PEC 2 - Métodos numéricos en álgebra lineal (II)

Fecha de entrega: 04/03/2022

Universitat Oberta de Catalunya

Descripción del problema

Continuamos con el problema de la práctica anterior, donde habíamos comenzado con el método utilizado por Leverrier durante el descubrimiento del planeta Neptuno. En esta práctica seguiremos con el algoritmo propuesto por Leverrier para el cálculo de los autovalores de L, que venía dada por:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 35 & -36 & -180 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Previamente, habíamos calculado la suma de las potencias de los valores propios mediante el cálculo de la traza de la potencia de la matriz L y habíamos obtenido los coeficientes del polinomio característico. Presentaremos una alternativa a ese cálculo.

1. Métodos numéricos aplicados a los conceptos básicos del álgebra lineal (Continuación)

En este apartado nos centraremos en el cálculo de los valores propios, teniendo presente los resultados obtenidos en la práctica anterior y siguiendo el algoritmo de Leverrier.

1.1. Alternativa al cálculo de los coeficientes del polinomio característico.

Teniendo en cuenta la expresión del polinomio característico introducida en la práctica anterior:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4\,, \tag{2}$$

existe una variante del método de Leverrier, conocida como el método de Leverrier-Faddeev, que también nos permite obtener los coeficientes del polinomio a partir del cálculo de la traza de ciertas matrices, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -Tr(B_1), & B_1 &= L \\
c_2 &= -\frac{1}{2}Tr(B_2), & B_2 &= L(B_1 + c_1 I) \\
c_3 &= -\frac{1}{3}Tr(B_3), & B_3 &= L(B_2 + c_2 I) \\
c_4 &= -\frac{1}{4}Tr(B_4), & B_4 &= L(B_3 + c_3 I)
\end{aligned}$$

y, en general, $c_n = -\frac{1}{n}Tr(B_n)$, con $B_n = L(B_{n-1} + c_{n-1} I)$.

Se pide calcular los coeficientes del polinomio característico siguiendo las expresiones anteriores y comprobar que se obtienen los mismos valores que resolviendo el sistema de la práctica anterior.

1.2. Tercera parte del algoritmo de Leverrier: Cálculo de los valores propios de L (I).

En su estudio, Leverrier encontró varias relaciones muy útiles para el cálculo de los valores propios de la matriz L. Definimos, a partir de los s_n de la práctica anterior:

- $\sigma_n = \frac{s_n}{s_{n-1}}, \quad n \geq 2, \quad \text{con } \sigma_1 = 0,$
- $\delta_n = \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}}, \quad n \geq 3.$

Haciendo uso de las sucesiones anteriores, se definen dos nuevas sucesiones a_n y b_n de la siguiente forma:

- $a_n + b_n = \sigma_n + \delta_n \sigma_{n-2}, \quad n \geq 3,$
- $a_n b_n = \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \delta_n, \quad n \geq 3,$

con $|a_n| \geq |b_n|$ para $n \geq 4$.

Se puede demostrar que las sucesiones a_n y b_n convergen hacia los 2 valores propios de L con mayor módulo. Por tanto, si calculamos sus términos sucesivos, obtendremos aproximaciones de λ_3 y λ_4.

Se pide calcular los términos a_n y b_n con $3 \leq n \leq 20$ y presentarlos en una tabla. Los últimos términos de las sucesiones serán los valores propios buscados, es decir, $\lambda_3 = b_{20}$ y $\lambda_4 = a_{20}$.

1.3. Cuarta parte del algoritmo de Leverrier: Cálculo de los valores propios de L (II).

A partir de lo anterior, podemos calcular un valor aproximado de las dos raíces de $P(\lambda)$ restantes. Una vez se tienen 2 raíces aproximadas del polinomio característico, se pueden calcular las otras 2 de la siguiente manera:

$$\frac{P(\lambda)}{(\lambda - a_{20})(\lambda - b_{20})} = 0 \tag{3}$$

Si se hace esta división, y se calculan las raíces del polinomio de grado 2 resultante, se obtienen las dos raíces que faltan del polinomio característico. Es decir, ya se tendrían los 4 valores propios de la matriz L.

Por tanto, se pide resolver la ecuación (3) y calcular los valores propios λ_1, λ_2.

Criterios de corrección y puntuación de los apartados.

- 1. Métodos numéricos aplicados a los conceptos básicos del álgebra lineal. Esta práctica se evaluará de la siguiente manera:
    - Tarea 1.1: En esta tarea se pide calcular c_1, c_2, c_3 y c_4 calculando la traza de ciertas matrices. Este apartado se calificará con 2 puntos a razón de 0.5 por cada uno de los valores calculados correctamente.
    - Tarea 1.2: En esta tarea se pide calcular λ_3 y λ_4. Se calificará con 4 puntos a razón de 2 puntos por cada uno de los 2 valores propios.
    - Tarea 1.3: En esta tarea se pide calcular las raíces λ_1 y λ_2. Se calificará con 4 puntos a razón de 2 puntos cada uno de los valores propios.