15 de octubre de 2021

Primer Parcial

Nombre y Apellido de cada integrante:

Nota: La solución de cada ejercicio debe estar fundamentada para ser considerada como válida.

Ejercicio 1 *(2 puntos)*

Una variable aleatoria continua X tiene como función de densidad a

$$f(x) = k(1-x)(x-5)I_{[1,5]}(x).$$

a) Hallar el valor de k y graficar f.

b) Encontrar la función de distribución F.

c) A partir de alguna propiedad de f, ¿se podría deducir el valor de $\mathrm{E}(X)$ sin aplicar la definición?.

d) Calcular $P(-1.5 \leq X \leq 3.5)$ y relacionar el valor con la función de densidad y de distribución mediante gráficos.

e) Mostrar, a partir de las propiedades de F, que $P(X = 2) = 0$.

Ejercicio 2 *(2 puntos)*

La probabilidad de encontrar la letra z en una página de un libro es 0.05. Se inspeccionan n páginas de modo consecutivo y cada inspección es independiente de la otra.

a) En las primeras $n = 10$ páginas, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente tres páginas contengan la letra z?

b) ¿Cuál sería el número esperado de páginas que contienen la letra z en las primeras $n = 200$ páginas?

c) Dado que la primera página de un libro no contiene la letra z, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra en más de dos de las siguientes cinco páginas?

Ejercicio 3 *(2 puntos)*

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea X una variable aleatoria discreta con rango R_X. Recordar que dado un conjunto $C \subset \mathbb{R}$, por definición $P(X \in C) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in C)$.

a) Sean A y B dos eventos tales que $P(A) = 1$. Probar que $P(A \cap B) = P(B)$.

b) Sea X una variable aleatoria discreta con rango R_X y sea C un subconjunto de $\mathbb{R}$ a lo sumo numerable tal que $P(X \in C) = 1$. Probar que $P(X \in C \cap R_X) = 1$.

c) Deducir del ítem anterior que $P(X \in R_X) = 1$.

Ejercicio 4 *(2 puntos)*

Suponga que, en una ciudad en particular, la empresa de colectivos A transporta al 50 % de la población, y las empresas B y C transportan el 30 % y el 20 % respectivamente. La probabilidad de demora de un colectivo de la empresa A, B y C son 0.9, 0.8 y 0.85, respectivamente. Si hay una demora, ¿cuál es la probabilidad de que el pasajero esté usando la empresa A? ¿Y la empresa C?

Ejercicio 5 *(2 puntos)*

En el contexto del ejercicio anterior, escribir un programa que que permita, introduciendo los porcentajes de transporte de cada empresa que se quiera, computar la probabilidad de que el pasajero esté usando la empresa A, dejando fijas las probabilidades de demora (con los mismos valores del ejercicio anterior).