Ecole Nationale des Sciences
et des Technologies Avancées
à Borj Cedria

2023-2024
2TA1-2TA2-2TA3

TD1 : La Méthode des différences finies
Calcul scientifique

Exercice 1.
Soit f une fonction régulière. On souhaite approcher la solution du problème

$$(P)\begin{cases} u" + \frac{u'}{1+x} = f(x) \quad x \in \Omega =]0,1[\\ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

par la méthode des différences finies. Pour cela on considère une discrétisation $(x0, ..., x_{N+1})$ de $[0;1]$ à pas h constant, ainsi que le schéma à trois points usuel pour la dérivée seconde :

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1}\text{flàí}u_i + u_{i\text{flàí}1}) \simeq u"(x_i),$$

et le schéma centré suivant pour la dérivée première,

$$\frac{u_{i+1}\text{flàí}ui_{i-1}}{2h} \simeq u'(x_i),$$

1. Donner une discétisation du domaine.
2. Ecrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire $A_h u_h = b_h$ en explicitant soigneusement la matrice A_h et le second membre b_h. Quel est l'ordre de consistance du schéma ?
3. Etudier la convergence du schéma proposé.

Exercice 2.
Soit u une solution de l'équation suivante :

$$(S1)\begin{cases} \Delta u + nu = 0 \quad x \in \Omega \\ \\ \partial_\nu u = \sqrt{n} \qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

avec $\Omega =]-1/4, 1/4[\times]-1/4, 1/4[$, ν est la dérivée normale extérieure, $\partial\Omega$ est le bord du domaine et $n = (2\pi k)^2$ où $k \in \mathbb{R}$.

1. Donner une discrétisation et une représentation du domaine.

2. Écrire un schéma de différences finies qui approche la solution.

3. Écrire un schéma de différences finies qui approche la solution dans le cas où $\Omega =]-1/4, 1/4[$ en prenant une discrétisation à 5 points.

4. Étudier la consistance et la convergence de ce schéma.

Exercice 3.
On s'intéresse ici à la résolution numérique de l'équation de transport suivante :

$$(S1)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

avec $c > 0$.

1. Etudier l'ordre et la stabilité, par la méthode de Fourier, des schémas aux différences finies suivants :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t} + \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}\right) = 0 \tag{3}$$

2. Indiquer les difficultés spécifiques à l'utilisation pratique des deux derniers schémas.
3. Montrer qu'on a :

$$u(x, t^{n+1}) = u(x, t^n) - c\Delta t\frac{\partial u(x, t^n)}{\partial x} + \frac{c^2\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u(x, t^n)}{\partial^2 x} + O(\Delta t^3). \tag{4}$$

   Nous proposons la famille de schémas suivante (4) (dépendant du paramètre ν) pour la résolution numérique de l'équation du transport :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = 0. \tag{5}$$

   Obtenir la valeur de ν pour laquelle la méthode est consistante, au moins, à l'ordre deux. Nous appellerons au schéma ainsi obtenu le schéma de Lax-Wendroff. Discuter la précision du schéma lorsque $c\Delta t = \Delta x$.
4. Etudier la convergence de ce schéma.