Introdução a Robótica

Tarefa Final

Alan Maia - Eduardo Abreu

Departamento de Engenharia Teleinformática
Universidade Federal do Ceará

8 de abril de 2021

Sumário

1. Primeira Parte
   - Transformação de velocidades entre frames
   - Jacobiano 3x3 de um robô planar de 3 elos
   - Calcular velocidade de um robô
2. Segunda Parte
   - Cálculo dos coeficientes da trajetória de junta
   - Geração de trajetória
   - Posições na forma cartesiana
3. Código

Cálculo da transformação de velocidades

- Vamos usar uma representação de $\nu_A^A = [\dot{x}_A^A \; \dot{y}_A^A \; 0 \; 0 \; 0 \; \dot{\theta}_A^A]^T$, onde $\nu = [\upsilon \; \omega]^T$
- A partir da equação 5.100 do livro sabemos que: ${}^B\nu_B = {}^B_AT_v \; {}^A\nu_A$, onde:

  ${}^B_AT_v = \begin{bmatrix} {}^B_AR & -{}^B_AR \; {}^AP_{BORG}\times \\ 0 & {}^B_AR \end{bmatrix}$ sendo $P\times = \begin{bmatrix} 0 & -p_x & p_y \\ p_x & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix}$
- Com essas informações só precisamos extrair ${}^B_AT_v$ a partir de ${}^A_BT$, o que é trivial já que a partir desse último podemos obter todos os termos necessário para obter o primeiro.
- Agora, vejamos o código.

Jacobiano 3x3

- Como temos um robô planar RRR com 3 elos, vamos considerar as seguintes matrizes de transformação: ${}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c1 & s1 & 0 & 0 \\ -s1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c2 & s2 & 0 & l_1 \\ -s2 & c2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c3 & s3 & 0 & l_2 \\ -s3 & c3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Aplicando iterativamente a fórmula da velocidade $({}^{i+1}\nu i + 1 \;=\; {}^{i+1}R_i({}^{i}\nu_i +^{i} \omega_i \times^{i} P_{i+1}))$

Jacobiano 3x3

$$V_3^3 = \begin{bmatrix} c3 & s3 & 0 & 0 \\ -s3 & c3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \;\; l_1 c_2 \dot{\theta} 1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \;\; 0]^T$$

$$V_3^3 = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 c_3 + l_1 c_2 \dot{\theta}_1 s_3 + l_2 s_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -l_1 s_2 s_3 \dot{\theta}_1 + l_1 c_2 c_3 \dot{\theta}_1 + l_2 c_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Agora, aplicando o Jacobiano teremos:

$$^3J(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 c_3 + l_1 c_2 s_3 + l_2 s_3 & l_2 s_3 & 0 \\ -l_1 s_2 s_3 + l_1 c_2 c_3 + l_2 c_3 & l_2 s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sabendo que $l_1 = l_2 = 0.5m$ podemos obter essa matriz passando os valores de θ_2 e θ_3, vejamos no código

Calcular velocidade da ponta

- Vamos descobrir a posição do pulso do robô em relação a estação usando ${}^{S}_{T}T \; {}^{W}_{T}T^{-1} = {}^{S}_{W}T$
- Montar a matriz de transformação usando a posição do pulso em relação a estação
- Aplicar a cinemática inversa em ${}^{S}_{W}T$ com $\mathrm{L1} = \mathrm{L2} = 0.5$
- ${}^{S}_{W}T = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.25 & 0 & 0.45 \\ -0.25 & 0.96 & 0 & -0.47 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Utilizar o Jacobiano para montar o vetor velocidade $\nu^{W} = [\upsilon \; \omega]$ onde υ é o jacobiano e $\omega^{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$

Transformação da velocidade do pulso para a ponta

- Agora iremos transformar a velocidade em relação ao pulso em velocidade da ponta da ferramenta usando a transformação de velocidades da primeira questão
- Vamos usar a matriz de transformação $T_T^W = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0.1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Assim teremos ${}^T\nu_T = \begin{bmatrix} -4.71234552 \\ -0.35368518 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 22 \end{bmatrix}$ e ${}^T\nu_T = \begin{bmatrix} -5.04764913 \\ -0.1400274 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 22 \end{bmatrix}$

Disposição do robô RRR

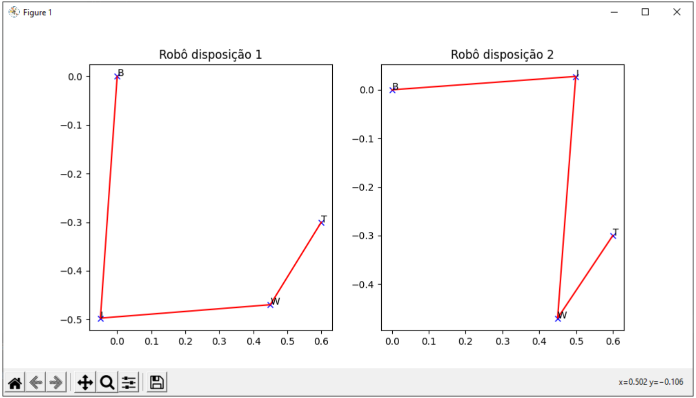

Figura: Posição do robô para cada θ da cinemática inversa

Cálculo dos coeficientes da trajetória de junta

- Primeiros criamos um procedimento que recebe θ_0, θ_f, $\dot{\theta}_0$, $\dot{\theta}_f$ e t_f
- Porém, precisamos ser capaz de receber pontos do sistema de referência T e S no formato $[x\ y\ \phi]$, para isso, criamos outro procedimento que vai receber pontos no sistema T e S, a transformação do pulso para a ponta da ferramenta, ou seja, ${}^{W}_{T}T$, o tempo total da trajetória e os valores de l_1 e l_2 do robô.
- Com esses parâmetros podemos calcular a cinemática inversa do robô e conseguir os ângulos de juntas para obter os coeficientes.
- Inicialmente, decidimos usar a heurísticas da inclinação da reta entre os pontos para, porém estávamos obtendo valores descontínuos para as juntas, então decidimos atribuir velocidades igual a 0 nos pontos de passagem.
- Vamos ver no código como funcionam os procedimentos.

Geração de trajetória

- Esse ponto é bem simples, criamos três procedimentos, cada um para calcular posição, velocidade e aceleração respectivamente.
- Cada procedimento receberá os coeficientes da trajetória das juntas, a frequência de atualização de trajetória e o tempo total do movimento do robô.
- Tendo os coeficientes, basta calcular esses valores utilizando as equações a seguir
- Para a posição:
$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \tag{1}$$
- Para a velocidade:
$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \tag{2}$$
- Para a aceleração:
$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3 t \tag{3}$$

Posições na forma cartesiana

- Para resolver esse problema vamos utilizar os procedimentos criados anteriormente.
- Temos os pontos inicial e final da trajetória, que são iguais, e mais dois pontos de passagens, totalizando 3 seções de trajetórias:
  $(x_1 \ y_1 \ \phi_1) = [0,758 \ 0,173 \ 0,0]$
  $(x_2 \ y_2 \ \phi_2) = [0,6 \ -0,3 \ 45,0]$
  $(x_3 \ y_3 \ \phi_3) = [-0,4 \ 0,3 \ 120,0]$
  $(x_4 \ y_4 \ \phi_4) = [0,758 \ 0,173 \ 0,0]$
- Para cada ponto, teremos $\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]$ que é posição de cada junta, dessa forma iremos obter 9 grupos de coeficientes, 3 para cada seção do movimento.
- Após obter os coeficientes, podemos calcular as posições, velocidades e aceleração usando a equação 1, 2 e 3 respectivamente.

Resultados de posições, velocidades e acelerações de juntas

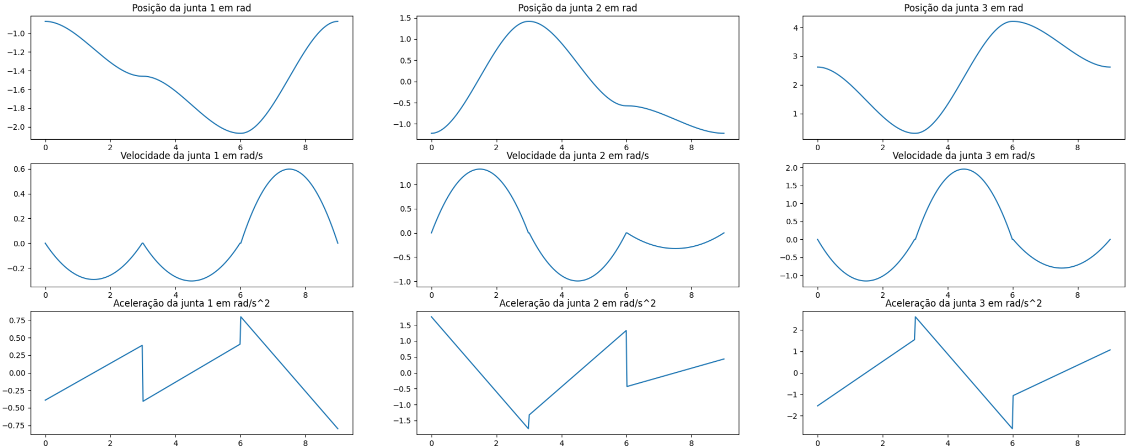

Figura: Valores de posição, velocidade e aceleração das juntas do robô

Obtendo posição no sistema cartesiano

- Para obter as posições no sistema cartesiano basta fazer a cinemática direta para cada instante de tempo, já que temos os valores de posição de junta.
- Relembrando a cinemática direta, iremos fazer:
  ${}^0_4T = {}^0_1T \; {}^1_2T \; {}^2_3T \; {}^3_4T$
- Podemos obter as matrizes de transformação a partir dos ângulos das juntas obtidos na trajetória e os valores de l_1, l_2 e l_3

Resultados de posições no sistema cartesiano

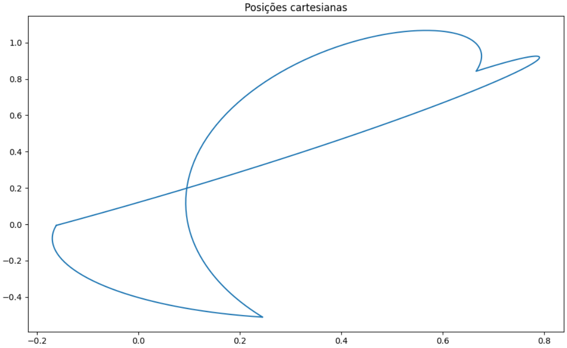

Figura: Valores de posição cartesiano do robô

Código

- Todo código usado nesse trabalho pode ser encontrado em: `https://github.com/alanAval/robotica`

Obrigado!