



ENSTAB

Ecole Nationale des Sciences et Technologies Avancées à Borj Cédria
National School of Advanced Sciences and Technologies of Borj Cedria
المدرسة الوطنية للعلوم والتكنولوجيات المتقدمة بـ برج السدرية

Cours de Calcul scientifique

Yosra BOUKARI

30 octobre 2018

Table des matières

1	Méthode des différences finies	2
1.1	Introduction :	2
1.2	Approximation des dérivées partielles par des différences finies	2
1.2.1	Approximation du domaine	2
1.2.2	Approximation de dérivée d'ordre un et deux	3
1.3	Consistance et convergence	6
1.4	Schémas multiniveaux	10

Chapitre 1

Méthode des différences finies

1.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous présentons une méthode numérique qui permet d'approcher numériquement la solution d'une équation aux dérivées partielles. Cette méthode que nous allons étudier est la méthode des différences finies. Le plan de ce chapitre est le suivant. La section 1.2 sera consacrée à l'écriture du schéma dans le cas unidimensionnel. La section 1.3 sera dédiée à l'étude de la consistance et la stabilité des schémas numériques. La dernière section sera une adaptation de l'étude précédente au cas de dimension d'ordre supérieure ou à multi-échelle.

1.2 Approximation des dérivées partielles par des différences finies

1.2.1 Approximation du domaine

Avant d'approcher numériquement la solution de L'EDP étudiée, une approximation du domaine est requise en premier lieu. Ce domaine sera représenté par un maillage qui est un ensemble de points isolés. Chaque point du maillage définit un nœud. La distance entre deux nœuds successifs définit un pas. Ce pas pourrait être constant dans le cas d'un maillage équidistant, on parlera dans ce cas d'un maillage régulier, ou d'un maillage irrégulier dans le cas où le pas est variable.

Exemple

Soit $\Omega =]a, b[$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Un maillage de Ω est donné par la réunion des N sous intervalles I_i avec $I_i = [x_i, x_{i+1}]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_N$$

Dans le cas d'un maillage régulier (Figure 1.1) le pas est donné par $h = (b - a)/N$ ainsi chaque points $x_i = ih$.

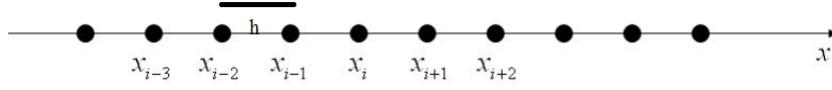


FIGURE 1.1 – Exemple de maillage 1d

On considère Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 exemple le quart du plan $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$. Un maillage du domaine sera donné par la grille des points dont les noeuds sont les $M_i^j = (j\Delta t, i\Delta x)$ (Figure 1.2), avec Δt est le pas en temps et Δx est le pas en espace.

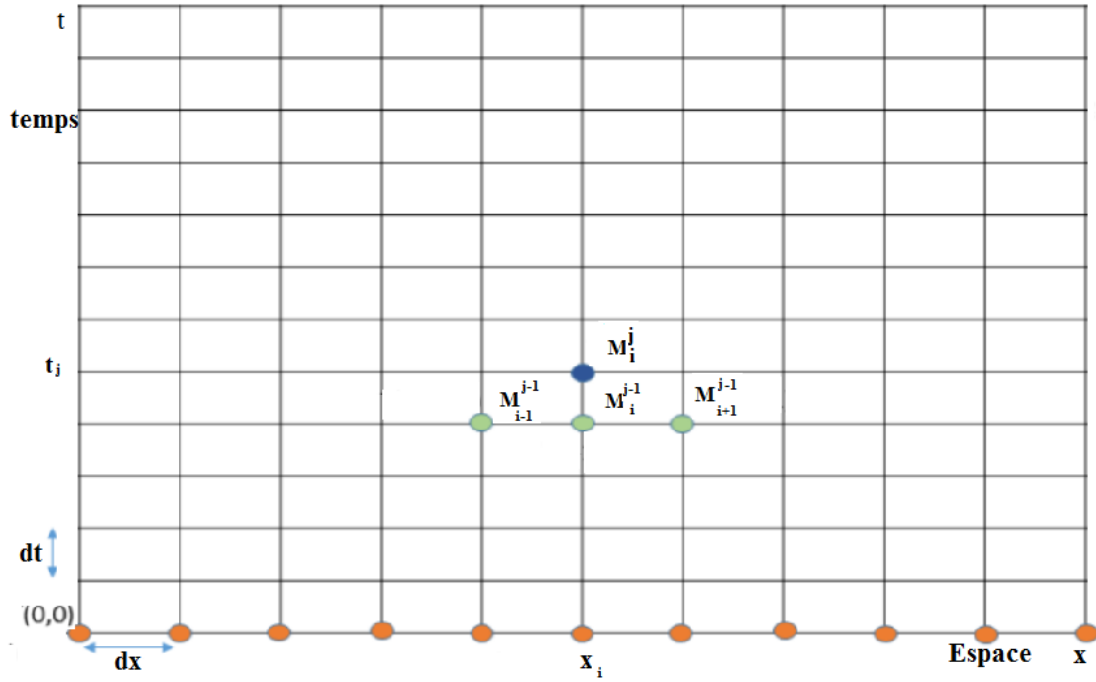


FIGURE 1.2 – Exemple de maillage 2d

1.2.2 Approximation de dérivée d'ordre un et deux

La méthode des différences finies consiste à donner une approximation de la valeur de la solution d'une EDP u aux différents nœuds du maillage.

Cette approximation n'est pas aléatoire, elle se base essentiellement sur le développement de Taylor. Ainsi on retrouve à la fin une reformulation discrète de l'EDP donnée par une combinaison des valeurs de u_i aux différents nœuds M_j .

Soit u une fonction de $C^2(\mathbb{R})$. Nous rappelons que la formule de Taylor nous donne une expression de la valeur de u en un point x_{i+1} du domaine en fonction de la valeurs de ses dérivées dans un voisinage de x_i .

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \Theta(h^3) \quad (1.1)$$

Comme $x_{i+1} = x_i + h$ avec h est le pas de discrétisation alors

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \Theta(h^3) \quad (1.2)$$

d'où l'on peut tirer

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = u'(x_i) + \frac{h}{2}u''(x_i) + \Theta(h^2) \quad (1.3)$$

ainsi une approximation de la dérivée première est donnée par

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \simeq u'(x_i) \quad (1.4)$$

L'équation (1.4) définit un schéma décentré à droite.

$$\frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h} \simeq u'(x_i) \quad (1.5)$$

L'équation (1.7) définit un schéma décentré à gauche.

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \Theta(h^3) \quad (1.6)$$

Par simple soustraction de (1.6) de (1.2) on retrouve une approximation centrée de u' par

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} \simeq u'(x_i) \quad (1.7)$$

Exemple 1. La conservation de la masse lors du transport d'un fluide dans un écoulement dans le cas unidimensionnel et à vitesse constante a se traduit par l'équation du transport suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

où $\rho = \rho(x, t)$ est la masse volumique du fluide au point x à l'instant t . On note par $(x_i)_{i=0:N}$ et $(t_n)_{n=0:N'}$ les points de discrétisations respectivement

spatiales et temporelles. Δt est le pas en temps et Δx le pas en espace. Pour simplifier les notations soit $\rho_i^n = \rho(x_i, t^n)$

$$\frac{\partial \rho_i^n}{\partial t} \simeq \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} \quad (1.9)$$

une approximation de la dérivée spatiale pourrait se faire par le schéma centré suivant

$$\frac{\partial \rho_i^n}{\partial x} \simeq \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (1.10)$$

Ainsi l'approximation discrète de l'équation (1.8) est donnée par

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + a \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (1.11)$$

ce qui nous donne au finale

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t a}{2\Delta x} (\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n) \quad (1.12)$$

et par la suite le système linéaire suivant

$$\rho^{n+1} = A\rho^n = A^n \rho^0 \quad (1.13)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -\lambda & \cdots & \cdots \\ -\lambda & 1 & -\lambda & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & \cdots & -\lambda & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rho^n = \begin{pmatrix} \rho_1^n \\ \rho_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho_{N-1}^n \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = a \frac{\Delta t}{2\Delta x}.$$

Pour approcher une dérivée deuxième il suffit d'additionner (1.2) et (1.6) ainsi on a

$$u''(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (1.14)$$

Exemple 2. Soit u la solution de l'EDP suivante

$$\Delta u = f \quad \Omega =]-1, 1[\quad (1.15)$$

On définit le schéma de différences finies suivant :

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i \quad (1.16)$$

ainsi trouver u_i revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$AU = F \quad (1.17)$$

avec A est la matrice définit par

$$\Delta x^2 A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Remarque 1. On est arrivé à écrire des schémas qui permettent d'approcher numériquement la solution de certaines EDP en ramenant le système discret à une équation linéaire comme le montre (1.13)(1.17). Cependant il n'est pas du tout immédiat de constater que ces schémas donnent une bonne approximation. Il va falloir vérifier que les schémas proposés sont stables et consistants.

1.3 Consistance et convergence

Un certain nombre de notions est nécessaire lors de la résolution des EDP au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales sont la convergence, la stabilité et la consistance. Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue. Ces différents liens sont :

- La stabilité, c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.
- La consistance, c'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tend vers la solution exacte des équations continues lorsque les pas de discrétisations (Δt et Δx) tendent vers zéro.
- La convergence, c'est la propriété qui assure que la solution numérique tend continuellement vers la solution exacte.

Définition 1. Soit un maillage de pas h et D_h un opérateur d'approximation aux différences finies de $\partial^n u$, on appelle erreur de troncature $E(h)$

$$E(h, x) = D_h(u)(x) - \partial^n u(x)$$

un schéma de différences finies est dit consistant si

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(h, x) = 0$$

Définition 2. L'ordre d'un schéma de différences finies est le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$E(h, x_i) = D_h(u)(x) - \partial^n u(x) = \theta(h^k)$$

Exemple 3. On peut approcher une dérivée partielle de premier ordre directement en utilisant (1.2) ainsi on définit un schéma décentré à droite par

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = u'(x_i) + \theta(h)$$

ainsi l'erreur de troncature sera donnée par

$$E(h, x_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u'(x_i) = \theta(h)$$

Il s'agit alors d'un schéma d'ordre 1. En utilisant (1.6), on définit un schéma décentré à gauche par

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = u'(x_i) + \theta(h) \quad \Rightarrow \quad E(h, x_i) = \theta(h)$$

Le schéma décentré à gauche est alors un schéma d'ordre 1. En faisant (1.2)-(1.6), on trouve un schéma centré donné par

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = u'(x_i) + \theta(h^2) \quad \Rightarrow \quad E(h, x_i) = \theta(h^2)$$

Il s'agit alors d'un schéma d'ordre 2.

Un schéma est dit stable si la solution approchée dépend continument des données initiales qui pourront être des mesures sur le bord, des conditions initiales en temps...

La stabilité assure alors que l'opérateur discret est bien inversible et que la norme de son inverse est bornée indépendamment du pas de discrétisation dans le cas stationnaire tel que (1.17) et que la norme de l'opérateur discret est plus petite que 1 dans le cas d'un schéma itératif tel que (1.13). Un schéma est consistant et stable alors il est convergent.

Définition 3. On dit qu'un schéma numérique est L^p -stable si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et Δt , telle que pour toute donnée initiale u_0 dans L^p ,

$$\forall t_n \leq T, \|u^n\|_{L^p} \leq C \|u_0\|_{L^p}$$

La stabilité d'un schéma numérique à deux niveaux du type (1.13)

$$U^{n+1} = A^n U^n$$

est simple à démontrer en effet la stabilité du système dans ce cas est équivalente à montrer :

$$\|A^n\| \leq K \|U_0\|$$

ainsi il suffit alors de montrer que

$$\|A\| \leq K$$

avec

$$\|A\| = \sup_{u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

D'autre part, comme le schéma itératif doit être convergent alors $K < 1$.

Exemple 4. On s'intéresse à l'étude de la convergence du schéma (1.13). On rappelle que nous avons :

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + a \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{2\Delta x} = 0 \quad (1.18)$$

Il est clair que le schéma (1.28) est du premier ordre en temps et du second ordre en espace. Il nous reste alors à étudier la stabilité. Supposons que $u_0 \in L^2$, grâce au théorème de Plancherel, nous avons

$$\|F(u)\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \quad (1.19)$$

nous rappelons que le Fourier d'une translation est donné par

$$F(u)(x + x_0) = e^{ix_0} F(u)(x) \quad (1.20)$$

ainsi par passage au Fourier de (1.13) nous avons

$$F(\rho_j^{n+1}) = F(\rho_j^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (F(\rho_{j+1}^n) - F(\rho_{j-1}^n)) \quad (1.21)$$

$$= F(\rho_j^n) - \frac{a\Delta t}{\Delta x} F(\rho_j^n) \frac{e^{i\Delta x} - e^{-i\Delta x}}{2} \quad (1.22)$$

$$= F(\rho_j^n) (1 - i \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x)) \quad (1.23)$$

d'où par passage en norme nous retrouvons la relation suivante

$$\|F(\rho_j^{n+1})\| = |1 - i \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x)| \|F(\rho_j^n)\| \quad (1.24)$$

En utilisant (1.19)

$$\|\rho_j^{n+1}\| = |(1 - i \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x))| \|\rho_j^n\| \quad (1.25)$$

et par la suite

$$\|\rho_j^{n+1}\| = |(1 - i \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x))|^n \|\rho_j^0\| \quad (1.26)$$

d'autre part, nous avons

$$|(1 - i \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x))| = 1 + \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\Delta x) > 1$$

ce qui fait que le schéma itératif (1.26) est toujours divergent (explose) quel que soit le choix des pas Δt et Δx .

Exemple 5. Nous allons reprendre le schéma (1.13) en introduisant une petite modification, nous allons remplacer

$$\rho_i^n = \frac{\rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n}{2}$$

Ce qui nous permet de retrouver alors

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \frac{\rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n}{2}}{\Delta t} + a \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{2\Delta x} = 0 \quad (1.27)$$

Ce qui nous donne le schéma itératif suivant

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \frac{\rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n}{2}}{\Delta t} + a \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{2\Delta x} = 0 \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow \rho_i^{n+1} = (1 - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}) \rho_{i+1}^n + (-1 + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}) \rho_{i-1}^n \quad (1.29)$$

Par passage au Fourier Plancherel, nous retrouvons

$$F(\rho_j^{n+1}) = (1 - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}) F(\rho_{j+1}^n) + (-1 + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}) F(\rho_{j-1}^n) \quad (1.30)$$

$$= F(\rho_j^n) \left((1/2 - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}) e^{i\Delta x} + (1/2 + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}) e^{-i\Delta x} \right) \quad (1.31)$$

$$= F(\rho_j^n) \left(\cos(\Delta x) + ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x) \right) \quad (1.32)$$

Ce qui nous permet d'avoir au final la relation suivante

$$\|\rho_j^{n+1}\| = |\cos(\Delta x) + ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x)|^n \|\rho_j^0\| \quad (1.33)$$

Ainsi le schéma itératif proposé ne sera convergent que si $|\cos(\Delta x) + ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x)|$ est strictement plus petit que un.

$$|\cos(\Delta x) + ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x)| = \cos(\Delta x)^2 + a^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin(\Delta x)^2$$

Il faut alors une condition sur le pas en temps et en espace pour avoir convergence. En effet, il faut avoir

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad \Rightarrow \quad a \Delta t < \Delta x$$

Le schéma proposé, qui n'est autre que le schéma de Lax-Friedrichs est conditionnellement stable puisqu'il est stable sous réserve que les pas en temps et en espace vérifient la condition $a^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} < 1$. Cette condition est appelée condition CFL (Courant, Friedrichs, Lewy ; 1928).

1.4 Schémas multiniveaux

Supposons qu'on a voulu écrire un schéma centré en temps et en espace pour résoudre l'équation (1.8) c'est à dire, on aura la formulation suivante :

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (1.34)$$

Dans ce cas on aura alors le schéma itératif ci dessous :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n-1} - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n) \quad (1.35)$$

Il est remarquable que cette expression dépend de l'état $n+1$, n et $n-1$, on parle alors d'un schéma à trois niveaux ou multiniveaux. Contrairement au schéma (1.11) qui dépend uniquement des états n et $n+1$, ce qui complique l'étude de stabilité et de convergence de ce schéma. Afin de simplifier l'étude, un changement de variable sera recommandé. On pose

$$U^n = \begin{pmatrix} u^n \\ u^{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

alors il existe une matrice d'ordre N , A_1 , telle que

$$U^{n+1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} U^n \quad (1.37)$$

ainsi la matrice d'itération A est de taille $2N$, avec

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

Id est la matrice identité de taille N et A_1 est définie par :

$$A_1 = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & -1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

L'étude de stabilité revient alors à montrer que $\|A\| < 1$.

$$\|A\| = \sup_{U^1 \in \mathbb{R}^2, U^1 \neq 0} \frac{\|AU^1\|}{\|U^1\|}$$

ainsi ce schéma est convergent si $2a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$