הערה 0.1. נושא משפט החסם העליון לשילושים של ספירות לא יהיה במבחן.

הגדרה 0.2 (אלגברת הפיאות). יהי X קומפלקס סימפליציאלי על $[n]$. אלגברת הפיאות של X מעל שדה k היא ה־k־אלגברה $K[X] \coloneqq k[x_1, \dots, x_n] / I_X$ כאשר

$$I_X = \left(\left\{ \prod_{i \in \alpha} x_i \;\middle|\; X \text{ of face a isn't } \alpha \right\} \right).$$

הערה 0.3. $k[X]$ אלגברה סטנדרטית מעל k.

הגדרה 0.4. עבור אלגברה סטנדרטית A נגדיר את פונקציית הילברט

$$H(A, j) \coloneqq \dim A_j$$

ונגדיר

$$F(A, j) \coloneqq \sum_{j=0}^{\infty} H(A, j)\, t^j.$$

נניח מעתה כי k שדה אינסופי.

טענה 0.5. אם $\dim X = d - 1$ אז

$$F(k[X], t) = \frac{\sum_{i=0}^{d} h_i t^i}{(1-t)^d}.$$

כאשר ה־h_i הם מקדמי ה־h־וקטור.

הוכחה. מתקיים $H(k[X], 0) = 1$. נניח כי $j > 0$. מתקיים

$$\begin{aligned} H(k[X], j) &= \sum_{\sigma \in X} \#\left(\sigma \text{ being support with } j \text{ degree of monomials}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in X} \#\left\{ (\alpha_i)_{i \in \sigma} \;\middle|\; {\textstyle \substack{\alpha_i \geq 1 \\ \sum_{i \in \sigma} \alpha_i = j}} \right\} \\ &= \sum_{\sigma \in X} \#\left\{ (\beta_i)_{i \in \sigma} \;\middle|\; {\textstyle \substack{\beta_i \geq 0 \\ \sum_{i \in \sigma} \beta_i = j - |\sigma|}} \right\} \\ &= \sum_{\sigma \in X} \binom{(j - |\sigma|) + |\sigma| - 1}{|\sigma| - 1} \\ &= \sum_{\sigma \in X} \binom{j-1}{|\sigma| - 1} \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} f_k \binom{j-1}{k} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
F\left(k\left[X\right],t\right) &= 1+\sum_{j\geq1}H\left(k\left[X\right],j\right)t^{j}\\
&= 1+\sum_{j\geq1}\sum_{k\geq0}f_{k}\binom{j-1}{k}t^{j}\\
&= 1+\sum_{k\geq0}f_{k}\sum_{j\geq1}\binom{j-1}{k}t^{j}\\
&= 1+\sum_{k\geq0}f_{k}t\sum_{j\geq1}\binom{j-1}{k}t^{j-1}\\
&= 1+\sum_{k\geq0}f_{k}t\sum_{j\geq0}\binom{j}{k}t^{j}\\
&= 1+\sum_{k\geq0}f_{k}t\sum_{j\geq k}t^{j}\\
&= 1+\sum_{k\geq0}f_{k}t\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+k}{k}t^{j+k}\\
&= 1+\sum_{k\geq0}f_{k}t^{k+1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+k}{k}t^{j}\\
&= 1+\sum_{k\geq0}f_{k}\left(\frac{t}{1-t}^{k+1}\right)\\
&= \sum_{k\geq-1}f_{k}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{d}f_{k-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{k}\\
&= \left(\frac{t}{1-t}\right)^{d}\sum_{k=0}^{d}f_{k-1}\left(\frac{1-t}{t}^{d-k}\right)\\
&= \left(\frac{t}{1-t}\right)^{d}\sum_{k=0}^{d}f_{k-1}\left(t^{-1}-1\right)^{d-k}\\
&= \left(\frac{t}{1-t}\right)^{d}\sum_{k=0}^{d}h_{k}\left(t^{-1}\right)^{d-k}\\
&= \frac{\sum_{k=0}^{d}h_{k}t^{k}}{\left(1-t\right)^{d}}
\end{aligned}$$

ובפרט $\dim k\left[X\right]=d$ כי

$$0<f_{d-1}=\sum_{k=0}^{d}h_{k}\cdot1^{k}.$$

■

נחזור לאלגברה קומוטטיבית.

הערה 0.6. תהי A אלגברה סטנדרטית מעל k אינסופי ונסמן $d:=\dim A$. לפי נתר, קיימים $\theta_{1},\ldots,\theta_{d}\in A_{1}$ בלתי־תלויים אלגברית מעל k ואיברים הומוגניים $\eta_{1},\ldots,\eta_{s}\in A$ עבורם

$$A=\sum_{j=1}^{s}k\left[\eta_{1},\ldots,\theta_{d}\right]\cdot\eta_{j}.$$

הגדרה 0.7 (חוג Cohen-Maccaulay). חוג R יקרא Cohen-Maccauly אם קיימים $\theta_{1},\ldots,\theta_{d}$ בלתי־תלויים אלגברית עבורם R מודול חופשי מדרגה סופית מעל $k\left[\theta_{1},\ldots,\theta_{d}\right]$.

הערה 0.8. R הוא Cohen-Maccaulay אם ורק אם קיימים $\theta_1,\dots,\theta_d$ בלתי־תלויים אלגברית ו־$\eta_1,\dots,\eta_s$ הומוגניים עבורם

$$.R=\bigoplus_{j=1}^{s}k\left[\theta_1,\dots,\theta_d\right]\cdot\eta_j$$

משפט 0.9 (*Reisner*). $k\left[X\right]$ הוא *CM* אם ורק אם לכל $\sigma\in X$ ולכל $i<\dim\left(\mathrm{lk}\left(X,\sigma\right)\right)$ מתקיים $\tilde{H}_i\left(\mathrm{lk}\left(X,\sigma\right)\right)=0$.

נזכיר שמתקיים

$$\mathrm{st}\left(X,\sigma\right)=\left\{\tau\in X\mid\tau\cup\sigma\in X\right\}$$
$$.\mathrm{lk}\left(X,\sigma\right)\coloneqq\left\{\tau\in X\mid\tau\cup\sigma\in X\right\}\tau\cap\sigma=\varnothing$$

הערה 0.10. נניח ש־X שילוש של S^{d-1}. אזי לכל $\sigma\in X$ מתקיים $\mathrm{lk}\left(X,\sigma\right)$ שילוש של $S^{d-|\sigma|-1}=S^{d-\dim\sigma-2}$. לכן $k\left[X\right]$ הוא Cohen-Maccaulay.

טענה 0.11. אם R חוג סטנדרטי וגם *Cohen-Maccaulay* (כלומר, R חופשי כ־$k\left[\theta_1,\dots,\theta_d\right]$־מודול), וגם $\dim R=d$ אז

$$.F\left(R,t\right)=\frac{F\left(R\big/\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right),t\right)}{\left(1-t\right)^d}$$

הוכחה. קיימים $\eta_1,\dots,\eta_s$ כאשר $\eta_i\in R_{\ell_i}$ ומתקיים

$$.R=\bigoplus_{j=1}^{s}k\left[\theta_1,\dots,\theta_d\right]\cdot\eta_j$$

נסמן גם $\ell_i=\deg\eta_i$. כעת,

$$.\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right)=\sum_{i\in[d]}R_{\theta_i}=\left\{f\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right)\;\middle|\;\substack{f\in k[x_1,\dots,x_d]\\ f(0)=0}\right\}$$

נחשב את $F\left(R\big/\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right),t\right)$. נטען ראשית כי

$$\eta_1+\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right),\dots,\eta_s+\left(\theta_1,\dots,\eta_s\right)$$

בסיס של $R\big/\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right)$ מעל k. נסמן $\bar{\eta}_i\coloneqq\eta_i+\left(\theta_1,\dots,\theta_s\right)$.

- אם $r\in R$ ניתן לכתוב $r=\sum_{j=1}^{s}f_j\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right)\eta_j$. נכתוב $f_j=c_j+g_j$ כאשר $c_j\in k$ וכאשר $g_j\left(0\right)=0$. אז

$$.\bar{r}=\sum_{j=1}^{s}\left(\overline{g_j\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right)}+c_j\right)\bar{\eta}_j=\sum_{j=0}^{s}c_j\bar{\eta}_j$$

- ההצגה הנ"ל יחידה: אם

$$\bar{r}=\sum_j c_j\bar{\eta}_j=\sum_j c'_j\bar{\eta}_j$$

אז

$$\sum_{j=1}^{s}\left(c_j-c'_j\right)\bar{\eta}_j=0$$

ואז

$$\sum_{j\in[s]}\left(c_j-c'_j\right)\eta_j\in\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right)$$

ולכן $c_j-c'_j\in\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right)$ לכל j.

אם $\deg\eta_j=0$ נקבל $c_j=c'_j$. אם $\deg\eta_j>0$ נקבל

$$.\sum_{\deg\eta_j>0}\left(c_j-c'_j\right)\eta_j=g\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right)$$

נבחר j_0 עבורו $\deg\eta_{j_0}=0$, כלומר $\eta_{j_0}=\lambda\in k\setminus\{0\}$. אז

$$.\sum_{\ell_j>0}\left(c_j-c'_j\right)\eta_j=\frac{g\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right)}{\lambda}\eta_{j_0}$$

מכך נובע $c_j-c'_j=0$ לכל j עם $\ell_j>0$ (נום $g\left(\theta_1,\dots,\theta_d\right)=0$).

נקבל כעת כי

$$F\left(R\middle/(\theta_1,\ldots,\theta_d),t\right)=\sum_{j\in[s]}t^{\ell_j}$$

... ■