PEC 1 - Métodos numéricos en álgebra lineal (I)

Fecha de entrega: 25/02/2022

Universitat Oberta de Catalunya

Descripción del problema

Durante el estudio de las perturbaciones del planeta Urano mediante la teoría de la gravedad de Newton, Leverrier (un matemático francés) se encontró con una matriz de orden relativamente grande. Diversos cálculos realizados sobre esta matriz condujeron, en 1847, al descubrimiento de forma teórica del planeta Neptuno por parte de Leverrier. Para esta actividad, se usará una variante de la técnica numérica original que usó Leverrier para sus cálculos. En su honor, denotaremos la matriz con la que vamos a trabajar como L.

Consideramos la matriz L dada por:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 35 & -36 & -180 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Métodos numéricos aplicados a los conceptos básicos del álgebra lineal

En esta práctica realizareis cálculos similares a los que usó Leverrier para encontrar los valores propios de la matriz L. Para ello usaréis varias técnicas del álgebra lineal siguiendo una versión simplificada del algoritmo utilizado por Leverrier.

1.1. Primera parte del algoritmo de Leverrier: Suma de las potencias de los valores propios de L.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ los valores propios de L, verificando que $|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3| < |\lambda_4|$. Leverrier descubrió la siguiente fórmula:

$$s_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n \tag{2}$$

para todo $n > 0$. Es decir, $s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ es la suma de los valores propios de la matriz L, $s_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2$ es la suma de los cuadrados de los valores propios de la matriz L y así de forma sucesiva.

Además, Leverrier demostró la siguiente igualdad:

$$s_n = Tr(L^n) \tag{3}$$

es decir, que s_n es la traza de L^n que es la potencia n-esima de L, sabiendo que la traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal.

Se pide calcular s_1, s_2, s_3, s_4 haciendo uso de la anterior ecuación, es decir:

1. $s_1 = Tr(L)$
2. $s_2 = Tr(L^2)$
3. $s_3 = Tr(L^3)$
4. $s_4 = Tr(L^4)$

A continuación comprueba que dicha igualdad es cierta. Para ello calcula los autovalores de la matriz L (con alguna función disponible en R), y calcula s_n con la fórmula dada en (2) verificando que se obtienen los mismos valores de s_n que en el apartado anterior.

1.2. Segunda parte del algoritmo de Leverrier: Cálculo de los coeficientes del polinomio característico.

Leverrier demostró que se podían calcular los coeficientes del polinomio característico de la matriz L usando los valores s_i calculados anteriormente. El polinomio característico tiene la siguiente forma:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 \tag{4}$$

Los valores c_1, c_2, c_3, c_4 se pueden calcular usando las relaciones de Cardano-Vieta de la forma que se expone a continuación:

$$\begin{aligned}
-c_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\
c_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 \\
-c_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 \\
c_4 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4
\end{aligned} \tag{5}$$

A partir de las fórmulas de Cardano-Vieta, Leverrier estableció las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} c_1 &= -s_1 \\ 2c_2 &= -s_2 - c_1 s_1 \\ 3c_3 &= -s3 - c_1 s_2 - c_2 s_1 \\ 4c_4 &= -s_4 - c_1 s_3 - c_2 s_2 - c_3 s_1 \end{aligned} \tag{6}$$

Por ejemplo, vamos a demostrar la segunda igualdad:

$$\begin{aligned} 2c_2 = -s_2 - c_1 s_1 &= -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 \\ &= -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_4 + 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_2\lambda_4 + 2\lambda_3\lambda_4) \\ &= 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_4 + 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_2\lambda_4 + 2\lambda_3\lambda_4 \end{aligned} \tag{7}$$

Calcular, usando las igualdades establecidas por Leverrier, los coeficientes c_1, c_2, c_3, c_4 y dar el polinomio característico de L.

1.3. Matriz de compañía del polinomio característico.

Todo polinomio de la forma

$$q(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda - a_n$$

es polinomio característico de su matriz de compañía.

Teniendo en cuenta el polinomio característico obtenido en el apartado anterior, y la matriz del enunciado, considerada su matriz de compañía. A continuación, escribe de forma genérica la matriz de compañía asociada al polinomio característico $q(\lambda)$.

Criterios de corrección y puntuación de los apartados.

- 1. Métodos numéricos aplicados a los conceptos básicos del álgebra lineal. Esta práctica se evaluará de la siguiente manera:
  - Tarea 1.1: En esta tarea se pide calcular s_1, s_2, s_3 y s_4 calculando la traza de una matriz. Se calificará con 3 puntos a razón de 0.75 por cada uno de los valores calculados correctamente. La comprobación de que la igualdad es cierta calculando los autovalores tiene un valor de 1 punto.

- Tarea 1.2: En esta tarea se pide calcular c_1, c_2, c_3 y c_4 y dar el polinomio característico de L. Se calificará con 4 puntos a razón de 1 por cada uno de los valores calculados correctamente.
- Tarea 1.3: En esta tarea se pide calcular la matriz de compañía asociada al polinomio característico $q(\lambda)$. Se calificará con 2 puntos si la matriz está escrita correctamente.