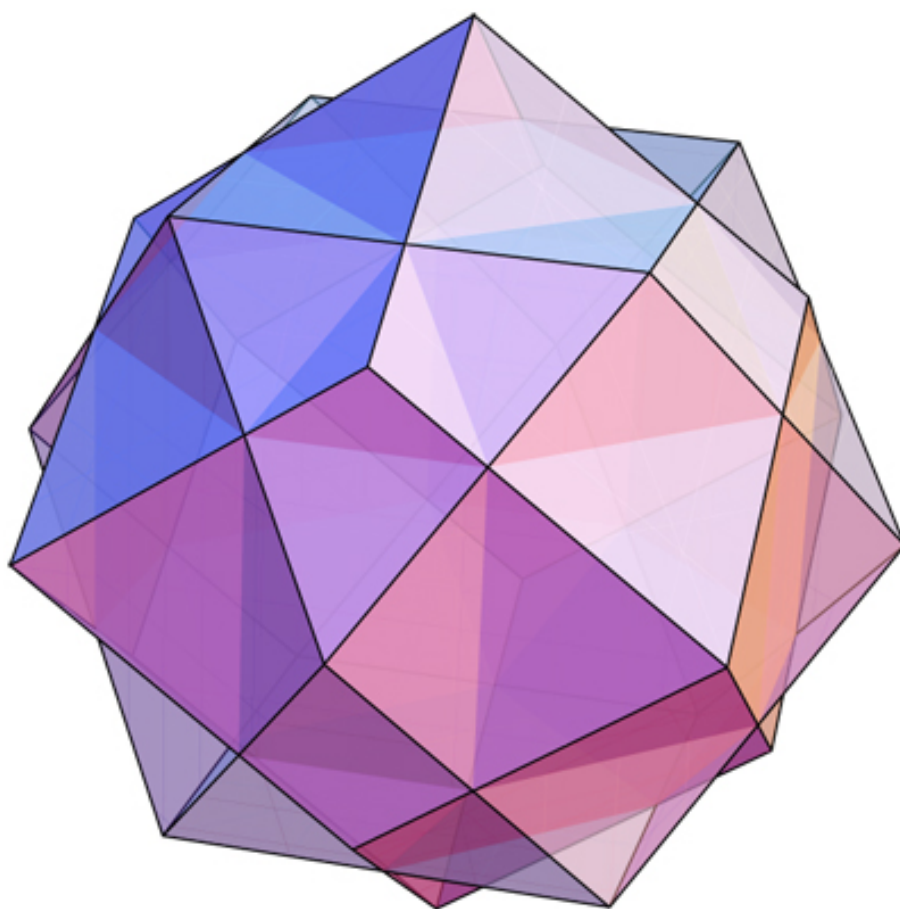


# סיכומי הרצאות לשיטות טופולוגיות בקומבינטוריקה (פיאונים קמורים) אביב 2021, הטכניון

הרצאותיו של פרופ' רועי משולם  
סוכמו על ידי אלעד צורני



פוליהדרון קמור בשם Cuboctahedron-Rhombic Dodecahedron Compound.

עדכון אחרון 27 באפריל 2021

# תוכן העניינים

iii	הקדמה
iii	הבהרה
iii	ספרות מומלצת
1	0.1 תוכן הקורס
1	0.1.1 פיאונים
1	0.1.2 בעיית החסם העליון לפיאונים
2	1 קמירות - גיאומטריה וקומבינטוריקה
2	1.1 הגדרות
3	1.2 משפטי הלי, קרטיאודורי ורדון
3	1.2.1 משפט הלי
3	1.2.2 משפטי ההפרדה
5	1.2.3 משפטי קרטיאודורי ורדון
6	1.2.4 משפט הלי הכללי
7	1.2.5 שימושים למשפט הלי
11	1.3 גרסאות מודרניות של משפטי קרטיאודורי והלי
11	1.3.1 משפט קרטיאודורי הצבעוני
11	1.3.2 מסקנות מקרטיאודורי צבעוני
12	1.3.3 קרטיאודורי עבור חרוטים
17	1.3.4 משפט Barany

# הקדמה

## הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות. להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל [tzorani.elad@gmail.com](mailto:tzorani.elad@gmail.com) אלעד צורני.

## ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

**J. Matoušek, G. M. Ziegler:** Around Brouwer's fixed point theorem

**J. Matoušek:** Using the Borsuk-Ulam Theorem

**D. Kozlov, R. Meshulam:** Around Helly's Theorem



# הקדמה

## 0.1 תוכן הקורס

### 0.1.1 פיאותים

נדבר בקורס על קמירות ופיאותים. פיאותים תלת-מימדיים רגולריים הם חמשת הגופים האפלטוניים: האוקטהדר, הקובציה, הסימפלקס, הדודקהדר והאיקוסהדר. קיימות שאלות קשות ופתוחות על פיאותים. אנו נתרכז בדין בשאלה שהייתה פתוחה עד לפני כחמישים שנה ועוסקת ומספרי הפיאות של פיאותים. עבור פיאות  $P$  נסמן ב- $f_i(P)$  את מספר הפיאות ה- $i$  מימדיות של  $P$ . במקרה של  $P$  הסימפלקס נקבל

$$(f_0, f_1, f_2) = (4, 6, 4).$$

נקרא ל- $(f_0, \dots, f_{d-1})$  ה- $f$  וקטור ונסמנו  $f$ . במקרה של האוקטהדר נקבל  $f = (6, 12, 8)$ , ובמקרה של הקובציה נקבל  $f = (8, 12, 6)$ . במקרה  $d = 2$ , פיאות הוא מצולע קמור ומתקיים  $f_0(P) = f_1(P)$ . במקרה  $d = 3$  נוסחאת אוילר אומרת

$$f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) = 2$$

כמו כן, כל צלע משותפת לשתי פיאות. אם  $|F|$  מספר הצלעות של פאה  $F$  נקבל

$$2f_1(P) = \sum_F |F| \geq 3 \cdot f_2(P)$$

נציב זאת בנוסחאת אוילר ונקבל

$$2 = f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) \leq f_0(P) - f_1(P) + \frac{2}{3}f_1(P) = f_0(P) - \frac{1}{3}f_1(P)$$

ואז

$$f_1(P) \leq 3(f_0(P) - 2)$$

נקבל אז גם

$$f_2(P) \leq \frac{2}{3}f_1(P) \leq 2(f_0(P) - 2)$$

במקרה בו מספר הצלעות של פאה קבוע, נקבל שוויונים.

### 0.1.2 בעיית החסם העליון לפיאותים

יהי  $P$  פיאות  $d$ -מימדי ב- $\mathbb{R}^d$ . יהי  $f_0(P)$  מספר קודקודיו.

**שאלה 0.1.1** איך אפשר לחסום את  $(f_1(P), \dots, f_{d-1}(P))$ ?

**שאלה 0.1.2** בהינתן  $n := f_0(P)$  מספר קודקודי  $P$ , איך אפשר לתאר את האפשרויות עבור  $f$ ?

# פרק 1

## קמירות - גיאומטריה וקומבינטוריקה

### 1.1 הגדרות

**הגדרה 1.1.1 (קטע בין נקודות).** עבור  $a, b \in \mathbb{R}^d$  נגדיר את הקטע בין  $a, b$  להיות

$$[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in [0, 1]\}$$

**הגדרה 1.1.2 (צירוף קמור).** יהיו  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$ . צירוף קמור של הם הוא  $\sum_{i \in [k]} \lambda_i a_i$  עבור  $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  המקיימות  $\sum_i \lambda_i = 1$ .

**הגדרה 1.1.3 (קבוצה קמורה).** קבוצה  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  תקרא קמורה אם לכל  $a, b \in K$  מתקיים  $[a, b] \subseteq K$ .

**הגדרה 1.1.4 (תת־מרחב אפיני (ישרייה)).**  $L \subseteq \mathbb{R}^d$  נקרא תת־מרחב אפיני אם  $L = v + U$  עבור  $v \in \mathbb{R}^d$  ו- $U \leq \mathbb{R}^d$  תת־מרחב ועבור  $v \in \mathbb{R}^d$ .

**הגדרה 1.1.5.** אם  $L = v + U$  כנ"ל נגדיר  $\dim L := \dim U$ .

**הגדרה 1.1.6 (על־מישור).**  $L \subseteq \mathbb{R}^d$  נקרא על־מישור אם הוא תת־מרחב אפיני עם  $\text{codim } L := d - \dim L = 1$ .

**הגדרה 1.1.7 (צירוף אפיני).** צירוף אפיני של  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  הוא צירוף  $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$  כאשר  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .  
**תרגיל 1.** בהינתן  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ , אוסף הצירופים האפיניים של איברי  $A$ , שנסמנו  $\text{aff}(A)$ , הוא המרחב האפיני המינימלי שמכיל את  $A$ .

**הגדרה 1.1.8 (קמור של קבוצה).** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ . הקמור של  $A$ , שמסומן  $\text{conv}(A)$ , הוא הקבוצה הקמורה המינימלית שמכילה את  $A$ .

**טענה 1.1.9.** מתקיים

$$\begin{aligned} \text{conv}(A) &= \bigcap_{\substack{K \supseteq A \\ \text{convex is } K}} K \\ &= \left\{ \sum_{i \in [k]} \lambda_i a_i \mid \begin{array}{l} a_1, \dots, a_k \in A \\ \sum_{i \in [k]} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

הוכחה. תהי

$$B := \left\{ \sum_{i \in [k]} \lambda_i a_i \mid \begin{array}{l} a_1, \dots, a_k \in A \\ \sum_{i \in [k]} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0 \end{array} \right\}$$

אז  $B$  קמורה כי

$$\begin{aligned} \theta \sum_i \lambda_i a_i + (1 - \theta) \sum_i \mu_i a_i &= \sum_i (\theta \lambda_i + (1 - \theta) \mu_i) a_i \\ &= \sum_i \theta \lambda_i + (1 - \theta) \mu_i \end{aligned}$$

וגם

$$1 = \theta + 1 - \theta = \theta \sum_i \lambda_i + (1 - \theta) \sum_i \mu_i$$

$B$  מינימלית כי כל קבוצה קמורה שמכילה את  $A$  צריכה להכיל צירופים קמורים של איברי  $A$ . ■

## 1.2 משפטי הלי, קרטיאודורי ורדון

### 1.2.1 משפט הלי

**משפט 1.2.1 (הלי).** נסתכל על  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ . נניח ש- $I_1, \dots, I_n$  קטעים ב- $\mathbb{R}$  כך ש- $I_i \cap I_j \neq \emptyset$  לכל  $i, j \in [n]$ . אז

$$\bigcap_{i \in [n]} I_i \neq \emptyset$$

הוכחה. נוכיח במקרה בו  $I_i = [a_i, b_i]$ . המקרה הכללי דומה מאוד. מההנחה, מתקיים

$$c := \max_{i \in [n]} (a_i) \in \bigcap_{i \in [n]} I_i$$

■

כעת ננסח את הגרסה המקורית של המשפט.

**משפט 1.2.2.** יהיו  $K_1, \dots, K_n$  קבוצות קמורות ב- $\mathbb{R}^d$  המקיימות

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$$

לכל  $I \subseteq [n]$  המקיימת  $|I| \leq d+1$ . אז

$$\bigcap_{i \in [n]} K_i \neq \emptyset$$

הלי הוכיח את המשפט בתחילת המאה הקודמת.

### 1.2.2 משפטי ההפרדה

**הגדרה 1.2.3 ().**  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  יקראו בלתי-תלויות אפינית אם

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i a_i = 0 \wedge \sum_{i \in [k]} \lambda_i = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_k) = (0, \dots, 0)$$

**טענה 1.2.4.** התנאים הבאים שקולים עבור  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$

1.  $a_1, \dots, a_k$  בלתי-תלויות אפינית.

2. לכל  $i \in [k]$ ,

$$a_i \notin \text{aff}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k)$$

3.  $\dim \text{aff}(a_1, \dots, a_k) = k-1$ .

4. בלתי-תלויים לינארית.  $a_1 - a_k, \dots, a_{k-1} - a_k$

5.

$$(a_1, 1), \dots, (a_k, 1)$$

בלתי-תלויים לינארית.

הוכחה. **1 גורר 5:** אם  $(a_1, 1), \dots, (a_k, 1)$  תלויים לינארית, ניתן לכתוב

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i (a_i, 1) = 0$$

כאשר  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq 0$ . אז

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i a_i = 0$$

וגם

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i = 0$$

בסתירה לאי-תלות אפינית.

**5 גורר 1:** בדומה לכיוון הקודם.

**1 גורר 2:** נניח בשלילה שמתקיים  $a_k \in \text{aff}(a_1, \dots, a_{k-1})$ .

$$a_k = \sum_{i \in [k-1]} \lambda_i a_i$$

וגם

$$\sum_{i \in [k-1]} \lambda_i = 1$$

אז

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1} - a_k = 0$$

וסכום המקדמים הוא

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

בסתירה לתלות האפינית של  $a_1, \dots, a_k$ .

**2 גורר 1:** באופן דומה לכיוון הקודם.

**1.2.5 הגדרה.** בהינתן  $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  ונגדיר את העל־מישור

$$H_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot u = \alpha\}$$

כאשר

$$x \cdot u = \sum_{i \in [d]} x_i u_i$$

נגדיר גם את חצאי המרחב הסגורים

$$H_{u,\alpha}^+ := \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot u \geq \alpha\}$$

$$H_{u,\alpha}^- := \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot u \leq \alpha\}$$

**משפט 1.2.6 (משפט ההפרדה I).** תהי  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  קמורה וסגורה ותהי  $p \in \mathbb{R}^d \setminus K$ . קיימים  $u, \alpha$  כך ש- $p \in H_{u,\alpha}^+$  ו- $K \subseteq H_{u,\alpha}^-$ .

הוכחה. תהי  $q \in K$  כך ש-

$$\|p - q\| = \min \{\|x - p\| \mid x \in K\}$$

יהי  $H$  העל־מישור הניצב ל- $p - q$  ועובר דרך  $q$ . מפורשות,  $H = H_{p-q, (p-q) \cdot q}$ . ראשית,  $p \in H_{p-q, (p-q) \cdot q}^+$  כי  $\|p - q\|^2 > 0$  כי  $p \cdot (p - q) > (p - q) \cdot q$ . תהי  $x \in K$  לכל  $t \in (0, 1)$  מתקיים

$$\begin{aligned} \|p - q\|^2 &\leq \|(1-t)q + tx - p\|^2 \\ &= \|(p - q) - t(x - q)\|^2 \\ &= \|p - q\|^2 - 2t(p - q) \cdot (x - q) + t^2 \|x - q\|^2 \end{aligned}$$

לכן

$$2t(p - q) \cdot (x - q) \leq t^2 \|x - q\|^2$$

נצמצם  $t$  ונשאיף  $t \rightarrow \infty$ . נקבל  $(p - q) \cdot (x - q) \leq 0$  כלומר  $(p - q) \cdot x \leq (p - q) \cdot q$  ולכן  $x \in H_{p-q, (p-q) \cdot q}^-$ .

**משפט 1.2.7 (משפט ההפרדה II).** תהי  $K$  קומפקטית קמורה ב- $\mathbb{R}^d$  ותהי  $L$  קמורה וסגורה ב- $\mathbb{R}^d$ . אם  $K \cap L = \emptyset$  קיים  $H_{u,\alpha}$  עבור  $K \subseteq H_{u,\alpha}^+$  וגם  $L \subseteq H_{u,\alpha}^-$ .

הוכחה. נעניין בקבוצה  $M = K - L$ . זאת קבוצה קמורה וסגורה: אם  $x_i - y_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} z$  יש תת־סדרה  $x_{i_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$  ו- $y_{i_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$  אז  $x - y = z$ .  $x - z \in L$  ולכן  $x - z \in M$  או  $z = x - (x - z) \in M$ .  $K \cap L = \emptyset$  ולכן אפשר להפריד בין  $M$  ל- $0$  על ידי על־מישור  $H_{u,\alpha}$ , כלומר

$$\begin{aligned} 0 &\in H_{u,\alpha}^+ \\ M &= K - L \subseteq H_{u,\alpha}^- \end{aligned}$$

לכן  $0 = u \cdot 0 \geq 0$  ומאידך  $0 \geq \alpha \geq u \cdot (x - y)$  לכל  $x \in K, y \in L$  ולכן  $u \cdot y \geq u \cdot x$  לכל  $x \in K, y \in L$ . ניקח  $\beta = \max_{x \in K} u \cdot x$ . אז לכל  $x \in K$  מתקיים  $u \cdot x \leq \beta$  ולכל  $y \in L$  מתקיים  $u \cdot y \geq \beta$ .



## 1.2.3 משפטי קרטיאודורי ורדון

**משפט 1.2.8 (קרטיאודורי).** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  ותהי  $p \in \text{conv}(A)$ . קיימים  $a_1, \dots, a_{d+1} \in A$  כך שמתקיים  $p \in \text{conv}(a_1, \dots, a_{d+1})$ .

הוכחה. יהי  $m \in \mathbb{N}_+$  מינימלי כך שקיימים  $a_1, \dots, a_m \in A$  עבורם  $p \in \text{conv}(a_1, \dots, a_m)$ . צריך להראות שמתקיים  $m \leq d+1$ . נניח בשלילה שמתקיים  $m \geq d+2$ . תהי

$$p = \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i$$

כאשר  $\sum_{i \in [m]} \lambda_i = 1$  וגם  $\lambda_i \geq 0$  לכל  $i \in [m]$ . נעניין ב־ $m$  הוקטורים  $(a_1, 1), \dots, (a_m, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$ . יש כאן  $d+2$  וקטורים, לכן קיימת תלות לינארית

$$\sum_{i \in [m]} \alpha_i (a_i, 1) = 0$$

בפרט

$$\sum_{i \in [m]} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i \in [m]} \alpha_i a_i = 0$$

ובה"כ קיים  $\alpha_i > 0$ . תהי

$$I = \{i \in [m] \mid \alpha_i > 0\}$$

יהי

$$\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \mid i \in I \right\}$$

אז

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [m]} \left( \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \cdot \alpha_i \right) a_i &= \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \sum_{i \in [m]} \alpha_i a_i \\ &= \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i \\ &= p. \end{aligned}$$

מצד שני, זהו צירוף קמור: מתקיים

$$\sum_{i \in [m]} \left( \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i \right) = \sum_{i \in [m]} \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \sum_{i \in [m]} \alpha_i = 0$$

אם  $\alpha_i \geq 0$  מתקיים

$$\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \right) \alpha_i \geq 0$$

ואם  $\alpha_i \leq 0$  מתקיים

$$\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i \geq \lambda_i > 0$$

אבל, זהו צירוף של  $m-1$  איברים כי

$$\lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_{i_0} = 0$$

■

במקרה  $d=2$  משפט רדון אומר שאם  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  מקיימת  $|A| \leq 4$ , ניתן לכתוב  $A = B \sqcup C$  כאשר

$$\text{conv } B \cap \text{conv } C \neq \emptyset$$

**משפט 1.2.9 (רדון).** אם  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^d$  כאשר  $m \geq d+2$ , יש חלוקה  $I \sqcup J = [m]$  כך שמתקיים

$$\text{conv } \{a_i\}_{i \in I} \cap \text{conv } \{a_j\}_{j \in J} \neq \emptyset$$

הוכחה. נעניין ב־ $\mathbb{R}^{d+1}$ .  $(a_1, 1), \dots, (a_m, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$ . מכיוון שהנחנו  $m \geq d + 2$  קיימת תלות לינארית לא טריוויאלית

$$\sum_{i \in [m]} \lambda_i (a_i, 1) = 0$$

אז

$$\sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i = 0, \quad \sum_{i \in [m]} \lambda_i = 0$$

נסמן

$$I := \{i \in [m] \mid \lambda_i > 0\}$$

$$J := \{i \in [m] \mid \lambda_i < 0\}$$

וגם

$$\lambda := \sum_{i \in I} \lambda_i = - \sum_{j \in J} \lambda_j$$

אז

$$\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} = - \sum_{j \in J} \frac{\lambda_j}{\lambda} = 1$$

כמו כן,

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = - \sum_{j \in J} \lambda_j a_j$$

לכן

$$\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} a_i = - \sum_{j \in J} \frac{\lambda_j}{\lambda} a_j \in \text{conv}(a_i)_{i \in I} \cap \text{conv}(a_j)_{j \in J}$$

■

**הערה 1.2.10.**  $d + 2$  הוא המספר המינימלי שמבטיח תוצאה כזאת, מפני שאם ניקח  $a_1, \dots, a_{d+1}$  כוקטורים בלתי תלויים אפינית, לכל נקודה ב־ $\text{conv}(a_1, \dots, a_{d+1})$  יש הצגה יחידה כצירוף קמור של  $a_1, \dots, a_{d+1}$ . למשל עבור  $0, e_1, \dots, e_d$  אין חלוקת רדון.

## 1.2.4 משפט הלי הכללי

**משפט 1.2.11 (הלי).** תהי  $\mathcal{K}$  משפחה סופית של קבוצות קמורות ב־ $\mathbb{R}^d$  כך שלכל  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}$  המקיימת  $|G| \leq d + 1$  מתקיים

$$\bigcap_{K \in \mathcal{G}} K \neq \emptyset$$

אז

$$\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \neq \emptyset$$

**משפט 1.2.12.** נניח בשלילה שלא כל הקבוצות ב־ $\mathcal{K}$  נחתכות. נבחר  $m \in \mathbb{N}_+$  מינימלי כך שקיימות  $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}$  עבורן

$$\bigcap_{i \in [m]} K_i = \emptyset$$

נרצה להראות שגם

$$\bigcap_{i \in [m]} K_i \neq \emptyset$$

מה שיתן סתירה.

מההנחה נובע  $m \geq d + 2$ . לכל  $j \in [m]$  נבחר

$$x_j \in \bigcap_{i \in [m] \setminus \{j\}} K_i$$

לפי משפט רדון, יש חלוקה  $[m] = J_1 \sqcup J_2$  עבורה

$$\text{conv}(x_j)_{j \in J_1} \cap \text{conv}(x_j)_{j \in J_2} \neq \emptyset$$

תהי  $p \in \bigcap_{i \in [m]} K_i$  נראה שבעצם  $p \in \text{conv}(x_j)_{j \in J_1} \cap \text{conv}(x_j)_{j \in J_2}$  יהי  $i \in [m]$  נניח כי  $i \in J_2$  ויהי  $j \in J_1$  אז

$$x_j \in \bigcap_{t \in [m] \setminus \{j\}} K_t \subseteq \bigcap_{t \in J_2} K_t \subseteq K_i$$

אז

$$p \in \text{conv}(x_j)_{j \in J_1} \subseteq K_i$$

מקמירות. מאידך, אם  $i \in J_1, j \in J_2$  נקבל

$$x_j \in \bigcap_{t \in [m] \setminus \{j\}} K_t \subseteq \bigcap_{t \in J_1} K_t \subseteq K_i$$

אז

$$p \in \text{conv}(x_j)_{j \in J_2} \subseteq K_i$$

בסך הכל,  $p \in \bigcap_{i \in [m]} K_i$  בסתירה למינימליות  $m$ .

## 1.2.5 שימושים למשפט הלי

תהיינה קבוצות סופיות  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ . נרצה לשאול מתי יש  $H_{u,\alpha}$  עבורו  $A \in \text{int}H_{u,\alpha}^+, B \subseteq \text{int}H_{u,\alpha}^-$ . המשפט הבא מתאר איך ניתן לבדוק זאת.

**משפט 1.2.13 (קירנברגר).** אם לכל  $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B$  כך שמתקיים  $|A_0| + |B_0| \leq d + 2$  אפשר להפריד בין  $A_0, B_0$  על ידי על מישור, אפשר להפריד גם את  $A, B$  על ידי על מישור.

הוכחה. לכל  $a \in A$  נגדיר

$$K_a := \{(u, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid u \cdot a > \alpha\}$$

נוכל לחשוב על זה כעל חצי-המישור

$$\{(u, \alpha) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid (u, \alpha) \cdot (a, -1) > 0\}$$

לכל  $b \in B$  נגדיר באופן דומה

$$L_b := \{(v, \beta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid v \cdot b < \beta\}$$

$$= \{(v, \beta) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid (v, \beta) \cdot (b, -1) < 0\}$$

$K_a, L_b$  קמורות כפנים של חצי-מישור. מתקיים

$$\bigcap_{a \in A} K_a \neq \emptyset$$

כי  $(0, -1)$  נמצא בחיתוך. באופן דומה

$$(0, 1) \in \bigcap_{b \in B} L_b$$

אז גם חיתוך זה אינו ריק.

נניח כי  $|A_0| + |B_0| \leq d + 2$  ונטען כי

$$\bigcap_{a \in A_0} K_a \cap \bigcap_{b \in B_0} L_b \neq \emptyset$$

לפי ההנחה, קיים על מישור  $H_{u,\alpha}$  שמפריד בין  $A_0, B_0$ . אז  $a \cdot u > \alpha$  וגם  $b \cdot u < \alpha$  לכל  $a \in A_0, b \in B_0$ . כלומר,  $(u, \alpha) \in K_a$  וגם  $(u, \alpha) \in L_b$  לכל  $a \in A_0, b \in B_0$ .

לפי משפט הלי נובע כי

$$\bigcap_{a \in A} K_a \cap \bigcap_{b \in B} L_b \neq \emptyset$$

ניקח  $(u, \alpha)$  בחיתוך ונקבל

$$\begin{aligned} A &\subseteq \text{int}H_{u,\alpha}^+ \\ B &\subseteq \text{int}H_{u,\alpha}^- \end{aligned}$$

■

**משפט 1.2.14 (רדון).** תהי  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  חסומה ומדידה לבג. קיימת נקודה  $p \in \mathbb{R}^d$  כך שלכל על מישור  $H_{u,\alpha}$  דרך  $p$  מתקיים

$$\mu(H_{u,\alpha}^+ \cap C) \geq \frac{1}{d+1} \mu(C)$$

הוכחה. ראשית נעיר שמשפט הלי גורר שאם  $(K_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  קמורות וקומפקטיות ב- $\mathbb{R}^d$  כך שכל  $d+1$  מהן נחתכות אז  $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha \neq \emptyset$ . זה נובע מכך שאם כל תת-אוסף סופי של קבוצות קומפקטיות נחתך, כולן נחתכות. יהי  $0 < \varepsilon < \frac{1}{d+1}$ . לכל  $u \in S^{d-1}$  ולכל  $t \in \mathbb{R}$  נענין בחיתוך  $C \cap H_{u,t}^+$ . מתקיים

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \mu(C \cap H_{u,t}^+) &= \mu(C) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(C \cap H_{u,t}^+) &= 0 \end{aligned}$$

לכן מרציפות המידה יש  $\lambda(u) \in \mathbb{R}$  כך שמתקיים

$$\mu(C \cap H_{u,\lambda(u)}^+) = \left( \frac{d}{d+1} + \varepsilon \right) \mu(C)$$

יהי  $B$  כדור שמכיל את  $C$ . אז  $K_u := H_{u,\lambda(u)}^+ \cap C$  קמורה. נראה שאם  $u_1, \dots, u_{d+1} \in S^{d-1}$

$$K_{u_1} \cap \dots \cap K_{u_{d+1}} \neq \emptyset$$

לכל  $i \in [d+1]$  מתקיים

$$\left( \frac{d}{d+1} + \varepsilon \right) \mu(C) \leq \mu(H_{u_i,\lambda(u_i)}^+ \cap C)$$

ולכן

$$\left( \frac{1}{d+1} - \varepsilon \right) \mu(A) \geq \mu(H_{u_i,\lambda(u_i)}^- \cap C)$$

אם  $\bigcap_{i \in [d+1]} K_{u_i} = \emptyset$  אז

$$\bigcap_{i \in [d+1]} H_{u_i,\lambda(u_i)}^+ \cap B = \emptyset$$

ולכן

$$\bigcup_{i \in [d+1]} B \cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^- = B \cap \bigcup_{i \in [d+1]} H_{u_i,\lambda(u_i)}^- = B$$

אז

$$C = \bigcup_{i \in [d+1]} C \cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^-$$

בסתירה לכך שמתקיים

$$\sum_{i \in [d+1]} \mu(C \cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^-) \leq (d+1) \left( \frac{1}{d+1} - \varepsilon \right) \mu(C) < \mu(C)$$

לכן  $\bigcap_{i \in [d+1]} K_{u_i} \neq \emptyset$  לכל  $u_1, \dots, u_{d+1} \in S^{d-1}$  ולפי הלי נובע  $\bigcap_{u \in S^{d-1}} K_u \neq \emptyset$ . ניקח  $p \in \bigcap_{u \in S^{d-1}} K_u$ . נעביר על מישור  $H_{u,\alpha}$  שניוונו  $u \in S^{d-1}$  דרך  $p$ , אז

$$\mu(H_{u,\alpha}^- \cap C) \geq \left( \frac{1}{d+1} - \varepsilon \right) \mu(C)$$

נקבל  $H_{u,\alpha}^+ \subseteq H_{u,\lambda(u)}^+$  ואז

$$\begin{aligned} \mu(H_{u,\alpha}^+ \cap C) &\leq \mu(H_{u,\lambda(u)}^+ \cap C) \\ &= \left( \frac{d}{d+1} + \varepsilon \right) \mu(C) \end{aligned}$$

לכן

$$H_{u,\lambda(u)}^- \cap C \subseteq H_{u,\alpha}^- \cap C$$

וְ

$$\cdot \left( \frac{1}{d+1} - \varepsilon \right) \mu(C) = \mu(H_{u,\lambda(u)} \cap C) \leq \mu(H_{u,\alpha}^- \cap C)$$

■

עתה  $p := \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{p_z}{z}$  תקיים את הדרוש.

למשפט הלי יש גרסה שקולה עבור משפחה לא דווקא סופית של קבוצות קומפקטיות.

**משפט 1.2.15 (הלי).** תהי  $\mathcal{K}$  משפחה של קבוצות קומפקטיות קמורות ב- $\mathbb{R}^d$ . אם כל  $d+1$  קבוצות מ- $\mathcal{K}$  נחתכות, כל הקבוצות נחתכות.

תהי  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  ונניח שמתקיים  $\text{diam}(A) = 1$ . נרצה לחשוב מהו הרדיוס המינימלי של כדור  $B(p, r)$  המכיל את  $A$ . במקרה  $d = 1$  אפשר להסתכל על  $A$  כמוכלת בקטע מאורך 1 ואז  $r_1 = \frac{1}{2}$  הרדיוס המינימלי. במקרה  $d = 2$  נוכל להסתכל על הדוגמה של משולש שווה צלעות. אז הרדיוס המינימלי הוא

$$r_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

נענין במקרה הכללי ברדיוס המינימלי עבור הסימפלקס ה- $d$  מימדי הרגולרי. יהי

$$H := \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_{i \in [d+1]} x_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \cong \mathbb{R}^d$$

ב- $H$  נענין בסימפלקס שקודקודיו הם  $\frac{e_i}{\sqrt{2}} \in H$  עבור  $i \in [d+1]$ . מתקיים

$$\cdot \left| \frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}} \right| = \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

מרכז הכובד של הסימפלקס הוא

$$p = \frac{1}{d+1} \sum_{i \in [d+1]} \frac{e_i}{\sqrt{2}}$$

אז

$$\frac{e_j}{\sqrt{2}} - p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{e_1}{d+1} + \dots + \frac{-e_{j-1}}{d+1} + \frac{d}{d+1} e_j + \frac{-e_{j+1}}{d+1} + \dots + \frac{-e_{d+1}}{d+1} \right)$$

ואז

$$\begin{aligned} \left| \frac{e_j}{\sqrt{2}} - p \right|^2 &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{d+1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{1}{d+1} \right)^2 + \left( \frac{d}{d+1} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{(d+1)^2} + \frac{d^2}{(d+1)^2} \right) \\ &= \frac{d}{2(d+1)} \end{aligned}$$

נקבל כי  $r_d := \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$  רדיוס הכדור החוסם של הסימפלקס הרגולרי באורך צלע 1 ב- $\mathbb{R}^d$ .  
משפט יונג אומר לנו בעצם מה הרדיוס עבור קבוצה  $A$  כללית.

**משפט 1.2.16 (יונג).** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  מקוטר 1. קייחת  $p \in \mathbb{R}^d$  עבורה  $A \subseteq B(p, r_d)$  כאשר  $r_d := \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$ .

הוכחה. נענין באוסף הכדורים  $\{B(a, r_d)\}_{a \in A}$ . די להראות כי  $\bigcap_{a \in A} B(a, r_d) \neq \emptyset$ . כלומר, די להראות שכל ממשפט הלי נובע שדי להראות שאם  $a_1, \dots, a_{d+1} \in A$  אז  $\bigcap_{i \in [d+1]} B(a_i, r_d) \neq \emptyset$ .  
 $d+1$  נקודות מ- $A$  מוכלות בכדור ברדיוס  $r_d$ .

יהי  $B(p, r)$  כדור עם רדיוס מינימלי המכיל את  $a_1, \dots, a_{d+1}$ . בלי הגבלת הכלליות יהיו הנקודות הנמצאות על שפת  $B(p, r)$ .

נטען כי  $p \in \text{conv}\{a_1, \dots, a_m\}$ . אחרת,  $K := \text{conv}\{a_1, \dots, a_m\}$  ולכן יש על-מישור  $H$  שמפריד בין  $K$  ל- $p$ . אם נזיז את מרכז הכדור מעט לכיוון הניצב ל- $H$  נקבל שכל  $a_1, \dots, a_{d+1}$  בפנים של כדור מרדיוס  $r$ , בסתירה למינימליות.

נראה עתה כי  $r \leq r_d$  ונניח בלי הגבלת הכלליות כי  $p = 0$ . אז יש  $\lambda \geq 0$  עבורם

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i &= 0 \\ \sum_{i \in [m]} \lambda_i &= 1 \end{aligned}$$

נקבל

$$\begin{aligned} 1 &\geq |a_i - a_j|^2 \\ &= |a_i|^2 + |a_j|^2 - 2a_i \cdot a_j \\ &= r^2 + r^2 - 2a_i \cdot a_j \end{aligned}$$

ולכן  $2a_i \cdot a_j \geq 2r^2 - 1$  אז

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i \right|^2 \\ &= \sum_{i \in [m]} \lambda_i^2 |a_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j a_i \cdot a_j \\ &\geq \sum_{i \in [m]} \lambda_i^2 r^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j \\ &= r^2 \left( \sum_{i \in [m]} \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j \right) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j \\ &= r^2 \left( \sum_{i \in [m]} \lambda_i \right)^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j \\ &= r^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j \end{aligned}$$

נקבל

$$r^2 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j \leq \max_{\substack{x_i \geq 0 \\ \sum x_i = 1}} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j \right)$$

אם נראה שהמקסימום מתקבל כאשר כל ה- $x_i$  בביטוי האחרון שווים נקבל

$$\binom{m}{2} \frac{1}{m^2} = \frac{m(m-1)}{2m^2} = \frac{m-1}{2m} \leq \frac{d}{2d+1}$$

ואז  $r \leq \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}} = r_d$  אכן,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j &= \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i \in [m]} x_i \right)^2 - \sum_{i \in [m]} x_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{i \in [m]} x_i^2 \right) \end{aligned}$$

כאשר

$$\frac{1}{m} \sum_{i \in [m]} x_i^2 \geq \left( \frac{1}{m} \sum_{i \in [m]} x_i \right)^2$$

מקמירות של  $x \mapsto x^2$  אז  $\sum_{i \in [m]} x_i^2 \geq \frac{1}{m}$  ונקבל כי

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j = \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{i \in [m]} x_i^2 \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{2} \frac{m-1}{m}$$

■

## 1.3 גרסאות מודרניות של משפטי קרטיאודורי והלי

### 1.3.1 משפט קרטיאודורי הצבעוני

**משפט 1.3.1 (קרטיאודורי).** יהיו  $A_1, \dots, A_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$  ותהי  $p \in \bigcap_{i \in [d+1]} \text{conv}(A_i)$  אז יש נקודות  $a_i \in A_i$  לכל  $i \in [d+1]$  עבורן  $p \in \text{conv}(a_1, \dots, a_{d+1})$ .

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות נניח כי  $|A_i| < \infty$  (לפי 1.2.8 אפשר לקחת  $|A_i| \leq d+1$ ). יהיו  $a_1 \in A_1, \dots, a_{d+1} \in A_{d+1}$  עבורן  $\rho := d(p, \text{conv}\{a_1, \dots, a_{d+1}\})$  מינימלי. עלינו להראות שמתקיים  $\rho = 0$ . נניח בשלילה שיש  $\rho > 0$ . תהי  $q \in \text{conv}\{a_i \mid i \in [d+1]\}$  כך ש-

$$|p - q| = \min \{ \|x - p\| \mid x \in \text{conv}\{a_i \mid i \in [d+1]\} \}$$

אז

$$\text{conv}\{a_i \mid i \in [d+1]\} \subseteq H_{p-q, (p-q) \cdot q}^- =: H$$

כפי שראינו בחישוב קודם. אז

$$q \in H$$

ממשפט 1.2.8 נובע ש- $q$  בקמור של  $d$  נקודות מבין  $a_1, \dots, a_{d+1}$ , ובלי הגבלת הכלליות נניח כי  $q \in \text{conv}\{a_1, \dots, a_d\}$ . אז  $a_{d+1} \in A_{d+1} \setminus H$  לכן  $a_{d+1} \notin H$ . לכן קיימת נקודה  $a'_{d+1} \in A_{d+1}$  כך ש-

$$(a'_{d+1} - q) \cdot (p - q) > 0$$

נראה שמתקיים

$$d(p, \text{conv}\{a_1, \dots, a_d, a'_{d+1}\}) < \rho$$

נענין בנקודה  $(1-t)q + ta'_{d+1}$  עבור  $t$  קטן. מתקיים

$$\begin{aligned} |p - ((1-t)q + ta'_{d+1})|^2 &= |(p-q) - t(a'_{d+1} - q)|^2 \\ &= |p-q|^2 - 2t(p-q) \cdot (a'_{d+1} - q) + t^2 |a'_{d+1} - q|^2 \end{aligned}$$

כעת, אם  $t \in (0, 1)$  קטן מספיק אז

$$2t(p-q) \cdot (a'_{d+1} - q) > t |a'_{d+1} - q|^2$$

ולכן

$$|p - ((1-t)q + ta'_{d+1})|^2 < \rho^2$$

בסתירה למינימליות של  $\{a_1, \dots, a_{d+1}\}$ . ■

### 1.3.2 מסקנות מקרטיאודורי צבעוני

**משפט 1.3.2 (הלי צבעוני).** תהיינה  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{d+1}$  משפחות של קבוצות קמורות ב- $\mathbb{R}^d$ . נניח שלכל

$$(K_1, \dots, K_{d+1}) \in \prod_{i \in [d+1]} \mathcal{K}_i$$

מתקיים

$$\bigcap_{i \in [d+1]} K_i \neq \emptyset$$

אז יש  $j \in [d+1]$  כך שכל הקבוצות ב- $\mathcal{K}_j$  נחתכות.

**משפט 1.3.3 (טברורג).** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  מגודל  $(d+1)(k-1)+1$ . אז אפשר לכתוב  $A = \bigsqcup_{i \in [k]} A_k$  כאשר

$$\bigcap_{i \in [k]} \text{conv}(A_i) \neq \emptyset$$

## 1.3.3 קרטיאודורי עבור חרוטים

**1.3.4 הגדרה.** עבור  $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  נגדיר את ה- $positive\ span$  של  $A$  על ידי

$$pos(A) := \left\{ \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i \mid a_i \in A, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

**1.3.5 הגדרה.** קבוצה  $C \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  נקראת חרוט קמור שקודקודו 0 אם  $C$  קמורה ולכל  $c \in C$  גם  $\lambda c \in C$  לכל  $\lambda \geq 0$ .

**1.3.6 הערה.** לכל  $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  הקבוצה  $pos(A)$  היא חרוט קמור ב- $\mathbb{R}^{d+1}$ .

**משפט 1.3.7 (קרטיאודורי עבור קמור חיובי).** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  ותהי  $p \in pos(A)$ . אזי יש  $A_0 \subseteq A$  עם  $|A_0| \leq d+1$  כך שמתקיים  $p \in pos(A_0)$ .

הוכחה. בדיוק כמו בהוכחת משפט קרטיאודורי, נבחר  $A_0 = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq A$  מינימלית עבורה  $p \in pos\{u_1, \dots, u_n\}$  נכתוב

$$p = \sum_{i \in [n]} \lambda_i u_i$$

עם  $\lambda_i \geq 0$ , ונראה כי  $n \geq d+1$ . אחרת,  $n \geq d+2$  ולכן יש צירוף לינארי

$$\sum_{i \in [n]} \mu_i u_i = 0$$

שאינו טריוויאלי. תהי

$$\theta := \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mid \mu_i > 0 \right\}$$

(בלי הגבלת הכלליות קיימים  $\mu_i > 0$ ) ויהי  $i_0 \in [n]$  עבורו  $\theta = \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}$ . אז

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i \in [n]} \lambda_i u_i \\ &= \sum_{i \in [n]} (\lambda_i - \theta \mu_i) u_i \\ &= \sum_{i \neq i_0} (\lambda_i - \theta \mu_i) u_i + \left( \lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_{i_0} \right) u_{i_0} \end{aligned}$$

■

וקיבלנו את  $p$  כיצירוף חיובי של פחות מ- $u_i$ .

**משפט 1.3.8 (קרטיאודורי החיובי עבור קמור חיובי).** תהינה  $A_1, \dots, A_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  ותהי  $p \in \bigcap_{i \in [d+1]} pos(A_i)$ . אז יש  $a_i \in A_i$  לכל  $i \in [d+1]$  עבורן

$$p \in pos\{a_1, \dots, a_{d+1}\}$$

**למה 1.3.9.** נניח כי  $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^{d+1}$ . נגיד שהן מקיימות את תנאי 1 אם  $(\vec{0}, -1) \in pos\{u_1, \dots, u_m\}$ . יהיו  $H_{u_i,0}^+$  על-מישורים הניצבים ל- $u_i$  ונסתכל על חצאי המרחבים  $H_{u_i,0}^+$ . נגיד שה- $u_i$  מקיימות את תנאי 2 אם

$$\bigcap_{i \in [m]} H_{u_i,0}^+ \cap \mathbb{R}^d \times \{1\} = \emptyset$$

נסען כי תנאים 1 ו-2 שקולים.

הוכחה. • נניח שמתקיים תנאי 1 ויהיו  $\lambda_i \geq 0$  עבורן

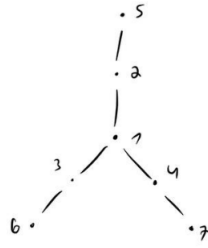
$$(\vec{0}, -1) = \sum_{i \in [m]} \lambda_i u_i$$

נניח כי  $z \in \bigcap_{i \in [m]} H_{u_i,0}^+$  ונראה כי הקואורדינטה האחרונה של  $z$  אי-חיובית. אכן,

$$\begin{aligned} -z_{d+1} &= (\vec{0}, -1) \cdot z \\ &= \sum_{i \in [m]} \lambda_i (u_i \cdot z) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

כלומר  $z_{d+1} \leq 0$  ובפרט  $z \notin \mathbb{R}^d \times \{1\}$ .





איור 1.1: קומפלקס שלא ניתן לקבל כעצב של קבוצת קטעים במישור.

• נניח שתנאי 1 אינו מתקיים ונראה כי תנאי 2 אינו מתקיים. נניח כי

$$(\vec{0}, -1) \notin C := \text{pos} \{u_1, \dots, u_m\}.$$

נפריד את  $C$  מ- $(\vec{0}, -1)$  על ידי מישור  $H_{w, \alpha}$ . כלומר,

$$\forall z \in C: (0, -1) \cdot w < \alpha \leq z \cdot w$$

מתקיים  $0 \in C$  לכן  $0 \cdot w = 0$  ונקבל  $\alpha \leq 0$ . אם עבור  $i \in [m]$  כלשהו מתקיים  $u_i \cdot w < 0$  נקבל

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda u_i) \cdot w = -\infty < \alpha$$

בסתירה כי  $\lambda u_i \in C$  לכל  $\lambda \geq 0$ .

לכן  $\alpha \leq 0$  וגם  $u_i \cdot w \geq 0$  לכל  $i \in [m]$ . נקבל

$$-w_{d+1} = (\vec{0}, -1) \cdot w < \alpha \leq 0$$

ולכן  $w_{d+1} > 0$  או  $w \in H_{u_i, 0}^+$  ואז

$$\frac{w}{w_{d+1}} \in \bigcap_{i \in [m]} H_{u_i, 0}^+ \cap \mathbb{R}^d \times \{1\}$$

■

לכן תנאי 2 אינו מתקיים.

**הגדרה 1.3.10 (פיאון קמור).** פיאון קמור הוא קמור של מספר סופי של נקודות.

**הגדרה 1.3.11 (עצב).** בהינתן  $K = \{K_1, \dots, K_m\}$  משפחה של קבוצות קמורות ב- $\mathbb{R}^d$  נגדיר את העצב (nerve) של  $\mathcal{K}$  על ידי

$$N(\mathcal{K}) := \left\{ I \subseteq [m] \mid \bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset \right\}$$

**הערה 1.3.12.** העצב של  $\mathcal{K}$  מתאר את החיתוכים של קבוצות ב- $\mathcal{K}$ . זה קומפלקס סימפליציאלי; אם  $\sigma \in N(\mathcal{K})$  אז  $\tau \subseteq \sigma$  ו- $\tau \in N(\mathcal{K})$ . העצב של  $N(\mathcal{K})$  שקול הומוטופית ל- $K$ , אבל נדון בכך בהמשך.

**משפט 1.3.13 (הלי במונחי העצב).** תהי  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$  משפחת קבוצות קמורות ב- $\mathbb{R}^d$ . אם  $N(\mathcal{K})$  מכיל את כל  $\sigma \subseteq [m]$  המקיימת  $|\sigma| \leq d+1$  אז  $N(\mathcal{K}) = \mathcal{P}([m])$  אוסף כל התת-קבוצות של  $[m]$ .

**טענה 1.3.14.** יהיו  $K_1, \dots, K_m$  קבוצות קמורות ב- $\mathbb{R}^d$  ותהי  $\mathcal{K} := \{K_1, \dots, K_m\}$  אז קיימים פיאונים  $P_1, \dots, P_m$  עבורם  $P_i \subseteq K_i$  לכל  $i \in [m]$  וגם

$$M(P) = N(\mathcal{K})$$

כאשר  $\mathcal{P} := \{P_1, \dots, P_m\}$ .

**הערה 1.3.15.** שאלה מעניינת היא האם אפשר לאפיין את העצבים האפשריים של אוספי קבוצות קמורות ב- $\mathbb{R}^d$ . בעוד זאת שאלה קשה באופן כללי, יש איפיון במקרה  $d = 1$ . למשל, אנו יודעים שאת הגרף באיור 1.1 אי אפשר לקבל כעצב ב- $\mathbb{R}$ .

יהי  $\mathcal{K} = \{I_i \mid i \in [7]\}$  אוסף של שבעה קטעים ב- $\mathbb{R}$ . במקרה זה,  $I_6$  חותך את  $I_3$  שחותך את  $I_1$ , אבל  $I_1$  לא חותך את  $I_6$  אז נקבל קטעים כמו באיור 1.2. כעת  $I_2$  חותך את  $I_1$  ואת  $I_5$  שזר ל- $I_1$  לכן נקבל קטעים כמו באיור 1.3. אז  $I_4$  שחותך את  $I_1$  חייב להיות בין  $I_3, I_2$  אבל אז  $I_4 \subseteq I_1$  ולכן  $I_7$  שחותך את  $I_4$  חותך גם את  $I_1$ . ראו איור 1.4.

$$\frac{\frac{6}{3}}{1}$$

איור 1.2

$$\frac{\frac{6}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{5}{2}}{3}$$

איור 1.3

הוכחה. לכל  $\sigma \in N(\mathcal{K})$  נבחר  $p_\sigma \in \bigcap_{i \in \sigma} K_i$  נגדיר

$$P_i := \text{conv} \{p_\sigma \mid i \in \sigma \in N(\mathcal{K})\}$$

נשים לב שאם  $i \in \sigma$  אז  $p_\sigma \in K_i$  לכן  $P_i \subseteq K_i$ . לכן  $N(\mathcal{P}) \subseteq N(\mathcal{K})$ . מאידך, אם  $\sigma \in N(\mathcal{K})$  אז  $p_\sigma \in \bigcap_{i \in \sigma} P_i$  ולכן  $\sigma \in N(\mathcal{P})$ . ■

**מסקנה 1.3.16.** תהיינה  $K_1, \dots, K_m$  קונפקטיות קמורות עבורן  $\bigcap_{i \in [m]} K_i = \emptyset$ . אזי קיימים חצאי מרחבים  $D_1, \dots, D_m$  כך שמתקיים  $K_i \subseteq D_i$  לכל  $i \in [m]$ , וגם  $\bigcap_{i \in [m]} D_i = \emptyset$ .

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על  $\ell$  שקיימים  $D_1, \dots, D_\ell$  עבורם  $K_i \subseteq D_i$  וגם

$$D_1 \cap \dots \cap D_\ell \cap K_{\ell+1} \cap \dots \cap K_m = \emptyset$$

נניח שהוכחנו עבור  $\ell < m$  ונוכיח עבור  $\ell + 1$  (זה כולל את מקרה הבסיס). אז

$$D_1 \cap \dots \cap D_\ell \cap K_{\ell+1} \cap \dots \cap K_m = \emptyset$$

כלומר

$$K_{\ell+1} \cap (D_1 \cap \dots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \dots \cap K_m) = \emptyset$$

ולכן קיים  $H_{u,\alpha}^+$  עבור  $K_{\ell+1} \subseteq H_{u,\alpha}^+$  וגם

$$D_1 \cap \dots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \dots \cap K_m \subseteq \text{int} H_{u,\alpha}^-$$

כלומר,

$$D_1 \cap \dots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \dots \cap K_m \cap H_{u,\alpha}^+ = \emptyset$$

■

ניקח  $D_{\ell+1} := H_{u,\alpha}^+$

הוכחה (1.3.2). בלי הגבלת הכלליות, מטענה 1.3.14 אפשר להניח ש- $K_{i,j} \in \mathcal{K}_i$  קונפקטיות לכל  $K_{i,j} \in \mathcal{K}_i$ . לפי 1.3.16 קיימים חצאי מרחבים  $D_{i,j}$  כך ש- $K_{i,j} \subseteq D_{i,j}$  לכל  $K_{i,j} \in \mathcal{K}_i$  וכך שמתקיים  $\bigcap_j D_{i,j} = \emptyset$ . נציג

$$D_{i,j} = H_{u_{i,j}, \alpha_{i,j}}^+ = \{v \in \mathbb{R}^d \mid v \cdot u_{i,j} \geq \alpha_{i,j}\}$$

יהי  $w_{i,j} = (u_{i,j}, -\alpha_{i,j}) \in \mathbb{R}^{d+1}$  נשים לב שמתקיים

$$\bigcap_j H_{w_{i,j}, 0}^+ \cap (\mathbb{R}^d \times \{1\}) = \emptyset$$

$$\frac{\frac{6}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{5}{2}}{3}$$

איור 1.4

אם  $v = (v', v_{d+1})$  בחיתוך הנ"ל אז  $w_{i,j} \cdot (v', v_{d+1}) \geq 0$  ומצד שני  $v_{d+1} = 1$ . אז

$$v' \cdot u_{i,j} + (-\alpha_{i,j}) \cdot 1 \geq 0$$

ולכן  $v' \cdot u_{i,j} \geq \alpha_{i,j}$  לכל  $j$ . אז  $v' \in D_{i,j}$  לכל  $j$ , בסתירה לכך שמתקיים

$$\bigcap_j D_{i,j} = \emptyset$$

לכן, לפי 1.3.9 מתקיים

$$(\vec{0}, -1) \in \text{pos} \{w_{i,j}\}_j$$

לכל  $i \in [d+1]$ . לפי קרטיאודורי הצבעוני עבור  $\text{pos}$  קיימת בחירה  $w_{1,j_1}, w_{2,j_2}, \dots, w_{d+1,j_{d+1}}$  כך שמתקיים

$$(\vec{0}, -1) \in \text{pos} \{w_{i,j_i}\}_{i \in [d+1]}$$

לפי 1.3.9 נקבל כי

$$\bigcap_{i \in [d+1]} H_{w_{i,j_i}, 0}^+ \cap (\mathbb{R}^d \times \{1\}) = \emptyset$$

אז

$$\bigcap_{i \in [d+1]} K_{i,j_i} \subseteq \bigcap_{i \in [d+1]} D_{i,j_i} = f \bigcap_{i \in [d+1]} H_{u_{i,j_i}, \alpha_{i,j_i}}^+ = \emptyset$$

כיוון שאם  $z \in \bigcap_{i \in [d]} H_{u_{i,j_i}, \alpha_{i,j_i}}^+$  אז  $z \cdot u_{i,j_i} \geq \alpha_{i,j_i}$  לכל  $i$  ואז

$$\begin{aligned} (z, 1) \cdot w_{i,j_i} &= (z, 1) \cdot (u_{i,j_i}, -\alpha_{i,j_i}) \\ &= z \cdot u_{i,j_i} - \alpha_{i,j_i} > 0 \end{aligned}$$

ונקבל כי

$$(z, 1) \in \bigcap_{i \in [d+1]} H_{w_{i,j_i}}^+ \cap (\mathbb{R}^d \times \{1\})$$

בסתירה לביטוי קודם. קיבלנו

$$\bigcap_{i \in [d+1]} K_{i,j_i} = \emptyset$$

■

בסתירה להנחה.

**משפט 1.3.17 (רדון).** תהיינה  $u_1, \dots, u_{d+2} \in \mathbb{R}^d$ . קיימת חלוקה  $[d+2] = I_1 \sqcup I_2$  עבורה

$$\text{conv} \{u_i\}_{i \in I_1} \cap \text{conv} \{u_i\}_{i \in I_2} = \emptyset$$

נשאל מה מספר הנקודות המינימלי  $m$  כך שלכל  $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^2$  תהיה חלוקה  $[m] = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3$  עבורה

$$\bigcap_{j \in [3]} \text{conv} \{u_i\}_{i \in I_j} \neq \emptyset$$

**משפט 1.3.18 (טברברג).** אם  $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^d$  וגם  $m \geq (d+1)(k-1)+1$  אז יש חלוקה  $[m] = \bigcup_{j \in [k]} I_j$

וגם

$$\bigcap_{j \in [k]} \text{conv} \{u_i\}_{i \in I_j} \neq \emptyset$$

**הערה 1.3.19.** על ידי הסתכלות על  $d+1$  קבוצות בגודל  $k-1$  של נקודות קרובות (או שוות זאת לזאת, לא הנחנו שהן שונות) ב- $\mathbb{R}^d$  אפשר לראות שהחסם התחתון במשפט טברברג אופטימלי, כיוון שבמקרה זה אין חלוקת  $k$ -טברברג.

בהוכחת משפט טברברג נרצה לעבוד במרחב  $(d+1)(k-1)$ -מימדי. נזכיר כי  $\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^\ell \cong M_{k \times \ell}(\mathbb{R})$  מרחב מימד  $k\ell$ . בהינתן  $u \in \mathbb{R}^k, v \in \mathbb{R}^\ell$  נגדיר

$$u \otimes v := uv^T = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_\ell v_\ell \\ \vdots & & \vdots \\ u_k v_1 & \cdots & u_k v_\ell \end{pmatrix}$$

**טענה 1.3.20.** נניח כי  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^{k-1}$  מקיימים

$$\sum_{i \in [k]} v_i = 0$$

ושזאת התלות היחידה ביניהם. למשל אפשר לקחת  $v_1, \dots, v_{k-1}$  בסיס ל- $\mathbb{R}^{k-1}$  ו- $v_k = -(v_1 + \dots + v_{k-1})$  (זה בעצם המקרה הכללי). נניח גם כי  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^N$  מקיימים

$$\sum_{i \in [k]} u_i \otimes v_i = 0 \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{(k-1)} \cong M_{N \times (k-1)}$$

או לכל  $i, j \in [k]$   $u_i = u_j$ .

**הערה 1.3.21.** ברור שאם  $u_i = u_j$  לכל  $i, j \in [k]$  אז

$$\sum_{i \in [k]} u_i \otimes v_i = u \otimes \sum_{i \in [k]} v_i = u \otimes 0 = 0$$

הוכחה. יהי  $z \in \mathbb{R}^N$  מתקיים

$$0 = z^T \cdot \left( \sum_{i \in [k]} u_i v_i^T \right) = \sum_{i \in [k]} (z^T \cdot u_i) \cdot v_i^T$$

לכן  $z^T \cdot u_i = z^T \cdot u_j$  לכל  $i, j \in [k]$ . זה נכון לכל  $z \in \mathbb{R}^N$  לכן  $z^T (u_i - u_j) = 0$  לכל  $z \in \mathbb{R}^N$  ולכן  $u_i = u_j$ . ■  
הוכחה (1.3.18). על ידי הוספת רכיב לכל  $u_i$  אפשר להניח כי  $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^{d+1}$  וגם  $u_i \cdot \mathbf{1} = 1$  כאשר

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

יהיו  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^{k-1}$  עבורם  $\sum_{i \in [k]} v_i = 0$  וזאת התלות היחידה ביניהם. נשתמש

בקרטיאודורי הצבעוני עבור  $(\mathbb{R})^{(d+1) \times (k-1)} \cong M_{(d+1) \times (k-1)}(\mathbb{R})$ . לכל  $i \in [m]$  תהי

$$A_i = \{u_i \otimes v_j \mid j \in [k]\} \subseteq \mathbb{R}^{(d+1)(k-1)}$$

מתקיים  $0 \in \bigcap_{i \in [m]} \text{conv}(A_i)$  כי

$$0 = u_i \otimes 0 = u_i \otimes \left( \frac{1}{k} \sum_{j \in [k]} v_j \right) = \frac{1}{k} \sum_{j \in [k]} u_i \otimes v_j$$

לפי קרטיאודורי הצבעוני, לכל  $i \in [m]$  קיים  $j_i \in [k]$  כך שמתקיים

$$0 \in \text{conv}\{u_i \otimes v_{j_i} \mid i \in [m]\}$$

אז יש  $\lambda_i \geq 0$  המקיימות

$$\sum_{i \in [m]} \lambda_i = 1$$

$$\sum_{i \in [m]} \lambda_i (u_i \otimes v_{j_i}) = 0$$

אבל אם נסמן

$$I_j := \{i \in [m] \mid j_i = j\}$$

נקבל

$$\sum_{j \in [k]} \left( \sum_{i \in I_j} \lambda_i u_i \right) \otimes v_j = \sum_{i \in [m]} \lambda_i (u_i \otimes v_{j_i}) = 0$$

לפי הטענה, קיים  $w \in \mathbb{R}^d$  כך שלכל  $j \in [k]$  מתקיים

$$w = \sum_{i \in I_j} \lambda_i u_i$$

אז

$$w \cdot \mathbf{1} = \sum_{i \in I_j} \lambda_i \cdot (u_i \cdot \mathbf{1}) = \sum_{i \in I_j} \lambda_i$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{w}{w \cdot \mathbf{1}} &= \sum_{i \in I_j} \frac{\lambda_i}{w \cdot \mathbf{1}} \cdot u_i \\ &= \sum_{i \in I_j} \frac{\lambda_i}{\sum_{t \in I_j} \lambda_t} u_i \\ &\in \text{conv} \{u_i\}_{i \in I_j} \end{aligned}$$

■

כנדרש.

### 1.3.4 משפט Barany

**משפט 1.3.22 (Barany).** לכל  $d \geq 1$  יש קבוע  $C_d > 0$  כך שלכל  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$  יש  $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{d+1}$  עבורו  $|\mathcal{F}| > C_d \binom{n}{d+1}$  וכל  $F \in \mathcal{F}$  מתקיים

$$p \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \text{conv} \{u_i \mid i \in F\}$$

הוכחה. נגדיר את  $k$  להיות השלם המקסימלי עבורו  $(k-1)(d+1)+1 \leq n$ . כלומר,  $k = \left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor + 1$ . נניח כי  $k \geq d+1$ . לפי משפט 1.3.18 נחלק את  $[n]$  לקבוצות זרות  $I_1, \dots, I_k$  כך שיש

$$p \in \bigcap_{j \in [k]} \text{conv} \{u_i\}_{i \in I_j}$$

לכל בחירה  $\alpha_1 < \dots < \alpha_{d+1}$  של איברים ב- $[k]$  מתקיים

$$p \in \bigcap_{t \in [d+1]} \text{conv} \{u_i \mid i \in I_{\alpha_t}\}$$

לפי קרטיאודורי הצבעוני יש  $d+1$  נקודות, אחת מכל  $\{u_i\}_{i \in I_{\alpha_t}}$  כך ש- $p$  בקמור שלהן. נסמן את קבוצת האינדקסים של נקודות אלו ב- $F_\alpha$  כאשר  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1})$ . אם  $\alpha \neq \beta$  נקבל  $F_\alpha \neq F_\beta$  ולכן

$$\mathcal{F} := \{F_\alpha \mid 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_{d+1} \leq k\}$$

קבוצה מגודל  $\binom{k}{d+1}$ . אז

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{F}| &= \binom{k}{d+1} \\
 &= \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor + 1}{d+1} \\
 &\geq \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor}{d+1} \\
 &\geq \frac{\left( \left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor - d + 1 \right)^{d+1}}{(d+1)!} \\
 &\geq \frac{\left( \frac{n-1}{d+1} - d \right)^{d+1}}{(d+1)!} \\
 &= \frac{(n - d^2 - d - 1)^{d+1}}{(d+1)^{d+1} (d+1)!} \\
 &\geq \frac{n^{d+1} - (d+1)(d^2 + d + 1)n^d}{(d+1)^{d+1} (d+1) 1} \\
 &= \frac{1}{(d+1)^{d+1}} \left[ \frac{n^{d+1}}{(d+1)!} - \frac{(d+1)(d^2 + d + 1)}{(d+1)!} n^d \right] \\
 &\geq \frac{1}{(d+1)^{d+1}} \left( \binom{n}{d+1} - \lambda_d n^d \right) \\
 &\geq \frac{1}{2(d+1)^{d+1}} \binom{n}{d+1}
 \end{aligned}$$

■ עבור קבוע  $\lambda_d$  וכאשר האי־שוויון האחרון נכון עבור  $n$  גדול מספיק. נבחר  $C_d = \frac{1}{2(d+1)^{d+1}}$ .

**הערה 1.3.23.** בהינתן  $d$  אפשר לשאול מה הסופרמום של ערכים  $\theta$  עבורם לכל  $n$  נקודות ב- $\mathbb{R}^d$  יש  $p$  נקודות בלפחות  $\theta \cdot \binom{n}{d+1}$  מהסימפלקסים על ידי הנקודות. עבור  $d \in \{1, 2\}$  ידועים הערכים של  $\theta_d$ . עבור  $d > 2$  זאת בעיה פתוחה.