

A.U : 2021/2022.  
Nombre de pages : 2.

Classes : 1 TA.

**Devoir Surveillé : Analyse Pour l'Ingénieur**

---

**Exercice 1 :** (7 points)

Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  admet-elle des dérivées partielles par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$  en  $(0, 0)$ ?
2. La fonction  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ ?
3. Soit la fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :  $g(x, y) = (f(x, y), f(y, x))$ 
  - (a) La fonction  $g$  est-elle différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ ?
  - (b) Déterminer la matrice jacobienne de  $g$  au point  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ .
  - (c) La fonction  $g$  admet-elle une réciproque locale au voisinage du point  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ ?
4. Le point  $(1, 1)$ , est-il un extremum pour  $h(x, y) = f(x, y)/(x^2 - y^2)$ ? Justifier votre réponse.
5. Calculer la matrice Hessienne de la fonction  $h(\dots)$  au point  $(1, 1)$ .
6. Est ce qu'on peut déduire la nature de l'extremum  $(1, 1)$  à partir de sa matrice Hessienne? Justifier votre réponse.

**Exercice 2 :** (5 points)

On repique des plantes de 10cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est de 1m. On note  $f(t)$  la taille, en m, d'un plant après  $t$  jours.

Le modèle de Verhulst consiste que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation :

$$f'(t) = a f(t) (1 - f(t))$$

où  $a$  est une constante dépendant des conditions expérimentales.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = a y(1 - y), \quad \text{sur } \mathbb{R}_+$$

2. En déduire que pour tout réel  $t$  de  $\mathbb{R}_+$ , on a :

$$f(t) = \frac{1}{9e^{-at} + 1}$$

3. On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure  $19cm$ . Calculer  $a$  (on arrondira à  $10^{-2}$  près)
4. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et déterminer son sens de variation sur  $\mathbb{R}_+$ .
5. Au bout de combien de jours, la plante atteindra  $90cm$  de haut ?

**Exercice 3 :** (8 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique  $P_A$  de la matrice  $A$ .
2. Justifier que la matrice  $A$  est trigonalisable.
3. Déterminer une matrice  $T$  triangulaire et une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PTP^{-1}$ . Calculer la matrice  $P^{-1}$ .
4. Calculer la matrice  $e^{tT}$ .
5. Exprimer les solutions du système différentiel suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) - z(t) + 2 \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - y(t) - 2z(t) + 3 \end{cases}$$

avec la condition initiale  $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 2)$ .