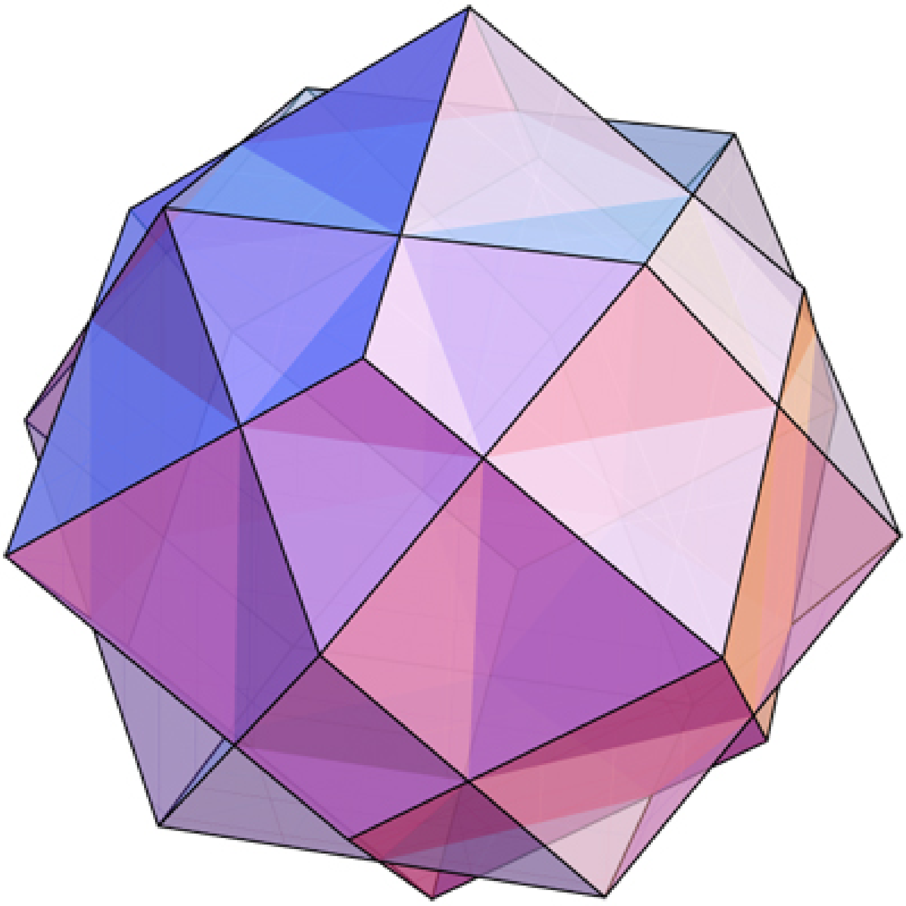
# סיכומי הרצאות לשיטות טופולוגיות בקומבינטוריקה
# (פיאונים קמורים)
**אביב 2021, הטכניון**

## הרצאותיו של פרופ' רועי משולם
סוכמו על ידי אלעד צורני



פוליהדרון קמור בשם Cuboctahedron-Rhombic Dodecahedron Compound.

עדכון אחרון 2 במאי 2021

# תוכן העניינים

# הקדמה

## הבהרה

סיכומי הרצאות אלו אינם רשמיים ולכן אין כל הבטחה כי החומר המוקלד הינו בהתאמה כלשהי עם דרישות הקורס, או שהינו חסר טעויות.
להיפך, ודאי ישנן טעויות בסיכום! אעריך אם הערות ותיקונים ישלחו אלי בכתובת דוא"ל tzorani.elad@gmail.com.
אלעד צורני.

## ספרות מומלצת.

הספרות המומלצת עבור הקורס הינה כדלהלן.

**J. Matoušek, G. M. Ziegler:** Around Brouwer's fixed point theorem

**J. Matoušek:** Using the Borsuk-Ulam Theorem

**D. Kozlov, R. Meshulam:** Around Helly's Theorem

# הקדמה

## 0.1 תוכן הקורס

### 0.1.1 פיאונים

נדבר בקורס על קמירות ופיאונים. פיאונים תלת־מימדיים רגולריים הם חמשת הגופים האפלטוניים: האוקטהדר, הקוביציה, הסימפלקס, הדודקהדר והאיקוסהדר. קיימות שאלות קשות ופתוחות על פיאונים. אנו נתרכז בדיון בשאלה שהייתה פתוחה עד לפני כחמישים שנה ועוסקת ומספרי הפיאות של פיאונים.
עבור פיאון $P$ נסמן ב־$f_i\left(P\right)$ את מספר הפיאות ה־$i$־מימדיות של $P$.
במקרה של $P$ הסימפלקס נקבל

$$\left(f_0, f_1, f_2\right) = \left(4, 6, 4\right).$$

נקרא ל־$\left(f_0, \ldots, f_{d-1}\right)$ ה־$f$־וקטור ונסמנו $f$. במקרה של האוקטהדר נקבל $f = \left(6, 12, 8\right)$, ובמקרה של הקוביה נקבל $f\left(8, 12, 6\right)$.
במקרה $d = 2$, פיאון הוא מצולע קמור ומתקיים $f_0\left(P\right) = f_1\left(P\right)$.
במקרה $d = 3$ נוסחאת אוילר אומרת

$$f_0\left(P\right) - f_1\left(P\right) + f_2\left(P\right) = 2.$$

כמו כן, כל צלע משותפת לשתי פיאות. אם $|F|$ מספר הצלעות של פאה $F$ נקבל

$$2f_1\left(P\right) = \sum_F |F| \geq 3 \cdot f_2\left(P\right).$$

נציב זאת בנוסחאת אוילר ונקבל

$$2 = f_0\left(P\right) - f_1\left(P\right) + f_2\left(P\right) \leq f_0\left(P\right) - f_1\left(P\right) + \frac{2}{3}f_1\left(P\right) = f_0\left(P\right) - \frac{1}{3}f_1\left(P\right)$$

ואז

$$f_1\left(P\right) \leq 3\left(f_0\left(P\right) - 2\right).$$

נקבל אז גם

$$f_2\left(P\right) \leq \frac{2}{3}f_1\left(P\right) \leq 2\left(f_0\left(P\right) - 2\right).$$

במקרה בו מספר הצלעות של פאה קבוע, נקבל שוויונים.

### 0.1.2 בעיית החסם העליון לפיאונים

יהי $P$ פיאון $d$־מימדי ב־$\mathbb{R}^d$. יהי $f_0\left(P\right)$ מספר קודקודיו.

**שאלה 0.1.1.** איך אפשר לחסום את $f\left(P\right) = \left(f_1\left(P\right), \ldots, f_{d-1}\left(P\right)\right)$?

**שאלה 0.1.2.** בהינתן $n := f_0\left(P\right)$ מספר קודקודי $P$, איך אפשר לתאר את האפשרויות עבור $f$?

# פרק 1

# קמירות - גיאומטריה וקומבינטוריקה

## 1.1 הגדרות

**הגדרה 1.1.1 (קטע בין נקודות).** עבור $a,b\in\mathbb{R}^d$ נגדיר את הקטע בין $a,b$ להיות
$$[a,b]=\{\lambda a+(1-\lambda)b \mid \lambda\in[0,1]\}\,.$$

**הגדרה 1.1.2 (צירוף קמור).** יהיו $a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}^d$. צירוף קמור של הם הוא $\sum_{i\in[k]}\lambda_i a_i$ עבור $\lambda_i\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימות $\sum_i\lambda_i=1$.

**הגדרה 1.1.3 (קבוצה קמורה).** קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^d$ תקרא קמורה אם לכל $a,b\in K$ מתקיים $[a,b]\subseteq K$.

**הגדרה 1.1.4 (תת־מרחב אפיני (ישרייה)).** $L\subseteq\mathbb{R}^d$ נקרא תת־מרחב אפיני אם $L=v+U$ עבור $U\leq\mathbb{R}^d$ תת־מרחב ועבור $v\in\mathbb{R}^d$.

**הגדרה 1.1.5.** אם $L=v+U$ כנ"ל נגדיר $\dim L:=\dim U$.

**הגדרה 1.1.6 (על־מישור).** $L\subseteq\mathbb{R}^d$ נקרא על־מישור אם הוא תת־מרחב אפיני עם $\operatorname{codim}L:=d-\dim L=1$.

**הגדרה 1.1.7 (צירוף אפיני).** צירוף אפיני של $a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}^d$ הוא צירוף $\sum_{i=1}^k\lambda_i a_i$ כאשר $\sum_{i=1}^k\lambda_i=1$.

**תרגיל 1.** בהינתן $A\subseteq\mathbb{R}^d$, אוסף הצירופים האפיניים של איברי $A$, שנסמנו $\operatorname{aff}(A)$, הוא המרחב האפיני המינימלי שמכיל את $A$.

**הגדרה 1.1.8 (קמור של קבוצה).** תהי $A\subseteq\mathbb{R}^d$. הקמור של $A$, שמסומן $\operatorname{conv}(A)$, הוא הקבוצה הקמורה המינימלית שמכילה את $A$.

**טענה 1.1.9.** מתקיים
$$\begin{aligned}\operatorname{conv}(A)&=\bigcap_{\substack{K\supseteq A\\ K\text{ convex is}}}K\\&=\left\{\sum_{i\in[[k]}\lambda_i a_i\;\middle|\;\substack{a_1,\ldots,a_k\in A\\ \sum_{i\in[k]}\lambda_i=1\\ \lambda_i\geq 0}\right\}\,.\end{aligned}$$

הוכחה. תהי
$$B:=\left\{\sum_{i\in[[k]}\lambda_i a_i\;\middle|\;\substack{a_1,\ldots,a_k\in A\\ \sum_{i\in[k]}\lambda_i=1\\ \lambda_i\geq 0}\right\}.$$
אז $B$ קמורה כי
$$\begin{aligned}\theta\sum_i\lambda_i a_i+(1-\theta)\sum_i\mu_i a_i&=\sum_i\left(\theta\lambda_i+(1-\theta)\mu_i\right)a_i\\&=\sum_i\theta\lambda_i+(1-\theta)\mu_i\end{aligned}$$
וגם
$$1=\theta+1-\theta=\theta\sum_i\lambda_i+(1-\theta)\sum_i\mu_i.$$
$B$ מינימלית כי כל קבוצה קמורה שמכילה את $A$ צריכה להכיל צירופים קמורים של איברי $A$. ■

## 1.2 משפטי הלי, קרתיאודורי ורדון

### 1.2.1 משפט הלי

**משפט 1.2.1 (הלי).** נסתכל על $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$. נניח ש־$I_1,\dots,I_n$ קטעים ב־$\mathbb{R}$ כך ש־$I_i\cap I_j\neq\varnothing$ לכל $i,j\in[n]$. אז

$$\bigcap_{i\in[n]} I_i\neq\varnothing\ .$$

הוכחה. נוכיח במקרה בו $I_i=[a_i,b_i]$. המקרה הכללי דומה מאוד.
מההנחה, מתקיים

$$c\coloneqq \max_{i\in[n]}(a_i)\in\bigcap_{i\in[n]} I_i.$$

■

כעת ננסח את הגרסה המקורית של המשפט.

**משפט 1.2.2.** יהיו $K_1,\dots,K_n$ קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ המקיימות

$$\bigcap_{i\in I} K_i\neq\varnothing$$

לכל $I\subseteq[n]$ המקיימת $|I|\leq d+1$. אז

$$\bigcap_{i\in[n]} K_i\neq\varnothing\ .$$

הלי הוכיח את המשפט בתחילת המאה הקודמת.

### 1.2.2 משפטי ההפרדה

**הגדרה 1.2.3 ().** $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}^d$ יקראו בלתי־תלויות אפינית אם

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i a_i=0\ \wedge\ \sum_{i\in[k]}\lambda_i=0\implies(\lambda_1,\dots,\lambda_k)=(0,\dots,0)\ .$$

**טענה 1.2.4.** התנאים הבאים שקולים עבור $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}^d$.

1. $a_1,\dots,a_k$ בלתי־תלויות אפינית.
2. לכל $i\in[k]$,
$$a_i\notin \operatorname{aff}(a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_k).$$
3. $\dim\operatorname{aff}(a_1,\dots,a_k)=k-1$.
4. $a_1-a_k,\dots,a_{k-1}-a_k$ בלתי־תלויים לינארית.
5. 
$$(a_1,1),\dots,(a_k,1)$$
בלתי־תלויים לינארית.

הוכחה. **1 גורר 5:** אם $(a_1,1),\dots,(a_k,1)$ תלויים לינארית, ניתן לכתוב

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i(a_1,1)=0$$

כאשר $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\neq 0$. אז

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i a_i=0$$

וגם

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i=0\ .$$

בסתירה לאי־תלות אפינית.

**5 גורר 1:** בדומה לכיוון הקודם.

**1 גורר 2:** נניח בשלילה שמתקיים $a_k \in \text{aff}(a_1, \dots, a_{k-1})$. אז

$$a_k = \sum_{i \in [k-1]} \lambda_i a_i$$

וגם

$$\sum_{i \in [k-1]} \lambda_i = 1 .$$

אז

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{k-1} a_{k-1} - a_k = 0$$

וסכום המקדמים הוא

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

בסתירה לתלות האפינית של $a_1, \dots, a_k$.

**2 גורר 1:** באופן דומה לכיוון הקודם. ■

**הגדרה 1.2.5.** בהינתן $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ו־$\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר את העל־מישור

$$H_{u,\alpha} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \cdot u = \alpha\right\}$$

כאשר

$$x \cdot u = \sum_{i \in [d]} x_i u_i .$$

נגדיר גם את חצאי המרחב הסגורים

$$H^+_{u,\alpha} \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \cdot u \geq u\right\}$$
$$H^-_{u,\alpha} \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \cdot u \leq u\right\} .$$

**משפט 1.2.6 (משפט ההפרדה *I*).** תהי $K \subseteq \mathbb{R}^d$ קמורה וסגורה ותהי $p \in \mathbb{R}^d \setminus K$. קיימים $u, \alpha$ כך ש־$p \in H^+_{u,\alpha}$ ו־$K \subseteq H^-_{u,\alpha}$.

הוכחה. תהי $q \in K$ כך ש־
$\|p - q\| = \min\{\|x - p\| \mid x \in K\}$ .

יהי $H$ העל־מישור הניצב ל־$p - q$ ועובר דרך $q$. מפורשות, $H = H_{p-q,(p-q)\cdot q}$. ראשית, $p \in H^+_{p-q,(p-q)\cdot q}$ כי $p \cdot (p - q) > (p - q) \cdot q$ כי $\|p - q\|^2 > 0$.
תהי $x \in K$. לכל $t \in (0, 1)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\|p - q\|^2 &\leq \|(1 - t)\, q + tx - p\|^2 \\ &= \|(p - q) - t\,(x - q)\|^2 \\ &= \|p - q\|^2 - 2t\,(p - q) \cdot (x - q) + t^2 \|x - q\|^2 .\end{aligned}$$

לכן

$$2t\,(p - q) \cdot (x - q) \leq t^2 \|x - q\|^2 .$$

נצמצם $t$ ונשאיף $t \to \infty$. נקבל $(p - q)(x - q) \leq 0$ כלומר $(p - q) \cdot x \leq (p - q) \cdot q$ ולכן $x \in H^-_{p-q,(p-q)\cdot q}$.■

**משפט 1.2.7 (משפט ההפרדה *II*).** תהי $K$ קומפקטית קמורה ב־$\mathbb{R}^d$ ותהי $L$ קמורה וסגורה ב־$\mathbb{R}^d$. אם $K \cap L = \varnothing$ קיים $H_{u,\alpha}$ עבורו $K \subseteq H^+_{u,\alpha}$ וגם $L \subseteq H^-_{u,\alpha}$.

הוכחה. נעיין בקבוצה $M = K - L$. זאת קבוצה קמורה וסגורה: אם $x_i - y_i \xrightarrow{i\to\infty} z$ יש תת־סדרה $x_{i_k} \xrightarrow{k\to\infty} x \in K$. אז $y_{i_k} \xrightarrow{k\to\infty} x - z$. $L$ סגורה ולכן $x - z \in L$. אז $z = x - (x - z) \in M$.
$K \cap L = \varnothing$ לכן $0 \notin M$, ולכן אפשר להפריד בין $0$ ל־$M$ על ידי על מישור $H_{u,\alpha}$, כלומר

$$0 \in H^+_{u,\alpha}$$
$$M = K - L \subseteq H^-_{u,\alpha} .$$

לכן $0 \geq u \cdot 0 = 0$ ומאידך $u \cdot (x - y) \leq \alpha \leq 0$ לכל $x \in K, y \in L$. לכן $u \cdot x \leq u \cdot y$ לכל $x \in K, y \in L$. ניקח $\beta = \max_{x \in K} u \cdot x$. אז לכל $x \in K$ מתקיים $u \cdot x \leq \beta$ ולכל $y \in L$ מתקיים $u \cdot y \geq \beta$. ■

### 1.2.3 משפטי קרתיאודורי ורדון

**משפט 1.2.8 (קרתיאודורי).** תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ותהי $p \in \text{conv}(A)$. קיימים $a_1, \ldots, a_{d+1} \in A$ כך שמתקיים $p \in \text{conv}(a_1, \ldots, a_{d+1})$.

הוכחה. יהי $m \in \mathbb{N}_+$ מינימלי כך שקיימים $a_1, \ldots, a_m \in A$ עבורם $p \in \text{conv}(a_1, \ldots, a_m)$. צריך להראות שמתקיים $m \le d+1$. נניח בשלילה שמתקיים $m \ge d+2$. תהי

$$p = \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i$$

כאשר $\sum_{i \in [m]} \lambda_i = 1$ וגם $\lambda_i \ge 0$ לכל $i \in [m]$. נעיין ב־$m$ הוקטורים $(a_1, 1), \ldots, (a_m, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$. יש כאן $d+2$ וקטורים, לכן קיימת תלות לינארית

$$\sum_{i \in [m]} \alpha_i (a_i, 1) = 0 .$$

בפרט

$$\sum_{i \in [m]} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i \in [m]} \alpha_i a_i = 0$$

ובה"כ קיים $\alpha_i > 0$. תהי

$$I = \{i \in [m] \mid \alpha_i > 0\} .$$

יהי

$$\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = \min\left\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \;\middle|\; i \in I\right\} .$$

אז

$$\begin{aligned}\sum_{i \in [m]} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \cdot \alpha_i\right) a_i &= \sum_{i \in [n]} \lambda_i a_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \sum_{i \in [m]} \alpha_i a_i \\ &= \sum_{i \in [m]} \lambda_i a_i \\ &= p\end{aligned} .$$

מצד שני, זהו צירוף קמור: מתקיים

$$\sum_{i \in [m]} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i\right) = \sum_{i \in [m]} \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \sum_{i \in [m]} \alpha_i = 0 .$$

אם $\alpha_i \ge 0$ מתקיים

$$\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = \left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\right) \alpha_i \ge 0$$

ואם $\alpha_i \le 0$ מתקיים

$$\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i \ge \lambda_i > 0 .$$

אבל, זהו צירוף של $m-1$ איברים כי

$$\lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_{i_0} = 0 .$$

■

במקרה $d = 2$ משפט רדון אומר שאם $A \subseteq \mathbb{R}^2$ מקיימת $|A| \ge 4$, ניתן לכתוב $A = B \sqcup C$ כאשר

$$\text{conv}\, B \cap \text{conv}\, C \neq \varnothing .$$

**משפט 1.2.9 (רדון).** אם $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^d$ כאשר $m \ge d+2$, יש חלוקה $I \sqcup J \supseteq \{1, \ldots, m\}$ כך שמתקיים

$$\text{conv}\{a_i\}_{i \in I} \cap \text{conv}\{a_j\}_{j \in J} \neq \varnothing .$$

הוכחה. נעיין ב־$(a_1,1),\dots,(a_m,1)\in\mathbb{R}^{d+1}$. מכיוון שהנחנו $m\geq d+2$ קיימת תלות לינארית לא טריוויאלית

$$\sum_{i\in[m]}\lambda_i(a_i,1)=0\,.$$

אז

$$\sum_{i\in[m]}\lambda_i a_i=0,\quad \sum_{i\in[m]}\lambda_i=0\,.$$

נסמן

$$I\coloneqq\{i\in[m]\mid\lambda_i>0\}$$
$$J\coloneqq\{i\in[m]\mid\lambda_i<0\}$$

וגם

$$\lambda\coloneqq\sum_{i\in I}\lambda_i=-\sum_{j\in J}\lambda_j\,.$$

אז

$$\sum_{i\in I}\frac{\lambda_i}{\lambda}=-\sum_{j\in J}\frac{\lambda_j}{\lambda}=1\,.$$

כמו כן,

$$\sum_{i\in I}\lambda_i a_i=-\sum_{j\in J}\lambda_j a_j$$

לכן

$$\sum_{i\in I}\frac{\lambda_i}{\lambda}a_i=-\sum_{j\in J}\frac{\lambda_j}{\lambda}a_j\in\operatorname{conv}(a_i)_{i\in I}\cap\operatorname{conv}(a_j)_{j\in J}\,.$$
■

**הערה 1.2.10.** $d+2$ הוא המספר המינימלי שמבטיח תוצאה כזאת, מפני שאם ניקח $a_1,\dots,a_{d+1}$ כוקטורים בלתי־תלויים אפינית, לכל נקודה ב־$\operatorname{conv}(a_1,\dots,a_{d+1})$ יש הצגה יחידה כצירוף קמור של $a_1,\dots,a_{d+1}$. למשל עבור $0,e_1,\dots,e_d$ אין חלוקת רדון.

### 1.2.4 משפט הלי הכללי

**משפט 1.2.11 (הלי).** תהי $\mathcal{K}$ משפחה סופית של קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ כך שלכל $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{K}$ המקיימת $|G|\leq d+1$ מתקיים

$$\bigcap_{K\in\mathcal{G}}K\neq\varnothing\,.$$

אז

$$\bigcap_{K\in\mathcal{K}}K\neq\varnothing\,.$$

הוכחה. נניח בשלילה שלא כל הקבוצות ב־$\mathcal{K}$ נחתכות. נבחר $m\in\mathbb{N}_+$ מינימלי כך שקיימות $K_1,\dots,K_m\in\mathcal{K}$ עבורן

$$\bigcap_{i\in[m]}K_i=\varnothing\,.$$

נרצה להראות שגם

$$\bigcap_{i\in[m]}K_i\neq\varnothing\,,$$

מה שיתן סתירה.
מההנחה נובע $m\geq d+2$. לכל $j\in[m]$ נבחר

$$x_j\in\bigcap_{i\in[m]\setminus\{j\}}K_i\,.$$

לפי משפט רדון, יש חלוקה $[m] = J_1 \sqcup J_2$ עבורה

$$\operatorname{conv}(x_j)_{j\in J_1} \cap \operatorname{conv}(x_j)_{j\in J_2} \neq \varnothing .$$

תהי $p \in \operatorname{conv}(x_j)_{j\in J_1} \cap \operatorname{conv}(x_j)_{j\in J_2}$, נראה שבעצם $p \in \bigcap_{i\in[m]} K_i$.
יהי $i \in [m]$. נניח כי $i \in J_2$ ויהי $j \in J_1$. אז

$$x_j \in \bigcap_{t\in[m]\setminus\{j\}} K_t \subseteq \bigcap_{t\in J_2} K_t \subseteq K_i .$$

אז

$$p \in \operatorname{conv}(x_j)_{j\in J_1} \subseteq K_i$$

מקמירות. מאידך, אם $i \in J_1, j \in J_2$ נקבל

$$x_j \in \bigcap_{t\in[m]\setminus\{j\}} K_t \subseteq \bigcap_{t\in J_1} K_t \subseteq K_i .$$

אז

$$p \in \operatorname{conv}(x_j)_{j\in J_2} \subseteq K_i .$$

בסך הכל, $p \in \bigcap_{i\in[m]} K_i$, בסתירה למינימליות $m$. ■

### 1.2.5 שימושים למשפט הלי

תהיינה קבוצות סופיות $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$. נרצה לשאול מתי יש $H_{u,\alpha}$ עבורו $A \in \operatorname{int} H^+_{u,\alpha}, B \subseteq \operatorname{int} H^-_{u,\alpha}$. המשפט הבא מתאר איך ניתן לבדוק זאת.

**משפט 1.2.12 (קירכנברגר).** אם לכל $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B$ כך שמתקיים $|A_0| + |B_0| \leq d+2$ אפשר להפריד בין $A_0, B_0$ על ידי על מישור, אפשר להפריד גם את $A, B$ על ידי על מישור.

הוכחה. לכל $a \in A$ נגדיר

$$K_a \coloneqq \left\{(u,\alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \;\middle|\; u \cdot a > \alpha\right\} .$$

נוכל לחשוב על זה כעל חצי־המישור

$$\left\{(u,\alpha) \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; (u,\alpha)\cdot(a,-1) > 0\right\} .$$

לכל $b \in B$ נגדיר באופן דומה

$$\begin{aligned} L_b &\coloneqq \left\{(v,\beta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \;\middle|\; v \cdot b < \beta\right\} \\ &= \left\{(v,\beta) \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; (v,\beta)(b,-1) < 0\right\} . \end{aligned}$$

$K_a, L_b$ קמורות כפנים של חצי־מישור. מתקיים

$$\bigcap_{a\in A} K_a \neq \varnothing$$

כי $(0,-1)$ נמצא בחיתוך. באופן דומה

$$(0,1) \in \bigcap_{b\in B} L_b$$

אז גם חיתוך זה אינו ריק.
נניח כי $|A_0| + |B_0| \leq d+2$ ונטען כי

$$\bigcap_{a\in A_0} K_a \cap \bigcap_{b\in B_0} L_b \neq \varnothing .$$

לפי ההנחה, קיים על מישור $H_{u,\alpha}$ שמפריד בין $A_0, B_0$. אז $a \cdot u > \alpha$ וגם $b \cdot u < \alpha$ לכל $a \in A_0, b \in B_0$. כלומר, $(u,\alpha) \in K_a$ לכל $a \in A_0$ וגם $(u,\alpha) \in L_b$ לכל $b \in B_0$.
לפי משפט הלי נובע כי

$$\bigcap_{a\in A} K_a \cap \bigcap_{b\in B} L_b \neq \varnothing .$$

ניקח $(u,\alpha)$ בחיתוך ונקבל

$$\begin{aligned} A &\subseteq \operatorname{int} H^+_{u,\alpha} \\ B &\subseteq \operatorname{int} H^-_{u,\alpha} . \end{aligned}$$

■

**משפט 1.2.13 (רדון).** תהי $C \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה ומדידה לבג. קיימת נקודה $p \in \mathbb{R}^d$ כך שלכל על מישור $H_{u,\alpha}$ דרך $p$ מתקיים

$$\mu\left(H_{u,\alpha}^{+} \cap C\right) \geq \frac{1}{d+1}\mu\left(C\right).$$

הוכחה. ראשית נעיר שמשפט הלי גורר שאם $\left(K_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ קמורות וקומפקטיות ב־$\mathbb{R}^d$ כך שכל $d+1$ מהן נחתכות אז $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha \neq \varnothing$. זה נובע מכך שאם כל תת־אוסף סופי של קבוצות קומפקטיות נחתך, כולן נחתכות.
יהי $0 < \varepsilon < \frac{1}{d+1}$. לכל $u \in S^{d-1}$ ולכל $t \in \mathbb{R}$ נעיין בחיתוך $C \cap H_{u,t}^{+}$. מתקיים

$$\lim_{t\to-\infty} \mu\left(C \cap H_{u,t}^{+}\right) = \mu\left(C\right)$$
$$\lim_{t\to\infty} \mu\left(C \cap H_{u,t}^{+}\right) = 0.$$

לכן מרציפות המידה יש $\lambda\left(u\right) \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$\mu\left(C \cap H_{u,\lambda(u)}^{+}\right) = \left(\frac{d}{d+1} + \varepsilon\right)\mu\left(C\right).$$

יהי $B$ כדור שמכיל את $C$. אז $K_u \coloneqq H_{u,\lambda(u)}^{+} \cap C$ קמורה. נראה שאם $u_1, \ldots, u_{d+1} \in S^{d-1}$ אז

$$K_{u_1} \cap \ldots \cap K_{u_{d+1}} \neq \varnothing.$$

לכל $i \in [d+1]$ מתקיים

$$\left(\frac{d}{d+1} + \varepsilon\right)\mu\left(C\right) \leq \mu\left(H_{u_i,\lambda(u_i)}^{+} \cap C\right)$$

ולכן

$$\left(\frac{1}{d+1} - \varepsilon\right)\mu\left(A\right) \geq \mu\left(H_{u_i,\lambda(u_i)\cap C}^{-}\right).$$

אם $\bigcap_{i\in[d+1]} K_{u_i} = \varnothing$ אז

$$\bigcap_{i\in[d+1]} H_{u_i,\lambda(u_i)}^{+} \cap B = \varnothing$$

ולכן

$$\bigcup_{i\in[d+1]} B \cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-} = B \cap \bigcup_{i\in[d+1]} H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-} = B.$$

אז

$$C = \bigcup_{i\in[d+1]} C \cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-}$$

בסתירה לכך שמתקיים

$$\sum_{i\in[d+1]} \mu\left(C \cap H_{u_i,\lambda(u_i)}^{-}\right) \leq (d+1)\left(\frac{1}{d+1} - \varepsilon\right)\mu\left(C\right) < \mu\left(C\right).$$

לכן $\bigcap_{i\in[d+1]} K_{u_i} \neq \varnothing$ לכל $u_1, \ldots, u_{d+1} \in S^d$, ולפי הלי $\bigcap_{u\in S^{d-1}} K_u \neq \varnothing$. ניקח $p \in \bigcap_{u\in S^{d-1}} K_u$. אם נעביר על מישור $H_{u,\alpha}$ שכיוונו $u \in S^{d-1}$ דרך $p$, אז

$$\left(H_{u,\alpha}^{-} \cap C\right) \geq \left(\frac{1}{d+1} - \varepsilon\right)\mu\left(C\right).$$

נקבל $H_{u,\alpha}^{+} \subseteq H_{u,\lambda(u)}^{+}$ ואז

$$\begin{aligned}\mu\left(H_{u,\alpha}^{+} \cap C\right) &\leq \mu\left(H_{u,\lambda(u)}^{+} \cap C\right)\\ &= \left(\frac{d}{d+1} + \varepsilon\right)\mu\left(C\right).\end{aligned}$$

לכן

$$H^-_{u,\lambda(u)} \cap C \subseteq H^-_{u,\alpha} \cap C$$

ו־

$$\left(\frac{1}{d+1} - \varepsilon\right) \mu(C) = \mu\left(H_{u,\lambda(u)} \cap C\right) \le \mu\left(H^-_{u,\alpha} \cap C\right).$$

עתה $p := \lim_{z\to\infty} \frac{p_z}{z}$ תקיים את הדרוש. ■

למשפט הלי יש גרסה שקולה עבור משפחה לאו דווקא סופית של קבוצות קומפקטיות.

**משפט 1.2.14 (הלי).** תהי $\mathcal{K}$ משפחה של קבוצות קומפקטיות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. אם כל $d+1$ קבוצות מ־$\mathcal{K}$ נחתכות, כל הקבוצות נחתכות.

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ונניח שמתקיים $\text{diam}(A) = 1$. נרצה לחשוב מהו הרדיוס המינימלי של כדור $B(p,r)$ המכיל את $A$. במקרה $d=1$ אפשר להסתכל על $A$ כמוכלת בקטע מאורך $1$ ואז $r_1 = \frac{1}{2}$ הרדיוס המינימלי. במקרה $d=2$ נוכל להסתכל על הדוגמה של משולש שווה צלעות. אז הרדיוס המינימלי הוא

$$r_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

נעיין במקרה הכללי ברדיוס המינימלי עבור הסימפלקס ה־$d$ מימדי הרגולרי. יהי

$$H := \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; \sum_{i\in[d+1]} x_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \cong \mathbb{R}^d.$$

ב־$H$ נעיין בסימפלקס שקודקודיו הם $\frac{e_i}{\sqrt{2}} \in H$ עבור $i \in [d+1]$. מתקיים

$$\left|\frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right| = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

מרכז הכובד של הסימפלקס הוא

$$p = \frac{1}{d+1} \sum_{i\in[d+1]} \frac{e_i}{\sqrt{2}}.$$

אז

$$\frac{e_j}{\sqrt{2}} - p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{e_1}{d+1} + \ldots + \frac{-e_{j-1}}{d+1} + \frac{d}{d+1}e_j + \frac{-e_{j+1}}{d+1} + \ldots + \frac{-e_{d+1}}{d+1}\right)$$

ואז

$$\begin{aligned}\left|\frac{e_j}{\sqrt{2}} - p\right|^2 &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{d+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{d+1}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+1}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d+1}^2 + \frac{d^2}{(d+1)^2}\right) \\ &= \frac{d}{2(d+1)}\end{aligned}.$$

נקבל כי $r_d := \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$ רדיוס הכדור החוסם של הסימפלקס הרגולרי באורך צלע $1$ ב־$\mathbb{R}^d$.

משפט יונג אומר לנו בעצם מה הרדיוס עבור קבוצה $A$ כללית.

**משפט 1.2.15 (יונג).** תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מקוטר $1$. קיימת $p \in \mathbb{R}^d$ עבורה $A \subseteq B(p, r_d)$ כאשר $r_d := \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$.

הוכחה. נעיין באוסף הכדורים $\{B(a, r_d)\}_{a\in A}$. די להראות כי $\bigcap_{a\in A} B(a, r_d) \neq \varnothing$.

ממשפט הלי נובע שדי להראות שאם $a_1, \ldots, a_{d+1} \in A$ אז $\bigcap_{i\in[d+1]} B(a_i, r_d) \neq \varnothing$. כלומר, די להראות שכל $d+1$ נקודות מ־$A$ מוכלות בכדור ברדיוס $r_d$.

יהי $B(p,r)$ כדור עם רדיוס מינימלי המכיל את $a_1, \ldots, a_{d+1}$. בלי הגבלת הכלליות יהיו $a_1, \ldots, a_m$ הנקודות הנמצאות על שפת $B(p,r)$.

נטען כי $p \in \text{conv}\{a_1, \ldots, a_m\}$. אחרת, $p \notin K := \text{conv}\{a_1, \ldots, a_m\}$ ולכן יש על־מישור $H$ שמפריד בין $K, p$. אם נזיז את מרכז הכדור מעט לכיוון הניצב ל־$h$ נקבל שכל $a_1, \ldots, a_{d+1}$ בפנים של כדור מרדיוס $r$, בסתירה למינימליות.

נראה עתה כי $r \leq r_d$ ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $p = 0$. אז יש $\lambda \geq 0$ עבורם

$$\sum_{i\in[m]} \lambda_i a_i = 0$$
$$\sum_{i\in[m]} \lambda_i = 1 \;.$$

נקבל

$$\begin{aligned} 1 &\geq |a_i - a_j|^2 \\ &= |a_i|^2 + |a_j|^2 - 2a_i \cdot a_j \\ &= r^2 + r^2 - 2a_i \cdot a_j \end{aligned}$$

ולכן $2a_i \cdot a_j \geq 2r^2 - 1$. אז

$$\begin{aligned} 0 &= \left|\sum_{i\in[m]} \lambda_i a_i\right|^2 \\ &= \sum_{i\in[m]} \lambda_i^2 |a_i|^2 + 2\sum_{1\leq 1<j\leq m} \lambda_i\lambda_j a_i \cdot a_j \\ &\geq \sum_{i\in[m]} \lambda_i^2 r^2 + \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i\lambda_j \\ &= r^2\left(\sum_{i\in[m]} \lambda_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i\lambda_j\right) - \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i\lambda_j \\ &= r^2\left(\sum_{i\in[m]} \lambda_i\right)^2 - \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i\lambda_j \\ &= r^2 - \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i\lambda_j \;. \end{aligned}$$

נקבל

$$r^2 \leq \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i\lambda_j \leq \max_{\substack{x_i\geq 0 \\ \sum x_i = 1}} \left(\sum_{1\leq i<j\leq m} x_i x_j\right).$$

אם נראה שהמקסימום מתקבל כאשר כל ה-$x_i$ בביטוי האחרון שווים נקבל

$$\binom{m}{2}\frac{1}{m^2} = \frac{m(m-1)}{2m^2} = \frac{m-1}{2m} \leq \frac{d}{2d+1}$$

ואז $r \leq \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}} = r_d$. אכן,

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq i<j\leq m} x_i x_j &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i\in[m]} x_i\right)^2 - \sum_{i\in[m]} x_i^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i\in[m]} x_i^2\right) \end{aligned}$$

כאשר

$$\frac{1}{m}\sum_{i\in[m]} x_i^2 \geq \left(\frac{1}{m}\sum_{i\in[m]} x_i\right)^2$$

מקמירות של $x \mapsto x^2$. אז $\sum_{i\in[m]} x_i^2 \geq \frac{1}{m}$ ונקבל כי

$$\sum_{1\leq i<j\leq m} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i\in[m]} x_i^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}\frac{m-1}{m} \;.$$

■

## 1.3 גרסאות מודרניות של משפטי קרתיאודורי והלי

### 1.3.1 משפט קרתיאודורי הצבעוני

**משפט 1.3.1 (קרתיאודורי).** יהיו $A_1,\dots,A_{d+1}\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהי $p\in\bigcap_{i\in[d+1]}\operatorname{conv}(A_i)$. אז יש נקודות $a_i\in A_i$ לכל $i\in[d+1]$ עבורן $p\in\operatorname{conv}(a_1,\dots,a_{d+1})$.

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $|A_i|<\infty$ (לפי 1.2.8 אפשר לקחת $|A_i|\le d+1$). יהיו $a_1\in A_1,\dots,a_{d+1}\in A_{d+1}$ עבורן $\rho:=d(p,\operatorname{conv}\{a_1,\dots,a_{d+1}\})$ מינימלי. עלינו להראות שמתקיים $\rho=0$. נניח בשלילה ש־$\rho>0$. תהי $q\in\operatorname{conv}\{a_i\mid i\in[d+1]\}$ כך ש־

$$|p-q|=\min\{\|x-p\|\mid x\in\operatorname{conv}\{a_i\mid i\in[d+1]\}\}\,.$$

אז

$$\operatorname{conv}\{a_i\mid i\in[d+1]\}\subseteq H^-_{p-q,(p-q)\cdot q}=:H$$

כפי שראינו בחישוב קודם. אז

$$q\in H.$$

ממשפט 1.2.8 נובע ש־$q$ בקמור של $d$ נקודות מבין $a_1,\dots,a_{d+1}$, ובלי הגבלת הכלליות נניח כי $q\in\operatorname{conv}\{a_1,\dots,a_d\}$. אנו יודעים כי $p\in A_{d+1}$. לכן $A_{d+1}\not\subseteq H$. לכן קיימת נקודה $a_{d+1}\in A_{d+1}\setminus H$. אז

$$\left(a'_{d+1}-q\right)\cdot(p-q)>0\,.$$

נראה שמתקיים

$$d\left(p,\operatorname{conv}\left\{a_1,\dots,a_d,a'_{d+1}\right\}\right)<\rho.$$

נעיין בנקודה $(1-t)\,q+ta'_{d+1}$ עבור $t$ קטן. מתקיים

$$\begin{aligned}\left|p-\left((1-t)\,q+ta'_{d+1}\right)\right|^2&=\left|(p-q)-t\left(a'_{d+1}-q\right)\right|^2\\&=|p-q|^2-2t\,(p-q)\cdot\left(a'_{d+1}-q\right)+t^2\left|a'_{d+1}-q\right|^2\end{aligned}\,.$$

כעת, אם $t\in(0,1)$ קטן מספיק אז

$$2t\,(p-q)\cdot\left(a'_{d+1}-q\right)>t\left|a'_{d+1}-q\right|$$

ולכן

$$\left|p-\left((1-t)\,q+ta'_{d+1}\right)\right|^2<\rho^2$$

בסתירה למינימליות של $\{a_1,\dots,a_{d+1}\}$. ■

### 1.3.2 מסקנות מקרתיאודורי צבעוני

**משפט 1.3.2 (הלי צבעוני).** תהיינה $\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_{d+1}$ משפחות של קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. נניח שלכל

$$(K_1,\dots,K_{d+1})\in\prod_{i\in[d+1]}\mathcal{K}_i$$

מתקיים

$$\bigcap_{i\in[d+1]}K_i\neq\varnothing\,.$$

אז יש $j\in[d+1]$ כך שכל הקבוצות ב־$\mathcal{K}_j$ נחתכות.

**משפט 1.3.3 (טברברג).** תהי $A\subseteq\mathbb{R}^d$ מגודל $(d+1)(k-1)+1$. אז אפשר לכתוב $A=\bigsqcup_{i\in[k]}A_k$ כאשר

$$\bigcap_{i\in[k]}\operatorname{conv}(A_i)\neq\varnothing\,.$$

### 1.3.3 קרתיאודורי עבור חרוטים

**הגדרה 1.3.4.** עבור $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ נגדיר את ה־*positive span* של $A$ על ידי

$$\mathsf{pos}\left(A\right) \coloneqq \left\{\sum_{i\in[m]} \lambda_i a_i \;\middle|\; a_i \in A,\, \lambda_i \geq 0\right\}.$$

**הגדרה 1.3.5.** קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ נקראת חרוט קמור שקודקודו 0 אם $C$ קמורה ולכל $c \in C$ גם $\lambda c \in C$ לכל $\lambda \geq 0$.

**הערה 1.3.6.** לכל $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ הקבוצה $\mathsf{pos}\left(A\right)$ היא חרוט קמור ב־$\mathbb{R}^{d+1}$.

**משפט 1.3.7 (קריתיאודורי עבור קמור חיובי).** תהי $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ותהי $p \in \mathsf{pos}\left(A\right)$. אזי יש $A_0 \subseteq A$ עם $|A_0| \leq d+1$ כך שמתקיים $p \in \mathsf{pos}\left(A_0\right)$.

הוכחה. בדיוק כמו בהוכחת משפט קרתיאודורי, נבחר $A_0 = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq A$ מינימלית עבורה $p \in \mathsf{pos}\left\{u_1, \dots, u_n\right\}$. נכתוב

$$p = \sum_{i\in[n]} \lambda_i u_i$$

עם $\lambda_i \geq 0$, ונראה כי $n \leq d+1$. אחרת, $n \geq d+2$ ולכן יש צירוף לינארי

$$\sum_{i\in[n]} \mu_i u_i = 0$$

שאינו טריוויאלי. תהי

$$\theta \coloneqq \min\left\{\frac{\lambda_i}{\mu_i} \;\middle|\; \mu_i > 0\right\}$$

(בלי הגבלת הכלליות קיימים $\mu_i > 0$) ויהי $i_0 \in [n]$ עבורו $\theta = \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}$. אז

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i\in[n]} \lambda_i u_i \\ &= \sum_{i\in[n]} \left(\lambda_i - \theta\mu_i\right) u_i \\ &= \sum_{i\neq i_0} \left(\lambda_i - \theta\mu_i\right) u_i + \cancelto{0}{\left(\lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}\mu_{i_0}\right)} u_{i_0} \end{aligned}$$

וקיבלנו את $p$ כיצירוף חיובי של פחות מה־$u_i$. ∎

**משפט 1.3.8 (קרתיאודורי החיובי עבור קמור חיובי).** תהיינה $A_1, \dots, A_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ותהי $p \in \bigcap_{i\in[d+1]} \mathsf{pos}\left(A_i\right)$. אז יש $a_i \in A_i$ לכל $i \in [d+1]$ עבורן $p \in \mathsf{pos}\left\{a_1, \dots, a_{d+1}\right\}$.

**למה 1.3.9.** נניח כי $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^{d+1}$. נגיד שהן מקיימות את תנאי 1 אם $\left(\vec{0}, -1\right) \in \mathsf{pos}\left\{u_1, \dots, u_m\right\}$. יהיו $H_{u_i,0}$ על־מישורים הניצבים ל־$u_i$ ונסתכל על חצאי המרחבים $H_{u_i,0}^{+}$. נגיד שה־$u_i$ מקיימות את תנאי 2 אם

$$\bigcap_{i\in[m]} H_{u_i,0}^{+} \cap \mathbb{R}^d \times \{1\} = \varnothing .$$

נטען כי תנאים 1 ו־2 שקולים.

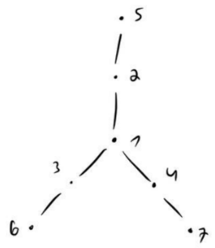
הוכחה.
- נניח שמתקיים תנאי 1 ויהיו $\lambda_i \geq 0$ עבורן

$$\left(\vec{0}, -1\right) = \sum_{i\in[m]} \lambda_i u_i .$$

נניח כי $z \in \bigcap_{i\in[m]} H_{u_i,0}^{+}$ ונראה כי הקואורדינטה האחרונה של $z$ אי־חיובית. אכן,

$$\begin{aligned} -z_{d+1} &= \left(\vec{0}, -1\right) \cdot z \\ &= \sum_{i\in[m]} \lambda_i \left(u_i \cdot z\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

כלומר $z_{d+1} \leq 0$ ובפרט $z \notin \mathbb{R}^d \times \{1\}$.




איור 1.1: קומפלקס שלא ניתן לקבל כעצב של קבוצת קטעים במישור.

- נניח שתנאי 1 אינו מתקיים ונראה כי תנאי 2 אינו מתקיים. נניח כי

$$\left(\vec{0},-1\right)\notin C:=\text{pos}\left\{u_1,\ldots,u_m\right\}.$$

נפריד את $C$ מ־$\left(\vec{0},-1\right)$ על ידי על מישור $H_{w,\alpha}$. כלומר,

$$\forall z\in C:\ (0,-1)\cdot w<\alpha\leq z\cdot w.$$

מתקיים $0\in C$ לכן $\alpha\leq 0\cdot w=0$ ונקבל $\alpha\leq 0$. אם עבור $i\in[m]$ כלשהו מתקיים $u_i\cdot w<0$ נקבל

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda u_i)\cdot w=-\infty<\alpha$$

בסתירה כי $\lambda u_i\in C$ לכל $\lambda\geq 0$.
לכן $\alpha\leq 0$ וגם $u_i\cdot w\geq 0$ לכל $i\in[m]$. נקבל

$$-w_{d+1}=\left(\vec{0},-1\right)\cdot w<\alpha\leq 0$$

ולכן $w_{d+1}>0$. אז $w\in H^+_{u_i,0}$ ואז

$$\frac{w}{w_{d+1}}\in\bigcap_{i\in[m]}H^+_{u_i,0}\cap\mathbb{R}^d\times\{1\}.$$

לכן תנאי 2 אינו מתקיים. ■

**הגדרה 1.3.10 (פיאון קמור).** פיאון קמור הוא קמור של מספר סופי של נקודות.

**הגדרה 1.3.11 (עצב).** בהינתן $K=\{K_1,\ldots,K_m\}$ משפחה של קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ נגדיר את העצב *(nerve)* של $\mathcal{K}$ על ידי

$$N(\mathcal{K}):=\left\{I\subseteq[m]\ \middle|\ \bigcap_{i\in I}K_i\neq\varnothing\right\}.$$

**הערה 1.3.12.** העצב של $\mathcal{K}$ מתאר את החיתוכים של קבוצות ב־$\mathcal{K}$. זה קומפלקס סימפליציאלי: אם $\sigma\in N(\mathcal{K})$ וגם $\tau\subseteq\sigma$ אז $\tau\in N(\mathcal{K})$. העצב של $N(\mathcal{K})$ שקול הומוטופית ל־$\bigcup_{K\in\mathcal{K}}K$, אבל נדון בכך בהמשך.

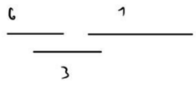
**משפט 1.3.13 (הלי במונחי העצב).** תהי $\mathcal{K}=\{K_1,\ldots,K_m\}$ משפחת קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. אם $N(\mathcal{K})$ מכיל את כל $\sigma\subseteq[m]$ המקיימת $|\sigma|\leq d+1$ אז $N(K)=\mathcal{P}([m])$ אוסף כל התת־קבוצות של $[m]$.

**טענה 1.3.14.** יהיו $K_1,\ldots,K_m$ קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$ ותהי $\mathcal{K}:=\{K_1,\ldots,K_m\}$. אז קיימים פיאונים $P_1,\ldots,P_m$ עבורם $P_i\subseteq K_i$ לכל $i\in[m]$ וגם

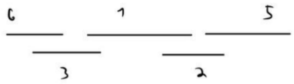
$$M(P)=N(\mathcal{K})$$

כאשר $\mathcal{P}:=\{P_1,\ldots,P_m\}$.

**הערה 1.3.15.** שאלה מעניינת היא האם אפשר לאפיין את העצבים האפשריים של אוספי קבוצות קמורות ב־$\mathbb{R}^d$. בעוד זאת שאלה קשה באופן כללי, יש איפיון במקרה $d=1$. למשל, אנו יודעים שאת הגרף באיור 1.1 אי אפשר לקבל כעצב ב־$\mathbb{R}$.
יהי $\mathcal{K}=\{I_i\mid i\in[7]\}$ אוסף של שבעה קטעים ב־$\mathbb{R}$. במקרה זה, $I_6$ חותך את $I_3$ שחותך את $I_1$, אבל $I_1$ לא חותך את $I_6$ אז נקבל קטעים כמו באיור 1.2. כעת $I_2$ חותך את $I_1$ ואת $I_5$ שזר ל־$I_1$ לכן נקבל קטעים כמו באיור 1.3. אז $I_4$ שחותך את $I_1$ חייב להיות בין $I_3,I_2$ אבל אז $I_4\subseteq I_!$ ולכן $I_7$ שחותך את $I_4$ חותך גם את $I_1$. ראו איור 1.4.



איור 1.2



איור 1.3

הוכחה. לכל $\sigma \in N(\mathcal{K})$ נבחר $p_\sigma \in \bigcap_{i\in\sigma} K_i$. נגדיר

$$P_i \coloneqq \text{conv}\left\{p_\sigma \mid i \in \sigma \in N(\mathcal{K})\right\}.$$

נשים לב שאם $i \in \sigma$ אז $p_\sigma \in K_i$. לכן $P_i \subseteq K_i$. לכן $N(\mathcal{P}) \subseteq N(\mathcal{K})$. מאידך, אם $\sigma \in N(\mathcal{K})$ אז $p_\sigma \in \bigcap_{i\in\sigma} P_i$ ולכן $\sigma \in N(\mathcal{P})$. ■

**מסקנה 1.3.16.** תהיינה $K_1, \ldots, K_m$ קומפקטיות קמורות עבורן $\bigcap_{i\in[m]} K_i = \varnothing$. אזי קיימים חצאי מרחבים $D_1, \ldots, D_m$ כך שמתקיים $K_i \subseteq D_i$ לכל $i \in [m]$, וגם $\bigcap_{i\in[m]} D_i = \varnothing$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על $\ell$ שקיימים $D_1, \ldots, D_\ell$ עבורם $K_i \subseteq D_i$ וגם

$$D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+1} \cap \ldots \cap K_m = \varnothing.$$

נניח שהוכחנו עבור $\ell < m$ ונוכיח עבור $\ell + 1$ (זה כולל את מקרה הבסיס). אז

$$D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+1} \cap \ldots \cap K_m = \varnothing$$

כלומר

$$K_{\ell+1} \cap (D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \ldots \cap K_m) = \varnothing$$

ולכן קיים $H^+_{u,\alpha}$ עבורו $K_{\ell+1} \subseteq H^+_{,\alpha}$ וגם

$$D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \ldots \cap K_m \subseteq \text{int} H^-_{u,\alpha}.$$

כלומר,

$$D_1 \cap \ldots \cap D_\ell \cap K_{\ell+2} \cap \ldots \cap K_m \cap H^+_{u,\alpha} = \varnothing.$$

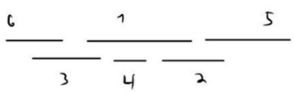
ניקח $D_{\ell+1} \coloneqq H^+_{,\alpha}$. ■

הוכחה (1.3.2). בלי הגבלת הכלליות, מטענה 1.3.14 אפשר להניח ש־$K_{i,j}$ קומפקטיות לכל $K_{i,j} \in \mathcal{K}_i$. לפי 1.3.16 קיימים חצאי מרחבים $D_{i,j}$ כך ש־$K_{i,j} \subseteq D_{i,j}$ לכל $K_{i,j} \in \mathcal{K}_i$ וכך שמתקיים $\bigcap_j D_{i,j} = \varnothing$. נציג

$$D_{i,j} = H^+_{u_{i,j},\alpha_{i,j}} = \left\{v \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; v \cdot u_{i,j} \geq \alpha_{i,j}\right\}.$$

יהי $w_{i,j} = (u_{i,j}, -\alpha_{i,j}) \in \mathbb{R}^{d+1}$.
נשים לב שמתקיים

$$\bigcap_j H^+_{w_{i,j},0} \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{1\}\right) = \varnothing$$



איור 1.4

אם $v=(v',v_{d+1})$ בחיתוך הנ"ל אז $w_{i,j}\cdot(v',v_{d+1})\geq 0$ ומצד שני $v_{d+1}=1$. אז

$$v'\cdot u_{i,j}+(-\alpha_{i,j})\cdot 1\geq 0$$

ולכן $v'\cdot u_{i,j}\geq\alpha_{i,j}$ לכל $j$. אז $v'\in D_{i,j}$ לכל $j$, בסתירה לכך שמתקיים

$$\bigcap_j D_{i,j}=\varnothing.$$

לכן, לפי 1.3.9 מתקיים

$$\left(\vec{0},-1\right)\in\text{pos}\left\{w_{i,j}\right\}_j$$

לכל $i\in[d+1]$. לפי קרתיאודורי הצבעוני עבור pos קיימת בחירה $w_{1,j_1},w_{2,j_2},\dots,w_{d+1,j_{d+1}}$ כך שמתקיים

$$\left(\vec{0},-1\right)\in\text{pos}\left\{w_{i,j_i}\right\}_{i\in[d+1]}.$$

לפי 1.3.9 נקבל כי

$$\bigcap_{i\in[d+1]}H^+_{w_{i,j_i},0}\cap\left(\mathbb{R}^d\times\{1\}\right)=\varnothing.$$

אז

$$\bigcap_{i\in[d+1]}K_{i,j_i}\subseteq\bigcap_{i\in[d+1]}D_{i,j_i}=f\bigcap_{i\in[d+1]}H^+_{u_{i,j_i},\alpha_{i,j_i}}=\varnothing$$

כיוון שאם $z\in\bigcap_{i\in[d]}H^+_{u_{i,j_i},\alpha_{i,j_i}}$ אז $z\cdot u_{i,j_i}\geq\alpha_{i,j_i}$ לכל $i$ ואז

$$\begin{aligned}(z,1)\cdot w_{i,j_i}&=(z,1)\cdot(u_{i,j_i},-\alpha_{i,j_i})\\&=z\cdot u_{i,j_i}-\alpha_{i,j_i}>0\end{aligned}$$

ונקבל כי

$$(z,1)\in\bigcap_{i\in[d+1]}H^+_{w_{i,j_i}}\cap\left(\mathbb{R}^d\times\{1\}\right)$$

בסתירה לביטוי קודם. קיבלנו

$$\bigcap_{i\in[d+1]}K_{i,j_i}=\varnothing$$

בסתירה להנחה. ■

**משפט 1.3.17 (רדון).** תהיינה $u_1,\dots,u_{d+2}\in\mathbb{R}^d$. קיימת חלוקה $[d+2]=I_1\sqcup I_2$ עבורה

$$\text{conv}\left\{u_i\right\}_{i\in I_1}\cap\text{conv}\left\{u_i\right\}_{i\in I_2}=\varnothing.$$

נשאל מה מספר הנקודות המינימלי $m$ כך שלכל $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^2$ תהיה חלוקה $[m]=I_1\sqcup I_2\sqcup I_3$ עבורה

$$\bigcap_{j\in[3]}\text{conv}\left\{u_i\right\}_{i\in I_j}\neq\varnothing.$$

**משפט 1.3.18 (טברברג).** אם $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^d$ וגם $m\geq(d+1)(k-1)+1$ אז יש חלוקה $[m]=\bigsqcup_{j\in[k]}I_j$ וגם

$$\bigcap_{j\in[k]}\text{conv}\left\{u_i\right\}_{i\in I_j}\neq\varnothing.$$

**הערה 1.3.19.** על ידי הסתכלות על $d+1$ קבוצות בגודל $k-1$ של נקודות קרובות (או שוות זאת לזאת, לא הנחנו שה־$u_i$ שונות) ב־$\mathbb{R}^d$ אפשר לראות שהחסם התחתון במשפט טברברג אופטימלי, כיוון שבמקרה זה אין חלוקת $k$־טברברג.

בהוכחת משפט טברברג נרצה לעבוד במרחב $(k-1)(d+1)$־מימדי. נזכיר כי $M_{k\times\ell}(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^k\otimes\mathbb{R}^\ell$ מרחב ממימד $k\ell$. בהינתן $u\in\mathbb{R}^k,v\in\mathbb{R}^\ell$ נגדיר

$$u\otimes v\coloneqq uv^T=\begin{pmatrix}u_1v_1&\cdots&u_\ell v_\ell\\\vdots&&\vdots\\u_kv_1&\cdots&u_kv_\ell\end{pmatrix}.$$

**טענה 1.3.20.** נניח כי $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{R}^{k-1}$ מקיימים

$$\sum_{i\in[k]} v_i = 0$$

ושזאת התלות היחידה ביניהם. למשל אפשר לקחת $v_1,\dots,v_{k-1}$ בסיס ל-$\mathbb{R}^{k-1}$ ו־$v_k=-(v_1+\ldots+v_{k-1})$ (וזה בעצם המקרה הכללי). נניח גם כי $u_1,\dots,u_k\in\mathbb{R}^N$ מקיימים

$$\sum_{i\in[k]} u_i\otimes v_i = 0 \in \mathbb{R}^N\otimes\mathbb{R}^{(k-1)}\cong M_{N\times(k-1)}.$$

אז $u_i=u_j$ לכל $i,j\in[k]$.

**הערה 1.3.21.** ברור שאם $u_i=u_j$ לכל $i,j\in[k]$ אז

$$\sum_{i\in[k]} u_i\otimes v_i = u\otimes\sum_{i\in[k]} v_i = u\otimes 0 = 0.$$

הוכחה. יהי $z\in\mathbb{R}^N$. מתקיים

$$0 = z^T\cdot\left(\sum_{i\in[k]} u_i v_i^T\right) = \sum_{i\in[k]}\left(z^T\cdot u_i\right)\cdot v_i^T$$

לכן $z^T\cdot u_i = z^T\cdot u_j$ לכל $i,j\in[k]$. זה נכון לכל $z\in\mathbb{R}^N$ לכן $z^T(u_i-u_j)=0$ לכל $z\in\mathbb{R}^n$ ולכן $u_i=u_j$. ■

הוכחה (1.3.18). על ידי הוספת רכיב לכל $u_i$ אפשר להניח כי $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^{d+1}$ וגם ש־$u_i\cdot\mathbb{1}=1$ כאשר $\mathbb{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{d+1}$. יהיו $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{R}^{k-1}$ עבורם $\sum_{i\in[k]} v_i=0$ וזאת התלות היחידה ביניהם. נשתמש בקרתיאודורי הצבעוני עבור $\mathbb{R}^{(d+1)(k-1)}\cong M_{(d+1)\times(k-1)}(\mathbb{R})$. לכל $i\in[m]$ תהי

$$A_i=\{u_i\otimes v_j \mid j\in[k]\}\subseteq\mathbb{R}^{(d+1)(k-1)}.$$

מתקיים $0\in\bigcap_{i\in[m]}\mathrm{conv}(A_i)$ כי

$$0=u_i\otimes 0 = u_i\otimes\left(\frac{1}{k}\sum_{j\in[k]} v_j\right)=\frac{1}{k}\sum_{j\in[k]} u_i\otimes v_j.$$

לפי קרתיאודורי הצבעוני, לכל $i\in[m]$ קיים $j_i\in[k]$ כך שמתקיים

$$0\in\mathrm{conv}\{u_i\otimes v_{j_i}\mid i\in[m]\}.$$

אז יש $\lambda_i\geq 0$ המקיימות

$$\sum_{i\in[m]}\lambda_i = 1$$

$$\sum_{i\in[m]}\lambda_i\left(u_i\otimes v_{j_i}\right)=0.$$

אבל אם נסמן

$$I_j\coloneqq\{i\in[m]\mid j_i=j\}$$

נקבל

$$\sum_{j\in[k]}\left(\sum_{i\in I_j}\lambda_i u_i\right)\otimes v_j=\sum_{i\in[m]}\lambda_i\left(u_i\otimes v_{j_i}\right)=0.$$

לפי הטענה, קיים $w \in \mathbb{R}^d$ כך שלכל $j \in [k]$ מתקיים

$$.w = \sum_{i \in I_j} \lambda_i u_i$$

אז

$$w \cdot \mathbb{1} = \sum_{i \in I_j} \lambda_i \cdot (u_i \cdot \mathbb{1}) = \sum_{i \in I_j} \lambda_i$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{w}{w \cdot \mathbb{1}} &= \sum_{i \in I_j} \frac{\lambda_i}{w \cdot \mathbb{1}} \cdot u_i \\ &= \sum_{i \in I_j} \frac{\lambda_i}{\sum_{t \in I_j} \lambda_t} u_i \\ &\in \text{conv}\{u_i\}_{i \in I_j} \end{aligned}$$

כנדרש. ■

### 1.3.4 משפט הנקודה הכבדה של Barany

**משפט 1.3.22 (Barany).** לכל $d \geq 1$ יש קבוע $C_d > 0$ כך שלכל $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$ יש $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{d+1}$ עבורה $|\mathcal{F}| > C_d \binom{n}{d+1}$ וכך שקיימת

$$.p \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \text{conv}\{u_i \mid i \in F\}$$

הוכחה. נגדיר את $k$ להיות השלם המקסימלי עבורו $n \leq (k-1)(d+1)+1$. כלומר, $.k = \left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor + 1$
נניח כי $.k \geq d+1$. לפי משפט 1.3.18 נחלק את $[n]$ לקבוצות זרות $I_1, \ldots, I_k$ כך שיש

$$.p \in \bigcap_{j \in [k]} \text{conv}\{u_i\}_{i \in I_j}$$

לכל בחירה $\alpha_1 < \ldots < \alpha_{d+1}$ של איברים ב־$[k]$ מתקיים

$$.p \in \bigcap_{t \in [d+1]} \text{conv}\{u_i \mid i \in I_{\alpha_t}\}$$

לפי קרתיאודורי הצבעוני יש $d+1$ נקודות, אחת מכל $\{u_i\}_{i \in I_{\alpha_t}}$ כך ש־$p$ בקמור שלהן. נסמן את קבוצת האינדקסים של נקודות אלו ב־$F_\alpha$ כאשר $.\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1})$ אם $\alpha \neq \beta$ נקבל $F_\alpha \neq F_\beta$ ולכן

$$\mathcal{F} := \{F_\alpha \mid 1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_{d+1} \leq k\}$$

קבוצה מגודל $\binom{k}{d+1}$. אז

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}| &= \binom{k}{d+1} \\
&= \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor + 1}{d+1} \\
&\geq \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor}{d+1} \\
&\geq \frac{\left(\left\lfloor \frac{n-1}{d+1} \right\rfloor - d + 1\right)^{d+1}}{(d+1)!} \\
&\geq \frac{\left(\frac{n-1}{d+1} - d\right)^{d+1}}{(d+1)!} \\
&= \frac{\left(n - d^2 - d - 1\right)^{d+1}}{(d+1)^{d+1}(d+1)!} \\
&\geq \frac{n^{d+1} - (d+1)\left(d^2+d+1\right)n^d}{(d+1)^{d+1}(d+1)1} \\
&= \frac{1}{(d+1)^{d+1}}\left[\frac{n^{d+1}}{(d+1)!} - \frac{(d+1)\left(d^2+d+1\right)}{(d+1)!}n^d\right] \\
&\geq \frac{1}{(d+1)^{d+1}}\left(\binom{n}{d+1} - \lambda_d n^d\right) \\
&\geq \frac{1}{2(d+1)^{d+1}}\binom{n}{d+1}
\end{aligned}$$

עבור קבוע $\lambda_d$ וכאשר האי־שוויון האחרון נכון עבור $n$ גדול מספיק. נבחר $C_d = \frac{1}{2(d+1)^{d+1}}$. ∎

**הערה 1.3.23.** בהינתן $d$ אפשר לשאול מה הסופרמום $\theta_d$ של ערכים $\theta$ עבורם לכל $n$ נקודות ב־$\mathbb{R}^d$ יש $p$ נקודות בלפחות $\theta \cdot \binom{n}{d+1}$ מהסימפלקסים על ידי הנקודות.
עבור $d \in \{1,2\}$ ידועים הערכים של $\theta_d$. עבור $d > 2$ זאת בעיה פתוחה.

### 1.3.5 רשתות $\varepsilon$ חלשות

תהי $\mathcal{K}$ משפחה של קבוצות מדידות במרחב הסתברות $(\Omega, B, \mu)$. נעיין בקבוצה

$$A_\varepsilon \coloneqq \{K \in \mathcal{K} \mid \mu(K) \geq \varepsilon\}.$$

נרצה למצוא $S \subseteq \Omega$ מגודל מינימלי כך ש־$S \cap K \neq \varnothing$ לכל $K \in A_\varepsilon$.

**דוגמה 1.3.24.** יהי $\Omega = \mathbb{R}$ עם מידת הסתברות $\mu$ המתוארת באופן הבא. יהיו $u_1 \leq \ldots \leq u_n$ נקודות ב־$\mathbb{R}$. נגדיר

$$\mu \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} \delta_{u_i}$$

כאשר $\delta_{u_i}$ מידת דיראק של $u_i$. נשאל האם יש $S \subseteq \Omega$ סופית מגודל קטן מ־$f(\varepsilon)$ עבור $f(\varepsilon)$ קבוע כלשהו התלוי באפסילון וכך שכל $K \in A_\varepsilon$ חותכת את $S$.
תהי

$$S = \left\{ u_{i\lfloor \varepsilon n \rfloor} \;\middle|\; i \in \left[\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor\right] \right\}.$$

אז לכל קטע $K$ עם $\mu(K) \geq \varepsilon$ מתקיים $K \cap S \neq \varnothing$. אבל גם $|S| \leq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$.

**משפט 1.3.25.** תהא $\mu$ מידת הסתברות דיסקרטית על $\mathbb{R}^d$ הנקבעת על ידי $\{u_i\}_{i\in[n]} \subseteq \mathbb{R}^d$ ו־

$$\mu(A) = \frac{1}{n}\left|\{i \mid u_i \in A\}\right|.$$

תהא $\mathcal{K}$ משפחת הקבוצות הקמורות ב־$\mathbb{R}^d$. אז יש $S \subseteq \mathbb{R}^d$ עם $|S| \leq \lambda_d \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d+1}$ עבורה $S \cap K \neq \varnothing$ לכל $K$ המקיימת $\mu(K) \geq \varepsilon$.

הוכחה. לכל $K \in \mathcal{K}$ עבורה $\mu(K) \geq \varepsilon$ תהא $I_K := \{i \mid u_i \in K\}$. אז $|I_k| \geq \varepsilon n$. לפי משפט הנקודה הכבדה, יש $\mathcal{F}_K \subseteq \binom{I_k}{d+1}$ עם

$$|\mathcal{F}_K| \geq c_d \cdot \binom{|I_k|}{d+1} \geq c_d \binom{\varepsilon n}{d+1}$$

וכך שקיימת

$$p_K \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}_K} \text{conv}\{u_i\}_{i \in F}.$$

נבחר משפחה מקסימלית $K_1, \ldots, K_r$ מתוך ה־$K \in \mathcal{K}$ המקיימות $\mu(K) \geq \varepsilon$ כך ש־$\mathcal{F}_{K_1}, \ldots, \mathcal{F}_{K_r}$ זרות בזוגות. אז

1. $S =:= \{p_{K_1}, \ldots, p_{K_r}\}$ מקיימת $S \cap K \neq \varnothing$ לכל $K \in \mathcal{K}$ עבורה $\mu(K) \geq \varepsilon$:
תהא $K$ כזאת. אז ממקסימליות $K_1, \ldots, K_r$ נובע שקיים $i \in [r]$ עבורו $\mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K_i} \neq \varnothing$. אז קיימת $F \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K_i}$. כעת, $\{u_j \mid j \in F\} \subseteq K \cap K_i$. לכן

$$p_{K_i} \in \text{conv}\{u_j \mid j \in F\} \subseteq K.$$

2. נותר להראות ש־$r$ תלוי ב־$\varepsilon$ בלבד. מתקיים

$$\bigsqcup_{i \in [r]} \mathcal{F}_{K_i} \subseteq \binom{[n]}{d+1}$$

לכן

$$\sum_{i \in [r]} |\mathcal{F}_{K_i}| leq \binom{n}{d+1}.$$

אבל

$$r \cdot c_d \binom{\lfloor \varepsilon \rfloor n}{d+1} \leq \sum_{i \in [r]} |\mathcal{F}_{K_i}| \leq \binom{n}{d+1}$$

ולכן

$$\begin{aligned} r &\leq \frac{\binom{n}{d+1}}{c_d \binom{\lfloor \varepsilon \rfloor n}{d+1}} \\ &\leq \frac{\frac{n^{d+1}}{(d+1)!}}{c \quad d} \frac{\left((\varepsilon n - d)^{d+1}\right)}{(d+1)!} \\ &= \frac{1}{c_d} \left(\frac{n}{\varepsilon n - d}\right)^{d+1} \\ &\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{c_d} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d+1}. \end{aligned}$$

■

# פרק 2

# פיאונים