Cours de Recherche Opérationnelle 2

Enseignant : Afef Bouzaiene
Ecole Nationale des Sciences et Technologies Avancées
Borj Cedria – 2ème année Option S.I.C.

2020-2021

Bibliographie

- Précis de Recherche Opérationnelle, 6ème édition, Robert Faure, Bernard Lemaire, Christophe Picouleau, DUNOD, Paris, 2009.
- Graphes et algorithmes , Michel Gondran et Michel Minoux, 4ème Edition, Lavoisier, 2009.
- Exercices et Problèmes résolus de recherche opérationnelle Tome 1, Roseaux, DUNOD, 2005.
- http://www.lamsade.dauphine.fr/~gabrel/enseignement.php ; Notes de cours « Algorithmique et applications », Virginie Gabrel, CPES 2ème année, 2016-2017.
- http://www.lgi.ecp.fr/~mousseau/Cours/S4/pmwiki/uploads/Main/GraphesAlgoBase.pdf; «Théorie des Graphes, algorithmes de bases », Vincent Mousseau, Ecole Centrale Paris, 2009.

Les Flots : Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

- Un réseau de transport est un graphe de p sommets (p fini), sans boucle, avec une entrée x_O (source) et une sortie x_p (puits), telles que :

- depuis x_O, il existe un chemin vers tout autre sommet x_k;

- depuis un sommet x_k, il existe un chemin vers x_p

- Tout arc u est valué par un entier positif c(u) (capacité de u)

➔ Exemples de c(u) : tonnages dans des bateaux, wagons, camions ou débits dans des canalisations, voies de transmission

- Le problème consiste à acheminer une quantité maximale de x_O à x_p, en respectant les contraintes liées à la capacité et à la loi de conservation.

Les Flots : Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

- la quantité $\varphi(u)$, transportée sur chaque arc u, nommée « flux sur u », vérifie $0 \leq \varphi(u) \leq c(u)$.

- Pour tout x, différent de x_O et de x_p, on a la loi de conservation (loi de Kirchhoff); la somme des flux entrant sur x est égale à la somme des flux sortant de x :

$$\sum_{x \in \Gamma^-(x)} \varphi(y,x) = \sum_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi(x,y), \quad x \neq x_O, x_p$$

- Un flot Φ est déterminé par la donnée du flux pour tous les arcs du réseau de transport

- $V(\Phi)$: la valeur du flot est la somme des flux partant de x_O (arrivant sur x_p)

Les Flots : Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

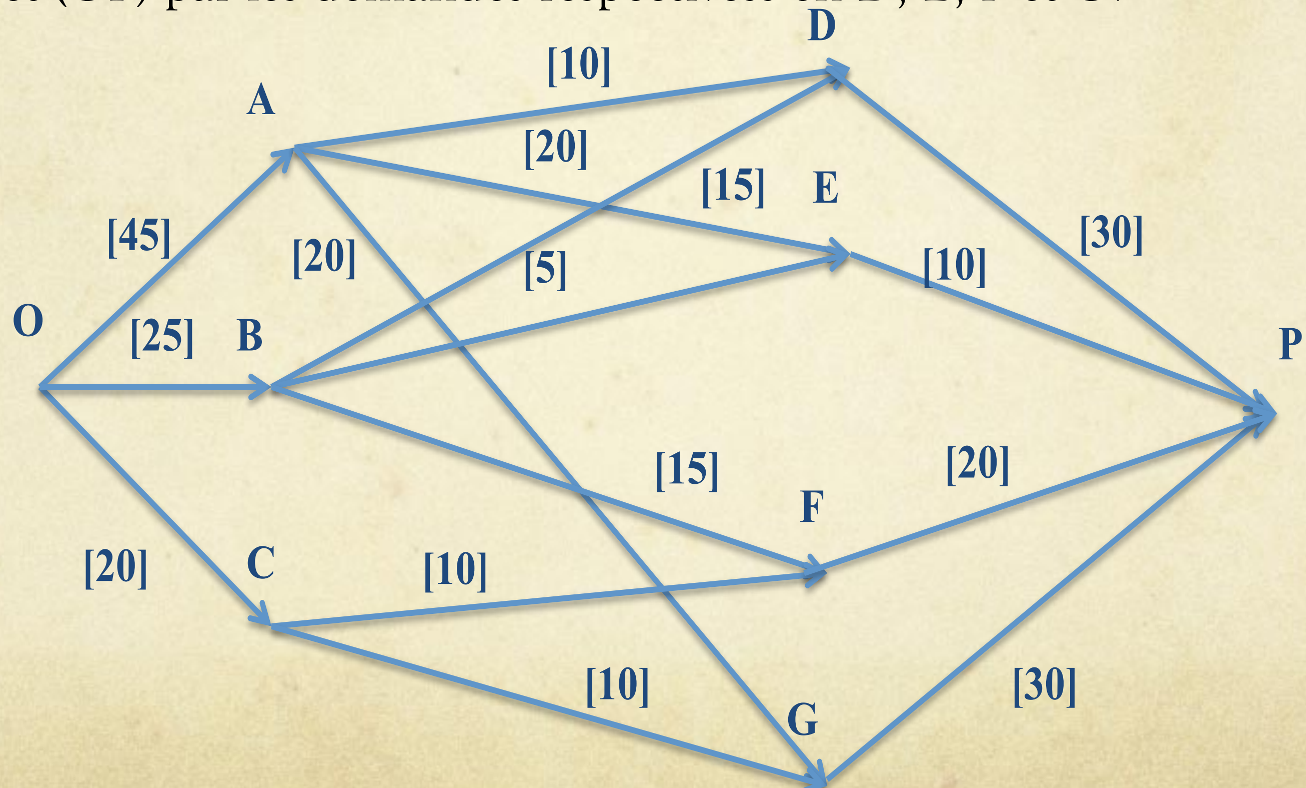
Exemple : On veut acheminer un produit à partir de 3 entrepôts A, B et C vers quatre clients D, E, F et G :

- Les quantités respectives en stock sont 45, 25 et 20 ;
- La demande des clients est de 30, 10, 20 et 30 ;
- Les limitations en matière de transport d'un entrepôt à un client sont :

	D	E	F	G
A	10	15	--	20
B	20	5	15	--
C	--	--	10	10

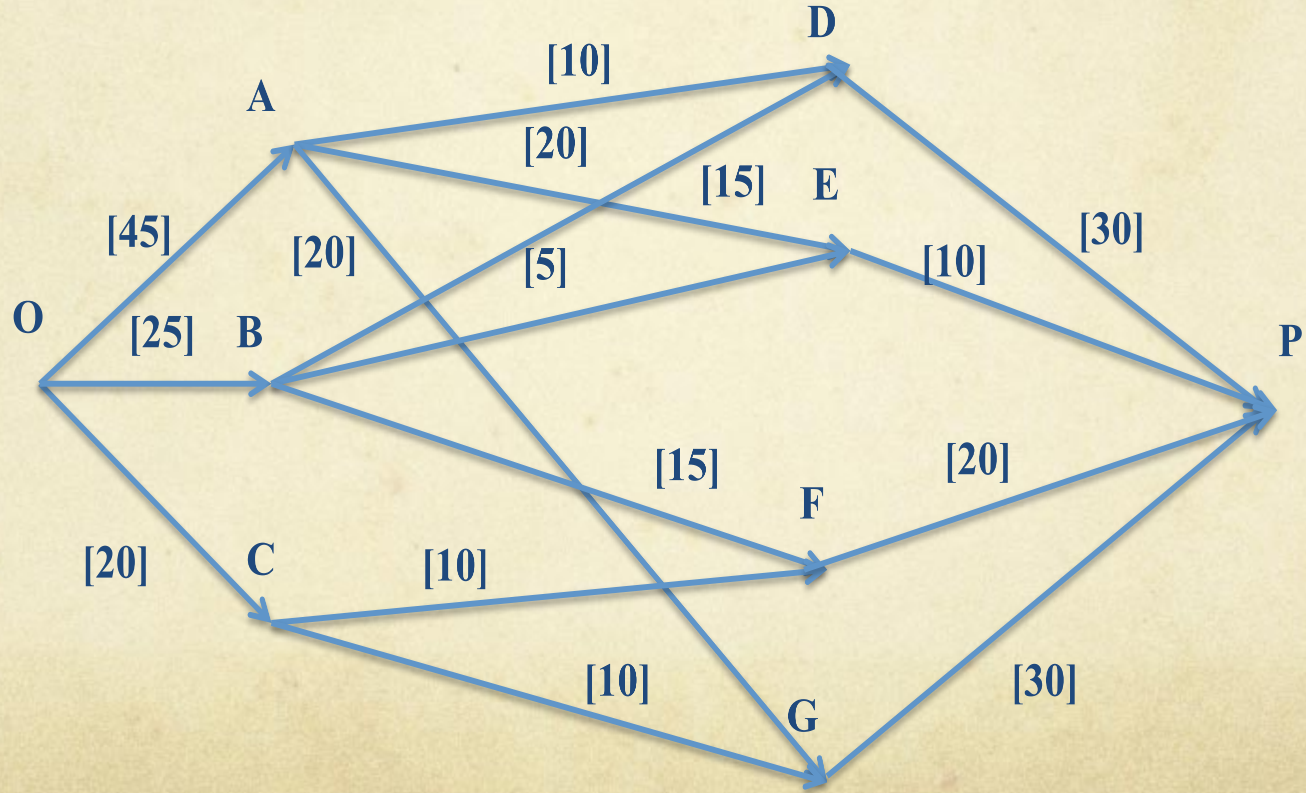
Les Flots : Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

- O et P sont fictifs et ajoutés pour obtenir un réseau de transport. On value les arcs (OA), (OB) et (OC) par les disponibilités respectives en A, B et C ; et les arcs (DP), (EP), (FP) et (GP) par les demandes respectivess en D, E, F et G.



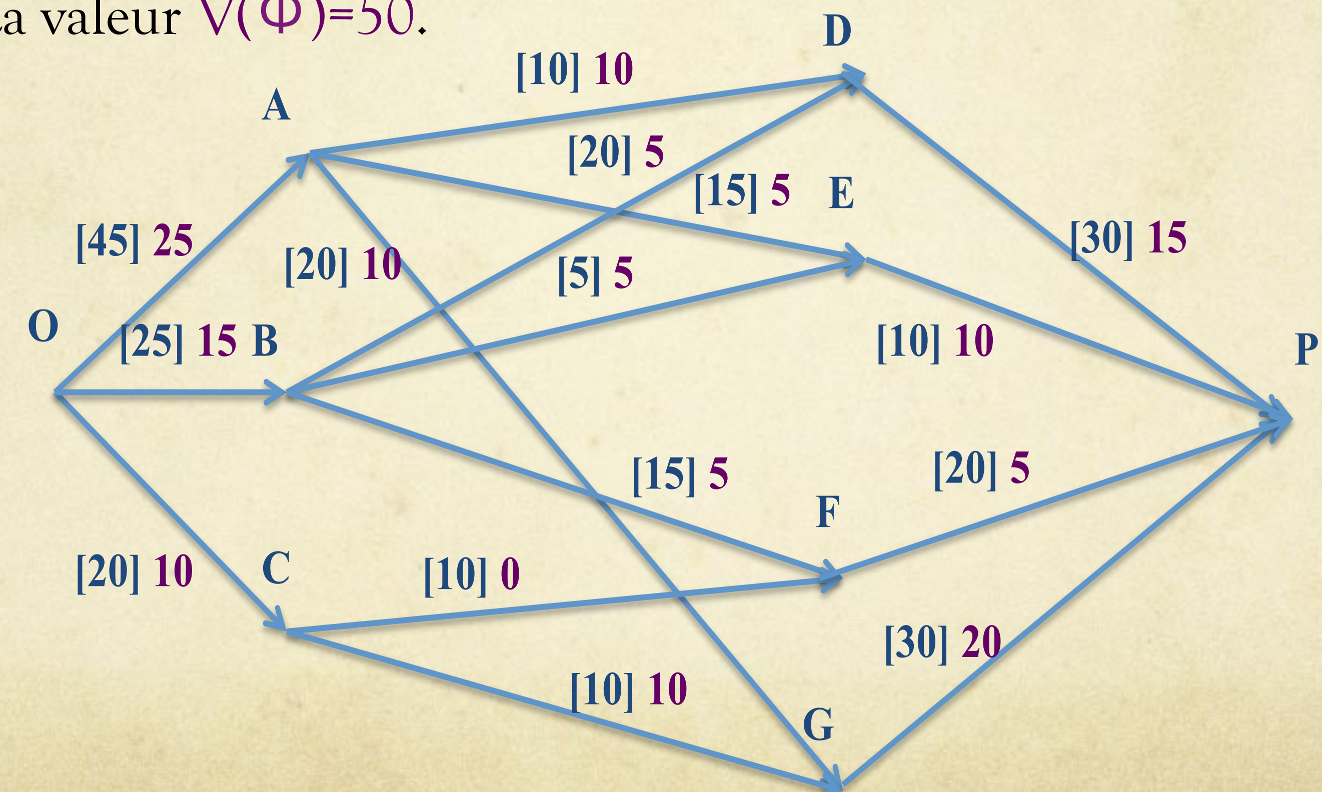
Les Flots : Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

- Construire un flot réalisable (admissible) respectant les contraintes :



Les Flots : Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

- Un exemple de flot admissible ou réalisable (respecte les contraintes de capacités sur les arcs et la loi de Kirchhoff en tout sommet autre que O et P). La valeur V(Φ)=50.



Les Flots : Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

Définitions :

- Un arc est dit **saturé** si $\varphi(u)=c(u)$. Les autres ont une capacité résiduelle de $c(u)-\varphi(u)$, non nulle.

- (x_i, x_{i+1}) est un arc direct s'il fait partie du graphe. Un arc est indirect si son opposé (x_i, x_{i+1}) est un arc du graphe.

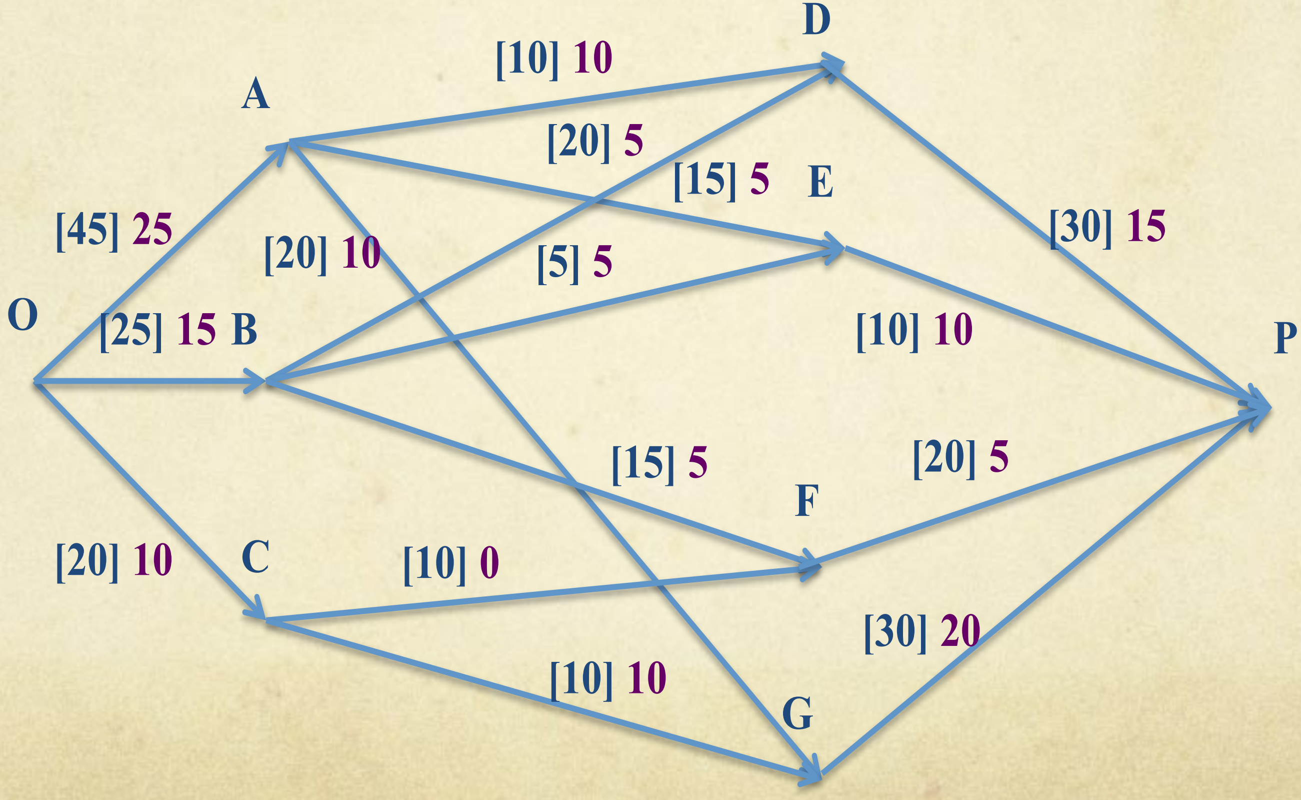
- Une chaîne améliorante est une chaîne élémentaire $\mu(x_O,\ldots,x_p)$, d'origine x_O, et d'extrémité x_p, telle que, aucun arc direct ne soit saturé et que les flux des arcs indirects soient strictement positifs.

- Un flot est dit complet si tout chemin de O à P contient au moins un arc saturé.

- Un flot est dit optimal s'il ne comporte pas de chaîne améliorante reliant O à P.

Les Flots : Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

- Quels sont les arcs saturés? Ce flot est t-il complet? Ce flot est t-il optimal ?



Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

- **Principe de l'algorithme de Ford-Fulkerson :**

A- Construire un flot complet. (tous les chemins sont saturés entre O et P)

B- Identifier des chaines améliorantes

C- Construire un flot optimal (après avoir maximiser les flux sur les chaines améliorantes)

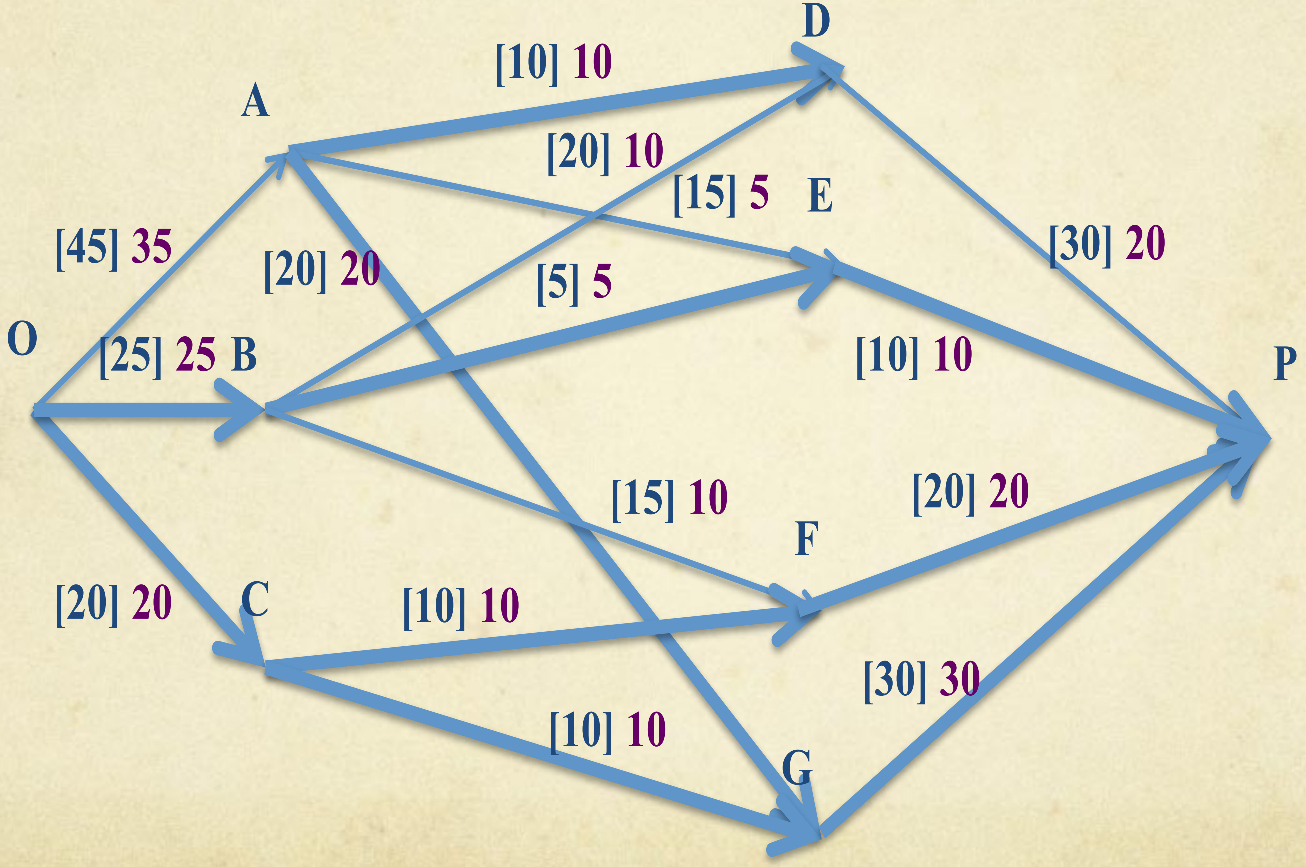
Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

- **Algorithme de Ford-Fulkerson :**

A- Construction d'un flot réalisable complet (Pour chaque chemin faire passer un flot égal à la capacité résiduelle minimale de ce chemin, de bas en haut par exemple)

Flot de valeur maximale

- **Les arcs en gras sont saturés.**



Flot de valeur maximale

- **Algorithme de Ford-Fulkerson (suite)** :

B- Identification d'une chaîne améliorante par une procédure de marquage :

1. Initialement la source O est marquée du signe + et les autres sont non-marqués.

2. Tant que cela est possible, choisir un sommet x non-marqué vérifiant l'une des définitions 3 ou 4 suivantes :

3. Si x est extrémité terminale d'un arc (y,x) tel que y est déjà marqué et $\varphi(y,x)<c(y,x)$; c.a.d. que (y,x) est non-saturé, marquer + le sommet x

4. Si x est extrémité initiale d'un arc (x,y) tel que y est marqué et $\varphi(x,y)>0$; c.a.d. que (x,y) est de flux non-nul, marquer - le sommet x

5. $p(x) \leftarrow y$ (le sommet y a permis de marquer le sommet x : le prédécesseur de x par le marquage, soit p(x), est le sommet y)

6. Si en fin d'application de cette procédure, le puits x_p n'est pas marqué, alors il n'existe pas de chaîne améliorante et le flot est optimal; sinon identifier une chaîne améliorante et allez en C.

Flot de valeur maximale

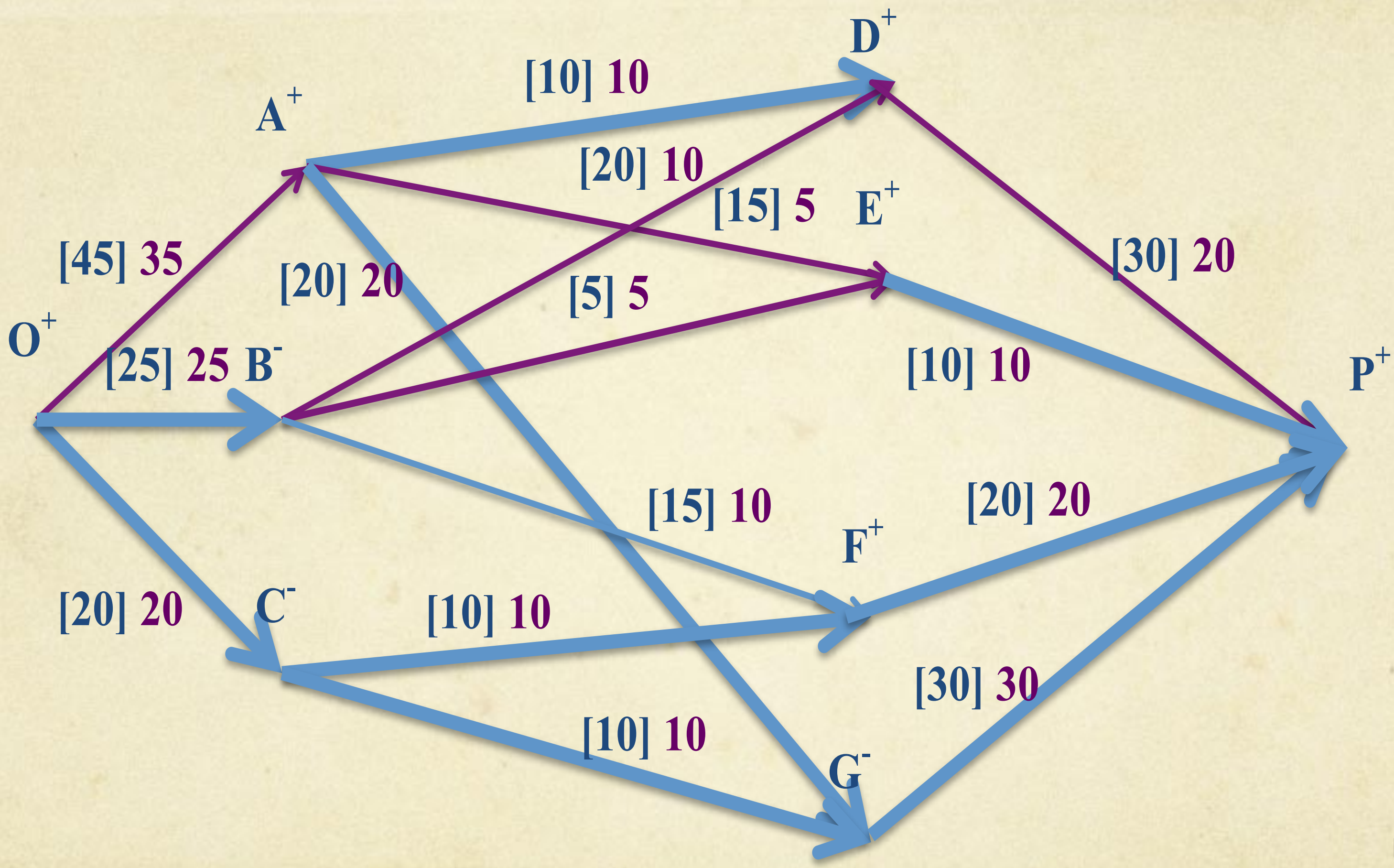
- **Algorithme de Ford-Fulkerson (suite) :**

C- Augmentation de flux sur une chaîne améliorante CA :

7. Calculer $\delta^+ = \min\{c(u) - \varphi(u)\}$, où u est un arc direct de CA; nécessairement $\delta^+ > 0$, car aucun arc direct n'est saturé.
8. Calculer $\delta^- = \min\{\varphi(u)\}$, où u est un arc indirect de CA; nécessairement $\delta^- > 0$, car aucun arc indirect n'a son flux nul.
9. $\delta = \min\{\delta^+ ; \delta^-\}$
10. Pour tout arc direct u faire : $\varphi(u) \leftarrow \varphi(u) + \delta$
11. Pour tout arc indirect u faire : $\varphi(u) \leftarrow \varphi(u) - \delta$
12. Reprendre la procédure de marquage jusqu'à ce qu'il n'existe plus de chaîne améliorante (c.a.d. P n'est plus marqué)

Flot de valeur maximale

- Application à l'exemple :



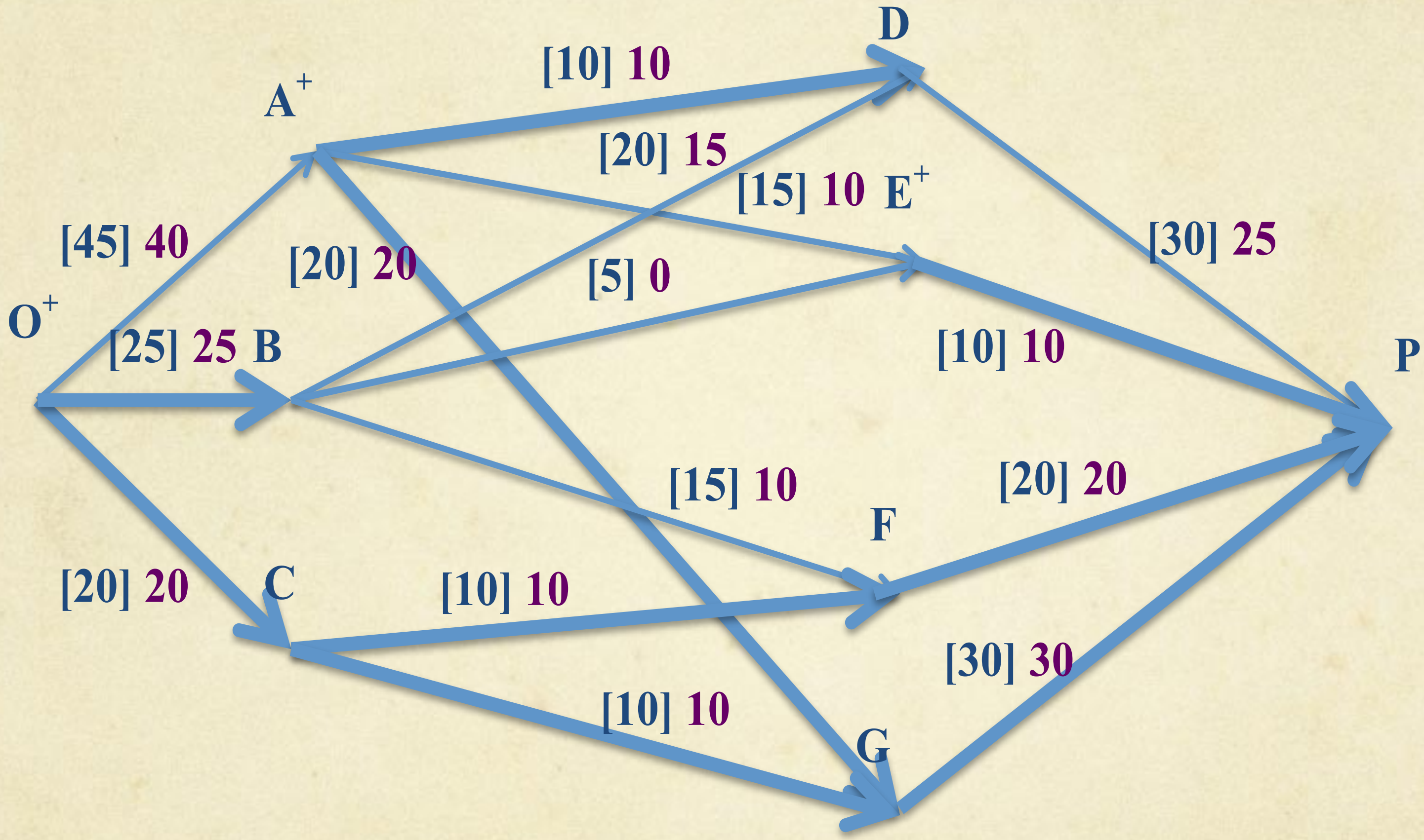
➔ Une chaîne améliorante est la chaîne (O, A,E,B,D,P); on l'obtient en remontant à partir de P à travers les valeurs de p(x) (Etape 5 de l'alg. de Ford-Fulkerson)

Les Flots : Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport

- Application à l'exemple :

- p(A)=O; p(E)=A; p(B)=E; p(D)=B; p(P)=D; p(C)=F; p(F)=B; p(G)=P ;
- Pour les arcs directs (OA), (AE), (BD), (DP); on a $\delta^{+}=10$;
- Pour le(s) arcs indirect(s) (BE) => $\delta^{-}=5$;
- D'où $\delta=5$
- Augmenter le flux sur les arcs directs par $\delta=5$; et diminuer celui de l'arc indirect par $\delta=5$.

Les Flots : Problème du Flot de valeur maximale dans un réseau de transport



- La valeur du nouveau flot est égale à 85.
- En appliquant de nouveau la procédure de marquage, on ne peut plus marquer P. Le sous-ensemble des sommets marqués est {O, A, E}

Flot de valeur maximale dans un réseau de transport : **Optimalité de l'algorithme de Ford- Fulkerson**

- Soit $V(\phi) = \sum_{i \in \Gamma^+(o)} \varphi_{oi} = \sum \varphi_{oi}$; o la source du réseau et p son puits
- Soit S un sous-ensemble de sommets de X; tel que $o \in S$ et $p \notin S$. On dit que S et $\overline{S} = X \setminus S$ forment une « coupe » C. La capacité de cette coupe est

$$C(S) = \sum_{i \in S, j \in \overline{S}} c_{ij}$$

Exemple : S= {O, A, E} ; Calculer C(S) ?

Flot de valeur maximale dans un réseau de transport : **Optimalité de l'algorithme de Ford- Fulkerson**

- Soit $V(\phi) = \sum_{i \in \Gamma^+(o)} \varphi_{oi} = \sum \varphi_{oi}$; o la source du réseau et p son puits
- Soit S un sous-ensemble de sommets de X; tel que $o \in S \ et \ p \notin S$. On dit que S et $\overline{S} = X - S$ forment une « coupe » C. La capacité de cette coupe est

$$C(S) = \sum_{i \in S, j \in \overline{S}} c_{ij}$$

Exemple : S= {O, A, E} ; Calculer C(S) ?

$C(S)=c_{AD}+ c_{EP}+ c_{AG}+ c_{OB}+ c_{OC}=85$

Optimalité de l’algorithme de Ford- Fulkerson

Propriété 1 : **Pour toute coupe** $C = (S, \bar{S})$ **et tout flot** Φ **:**

$$V(\phi) = \sum_{i\in S, j\in\bar{S}} \varphi_{ij} - \sum_{i\in S, j\in\bar{S}} \varphi_{ji}$$

La valeur du flot $V(\phi)$ **, égale la somme des flux sortants de S diminuée de la somme des flux entrants dans S.**

Optimalité de l'algorithme de Ford- Fulkerson

Preuve : A partir de la loi de Kirchhoff on transforme $V(\phi) = \sum \varphi_{oi}$ en

$$V(\phi) = \sum \varphi_{oi} - \underbrace{\sum \varphi_{jo}}_{=0} + \sum_{i \in S, i \neq o} (\underbrace{\sum \varphi_{ij} - \sum \varphi_{ji}}_{=0}) \Rightarrow$$

$$V(\phi) = \sum_{i \in S} \varphi_{ij} - \sum_{i \in S} \varphi_{ji}$$

On décompose la somme suivant que j appartient à S ou non :

$$V(\phi) = \underbrace{\sum_{i \in S, j \in S} \varphi_{ij} - \sum_{i \in S, j \in S} \varphi_{ji}}_{=0} + \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} \varphi_{ij} - \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} \varphi_{ji}$$

c.q.f.d.

Optimalité de l'algorithme de Ford- Fulkerson

Propriété 2 : (reliant la valeur d'une coupe à celle d'un flot)

Pour toute coupe C et tout flot Φ, on a : $C(S) \geq V(\phi);$

Preuve : $0 \leq \varphi_{ij} \leq c_{ij} \Rightarrow$

$$C(S) = \sum_{i\in S, j\in \bar{S}} c_{ij} \geq \sum_{i\in S, j\in \bar{S}} \varphi_{ij} \geq \sum_{i\in S, j\in \bar{S}} \varphi_{ij} - \sum_{i\in S, j\in \bar{S}} \varphi_{ji} = V(\phi)$$

D'où s'il existe $S^* \,/\, C(S^*) = V(\Phi^*)$ alors Φ^* est de valeur maximale et S* une coupe de capacité minimale.

=> Théorème de Ford- Fulkerson

Optimalité de l’algorithme de Ford- Fulkerson

Théorème de Ford-Fulkerson :

Dans un réseau de transport, la capacité minimale des coupes est égale à la valeur maximale des flots:

$$C(S^*)=V(\phi^*)$$

Optimalité de l'algorithme de Ford- Fulkerson

Preuve du théorème de Ford-Fulkerson :

A la dernière itération de l'alg. de Ford-Fulkerson : Il n'existe plus de chaîne améliorante => considérons la coupe C où S est l'ensemble des sommets marqués et $\overline{S}$ l'ensemble des sommets non-marqués; on a :

- Pour tout arc (i,j) avec $i \in S, j \in \overline{S}\ ; \varphi_{ij} = c_{ij}$; sinon j serait marqué.
- Pour tout arc (j,i) avec $i \in S, j \in \overline{S}\ ; \varphi_{ji} = 0$; sinon j serait marqué.

D'où :

$$C(S) = \sum_{i \in S, j \in \overline{S}} c_{ij} = \sum_{i \in S, j \in \overline{S}} \varphi_{ij} - \sum_{i \in S, j \in \overline{S}} \varphi_{ji} = V(\phi)$$

L'algorithme de Ford-Fulkerson permet donc bien d'exhiber une coupe minimale et un flot optimal.

Exercice : Prouver l'optimalité du flot trouvé dans l'exemple précédent.

Problème du Flot de valeur maximale avec coût minimum dans un réseau de transport

- Outre les capacités limitées de transport, le coût d'acheminement d'une marchandise doit être pris en compte => considération du problème de recherche d'un flot maximal à coût minimal

- La valeur maximale d'un flot est unique V*, mais il existe fréquemment de nombreux flots de même valeur V*. Parmi ceux-ci on cherche un de moindre coût.

- R réseau de transport avec o et p la source et le puits, à chaque arc (i,j) sont associées deux valeurs positives : $[c_{ij}, p_{ij}]$ où c_{ij} est la capacité et p_{ij} est le coût unitaire =>

le coût d'un flot $\Phi = \sum_{(i,j)} \varphi_{ij} p_{ij}$

Flot de valeur maximale avec coût minimum

- Définition du graphe d'écart : Pour tout réseau de transport R nous définissons G_{Φ}^{e} le graphe d'écart associé au flot Φ.

- G_{Φ}^{e} comporte les mêmes sommets que R, ses arcs sont obtenus de la façon suivante à partir des arcs (i,j) de R :

- Si $0 < \varphi_{ij} < c_{ij}$ pour (i,j) de R alors G_{Φ}^{e} comporte un arc (i,j) de valuation $r_{ij} = c_{ij} - \varphi_{ij}$ et un arc (j,i) de valuation $r_{ji} = \varphi_{ij}$

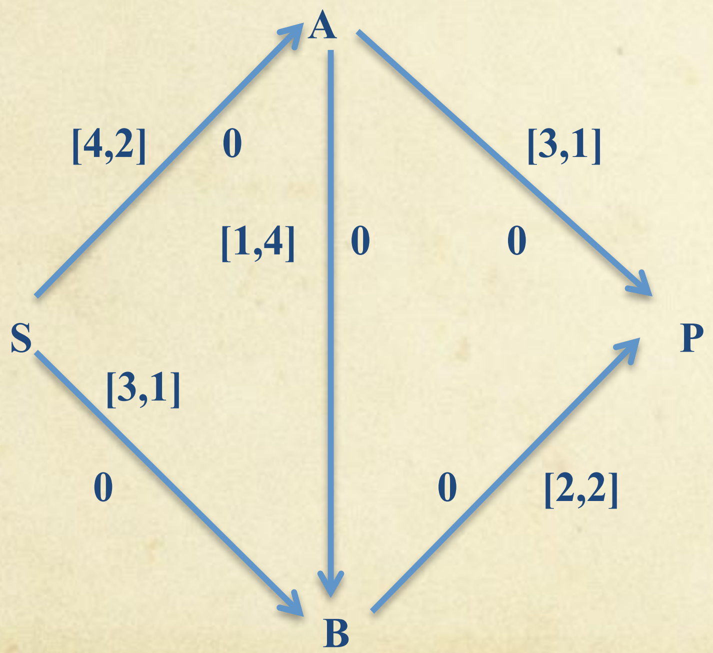
- Si $\varphi_{ij} = 0$ alors G_{Φ}^{e} comporte un arc (i,j) de valuation $r_{ij} = c_{ij}$ et pas d'arc (j,i)

-Si $\varphi_{ij} = c_{ij}$ alors G_{Φ}^{e} comporte un arc (j,i) de valuation $r_{ji} = \varphi_{ij}$ et pas d'arc (i,j)

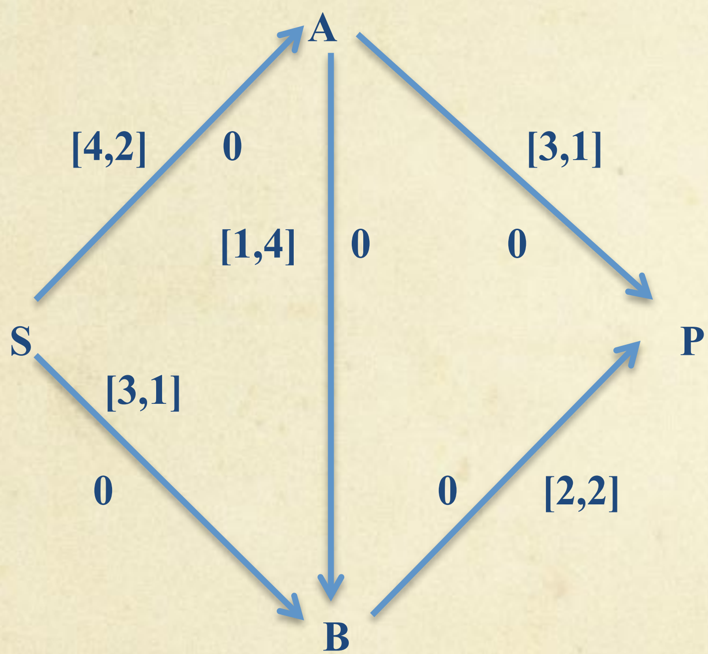
- pour (i,j) de R de coût p_{ij} ; dans G_{Φ}^{e} le coût de (i,j) s'il existe est $+p_{ij}$ et celui de (j,i) s'il existe est $-p_{ij}$.

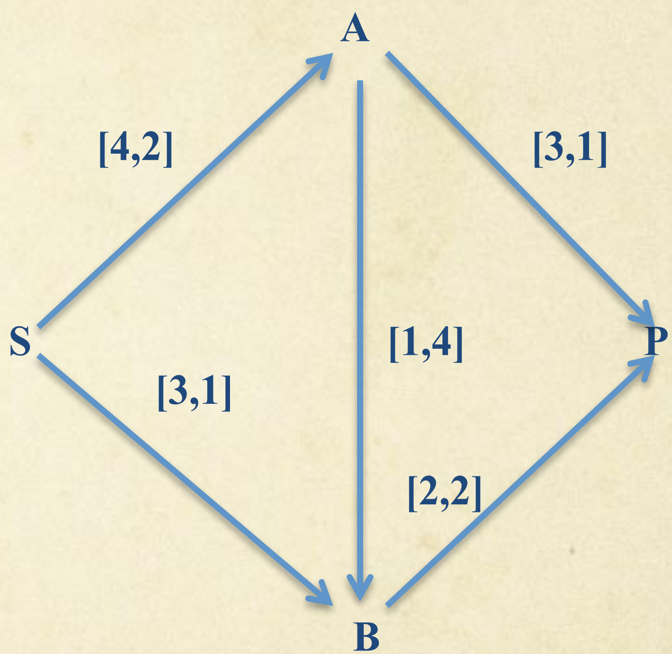
Problème du Flot de valeur maximale avec coût minimum dans un réseau de transport

- Définir le graphe d'écart associé au graphe R, ci-dessous, au flot nul :



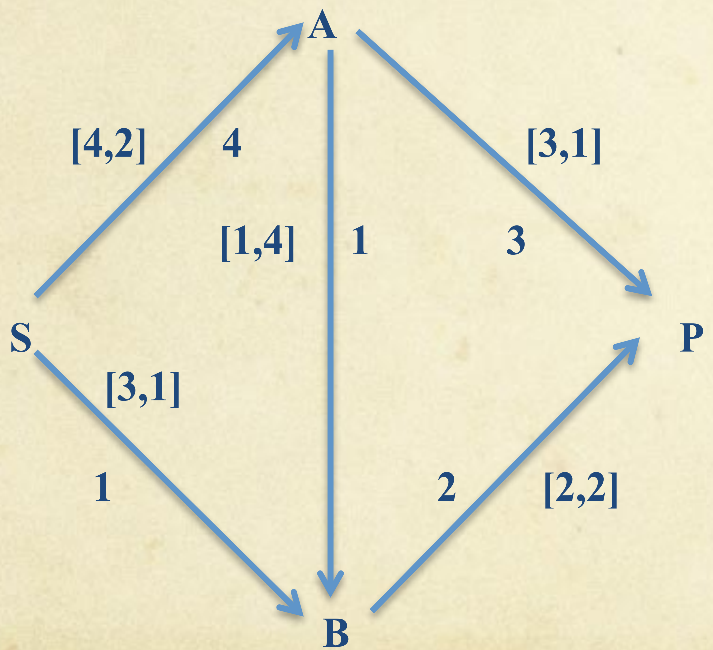
Problème du Flot de valeur maximale avec coût minimum dans un réseau de transport



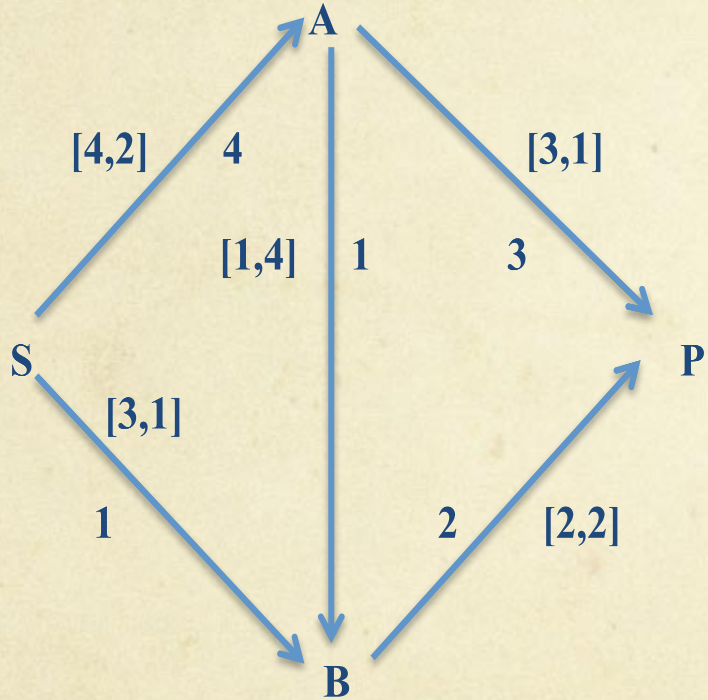


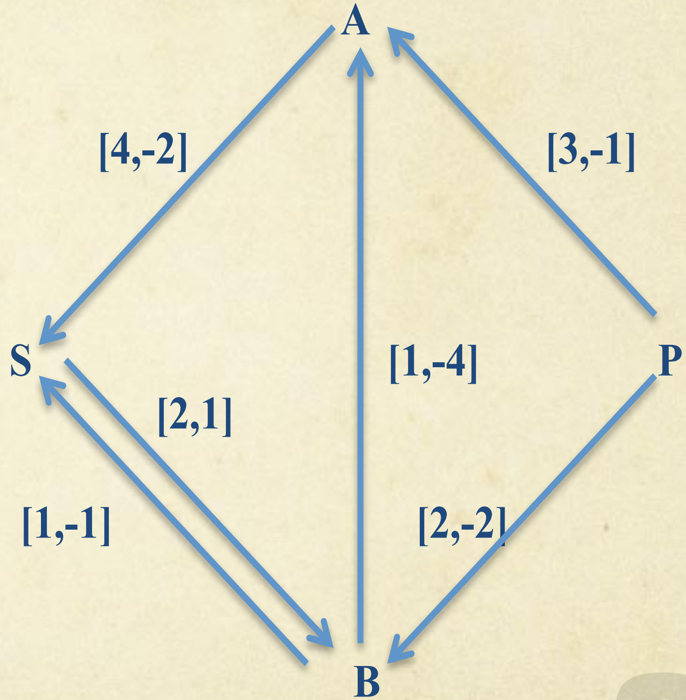
Problème du Flot de valeur maximale avec coût minimum dans un réseau de transport

- Définir le graphe d'écart associé au graphe R suivant :



Problème du Flot de valeur maximale avec coût minimum dans un réseau de transport





Problème du Flot de valeur maximale avec coût minimum dans un réseau de transport

- Si $0 < \varphi_{ij} < c_{ij}$ pour (i,j) de R alors G^e_Φ comporte un arc (i,j) de valuation $r_{ij} = c_{ij} - \varphi_{ij}$ (arc direct dans une CA de R) et un arc (j,i) de valuation $r_{ji} = \varphi_{ij}$

- Si $\varphi_{ij} = 0$ alors G^e_Φ comporte un arc (i,j) de valuation $r_{ij} = c_{ij}$ (ne fait pas partie d'une CA car saturé) et pas d'arc (j,i)

- Si $\varphi_{ij} = c_{ij}$ alors G^e_Φ comporte un arc (j,i) de valuation $r_{ji} = \varphi_{ij}$ (arc indirect dans une CA de R) et pas d'arc (i,j)

=> On constate qu'à une chaîne améliorante pour R correspond un chemin de la source au puits dans G^e_Φ et réciproquement => Un flot est maximal si et seulement s' il n'existe pas de chemin de s à p dans G^e_Φ.

Flot de valeur maximale avec coût minimum

- Théorème de Roy : un flot ϕ est de coût minimum parmi les flots de valeur v(ϕ), si et seulement s' il n'existe pas de circuit de coût strictement négatif dans G^e_Φ.

Flot de valeur maximale avec coût minimum

Algorithme de Roy – Busacker – Gowen :

Initialement $\phi = (0, \dots, 0);$ $G^e_\Phi = R;$

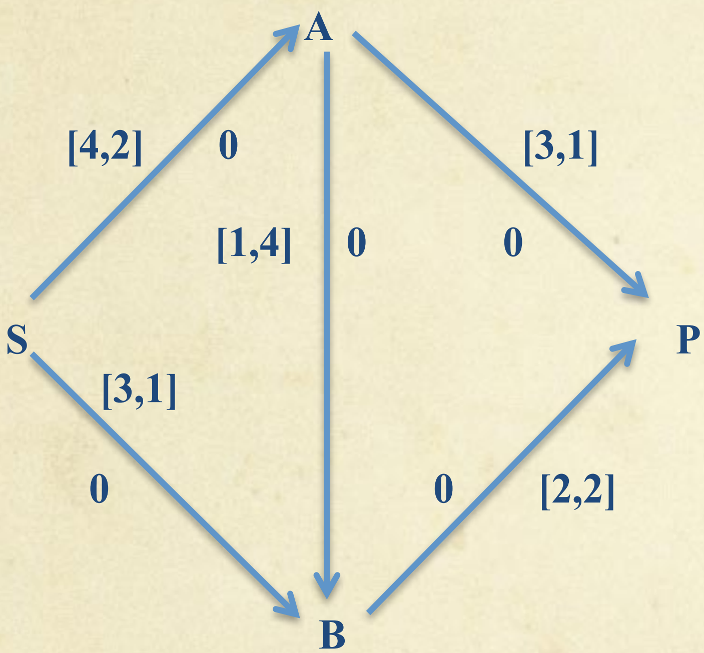
Tant qu'il existe un chemin de s à p dans G^e_Φ faire

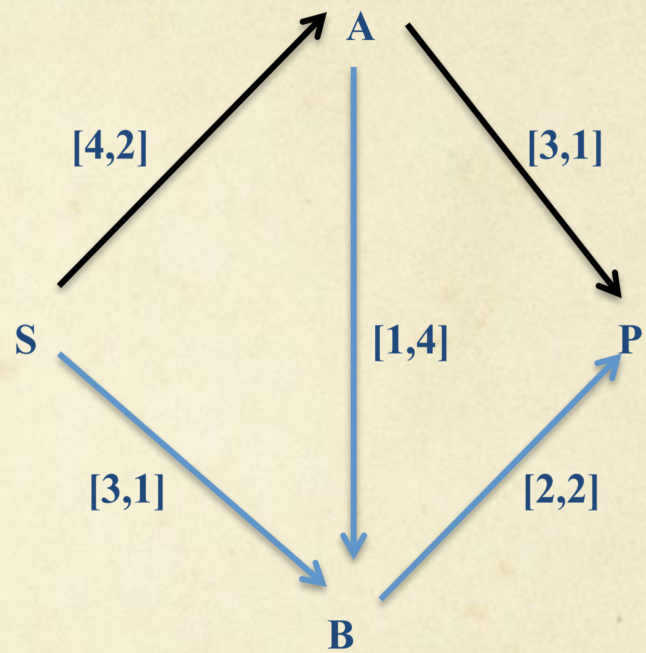
- Déterminer C un chemin de coût minimal grâce à l'algorithme de Bellman –Ford
- Modifier le flux sur tout arc (i,j) de C : si $\delta = \min_{(i,j)\in C} r_{ij}$, le flux est augmenté de δ si (i,j) est un arc du réseau de transport; le flux est diminué de δ si (j,i) est un arc du réseau de transport.
- Tracer le graphe d'écart G^e_Φ ainsi modifié.

Exercice : Appliquer l'algorithme sur l'exemple de la p.

Flot de valeur maximale avec coût minimum

$\Phi^{(0)} = 0$



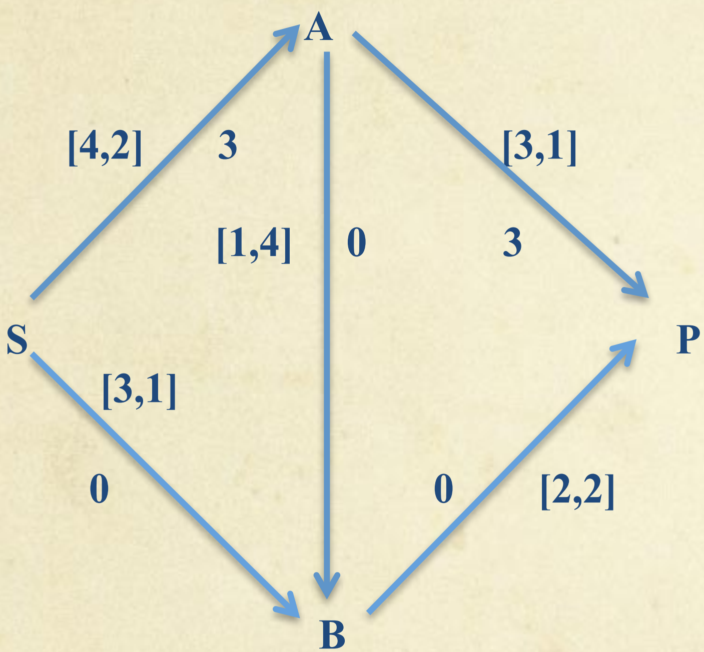


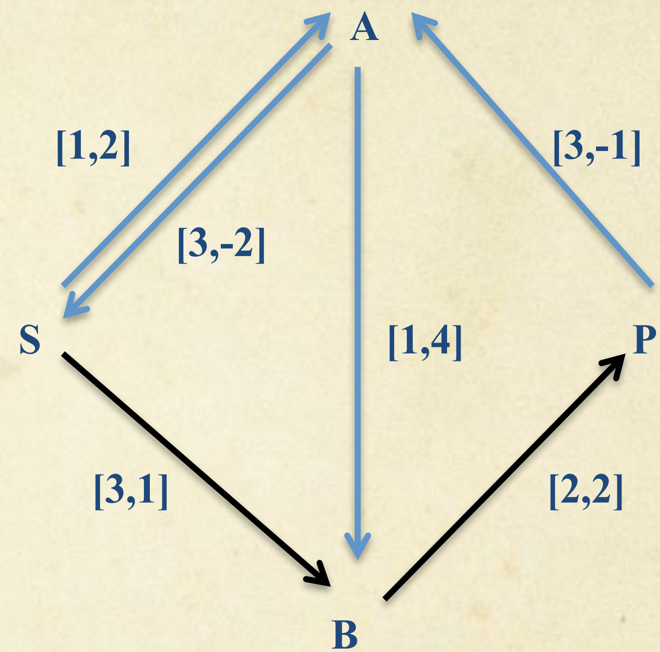
$C^{(1)} = (S, A, P)$ *de coût* 3

$G^e_\Phi = R;\ \delta^{(1)} = 3$

Flot de valeur maximale avec coût minimum

$\Phi^{(1)} = 3 \ de \ co\hat{u}t \ 9$



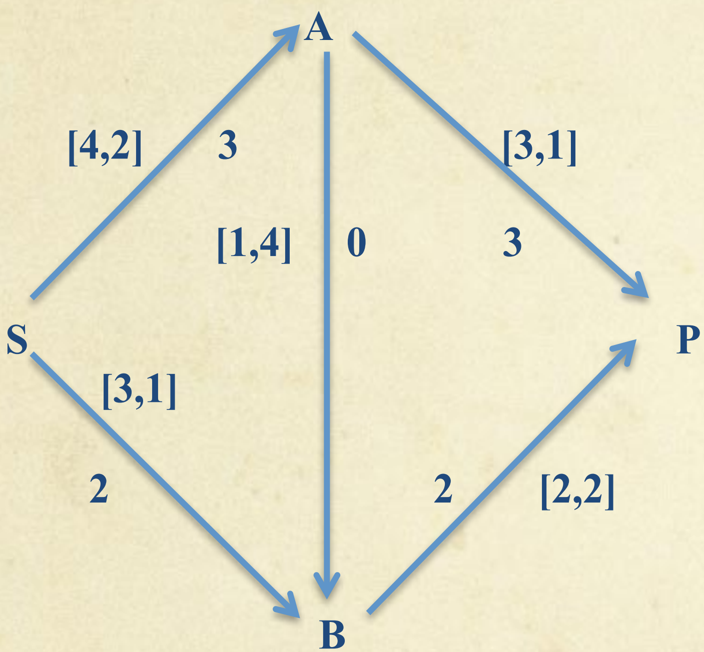


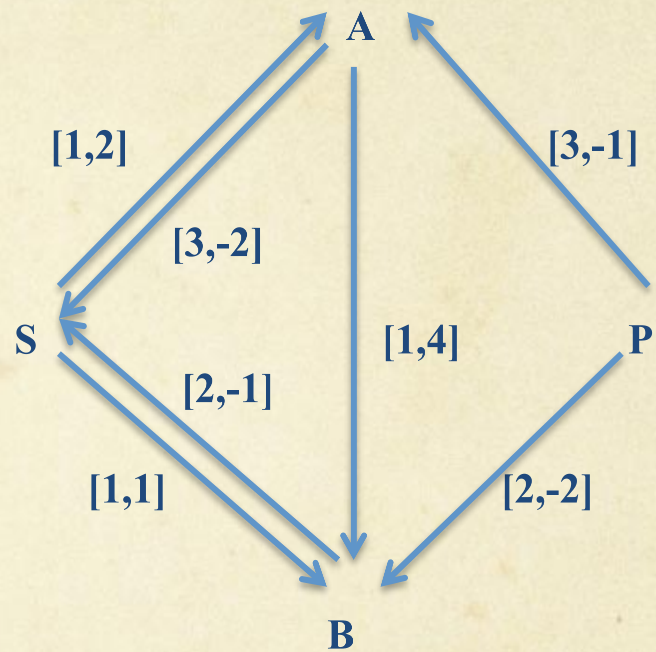
$C^{(2)} = (S, B, P) \ de \ co\hat{u}t \ 3$

$\delta^{(2)} = 2$

Flot de valeur maximale avec coût minimum

$\Phi^{(2)} = 5 \ \textit{de coût} \ 15$





$\textit{Il n'existe plus de chemin de } S \textit{ à } P$