Ecole nationale des sciences et des technologies avancée Borj Cedria

Chapitre 2 : Optimisation avec contraintes

H. Ben Majdouba

Janvier 2023

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue,

Un problème d'optimisation avec contraintes consiste à calculer la solution du problème suivant :

$$(P) : \min_{x \in K} f(x)$$

Avec K est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$,

K est appelé ensemble des solutions admissibles,

Définition

Exemple

Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Et soit le problème : (P): $\min_{(x,y,z)\in K} f(x, y, z)$

Dans le cas de contraintes d'égalité :

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad tel\ que \quad x + y + z = 1\}$$

Dans le cas de contraintes d'inégalité :

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad tel\ que \quad x + y + z \leq 2 \ \ et \ \ x + 2z \leq 3\}$$

Existence de minimum

Théorème :

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et (P): $\min_{x \in K} f(x)$

1) Si K est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ alors (P) admet au moins une solution.

2) Si K est fermé et f est coercive alors (P) admet au moins une solution.

Rappel :

K est fermé si toute suite convergente d'éléments de K sa limite est aussi dans K,

Unicité de minimum

Théorème :

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et (P): $\min_{x \in K} f(x)$

Si f est strictement convexe et que K est convexe alors le problème

(P) admet au plus une solution,

Rappel :

$K \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in K \ , \forall \lambda \in [0,1] \ , \lambda x + (1-\lambda) y \in K$$

Exemples :

- Un espace affine $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ Ax = b\}$ est convexe
- Un demi-espace $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ a^T x \leq c\}$ est convexe
- L'intersection d'ensembles convexes est convexe

Existence et Unicité de minimum

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement convexe et

K est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, et soit (P): $\min_{x \in K} f(x)$.

Si K est borné **ou** si f est coercive alors le problème (P) admet

une unique solution.

Exemple :

Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Et soit le problème (P): $\min_{(x,y,z) \in K} f(x)$ où

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\; tel\ que \;\; x + y + z = 1 \;\; et \;\; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Montrer que (P) admet une unique solution.

Existence et Unicité de minimum

- f est continue, strictement convexe (car la matrice hessienne de f est $H_f = 2I_3$ définie positive) et coercive (car $\lim_{\|(x,y,z)\|\to+\infty} f(x,y,z) = +\infty$)
- $K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad tel\ que \quad x+y+z=1 \ \}$ est un espace affine donc convexe $K_2 = \{(x,y,z) \in$

Existence et Unicité de minimum

- Soit $(X_n) = (x_n, y_n, z_n)$ une suite de K qui converge vers (a, b, c)

Alors : $x_n + y_n + z_n = 1 \quad et \quad x_n^2 + y_n^2 \leq 1$

Donc (par passage à la limite) :

$$a + b + c = 1 \quad et \quad a^2 + b^2 \leq 1$$

D'où $(a, b, c) \in K$

Donc K est fermé

Ainsi le problème (P) admet une unique solution.

Contraintes d'égalité

Définition :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit le problème (P): $\min_{x \in K} f(x)$ où

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \quad telque \quad g_i(x) = 0 \ , \qquad i = 1, \dots, m\}$$

avec $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$

Le Lagrangien associé à ce problème est défini par :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Les λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange.

Contraintes d'égalité

Théorème :

Si x^* est une solution du problème (P) alors il existe un vecteur $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$$

Exemple :

Résoudre le problème suivant :

$$\min_{(x,y,z)\in \mathrm{K}} (2x - y - z)$$

Où $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\ et\ x + y + z = 1\}$

Contraintes d'égalité

Soit $f(x,y,z) = 2x - y - z$, $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

Et $g_2(x,y,z) = x + y + z - 1$

Le Lagrangien associé à ce problème est définie par :

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z)$

$$\nabla L = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dL}{dx} = 0 \\ \dfrac{dL}{dy} = 0 \\ \dfrac{dL}{dz} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (1) \\ -1 + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (2) \\ -1 + 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (4) \\ x + y + z = 1 & (5) \end{cases}$$

D'après (1) et (2) on déduit que $\lambda_1 \neq 0$

(2) Et (3) donnent : $y = z$

(1)+(2)+(3) donne : $2\lambda_1(x + y + z) + 3\lambda_2 = 0$ or $x + y + z = 1$

Donc $\lambda_2 = -\frac{2}{3}\lambda_1$

Contraintes d'égalité

En intégrant cette relation dans le système on aura :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{1}{\lambda_1} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\lambda_1} \\ z = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\lambda_1} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Donc $\lambda_1{}^2 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \lambda_1 = \pm\frac{3}{2}$

Puisque K est un fermé borné donc f admet au moins un minimum et au moins un maximum sur K,

si $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ alors $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{2}{3}$ et $f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = -2$

si $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ alors $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ et $f(1, 0,0) = 2$

Donc la solution de ce problème est $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$