

Ejercicio 1

a) Calcule los coeficientes A, B, C de One-sided Dtz y diga por qué es de orden $O(h^2)$

$$U_i' = CU_i + BU_{i+1} + AU_{i+2} \dots (1)$$

usando Series de Taylor evaluamos alrededor de x_0 , $x_0+h = x_{i+1}$
 $x_0+2h = x_{i+2}$

$$U_{i+1} = U_i + hU_i' + \frac{(h)^2}{2!} U_i'' + \frac{(h)^3}{3!} U_i''' + O(h^3) \dots (2)$$

$$U_{i+2} = U_i + (2h)U_i' + \frac{(2h)^2}{2!} U_i'' + \frac{(2h)^3}{3!} U_i''' + O(h^3) \dots (3)$$

Substituímos en (1)

$$U_i' = C U_i + B(U_i + hU_i' + \frac{h^2}{2} U_i'') + A(U_i + 2hU_i' + \frac{4h^2}{2} U_i'') \dots (4)$$

factorizando

$$U_i' = (C+B+A) U_i + (B+2A) h U_i' + (\frac{B}{2} + 2A) h^2 U_i'' \dots (5)$$

Desarrollamos la matriz

$$\begin{matrix} C+B+A=0 \\ B+2A=1/h \\ 2B+4A=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = -\frac{3}{2h}$$

$$B = \frac{2}{h}$$

$$A = -\frac{3}{2h}$$

$$U_i' = -\frac{3}{2h} U_i + \frac{2}{h} U_{i+1} - \frac{3}{2h} U_{i+2} \dots (6)$$

El orden de la función está determinado por el grado de la derivada más alta, que en este caso es la 2da derivada.

b) Calcule los coeficientes A, B, C y D de One-sided D3 y diga por qué

$$f'_i = D U_{i-1} + C U_i + B U_{i+1} + A U_{i+2} \quad (1)$$

Expandimos por series de Taylor

$$\begin{cases} U_{i-1} = U_i + (-h)U'_i + \frac{(-h)^2 U''_i}{2!} + \frac{(-h)^3}{3!} + O(h^3) \quad (2) \\ U_{i+1} = U_i + h(U'_i) + \frac{h^2 U''_i}{2!} - \frac{h^3}{3!} \quad (3) \\ U_{i+2} = U_i + 2hU'_i + \frac{4h^2 U''_i}{2!} + \frac{8h^3}{3!} \quad (4) \end{cases}$$

Sustituimos en (1)

$$(5) \quad \dots f'_i = D \left(U_i + hU'_i + \frac{h^2 U''_i}{2} - \frac{h^3}{6} \right) + C U_i + B \left(U_i + hU'_i + \frac{h^2 U''_i}{2} + \frac{h^3}{6} \right) + A \left(U_i + 2hU'_i + 2h^2 U''_i + \frac{8h^3}{6} \right)$$

$$f'_i = (D+C+B+A)U_i + (-D+B+2A)hU'_i + \left(\frac{D}{2} + \frac{B}{2} + 2A \right)U''_i + \left(-\frac{D}{6} + \frac{B}{6} + \frac{8A}{6} \right)U'''_i h^3 \dots \quad (6)$$

Desarrollamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ C \\ B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3h \\ -1/2h \\ 1/h \\ 1/6h \end{pmatrix}$$

$$f'_i = \frac{-2U_{i-1} - 3U_i + 6U_{i+1} - U_{i+2}}{6} \dots (7)$$

El orden de la función está determinado por el grado de la derivada mas alta que en este caso es la 3ra derivada.

c) Explique como se obtiene la fórmula de Centered- D_0^2

Para el caso de Centered- D_0^2 , se toman 2 puntos, un punto en $i-1$, otro punto en $i+1$ y el punto i . Mediante series de Taylor se obtiene la expansión para χ_0 , $\chi_0+h = \chi_{i+1}$, $\chi_0-h = \chi_{i-1}$. Dichas expansiones se sustituirán en

$$U_i' = AU_{i-1} + BU_i + CU_{i+1}.$$

Al sustituir construimos la matriz para resolver el sistema de ecuaciones y obtener los coeficientes y los sustituimos en U_i' .