Ecole Nationale des Sciences
et des Technologies Avancées
à Borj Cedria

2022-2023
H.Ben Majdouba

TD n°1 : Optimisation sans Contraintes

Exercice 1. *Soit* $f : IR^2 \to IR$ *telle que*

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - xy + y^2$$

On s'intéresse au problème $(P) \quad \min_{IR^2} f(x,y)$

1. *Montrer que* (P) *admet une solution.*
2. *Calculer les points critiques de f.*
3. *Résoudre* (P).

Exercice 2. *On considère f définie sur* IR^2 *par*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

1. *Montrer qu'il existe* $(\alpha,\beta) \in IR_+^2$ *(et les déterminer) tels que*

   $$f(x,y) \geq \alpha \|(x,y)\|^2 + \beta$$

   pour tout $(x,y) \in IR^2$ *, où la notation* $\|.\|$ *désigne la norme euclidienne de* IR^2 .

   On déduire que le problème

   $$(P) \quad \min_{(x,y)\in IR^2} f(x,y)$$

   possède au moins une solution.
2. *La fonction f est-elle convexe sur* IR^2 *?*
3. *Déterminer les points critiques de f, et préciser leurs natures.*
4. *Résoudre alors le problème (P).*

Exercice 3. *Soit le problème d'optimisation suivant :*

$$(P) \quad \min_{(a,b)\in IR^2} J(a,b), \quad avec \quad J(a,b) = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - ax - b\right)^2 dx$$

1. *Montrer que le problème (P) est quadratique.*
2. *Ce problème, admet-il une solution ?*
3. *Déterminer cette solution.*

Exercice 4. *Soit $a \in IR$. On définit la fonction f_a par*

$$f_a : (x, y) \to x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y$$

1. *Etudier selon la valeur de a l'existence de solutions au problème d'optimisation* $(P) \quad \min\limits_{(x,y)\in IR^2} f_a(x, y)$
2. *Lorsque $a \in]-2,2[$, résoudre le problème précédent.*

Exercice 5. *On souhaite calculer les points de minimum locaux de la fonction*

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

1. *Donner les points critiques de f.*
2. *Donner le ou les points de minimum locaux.*
3. *Les points de minimum locaux obtenus sont-ils globaux ?*

Exercice 6. *On considère les points du plan M_1, M_2 et M_3 de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ et (x_3, y_3), et la fonction f définie sur IR^2 par*

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{3} (y_i - ax_i - b)^2$$

On supposera de plus que les x_i ne sont pas tous égaux.

1. *Montrer que f n'admet qu'un seul point critique (a^*, b^*).*
2. *Exprimer b^* en fonction de a^*.*
3. *Montrer que f est strictement convexe.*
4. *En déduire que f admet un unique minimum global sur IR^2.*
5. *Que fait-t-on concrètement dans cet exercice en cherchant à trouver a et b qui minimisent la fonction f ?*

Exercice 7. *Etudier, suivant le paramètre α, l'existence du minimum sur IR^3, de la fonction*

$$J : x \to \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + \alpha x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_1 - x_2 - x_3$$