PEC 3 - Sistemas de ecuaciones lineales

Fecha de entrega: 15/03/2022

Universitat Oberta de Catalunya

Descripción del problema

1. Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

En este apartado se utilizarán los métodos numéricos que hemos aprendido para dar solución a dos sistemas de ecuaciones. Además, se aconsejará a los alumnos cuándo es más conveniente utilizar los métodos numéricos directos y cuándo los iterativos, para que tengan criterios claros antes de empezar a calcular.

1.1. Métodos numéricos directos

Dada una matriz A, si esta matriz es invertible y no tiene muchas variables, los métodos directos son los más adecuados. En este apartado se pide resolver el sistema de ecuaciones (S) del tipo $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 2 & 7 \\ 3 & -3 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Se pide:

1. Hacer la descomposición LU de la matriz A del sistema (S).
2. Resolver el sistema (S) haciendo uso de las matrices L y U.

1.2. Métodos numéricos iterativos

Si una matriz es muy grande y los elementos no nulos son una fracción pequeña de la totalidad de elementos de la matriz, entonces los métodos directos no son los mejores métodos para resolver el sistema. Ello es debido a que, en general, tendríamos problemas de lentitud en el manejo de la memoria por tener que almacenar y manipular toda la matriz.
Los métodos iterativos se usan para resolver problemas con matrices muy grandes, con muchos ceros y con ciertos patrones (matrices tridiagonales, etc), habitualmente problemas que aparecen al discretizar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

En este apartado se pide resolver el sistema de ecuaciones (S) del tipo $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Considerando n = 10. Se pide:

1. Estudiar la convergencia del método de Jacobi para resolver el sistema (S). Para ello emplea alguno de los métodos introducidos en la guía para estudiar la convergencia de los métodos iterativos.
2. Convertir el sistema (S) a la iteración de punto fijo $x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + c$ donde J es la matriz de iteración de Jacobi. Es decir, resolver este sistema de ecuaciones por el método numérico iterativo de **Jacobi**. Indicar las iteraciones para obtener un error inferior a 10^{-6} y el error cometido si solo se ralizan 80 iteraciones. Calcular a mano la primera iteración del método.
3. Convertir el sistema (S) a la iteración de punto fijo $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d$ donde G es la matriz de iteración de Gauss-Seidel. Es decir, resolver este sistema de ecuaciones por el método numérico iterativo de **Gauss-Seidel**. Indicar las iteraciones para obtener un error inferior a 10^{-6} y el error cometido si solo se ralizan 80 iteraciones. Calcular a mano la primera iteración del método.
4. ¿Cúal de los dos métodos converge más rápido?, es decir, ¿cúal de los 2 tiene menos iteraciones para dar la misma solución?.
5. Considerando $n = 20$ y $n = 40$ calcular por el método de Jacobi y Gauss-Seidel, el error de la solución con cada uno de los dos métodos considerando 80 iteraciones, y el números de iteraciones en cada caso para un error inferior a 10^{-6}. Compara estos resultados para los distintos valores de n que se han considerado.

En ambos casos se pide resolver el sistema de ecuaciones por los métodos numéricos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel, para ello habrá que preparar un código que permita resolver el sistema de ecuaciones usando estos métodos iterativos. Se recomienda usar el paquete de R que más se ajuste al ejercicio, aunque hay muchos otros paquetes que encontraréis tras una breve búsqueda en internet ("Iterative methods"). Se valorará que los alumnos expliquen el funcionamiento de las funciones utilizadas para resolver estos sistemas de ecuaciones por los métodos de Jacobi o Gauss-Seidel, y no se limiten simplemente a aplicar las funciones y resolverlos.

Criterios de corrección y puntuación de los apartados.

- 1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Esta actividad se evaluará como sigue:
  - Tarea 1.1: Esta tarea se puntuará con 2.5 puntos. El cálculo correcto de las matrices, L y U, vale 2 puntos (1 por cada matriz bien calculada). La resolución del sistema se evaluará con 0.5 puntos.
  - Tarea 1.2: En esta tarea se pide resolver el sistema (S) por el método de Jacobi y por el método de Gauss-Seidel. Además, se pide comparar la convergencia de ambos métodos. La puntuación será de 7.5 puntos distribuidos en: 1 punto por estudiar la convergencia por el método de Jacobi (apartado 1). 1 punto por calcular la solución mediante el método de Jacobi y 0.5 por el cálculo de la primera iteración, 0.6 por dar el error y 0.4 por dar el número de iteraciones (apartado 2). De la misma forma, por dar la solución por el método de Gauss-Seidel (apartado 3) se puntuará con 1 punto, el cálculo de la primera iteración se puntuará con 0.5, por dar el error 0.6 y por dar el número de iteraciones se puntuará 0.4. Además se puntuará 1 por el apartado (4), es decir, por razonar con los resultados obtenidos en los apartados (2) y (3) cuál de los 2 métodos converge más rápido. Finalmente, el apartado (5) se puntúa con 0.5 puntos.