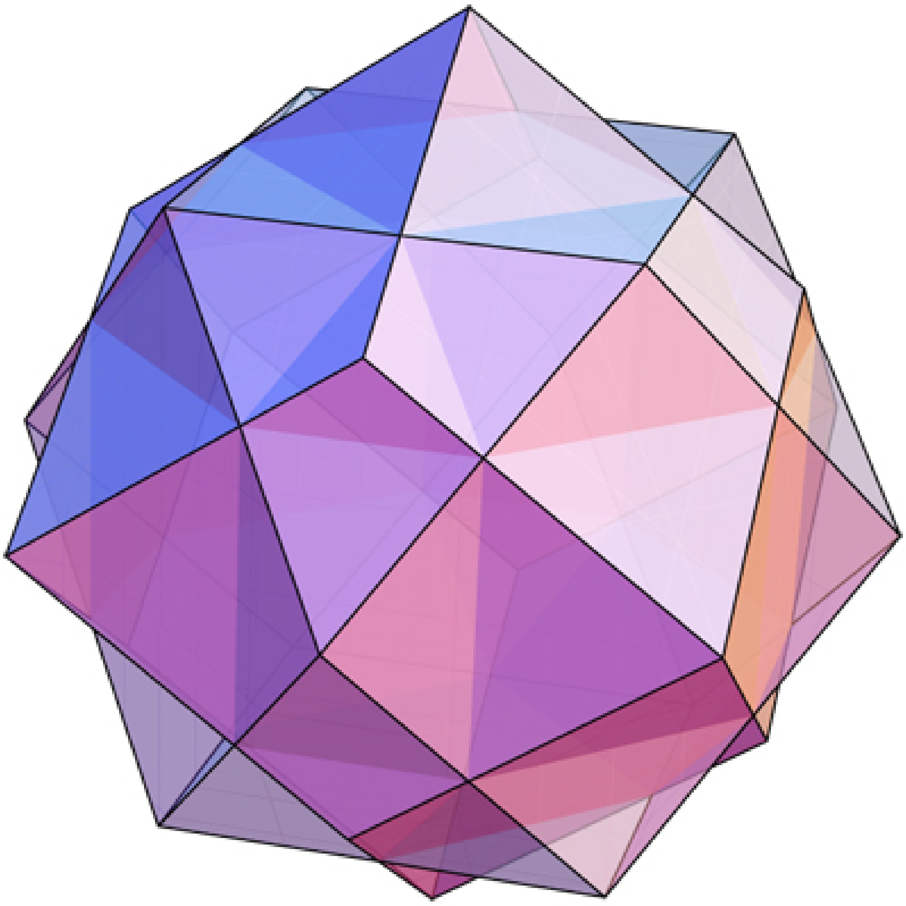
סיכומי הרצאות לשיטות טופולוגיות בקומבינטוריקה
(פיאונים קמורים)
אביב 2021, הטכניון

הרצאותיו של פרופ' רועי משולם
סוכמו על ידי אלעד צורני



פוליהדרון קמור בשם Cuboctahedron-Rhombic Dodecahedron Compound.

עדכון אחרון 27 באפריל 2021

תוכן העניינים

הקדמה

הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות.
להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל tzorani.elad@gmail.com.
אלעד צורני.

ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

J. Matoušek, G. M. Ziegler: Around Brouwer's fixed point theorem

J. Matoušek: Using the Borsuk-Ulam Theorem

D. Kozlov, R. Meshulam: Around Helly's Theorem

הקדמה

0.1 תוכן הקורס

0.1.1 פיאונים

נדבר בקורס על קמירות ופיאונים. פיאונים תלת־מימדיים רגולריים הם חמשת הגופים האפלטוניים: האוקטהדר, הקוביציה, הסימפלקס, הדודקהדר והאיקוסהדר. קיימות שאלות קשות ופתוחות על פיאונים. אנו נתרכז בדיון בשאלה שהייתה פתוחה עד לפני כחמישים שנה ועוסקת ומספרי הפיאות של פיאונים.
עבור פיאון P נסמן ב־$f_i\left(P\right)$ את מספר הפיאות ה־i־מימדיות של P.
במקרה של P הסימפלקס נקבל

$$\left(f_0,f_1,f_2\right)=\left(4,6,4\right).$$

נקרא ל־$\left(f_0,\ldots,f_{d-1}\right)$ ה־f־וקטור ונסמנו f. במקרה של האוקטהדר נקבל $f=\left(6,12,8\right)$, ובמקרה של הקוביה נקבל $f\left(8,12,6\right)$.
במקרה $d=2$, פיאון הוא מצולע קמור ומתקיים $f_0\left(P\right)=f_1\left(P\right)$.
במקרה $d=3$ נוסחאת אוילר אומרת

$$f_0\left(P\right)-f_1\left(P\right)+f_2\left(P\right)=2.$$

כמו כן, כל צלע משותפת לשתי פיאות. אם $|F|$ מספר הצלעות של פאה F נקבל

$$2f_1\left(P\right)=\sum_F|F|\geq3\cdot f_2\left(P\right).$$

נציב זאת בנוסחאת אוילר ונקבל

$$2=f_0\left(P\right)-f_1\left(P\right)+f_2\left(P\right)\leq f_0\left(P\right)-f_1\left(P\right)+\frac{2}{3}f_1\left(P\right)=f_0\left(P\right)-\frac{1}{3}f_1\left(P\right)$$

ואז

$$f_1\left(P\right)\leq3\left(f_0\left(P\right)-2\right).$$

נקבל אז גם

$$f_2\left(P\right)\leq\frac{2}{3}f_1\left(P\right)\leq2\left(f_0\left(P\right)-2\right).$$

במקרה בו מספר הצלעות של פאה קבוע, נקבל שוויונים.

0.1.2 בעיית החסם העליון לפיאונים

יהי P פיאון d־מימדי ב־$\mathbb{R}^d$. יהי $f_0\left(P\right)$ מספר קודקודיו.

שאלה 0.1.1. איך אפשר לחסום את $f\left(P\right)=\left(f_1\left(P\right),\ldots,f_{d-1}\left(P\right)\right)$?

שאלה 0.1.2. בהינתן $n:=f_0\left(P\right)$ מספר קודקודי P, איך אפשר לתאר את האפשרויות עבור f?

פרק 1

קמירות - גיאומטריה וקומבינטוריקה

1.1 הגדרות

הגדרה 1.1.1 (קטע בין נקודות). עבור $a,b\in\mathbb{R}^d$ נגדיר את הקטע בין a,b להיות
$$[a,b]=\left\{\lambda a+(1-\lambda)b \mid \lambda\in[0,1]\right\}.$$

הגדרה 1.1.2 (צירוף קמור). יהיו $a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}^d$. צירוף קמור של הם הוא $\sum_{i\in[k]}\lambda_i a_i$ עבור $\lambda_i\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימות $\sum_i \lambda_i=1$.

הגדרה 1.1.3 (קבוצה קמורה). קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^d$ תקרא קמורה אם לכל $a,b\in K$ מתקיים $[a,b]\subseteq K$.

הגדרה 1.1.4 (תת־מרחב אפיני (ישרייה)). $L\subseteq\mathbb{R}^d$ נקרא תת־מרחב אפיני אם $L=v+U$ עבור $U\leq\mathbb{R}^d$ תת־מרחב ועבור $v\in\mathbb{R}^d$.

הגדרה 1.1.5. אם $L=v+U$ כנ"ל נגדיר $\dim L:=\dim U$.

הגדרה 1.1.6 (על־מישור). $L\subseteq\mathbb{R}^d$ נקרא על־מישור אם הוא תת־מרחב אפיני עם $\operatorname{codim} L:=d-\dim L=1$.

הגדרה 1.1.7 (צירוף אפיני). צירוף אפיני של $a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}^d$ הוא צירוף $\sum_{i=1}^k\lambda_i a_i$ כאשר $\sum_{i=1}^k\lambda_i=1$.

תרגיל 1. בהינתן $A\subseteq\mathbb{R}^d$, אוסף הצירופים האפיניים של איברי A, שנסמנו $\operatorname{aff}(A)$, הוא המרחב האפיני המינימלי שמכיל את A.

הגדרה 1.1.8 (קמור של קבוצה). תהי $A\subseteq\mathbb{R}^d$. הקמור של A, שמסומן $\operatorname{conv}(A)$, הוא הקבוצה הקמורה המינימלית שמכילה את A.

טענה 1.1.9. מתקיים
$$\begin{aligned}\operatorname{conv}(A)&=\bigcap_{\substack{K\supseteq A\\ K\text{ is convex}}}K\\ &=\left\{\sum_{i\in[[k]}\lambda_i a_i \;\middle|\; \substack{a_1,\ldots,a_k\in A\\ \sum_{i\in[k]}\lambda_i=1\\ \lambda_i\geq 0}\right\}.\end{aligned}$$

הוכחה. תהי
$$B:=\left\{\sum_{i\in[[k]}\lambda_i a_i \;\middle|\; \substack{a_1,\ldots,a_k\in A\\ \sum_{i\in[k]}\lambda_i=1\\ \lambda_i\geq 0}\right\}.$$
אז B קמורה כי
$$\begin{aligned}\theta\sum_i\lambda_i a_i+(1-\theta)\sum_i\mu_i a_i&=\sum_i\left(\theta\lambda_i+(1-\theta)\mu_i\right)a_i\\ &=\sum_i\theta\lambda_i+(1-\theta)\mu_i\end{aligned}$$
וגם
$$1=\theta+1-\theta=\theta\sum_i\lambda_i+(1-\theta)\sum_i\mu_i.$$
B מינימלית כי כל קבוצה קמורה שמכילה את A צריכה להכיל צירופים קמורים של איברי A. ■

1.2 משפטי הלי, קרתיאודורי ורדון

1.2.1 משפט הלי

משפט 1.2.1 (הלי). נסתכל על $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. נניח ש־$I_1, \ldots, I_n$ קטעים ב־$\mathbb{R}$ כך ש־$I_i \cap I_j \neq \varnothing$ לכל $i, j \in [n]$. אז

$$\bigcap_{i \in [n]} I_i \neq \varnothing .$$

הוכחה. נוכיח במקרה בו $I_i = [a_i, b_i]$. המקרה הכללי דומה מאוד.
מההנחה, מתקיים

$$c := \max_{i \in [n]} (a_i) \in \bigcap_{i \in [n]} I_i .$$

■

כעת ננסח את הגרסה המקורית של המשפט.

משפט 1.2.2. יהיו $K_1, \ldots, K_n$ קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ המקיימות

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \varnothing$$

לכל $I \subseteq [n]$ המקיימת $|I| \leq d + 1$. אז

$$\bigcap_{i \in [n]} K_i \neq \varnothing .$$

הלי הוכיח את המשפט בתחילת המאה הקודמת.

1.2.2 משפטי ההפרדה

הגדרה 1.2.3 (). $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^d$ יקראו בלתי־תלויות אפינית אם

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i a_i = 0 \wedge \sum_{i \in [k]} \lambda_i = 0 \implies (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = (0, \ldots, 0) .$$

טענה 1.2.4. התנאים הבאים שקולים עבור $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^d$.

1. $a_1, \ldots, a_k$ בלתי־תלויות אפינית.
2. לכל $i \in [k]$,
$$a_i \notin \operatorname{aff}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k) .$$
3. $\dim \operatorname{aff}(a_1, \ldots, a_k) = k - 1$.
4. $a_1 - a_k, \ldots, a_{k-1} - a_k$ בלתי־תלויים לינארית.
5.
$$(a_1, 1), \ldots, (a_k, 1)$$
בלתי־תלויים לינארית.

הוכחה. **1 גורר 5:** אם $(a_1, 1), \ldots, (a_k, 1)$ תלויים לינארית, ניתן לכתוב

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i (a_1, 1) = 0$$

כאשר $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq 0$. אז

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i a_i = 0$$

וגם

$$\sum_{i \in [k]} \lambda_i = 0 .$$

בסתירה לאי־תלות אפינית.

5 גורר 1: בדומה לכיוון הקודם.

1 גורר 2: נניח בשלילה שמתקיים $a_k \in \mathrm{aff}\left(a_1, \ldots, a_{k-1}\right)$. אז

$$a_k = \sum_{i\in[k-1]} \lambda_i a_i$$

וגם

$$\sum_{i\in[k-1]} \lambda_i = 1 .$$

אז

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{k-1} a_{k-1} - a_k = 0$$

וסכום המקדמים הוא

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

בסתירה לתלות האפינית של $a_1, \ldots, a_k$.

2 גורר 1: באופן דומה לכיוון הקודם. ■

הגדרה 1.2.5. בהינתן $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ו־$\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר את העל־מישור

$$H_{u,\alpha} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \cdot u = \alpha\right\}$$

כאשר

$$x \cdot u = \sum_{i\in[d]} x_i u_i.$$

נגדיר גם את חצאי המרחב הסגורים

$$H^+_{u,\alpha} \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \cdot u \geq u\right\}$$
$$H^-_{u,\alpha} \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \cdot u \leq u\right\}.$$

משפט 1.2.6 (משפט ההפרדה *I*). תהי $K \subseteq \mathbb{R}^d$ קמורה וסגורה ותהי $p \in \mathbb{R}^d \setminus K$. קיימים u, α כך ש־$p \in H^+_{u,\alpha}$ ו־$K \subseteq H^-_{u,\alpha}$.

הוכחה. תהי $q \in K$ כך ש־

$$\|p - q\| = \min\left\{\|x - p\| \mid x \in K\right\} .$$

יהי H העל־מישור הניצב ל־$p - q$ ועובר דרך q. מפורשות, $H = H_{p-q,(p-q)\cdot q}$. ראשית, $p \in H^+_{p-q,(p-q)\cdot q}$ כי $p \cdot (p - q) > (p - q) \cdot q$ כי $\|p - q\|^2 > 0$.
תהי $x \in K$. לכל $t \in (0, 1)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\|p - q\|^2 &\leq \|(1 - t)\, q + tx - p\|^2 \\ &= \|(p - q) - t\,(x - q)\|^2 \\ &= \|p - q\|^2 - 2t\,(p - q) \cdot (x - q) + t^2 \|x - q\|^2 \end{aligned} .$$

לכן

$$2t\,(p - q) \cdot (x - q) \leq t^2 \|x - q\|^2.$$

נצמצם t ונשאיף $t \to \infty$. נקבל $(p - q)(x - q) \leq 0$ כלומר $(p - q) \cdot x \leq (p - q) \cdot q$ ולכן $x \in H^-_{p-q,(p-q)\cdot q}$.■

משפט 1.2.7 (משפט ההפרדה *II*). תהי K קומפקטית קמורה ב־$\mathbb{R}^d$ ותהי L קמורה וסגורה ב־$\mathbb{R}^d$. אם $K \cap L = \varnothing$ קיים $H_{u,\alpha}$ עבורו $K \subseteq H^+_{u,\alpha}$ וגם $L \subseteq H^-_{u,\alpha}$.

הוכחה. נעיין בקבוצה $M = K - L$. זאת קבוצה קמורה וסגורה: אם $x_i - y_i \xrightarrow{i\to\infty} z$ יש תת־סדרה $x_{i_k} \xrightarrow{k\to\infty} x \in K$. אז $y_{i_k} \xrightarrow{k\to\infty} x - z$. L סגורה ולכן $x - z \in L$. אז $z = x - (x - z) \in M$.
$K \cap L = \varnothing$ לכן $0 \notin M$, ולכן אפשר להפריד בין 0 ל־M על ידי על מישור $H_{u,\alpha}$, כלומר

$$0 \in H^+_{u,\alpha}$$
$$M = K - L \subseteq H^-_{u,\alpha}.$$

לכן $0 \geq u \cdot 0 = 0$ ומאידך $0 \geq \alpha \geq u \cdot (x - y)$ לכל $x \in K, y \in L$. לכן $u \cdot y \geq u \cdot x$ לכל $x \in K, y \in L$. ניקח $\beta = \max_{x\in K} u \cdot x$. אז לכל $x \in K$ מתקיים $u \cdot x \leq \beta$ ולכל $y \in L$ מתקיים $u \cdot y \geq \beta$. ■

1.2.3 משפטי קרתיאודורי ורדון

משפט 1.2.8 (קרתיאודורי). תהי $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהי $p\in\text{conv}\left(A\right)$. קיימים $a_1,\ldots,a_{d+1}\in A$ כך שמתקיים $p\in\text{conv}\left(a_1,\ldots,a_{d+1}\right)$.

הוכחה. יהי $m\in\mathbb{N}_+$ מינימלי כך שקיימים $a_1,\ldots,a_m\in A$ עבורם $p\in\text{conv}\left(a_1,\ldots,a_m\right)$. צריך להראות שמתקיים $m\le d+1$. נניח בשלילה שמתקיים $m\ge d+2$. תהי

$$p=\sum_{i\in[m]}\lambda_i a_i$$

כאשר $\sum_{i\in[m]}\lambda_i=1$ וגם $\lambda_i\ge0$ לכל $i\in[m]$. נעיין ב־m הוקטורים $\left(a_1,1\right),\ldots,\left(a_m,1\right)\in\mathbb{R}^{d+1}$. יש כאן $d+2$ וקטורים, לכן קיימת תלות לינארית

$$\sum_{i\in[m]}\alpha_i\left(a_i,1\right)=0\ .$$

בפרט

$$\sum_{i\in[m]}\alpha_i=0,\quad\sum_{i\in[m]}\alpha_i a_i=0$$

ובה"כ קיים $\alpha_i>0$. תהי

$$I=\left\{i\in[m]\mid\alpha_i>0\right\}.$$

יהי

$$\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}=\min\left\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\;\middle|\;i\in I\right\}.$$

אז

$$\begin{aligned}\sum_{i\in[m]}\left(\lambda_i-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\cdot\alpha_i\right)a_i&=\sum_{i\in[n]}\lambda_i a_i-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\sum_{i\in[m]}\alpha_i a_i\\&=\sum_{i\in[m]}\lambda_i a_i\\&=p\end{aligned}\ .$$

מצד שני, זהו צירוף קמור: מתקיים

$$\sum_{i\in[m]}\left(\lambda_i-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\alpha_i\right)=\sum_{i\in[m]}\lambda_i-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\sum_{i\in[m]}\alpha_i=0\ .$$

אם $\alpha_i\ge0$ מתקיים

$$\lambda_i-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}=\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\right)\alpha_i\ge0$$

ואם $\alpha_i\le0$ מתקיים

$$\lambda_i-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\alpha_i\ge\lambda_i>0.$$

אבל, זהו צירוף של $m-1$ איברים כי

$$\lambda_{i_0}-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\alpha_{i_0}=0.$$

■

במקרה $d=2$ משפט רדון אומר שאם $A\subseteq\mathbb{R}^2$ מקיימת $|A|\ge4$, ניתן לכתוב $A=B\sqcup C$ כאשר

$$\text{conv}\,B\cap\text{conv}\,C\neq\varnothing\ .$$

משפט 1.2.9 (רדון). אם $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{R}^d$ כאשר $m\ge d+2$, יש חלוקה $I\sqcup J\subseteq\{1,\ldots,m\}$ כך שמתקיים

$$\text{conv}\left\{a_i\right\}_{i\in I}\cap\text{conv}\left\{a_j\right\}_{j\in J}\neq\varnothing\ .$$

הוכחה. נעיין ב־$(a_1,1),\dots,(a_m,1)\in\mathbb{R}^{d+1}$. מכיוון שהנחנו $m\geq d+2$ קיימת תלות לינארית לא טריוויאלית

$$\sum_{i\in[m]}\lambda_i(a_i,1)=0\,.$$

אז

$$\sum_{i\in[m]}\lambda_i a_i=0,\quad \sum_{i\in[m]}\lambda_i=0\,.$$

נסמן

$$I\coloneqq\{i\in[m]\mid\lambda_i>0\}$$
$$J\coloneqq\{i\in[m]\mid\lambda_i<0\}$$

וגם

$$\lambda\coloneqq\sum_{i\in I}\lambda_i=-\sum_{j\in J}\lambda_j\,.$$

אז

$$\sum_{i\in I}\frac{\lambda_i}{\lambda}=-\sum_{j\in J}\frac{\lambda_j}{\lambda}=1\,.$$

כמו כן,

$$\sum_{i\in I}\lambda_i a_i=-\sum_{j\in J}\lambda_j a_j$$

לכן

$$\sum_{i\in I}\frac{\lambda_i}{\lambda}a_i=-\sum_{j\in J}\frac{\lambda_j}{\lambda}a_j\in\operatorname{conv}(a_i)_{i\in I}\cap\operatorname{conv}(a_j)_{j\in J}\,.$$

■

הערה 1.2.10. $d+2$ הוא המספר המינימלי שמבטיח תוצאה כזאת, מפני שאם ניקח $a_1,\dots,a_{d+1}$ כוקטורים בלתי־תלויים אפינית, לכל נקודה ב־$\operatorname{conv}(a_1,\dots,a_{d+1})$ יש הצגה יחידה כצירוף קמור של $a_1,\dots,a_{d+1}$. למשל עבור $0,e_1,\dots,e_d$ אין חלוקת רדון.

1.2.4 משפט הלי הכללי

משפט 1.2.11 (הלי). תהי $\mathcal{K}$ משפחה סופית של קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ כך שלכל $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{K}$ המקיימת $|G|\leq d+1$ מתקיים

$$\bigcap_{K\in\mathcal{G}}K\neq\varnothing\,.$$

אז

$$\bigcap_{K\in\mathcal{K}}K\neq\varnothing\,.$$

משפט 1.2.12. נניח בשלילה שלא כל הקבוצות ב־$\mathcal{K}$ נחתכות. נבחר $m\in\mathbb{N}_+$ מינימלי כך שקיימות $K_1,\dots,K_m\in\mathcal{K}$ עבורן

$$\bigcap_{i\in[m]}K_i=\varnothing\,.$$

נרצה להראות שגם

$$\bigcap_{i\in[m]}K_i\neq\varnothing\,,$$

מה שיתן סתירה.
מההנחה נובע $m\geq d+2$. לכל $j\in[m]$ נבחר

$$x_j\in\bigcap_{i\in[m]\setminus\{j\}}K_i\,.$$

לפי משפט רדון, יש חלוקה $[m] = J_1 \sqcup J_2$ עבורה

$$\text{conv}\,(x_j)_{j\in J_1} \cap \text{conv}\,(x_j)_{j\in J_2} \neq \varnothing\,.$$

תהי $p \in \text{conv}\,(x_j)_{j\in J_1} \cap \text{conv}\,(x_j)_{j\in J_2}$, נראה שבעצם $p \in \bigcap_{i\in[m]} K_i$.
יהי $i \in [m]$. נניח כי $i \in J_2$ ויהי $j \in J_1$. אז

$$x_j \in \bigcap_{t\in[m]\setminus\{j\}} K_t \subseteq \bigcap_{t\in J_2} K_t \subseteq K_i.$$

אז

$$p \in \text{conv}\,(x_j)_{j\in J_1} \subseteq K_i$$

מקמירות. מאידך, אם $i \in J_1, j \in J_2$ נקבל

$$x_j \in \bigcap_{t\in[m]\setminus\{j\}} K_t \subseteq \bigcap_{t\in J_1} K_t \subseteq K_i.$$

אז

$$p \in \text{conv}\,(x_j)_{j\in J_2} \subseteq K_i.$$

בסך הכל, $p \in \bigcap_{i\in[m]} K_i$, בסתירה למינימליות m.

1.2.5 שימושים למשפט הלי

תהיינה קבוצות סופיות $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$. נרצה לשאול מתי יש $H_{u,\alpha}$ עבורו $A \in \text{int}H^+_{u,\alpha}, B \subseteq \text{int}H^-_{u,\alpha}$. המשפט הבא מתאר איך ניתן לבדוק זאת.

משפט 1.2.13 (קירכנברגר). אם לכל $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B$ כך שמתקיים $|A_0| + |B_0| \leq d + 2$ אפשר להפריד בין A_0, B_0 על ידי על מישור, אפשר להפריד גם את A, B על ידי על מישור.

הוכחה. לכל $a \in A$ נגדיר

$$K_a \coloneqq \left\{(u,\alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \;\middle|\; u \cdot a > \alpha\right\}.$$

נוכל לחשוב על זה כעל חצי־המישור

$$\left\{(u,\alpha) \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; (u,\alpha)\cdot(a,-1) > 0\right\}.$$

לכל $b \in B$ נגדיר באופן דומה

$$\begin{aligned} L_b &\coloneqq \left\{(v,\beta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \;\middle|\; v \cdot b < \beta\right\} \\ &= \left\{(v,\beta) \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; (v,\beta)\,(b,-1) < 0\right\}. \end{aligned}$$

K_a, L_b קמורות כפנים של חצי־מישור. מתקיים

$$\bigcap_{a\in A} K_a \neq \varnothing$$

כי $(0,-1)$ נמצא בחיתוך. באופן דומה

$$(0,1) \in \bigcap_{b\in B} L_b$$

אז גם חיתוך זה אינו ריק.
נניח כי $|A_0| + |B_0| \leq d + 2$ ונטען כי

$$\bigcap_{a\in A_0} K_a \cap \bigcap_{b\in B_0} L_b \neq \varnothing\,.$$

לפי ההנחה, קיים על מישור $H_{u,\alpha}$ שמפריד בין A_0, B_0. אז $a \cdot u > \alpha$ וגם $b \cdot u < \alpha$ לכל $a \in A_0, b \in B_0$. כלומר, $(u,\alpha) \in K_a$ לכל $a \in A_0$ וגם $(u,\alpha) \in L_b$ לכל $b \in B_0$.
לפי משפט הלי נובע כי

$$\bigcap_{a\in A} K_a \cap \bigcap_{b\in B} L_b \neq \varnothing\,.$$

ניקח (u,α) בחיתוך ונקבל

$$\begin{aligned} &A \subseteq \text{int}H^+_{u,\alpha} \\ &B \subseteq \text{int}H^-_{u,\alpha}. \end{aligned}$$

■

משפט 1.2.14 (רדו). תהי $C \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה ומדידה לבג. קיימת נקודה $p \in \mathbb{R}^d$ כך שלכל על מישור $H_{u,\alpha}$ דרך p מתקיים

$$\mu\left(H_{u,\alpha}^{+} \cap C\right) \geq \frac{1}{d+1}\mu\left(C\right).$$

הוכחה. ראשית נעיר שמשפט הלי גורר שאם $\left(K_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ קמורות וקומפקטיות ב־$\mathbb{R}^d$ כך שכל $d+1$ מהן נחתכות אז $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha \neq \varnothing$. זה נובע מכך שאם כל תת־אוסף סופי של קבוצות קומפקטיות נחתך, כולן נחתכות.
יהי $0 < \varepsilon < \frac{1}{d+1}$. לכל $u \in S^{d-1}$ ולכל $t \in \mathbb{R}$ נעיין בחיתוך $C \cap H_{u,t}^{+}$. מתקיים

$$\lim_{t\to-\infty} \mu\left(C \cap H_{u,t}^{+}\right) = \mu\left(C\right)$$
$$\lim_{t\to\infty} \mu\left(C \cap H_{u,t}^{+}\right) = 0 .$$

לכן מרציפות המידה יש $\lambda\left(u\right) \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$\mu\left(C \cap H_{u,\lambda(u)}^{+}\right) = \left(\frac{d}{d+1} + \varepsilon\right)\mu\left(C\right).$$

יהי B כדור שמכיל את C. אז $K_u \coloneqq H_{u,\lambda(u)}^{+} \cap C$ קמורה. נראה שאם $u_1, \ldots, u_{d+1} \in S^{d-1}$ אז

$$K_{u_1} \cap \ldots \cap K_{u_{d+1}} \neq \varnothing.$$

לכל $i \in [d+1]$ מתקיים

$$\left(\frac{d}{d+1} + \varepsilon\right)\mu\left(C\right) \leq \mu\left(H_{u_i,\lambda(u_i)}^{+} \cap C\right)$$

ולכן

$$\left(\frac{1}{d+1} - \varepsilon\right)\mu\left(A\right) \geq \mu\left(H_{u_i,\lambda(u_i)\cap C}^{-}\right).$$

אם $\bigcap_{i\in[d+1]} K_{u_i} = \varnothing$ אז

$$\bigcap_{i\in[d+1]} H_{u_i,\lambda(u_i)}^{+} \cap B = \varnothing$$

ולכן

$$\bigcup_{i\in[d+1]} B \cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-} = B \cap \bigcup_{i\in[d+1]} H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-} = B.$$

אז

$$C = \bigcup_{i\in[d+1]} C \cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-}$$

בסתירה לכך שמתקיים

$$\sum_{i\in[d+1]} \mu\left(C \cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-}\right) \leq (d+1)\left(\frac{1}{d+1} - \varepsilon\right)\mu\left(C\right) < \mu\left(C\right).$$

לכן $\bigcap_{i\in[d+1]} K_{u_i} \neq \varnothing$ לכל $u_1, \ldots, u_{d+1} \in S^d$, ולפי הלי $\bigcap_{u\in S^{d-1}} K_u \neq \varnothing$. ניקח $p \in \bigcap_{u\in S^{d-1}} K_u$. אם נעביר על מישור $H_{u,\alpha}$ שכיוונו $u \in S^{d-1}$ דרך p, אז

$$\left(H_{u,\alpha}^{-} \cap C\right) \geq \left(\frac{1}{d+1} - \varepsilon\right)\mu\left(C\right).$$

נקבל $H_{u,\alpha}^{+} \subseteq H_{u,\lambda(u)}^{+}$ ואז

$$\begin{aligned}\mu\left(H_{u,\alpha}^{+} \cap C\right) &\leq \mu\left(H_{u,\lambda(u)}^{+} \cap C\right)\\ &= \left(\frac{d}{d+1} + \varepsilon\right)\mu\left(C\right).\end{aligned}$$

לכן

$$H^-_{u,\lambda(u)} \cap C \subseteq H^-_{u,\alpha} \cap C$$

ו־

$$\left(\frac{1}{d+1} - \varepsilon\right)\mu\left(C\right) = \mu\left(H_{u,\lambda(u)} \cap C\right) \leq \mu\left(H^-_{u,\alpha} \cap C\right).$$

עתה $p := \lim_{z\to\infty} \frac{p_z}{z}$ תקיים את הדרוש. ■

למשפט הלי יש גרסה שקולה עבור משפחה לאו דווקא סופית של קבוצות קומפקטיות.

משפט 1.2.15 (הלי). תהי $\mathcal{K}$ משפחה של קבוצות קומפקטיות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. אם כל $d+1$ קבוצות מ־$\mathcal{K}$ נחתכות, כל הקבוצות נחתכות.

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ונניח שמתקיים $\text{diam}\left(A\right) = 1$. נרצה לחשוב מהו הרדיוס המינימלי של כדור $B\left(p,r\right)$ המכיל את A. במקרה $d=1$ אפשר להסתכל על A כמוכלת בקטע מאורך 1 ואז $r_1 = \frac{1}{2}$ הרדיוס המינימלי. במקרה $d=2$ נוכל להסתכל על הדוגמה של משולש שווה צלעות. אז הרדיוס המינימלי הוא

$$r_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

נעיין במקרה הכללי ברדיוס המינימלי עבור הסימפלקס ה־d מימדי הרגולרי. יהי

$$H := \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} \,\middle|\, \sum_{i\in[d+1]} x_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \cong \mathbb{R}^d.$$

ב־H נעיין בסימפלקס שקודקודיו הם $\frac{e_i}{\sqrt{2}} \in H$ עבור $i \in [d+1]$. מתקיים

$$\left|\frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right| = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

מרכז הכובד של הסימפלקס הוא

$$p = \frac{1}{d+1}\sum_{i\in[d+1]} \frac{e_i}{\sqrt{2}}.$$

אז

$$\frac{e_j}{\sqrt{2}} - p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{e_1}{d+1} + \ldots + \frac{-e_{j-1}}{d+1} + \frac{d}{d+1}e_j + \frac{-e_{j+1}}{d+1} + \ldots + \frac{-e_{d+1}}{d+1}\right)$$

ואז

$$\begin{aligned}\left|\frac{e_j}{\sqrt{2}} - p\right|^2 &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{d+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{d+1}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+1}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d+1}^2 + \frac{d^2}{\left(d+1\right)^2}\right)\\ &= \frac{d}{2\left(d+1\right)}\end{aligned}.$$

נקבל כי $r_d := \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$ רדיוס הכדור החוסם של הסימפלקס הרגולרי באורך צלע 1 ב־$\mathbb{R}^d$.
משפט יונג אומר לנו בעצם מה הרדיוס עבור קבוצה A כללית.

משפט 1.2.16 (יונג). תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מקוטר 1. קיימת $p \in \mathbb{R}^d$ עבורה $A \subseteq B\left(p, r_d\right)$ כאשר $r_d := \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$.

הוכחה. נעיין באוסף הכדורים $\left\{B\left(a, r_d\right)\right\}_{a\in A}$. די להראות כי $\bigcap_{a\in A} B\left(a, r_d\right) \neq \varnothing$.
ממשפט הלי נובע שדי להראות שאם $a_1, \ldots, a_{d+1} \in A$ אז $\bigcap_{i\in[d+1]} B\left(a_i, r_d\right) \neq \varnothing$. כלומר, די להראות שכל $d+1$ נקודות מ־A מוכלות בכדור ברדיוס r_d.
יהי $B\left(p,r\right)$ כדור עם רדיוס מינימלי המכיל את $a_1, \ldots, a_{d+1}$. בלי הגבלת הכלליות יהיו $a_1, \ldots, a_m$ הנקודות הנמצאות על שפת $B\left(p,r\right)$.
נטען כי $p \in \text{conv}\left\{a_1, \ldots, a_m\right\}$. אחרת, $p \notin K := \text{conv}\left\{a_1, \ldots, a_m\right\}$ ולכן יש על־מישור H שמפריד בין p, K. אם נזיז את מרכז הכדור מעט לכיוון הניצב ל־h נקבל שכל $a_1, \ldots, a_{d+1}$ בפנים של כדור מרדיוס r, בסתירה למינימליות.

נראה עתה כי $r \leq r_d$ ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $p = 0$. אז יש $\lambda \geq 0$ עבורם

$$\sum_{i\in[m]} \lambda_i a_i = 0$$
$$\sum_{i\in[m]} \lambda_i = 1 \; .$$

נקבל

$$\begin{aligned} 1 &\geq |a_i - a_j|^2 \\ &= |a_i|^2 + |a_j|^2 - 2a_i \cdot a_j \\ &= r^2 + r^2 - 2a_i \cdot a_j \end{aligned}$$

ולכן $2a_i \cdot a_j \geq 2r^2 - 1$. אז

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \sum_{i\in[m]} \lambda_i a_i \right|^2 \\ &= \sum_{i\in[m]} \lambda_i^2 |a_i|^2 + 2 \sum_{1\leq 1<j\leq m} \lambda_i \lambda_j a_i \cdot a_j \\ &\geq \sum_{i\in[m]} \lambda_i^2 r^2 + \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i \lambda_j \\ &= r^2 \left(\sum_{i\in[m]} \lambda_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i \lambda_j \right) - \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i \lambda_j \\ &= r^2 \left(\sum_{i\in[m]} \lambda_i \right)^2 - \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i \lambda_j \\ &= r^2 - \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i \lambda_j \; . \end{aligned}$$

נקבל

$$r^2 \leq \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i \lambda_j \leq \max_{\substack{x_i \geq 0 \\ \sum x_i = 1}} \left(\sum_{1\leq i<j\leq m} x_i x_j \right).$$

אם נראה שהמקסימום מתקבל כאשר כל ה־x_i בביטוי האחרון שווים נקבל

$$\binom{m}{2} \frac{1}{m^2} = \frac{m(m-1)}{2m^2} = \frac{m-1}{2m} \leq \frac{d}{2d+1}$$

ואז $r \leq \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}} = r_d$. אכן,

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq i<j\leq m} x_i x_j &= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i\in[m]} x_i \right)^2 - \sum_{i\in[m]} x_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i\in[m]} x_i^2 \right) \end{aligned}$$

כאשר

$$\frac{1}{m} \sum_{i\in[m]} x_i^2 \geq \left(\frac{1}{m} \sum_{i\in[m]} x_i \right)^2$$

מקמירות של $x \mapsto x^2$. אז $\sum_{i\in[m]} x_i^2 \geq \frac{1}{m}$ ונקבל כי

$$\sum_{1\leq i<j\leq m} x_i x_j = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i\in[m]} x_i^2 \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{2} \frac{m-1}{m} \; .$$

■

1.3 גרסאות מודרניות של משפטי קרתיאודורי והלי

1.3.1 משפט קרתיאודורי הצבעוני

משפט 1.3.1 (קרתיאודורי). יהיו $A_1,\ldots,A_{d+1}\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהי $p\in\bigcap_{i\in[d+1]}\mathrm{conv}\left(A_i\right)$. אז יש נקודות $a_i\in A_i$ לכל $i\in[d+1]$ עבורן $p\in\mathrm{conv}\left(a_1,\ldots,a_{d+1}\right)$.

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $|A_i|<\infty$ (לפי 1.2.8 אפשר לקחת $|A_i|\le d+1$). יהיו $a_1\in A_1,\ldots,a_{d+1}\in A_{d+1}$ עבורן $\rho:=d\left(p,\mathrm{conv}\left\{a_1,\ldots,a_{d+1}\right\}\right)$ מינימלי. עלינו להראות שמתקיים $\rho=0$. נניח בשלילה ש־$\rho>0$. תהי $q\in\mathrm{conv}\left\{a_i\mid i\in[d+1]\right\}$ כך ש־

$$|p-q|=\min\left\{\|x-p\|\mid x\in\mathrm{conv}\left\{a_i\mid i\in[d+1]\right\}\right\}.$$

אז

$$\mathrm{conv}\left\{a_i\mid i\in[d+1]\right\}\subseteq H^-_{p-q,(p-q)\cdot q}=:H$$

כפי שראינו בחישוב קודם. אז

$$q\in H.$$

ממשפט 1.2.8 נובע ש־q בקמור של d נקודות מבין $a_1,\ldots,a_{d+1}$, ובלי הגבלת הכלליות נניח כי $q\in\mathrm{conv}\left\{a_1,\ldots,a_d\right\}$. אנו יודעים כי $p\in A_{d+1}$. לכן $A_{d+1}\not\subseteq H$. לכן קיימת נקודה $a_{d+1}\in A_{d+1}\setminus H$. אז

$$\left(a'_{d+1}-q\right)\cdot(p-q)>0.$$

נראה שמתקיים

$$d\left(p,\mathrm{conv}\left\{a_1,\ldots,a_d,a'_{d+1}\right\}\right)<\rho.$$

נעיין בנקודה $(1-t)\,q+ta'_{d+1}$ עבור t קטן. מתקיים

$$\begin{aligned}\left|p-\left((1-t)\,q+ta'_{d+1}\right)\right|^2&=\left|(p-q)-t\left(a'_{d+1}-q\right)\right|^2\\&=|p-q|^2-2t\,(p-q)\cdot\left(a'_{d+1}-q\right)+t^2\left|a'_{d+1}-q\right|^2\end{aligned}.$$

כעת, אם $t\in(0,1)$ קטן מספיק אז

$$2t\,(p-q)\cdot\left(a'_{d+1}-q\right)>t\left|a'_{d+1}-q\right|$$

ולכן

$$\left|p-\left((1-t)\,q+ta'_{d+1}\right)\right|^2<\rho^2$$

בסתירה למינימליות של $\{a_1,\ldots,a_{d+1}\}$. ■

1.3.2 מסקנות מקרתיאודורי צבעוני

משפט 1.3.2 (הלי צבעוני). תהיינה $\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_{d+1}$ משפחות של קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. נניח שלכל

$$\left(K_1,\ldots,K_{d+1}\right)\in\prod_{i\in[d+1]}\mathcal{K}_i$$

מתקיים

$$\bigcap_{i\in[d+1]}K_i\neq\varnothing.$$

אז יש $j\in[d+1]$ כך שכל הקבוצות ב־$\mathcal{K}_j$ נחתכות.

משפט 1.3.3 (טברברג). תהי $A\subseteq\mathbb{R}^d$ מגודל $(d+1)(k-1)+1$. אז אפשר לכתוב $A=\bigsqcup_{i\in[k]}A_k$ כאשר

$$\bigcap_{i\in[k]}\mathrm{conv}\left(A_i\right)\neq\varnothing.$$

1.3.3 קרתיאודורי עבור חרוטים

הגדרה 1.3.4. עבור $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ נגדיר את ה־*positive span* של A על ידי

$$\text{pos}\left(A\right) \coloneqq \left\{ \sum_{i\in[m]} \lambda_i a_i \;\middle|\; a_i \in A,\, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

הגדרה 1.3.5. קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ נקראת חרוט קמור שקודקודו 0 אם C קמורה ולכל $c \in C$ גם $\lambda c \in C$ לכל $\lambda \geq 0$.

הערה 1.3.6. לכל $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ הקבוצה $\text{pos}\left(A\right)$ היא חרוט קמור ב־$\mathbb{R}^{d+1}$.

משפט 1.3.7 (קריתיאודורי עבור קמור חיובי). תהי $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ותהי $p \in \text{pos}\left(A\right)$. אזי יש $A_0 \subseteq A$ עם $|A_0| \leq d+1$ כך שמתקיים $p \in \text{pos}\left(A_0\right)$.

הוכחה. בדיוק כמו בהוכחת משפט קרתיאודורי, נבחר $A_0 = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq A$ מינימלית עבורה $p \in \text{pos}\left\{u_1, \ldots, u_n\right\}$. נכתוב

$$p = \sum_{i\in[n]} \lambda_i u_i$$

עם $\lambda_i \geq 0$, ונראה כי $n \leq d+1$. אחרת, $n \geq d+2$ ולכן יש צירוף לינארי

$$\sum_{i\in[n]} \mu_i u_i = 0$$

שאינו טריוויאלי. תהי

$$\theta \coloneqq \min\left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \;\middle|\; \mu_i > 0 \right\}$$

(בלי הגבלת הכלליות קיימים $\mu_i > 0$) ויהי $i_0 \in [n]$ עבורו $\theta = \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}$. אז

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i\in[n]} \lambda_i u_i \\ &= \sum_{i\in[n]} \left(\lambda_i - \theta\mu_i\right) u_i \\ &= \sum_{i\neq i_0} \left(\lambda_i - \theta\mu_i\right) u_i + \cancelto{0}{\left(\lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}\mu_{i_0}\right)} u_{i_0} \end{aligned}$$

וקיבלנו את p כיצירוף חיובי של פחות מה־u_i. ■

משפט 1.3.8 (קרתיאודורי החיובי עבור קמור חיובי). תהיינה $A_1, \ldots, A_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ותהי $p \in \bigcap_{i\in[d+1]} \text{pos}\left(A_i\right)$. אז יש $a_i \in A_i$ לכל $i \in [d+1]$ עבורן

$$p \in \text{pos}\left\{a_1, \ldots, a_{d+1}\right\}.$$

למה 1.3.9. נניח כי $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^{d+1}$. נגיד שהן מקיימות את תנאי 1 אם $\left(\vec{0}, -1\right) \in \text{pos}\left\{u_1, \ldots, u_m\right\}$. יהיו $H_{u_i,0}$ על־מישורים הניצבים ל־u_i ונסתכל על חצאי המרחבים $H_{u_i,0}^+$. נגיד שה־u_i מקיימות את תנאי 2 אם

$$\bigcap_{i\in[m]} H_{u_i,0}^+ \cap \mathbb{R}^d \times \{1\} = \varnothing.$$

נטען כי תנאים 1 ו־2 שקולים.

הוכחה. • נניח שמתקיים תנאי 1 ויהיו $\lambda_i \geq 0$ עבורן

$$\left(\vec{0}, -1\right) = \sum_{i\in[m]} \lambda_i u_i.$$

נניח כי $z \in \bigcap_{i\in[m]} H_{u_i,0}^+$ ונראה כי הקואורדינטה האחרונה של z אי־חיובית. אכן,

$$\begin{aligned} -z_{d+1} &= \left(\vec{0}, -1\right) \cdot z \\ &= \sum_{i\in[m]} \lambda_i \left(u_i \cdot z\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

כלומר $z_{d+1} \leq 0$ ובפרט $z \notin \mathbb{R}^d \times \{1\}$.

- נניח שתנאי 1 אינו מתקיים ונראה כי תנאי 2 אינו מתקיים. נניח כי

$$\left(\vec{0},-1\right)\notin C\coloneqq \mathrm{pos}\left\{u_1,\ldots,u_m\right\}.$$

נפריד את C מ־$\left(\vec{0},-1\right)$ על ידי על מישור $H_{w,\alpha}$. כלומר,

$$\forall z\in C:\ (0,-1)\cdot w<\alpha\le z\cdot w.$$

מתקיים $0\in C$ לכן $\alpha\le 0\cdot w=0$ ונקבל $\alpha\le 0$. אם עבור $i\in[m]$ כלשהו מתקיים $u_i\cdot w<0$ נקבל

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\lambda u_i\right)\cdot w=-\infty<\alpha$$

בסתירה כי $\lambda u_i\in C$ לכל $\lambda\ge 0$.

לכן $\alpha\le 0$ וגם $u_i\cdot w\ge 0$ לכל $i\in[m]$. נקבל

$$-w_{d+1}=\left(\vec{0},-1\right)\cdot w<\alpha\le 0$$

ולכן $w_{d+1}>0$. אז $w\in H^+_{u_i,0}$ ואז

$$\frac{w}{w_{d+1}}\in\bigcap_{i\in[m]}H^+_{u_i,0}\cap\mathbb{R}^d\times\{1\}.$$

לכן תנאי 2 אינו מתקיים. ■

הגדרה 1.3.10 (פיאון קמור). פיאון קמור הוא קמור של מספר סופי של נקודות.

הגדרה 1.3.11 (עצב). בהינתן $K=\{K_1,\ldots,K_m\}$ משפחה של קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ נגדיר את העצב *(nerve)* של $\mathcal{K}$ על ידי

$$N\left(\mathcal{K}\right)\coloneqq\left\{I\subseteq[m]\ \middle|\ \bigcap_{i\in I}K_i\neq\varnothing\right\}.$$

הערה 1.3.12. העצב של $\mathcal{K}$ מתאר את החיתוכים של קבוצות ב־$\mathcal{K}$. זה קומפלקס סימפליציאלי: אם $\sigma\in N\left(\mathcal{K}\right)$ וגם $\tau\subseteq\sigma$ אז $\tau\in N\left(\mathcal{K}\right)$. העצב של $N\left(\mathcal{K}\right)$ שקול הומוטופית ל־$\bigcup_{K\in\mathcal{K}}K$, אבל נדון בכך בהמשך.

משפט 1.3.13 (הלי במונחי העצב). תהי $\mathcal{K}=\{K_1,\ldots,K_m\}$ משפחת קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. אם $N\left(\mathcal{K}\right)$ מכיל את כל $\sigma\subseteq[m]$ המקיימת $|\sigma|\le d+1$ אז $N\left(K\right)=\mathcal{P}\left([m]\right)$ אוסף כל התת־קבוצות של $[m]$.

טענה 1.3.14. יהיו $K_1,\ldots,K_m$ קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ ותהי $\mathcal{K}\coloneqq\{K_1,\ldots,K_m\}$. אז קיימים פיאונים $P_1,\ldots,P_m$ עבורם $P_i\subseteq K_i$ לכל $i\in[m]$ וגם

$$M\left(P\right)=N\left(\mathcal{K}\right)$$

כאשר $\mathcal{P}\coloneqq\{P_1,\ldots,P_m\}$.

הערה 1.3.15. שאלה מעניינת היא האם אפשר לאפיין את העצבים האפשריים של אוספי קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. בעוד זאת שאלה קשה באופן כללי, יש איפיון במקרה $d=1$. למשל, אנו יודעים שאת העצב באיור אי אפשר לקבל ב־$\mathbb{R}$. יהי $\mathcal{K}=\{I_i\mid i\in[7]\}$ אוסף של שבעה קטעים ב־$\mathbb{R}$. במקרה זה, I_6 חותך את I_3 שחותך את I_1, אבל I_1 לא חותך את I_6 אז נקבל קטעים כמו באיור כעת I_2 חותך את I_1 ואת I_5 שזר ל־I_1 לכן נקבל קטעים כמו באיור אז I_4 שחותך את I_1 חייב להיות בין I_3,I_2 אבל אז $I_4\subseteq I_1$ ולכן I_7 שחותך את I_4 חותך גם את I_1.

הוכחה. לכל $\sigma\in N\left(\mathcal{K}\right)$ נבחר $p_\sigma\in\bigcap_{i\in\sigma}K_i$. נגדיר

$$P_i\coloneqq\mathrm{conv}\left\{p_\sigma\mid i\in\sigma\in N\left(\mathcal{K}\right)\right\}.$$

נשים לב שאם $i\in\sigma$ אז $p_\sigma\in K_i$. לכן $P_i\subseteq K_i$. לכן $N\left(\mathcal{P}\right)\subseteq N\left(\mathcal{K}\right)$. מאידך, אם $\sigma\in N\left(\mathcal{K}\right)$ אז $p_\sigma\in\bigcap_{i\in\sigma}P_i$ ולכן $\sigma\in N\left(\mathcal{P}\right)$. ■

מסקנה 1.3.16. תהיינה $K_1,\ldots,K_m$ קומפקטיות קמורות עבורן $\bigcap_{i\in[m]}K_i=\varnothing$. אזי קיימים חצאי מרחבים $D_1,\ldots,D_m$ כך שמתקיים $K_i\subseteq D_i$ לכל $i\in[m]$, וגם $\bigcap_{i\in[m]}D_i=\varnothing$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על ℓ שקיימים $D_1,\dots,D_\ell$ עבורם $K_i \subseteq D_i$ וגם

$$D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+1} \cap \ldots \cap K_m = \varnothing.$$

נניח שהוכחנו עבור $\ell < m$ ונוכיח עבור $\ell+1$ (זה כולל את מקרה הבסיס). אז

$$D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+1} \cap \ldots \cap K_m = \varnothing$$

כלומר

$$K_{\ell+1} \cap (D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \ldots \cap K_m) = \varnothing$$

ולכן קיים $H^+_{u,\alpha}$ עבורו $K_{\ell+1} \subseteq H^+_{,\alpha}$ וגם

$$D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \ldots \cap K_m \subseteq \text{int}H^-_{u,\alpha}.$$

כלומר,

$$D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \ldots \cap K_m \cap H^+_{u,\alpha} = \varnothing.$$

ניקח $D_{\ell+1} \coloneqq H^+_{,\alpha}$. ■

הוכחה (1.3.2). בלי הגבלת הכלליות, מטענה 1.3.14 אפשר להניח ש־$K_{i,j}$ קומפקטיות לכל $K_{i,j} \in \mathcal{K}_i$. לפי 1.3.16 קיימים חצאי מרחבים $D_{i,j}$ כך ש־$K_{i,j} \subseteq D_{i,j}$ לכל $K_{i,j} \in \mathcal{K}_i$ וכך שמתקיים $\bigcap_j D_{i,j} = \varnothing$. נציג

$$D_{i,j} = H^+_{u_{i,j},\alpha_{i,j}} = \left\{v \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; v \cdot u_{i,j} \geq \alpha_{i,j}\right\}.$$

יהי $w_{i,j} = (u_{i,j}, -\alpha_{i,j}) \in \mathbb{R}^{d+1}$.
נשים לב שמתקיים

$$\bigcap_j H^+_{w_{i,j},0} \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{1\}\right) = \varnothing$$

אם $v = (v', v_{d+1})$ בחיתוך הנ"ל אז $w_{i,j} \cdot (v', v_{d+1}) \geq 0$ ומצד שני $v_{d+1} = 1$. אז

$$v' \cdot u_{i,j} + (-\alpha_{i,j}) \cdot 1 \geq 0$$

ולכן $v' \cdot u_{i,j} \geq \alpha_{i,j}$ לכל j. אז $v' \in D_{i,j}$ לכל j, בסתירה לכך שמתקיים

$$\bigcap_j D_{i,j} = \varnothing.$$

לכן, לפי 1.3.9 מתקיים

$$\left(\vec{0}, -1\right) \in \text{pos}\left\{w_{i,j}\right\}_j$$

לכל $i \in [d+1]$. לפי קרתיאודורי הצבעוני עבור pos קיימת בחירה $w_{1,j_1}, w_{2,j_2}, \dots, w_{d+1,j_{d+1}}$ כך שמתקיים

$$\left(\vec{0}, -1\right) \in \text{pos}\left\{w_{i,j_i}\right\}_{i\in[d+1]}.$$

לפי 1.3.9 נקבל כי

$$\bigcap_{i\in[d+1]} H^+_{w_{i,j_i},0} \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{1\}\right) = \varnothing.$$

אז

$$\bigcap_{i\in[d+1]} K_{i,j_i} \subseteq \bigcap_{i\in[d+1]} D_{i,j_i} = f \bigcap_{i\in[d+1]} H^+_{u_{i,j_i},\alpha_{i,j_i}} = \varnothing$$

כיוון שאם $z \in \bigcap_{i\in[d]} H^+_{u_{i,j_i},\alpha_{i,j_i}}$ אז $z \cdot u_{i,j_i} \geq \alpha_{i,j_i}$ לכל i ואז

$$\begin{aligned}(z,1) \cdot w_{i,j_i} &= (z,1) \cdot (u_{i,j_i}, -\alpha_{i,j_i}) \\ &= z \cdot u_{i,j_i} - \alpha_{i,j_i} > 0\end{aligned}$$

ונקבל כי

$$(z,1) \in \bigcap_{i\in[d+1]} H^+_{w_{i,j_i}} \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{1\}\right)$$

בסתירה לביטוי קודם. קיבלנו

$$\bigcap_{i\in[d+1]} K_{i,j_i} = \varnothing$$

בסתירה להנחה. ■

משפט 1.3.17 (רדון). תהיינה $u_1,\dots,u_{d+2}\in\mathbb{R}^d$. קיימת חלוקה $[d+2]=I_1\sqcup I_2$ עבורה

$$\operatorname{conv}\{u_i\}_{i\in I_1}\cap\operatorname{conv}\{u_i\}_{i\in I_2}=\varnothing\ .$$

נשאל מה מספר הנקודות המינימלי m כך שלכל $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^2$ תהיה חלוקה $[m]=I_1\sqcup I_2\sqcup I_3$ עבורה

$$\bigcap_{j\in[3]}\operatorname{conv}\{u_i\}_{i\in I_j}\neq\varnothing\ .$$

משפט 1.3.18 (טברברג). אם $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^2$ וגם $m\geq 3\left(k-1\right)+1$ אז יש חלוקה $[m]=\bigsqcup_{j\in[k]}I_j$ וגם

$$\bigcap_{j\in[k]}\operatorname{conv}\{u_i\}_{i\in I_j}\neq\varnothing\ .$$

באופן כללי המשפט אומר כך:

משפט 1.3.19. אם $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^d$ וגם $m\geq\left(d+1\right)\left(k-1\right)+1$ אז יש חלוקה $[m]=\bigsqcup_{j\in[k]}I_j$ וגם

$$\bigcap_{j\in[k]}\operatorname{conv}\{u_i\}_{i\in I_j}\neq\varnothing\ .$$

הערה 1.3.20. על ידי הסתכלות על $d+1$ זוגות של נקודות קרובות ב־$\mathbb{R}^d$ אפשר לראות שהחסם התחתון במשפט טברברג אופטימלי, כיוון שבמקרה זה אין חלוקת k־טברברג.