



Universidad Nacional
de San Martín

Sistema heterodino para medición de capacidades

Autor:

BUEP, ALAN ARIEL

Tutor:

Dr. Ing.PLATINO, MANUEL

Co-Tutor:

Ing.GARCÍA REDONDO,
MANUEL

*Informe de Proyecto Final Integrador para optar por el título de Ingeniero
Electrónico desarrollado en*

Escuela de Ciencia y Tecnología

22 de mayo de 2025

Declaración de Autoría

Yo, BUEP, ALAN ARIEL, declaro que esta Tesis, titulada, «Sistema heterodino para medición de capacidades» y el trabajo aquí presentado son de mi autoría. Confirmando que:

- Este trabajo fue realizado en su totalidad en este grupo de investigación en esta Universidad.
- Ninguna parte de esta Tesis fue previamente presentada para calificar por algún grado en esta u otra Universidad.
- En los casos en que he consultado el trabajo publicado por otros, esto siempre se atribuye claramente.
- Donde he citado el trabajo de otros, siempre se presenta la fuente. Con la excepción de tales citas, esta Tesis es enteramente resultado de mi propio trabajo.
- He reconocido debidamente todas las principales fuentes de ayuda.
- En los casos en que la Tesis se basa en el trabajo realizado por mí mismo conjuntamente con otros, he dejado claro exactamente lo que han hecho los demás y lo que yo mismo he aportado.

Firma:

Fecha:

<<>>

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN MARTÍN

Resumen

Escuela de Ciencia y Tecnología

Ingeniero Electrónico

Sistema heterodino para medición de capacidades

por BUEP, ALAN ARIEL

En este trabajo se presenta el diseño y ensamblado de un circuito heterodino para medir capacidades, alcanzando una incertidumbre de medición de ± 60 fF con un control mínimo de temperatura, siempre que se caracterice el inductor y la inductancia parásita con una tolerancia de ± 100 pH. Como referencia, se tomó como modelo un circuito heterodino previo utilizado para hallar la capacidad de muestras líquidas y, a partir de ello, poder determinar la permitividad estática en mezclas binarias líquidas con el objetivo de estudiar interacciones moleculares. En este circuito modelo se obtenía la capacidad de una muestra con una incertidumbre de ± 3 fF, utilizando conexiones y osciladores térmicamente regulados en ± 0.5 K lo que permitía estudiar interacciones moleculares. La capacidad era hallada con un capacitor variable y figuras de Lissajous en un osciloscopio.

El circuito diseñado, desarrollado y construido para este trabajo mejoró la adquisición de datos al ser ingresados directamente a la computadora, facilitando su procesamiento y análisis. A diferencia del circuito modelo, éste se basa en la medición de frecuencia en lugar de una medición directa de capacidad. Utilizando dos capacitores patrón para caracterizar el circuito se ha logrado obtener una incertidumbre de ± 8 pF, la cual está mayormente influenciada por el inductor utilizado. Como la incertidumbre asociada a las variaciones de frecuencia fue de solo ± 40 fF la precisión del circuito depende mayormente de la caracterización del inductor y la inductancia parásita. Para que este circuito sea útil para hallar permitividades bajas la inductancia total del mismo debe tener una tolerancia de ± 100 pH. Además, es posible mejorar las mediciones realizando un control de temperatura del circuito y la muestra, permitiendo la adquisición prolongada de datos para determinar estadísticamente la incertidumbre y así mejorar la precisión del equipo. Realizando el análisis de la varianza de Allan se comprobó que las mediciones realizadas con el circuito se vuelven más estables a medida que aumenta el intervalo de tiempo.

Este equipo fue ensamblado con componentes económicos y disponibles en el país, haciéndolo una solución práctica y accesible para diversas aplicaciones científicas e industriales.

Agradecimientos

A mis seres queridos,
por su apoyo inquebrantable.

BUEP, ALAN ARIEL

Deseo expresar mi sincero agradecimiento al Dr. Ing. Manuel Platino, mi tutor principal, y al Ing. Manuel García, mi co-tutor, por la inestimable orientación, consejos y dedicación que me brindaron a lo largo de este proyecto.

También quiero extender mi gratitud a la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM) por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios en este prestigioso instituto. Su compromiso con la excelencia académica y los recursos proporcionados fueron esenciales para mi desarrollo académico y profesional.

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a la Comisión Nacional de Energía Atómica por brindar sus herramientas y al Instituto Nacional de Tecnología Industrial, en particular al jefe del Departamento de Metrología Cuántica el Dr. Mariano Real y a todos los integrantes del grupo, por permitirme utilizar su laboratorio para determinar la precisión y exactitud del equipo. Su colaboración fue fundamental para enriquecer este proyecto.

Agradezco a mi familia y amigos por su gran apoyo durante este viaje académico. Sus palabras de aliento y paciencia fueron un faro de luz en momentos.

Además, quiero expresar un agradecimiento especial a mi padre, quien me proporcionó el circuito modelo que utilicé como base para este trabajo. Su apoyo y generosidad fueron cruciales para que pudiera llevar a cabo este proyecto con éxito.

También quiero expresar mi sincero agradecimiento a mi madre quien siempre me alentó y colaboró de diversas maneras en la realización de esta tesis.

Finalmente, dedico este logro a todos aquellos que han influido en mi vida de alguna manera, ya sea a través de la enseñanza, la amistad o la inspiración. Este logro no habría sido posible sin sus contribuciones.

¡Muchas gracias a todos!

BUEP, ALAN ARIEL

Índice general

Declaración de Autoría	III
Resumen	VII
Agradecimientos	IX
1 Introducción	1
1. Motivación	3
2. Circuito Modelo	3
3. Alcance	5
2 Cálculos	7
3 Simulación	15
4 Esquemático	23
5 Programas del microcontrolador y procesamiento de señal	27
6 Mediciones y Resultados	33
7 Conclusiones	47
8 Anexos	51

Índice de figuras

1.1. Circuito heterodino modelo.	4
1.2. Curva de relajación dieléctrica.	5
2.1. Diseño interno del SA612.	9
2.2. Oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612.	10
2.3. Circuito esquemático del oscilador Colpitts	11
2.4. Curva I_c vs V_{ce} del transistor BC548B.	12
2.5. Circuito esquemático del oscilador Colpitts con capacidades parásitas.	13
3.1. Circuito esquemático LTSpice de la configuración del oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612.	17
3.2. Señal obtenida en la simulación del oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612 en dominio temporal.	17
3.3. Señal obtenida en la simulación del oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612 en el dominio de frecuencias.	18
3.4. Señal de salida obtenida en la simulación del oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612 en el dominio temporal.	18
3.5. Señal de salida obtenida en la simulación del oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612 en el dominio de frecuencias.	18
3.6. Señal obtenida en la simulación del oscilador Colpitts, dominio temporal.	19
3.7. Señal obtenida en la simulación del oscilador Colpitts, dominio de frecuencias.	19
3.8. Circuito esquemático LTSpice.	20
3.9. Señales obtenidas en la simulación del circuito, dominio temporal.	20
3.10. FFT de la señal de salida del mezclador resultante de la diferencia entre las señales de entrada en la simulación.	21
4.1. Circuito esquemático realizado en software de diseño de PCB.	25
5.1. Diagrama en bloques del programa de la ESP32.	30
5.2. Diagrama en bloques Python.	31
5.3. Gráfico realizado en tiempo real en Python.	32
6.1. Oscilador Colpitts, señal en pata 1 del mezclador. Dominio temporal.	35
6.2. Oscilador Colpitts, señal en pata 1 del mezclador. Espectro de frecuencias.	35
6.3. AD9833, señal en pata 6 del mezclador. Dominio temporal.	36
6.4. AD9833, señal en pata 6 del mezclador. Espectro de frecuencias.	36
6.5. Señal de salida tomada en pata 4 del mezclador. Dominio temporal.	37
6.6. Señal de salida tomada en pata 4 del mezclador. Espectro de frecuencias.	37
6.7. Análisis de estabilidad durante 6 horas.	38
6.8. Gráfico de la varianza de Allan.	38
6.9. Análisis de frecuencia inicial en 10 pruebas.	40
6.10. Medición capacitor patrón 39P.	41
6.11. Medición capacitor patrón 220K.	41
6.12. Segunda medición del capacitor patrón 39P.	45
6.13. Segunda medición del capacitor patrón 220K.	46

8.1. Placa prototipo.	53
8.2. Diseño desarrollado en software de desarrollo de PCB, capa inferior. .	54
8.3. Diseño desarrollado en software de desarrollo de PCB, capa inferior vista 3D.	54
8.4. Diseño desarrollado en software de desarrollo de PCB, capa superior vista 3D.	54
8.5. Placa final fabricada en router CNC. Vista inferior.	55
8.6. Placa final fabricada en router CNC. Vista superior.	55

Índice de cuadros

1. Componentes utilizados en la construcción del circuito. 26
2. Resultado del cálculo de la varianza de Allan. 39

Lista de Abreviaciones

A

ADC	<i>Analog to Digital Converter</i> (Conversor Analógico-Digital)
AGND	<i>Analog Ground</i> (Tierra Analógica)

B

BJT	<i>Bipolar Junction Transistor</i> (Transistor de juntura bipolar)
-----	--

C

CNC	<i>Computer Numerical Control</i> (Control Numérico Computarizado)
CPU	<i>Central Processing Unit</i> (Unidad central de procesamiento)

D

DDS	<i>Direct Digital Synthesizer</i> (Sintetizador Digital Directo)
DGND	<i>Digital Ground</i> (Tierra Digital)
DIP	<i>Dual In-line Package</i> (Paquete doble en línea)

F

FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> (Transformada rápida de Fourier)
FM	<i>Frequency Modulation</i> (Modulación de Frecuencia)

G

GPIO	<i>General-Purpose Input/Output</i> (Puerto de entrada/salida de propósito general)
------	---

I

IC	<i>Integrated Circuit</i> (Circuito Integrado)
INTI	<i>Instituto Nacional de Tecnología Industrial</i>
ITeDA	<i>Instituto de Tecnología en Detección y Astropartículas</i>

N

NPN	<i>Negative-Positive-Negative</i> (Transistor de unión bipolar NPN)
-----	---

P

PCB	<i>Printed Circuit Board</i> (Placa de circuito impreso)
-----	--

S

SOIC	<i>Small Outline Integrated Circuit</i> (Encapsulado de doble hilera)
SMD	<i>Surface Mount Device</i> (Dispositivo de montaje en superficie)
SPI	<i>Serial Peripheral Interface</i>
SPICE	<i>Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis</i>

U

UART *Universal Asynchronous Receiver/Transmitter*

Parte 1

Introducción

1. Motivación

En una gran cantidad de trabajos científicos publicados se mide la capacidad de una celda para calcular la permitividad de un material sólido, líquido o gaseoso a diferentes frecuencias [1, 2, 3, 4]. Este método se utiliza comúnmente para estudiar las interacciones entre las moléculas de una mezcla líquida [5]. Para ello se utilizan dispositivos comerciales o diseñados especialmente [6, 7]. Estos últimos realizan medidas de alta precisión de capacidades basados generalmente en un circuito heterodino con un resonador LC.

La permitividad relativa, llamada “constante” dieléctrica aunque varíe con la temperatura, presión, etc., es una propiedad física adimensional de la materia que describe cómo un campo eléctrico afecta y es afectado por un medio. La misma está determinada por la tendencia de un medio a polarizarse ante la aplicación de un campo eléctrico e indica el mayor o menor grado de polarización del medio y por lo tanto representa un indicador de la tasa relativa de la velocidad de un campo eléctrico en un medio comparada con la velocidad del campo eléctrico en el vacío. Una medida precisa de las propiedades dieléctricas de un material proporcionan a los científicos e ingenieros una información muy valiosa para poder interpretar lo que sucede a nivel molecular e incorporar este material para ser empleado en aplicaciones científicas, médicas o industriales.

El conocimiento de las propiedades dieléctricas es también una herramienta muy útil para la investigación de los mecanismos intermoleculares e intramoleculares de los materiales compuestos. Por todo ello, la medición de la permitividad dieléctrica de los materiales ha despertado el interés en los últimos años, ya que se requiere en aplicaciones de diferentes sectores productivos tales como: medicina, farmacia, industria alimentaria y de bebidas, química, ingeniería eléctrica y electrónica, ingeniería civil y petroquímica entre otros. Además, a través de esta propiedad de la materia es posible realizar el cálculo de otros parámetros, tales como humedad, temperatura y conocer los momentos dipolares de moléculas o complejos y constantes de equilibrio de asociación [8, 9].

La permitividad y permeabilidad de los materiales puede ser calculada a partir de los cambios de la frecuencia de resonancia y del factor de calidad de la cavidad resonante. Las cavidades cilíndricas y rectangulares son comúnmente usadas para este fin, debido a que las ecuaciones de los campos eléctricos y magnéticos son más fáciles de derivar en geometrías simples. La muestra debe ser siempre colocada donde el campo eléctrico o magnético (dependiendo el caso) presente su mayor intensidad.

2. Circuito Modelo

El circuito heterodino modelo [6] se compone de un oscilador fijo, un oscilador variable, un mezclador y un filtro/amplificador. En la Figura 1.1 se muestra el diagrama en bloques del mismo. El oscilador variable está compuesto por tres capacitores conectados en paralelo. Estos tres capacitores son: la capacidad de la celda (donde se encuentra el material a analizar), el capacitor patrón variable (que toma valores entre 100 pF y 1150 pF) y las capacidades parásitas que provienen de las conexiones.

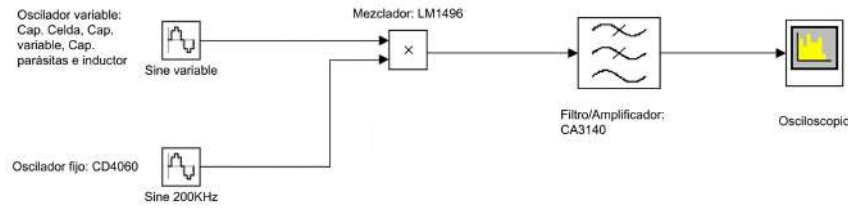


FIGURA 1.1: Circuito heterodino modelo.

En este circuito modelo para conocer la permitividad de un material es necesario medir la capacidad de la celda llena con el material a estudiar y la capacidad de la celda vacía. Cuando la celda está llena su capacidad varía con respecto a la celda vacía y como consecuencia se modifica la frecuencia del oscilador variable. Para reproducir la frecuencia inicial del oscilador variable, correspondiente a la celda vacía, se debe volver a la capacidad inicial del circuito. Esto se logra modificando la capacidad del condensador patrón. De esta manera, todas las lecturas de capacidad se efectúan en el condensador patrón.

Por lo tanto, las frecuencias f_0 y f , suministradas por el oscilador fijo y el oscilador variable respectivamente, entran al mezclador obteniéndose a la salida de éste una señal de frecuencia $f - f_0$, que es medida por un osciloscopio donde se la compone con los 50 Hz de línea formando figuras de Lissajous. La figura generalmente usada en todas las medidas de capacidades, por ser la más práctica, corresponde a la relación 2:1, en consecuencia, $f - f_0$ es igual a 100 Hz.

La capacidad del material a analizar, que se encuentra en la celda, se obtiene siguiendo los siguientes pasos:

1 – Con la celda vacía, se varía el capacitor patrón hasta formar una figura de Lissajous 2:1. Así se obtiene la capacidad del capacitor patrón (C_{V0}).

2 – Con la celda llena, se varía el capacitor patrón hasta obtener en el osciloscopio nuevamente una figura de Lissajous 2:1. Obteniendo la nueva capacidad del capacitor patrón ($C_{V\epsilon}$).

3 – Con estos valores se obtiene la permitividad del material que se está estudiando, utilizando la Ecuación 1.1.

$$\epsilon = \frac{C_{\epsilon}}{C_0} = \frac{C_{V\epsilon} - C_R}{C_{V0} - C_R} \quad (1.1)$$

La capacidad C_R es la capacidad parásita o residual que se obtiene a partir de la Ecuación 1.1 y utilizando un material de permitividad conocida. La frecuencia utilizada en el oscilador variable es de 200 kHz o 400 kHz. La frecuencia de trabajo a utilizar depende de la zona en la que se encuentra la permitividad que se desea medir. En la Figura 1.2 puede verse como varía la permitividad con respecto a la frecuencia [10, 11]. Por lo tanto, podemos seleccionar la frecuencia de trabajo y los circuitos integrados a nuestra conveniencia.

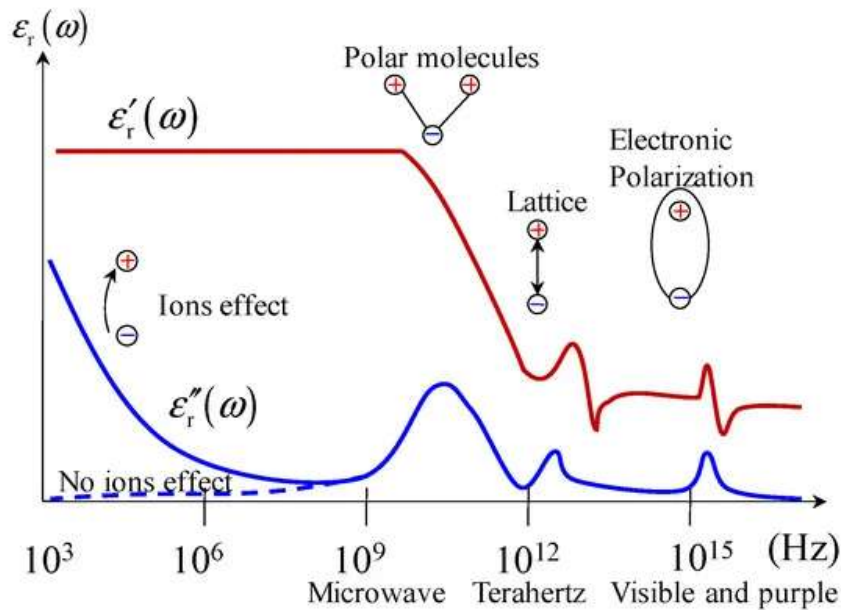


FIGURA 1.2: Curva de relajación dieléctrica.

Este equipo contaba con un sistema de control térmico para los osciladores, conectores y la celda de medición. La variación de temperatura era de $\pm 0.5^\circ\text{K}$.

3. Alcance

En este Proyecto Final de grado se diseñó y construyó un circuito heterodino para medir capacidad con alta precisión, bajo costo y eficiencia, lo que lo hace útil para diferentes sectores tanto industriales como científicos. El objetivo principal fue realizar una modernización del circuito modelo, digitalizando la adquisición de datos para facilitar su procesamiento y análisis mediante un script de Python. Además se implementó un oscilador controlado digitalmente ampliando el rango de frecuencias disponibles para poder trabajar en distintas áreas de investigación.

Una diferencia crucial con el diseño original es que en este nuevo circuito se realizan las mediciones directamente sobre la frecuencia del circuito que contiene a la celda de medición, la cual varía su capacidad debido al dieléctrico que se encuentra en su interior. Otra diferencia importante es la adquisición digital de los datos que resulta más sencilla y práctica para realizar el estudio del material que se encuentra en la celda.

La propuesta combinó electrónica analógica y digital para modernizar el circuito modelo. Para ello se desarrolló un circuito heterodino compuesto por:

- Un oscilador variable tipo Colpitts para conectar la muestra y detectar variaciones de frecuencia.
- Un oscilador local con frecuencia controlada digitalmente, basado en el circuito integrado Analog Devices AD9833 [12].
- Un mezclador de señales, implementado con el circuito integrado NXP SA612 [13].

- Un sistema de procesamiento de señales, realizado mediante un script en Python, que adquiere los datos del mezclador a través de la entrada de línea de la placa de audio de una computadora.

El objetivo no incluía diseñar un oscilador Colpitts para conectar la muestra, pero como no fue posible contar con el circuito modelo y su celda de medición para este trabajo se decidió desarrollar el oscilador y realizar mediciones sobre capacitores como si fueran las muestras. También se debe mencionar que no se incluyó en el alcance el control de temperatura del sistema.

El oscilador variable tipo Colpitts trabaja en un rango de capacidades de 0 pF a 1000 pF. Sin una muestra conectada, el mismo llega a su máxima frecuencia de ≈ 1.6 MHz, dependiendo de la temperatura ambiente. Estos valores de frecuencia son ideales para determinar la permitividad en la región estática.

La señal generada en el oscilador Colpitts se mezcla con la señal de un oscilador local implementado con el circuito integrado Analog Devices AD9833. Este circuito integrado permite trabajar con frecuencias de 1 Hz a 12.5 MHz, lo que permite generar señales adecuadas para trasladar la señal del oscilador Colpitts a una frecuencia que pueda ser digitalizada cumpliendo con la ley de Nyquist. Dicha frecuencia del oscilador local se controla digitalmente con la placa de desarrollo Espressif ESP32 [14] que se comunica con el circuito integrado por medio de comunicación SPI.

El mezclador admite frecuencias mayores a 500 MHz, por lo que puede ser útil para estudiar diferentes sectores de la curva de relajación dieléctrica. Si se desea estudiar otros sectores solamente se debe realizar el oscilador Colpitts para los valores necesarios.

La placa de audio de una computadora, que por medio de la entrada de línea adquiere la señal de salida del mezclador, cuenta con un ADC de 16 bits y trabaja a una frecuencia de muestreo de hasta 192 kHz, dependiendo de la calidad de la placa de audio. Luego la señal se procesa a través del script realizado en Python con el cual se grafica la señal muestreada, así como su FFT y además proporciona el valor de frecuencia de máxima amplitud.

Parte 2

Cálculos

El primer paso del proyecto fue la selección de un mezclador que trabaje en el rango de frecuencias necesario para analizar la permitividad estática. A partir de la curva de relajación dieléctrica de la Figura 1.2 se decidió diseñar el oscilador para una frecuencia aproximada de 2 MHz ya que se encuentra en la mitad del rango de la permitividad estática. Además, se consideraron otros factores importantes como la disponibilidad local y también la posibilidad de obtener el modelo del mezclador para realizar simulaciones en el software LTSpice. El mezclador que mejor se adaptó a los requerimientos fue el NXP SA612 [13]. Este mezclador internamente tiene integrado un transistor con el cual se puede realizar un oscilador, este transistor se encuentra entre los pines 6 y 7, como se puede ver en la Figura 2.1 de la hoja de datos. Para realizar el oscilador se utilizó la configuración de la Figura 2.2, que también se encuentra en la hoja de datos y es la que mejor se ajusta al proyecto ya que es posible conectar la celda de medición como si fuese el capacitor C4. Se observa que es un oscilador Colpitts tipo tanque LC.

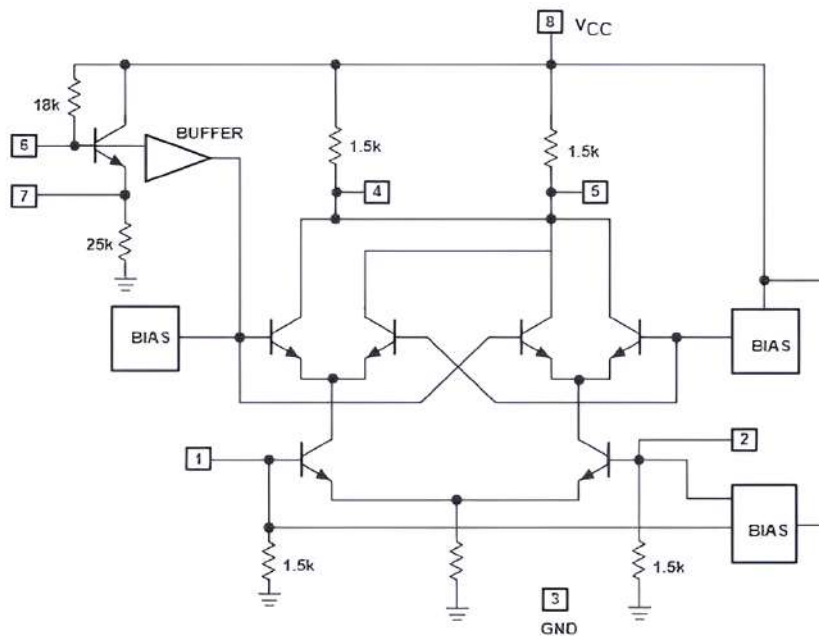


FIGURA 2.1: Diseño interno del SA612.

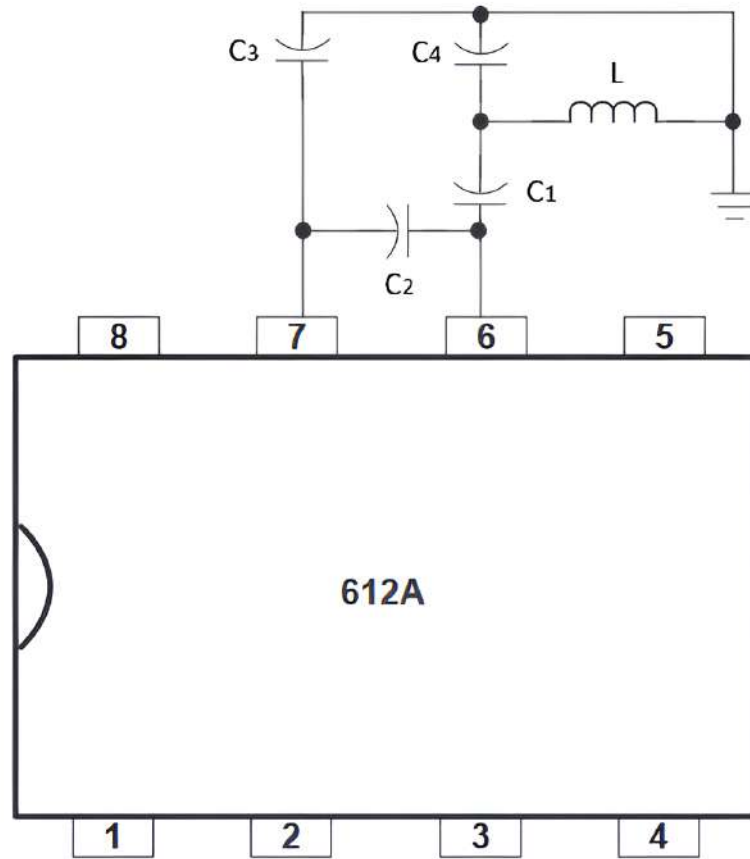


FIGURA 2.2: Oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612.

La frecuencia de operación o de resonancia se determina a partir de la ecuación 2.1:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}}} \quad (2.1)$$

donde C_{eq} es la capacidad equivalente del circuito resonador. El inductor utilizado fue $L = 10 \mu H$, los tres capacitores que se encuentran en serie $C1 = 2,2 nF$, $C2 = 2,2 nF$ y $C3 = 1,8 nF$ y el capacitor que se encuentra en paralelo al inductor $C4 = 22 pF$. El capacitor $C4$ se pensó como si fuera la celda de medición vacía. Entonces la capacidad equivalente resulta ser $C_{eq} = 704 pF$ y la frecuencia de resonancia $f_r = 1896853 Hz$ siendo un valor que se encuentra en el rango de frecuencia deseado.

Este circuito resonador fue simulado en LTSpice y se obtuvo un valor similar al calculado como se puede ver en la sección Simulación. Sin embargo, al realizar un PCB prototipo para analizar el circuito antes de realizar el PCB en un router CNC, este oscilador utilizando el transistor integrado del mezclador no funcionó. Se concluyó que no se logró hacer que oscile debido a que es una frecuencia mucho mas baja que la típica de trabajo del mezclador y, por lo tanto, no se cumple la condición de arranque.

Por este motivo, aprovechando que ya se había realizado el oscilador Colpitts LC utilizando la configuración de la hoja de datos y el transistor integrado del mezclador, se decidió diseñar el circuito de la Figura 2.3 que también es un oscilador Colpitts,

el cual utiliza dicho circuito tanque LC para generar una señal senoidal. Como se puede ver, se utilizó un transistor NPN Fairchild Semiconductor BC548B [15]. Vale la pena mencionar que se contaba con estos componentes en stock.

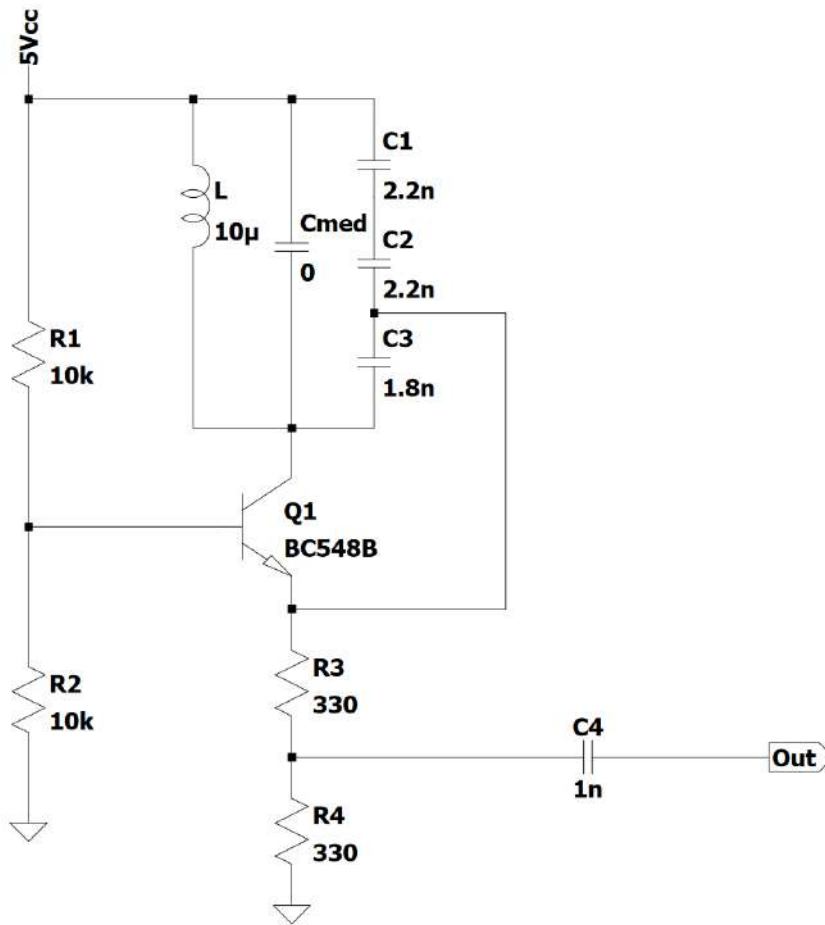


FIGURA 2.3: Circuito esquemático del oscilador Colpitts

Se puede observar que el oscilador Colpitts cuenta con un circuito resonante de capacitor con derivación. La capacidad equivalente del circuito resonante queda en paralelo con la capacidad de la celda de medición que en este caso se encuentra desconectada. Por lo tanto, para calcular la frecuencia de resonancia se necesita hallar algunos valores de impedancia y capacidad del transistor determinados por la red de polarización.

El circuito resonador cuenta con una componente resistiva y otra reactiva que se anula a la frecuencia de resonancia. Para que un oscilador funcione se deben cumplir con tres criterios. El primero es que un circuito oscilará si existe una retroalimentación que proporcione una ganancia unitaria. El segundo criterio es que el factor de Stern de un circuito oscilador debe ser menor que uno. Cuando uno de estos dos criterios se cumple el determinante de las ecuaciones de malla o nodo se hace cero, siendo este el tercer criterio para oscilación. Dicho esto, para simplificar los cálculos la componente resistiva se desprecia ya que es muy baja.

Empezando con los cálculos de polarización, la tensión en la base del transistor V_b se calcula a partir de la ecuación 2.2, donde $V_{CC} = 5V$ y $R_1 = R_2 = 10k\Omega$. Obteniendo $V_b = 2,5V$.

$$V_b = V_{cc} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.2)$$

La corriente en el emisor i_e viene dada por la ecuación 2.3, donde la tensión de base emisor $V_{be} = 0,7V$ y $R_3 = R_4 = 330\Omega$. Obteniendo $i_e = 2,72mA$.

$$i_e = \frac{V_b - V_{be}}{R_3 + R_4} \quad (2.3)$$

Para calcular la corriente de colector i_c se utiliza la ecuación 2.4, donde $\beta = 200$ y se obtiene del datasheet del transistor [15]. Obteniendo $i_c = 2,7mA$.

$$i_c = \frac{i_e \cdot \beta}{\beta + 1} \quad (2.4)$$

La tensión entre colector y emisor resulta ser $V_{ce} = 3,2V$ y es la diferencia entre $V_c = 5V$ y $V_e = V_b - 0,7V = 1,8V$.

Observando el gráfico de I_c vs V_{ce} de la Figura 2.4, que se obtiene del datasheet del transistor [16], apreciamos que el punto Q se encuentra dentro de la región activa. Por lo tanto, la señal generada no tiene problemas de recorte.

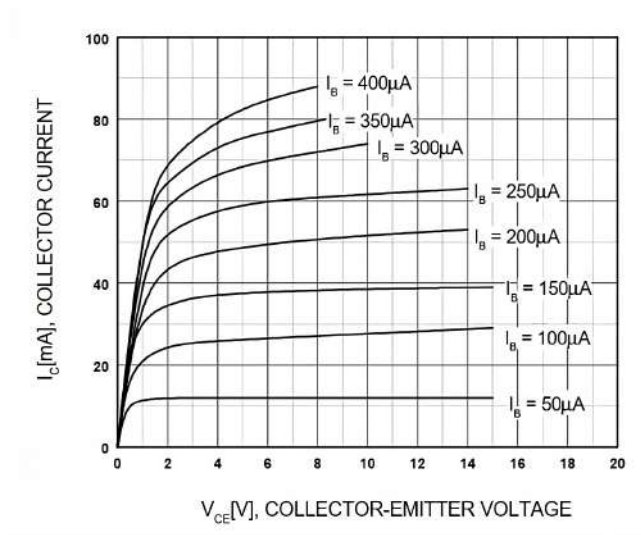


FIGURA 2.4: Curva I_c vs V_{ce} del transistor BC548B.

Agregando al circuito esquemático de la Figura 2.3 las capacidades parásitas del transistor obtenemos el circuito de la Figura 2.5

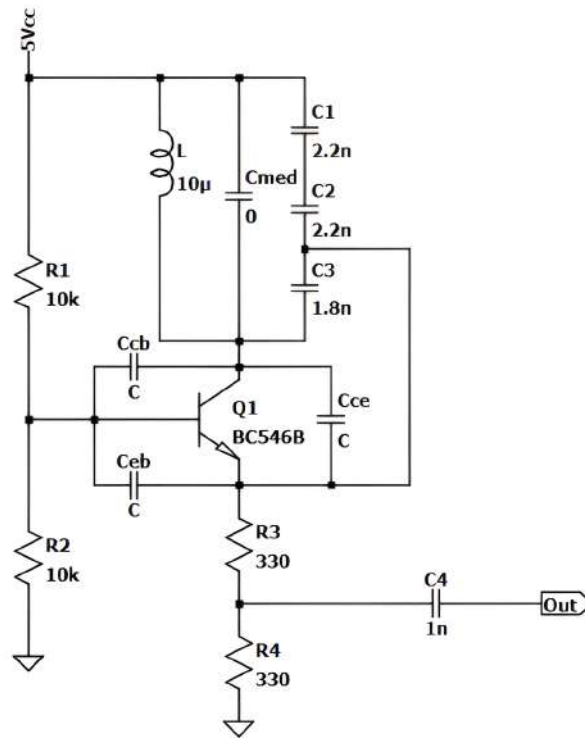


FIGURA 2.5: Circuito esquemático del oscilador Colpitts con capacidades parásitas.

Analizándolo podemos observar que la capacidad parásita del transistor entre colector y emisor C_{ce} se encuentra en paralelo con C_3 . C_{ce} resulta ser la capacidad entre colector y base C_{cb} en serie con la capacidad entre base y emisor C_{eb} . Conociendo la tensión entre colector y base $V_{cb} = 2,5V$ obtenemos que C_{cb} es aproximadamente $3,5pF$ a partir del datasheet del transistor [15]. La capacidad C_{eb} es aproximadamente $9pF$. Por lo tanto, la capacidad entre colector y base C_{cb} en serie con la capacidad entre base y emisor C_{eb} resulta ser $C_{ce} = 2,52pF$.

Incluyendo la capacidad parásita del transistor en el circuito resonador, utilizando la ecuación 2.1, obtenemos una frecuencia de resonancia $f_r = 1925623 Hz$

Vale la pena mencionar que el proceso de medición se realiza en dos pasos y se obtiene la capacidad a partir de la frecuencia de resonancia del circuito. En el primer paso se obtiene la frecuencia con la celda de medición vacía (sin muestra) obteniendo la capacidad de el circuito incluyendo las capacidades parásitas.

El segundo paso se realiza el mismo procedimiento pero con la muestra dentro de la celda de medición, por lo que se obtiene la capacidad del circuito más la capacidad de la muestra.

Al realizar la diferencia entre las capacidades de ambos pasos obtenemos como resultado la capacidad de la muestra. Cabe destacar que las mediciones deben realizarse en las mismas condiciones ambientales.

Parte 3

Simulación

Luego de realizar los cálculos teóricos necesarios para el diseño del circuito heterodino, se procedió con la simulación del mismo en el software de simulación de circuitos LTSpice.

La primer simulación se realizó con la configuración del circuito oscilador Colpitts tanque L/C que se encuentra en la hoja de datos del mezclador SA612. El esquemático del mismo es el de la Figura 3.1.

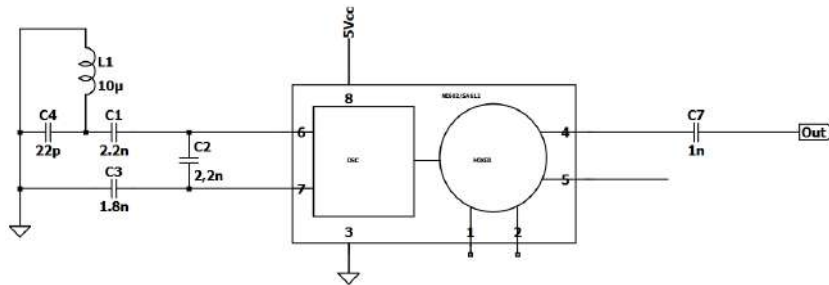


FIGURA 3.1: Circuito esquemático LTSpice de la configuración del oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612.

Analizando el resonador desde el pin 6 del mezclador se obtuvo la onda senoidal de la Figura 3.2, siendo el tipo de onda esperado.

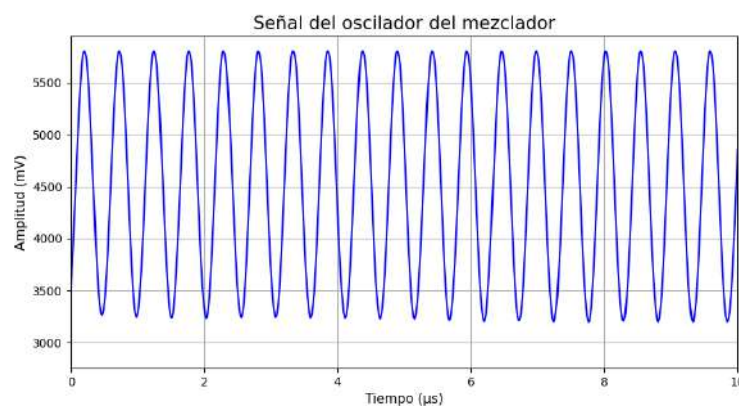


FIGURA 3.2: Señal obtenida en la simulación del oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612 en dominio temporal.

Para conocer la frecuencia de oscilación se estudió la señal en el dominio frecuencial, a partir de la FFT se obtuvo la Figura 3.3. Se puede apreciar que la frecuencia de resonancia se encuentra aproximadamente en $f_r = 1,9\text{ MHz}$, un valor similar al calculado.

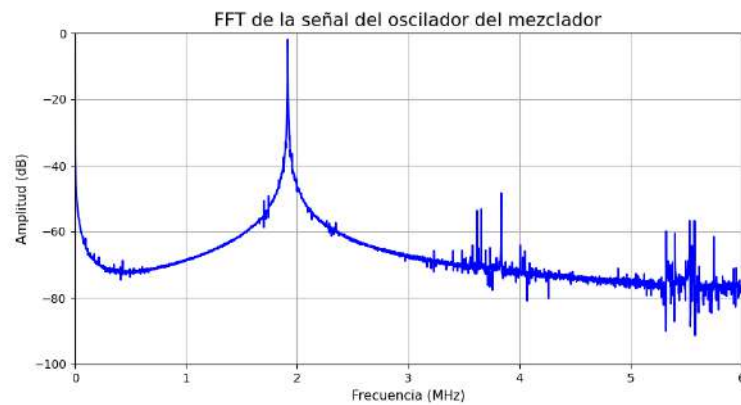


FIGURA 3.3: Señal obtenida en la simulación del oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612 en el dominio de frecuencias.

A la salida del mezclador, pin 4, se obtiene una señal atenuada y distorsionada, Figura 3.4. Al realizar el análisis de frecuencias se obtuvo la misma frecuencia de resonancia pero con los armónicos incrementados como se observa en la Figura 3.5



FIGURA 3.4: Señal de salida obtenida en la simulación del oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612 en el dominio temporal.

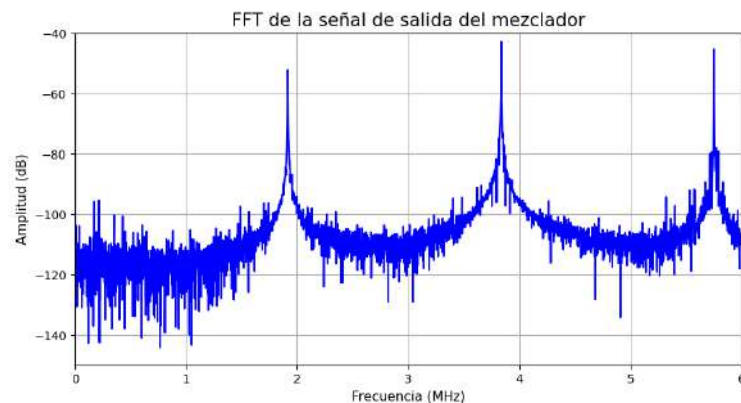


FIGURA 3.5: Señal de salida obtenida en la simulación del oscilador Colpitts de la hoja de datos del SA612 en el dominio de frecuencias.

Lamentablemente, cuando se intentó implementar este oscilador en un PCB prototipo no se logró hacer que oscile. Vale la pena volver a mencionar que esta configuración se encuentra en la hoja de datos del mezclador SA612, por lo que debería funcionar. Se concluyó que no se lograron las oscilaciones debido a que al ser un mezclador utilizado para frecuencias de radio FM el transistor integrado no cumple con alguno de los criterios para que se inicien las oscilaciones.

Por este motivo, aprovechando el diseño del resonador LC y que el mezclador admite hasta 200 MHz en la entrada del oscilador local se optó por diseñar el oscilador Colpitts de la Figura 2.3. La señal resultante se observa en la Figura 3.6, siendo una onda senoidal tal como se esperaba. Realizando el análisis en el dominio de frecuencias se observa, en la Figura 3.7, que la señal se encuentra oscilando aproximadamente en $f_r = 1,81 \text{ MHz}$

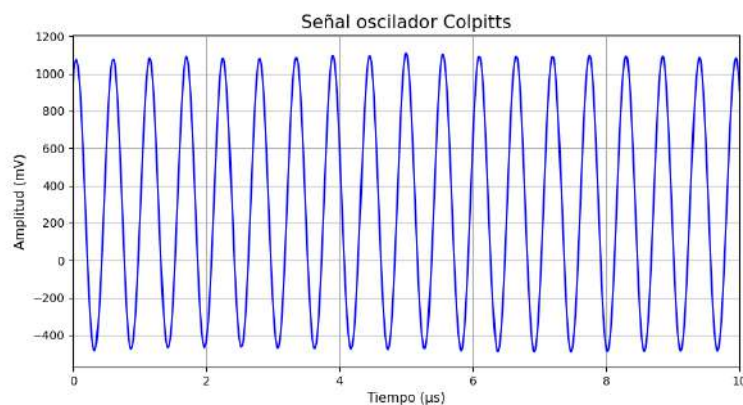


FIGURA 3.6: Señal obtenida en la simulación del oscilador Colpitts, dominio temporal.

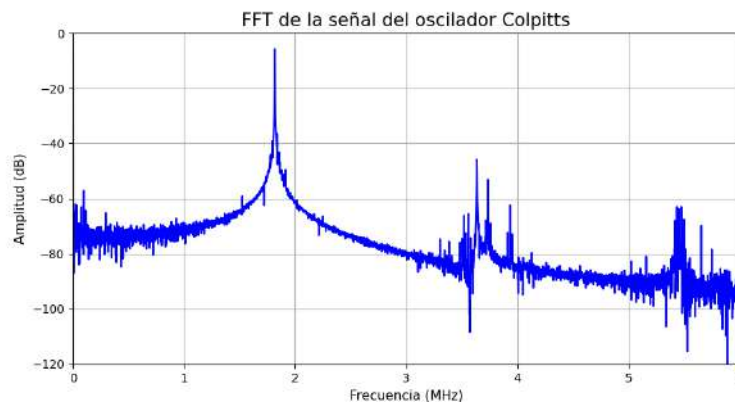


FIGURA 3.7: Señal obtenida en la simulación del oscilador Colpitts, dominio de frecuencias.

El circuito diseñado para la simulación se muestra en la Figura 3.8, donde se agregó como oscilador local un generador de señales realizado con el circuito integrado AD9833 y el oscilador Colpitts es en el cual se conecta la muestra a estudiar.

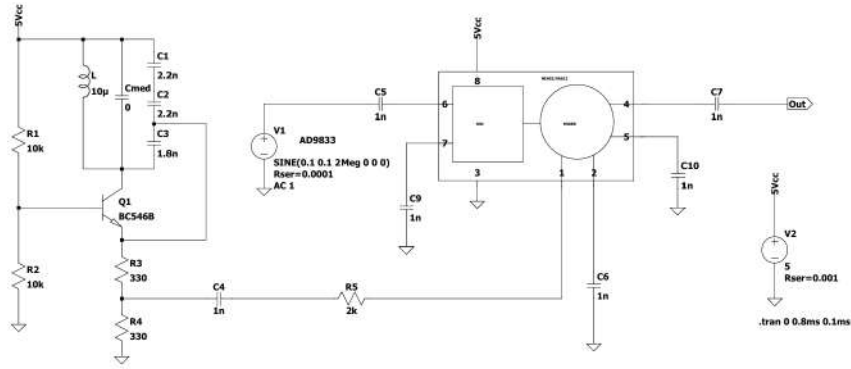


FIGURA 3.8: Circuito esquemático LTSpice.

Para estudiar el comportamiento del circuito se graficaron en el dominio temporal la señal generada por el AD9833, la del oscilador Colpitts y la señal de salida del mezclador al mismo tiempo. El resultado es el de la Figura 3.9.

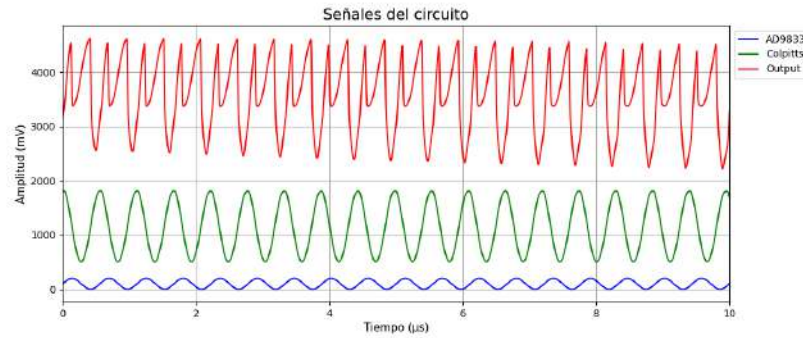


FIGURA 3.9: Señales obtenidas en la simulación del circuito, dominio temporal.

Se puede ver que a la salida del mezclador se obtiene la combinación de ambas señales a pesar de que el modelo del SA612 introduce cierta distorsión. Esta distorsión generada por el modelo no se presenta a frecuencias más altas. Para asegurarnos de que se este realizando el heterodinaje se analizó la señal de salida del mezclador en el dominio de las frecuencias a partir de la FFT.

En la Figura 3.10 se muestran las componentes de frecuencia a la salida del mezclador. Se observa que una de las componentes principales resulta ser la diferencia entre ambas señales de entrada, como era de esperarse. Por la tanto, podemos decir que la señal del AD9833 que se encuentra a $f_{AD9833} = 1,8 \text{ MHz}$ y la frecuencia de resonancia del oscilador Colpitts que se encuentra aproximadamente a $f_{Colpitts} = 1,811 \text{ MHz}$ generan a la salida del mezclador la diferencia entre ambas señales obteniendo una frecuencia de salida $f_{Out} = 11 \text{ kHz}$. Entonces, se puede decir que el circuito funciona correctamente.

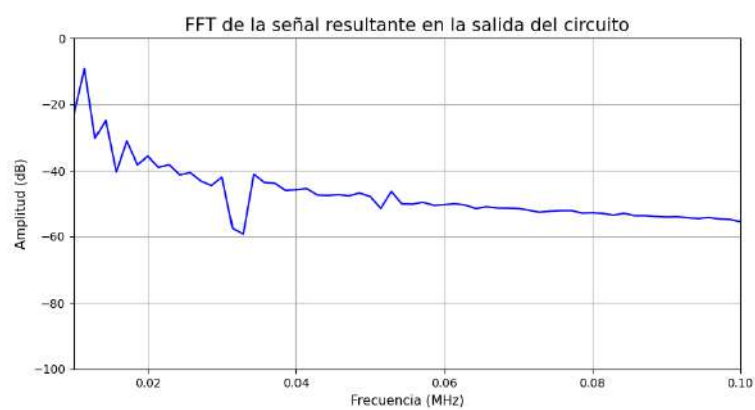


FIGURA 3.10: FFT de la señal de salida del mezclador resultante de la diferencia entre las señales de entrada en la simulación.

Parte 4

Esquemático

Una vez confirmados los cálculos y el correcto funcionamiento del circuito mediante la simulación en LTSpice, se procedió con el desarrollo del circuito esquemático en un software de diseño de PCB. Para minimizar el ruido y lograr una buena estabilidad, se utilizó un regulador de tensión de ultra bajo ruido, filtros PI y capacitores de Bypass.

Una vez que el diseño del esquemático se completó, se pasó a la etapa de diseño del PCB donde se separó el circuito en dos sectores. Un sector contiene todos los componentes analógicos y el otro todos los componentes digitales, de esta forma se minimiza la influencia del ruido causado por los componentes digitales sobre los analógicos.

El circuito esquemático (Figura 4.1) muestra todos los componentes utilizados para construir el dispositivo de medición de capacidades. Los componentes principales del oscilador Colpitts son los capacitores C1, C2 y C3, el inductor L y el transistor BC548B (BJT de tipo NPN que funciona como amplificador y también proporciona realimentación positiva para mantener las oscilaciones). En la Tabla 1 se detallan todos los componentes utilizados en el circuito.

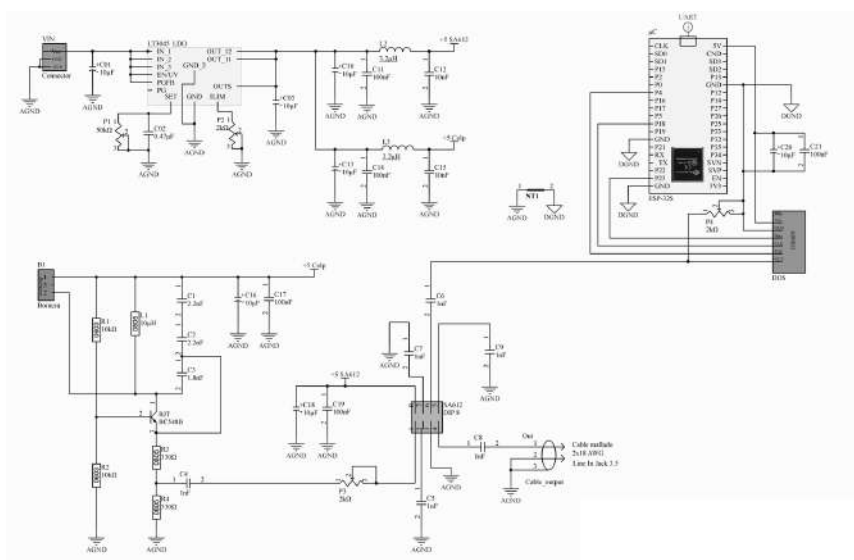


FIGURA 4.1: Circuito esquemático realizado en software de diseño de PCB.

Es importante destacar que se utilizó cable de tipo par trenzado mallado para realizar la conexión entre la salida del circuito y la entrada de línea de la placa de audio de la computadora. Este tipo de cable ayuda a minimizar el ruido externo y asegura una mejor calidad de la señal transmitida.

Una vez finalizada la construcción del circuito, se procedió a realizar una serie de mediciones con el fin de evaluar su rendimiento y obtener los resultados necesarios para validar su funcionamiento. En la sección de mediciones y resultados se detallan los procedimientos y los resultados obtenidos.

Tag	Descripción	Cantidad
μC	ESP-32S	1
B1	Bornera	1
BJT	BC548B	1
C1, C2	Capacitor SMD 0603 2.2nF	2
C01, C03, C10, C13, C16, C18, C20	Capacitor SMD 1210 10 μ F	7
C02	Capacitor SMD 0603 0.47 μ F	1
C3	Capacitor SMD 0805 1.8nF	1
C4, C5, C6, C7, C8, C9	Capacitor SMD 0603 1nF	6
C11, C14, C17, C19, C21	Capacitor SMD 0603 100nF	5
C12, C15	Capacitor SMD 0805 10nF	2
DDS	AD9833	1
L1	Inductor SMD 0805 10 μ H	1
L2, L3	Inductor SMD 0805 3.2nH	2
LT3045	Regulador de tensión LDO	1
Out	Cable 2x18 AWG	1
P1	Preset SMD 50k Ω	1
P2, P3, P4	Preset SMD 2k Ω	3
R1, R2	Resistor SMD 0603 10k Ω	2
R3, R4	Resistor SMD 0805 330 Ω	2
SA612	Mezclador SA612 + Socket DIP 8	1
VIN	Conector Power Jack 5.5 mm	1

TABLA 1: Componentes utilizados en la construcción del circuito.

Parte 5

Programas del microcontrolador y procesamiento de señal

El generador de señales AD9833, utilizado en este proyecto, es controlado por medio de la placa de desarrollo ESP32 por comunicación SPI (*Interfaz de Periféricos en Serie*). Este circuito integrado permite generar señales de diferentes tipos, como señales senoidales, cuadradas y triangulares. Además, permite variar la frecuencia a partir de 1 Hz hasta 12.5 MHz. De manera predeterminada, el programa realizado genera una señal senoidal a una frecuencia de 1.6 MHz, ya que la frecuencia del oscilador Colpitts utilizado en el circuito es similar.

Para variar la frecuencia de la señal generada se debe realizar un cálculo utilizando la ecuación 5.1 del datasheet [12] del circuito integrado AD9833. Esta ecuación permite calcular el valor de la palabra de frecuencia (*FreqWord*) que debe ser enviada a través de la interfaz de comunicación SPI:

$$\text{FreqWord} = \frac{\text{frequency} \times 2^{28}}{25,0 \times 10^6} \quad (5.1)$$

donde *frequency* es el valor de la frecuencia a la que se desea generar la señal, siendo una variable de tipo `long int`.

El programa del microcontrolador, desarrollado en lenguaje C++, permite configurar la frecuencia del generador de señales utilizando la interfaz UART (*Universal Asynchronous Receiver-Transmitter*) entre la ESP32 y una computadora. Para ajustar el valor de la frecuencia se debe enviar el comando SET seguido de la frecuencia deseada. Al recibir el comando, el programa calcula el valor de *FreqWord* y se envía a través de la interfaz SPI al circuito integrado AD9833 para actualizar la frecuencia de la señal generada.

También es posible obtener el valor de la frecuencia y el tipo de onda configurado enviando el comando GET.

Es necesario mencionar que se debe tener en cuenta la frecuencia de muestreo al cambiar la frecuencia del generador de señales. Experimentalmente se determinó que, para obtener mejores resultados, la frecuencia de la señal a muestrear debe ser menor a 5 kHz. Esto es de 35 a 40 veces menor que la frecuencia de muestreo del ADC utilizado en la entrada de línea de la computadora (192 kHz). Por lo tanto, cumple con la ley de Nyquist, que establece que la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima de la señal a muestrear.

El diagrama en bloques de la Figura 5.1 muestra el funcionamiento del programa desarrollado en lenguaje C++ para controlar la ESP32.

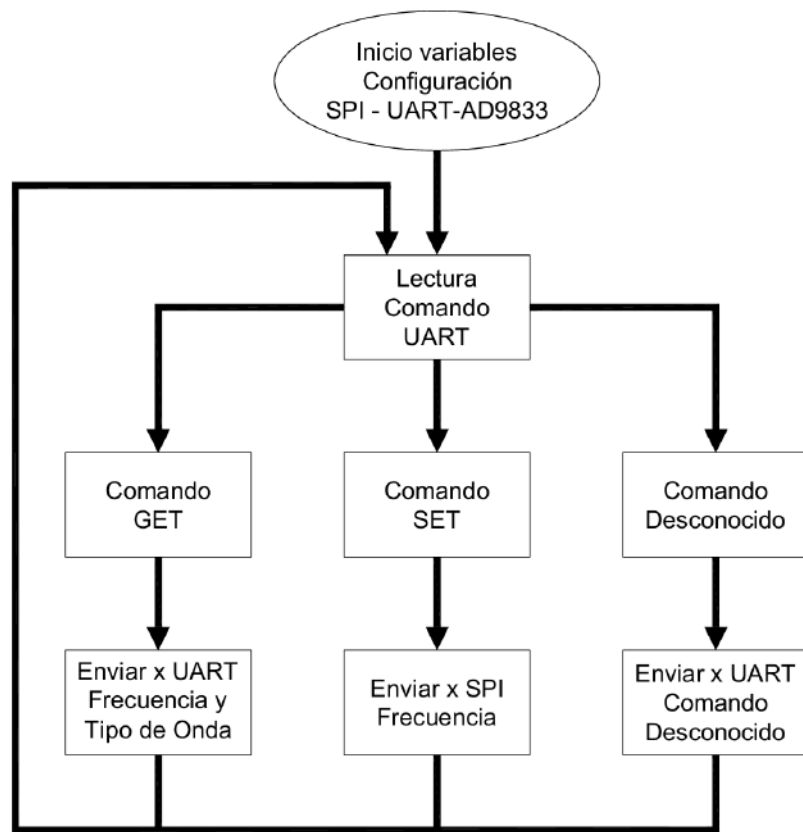


FIGURA 5.1: Diagrama en bloques del programa de la ESP32.

La señal de salida del mezclador, obtenida al mezclar la señal generada por el AD9833 con la señal proveniente del oscilador Colpitts, es muestreada utilizando la entrada de línea de la placa de audio de una computadora que cuenta con un ADC de 16 bits y una frecuencia de muestreo de 192 kHz.

Para realizar el procesamiento de la señal se desarrolló un script en Python, este cuenta con dos hilos de ejecución. El primer hilo se encarga de realizar el muestreo de la señal en paquetes de datos, calcular la FFT (*transformada rápida de Fourier*), determinar el valor máximo de la frecuencia muestreada y cargar los datos en un buffer. El otro hilo de ejecución se dedica a leer los datos del buffer, actualizar en tiempo real el gráfico de la señal muestreada y la FFT, imprimir en la terminal del editor de código el valor máximo de la frecuencia y guardar este valor en un archivo.

El diagrama en bloques de la Figura 5.2 muestra el funcionamiento del script desarrollado en Python.

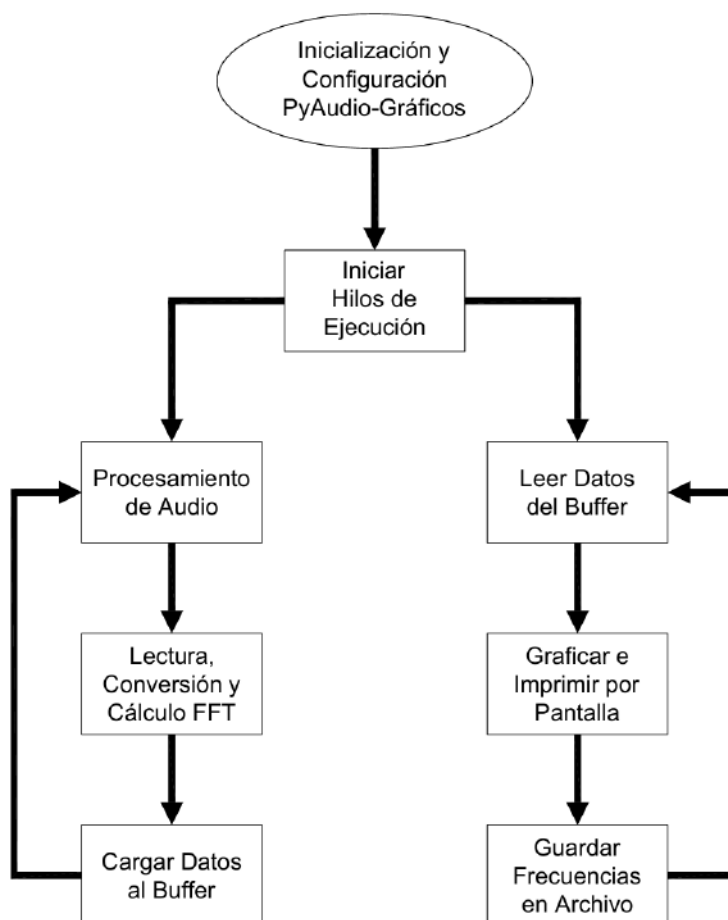


FIGURA 5.2: Diagrama en bloques Python.

El gráfico generado por el script de Python en tiempo real, mostrado en la Figura 5.3, presenta en la parte superior la señal muestreada en tiempo real y en la parte superior inferior la FFT. Cuando se inicien las mediciones seguramente no se encuentre ninguna señal, para visualizarla es necesario ajustar progresivamente la frecuencia del generador de señales AD9833 a valores menores. Una vez identificada la señal debemos asegurarnos de obtener la diferencia entre la señal del oscilador Colpitts y el generador de señales. Para ello, debemos observar que al configurar el generador de señales a una frecuencia mas alta que la previamente configurada la señal obtenida debe disminuir.

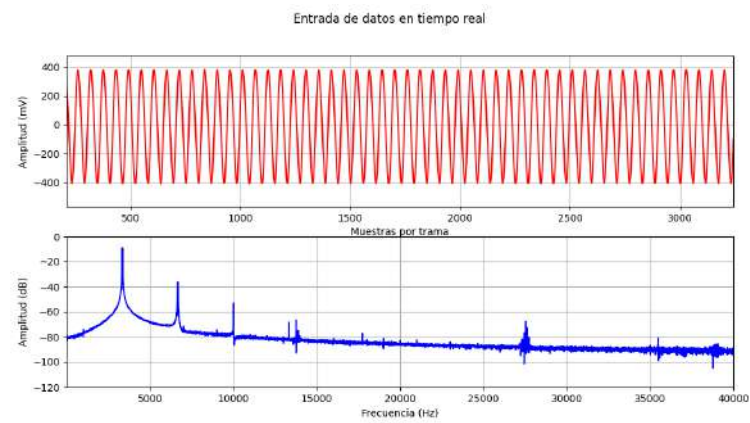


FIGURA 5.3: Gráfico realizado en tiempo real en Python.

Los programas desarrollados se encuentran en un repositorio de Github junto con los demás documentos utilizados en el proyecto. <https://github.com/alanbuep/ProyectoFinal-IngElectronica>

Parte 6

Mediciones y Resultados

Una vez completada la construcción del circuito impreso se procedió con el análisis de las señales generadas y el comportamiento de estas. Para el estudio se realizaron mediciones en el laboratorio de ITeDA (Instituto de Tecnologías en Detección y Astropartículas) donde se utilizó el osciloscopio de la marca Tektronix, modelo DPO7104 [16]. La primer medición fue la señal entregada por el oscilador Colpitts, se tomaron los datos desde la pata 1 del circuito integrado SA612. Los resultados de estas mediciones se muestran en el gráfico de la Figura 6.1. Como se esperaba, la señal generada fue una onda senoidal.

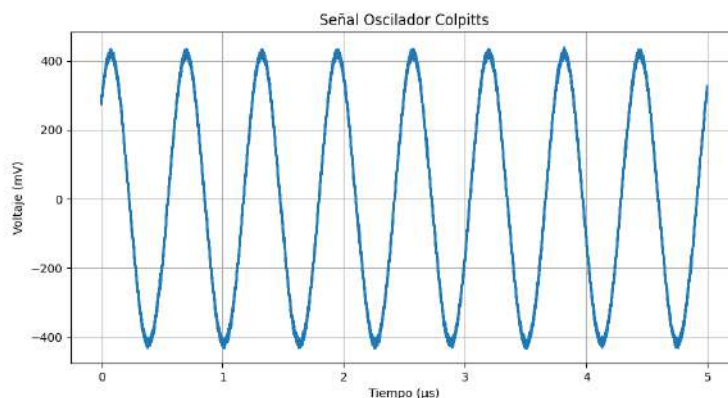


FIGURA 6.1: Oscilador Colpitts, señal en pata 1 del mezclador. Dominio temporal.

Para determinar la frecuencia de la señal generada se realizó la FFT de los datos obtenidos. El resultado se muestra en el gráfico de la Figura 6.2. A partir de la FFT, se identificó que la componente principal o la frecuencia dominante es de 1.615 MHz. Este valor está dentro de lo esperado en relación con la frecuencia calculada para el oscilador Colpitts. El resultado confirma que el oscilador Colpitts se encuentra funcionando correctamente, generando una señal senoidal a la frecuencia esperada.

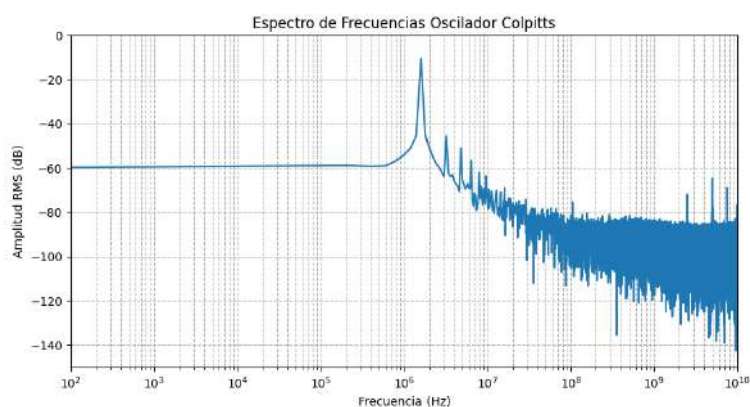


FIGURA 6.2: Oscilador Colpitts, señal en pata 1 del mezclador. Espectro de frecuencias.

La siguiente medición se realizó para estudiar la señal generada por el circuito integrado AD9833. La señal fue tomada desde la pata 6 del mezclador SA612 y fue configurada a una frecuencia de 1.6 MHz. En la Figura 6.3 se observa que la señal generada efectivamente tiene forma de onda senoidal, confirmando que el circuito

integrado está respondiendo a los comandos correctamente y generando la señal deseada. Para evaluar el comportamiento en el espectro de frecuencias se realizó la FFT de los datos obtenidos, el resultado se muestra en la Figura 6.4.

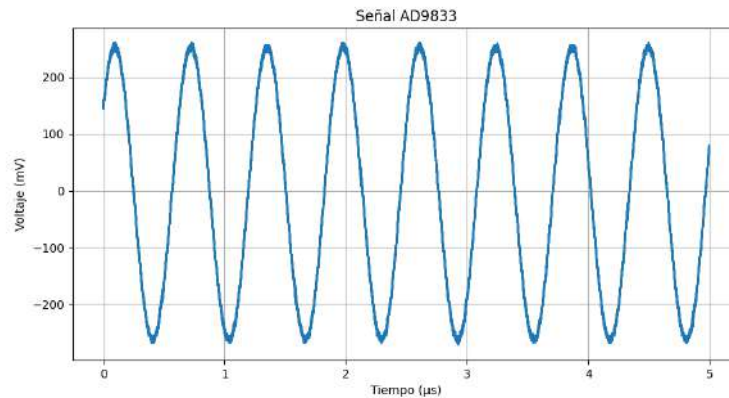


FIGURA 6.3: AD9833, señal en pata 6 del mezclador. Dominio temporal.

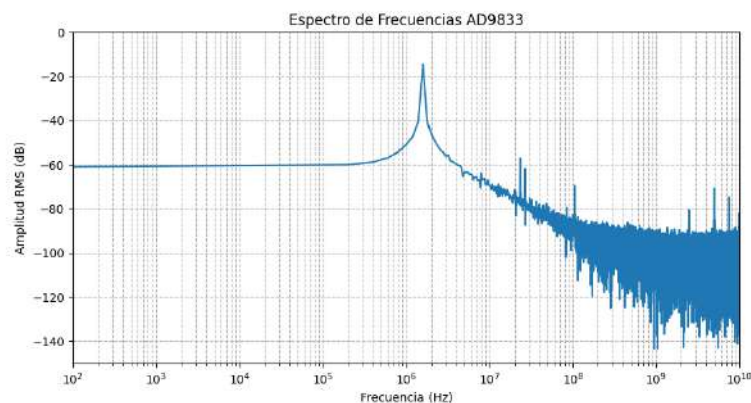


FIGURA 6.4: AD9833, señal en pata 6 del mezclador. Espectro de frecuencias.

De la FFT se concluye que la señal generada por el AD9833 presenta una frecuencia dominante de 1.6 MHz. Esta frecuencia fue configurada para aproximarla a la frecuencia del oscilador Colpitts y así luego analizar la mezcla de ambas señales a una frecuencia que pueda ser muestreada por la placa de audio. Esto indica que el circuito integrado está generando la señal a la frecuencia deseada. Se confirma también que la ecuación (5.1) del datasheet del AD9833 [12] para el cálculo de la frecuencia de salida funciona correctamente.

Por último se realizó la medición en la salida del mezclador, tomando la señal desde la pata 4 de éste. La señal adquirida puede observarse en la Figura 6.5 donde se aprecia claramente una señal senoidal portadora junto con otra señal senoidal modulante. Este es un buen indicio de que la mezcla de señales se está llevando a cabo de manera correcta.

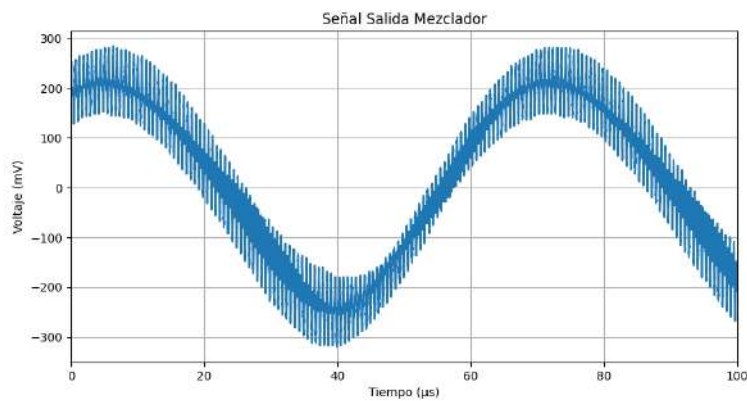


FIGURA 6.5: Señal de salida tomada en pata 4 del mezclador. Dominio temporal.

Para determinar las frecuencias presentes en la señal mezclada, se realizó la FFT y así analizar el espectro de frecuencias. Este se muestra en la Figura 6.6, donde se observa que la componente principal se encuentra a una frecuencia de aproximadamente 15 kHz. Esta componente frecuencial es la diferencia entre ambas señales de entrada, cumpliendo con la funcionalidad del circuito heterodino. Además, se observa la presencia de la suma de ambas frecuencias cerca de los 3.2 MHz, así como la presencia de armónicos y las frecuencias de las señales de entrada a aproximadamente 1.6 MHz. Estos resultados confirman que ambas señales se están mezclando correctamente, generando una componente de frecuencia dominante, causada por la diferencia/suma entre ambas, tal como ocurre en un circuito heterodino.

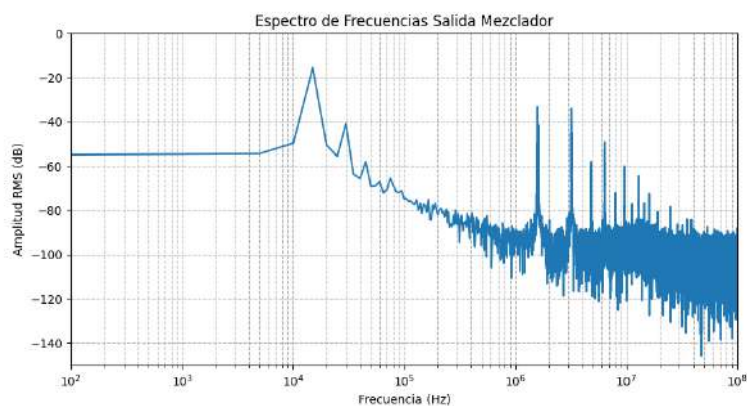


FIGURA 6.6: Señal de salida tomada en pata 4 del mezclador. Espectro de frecuencias.

Una vez confirmado que el circuito funcionó correctamente, se procedió a analizar el comportamiento de la placa de audio y del Script desarrollado en Python. Para determinar la incertidumbre en la medición de la componente frecuencial dominante se introdujeron señales a diferentes frecuencias y se observaron los valores que se imprimieron por pantalla. Gracias a este proceso experimental, se determinó que la incertidumbre en la adquisición de datos resultó ser de ± 1 Hz.

Conocido el error obtenido con el Script, se decidió analizar el comportamiento del circuito funcionando durante un largo período de tiempo. En este período se

obtuvieron aproximadamente 76000 muestras y duró al rededor de 6 horas. Los valores se observan en el gráfico de la Figura 6.7. Se puede observar una curva que crece logarítmicamente, este aumento de la frecuencia se debe al incremento de la temperatura del circuito a lo largo del tiempo.

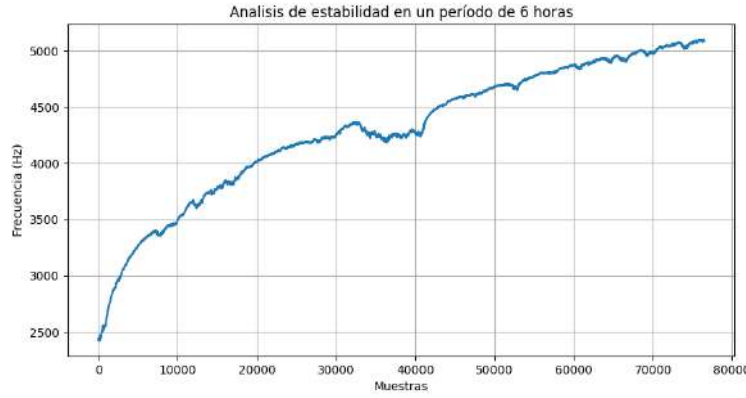


FIGURA 6.7: Análisis de estabilidad durante 6 horas.

Para realizar un análisis más profundo de la estabilidad del circuito, se calculó y graficó la varianza de Allan [17]. Este estudio determina la estabilidad del circuito y los diferentes tipos de ruidos presentes en él. La ecuación 6.1 se utiliza para calcular la varianza:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{i+1} - y_i)^2 \quad (6.1)$$

donde $y(t)$ es la i -ésima muestra en frecuencia de las N totales.

En la Figura 6.8 se encuentra el gráfico de la varianza de Allan realizado para las N muestras (en este caso 76000). El gráfico se realizó utilizando la biblioteca allan-tools [18] para Python, que además de realizar el gráfico brinda los datos de la tabla 2. AF es el factor de Allan, τ es el intervalo de tiempo entre las muestras, N la cantidad de muestras, $mdev$ el valor medio de la desviación de Allan, min_dev el valor mínimo de la desviación de Allan y max_dev es el valor máximo de la desviación de Allan.

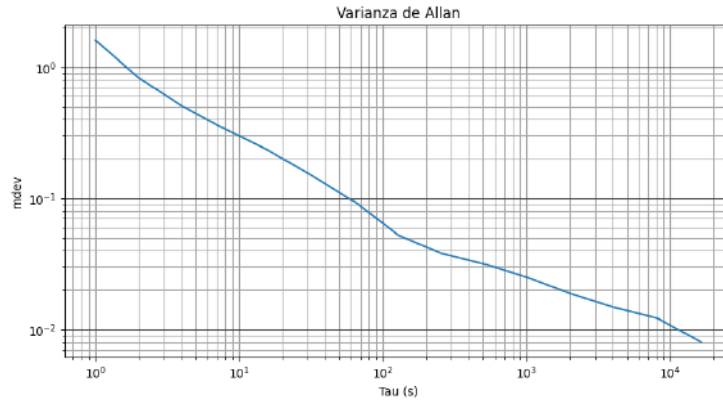


FIGURA 6.8: Gráfico de la varianza de Allan.

TABLA 2: Resultado del cálculo de la varianza de Allan.

AF	τ (s)	N	min_mdev (Hz)	mdev (Hz)	max_mdev (Hz)
1	1.0000e+00	76456	1.6016e+00	1.6045e+00	1.6074e+00
2	2.0000e+00	76453	8.3213e-01	8.3364e-01	8.3515e-01
4	4.0000e+00	76447	5.0499e-01	5.0590e-01	5.0682e-01
8	8.0000e+00	76435	3.3582e-01	3.3643e-01	3.3703e-01
16	1.6000e+01	76411	2.3219e-01	2.3261e-01	2.3303e-01
32	3.2000e+01	76363	1.4928e-01	1.4955e-01	1.4982e-01
64	6.4000e+01	76267	9.3349e-02	9.3518e-02	9.3687e-02
128	1.2800e+02	76075	5.2346e-02	5.2441e-02	5.2536e-02
256	2.5600e+02	75691	3.7998e-02	3.8067e-02	3.8136e-02
512	5.1200e+02	74923	3.1485e-02	3.1543e-02	3.1600e-02
1024	1.0240e+03	73387	2.4775e-02	2.4820e-02	2.4866e-02
2048	2.0480e+03	70315	1.8600e-02	1.8635e-02	1.8670e-02
4096	4.0960e+03	64171	1.4640e-02	1.4669e-02	1.4698e-02
8192	8.1920e+03	51883	1.2096e-02	1.2123e-02	1.2149e-02
16384	1.6384e+04	27307	7.9995e-03	8.0238e-03	8.0481e-03

Como podemos observar en el gráfico de la Figura 6.8 y en la Tabla 2, la desviación media (*mdev*) disminuye a medida que aumenta el intervalo de tiempo τ . Esto significa que el sistema se vuelve más estable a medida que aumenta el intervalo de tiempo. El intervalo de confianza para cada valor calculado de la desviación de Allan es relativamente pequeño, lo que sugiere que las estimaciones presentan una baja variabilidad. Además, la reducción progresiva de la desviación media (*mdev*) con el aumento de τ indica una mayor estabilidad en las mediciones. Esta tendencia sugiere que los valores obtenidos son consistentes y, por lo tanto, pueden considerarse precisos dentro del margen de error del análisis. Además, se observa que la disminución de la pendiente es cercana a $\tau^{-\frac{1}{2}}$ indicando que el ruido presente en las mediciones es mayormente ruido blanco. Este comportamiento sugiere que si el circuito se mantiene encendido durante períodos más largos, debería alcanzar una mayor estabilidad, siempre que no haya cambios ambientales significativos.

También se realizaron mediciones sin la necesidad de esperar el tiempo de estabilización del circuito. Este método consistió en utilizar el primer valor de frecuencia medido cuando el circuito recién se enciende, de esta manera el circuito siempre comienza a operar a la misma temperatura. En el gráfico de la Figura 6.9 se encuentran los valores obtenidos realizando este procedimiento 10 veces, como se observa se obtuvo una frecuencia promedio $f_{MED.SC} = 554,4$ Hz con una incertidumbre de $\Delta f_{MED.SC} = 32$ Hz para una configuración de frecuencia del generador de señales $f_{AD9833.SC} = 1596000$ Hz. La frecuencia del generador tiene una incertidumbre de ± 1 Hz. Se debe mencionar que las mediciones se realizaron en una habitación climatizada a una temperatura constante de 25°C y con reducción de humedad ambiental para trabajar en condiciones uniformes de temperatura y humedad.

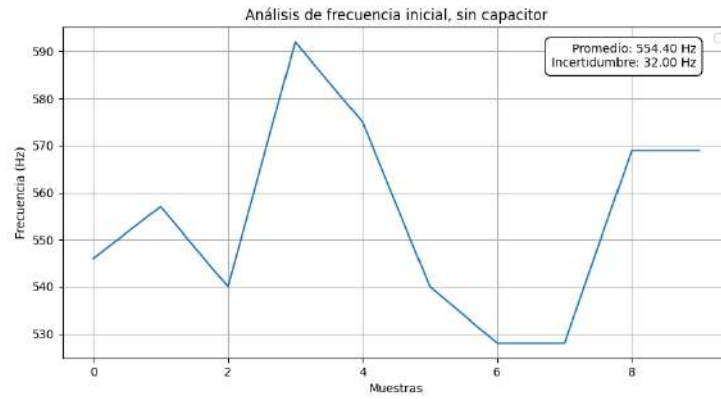


FIGURA 6.9: Análisis de frecuencia inicial en 10 pruebas.

El gráfico de la Figura 6.9 corresponde a las mediciones realizadas en el circuito sin ninguna muestra o capacitor conectado al oscilador Colpitts, por lo tanto corresponde a la capacidad del circuito oscilador Colpitts junto con las capacidades parásitas.

Para lograr parametrizar o caracterizar el circuito se utilizaron dos capacitores como patrón. Estos capacitores fueron medidos en el laboratorio del departamento de metrología cuántica del INTI (Instituto Nacional de Tecnología Industrial) con el equipo Andeen-Hagerling AH 2700A [19] y a una temperatura ambiente de 25 °C.

El primer capacitor medido fue uno de 39 pF. Este tiene el grabado de "39P", la letra P corresponde a el cambio de capacidad permitida con la temperatura y es de $\pm 10\%$. El valor obtenido en la medición fue $C_{39P} = 39,764167$ pF con una incertidumbre $\Delta C_{39P} = 0,47$ fF.

El segundo capacitor utilizado fue uno de 22 pF con el grabado "220K". La tolerancia de fabricación corresponde a la letra K y es de $\pm 10\%$. El resultado de la medición fue $C_{220K} = 23,631262$ pF con una incertidumbre $\Delta C_{220K} = 1,74$ fF.

Realizando el mismo procedimiento que en la medición sin capacitor conectado se midieron ambos capacitores patrón. El primero fue el capacitor 39P $C_{39P} = 39,764167$ pF, que se conecta en paralelo a los capacitores utilizados para el oscilador Colpitts, donde se obtuvo una frecuencia promedio $f_{MED,39P} = 1089,2$ Hz con una incertidumbre de $\Delta f_{MED,39P} = 38$ Hz como se refleja en el gráfico de la Figura 6.10. El generador de señales se configuró a una frecuencia $f_{AD9833,39P} = 1565000$ Hz. Por lo tanto, la frecuencia a la que se encontró oscilando el capacitor $f_{MED,39P}$ es la suma de $f_{MED,39P}$ con $f_{AD9833,39P}$ y lo mismo sucede con la incertidumbre Δf_{39P} .

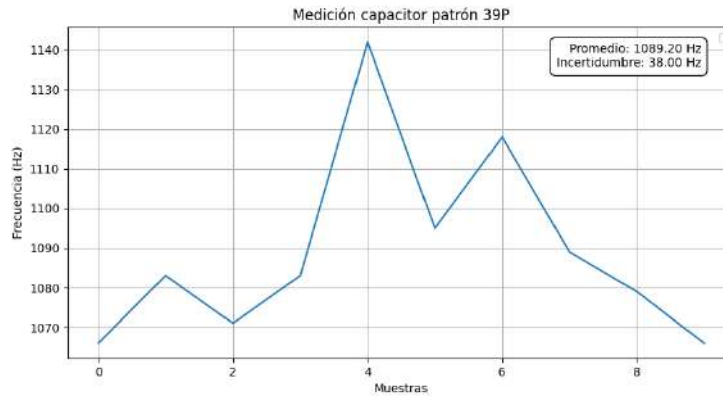


FIGURA 6.10: Medición capacitor patrón 39P.

El mismo proceso se realizó para el capacitor patrón 220K $C_{220K} = 23,631262 \text{ pF}$, los resultados pueden observarse en el gráfico de la Figura 6.11. Se obtuvo una frecuencia promedio $f_{MED,220K} = 1237,2 \text{ Hz}$ con una incertidumbre de $\Delta f_{MED,220K} = 56 \text{ Hz}$ para una configuración de frecuencia del generador de señales $f_{AD9833,220K} = 1577000 \text{ Hz}$. La frecuencia a la que se encontró oscilando el capacitor $f_{220K} = f_{MED,220K} + f_{AD9833,220K}$ y lo mismo sucede con la incertidumbre Δf_{220K} .

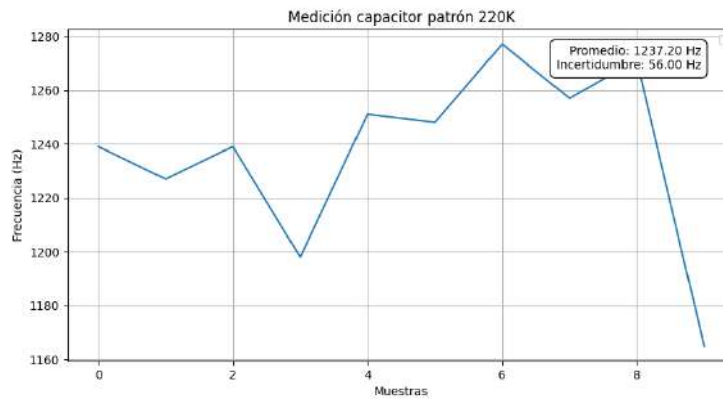


FIGURA 6.11: Medición capacitor patrón 220K.

Luego de realizar estas mediciones utilizando la ecuación del oscilador tanque LC se obtuvo la ecuación 6.2, donde C_{SC} es la capacidad del circuito (sin capacitor conectado) y f_{39P} es la frecuencia a la que se encuentra el circuito con el capacitor C_{39P} conectado. Esta ecuación se obtiene al despejar L y corresponde a la medición del capacitor 39P:

$$L = \frac{1}{(2\pi f_{39P})^2 (C_{SC} + C_{39P})} \quad (6.2)$$

realizando el mismo despeje de L para el capacitor 220K obtenemos la ecuación 6.3, donde f_{220K} es la frecuencia a la que se encuentra el circuito con el capacitor C_{220K} conectado:

$$L = \frac{1}{(2\pi f_{220K})^2 (C_{SC} + C_{220K})} \quad (6.3)$$

Por lo tanto, igualando L y despejando C_{SC} obtenemos la ecuación 6.4:

$$C_{SC} = \frac{f_{39P}^2 \cdot C_{39P} - f_{220K}^2 \cdot C_{220K}}{f_{220K}^2 - f_{39P}^2} \quad (6.4)$$

Para determinar la incertidumbre asociada a C_{SC} , se utilizó el método de propagación de incertidumbres[20]. Por lo tanto, se calcularon las derivadas parciales de C_{SC} respecto a cada variable independiente (f_{39P} , f_{220K} , C_{39P} , C_{220K}) y se multiplicaron por la incertidumbre asociada a la respectiva variable.

La derivada parcial de C_{SC} respecto a f_{39P} y su correspondiente incertidumbre asociada se encuentra en la ecuación 6.5:

$$\left| \frac{\partial C_{SC}}{\partial f_{39P}} \right| \cdot \Delta f_{39P} = \left| \frac{2(C_{39P} - C_{220K})f_{220K}f_{39P}}{(f_{39P}^2 - f_{220K}^2)^2} \right| \cdot \Delta f_{39P} \quad (6.5)$$

Luego la derivada parcial de C_{SC} respecto a f_{220K} y su correspondiente incertidumbre asociada se encuentra en la ecuación 6.6:

$$\left| \frac{\partial C_{SC}}{\partial f_{220K}} \right| \cdot \Delta f_{220K} = \left| -\frac{2(C_{39P} - C_{220K})f_{39P}f_{220K}}{(f_{39P}^2 - f_{220K}^2)^2} \right| \cdot \Delta f_{220K} \quad (6.6)$$

La derivada parcial de C_{SC} respecto a C_{39P} y su correspondiente incertidumbre asociada se encuentra en la ecuación 6.7:

$$\left| \frac{\partial C_{SC}}{\partial C_{39P}} \right| \cdot \Delta C_{39P} = \left| \frac{f_{39P}^2}{f_{220K}^2 - f_{39P}^2} \right| \cdot \Delta C_{39P} \quad (6.7)$$

La derivada parcial de C_{SC} respecto a C_{220K} y su correspondiente incertidumbre asociada se encuentra en la ecuación 6.8:

$$\left| \frac{\partial C_{SC}}{\partial C_{220K}} \right| \cdot \Delta C_{220K} = \left| \frac{f_{220K}^2}{f_{220K}^2 - f_{39P}^2} \right| \cdot \Delta C_{220K} \quad (6.8)$$

Los valores obtenidos al reemplazar las variables en las ecuaciones son los siguientes:

- Capacidad del circuito oscilador Colpitts sin capacitor o muestra conectada (C_{SC}):

$$C_{SC} = 1012,25759\text{pF}$$

- La incertidumbre asociada a f_{39P} :

$$\left| \frac{\partial C_{SC}}{\partial f_{39P}} \right| \cdot \Delta f_{39P} = 3,2781\text{pF}$$

- La incertidumbre asociada a f_{220K} :

$$\left| \frac{\partial C_{SC}}{\partial f_{220K}} \right| \cdot \Delta f_{220K} = 4,7937\text{pF}$$

- La incertidumbre asociada a C_{39P} :

$$\left| \frac{\partial C_{SC}}{\partial C_{39P}} \right| \cdot \Delta C_{39P} = 30,36\text{fF}$$

- La incertidumbre asociada a C_{220K} :

$$\left| \frac{\partial C_{SC}}{\partial C_{220K}} \right| \cdot \Delta C_{220K} = 113,68 \text{fF}$$

La incertidumbre de C_{SC} se calcula realizando la suma en cuadratura de las incertidumbres previamente enumeradas obteniendo:

$$\text{Incertidumbre total: } \Delta C_{SC} = 5,80856 \text{pF}$$

Para obtener el valor del inductor L , se reemplazaron los valores obtenidos en la ecuación 6.3. La incertidumbre total se calculó realizando las derivadas parciales y multiplicándolas por la incertidumbre asociada a cada variable.

Las expresiones para las incertidumbres parciales de L son las siguientes:

$$\left| \frac{\partial L}{\partial f_{220K}} \right| \cdot \Delta f_{220K} = \left| \frac{1}{2\pi^2 f_{220K}^3 (C_{220K} + C_{SC})} \right| \cdot \Delta f_{220K} \quad (6.9)$$

$$\left| \frac{\partial L}{\partial C_{SC}} \right| \cdot \Delta C_{SC} = \left| \frac{1}{4\pi^2 f_{220K}^2 (C_{220K} + C_{SC})^2} \right| \cdot \Delta C_{SC} \quad (6.10)$$

$$\left| \frac{\partial L}{\partial C_{220K}} \right| \cdot \Delta C_{220K} = \left| \frac{1}{4\pi^2 f_{220K}^2 (C_{220K} + C_{SC})^2} \right| \cdot \Delta C_{220K} \quad (6.11)$$

Reemplazando los valores en las ecuaciones 6.3, 6.9, 6.10 y 6.11, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Valor del inductor L :

$$L = 9,81708 \mu\text{H}$$

- Incertidumbre asociada a f_{220K} :

$$\left| \frac{\partial L}{\partial f_{220K}} \right| \cdot \Delta f_{220K} = 696,67 \text{pH}$$

- Incertidumbre asociada a C_{SC} :

$$\left| \frac{\partial L}{\partial C_{SC}} \right| \cdot \Delta C_{SC} = 55,047 \text{nH}$$

- Incertidumbre asociada a C_{220K} :

$$\left| \frac{\partial L}{\partial C_{220K}} \right| \cdot \Delta C_{220K} = 16,523 \text{pH}$$

Finalmente, la incertidumbre total del inductor L se calcula realizando la suma en cuadratura de las contribuciones individuales:

$$\text{Incertidumbre total: } \Delta L = 55,052 \text{nH}$$

Una vez calculado el valor del inductor L con su incertidumbre, se continuó con los cálculos de la capacidad del circuito sin capacitor conectado $C_{SC.MED}$ utilizando las 10 mediciones realizadas para el análisis de frecuencia inicial. Partiendo de la ecuación del oscilador tanque LC y despejando $C_{SC.MED}$, se obtiene la ecuación 6.12:

$$C_{SC.MED} = \frac{1}{(2\pi(f_{SC})^2 \cdot L)} \quad (6.12)$$

donde

$$f_{SC} = f_{MED} + f_{AD9833.SC}$$

Para determinar la incertidumbre de $C_{SC.MED}$, se calcularon las derivadas parciales y se multiplicaron por las incertidumbres asociadas a cada variable. Las expresiones obtenidas son:

- Incertidumbre asociada a f_{SC} :

$$\left| \frac{\partial C_{SC.MED}}{\partial f_{SC}} \right| \cdot \Delta f_{SC} = \left| \frac{1}{2\pi^2 L f_{SC}^3} \right| \cdot \Delta f_{SC} \quad (6.13)$$

- Incertidumbre asociada a L :

$$\left| \frac{\partial C_{SC.MED}}{\partial L} \right| \cdot \Delta L = \left| \frac{1}{4\pi^2 L^2 f_{SC}^2} \right| \cdot \Delta L \quad (6.14)$$

Reemplazando las variables por sus valores correspondientes se obtuvo:

- Capacidad medida sin capacitor conectado $C_{SC.MED}$:

$$C_{SC.MED} = 1012,25579 \text{pF}$$

- Incertidumbre asociada a f_{SC} :

$$\left| \frac{\partial C_{SC.MED}}{\partial f_{SC}} \right| \cdot \Delta f_{SC} = 40,57 \text{fF}$$

- Incertidumbre asociada a L :

$$\left| \frac{\partial C_{SC.MED}}{\partial L} \right| \cdot \Delta L = 5,67649 \text{pF}$$

- Incertidumbre total de $C_{SC.MED}$:

$$\text{Incertidumbre de } C_{SC.MED} = 5,67664 \text{pF}$$

Analizando estos resultados, podemos observar que la capacidad $C_{SC.MED}$ obtenida a partir de las mediciones se encuentra dentro del rango esperado de la incertidumbre de C_{SC} calculado con los capacitores patrón. Además, la incertidumbre de 5 pF obtenida es un valor considerablemente alto respecto al circuito modelo. Este resultado se debe principalmente a la incertidumbre del inductor, ya que la frecuencia causa una incertidumbre de 40 fF. Por lo tanto, para lograr una incertidumbre del orden de los femtofaradios se debe caracterizar tanto el inductor como la inductancia parásita con una precisión de ± 100 pH. Para verificar esta hipótesis, se analizó como influiría un inductor de 10 μH con una tolerancia de ± 100 pH, valor que incluye la inductancia parásita.

- Incertidumbre asociada a L :

$$\left| \frac{\partial C_{SC.MED}}{\partial L} \right| \cdot \Delta L = \left| \frac{1}{4\pi^2 \cdot L^2 \cdot f_{MED}^2} \right| \cdot \Delta L$$

Reemplazando los valores, se obtiene:

$$\left| \frac{\partial C_{MED}}{\partial L} \right| \cdot \Delta L = 10,32 \text{ fF}$$

De esta manera, se determina que la incertidumbre de cada medición es de aproximadamente 42 fF, considerando que las variaciones de frecuencia generan una incertidumbre de 40 fF, la inductancia caracterizada una incertidumbre de 10 fF y luego se realiza la suma en cuadratura. Como la capacidad estudiada se calcula a partir de la diferencia entre la medición con el capacitor conectado y la capacidad del circuito sin capacitor, la incertidumbre final obtenida resulta de 60 fF.

Para estudiar la exactitud y la posibilidad de repetir las mediciones obteniendo resultados similares, se realizaron nuevamente mediciones con los capacitores conectados. Los nuevos resultados para el capacitor 39P se muestran en el gráfico de la Figura 6.12, donde se obtuvo una frecuencia promedio $f_{MED2.39P} = 1115,6 \text{ Hz}$ con una incertidumbre de $\Delta f_{MED.39P} = 29 \text{ Hz}$. Para la misma configuración del generador de señales, $f_{AD9833.39P} = 1565000 \text{ Hz}$.

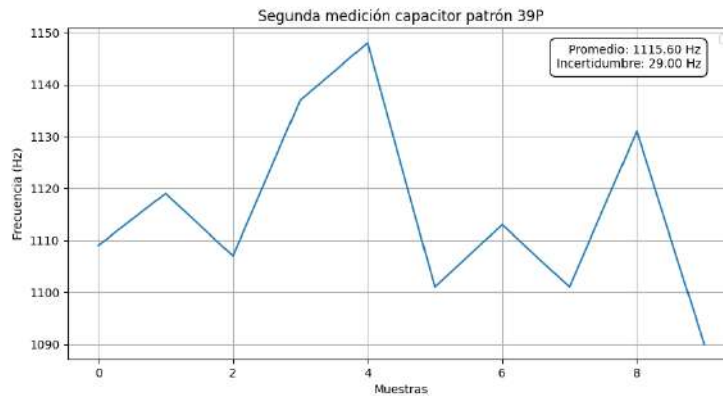


FIGURA 6.12: Segunda medición del capacitor patrón 39P.

Continuando con la segunda medición para el capacitor 220K se obtuvo una frecuencia promedio $f_{MED2.220K} = 1227,8 \text{ Hz}$ con una incertidumbre de $\Delta f_{MED.220K} = 29,5 \text{ Hz}$. Estos resultados se encuentran graficados en la Figura 6.13. Se debe mencionar que la configuración del generador de señales fue la misma que la primer medición, $f_{AD9833.220K} = 1577000 \text{ Hz}$.

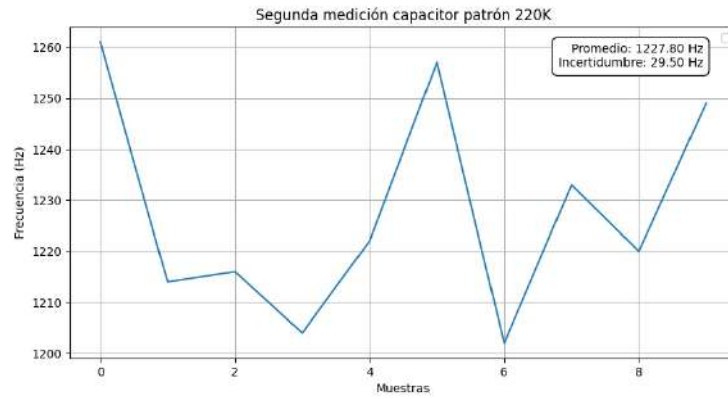


FIGURA 6.13: Segunda medición del capacitor patrón 220K.

Realizando los cálculos previamente mencionados y utilizando los valores calculados para la capacidad sin capacitor conectado, $C_{SC} = 1012,25759 \text{ pF}$ con una incertidumbre $\Delta C_{SC} = 5,80856 \text{ pF}$ y el valor del inductor $L = 9,81708 \text{ } \mu\text{H}$ con una incertidumbre $\Delta L = 55,052 \text{ nH}$, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Para el capacitor 39P: $C_{39P.MED2} = 39,72869 \text{ pF}$ con una incertidumbre $\Delta C_{39P.MED2} = 8,27 \text{ pF}$.
- Para el capacitor 220K: $C_{220K.MED2} = 23,6436 \text{ pF}$ con una incertidumbre $\Delta C_{220K.MED2} = 8,21 \text{ pF}$.

Comparando los resultados obtenidos con los valores medidos en el INTI, se observa una diferencia del orden de los femtofaradios. Sin embargo, la incertidumbre resultó ser de 8 pF principalmente debido a la incertidumbre asociada al inductor. Dado que la contribución de la incertidumbre asociada a la medición de frecuencia es significativamente menor, del orden de $\pm 40 \text{ fF}$, la precisión del circuito depende mayormente de la caracterización del inductor y la inductancia parásita. Para que este circuito sea útil para hallar la permitividad con valores menores a 3 se debe caracterizar la inductancia total con una tolerancia de $\pm 100 \text{ pH}$, ya que para permitividades altas no es necesario medir la capacidad con una incertidumbre del orden de los femtofaradios porque las interacciones moleculares son fuertes.

Las derivadas y cálculos desarrollados para este análisis se realizaron en un script de Python, utilizando la biblioteca sympy [21] para calcular las derivadas. Al igual que los demás programas desarrollados, este script se encuentra en el repositorio de Github previamente mencionado.

Parte 7

Conclusiones

Se logró diseñar, desarrollar y construir un equipo para realizar mediciones de capacidad con una incertidumbre de ± 8 pF. Este valor está principalmente influenciado por la incertidumbre asociada al inductor utilizado, ya que la medición de frecuencia tiene una incertidumbre asociada significativamente menor, del orden de ± 40 fF. Para lograr que este circuito sea adecuado para determinar permitividades menores a 3 se debe caracterizar la inductancia total (inductor e inductancia parásita) con una tolerancia de ± 100 pH, dado que para permitividades mayores no es necesario medir la capacidad con una incertidumbre del orden de los femtofaradios debido a que las interacciones moleculares son fuertes. Al realizar dicha caracterización se obtiene una incertidumbre asociada a la inductancia de ± 10 fF, de esta manera la incertidumbre total resulta ser de ± 60 fF debido a que la capacidad resulta de la diferencia entre la medición sin capacitor conectado y conectado.

Por otra parte, esta modernización del equipo diseñado permite obtener valores de frecuencia digitalmente, lo que ha mejorado la rapidez y practicidad en el proceso de medición, procesamiento y análisis de datos. Estas características representan una mejora importante respecto al circuito modelo. Para mejorar la precisión y exactitud es conveniente construir un gabinete que proporcione aislamiento a interferencias de radiofrecuencia y también que mantenga una temperatura controlada.

A partir del análisis de la varianza de Allan se determinó que el sistema se vuelve más estable a medida que aumenta el intervalo de tiempo. El intervalo de confianza para cada valor calculado de desviación de Allan es relativamente pequeño, lo que quiere decir que las estimaciones son precisas. Además, se observa que la disminución de la pendiente es cercana a $\tau^{-1/2}$ indicando que el ruido presente en las mediciones es mayormente ruido blanco.

Finalmente puede decirse que se cumplió con el objetivo de modernizar el circuito modelo para obtener capacidades que sean útiles en el estudio de la permitividad dieléctrica, siempre y cuando se realice una caracterización de la inductancia con una incertidumbre de ± 100 pH. Además, se obtuvo una base para futuros desarrollos y mejoras del circuito y su entorno.

Parte 8

Anexos

Anexo PCB

El PCB final se realizo en un router CNC del laboratorio de ITeDA. Pero antes de construirlo, se realizó un prototipo con una placa universal, como se muestra en la Figura 8.1.

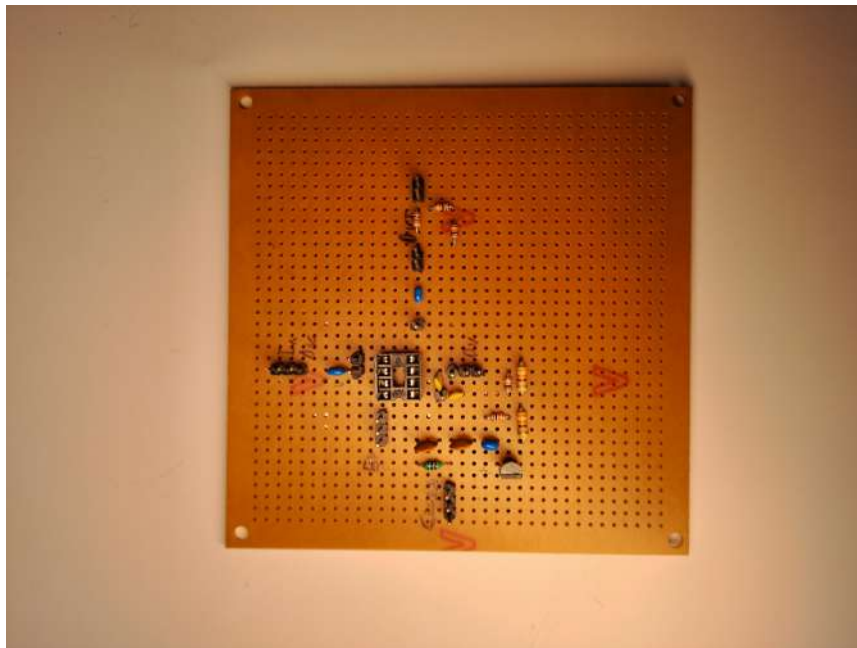


FIGURA 8.1: Placa prototipo.

Gracias al desarrollo de la placa prototipo se pudo asegurar que los cálculos y los resultados de las simulaciones eran los correctos. Luego se procedió con el desarrollo del circuito esquemático en el software de desarrollo de PCB, como se muestra en la Figura 4.1, para continuar con el diseño del footprint. En las Figuras 8.2, 8.3 y 8.4 se puede apreciar el diseño final de la placa desarrollada en el software.

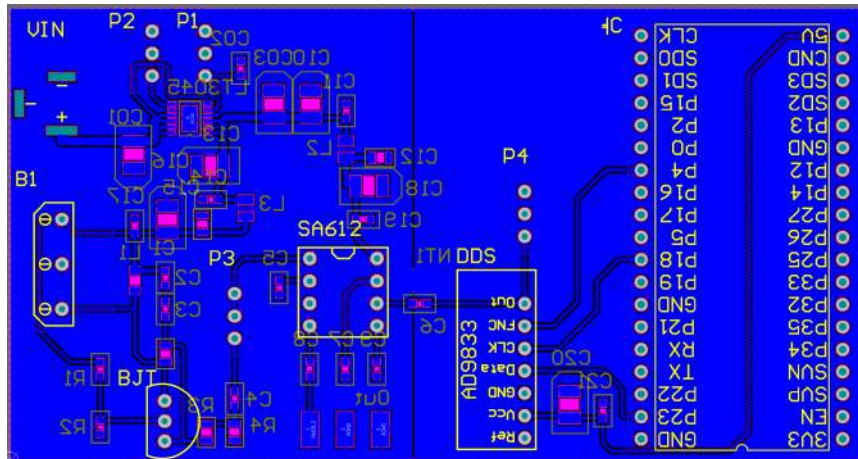


FIGURA 8.2: Diseño desarrollado en software de desarrollo de PCB, capa inferior.

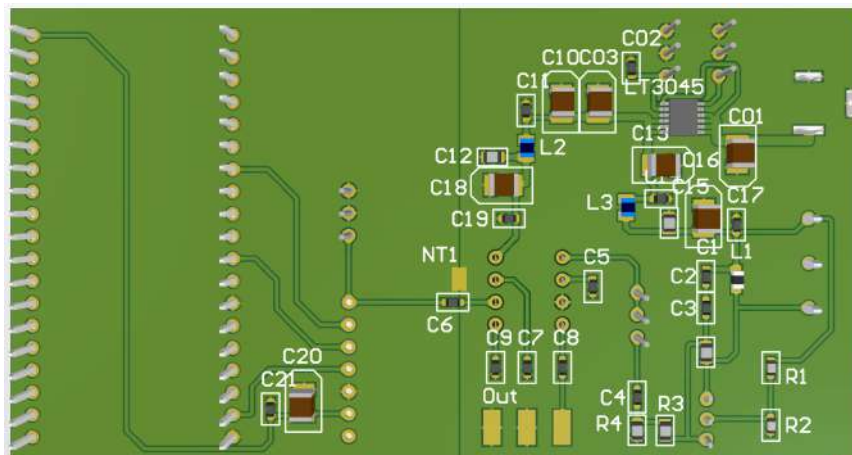


FIGURA 8.3: Diseño desarrollado en software de desarrollo de PCB, capa inferior vista 3D.

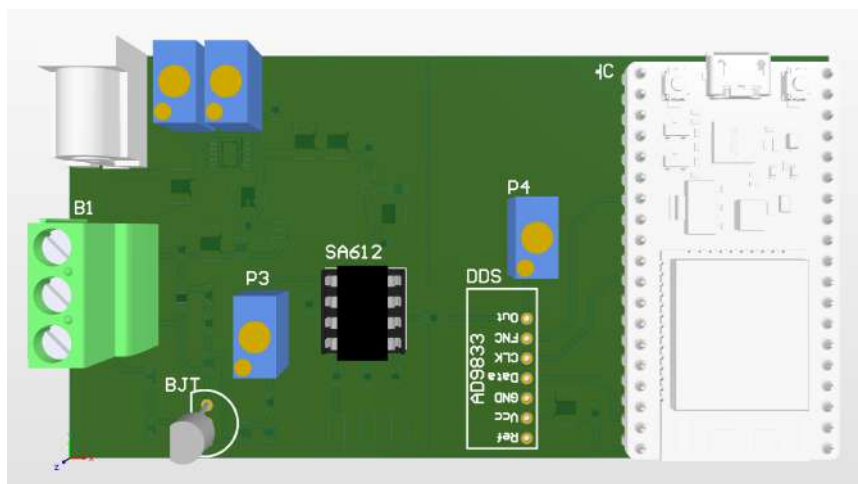


FIGURA 8.4: Diseño desarrollado en software de desarrollo de PCB, capa superior vista 3D.

Como previamente se mencionó el PCB se fabricó en un router CNC. La placa elegida fue una placa de fibra de vidrio FR4, simple faz. Este material es ideal para esta aplicación ya que está desarrollado con fibra de vidrio reforzada con resina epoxi y otorga alta rigidez y resistencia mecánica. Además, tiene una excelente estabilidad térmica, baja absorción de humedad y una alta resistencia dieléctrica. Así como también es un material ampliamente utilizado y de bajo costo.

El PCB con todos los componentes montados se observa en las Figuras 8.5 y 8.6.

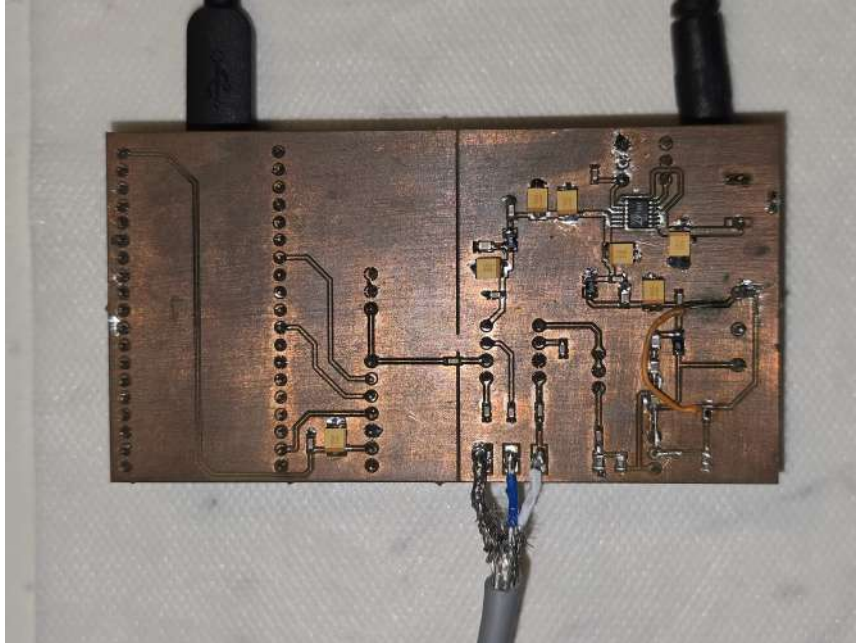


FIGURA 8.5: Placa final fabricada en router CNC. Vista inferior.

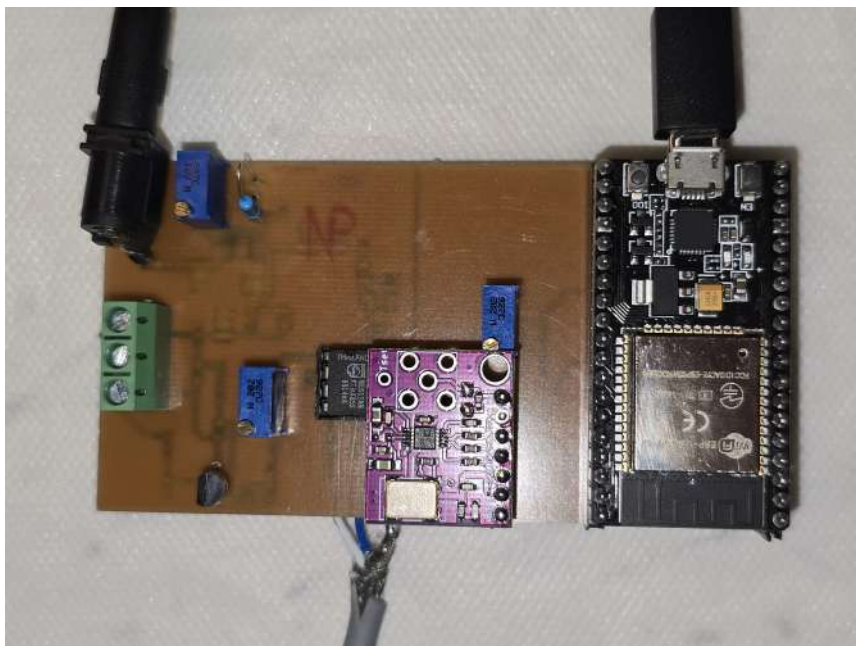


FIGURA 8.6: Placa final fabricada en router CNC. Vista superior.

Bibliografía

- [1] M.A. Rivas, A.H. Buep, T.P. Iglesias. Study of the binary mixtures of {monoglyme + (hexane, cyclohexane, octane, dodecane)} by ECM-average and PFP models. *The Journal of Chemical Thermodynamics*, Volume 89, October 2015, Pages 69-78. <https://doi.org/10.1016/j.jct.2015.05.006>.
- [2] Máximo E. Ramia, Carlos A. Martín y Miguel A. Chesta. *Medición de la constante dieléctrica: Técnica Experimental y Estudio de Rocas Sedimentarias*. Trabajos de Física, Serie .A", No. 14/2012, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Ciudad Universitaria, X5016LAE Córdoba, Argentina.
- [3] Castiñeira Pérez, D. (2017). Desarrollo de un medidor USB de la permitividad de un líquido basado en un sensor capacitivo. Trabajo de Fin de Grado, Escuela de Ingeniería de Telecomunicación, Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación. Tutores: Camilo Quintáns Graña.
- [4] Gómez, E. S. H. (2014). Desarrollo de un sensor de permitividad dieléctrica de bajo costo a la frecuencia de 2.45 GHz. Tonantzintla-Puebla: Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica.
- [5] Buep, A. H. (1989). Permitividad de exceso en mezclas binarias líquidas de componentes no polares o levemente polares. Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. https://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n2281_Buep.
- [6] Teodosia Arauz Castex; Pedro Díaz de Vivar; María B. Rebollo Paz; Adrián H. Buep. A new heterodyne-beat circuit for the determination of static permittivity. *Rev Sci Instrum*, 66, 3067–3068 (1995). <https://doi.org/10.1063/1.1145530>.
- [7] HP4284A - Operation Manual. https://xdevs.com/doc/HP_Agilent_Keysight/HP%204284A%20Operation.pdf.
- [8] M. Barón and H. Mechetti. Dielectric properties of binary mixtures. 5. Dilute alcohol/nonpolar solvent systems. *Journal of Physical Chemistry*, 86(17), 3464-3468. Publication Date: August 1, 1982. <https://doi.org/10.1021/j100214a038>.
- [9] MBR Paz, AH Buep, M Baron. Dielectric properties of binary systems 8. Improved model for alcohol/non polar systems. *Journal of Molecular Liquids*, 38(3-4), 225-232, October 1988. [https://doi.org/10.1016/0167-7322\(88\)80020-5](https://doi.org/10.1016/0167-7322(88)80020-5).
- [10] Böttcher, C. J. F., & Bordewijk, P. (1978). *Theory of Electric Polarization: Dielectrics in Time-Dependent Fields*. Volume 2. Elsevier Scientific Publishing Company.
- [11] Yang, X., Liu, X., Yu, S., Gan, L., Zhou, J., & Zeng, Y. (2019). Permittivity of Undoped Silicon in the Millimeter Wave Range. *Electronics*, 8(8), 886. <https://doi.org/10.3390/electronics8080886>.

- [12] Analog Devices. (n.d.). Low Power, 12.65 mW, 2.3 V to 5.5 V, Programmable Waveform Generator Data Sheet AD9833. Retrieved from <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ad9833.pdf>.
- [13] NXP. (2014). SA612A Double-balanced mixer and oscillator. *Product data sheet*. Rev. 3 — 4 June 2014. <https://www.nxp.com/docs/en/data-sheet/SA612A.pdf>.
- [14] Espressif Systems. (n.d.). ESP32-DevKitC. <https://docs.espressif.com/projects/esp-dev-kits/en/latest/esp32/esp32-devkitc/index.html>.
- [15] Fairchild Semiconductor. (N.D.). BC548B NPN Epitaxial Silicon Transistor. *Technical Data Sheet*. <https://pdf1.alldatasheet.es/datasheet-pdf/view/547462/FAIRCHILD/BC548B.html>.
- [16] Tektronix. (N.D.). DPO7104 Digital Phosphor Oscilloscope. *Technical Data Sheet*. <https://www.tek.com/en/products/oscilloscopes/dpo7000-digital-phosphor-oscilloscope>.
- [17] Allan, D. Statistics of Atomic Frequency Standards, pages 221–230. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 54, No 2, febrero de 1966.
- [18] Wallin, A. E. E. (2007). AllanTools: A Python library for computing Allan variance and related statistics. *Python Package Index (PyPI)*. <https://pypi.org/project/AllanTools/>. Licencia: GNU Lesser General Public License Version 3.
- [19] Andeen-Hagerling AH 2700A 50 Hz-20 kHz Ultra-precision Capacitance/Loss Bridge. *Technical Data Sheet*. <https://www.andeen-hagerling.com/ah2700a.pdf>.
- [20] Instituto Argentino de Normalización y Certificación (IRAM). (2001). *IRAM 35050: Estadística. Procedimientos para la evaluación de la incertidumbre de la medición*. IRAM. Disponible en: <https://www.iram.org.ar/busqueda-avanzada-de-normas-iram/>.
- [21] SymPy Development Team. (2024). SymPy: A Python library for symbolic mathematics. *Python Package Index (PyPI)*. <https://pypi.org/project/sympy/>. Licencia: BSD License.