PEC 5 - Interpolación, derivación e integración numérica (y II)

Fecha de entrega: 8/4/2022

Universitat Oberta de Catalunya

Descripción del problema

Una opción financiera de compra es un contrato entre dos partes que le da a su poseedor el derecho de comprar un determinado activo financiero subyacente (por ejemplo una acción), el precio actual de la cual (es decir, en $t = 0$) es S_0, en una fecha futura $t = T$ (denominado **vencimiento**) por un determinado precio K (**precio de ejercicio**). Si llegado el vencimiento, el valor del subyacente en el mercado S_T es superior a K, entonces la opción se ejerce y se adquiere el activo pagando K, en caso contrario la opción no se ejerce. Este es el llamado **precio de liquidación** de la opción, que puede resumirse matemáticamente con la fórmula,

$$\max(S_T - K, 0),$$

es decir, el máximo entre $S_T - K$ y 0.

El valor de este contrato, es decir, el precio que tenemos que pagar para adquirir el derecho de ejercicio, se conoce como **prima de la opción**, asumiendo que los precios desde el instante $t = 0$ hasta vencimiento, $t = T$, se mueven siguiendo un determinado modelo, conocido como **modelo de Black-Scholes**, el valor de dicho contrato viene dado por,

$$v(S_0, \sigma, T, r, K) = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2), \tag{1}$$

donde,

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy$ y $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ son las funciones de distribución y de densidad normal estándar respectivamente. Los parámetros r y σ son, respectivamente, el llamado **tipo de interés libre de riesgo** y la **volatilidad** del activo subyacente (que podemos definir vagamente como la varianza del activo subyacente).

Además del cálculo de la prima de la opción, para una adecuada gestión del riesgo financiero, los bancos calculan las denominadas **delta** y **gama** de la opción,

$$\delta = v'(S), \quad \Gamma = v''(S), \tag{2}$$

es decir, la primera y la segunda derivada de v respecto del valor del activo subyacente, respectivamente. La delta nos indica como varía el precio de la opción ante una variación del valor del subyacente, mientras que la gama nos dice como varía la delta cuando varía el precio del activo subyacente. Si derivamos v obtenemos,

$$\delta = \Phi(d_1), \quad \Gamma = \frac{\phi(d_1)}{\sigma\sqrt{T}S_0}. \tag{3}$$

Recordamos que en la actividad anterior, calculamos el valor de la función en ciertos puntos *desconocidos* a partir de puntos *conocidos*. En esta actividad, buscaremos valores de las derivadas de la función. La referencia básica para la realización de esta actividad es la guía de teoría (2). Para la implementación de las tareas en código R la referencia recomendada es (1).

1. Derivación

Queremos calcular la delta y la gamma de la opción cuando $S_0 = 99, K = 99, r = 0.01, \sigma = 0.4, T = 0.25$, mediante derivación numérica, así como medir el error cometido. A tal efecto, consideraremos que los valores exactos de la delta y de la gamma son los que vienen dados por las fórmulas de la expresión (3).

1.1. Valores exactos

Calcula, con los valores anteriores, delta (δ) y gama (Γ) mediante la expresión (3).

1.1.1. Solución:

El valor de delta es 0.544787 y el de gamma es 0.020021.

El código R utilizado es:

```
#parametros de la call
K=99
r=0.01
sigma=0.4
T=0.25

#delta de la call (formula exacta)
BSdeltacall=function(S)
{
  d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2)*(T))/(sigma*sqrt(T))
  deltacall=pnorm(d1)
  return(deltacall)
}

#gamma de la call (formula exacta)
BSgammacall=function(S)
{
```

```
  d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2)*(T))/(sigma*sqrt(T))
  gamma=(dnorm(d1))/(S*sigma*sqrt(T))
  return(gamma)
}

#valor exacto de delta
vd=BSdeltacall(99)

#valor exacto de gamma
vg=BSgammacall(99)
```

1.2. Derivación numérica

Calcula el valor de delta y de gama mediante derivación numérica (detallada en la Sección 2.1 de (2)) usando $h = 0.1$ y $h = 0.001$. Escribe los resultados obtenidos en la tabla de más abajo, donde el error absoluto y el error relativo se calculan usando el valor exacto de delta y de gama que has calculado en el apartado anterior.

h	Error absoluto (δ)	Error relativo (δ)	Error absoluto (Γ)	Error relativo (Γ)
0.1	1.000547 e-03	1.836585 e-03	3.574282 e-08	1.785222 e-06
0.001	1.001069 e-05	1.837544 e-05	4.165589 e-09	2.080558 e-07

Para $h = 0.1$, $h = 0.01$, $h = 0.001$ y $h = 0.0001$, representa gráficamente el Error absoluto para δ o Γ. ¿Qué se observa?

1.2.1. Solución:

Una propuesta de códifo R para responder a las anteriores preguntas es el siguiente:

```
#precio de la call
BScall=function(S)
{
  d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2)*(T))/(sigma*sqrt(T))
  d2=d1-sigma*sqrt(T)
  call=S*pnorm(d1)-exp(-r*T)*K*pnorm(d2)
  return(call)
}

#primera derivada numerica generica para calcular delta
findiff=function(f,x,h)
```

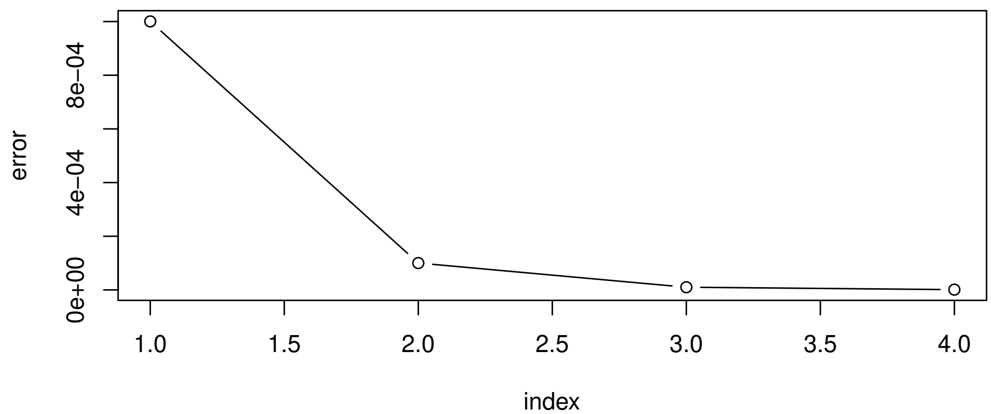
```
{
  return((f(x+h)-f(x))/h)
}

#segunda derivada numerica generica para calcular gamma
findiff2=function(f,x,h)
{
  return((f(x+h)-2*f(x)+f(x-h))/h^2)
}

#valor aproximado de la delta para h=0.1 y errores
vdapprox=findiff(BScall,99,0.1)
abserrdh1=abs(vd-vdapprox)
relerrdh1=abserrdh1/vd

#valor aproximado de la delta para h=0.001 y errores
vdapprox=findiff(BScall,99,0.001)
abserrdh2=abs(vd-vdapprox)
relerrdh2=abserrdh2/vd

#valor aproximado de la gamma para h=0.1 y errores
vgapprox=findiff2(BScall,99,0.1)
abserrgh1=abs(vg-vgapprox)
relerrgh1=abserrgh1/vg

#valor aproximado de la gamma per h=0.001 y errores
vgapprox=findiff2(BScall,99,0.001)
abserrgh2=abs(vg-vgapprox)
relerrgh2=abserrgh2/vg
```

Siguiendo la misma lógica del código anterior, se pueden obtener los errores pedidos para realizar el gráfico que figura al final del documento.

Para cada h, hemos calculado el error absoluto para δ. En el gráfico mostrado, se observa el decaimiento (exponencial) del error absoluto a medida que h disminuye mostrando, así, como los valores obtenidos numéricamente se asemejan cada vez más al valor exacto.

Criterios de corrección y puntuación de los apartados

- 1. Derivación. La puntuación será como sigue:
  - Tarea 1.1: Se pide calcular los valores exactos de delta y de gamma. El cálculo de delta valdrá 1 punto y el de gamma 1 punto. **Total 2 puntos**.
  - Tarea 1.2: El cálculo de delta mediante derivación numérica valdrá 1 punto y el cálculo de gamma mediante derivación numérica valdrá 1 punto. El cálculo de cada uno de los



Error absoluto para δ. Se observa como, a medida que h disminuye, el error absoluto decrece.

errores para cada h valdrá 0.5 puntos. La representación gráfica (y justificación) del error absoluto tendrá un valor de 2 puntos. **Total 8 puntos**

Referencias

[1] Howard, J. P. (2017). Computational methods for numerical analysis with R. Nueva York: Chapman & Hall/CRC.

[2] Ortiz Gracia, L. (2019). Guía de Interpolación, derivación e integración numérica. PID_00266171.