PEC 4 - Interpolación, derivación e integración numérica (I)

Fecha de entrega: 25/03/2022

Universitat Oberta de Catalunya

Descripción del problema

Una opción financiera de compra es un contrato entre dos partes que le da a su poseedor el derecho de comprar un determinado activo financiero subyacente (por ejemplo una acción), el precio actual de la cual (es decir, en $t = 0$) es S_0, en una fecha futura $t = T$ (denominado **vencimiento**) por un determinado precio K (**precio de ejercicio**). Si llegado el vencimiento, el valor del subyacente en el mercado S_T es superior a K, entonces la opción se ejerce y se adquiere el activo pagando K, en caso contrario la opción no se ejerce. Este es el llamado **precio de liquidación** de la opción, que puede resumirse matemáticamente con la fórmula,

$$\max(S_T - K, 0),$$

es decir, el máximo entre $S_T - K$ y 0.

El valor de este contrato, es decir, el precio que tenemos que pagar para adquirir el derecho de ejercicio, se conoce como **prima de la opción**, asumiendo que los precios desde el instante $t = 0$ hasta vencimiento, $t = T$, se mueven siguiendo un determinado modelo, conocido como **modelo de Black-Scholes**, el valor de dicho contrato viene dado por,

$$v(S_0, \sigma, T, r, K) = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2), \tag{1}$$

donde,

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy$ y $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ son las funciones de distribución y de densidad normal estándar respectivamente. Los parámetros r y σ son, respectivamente, el llamado **tipo de interés libre de riesgo** y la **volatilidad** del activo subyacente (que podemos definir vagamente como la varianza del activo subyacente).

Además del cálculo de la prima de la opción, para una adecuada gestión del riesgo financiero, los bancos calculan las denominadas **delta** y **gama** de la opción,

$$\delta = v'(S), \quad \Gamma = v''(S), \tag{2}$$

es decir, la primera y la segunda derivada de v respecto del valor del activo subyacente, respectivamente. La delta nos indica como varía el precio de la opción ante una variación del valor del subyacente, mientras que la gama nos dice como varía la delta cuando varía el precio del activo subyacente. Si derivamos v obtenemos,

$$\delta = \Phi(d_1), \quad \Gamma = \frac{\phi(d_1)}{\sigma\sqrt{T}S_0}. \tag{3}$$

La referencia básica para la realización de esta actividad es la guía de teoría (2). Para la implementación de las tareas en código R la referencia recomendada es (1).

1. Interpolación

La siguiente tabla contiene los tipos de interés (en %, por ejemplo, el tipo 1m representa $r = 0.0144$) del departamento del tesoro de los Estados Unidos para opciones con vencimientos (T) a 1, 2, 3 y 6 meses, así como los vencimientos a 1, 2, 3, 5, 7 y 10 años, donde $T = 1$ representa 1 año.

1m	2m	3m	6m	1a	2a	3a	5a	7a	10a
1.44	1.47	1.50	1.51	1.54	1.57	1.60	1.61	1.73	1.79

Si quisiéramos calcular el valor de cuatro opciones con vencimientos 1.5 meses, 10 meses, 6.5 años y 9 años, necesitaríamos sus correspondientes tipos de interés. Los tipos de interés que no estén en la tabla anterior tendrás que obtenerlos por interpolación. El tipo de interés tiene que ser una cantidad estrictamente positiva $r > 0$. Se pide:

1.1. Cálculo del polinomio interpolador

Realiza la interpolación correspondiente para obtener el tipo de interés de los vencimientos: 1.5m, 10m, 6.5a y 9a, mediante **dos** de los tres métodos descritos en el Capítulo 1 de (2) sobre el cálculo del polinomio interpolador. Es decir, determinante de Vandermonde, método de Lagrange o método de las diferencias divididas de Newton. Sin hacer ningún cálculo, ¿cuál es el grado de cada polinomio en cada método? Justifica la respuesta. Para obtener el polinomio interpolador, usa todos los puntos de la tabla anterior. Escribe y representa el polinomio interpolador que has obtenido en cada caso. Para **uno** de los dos métodos, escribe cómo se ha obtenido el polinomio interpolador. En este caso, sólo podéis utilizar R para las operaciones básicas que requiera el método.

NOTA: Por ejemplo, las diferencias divididas de Newton, tienen un cierto *algoritmo*. Si escogiérais este caso, una manera de responder la pregunta planteada sería realizar una tabla que recoja como se van obteniendo las diferentes diferencias divididas para obtener el polinomio interpolador.

1.1.1. Solución:

El polinomio interpolador es de grado 9. Recordad que este polinomio es único, es decir, la solución obtenida por cada uno de los métodos **debe ser** la misma:

$$p_9(x) = 1.436230e-02 - 2.710977e-03x + 5.008509e-02x^2 - 1.628679e-01x^3 + 2.203638e-01x^4 - \\ - 1.461259e-01x^5 + 5.079088e-02x^6 - 9.310835e-03x^7 + 8.429738e-04x^8 - 2.941307e-05x^9. \quad (4)$$

Los resultados de la interpolación son:

1.5m	10m	6.5a	9a
1.45	1.48	−163.71	5348.84

El método que se describe en el código para el cáculo del polinomio interpolador es el de Vandermonde. Una propuesta de código R es la siguiente:

```
#calculo del polinomio interpolador (Vandermonde)
#tabla de tipos
ti1=0.0144
ti2=0.0147
ti3=0.0150
ti4=0.0151
ti5=0.0154
ti6=0.0157
ti7=0.0160
ti8=0.0161
ti9=0.0173
ti10=0.0179

#Vencimientos a interpolar
T1=1.5/12
T2=10/12
T3=6.5
T4=9

polyinterp=function(x,y)
{
  if(length(x)!=length(y))
    stop ("La longitud de los vectores x e y debe ser la misma" )
  n=length(x)-1
  vandermonde=rep(1,length(x))
  for(i in 1:n)
  {
    xi=x^i
```

```
    vandermonde=cbind(vandermonde,xi)
  }
  beta=solve(vandermonde,y)
  names(beta)=NULL
  return(beta)
}

#regla de Horner para la evalucion de polinomios
horner=function(x,coefs)
{
  y=rep(0,length(x))
  for(i in length(coefs):1)
    y=coefs[i]+x*y
  return(y)
}

#resultados interpolacion usando el polinomio interpolador
T=c(1/12,2/12,3/12,6/12,1,2,3,5,7,10)
r=c(ti1,ti2,ti3,ti4,ti5,ti6,ti7,ti8,ti9,ti10)
p=polyinterp(T,r)
r1p=horner(T1,p)
r2p=horner(T2,p)
r3p=horner(T3,p)
r4p=horner(T4,p)

#grafico del polinomio interpolador
vencimiento=seq(1/12,10,0.1)
tipointeres=horner(x,p)
plot(vencimiento,tipointeres)
```

1.2. Interpolación por tramos lineal

Calcula los tipos de interés para los mismos vencimientos del apartado anterior pero esta vez mediante interpolación por tramos lineal.

1.2.1. Solución:

Los resultados de la interpolación son:

1.5m	10m	6.5a	9a
1.46	1.53	1.70	1.77

Una propuesta de código R es:

```
#interpolacion por tramos lineal
#r=m*T+b
linterp=function(x1,y1,x2,y2)
{
  m=(y2-y1)/(x2-x1)
  b=y2-m*x2
  return(c(b,m))
}

#resultados interpolacion por tramos lineal
p1=linterp(1/12,ti1,2/12,ti2)
r1=p1[[2]]*T1+p1[[1]]

p2=linterp(6/12,ti4,1,ti5)
r2=p2[[2]]*T2+p2[[1]]

p3=linterp(5,ti8,7,ti9)
r3=p3[[2]]*T3+p3[[1]]

p4=linterp(7,ti9,10,ti10)
r4=p4[[2]]*T4+p4[[1]]
```

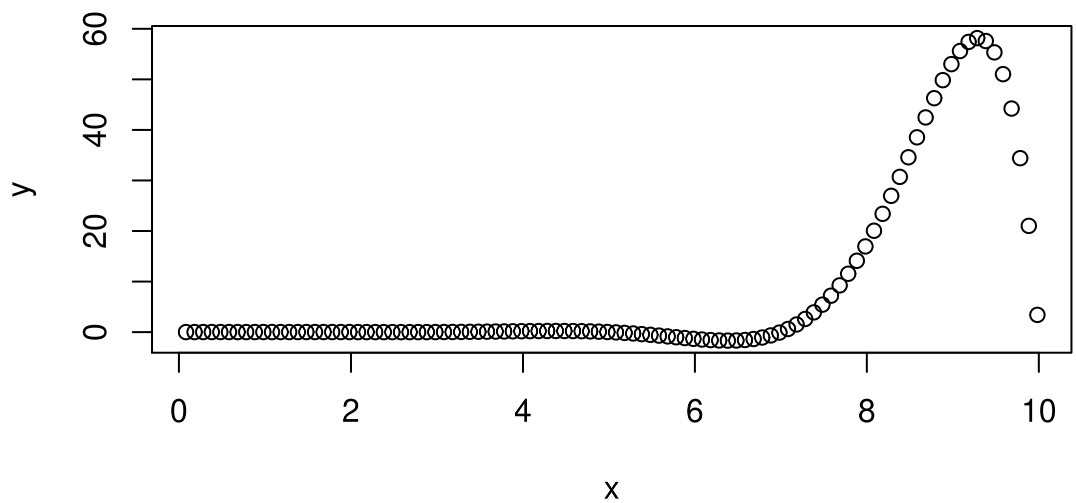
1.3. Análisis de los resultados

Detalla si observas algún resultado extraño en el primer apartado y concluye cuál de los dos métodos empleados sería el más adecuado para la obtención de los tipos de interés solicitados.

NOTA: Puedes utilizar funciones o paquetes de R para ayudarte en los cálculos y en el caso de interpolación que no expliques. En este caso, explica muy brevemente su funcionamiento. La función Φ viene dada en R por `pnorm`. Para evaluar el polinomio interpolador puedes usar el método de Horner (descrito en la Sección 1.3.2 de (1)).

1.3.1. Solución:

Como se puede observar, el tipo de interés para el vencimiento de 6.5 años es negativo en contradicción con la hipótesis del problema. Por otro lado, para el vencimiento de 9 años, el tipo de interés obtenido es extremadamente grande, lo cual se debe al fenómeno de Runge (observad la figura que hay a continuación). Claramente es más adecuada una interpolación por tramos. En esta actividad se ha usado la interpolación lineal pero con frecuencia se usan los *splines* cúbicos.



Overall process

Criterios de corrección y puntuación de los apartados

- 1. Esta prueba tendrá un valor de **10 puntos** repartidos cómo sigue:
    - Tarea 1.1: En esta tarea se pide decir cuál es el grado del polinomio interpolador sin hacer ningún cálculo, calcular el polinomio interpolador usando dos métodos y explicando los pasos de uno de ellos. Además, se pide el tipo de interés para cada uno de los cuatro vencimientos dados. Se calificará con 0.5 puntos dar el grado del polinomio correctamente, 1 punto por dar (y representar) correctamente el polinomio interpolador (en cada caso), la explicación del método escogido tendrá un valor de 2.5 puntos y cada tipo de interés calculado valdrá 0.5. **Total 7 puntos**.

- Tarea 1.2: En esta tarea se pide interpolar el tipo de interés para cuatro vencimientos dados mediante interpolación por tramos lineal. Se calificará con 0.5 puntos cada uno de los tipos de interés calculados. **Total 2 puntos**.
- Tarea 1.3: En esta tarea se pide analizar los resultados obtenidos. **Total 1 punto**.

Referencias

[1] Howard, J. P. (2017). Computational methods for numerical analysis with R. Nueva York: Chapman & Hall/CRC.

[2] Ortiz Gracia, L. (2019). Guía de Interpolación, derivación e integración numérica. PID_00266171.