Chapitre 2

Norme vectorielle, norme matricielle et conditionnement

Matière : Analyse Numérique

Sommaire

2.1 Norme vectorielle. . . . 34
2.2 Norme matricielle. . . . 35
2.3 Conditionnement. . . . 38
2.3.1 Conditionnement d'une matrice. . . . 38
2.3.2 Pré-Conditionnement d'un système linéaire. . . . 42

Afin d'établir une majoration des erreurs d'arrondi dues aux erreurs sur les données, on définit la notion de conditionnement. Cette notion est utilisée également dans l'étude des méthodes itératives. Le conditionnement d'un problème est notamment introduit comme un indicateur de sensibilité de la solution à des perturbations des données.

Dans ce chapitre, on note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à cœfficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé, on note par $\mathbb{C}^n$ l'espace vectoriel des vecteurs colonnes à cœfficients complexes $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$

- Le vecteur $\overline{X} = (\overline{x}_i)_{1\leq i\leq n}$ désigne le conjugué du vecteur $X \in \mathbb{C}^n$.
- L'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ est muni produit hermitien défini, pour $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$, par :

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{y}_i$$

et la norme euclidienne associée à ce produit est donnée par :

$$\| X \|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2}$$

2.1 Norme vectorielle.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. <u>**Une norme sur** E</u> est une application

$$\begin{aligned} N:\ E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto N(X) \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\forall X \in E, \quad N(X) \geq 0$ (*positivité*)
2. $\forall X \in E, \quad N(X) = 0 \implies X = 0_E$ (*séparation*)
3. $\forall X \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda X) = |\lambda|\, N(X)$ (*homogénéité*)
4. $\forall (X,Y) \in E \times E, \quad N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$ (*inégalité triangulaire*)

Remarques.
. (E, N) est un espace vectoriel normé.
. Une norme est fréquemment notée $\| \,.\, \|$.
Exemples.
On rappelle que pour $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on a les normes vectorielles suivantes :

1. <u>norme de Hölder d'indice p</u> : $\| X \|_p = \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\big)^{1/p}$, pour $p \in [1, +\infty[$
2. <u>norme 2 ou norme euclidienne</u> : $\| X \|_2 = \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\big)^{1/2}$
3. <u>norme 1</u> : $\| X \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
4. <u>norme infinie</u> : $\| X \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Propriété. (***Inégalité de Hölder***)
Pour $1 \leq p, q \leq +\infty$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et pour tous vecteurs $X \in \mathbb{K}^n$ et $Y \in \mathbb{K}^n$, on a l'inégalité :

$$\| XY \|_1 \leq \| X \|_p \| Y \|_q$$

2.2 Norme matricielle.

Une norme matricielle sur $\mathbb{K}^n$ est toute application

$$||| \,.\, ||| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

vérifiant pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $||| A |||= 0 \iff A = O_n$, où O_n est la matrice nulle d'ordre n
2. $||| \alpha A ||| = |\alpha| \; ||| A |||$
3. $||| A + B ||| \leq ||| A ||| + ||| B |||$
4. $||| AB ||| \leq ||| A ||| \; ||| B |||$

Exemple. Norme de Frobenius : pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$||| A |||_F = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \Big)^{1/2}$$

Définition 2.1 *(***Norme induite ou subordonnée***)*
Toute norme vectorielle $\| \,.\, \|$ de $\mathbb{K}^n$ définit une norme matricielle de la façon suivante :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad ||| A |||= \sup_{\substack{X \in \mathbb{K}^n \\ X \neq 0}} \frac{\| AX \|}{\| X \|} = \sup_{\substack{X \in \mathbb{K}^n \\ \| X \| \leq 1}} \| AX \| = \sup_{\substack{X \in \mathbb{K}^n \\ \| X \| = 1}} \| AX \|$$

dite norme matricielle induite ou subordonnée (à cette norme vectorielle).

Propriétés. Toute norme matricielle induite vérifie :

1. $\| AX \| \leq ||| A ||| \; \| X \|$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ (: On dit que les normes $\| \,.\, \|$ et $||| \,.\, |||$ sont deux normes *compatibles*.)
2. $||| I_n |||= 1$.

`Exercice 1`. La norme de Frobenius est-elle une norme induite ?
La norme de Frobenius n'est pas induite, puisque $||| I_n |||_F = \big(\sum_{i=j=1}^{n} 1 \big)^{1/2} = \sqrt{n} \neq 1$.

Définition 2.2 *(***Rayon spectral***)*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$, les valeurs propres de A. On appelle ***rayon spectral de*** *A, le réel positif noté $\rho(A)$ et défini par :*

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$$

qui est le maximum des modules des valeurs propres de A.

On note $||| \,.\, |||_p$ la norme matricielle induite associée à la norme vectorielle d'indice p : $\| \,.\, \|_p$. On a le résultat suivant :

Proposition 2.3 *(***Normes induites particulières***)*
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les normes matricielles induites associées aux normes vectorielles $\| \,.\, \|_\infty$, $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$ sont données par :

- $||| \, A \, |||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
- $||| \, A \, |||_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $||| \, A \, |||_2 = \begin{cases} \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(AA^T)} = ||| \, A^T \, |||_2, & \text{si } A \text{ est une matrice réelle} \\ \sqrt{\rho(A^* A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = ||| \, A^* \, |||_2, & \text{si } A \text{ est une matrice complexe} \end{cases}$

  où pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A^* = \overline{A}^T = (\overline{a}_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice adjointe de A *(: la matrice transposée de la matrice conjuguée de A).*

∎

On rappelle quelques définitions et notations sur les matrices à coefficients complexes.

Définition 2.4
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *La matrice A est dite* ***hermitienne*** *(ou* ***auto-adjointe****) si $A^* = A$.*
2. *La matrice A est dite* ***unitaire*** *si $A^*A = AA^* = I_n$.*
3. *La matrice A est dite* ***normale*** *si $AA^* = A^*A$.*

Propriétés.

1. Toute matrice unitaire est normale.
2. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unitaire si et seulement si A est inversible et son inverse $A^{-1} = A^*$.
3. $(A^*)^* = A$ et $(AB)^* = B^*A^*$.
4. Si A est une matrice carrée, alors $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice AA^* est semi-définie positive.
6. Si A est inversible alors la matrice AA^* est définie positive.

Propriétés : Rayon spectral et norme matricielle induite.

On remarque en particulier que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice ***symétrique***, alors la norme matricielle induite associée à la norme 2 est donnée par :

$$||| A |||_2 = \rho(A) \tag{2.1}$$

Généralement, cette dernière relation (2.1) devient une inégalité pour une matrice quelconque et pour les autres normes matricielles.

Proposition 2.5 ***(Approximation du rayon spectral par une norme induite)***

1. *Pour toute matrice A et pour toute norme matricielle $||| \, . \, |||$, induite ou non, on a :*

$$\rho(A) \leq ||| A |||$$

2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute matrice A, il existe une norme matricielle induite (qui dépend de A et de ε), notée $||| \, . \, |||_{A,\varepsilon}$ telle que*

$$||| A |||_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$$

■

Cette dernière proposition nous garantit la démonstration du résultat suivant :

Proposition 2.6
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k X = 0,$ *pour tout vecteur X de $\mathbb{C}^n$*
(ii) $\rho(A) < 1$
(iii) $||| A ||| < 1,$ *pour au moins une norme matricielle induite*

■

2.3 Conditionnement.

Il arrive que certains systèmes linéaires soient très sensibles aux erreurs, c'est à dire *mal conditionnés*, indépendamment de la méthode de résolution utilisée. On introduit alors la notion du conditionnement d'une matrice et ses propriétés qui pourront nous être utiles dans des cas pratiques. Ensuite, on définit le pré-conditionnement d'un système linéaire.

2.3.1 Conditionnement d'une matrice.

La notion du conditionnement d'une matrice peut servir à établir des majorations des erreurs d'arrondi dues aux erreurs sur les données. En pratique, pour un système linéaire $AX = b$, les données A et b ne sont données qu'à une erreur près. Cette erreur peut avoir plusieurs origines et parmi ces origines, l'incertitude sur les cœfficients de la matrice A et du vecteur b. Cette perturbation des données peut engendrer une grande erreur de la solution.

Exemple de perturbation :
On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4+10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6+10^{-6} \end{pmatrix}$$

Si on change légèrement le second membre, on considère alors le système très voisin suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4+10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6-10^{-6} \end{pmatrix}$$

Interpréter.

Généralement, une perturbation d'un système linéaire $AX = b$, est présentée par les deux cas suivants :

1^{er} **cas :** ***Perturbation du vecteur*** b**.**

$2^{\text{ème}}$ **cas :** ***Perturbation du la matrice*** A**.**

Définition 2.7 *(***Conditionnement d'une matrice***)*
On appelle conditionnement d'une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ relatif à une norme matricielle induite *$|||\ .\ |||$, le réel positif, qu'on note* ***Cond(A)****, défini par :*

$$Cond(A) = |||\ A\ |||\ \ |||\ A^{-1}\ |||$$

Natations. Le conditionnement d'une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ relatif à une norme matricielle induite d'indice p, $(1 \leq p \leq \infty)$, est donné par :

$$Cond_p(A) = |||\ A\ |||_p\ |||\ A^{-1}\ |||_p$$

On donne quelques propriétés immédiates de $Cond(A)$.
Propriétés. Pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

1. $Cond(A) = Cond(A^{-1})$.
2. $Cond(\alpha A) = Cond(A)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$.
3. $Cond(A) \geq 1$.
4. $Cond(AB) \leq Cond(A)\ Cond(B)$, pour toute matrice inversible $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 2.8
A est dite ***bien conditionnée*** *si $Cond(A)$ est* proche de 1.

■

D'une manière générale, on a le résultat suivant :

Théorème 2.9 *(***Majoration d'erreur***)*
Soient A et δA deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec A inversible. Soient b et δb deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$ tel que $b \neq 0$.

1. *Si $AX = b$ et $A(X + \delta X) = b + \delta b$, alors on a*

$$\frac{\|\ \delta X\ \|}{\|\ X\ \|} \leq Cond(A)\,\frac{\|\ \delta b\ \|}{\|\ b\ \|}$$

2. *Si $AX = b$ et $(A + \delta A)(X + \delta X) = b$, alors on a*

$$\frac{\|\ \delta X\ \|}{\|\ X + \delta X\ \|} \leq Cond(A)\,\frac{|||\ \delta A\ |||}{|||\ A\ |||}$$

Conditionnement pour la norme 2 et ses propriétés.

Soient $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidenne $\| \,.\, \|_2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme matricielle induite $||| \,.\, |||_2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note $Cond_2(A)$ le conditionnement associé à la norme matricielle induite par la norme euclidenne sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.10 *(***Caractérisation du conditionnement pour la norme 2***)*

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. (Noter que $A^T A$ est une matrice symétrique définie positive). Alors*
$$Cond_2(A) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_1}}$$
où σ_n (resp. σ_1) est la plus grande (resp. petite) valeur propre de $A^T A$.
2. *Si de plus A est une matrice symétrique définie positive, alors*
$$Cond_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$
où λ_n (resp. λ_1) est la plus grande (resp. petite) valeur propre de A.

■

Le conditionnement relatif à la norme matricielle induite $||| \,.\, |||_2$ vérifie aussi les propriétés suivantes :

Proposition 2.11 *(***Propriétés du conditionnement pour la norme 2***)*

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors*
$$Cond_2(A) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est une matrice orthogonale.}$$
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On suppose que $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale. Alors*
$$Cond_2(A) = Cond_2(R)$$
3. *Si A et B sont deux matrices symétriques définies positives, alors*
$$Cond_2(A+B) \leq \max\big(Cond_2(A), Cond_2(B)\big)$$

■

2.3.2 Pré-Conditionnement d'un système linéaire.

Au lieu de résoudre un système linéaire $AX = b$ avec sa matrice A est mal conditionnée, il est intéressant de multiplier ce système à gauche par une matrice inversible P telle que la matrice PA soit *bien conditionnée* et résoudre alors le système linéaire :

$$PAX = Pb$$

Ce dernier système s'appelle "***système pré-conditionné***".

L'exemple le plus simple est le pré-conditionnement diagonal, où la matrice P est choisie comme une matrice diagonale constituée par les inverses des éléments diagonaux de A :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$