PEC 6 - Interpolación, derivación e integración numérica (y II)

Fecha de entrega: 22/04/2022

Universitat Oberta de Catalunya

Descripción del problema

Una opción financiera de compra es un contrato entre dos partes que le da a su poseedor el derecho de comprar un determinado activo financiero subyacente (por ejemplo una acción), el precio actual de la cual (es decir, en $t = 0$) es S_0, en una fecha futura $t = T$ (denominado **vencimiento**) por un determinado precio K (**precio de ejercicio**). Si llegado el vencimiento, el valor del subyacente en el mercado S_T es superior a K, entonces la opción se ejerce y se adquiere el activo pagando K, en caso contrario la opción no se ejerce. Este es el llamado **precio de liquidación** de la opción, que puede resumirse matemáticamente con la fórmula,

$$\max(S_T - K, 0),$$

es decir, el máximo entre $S_T - K$ y 0.

El valor de este contrato, es decir, el precio que tenemos que pagar para adquirir el derecho de ejercicio, se conoce como **prima de la opción**, asumiendo que los precios desde el instante $t = 0$ hasta vencimiento, $t = T$, se mueven siguiendo un determinado modelo, conocido como **modelo de Black-Scholes**, el valor de dicho contrato viene dado por,

$$v(S_0, \sigma, T, r, K) = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2), \tag{1}$$

donde,

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy$ y $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ son las funciones de distribución y de densidad normal estándar respectivamente. Los parámetros r y σ son, respectivamente, el llamado **tipo de interés libre de riesgo** y la **volatilidad** del activo subyacente (que podemos definir vagamente como la varianza del activo subyacente).

Además del cálculo de la prima de la opción, para una adecuada gestión del riesgo financiero, los bancos calculan las denominadas **delta** y **gama** de la opción,

$$\delta = v'(S), \quad \Gamma = v''(S), \tag{2}$$

es decir, la primera y la segunda derivada de v respecto del valor del activo subyacente, respectivamente. La delta nos indica como varía el precio de la opción ante una variación del valor del subyacente, mientras que la gama nos dice como varía la delta cuando varía el precio del activo subyacente. Si derivamos v obtenemos,

$$\delta = \Phi(d_1), \quad \Gamma = \frac{\phi(d_1)}{\sigma\sqrt{T}S_0}. \tag{3}$$

Recordamos que en la actividad anterior, calculamos el valor de delta y de gamma de manera exacta y mediante derivación numérica. Ahora pondremos en práctica el concepto de integración numérica. La referencia básica para la realización de esta actividad es la guía de teoría (2). Para la implementación de las tareas en código R la referencia recomendada es (1).

1. Integración

El cálculo del valor de la opción mediante (1), así como el cálculo de la delta en (2) implica la evaluación de las expresiones $\Phi(d_1)$ y $\Phi(d_2)$. Teniendo en cuenta que no existe una fórmula exacta para Φ, estos cálculos se tienen que hacer usando métodos numéricos (la función `pnorm` de R que has usado hasta ahora proporciona, en realidad, una aproximación de Φ). Para la próxima tarea usaremos como aproximación para Φ la llamada fórmula de Hastings,

$$\tilde{\Phi}(x) := 1 - \phi(x)\left(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5\right), \tag{4}$$

si $x \geq 0$ y $\tilde{\Phi}(x) := 1 - \tilde{\Phi}(-x)$ cuando $x < 0$. Los parámetros vienen dados por $t = \frac{1}{1+\alpha x}$, $\alpha = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978$ y $a_5 = 1.330274429$. El error absoluto para esta aproximación es inferior a 7.5×10^{-8} para todo x, es decir,

$$|\Phi(x) - \tilde{\Phi}(x)| < 7.5 \times 10^{-8},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Queremos explorar métodos alternativos de cálculo de $\Phi(x)$ y el impacto que tienen sobre el valor de la opción en términos de error absoluto y error relativo, asumiendo que el valor "exacto" de la opción será aquel que se haya calculado con la aproximación de Φ dada por la fórmula de Hastings, es decir, $\tilde{\Phi}$. Se pide, dados los parámetros $S_0 = 95, K = 95, T = 0.25, r = 0.001, \sigma = 0.3$, calcular el valor de la opción aproximando Φ mediante los métodos que se detallan en las secciones siguientes.

NOTA: Antes de aplicar los métodos de integración numérica que se piden en esta actividad, observa que,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + I(x),$$

si $x \geq 0$ y,

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x),$$

si $x < 0$, donde $I(x) = \int_0^x \phi(y)dy$.

1.1. Regla de los trapecios

Tenéis que dar el valor de la opción con Φ calculada mediante la regla de los trapecios (Sección 2.2.1 de (2)). Haced varios experimentos cambiando el número de subintervalos y comparad las diferencias entre los valores obtenidos.

1.1.1. Solución:

El valor de la opción calculado con la regla de los trapecios (y con 10 subintervalos) es 5.69074729.

Una propuesta de código R para resolver el ejercicio es la siguiente:[1]

```
#parametros de opcion
S=95
K=95
r=0.001
sigma=0.3
T=0.25

#diferentes maneras de calcular Phi
#formula de Hastings
te=function(x)
{
  alpha=0.2316419
  return(1/(1+alpha*x))
}

phi=function(x)
{
  return((1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2))
}

PhiHpos=function(x)
{
  a1=0.319381530
  a2=-0.356563782
  a3=1.781477937
  a4=-1.821255978
  a5=1.330274429
  t=te(x)
  Phitilde=1-phi(x)*(a1*t+a2*t^2+a3*t^3+a4*t^4+a5*t^5)
  return(Phitilde)
}

```

[1] Antes, tened en cuenta que hay una primera parte del código que será común en todos los apartados.

```
PhiH=function(x)
{
  if(x>=0) return(PhiHpos(x))
  else return(1-PhiHpos(-x))
}

#regla de los trapecios
trap=function(f,a,b,m)
{
  x=seq(a,b,length.out=m+1)
  y=f(x)
  p.area=sum((y[2:(m+1)]+y[1:m]))
  p.area=p.area*abs(b-a)/(2*m)
  return(p.area)
}

PhiTpos=function(x)
{
  return(0.5+trap(phi,0,x,10))
}

PhiT=function(x)
{
  if(x>=0) return(PhiTpos(x))
  else return(1-PhiTpos(-x))
}

BScall=function(g)
{
  d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2)*(T))/(sigma*sqrt(T))
  d2=d1-sigma*sqrt(T)
  call=S*g(d1)-exp(-r*T)*K*g(d2)
  return(call)
}

vPhiT=BScall(PhiT) #valor con la Phi de trapecios
```

Observación Una manera de no tener que cambiar en cada apartado el código de la `BScall` es fijarse en el código siguiente:

```
BScall=function(g)
{
  d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2)*(T))/(sigma*sqrt(T))
  d2=d1-sigma*sqrt(T)
  call=S*g(d1)-exp(-r*T)*K*g(d2)
  return(call)
}
```

De esta manera, sólo hay que llamar a la función BScall con el método que nos interesa. Esta idea, la utilizaremos repetidamente.

1.2. Regla de Simpson

Tenéis que dar el valor de la opción con Φ calculada mediante la regla de Simpson (Sección 2.2.1 de (2)). Haced varios experimentos cambiando el número de subintervalos y comparad las diferencias entre los valores obtenidos.

1.2.1. Solución:

Número subintervalos, m	Valor Obtenido	Diferencia
$m = 5$, 10 subintervalos	5.69077389711	0
$m = 6$, 12 subintervalos	5.69077389695	$1.6\,e - 10$

A medida que se añaden divisiones, la diferencia entre dos métodos de Simpson consecutivos se estabiliza.

Una propuesta de código R para responder a este ejercicio es la siguiente (recordad que, quizá, se debe redefinir la `BScall`):

```
#regla de Simpson
simp=function(f,a,b,m)
{
  x.ends=seq(a,b,length.out=m+1)
  y.ends=f(x.ends)
  x.mids=(x.ends[2:(m+1)]-x.ends[1:m])/2+x.ends[1:m]
  y.mids=f(x.mids)
  p.area=sum(y.ends[2:(m+1)]+4*y.mids [1: m ]+y.ends[1:m])
  p.area=p.area*abs(b-a)/(6*m)
  return(p.area)
}

PhiSpos=function(x)
{
  return(0.5+simp(phi,0,x,5))#m=5 da 10 subintervalos
}

PhiS=function(x)
{
  if(x>=0) return(PhiSpos(x))
```

```
  else return(1-PhiSpos(-x))
}

vPhiS=BScall(PhiS) #valor con la Phi de Simpson
```

1.3. Método de Monte Carlo

Tenéis que dar el valor de la opción con Φ calculada mediante el método de Monte Carlo (Sección 2.2.2 de (2)), haciendo variar el tamaño de la muestra generada por simulación.

1.3.1. Solución:

El valor de la opción calculado utilizando el método de Monte Carlo (con una muestra de simulación de tamaño 10^6 y fijando la semilla, vía `set.seed(5)`) es 5.69078013. Una propuesta de código R es la siguiente:

```
#Monte Carlo
mcint=function(f,a,b,m)
{
  set.seed(5)
  x=runif(m,min=a,max=b)
  y.hat=f(x)
  area=(b-a)*sum(y.hat)/m
  return(area)
}

PhiMCpos=function(x)
{
  return(0.5+mcint(phi,0,x,10^6))
}

PhiMC=function(x)
{
  if(x>=0) return(PhiMCpos(x))
  else return(1-PhiMCpos(-x))
}

vPhiMC=BScall(PhiMC) #valor con la Phi de Monte Carlo
```

1.4. Errores absolutos y relativos

Finalmente, escribe los errores absolutos y relativos cometidos al calcular el valor de la opción mediante los diferentes métodos de integración por Φ y expresa los resultados en una (o varias) tabla(s) resumen. Recuerda que el resultado obtenido por Monte Carlo variará en cada ejecución salvo que fijes la semilla del generador de números aleatorios de R (`set.seed`).

1.4.1. Solución:

El valor que tomaremos de referencia es el que proporciona la fórmula de Hastings: 5.69078713. Los errores absolutos y relativos calculados con los valores obtenidos anteriormente son:

Método	Error absoluto	Error relativo
Trapecios	$3.984720\,e-05$	$7.002054\,e-06$
Simpson	$1.323756\,e-05$	$2.326139\,e-06$
Monte Carlo	$7.003554\,e-06$	$1.230683\,e-06$

Una manera de generar la tabla anterior es con el código siguiente:

```
#errors
vPhiH=BScall(PhiH) #valor con la Phi de Hastings
abserrT=abs(vPhiT-vPhiH)
relerrT=abserrT/vPhiH

abserrS=abs(vPhiS-vPhiH)
relerrS=abserrS/vPhiH

abserrMC=abs(vPhiMC-vPhiH)
relerrMC=abserrMC/vPhiH
```

Criterios de corrección y puntuación de los apartados

- 1. Integración. Este apartado tendrá un valor de **10 puntos** repartidos cómo sigue:
  - Tarea 1.1: La implementación correcta de la regla de los trapecios valdrá 1 punto, el cálculo de Φ valdrá 1 punto y el cálculo del valor de la opción 0.25. Los comentarios de las diferencias 0.25. **Total 2.5 puntos**.
  - Tarea 1.2: La implementación correcta de la regla de Simpson valdrá 1 punto, el cálculo de Φ valdrá 1 punto y el cálculo del valor de la opción 0.25. Los comentarios de las diferencias 0.25. **Total 2.5 puntos**.
  - Tarea 1.3: La implementación correcta del método de Monte Carlo valdrá 1 punto, el cálculo de Φ valdrá 1 punto y el cálculo del valor de la opción 0.25 puntos. Los comentarios de las diferencias 0.25. **Total 2.5 puntos**.
  - Tarea 1.4: La implementación de la fórmula de Hastings como referencia para calcular los errores valdrá 1 punto. El cálculo de cada uno de los dos tipos de errores mediante cada uno de los tres métodos valdrá 0.25 puntos. **Total 2.5 puntos**.

Referencias

[1] Howard, J. P. (2017). Computational methods for numerical analysis with R. Nueva York: Chapman & Hall/CRC.

[2] Ortiz Gracia, L., Salvador Mancho, B. y Sancho Vinuesa, T. (2022). Guía de Interpolación, derivación e integración numérica. PID_00285410.