זה מקרה פרטי של משפט קריין מילמן.

הערה 3.0.15. p נקודת קיצון של K אם ורק אם $K \setminus p$

הוכחה. תהי S מינימלית ביחס להכלה כך ש־$\text{conv}\left(S\right) = P$. נראה שמתקיים

$$\text{Ver}\left(P\right) \subseteq \text{Exp}\left(P\right) \subseteq S \subseteq \text{Ver}\left(P\right).$$

אז נקבל $\text{Ver}\left(P\right) = \text{Exp}\left(P\right) = S$.

1. יהי $v \in \text{Ver}\left(P\right)$. אז קיים $H_{u,\alpha}$ עבורו $P \subseteq H_{u,\alpha}^{-}$ וגם $H_{u,\alpha} \cap P = \{v\}$. אם $u_1, u_2 \in P \setminus \{v\}$ מקיימות

$$v = \lambda u_1 + \left(1-\lambda\right) u_2$$

אז

$$\begin{aligned} \alpha &= v \cdot u \\ &= v \cdot \left[\lambda u_1 + \left(1-\lambda\right) u_2\right] \\ &= \lambda v \cdot u_1 + \left(1-\lambda\right) v \cdot u_2 \\ &< \lambda\alpha + \left(1-\lambda\right)\alpha = \alpha \end{aligned}.$$

2. יהי $v \in \text{Exp}\left(P\right)$. אם $v \notin S$ אז $S \subseteq P \setminus \{v\}$. אבל, $P \setminus \{v\}$ קמורה ואז

$$P = \text{conv}\left(S\right) \subseteq P \setminus \{v\}$$

בסתירה.

3. תהי $s \in S$ ונניח כי $s \notin \text{Ver}\left(P\right)$. תהי $T = S \setminus \{s\}$. ממינימליות S נקבל $s \notin C \coloneqq \text{conv}\left(T\right)$. כעת, C קבוצה קמורה וקומפקטית ולכן יש על מישור H עבורו $C \subseteq \text{int}H^{-}$ וגם $s \in \text{int}H^{+}$. יהי H' המקביל ל־H ועובר דרך s. אז $s = H' \cap P$ כי אם $x \in P$ נוכל לכתוב $x = \lambda z + \left(1-\lambda s\right)$ עבור $z \in C$, אבל כאשר $\lambda > 0$ נקבל $x \notin H'$. אכן, אם נכתוב $H' = H_{u,\alpha}$ אז $u \cdot s = \alpha$, ואם $T \subseteq \text{int}\left(H'\right)^{-}$ אז $t \cdot u < \alpha$ לכל $t \in T$; אז $z \cdot u < \alpha$ לכל $z \in C$ ואז

$$\begin{aligned} \left(\lambda z + \left(1-\lambda\right) s\right) \cdot u &= \lambda\left(z \cdot u\right) + \left(1-\lambda\right) su \\ &= \lambda\left(z \cdot u\right) + \left(1-\lambda\right)\alpha \end{aligned}$$

ואשר $\lambda > 0$ נקבל כי ביטוי זה קטן מ־

$$\lambda\alpha + \left(1-\lambda\right)\alpha = \alpha$$

ובמקרה זה $\lambda z + \left(1-\lambda\right) s \notin H'$. ■

הפיאון הציקלי

עבור $n,d\in\mathbb{N}$ נסמן ב־$C\left(n,d\right)$ את הפיאון הציקלי ונגדיר אותו באופן הבא. יהי

$$\gamma\left(t\right)=\left(t,t^{2},\ldots,t^{d}\right)\in\mathbb{R}^{d}$$

עקום המומנטים, עבור $t\in\mathbb{R}$. יהי
$\Gamma\coloneqq\left\{ \gamma\left(t\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}$.

טענה 3.0.16. Γ במצב כללי אפיני, במובן שלכל $t_{1}<\ldots<t_{d+1}$ הנקודות $\gamma\left(t_{1}\right),\ldots,\gamma\left(t_{d+1}\right)$ בלתי־תלויות אפינית.

הוכחה. $u_{1},\ldots,u_{k}$ בלתי־תלויים אפינית אם ורק אם $\left(1,u_{1}\right),\ldots,\left(1,u_{k}\right)$ בלתי־תלויים לינארית. לכן די להראות כי

$$\left(1,\gamma\left(t_{1}\right)\right),\ldots,\left(1,\gamma\left(t_{d+1}\right)\right)$$

בלתי־תלויים לינארית. אז

$$\det\begin{pmatrix}1 & t_{1} & t_{1}^{2} & \cdots & t_{1}^{d}\\
1 & t_{2} & t_{2}^{2} & \cdots & t_{2}^{d}\\
 & & \vdots\\
1 & t_{d+1} & t_{d+1}^{2} & \cdots & t_{d+1}^{d}
\end{pmatrix}=\prod_{i<j}\left(t_{j}-t_{i}\right)\neq0$$

ולכן הוקטורים בלתי־תלויים לינארית. ■

הגדרה 3.0.17 (הפיאון הציקלי). עבור $t_{1}<\ldots<t_{n}$ כלשהן נגדיר

$C\left(n,d\right)=\operatorname{conv}\left\{ \gamma\left(t_{1}\right),\ldots,\gamma\left(t_{n}\right)\right\} \subseteq\mathbb{R}^{d}$.

טענה 3.0.18.
1. $C\left(n,d\right)$ פיאון סימפליציאלי, במובן שכל הפיאות שלו, חוץ מעצמו, הן סימפלקסים.
2. $C\left(n,d\right)$ פיאון שכן: לכל $I\subseteq\left[n\right]$ עבורו $k\coloneqq\left|I\right|\leq\left\lfloor \frac{d}{2}\right\rfloor$, הקבוצה $\operatorname{conv}\left\{ \gamma\left(t_{i}\right)\mid i\in I\right\}$ היא פיאה $\left(k-1\right)$־מימדית של $C\left(n,d\right)$.
   במילים אחרות, לכל $i<\left\lfloor \frac{d}{2}\right\rfloor$ מתקיים

   $f_{i}\left(C\left(n,d\right)\right)=\binom{n}{i+1}$.
3. עבור $I\subseteq\left[n\right]$ מגודל d הקבוצה $\operatorname{conv}\left\{ \gamma\left(t_{i}\right)\right\} _{i\in I}$ היא פיאה $d-1$־מימדית אם ורק אם $k,\ell\in\left[n\right]\setminus I$ אז

   $2\mid\left|I\cap\left(k,el\right)\right|$.

   תכונה זאת נקראת תנאי הזוגיות של *Gale*.
4.
   $$h_{k}\left(C\left(n,d\right)\right)=\binom{n-d+k-1}{k}$$

   לכל $k\leq\left\lfloor \frac{d}{2}\right\rfloor$.
5.
   $$f_{d-1}\left(C\left(n,d\right)\right)=\begin{cases}
\frac{n}{n-r}\binom{n-r}{r} & d=2r\\
2\binom{n-r-1}{r} & d=2r+1
\end{cases}.$$

משפט 3.0.19 (משפט החסם העליון לפיאונים). יהי P פיאון עם n קודקודים ב־$\mathbb{R}^{d}$. אזי $f_{i}\left(P\right)\leq f_{i}\left(C\left(n,d\right)\right)$ לכל $i\in\left[d-1\right]$.

הוכחה (3.0.18). 1. $C\left(n,d\right)$ פיאון סימפליציאלי מפני שהקודקודים $\left(\gamma\left(t\right)\right)$ הם במצב כללי אפיני.

2. צריך להראות שכל $k+1$ קודקודים פורשים פיאה, עבור $k<\left\lfloor \frac{d}{2}\right\rfloor$. תהי $I\subseteq[n]$ עם $|I|=k+1$. נרצה להראות כי $i\in I$ conv$\left(\gamma\left(t_{i}\right)\right)$ פיאה של $C\left(n,d\right)$. יהי

$$g\left(z\right)\coloneqq\prod_{i\in I}\left(z-t_{i}\right)^{2}=\sum_{j=0}^{d}a_{j}z^{j}$$

פולינום מדרגה $d\leq\left|I\right|2$. תהי $u=\left(a_{1},\ldots,a_{d}\right)$ ויהי

$$H_{u,-a_{0}}^{+}=\left\{ x\in\mathbb{R}^{d}\;\middle|\;x\cdot u\geq-a_{0}\right\}.$$

נטען כי $C\left(n,d\right)\subseteq H_{u,-a_{0}}^{+}$ וכי

$$\text{conv}\left\{ \gamma\left(t_{i}\right)\mid i\in I\right\} =C\left(n,d\right)\cap H_{u,-a_{0}}.$$

- יהי $t\in\mathbb{R}$. אז

$$\begin{aligned}0 & \leq g\left(t\right)\\
 & =\prod_{i\in I}\left(t-t_{i}\right)^{2}\\
 & =\sum_{j=0}^{d}a_{j}t^{j}\\
 & =\sum_{j=1}^{d}a_{j}t^{j}+a_{0}\\
 & =u\cdot\gamma\left(t\right)+a_{0}
\end{aligned}$$

ולכן $\gamma\left(t\right)\in H_{u,-a_{0}}^{+}$.

- מתקיים

$$\text{conv}\left\{ \gamma\left(t_{i}\right)\right\} _{i\in I}\subseteq C\left(n,d\right)\cap H_{u,-a_{0}}.$$

מאידכך, אם $j\notin I$ אז $g\left(t_{j}\right)>0$. אז $\gamma\left(t_{j}\right)\in\int\left(H_{u,-a_{0}}^{+}\right)$ ולכן

$$\text{conv}\left\{ \gamma\left(t_{i}\right)\right\} _{i\in I}=C\left(n,d\right)\cap H_{u,-a_{0}}.$$

3. יהיו $t_{i_{1}},\ldots,t_{i_{d}}$ עבור $i_{1}<\ldots<i_{d}\in I$. נסתכל על

$$f\left(z\right)\coloneqq\prod_{j=1}^{d}\left(z-t_{i_{j}}\right)=\sum_{\ell=0}^{d}b_{\ell}z^{\ell}$$

ועל $v\in\left(b_{1},\ldots,b_{d}\right)$. נעיין ב־$H_{v,-b_{0}}$. מתקיים

$$\left\{ \gamma\left(t_{i}\right)\mid i\in I\right\} =H_{v,-b_{0}}\cap\Gamma.$$

כעת, $\text{conv}\left\{ \gamma\left(t_{i}\right)\right\} _{i\in I}$ פיאה אם ורק אם או שלכל $j\notin I$ מתקיים

$$\gamma\left(t_{j}\right)\in\int H_{v,-b_{0}}^{+}$$

או שלכל $j\notin I$ מתקיים

$$\gamma\left(t_{j}\right)\in\int H_{v,-b_{0}}^{-}.$$

במילים אחרות זה שקול לכך שאו שלכל $j\in I$ מתקיים $f\left(t_{j}\right)>0$, או שלכל $j\notin I$ מתקיים $f\left(t_{j}\right)<0$. אבל, אם $\alpha<\beta$ נקודות עבורן $f\left(\alpha\right),f\left(\beta\right)$ בעלות אותו סימן, יהיו ביניהן מספר זוגי של אפסים של f.

4. יהי $k \le \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. מתקיים

$$
\begin{aligned}
h_k &= \sum_{=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} f_{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \frac{(d-i)\cdot \ldots \cdot (d-k+1)}{(k-i)!} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{(k-d-1)(k-d-2)\cdot \ldots \cdot (i-d)}{(k-i)!} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k-d-1}{k-1} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k-d-1}{k-1} \binom{n}{i} \\
. \quad &= \binom{n-d+k-1}{k}
\end{aligned}
$$

הערה 3.0.20. השוויון

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{u}{k-i} \binom{v}{i} = \binom{u+v}{k}$$

שהשתמשנו בו במעבר האחרון מתקיים לכל $u,v \ge 0$ ולכן לכל u,v כלשהם (גם לא שלמים). אכן, $\deg F(x,y) <$ D לכן $F(u,v)=0$ לכל $u,v \ge 0$ שלמים גורר כי $F(u,v)=0$.

5. נחשב את f_{d-1} בעזרת h. מתקיים

$$.f_i = \sum_{j=0}^{i+1} h_j \binom{d-j}{d-i-j}$$

נסמן $r := \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ ונקבל

$$
\begin{aligned}
f_{d-1} &= \sum_{k=0}^{d} h_k \\
&= \sum_{k=0}^{r} h_k + \sum_{k=r+1}^{d} h_k \\
&\overset{\text{DS}}{2} \sum_{k=0}^{r} h_k \\
&= 2\sum_{k=0}^{r} \binom{n-d+k-1}{k} \\
. \quad &= 2\sum_{k=0}^{r} \binom{n-d+k-1}{n-d-1}
\end{aligned}
$$

נזכיר כי

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{u+k}{u} = \binom{u+m+1}{u+1}$$

ולכן הביטוי האחרון שווה

$$.2\sum_{k=0}^{r} \binom{n-d+k-1}{n-d-1} = 2\binom{n-d-1+r+1}{n-d}$$

נקבל כי

$$.f_{d-1} = 2\binom{n-r-1}{n-2r-1} = 2\binom{n-r-1}{r}$$

■

לשם הוכחת משפט 3.0.19 נדבר על קילוף *(shellability)* ועל עובדה בתורת הקבוצות הסופיות.

קילוף

הגדרה 3.0.21. קומפלקס $d-1$־מימדי נקרא טהור אם כל סימפלקס מקסימלי יחסית להכלה הוא $(d-1)$־מימדי.

הגדרה 3.0.22. קומפלקס X שהוא $(d-1)$־טהור יקרא קליף *shellable* אם אפשר לסדר את הפיאות המקסימליות $(F_1,\ldots,F_t)$ כך שיתקיים

$$\bigcup_{j<i} \bar{F}_j \cap \bar{F}_i$$

הוא $(d-1)$־טהור לכל i, כאשר $\bar{F}$ הסימפלקס שמוגדר על ידי F.

דוגמה 3.0.23. בדוגמא באיור לא מתואר קילוף, כי $v = \bar{F}_1 \cap \bar{F}_2$ לא 1־מימדי.
בדוגמאות באיור מתואר קילוף.

דוגמה 3.0.24. נוכל להטיל את האוקטהדר על המישור כמתואר באיור ואז מספור הפאות הפתואר הוא קילוף.

הגדרה 3.0.25. יהי X קליף ממימד $d-1$ ויהי $(F_1,\ldots,F_t)$ קילוף. נגדיר

$$.R(F_i) = \left\{ x \in F_i \;\middle|\; F_i \setminus \{x\} \in \bigcup_{j<i} \bar{F}_j \right\}$$

דוגמה 3.0.26. נחשב את $R(F_i)$ עבור איור
נקבל את הערכים בטבלה הבאה.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(F_i)$	$\varnothing$	6	5	2	$\{5,6\}$	$\{2,6\}$,	$\{1,2\}$	$\{1,2,6\}$
$\lvert R(F_i)\rvert$	0	1	1	1	2	2	2	3

משפט 3.0.27. 1. $([R(F_i), F_i])_{i\in[t]}$ חלוקה של קבוצת הסימפלקסים ב־X כאשר

$$.[\sigma,\tau] = \{\eta \mid \sigma \subseteq \eta \subseteq \tau\}$$

2. אם $j<i$ אז $R(F_i) \nsubseteq F_j$.

3. לכל $0 \le k \le d$ מתקיים

$$.h_k(X) = \lvert\{i \in [t] \mid \lvert R(F_i)\rvert = k\}\rvert$$

4. יש שקילות הומוטופית

$$.X \cong S^{d-1} \vee S^{d-1} \vee \ldots \vee S^{d-1}$$

הוכחה. 1. X קומפלקס טהור. אז נוכל לכתוב

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{i\in[t]} \bar{F}_i \\ &= \bar{F}_1 \cup \left(\bar{F}_1 \cup \bar{F}_2 \setminus \bar{B}_1\right) \cup \left(\bar{F}_1 \cup \bar{F}_2 \cup \bar{F}_3 \setminus \bar{F}_1 \cup \bar{F}_2\right) \\ &= \bigsqcup_{i\in[t]} \left(\bigcup_{j\le i} \bar{F}_j \setminus \bigcup_{j<i} \bar{F}_i \right) \end{aligned} .$$

נותר להראות שמתקיים שמתקיים

$$.\bigcup_{j\le i} \bar{F}_j \setminus \bigcup_{j<i} \bar{F}_j = [R(F_i), F_i]$$

אם קיים $\sigma \in \bar{F}_i \cap \bigcup_{j<i} \bar{F}_j$ עבורו $x \in R(F_i)$

$$\sigma \in F_i \setminus x \in \bigcup_{j<i} \bar{F}_i.$$

אז $x \notin \sigma$ ולכן $R(F_i) \nsubseteq \sigma$. אז $\sigma \notin [R(F_i), F_i]$.

בכיוון השני, נניח כי $\sigma \in \bar{F}_i \setminus \bigcup_{j<i} \bar{F}_j$. אז לכל פיאה מקסימלית τ של $\bar{F}_i \cap \bigcap_{j<i} \bar{F}_i$ מתקיים $\tau \nsubseteq \sigma$. אבל פיאה כזאת היא מהצורה $\tau = F_i \setminus x$ עבור $x \in R(F_i)$. אז $F_i \setminus x \nsubseteq \sigma$, ואז $x \in R(F_i)$. נקבל כי $R(F_i) \subseteq \sigma$, כנדרש.

2. מהסעיף הקודם

$$R(F_i) \in \bar{F}_i \setminus \bigcup_{\ell<i} \bar{F}_\ell.$$

בפרט $R(F_i) \nsubseteq F_j$ כאשר $j<i$.

3. נשים לב כי

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} h_i \binom{d-i}{d-k-1}$$

שכן

$$\begin{aligned}\sum_{k=-1}^{d-1} t^{d-k-1} &= \sum_{k=0}^{d} f_{k-1} t^{d-k} \\ &= F(t) \\ &= H(t+1) \\ &= \sum_{i=0}^{d} h_i (t+1)^{d-i} \\ &= \sum_{i=0}^{d} h_i \sum_{j=0}^{d-i} \binom{d-i}{j} t^{d-i-j} \\ &= \sum_{k=-1}^{d-1} \left(\sum_{i+j=k+1} h_i \binom{d-i}{j} \right) t^{d-k-1} \\ &= \sum_{k=-1}^{d-1} \left(\sum_{i} h_i \binom{d-i}{k+1-i} \right) t^{d-k-1} \\ &= \sum_{k=-1}^{d-1} \left(\sum_{i=0}^{k+1} h_i \binom{d-i}{d-k-1} \right) t^{d-k-1}\end{aligned}.$$

נסמן

$$\theta_k := |\{1 \le i \le t \mid |R(F_i)| = k\}|$$

ונרצה להראות $\theta_k = h_k$ לכל $0 \le k \le d$. אנו יודעים מהסעיף הראשון כי $[R(F_i), F_i]$ מהווים חלוקה של X. אז f_k מספר הפיאות ה־k מימדיות בכל אחד מה־$[R(F_i), F_i]$, ולכן

$$\begin{aligned}f_k &= \sum_{i \in [t]} \binom{|F_i| \setminus |R(F_i)|}{k+1-|R(F_i)|} \\ &= \sum_{i \in [t]} \binom{d-|R(F_i)|}{k+1-|R(F_i)|} \\ &= \sum_{j} \binom{d-j}{k+1-j} \cdot |\{i \mid |R(F_i)| = j\}| \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \theta_j \binom{d-j}{k+1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \theta_j \binom{d-j}{d-k-1}\end{aligned}$$

ואז

$$.f_k=\sum_{i=0}^{k+1}\theta_i\binom{d-i}{d-k-1}$$

נקבל $f=M\theta=Mh$ עבור M מטריצה הפיכה (כמשולשית תחתונה עם 1 על האלכסון). לכן $h=\theta$.

4. נסמן

$$I\coloneqq\{i\mid|R(F_i)<d|\}\coloneqq\{i_1,\ldots,i_s\}$$

כאשר $i_\ell<i_m$ כאשר $\ell<m$. נסמן $\tilde{X}=\bigcup_{i\in I}\bar{F}_i$. נשים לב כי $(F_{i_1},\ldots,F_{i_s})$ קילוף של $\tilde{X}$. לשם כך צריך להראות כי $\bigcup_{\ell<j}\bar{F}_{i_\ell}\cap\bar{F}_{i_j}$ טהור. אבל

$$.\bigcup_{\ell<j}\bar{F}_{i_\ell}\cap\bar{F}_{i_j}=\bigcup_{m<i_j}\bar{F}_m\cap\bar{F}_{i_j}$$

ההכלה $\subseteq$ קלה. בכיוון השני, כאשר $m<i_j$ וגם $m\notin I$ מתקיים $R(F_m)=F_m$. אז

$$.\left(\bigcup_{i<m}\bar{F}_i\right)^{(d-2)}=\left(\bigcup_{i\leq m}\bar{F}_i\right)^{(d-2)}$$

נסמן $G_j\coloneqq F_{i_j}$. אז $\tilde{X}=\bigcup_{j\in[s]}G_j$ ו־$(G_1,\ldots,G_s)$ קילוף. מתקיים $|R(G_i)|<d$ לכל $i\in[s]$.

טענה 3.0.28. יש שקילות הומוטופית

$$.\bigcup_{j\leq i-1}\bar{G}_j\cong\bigcup_{j\leq i}\bar{G}_j$$

מסקנה 3.0.29. מתקיים

$$\mathrm{pt}\cong\bar{G}_1\cong\bar{G}_1\cup\bar{G}_2\cong\ldots\cong\bar{G}_1\cup\ldots\cup\bar{G}_S=\tilde{X}$$

סימון 3.0.30. נסמן

$$.\tilde{h}_k(X)\coloneqq\sum_{i=0}^{k}h_i(X)$$

משפט 3.0.31. 1. $X\coloneqq P$ קליף.

2. אם X קומפלקס $d-1$ קליף אז

$$.\forall 0\leq\leq\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor:\tilde{h}_k(X)=\sum_{i=0}^{k}h_i(X)\leq\tilde{h}_k(C(n,d))$$

3. כל f_i הוא צירוף אי־שלילי של ה־$\tilde{h}_k$ עבור $0\leq k\leq\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$.