Serie d'exercices 5

Exercice 1 :

Soit le couple aléatoire (X,Y) de densité :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = c(y^2 - x^2)\exp(-y)I_D(x,y) \end{aligned}$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq y\}$.

On considère les variables aléatoires U et V telles que $U = \frac{1}{2}(X+Y)$ et $V = \frac{1}{2}(X-Y)$

(a) Calculer la loi conjointe du couple (U,V) et en déduire la valeur de c.

(b) Calculer $P(Y \in [0,2])$ et $E(XY)$.

(c) Déterminer la densité de la variable $U+V$.

(d) En déduire l'expression de $g * g$ où g est donnée par :

$$g(t) = t\exp(-t), \ \forall t \geq 0$$

Exercice 2

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$ tel que $X_1 = X_2$ et la densité de probabilité de X_1 est donnée par $f_{X_1} = \frac{1}{\sqrt{x}}I_{x>0}$

(a) Calculer $E(X_1)$

(b) Calculer $E(X_1X_2)$

(c) Que peut on conclure.

Exercice 3

Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité conjointe donnée par :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = e^{-y}I_{0<x<y}$$

(a) Montrer que $f_{(X,Y)}(x,y)$ définit bien une densité de probabilité

(b) Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $Cov(X,Y)$

(c) Montrer que X suit la loi exponentielle de paramètre 1 et donner la densité marginale de Y

(d) Que peut on conclure.

Exercice 4

Soit un couple aléatoire (X,Y) de densité conjointe donnée par :

$$g(x,y) = cxy\exp(-\frac{x^2}{2})I_{0<y<x}$$

(a) Calculer c.

(b) Déterminer la loi conjointe du couple $(X, \frac{Y}{X})$.

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose :

$$Q = \frac{X}{Y}, \quad S = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \text{ et } T = \frac{Y-X}{\sqrt{2}}.$$

(a) Déterminer la loi conjointe du couple (Q,Y).

(b) Déterminer la loi conjointe du couple (S,T) et donner $Cov(S,T)$, $Var(S)$ et $Var(T)$

(c) Soit C une v.a.r. qui suit la loi de Cauchy standard $\mathcal{C}(1,0)$, montrer que la v.a. $\frac{1}{C}$ suit la loi de Cauchy standard.