PEC 2 - Métodos numéricos en álgebra lineal (II)

Fecha de entrega: 04/03/2022

Universitat Oberta de Catalunya

Descripción del problema

Continuamos con el problema de la práctica anterior, donde habíamos comenzado con el método utilizado por Leverrier durante el descubrimiento del planeta Neptuno. En esta práctica seguiremos con el algoritmo propuesto por Leverrier para el cálculo de los autovalores de L, que venía dada por:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 35 & -36 & -180 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Previamente, habíamos calculado la suma de las potencias de los valores propios mediante el cálculo de la traza de la potencia de la matriz L y habíamos obtenido los coeficientes del polinomio característico. Presentaremos una alternativa a ese cálculo.

1. Métodos numéricos aplicados a los conceptos básicos del álgebra lineal (Continuación)

En este apartado nos centraremos en el cálculo de los valores propios, teniendo presente los resultados obtenidos en la práctica anterior y siguiendo el algoritmo de Leverrier.

1.1. Alternativa al cálculo de los coeficientes del polinomio característico.

Teniendo en cuenta la expresión del polinomio característico introducida en la práctica anterior:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 \,, \tag{2}$$

existe una variante del método de Leverrier, conocida como el método de Leverrier-Faddeev, que también nos permite obtener los coeficientes del polinomio a partir del cálculo de la traza de ciertas matrices, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -Tr(B_1), \qquad B_1 = L \\
c_2 &= -\frac{1}{2}Tr(B_2), \qquad B_2 = L(B_1 + c_1 I) \\
c_3 &= -\frac{1}{3}Tr(B_3), \qquad B_3 = L(B_2 + c_2 I) \\
c_4 &= -\frac{1}{4}Tr(B_4), \qquad B_4 = L(B_3 + c_3 I)
\end{aligned}$$

y, en general, $c_n = -\frac{1}{n}Tr(B_n)$, con $B_n = L(B_{n-1} + c_{n-1}I)$.

Se pide calcular los coeficientes del polinomio característico siguiendo las expresiones anteriores y comprobar que se obtienen los mismos valores que resolviendo el sistema de la práctica anterior.

1.1.1. Solución

Calculamos el valor de los coeficientes del polinomio característico c_n usando la expresión dada en términos de la traza de una matriz B. Los valores obtenidos son:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -Tr(B_1) = -2, \qquad B_1 = L \\
c_2 &= -\frac{1}{2}Tr(B_2) = -35, \qquad B_2 = L(B_1 + c_1 I) \\
c_3 &= -\frac{1}{3}Tr(B_3) = 36, \qquad B_3 = L(B_2 + c_2 I) \\
c_4 &= -\frac{1}{4}Tr(B_4) = 180, \qquad B_4 = L(B_3 + c_3 I)
\end{aligned}$$

El código R para resolver este apartado y obtener los valores previos es:

```

#Definicion de la matriz L
L = matrix(c(2, 35, -36, -180,
             1, 0, 0, 0,
             0, 1, 0, 0,
             0, 0, 1, 0), nrow=4, byrow=TRUE)


# Orden de la matrix
N = dim(L)[1]

# Alternativa en el calculo de los coeficientes del polinomio caracteristico

```

```
I<-diag(N)
B1 = L
B1
c1 = -sum(diag(B1))
c1

B2 = L%*%(B1 + c1*I)
B2
c2 = -(1/2)*sum(diag(B2))
c2

B3 = L%*%(B2 + c2*I)
B3
c3 = -(1/3)*sum(diag(B3))
c3

B4 = L%*%(B3 + c3*I)
B4
c4 = -(1/4)*sum(diag(B4))
c4
```

1.2. Tercera parte del algoritmo de Leverrier: Cálculo de los valores propios de L (I).

En su estudio, Leverrier encontró varias relaciones muy útiles para el cálculo de los valores propios de la matriz L. Definimos, a partir de los s_n de la práctica anterior:

- $\sigma_n = \frac{s_n}{s_{n-1}}, \quad n \geq 2, \quad \text{con } \sigma_1 = 0,$
- $\delta_n = \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}}, \quad n \geq 3.$

Haciendo uso de las sucesiones anteriores, se definen dos nuevas sucesiones a_n y b_n de la siguiente forma:

- $a_n + b_n = \sigma_n + \delta_n \sigma_{n-2}, \quad n \geq 3,$
- $a_n b_n = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\delta_n, \quad n \geq 3,$

con $|a_n| \geq |b_n|$ para $n \geq 4$.

Se puede demostrar que las sucesiones a_n y b_n convergen hacia los 2 valores propios de L con mayor módulo. Por tanto, si calculamos sus términos sucesivos, obtendremos aproximaciones de λ_3 y λ_4.

	σ_n	δ_n	b_n	a_n
1	0	0	0	0
2	37.000000	0	0	0
3	1.486486	-0.9598247	1.486486	0
4	18.345455	-0.4747198	-4.734236	5.515058
5	2.409316	-0.9452618	-4.599827	5.604025
6	12.972851	-0.6628666	-5.021912	5.834173
7	3.232235	-0.9220981	-4.886926	5.897536
8	10.188149	-0.7141144	-5.029534	5.953583
9	3.920806	-0.9010093	-4.966105	5.974638
10	8.631397	-0.7516090	-5.014027	5.987920
11	4.469137	-0.8835961	-4.988999	5.993727
12	7.708116	-0.7781778	-5.005580	5.996934
13	4.890266	-0.8699809	-4.996239	5.998441
14	7.133550	-0.7960977	-5.002092	5.999229
15	5.205029	-0.8596865	-4.998678	5.999612
16	6.763394	-0.8080625	-5.000767	5.999807
17	5.435527	-0.8520900	-4.999529	5.999903
18	6.519180	-0.8160853	-5.000278	5.999952
19	5.601776	-0.8465843	-4.999831	5.999976
20	6.355428	-0.8215053	-5.000100	5.999988

Se pide calcular los términos a_n y b_n con $3 \leq n \leq 20$ y presentarlos en una tabla. Los últimos términos de las sucesiones serán los valores propios buscados, es decir, $\lambda_3 = b_{20}$ y $\lambda_4 = a_{20}$.

1.2.1. Solución

Presentamos las sucesiones en la siguiente tabla. Observando los resultados, tomamos las aproximaciones $\lambda_3 = -5.000100$ y $\lambda_4 = 5.999988$.

El código R para resolver este apartado es:

```
#Calculo de los autovalores de L con mayor modulo

# Como se piden los valores de an y bn para 3<=n<=20, debemos calcular s1, s2, ..., s20

#Construccion de la sucesion de sn desde s1 hasta s20
n = 20

Ln = diag(N)
sn = 0
for(i in 1:n){
  Ln = Ln%*%L
  sn[i] = sum(diag(Ln))
}
print(sn)

#calculo de sigma y delta

sigma = c(0, 0) #inicializamos a cero el vector
sigma

for(i in 2:length(sn)){
  sigma[i] <- sn[i]/sn[i-1]
}
print(sigma)

#Inicializamos el vector de esta forma para evitar posibles NA en las posiciones 1 y 2
delta = c(0, 0, 0)
delta
for(i in 3:length(sigma)){
  delta[i] = (sigma[i]-sigma[i-1])/(sigma[i-1]-sigma[i-2])
}
print(delta)

# A continuacion calculamos las sucesiones an y bn.
# Para ellos debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:
#a[i] + b[i]  = sigma[i] + delta[i]*sigma[i-2]
#a[i]*b[i] = sigma[i-1]*sigma[i-2]*delta[i]

#Creamos las sucesiones auxiliares yn = an + bn, y zn = an*bn

yn = c(0, 0, 0)
zn = c(0, 0, 0)

for (i in 3:n){
  yn[i] = sigma[i] + (delta[i]*sigma[i-2])
}
print(yn)
```

```

for (i in 3:n){
  zn[i] = sigma[i-1]*sigma[i-2]*delta[i]
}
print(zn)

#Los valores de an y bn se obtienen al resolver la ecuacion:
#    x^2 - yn[i]x + zn[i]=0 para cada uno de los valores de i.
#La funcion polyroot devuelve valores complejos y nosotros nos quedamos con la
    parte real

for (i in 3:n){
  lambda = Re(polyroot(c(zn[i], -yn[i], 1)))
  print(lambda)
}
lambda4 = lambda[1]
lambda3 = lambda[2]
```

1.3. Cuarta parte del algoritmo de Leverrier: Cálculo de los valores propios de L (II).

A partir de lo anterior, podemos calcular un valor aproximado de las dos raíces de $P(\lambda)$ restantes. Una vez se tienen 2 raíces aproximadas del polinomio característico, se pueden calcular las otras 2 de la siguiente manera:

$$\frac{P(\lambda)}{(\lambda - a_{20})(\lambda - b_{20})} = 0 \tag{3}$$

Si se hace esta división, y se calculan las raíces del polinomio de grado 2 resultante, se obtienen las dos raíces que faltan del polinomio característico. Es decir, ya se tendrían los 4 valores propios de la matriz L.

Por tanto, se pide resolver la ecuación (3) y calcular los valores propios λ_1, λ_2.

1.3.1. Solución

La división de la ecuación (3) resulta en,

$$\frac{P(\lambda)}{(\lambda - a_{20})(\lambda - b_{20})} = \lambda^2 - 1.000113\lambda - 5.999458 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado anterior, obtenemos que $\lambda_1 = -1.999847$ y $\lambda_2 = 2.999959$.

El código R para resolver este apartado es:

```
#Calculo de los dos autovalores lambda_1 y lambda_2 de la matriz L
num = c(1, c1, c2, c3, c4)
den = c(1, -(lambda[1] + lambda[2]), lambda[1]*lambda[2]) #(x-lambda3)*(x-lambda4)

div = deconv(num, den)
print(div[[1]])

#Calculamos las raices del polinomio obtenido
lambda = Re(polyroot(c(rev(div[[1]]))))
lambda2 = lambda[1]
lambda1 = lambda[2]

print(c(lambda1, lambda2, lambda3, lambda4))
```

Criterios de corrección y puntuación de los apartado.

- 1. Métodos numéricos aplicados a los conceptos básicos del álgebra lineal. Esta práctica se evaluará de la siguiente manera:
  - Tarea 1.1: En esta tarea se pide calcular c_1, c_2, c_3 y c_4 calculando la traza de ciertas matrices. Este apartado se calificará con 2 puntos a razón de 0.5 por cada uno de los valores calculados correctamente.
  - Tarea 1.2: En esta tarea se pide calcular λ_3 y λ_4. Se calificará con 4 puntos a razón de 2 puntos por cada uno de los 2 valores propios.
  - Tarea 1.3: En esta tarea se pide calcular las raíces λ_1 y λ_2. Se calificará con 4 puntos a razón de 2 puntos cada uno de los valores propios.