Vérification d'hypothèse:

Les variables Discrètes

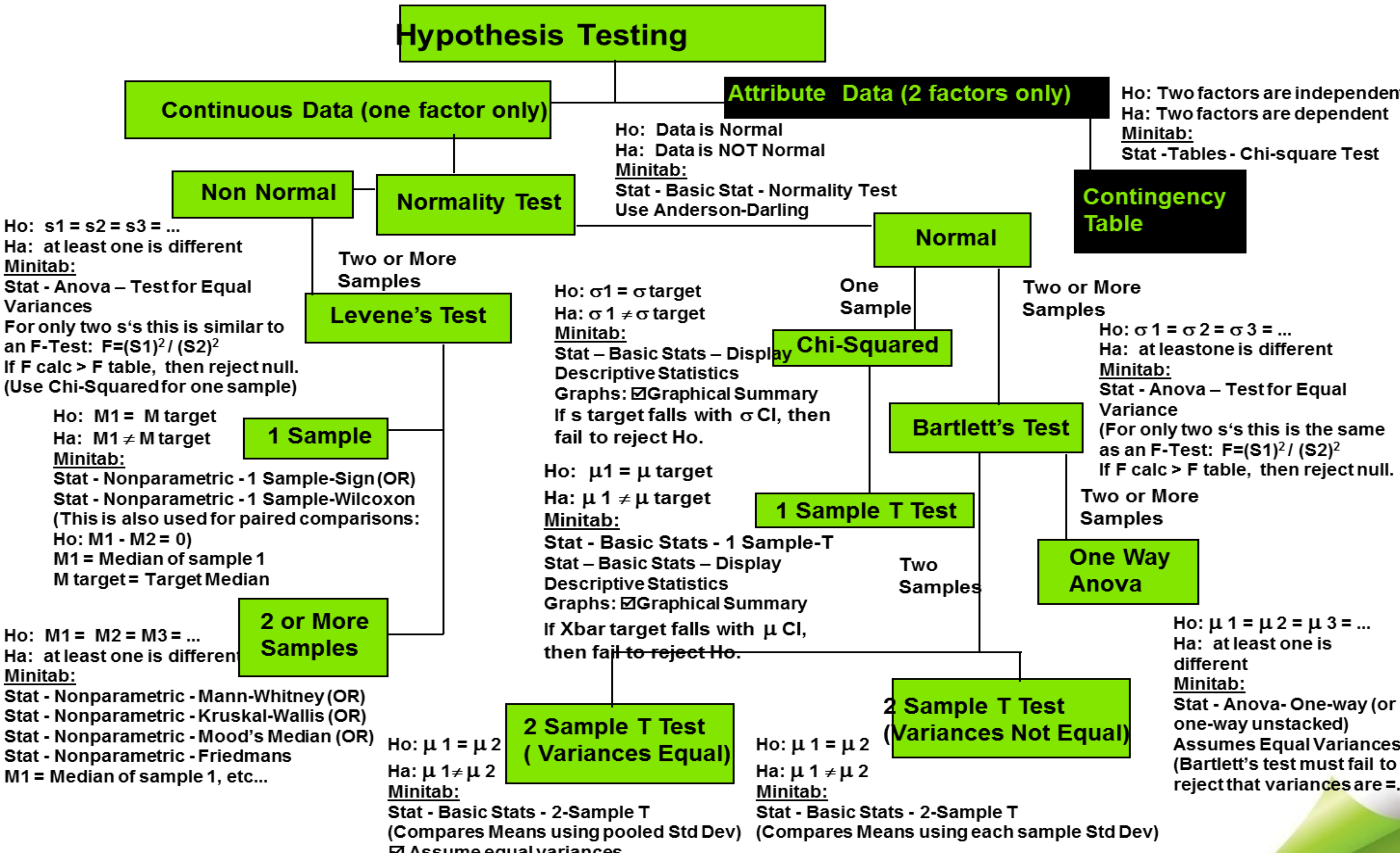
Fethi Derbeli . 2021

Vérification d’hypothèse

Variables discrètes

- Proportions
- Méthode Khi-deux

Fethi Derbeli . 2021



Fethi Derbeli . 2021

Proportion sur 1 échantillon

Exemple: Taux de réparations sur des téléviseurs

PROBLEME: Le service d'assurance qualité d'un fabricant de téléviseurs souhaite pouvoir estimer la proportion de ses téléviseurs de 89cm qui nécessitent des réparations dans les quatre ans suivant leur achat. Le service aimerait en particulier savoir si le besoin de réparation de ses téléviseurs est différent de celui de toutes les autres marques sur le marché.

PROCEDURE: Un questionnaire est envoyé aux consommateurs qui ont acheté une télévision de 89cm pendant une période donnée. On leur demande si le poste qu'ils ont acheté a eu besoin ou non de réparations dans les quatre ans qui ont suivi l'achat. Sur les 2856 personnes interrogées, 236 ont répondu "Oui."

La proportion observée des téléviseurs de 89cm ayant besoin de réparations soit exactement: 236/2856=0.0826 (8,26%)
On sait que le taux global de réparation est de 6,8%.

Proportion sur 1 échantillon

Step 1: la proportion de l'échantillon est-elle suffisamment différente pour conclure que l'observation vient d'une population présentant un taux de réparation autre que 6,8% ?

Step 2: Statuer l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative

Pour μ: H_o: proportion = 0,068 (6,8%)

H_a: proportion $\neq$ 0,068 (6,8%)

Step 3: Le test statistique approprié est une distribution Z (distribution binomiale assimilée à une distribution normale , n =2856, p=6,8% et np = 194).

Step 4: Le niveau de risque assumé (alpha) est 0.05 pour un test à deux cotés.

Step 5: Taille d'échantillon est 2856.

Step 6: Développer un plan d'échantillonnage: Questionnaire sur les ventes des 04 dernières années.

Step 7: Collecter les data.

Proportion sur 1 échantillon

Step 8: Calculer le test statistique approprié:

Statistique de test pour l'approximation normale

$$Z = \frac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}}$$

Terme	Description
^p	probabilité observée, x/n
x	nombre d'événements observé dans n essais
n	nombre d'essais
p0	probabilité hypothétisée

Z_{cal}= (8,26%-6,8%)/ √(6,8%*(1-6,8%)/2856) = 3,1

Step 9: Trouver la valeur critique de la distribution approprié

Z_{crit} = 1,96 ; pour $\alpha = 0,05$

Puisque Zcal > Zcrit donc p< α on rejette H_o

- **Step 10:** Nous avons donc assez de preuves pour penser que les télévisions de 89cm produites par ce fabricant présentent des taux de réparations supérieur à ceux des autres fabricants.

Proportion sur 1 échantillon

Intervalle de confiance (IC) pour l'approximation selon la loi normale

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

8,26%-1,96*√(8,26%(1-8,26%)/2856) < p < 8,62%+1,96*√(8,26%(1-8,26%)/2856)

7,250% < p < 9,267%

$\hat{p}$

6,8% n'est pas inclus dans la CI

Terme	Description
	probabilité observée, = x / n
x	nombre d'événements observé dans n essais
n	nombre d'essais
zα/2	probabilité cumulée inverse de la loi de distribution normale standard avec 1 – α/2
α	1 – niveau de confiance / 100

Test and CI for One Proportion

```
Test of p = 0,068 vs p ≠ 0,068
Sample     X     N  Sample p          95% CI           Z-Value  P-Value
1        236  2856  0,082633  (0,072535; 0,092731)       3,11    0,002
```

Test de proportions: 02 échantillons

Intervalle de confiance (IC)

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

Test d'approximation normale

Estimations individuelles de p

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d_o}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$$

Estimation regroupée de p

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}_o(1-\hat{p}_o)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Si la différence du test hypothétisé est de zéro et que vous choisissez d'utiliser une estimation groupée de *p* pour le test

Terme	Description
p1	proportion réelle d'événements dans la première population
p2	proportion réelle d'événements dans la deuxième population
$\hat{p}_1$	proportion d'événements observée dans le premier échantillon
$\hat{p}_2$	proportion d'événements observée dans le deuxième échantillon
n1	nombre d'essais dans le premier échantillon
n2	nombre d'essais dans le deuxième échantillon
d0	différence hypothétisée entre les première et deuxième proportions
$\hat{p}_0$	$\frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$
x1	nombre d'événements dans le premier échantillon
x2	nombre d'événements dans le deuxième échantillon

Proportions sur 2 échantillons

- **Effectue un test de deux proportions binomiales.**
  Utiliser le test de proportion sur 2 échantillons pour réaliser une vérification d’hypothèse de la différence entre les deux proportions.
  $H_0: P_1 = P_2$
  $H_a: P_1 \neq P_2$
  où P_1 et P_2 sont respectivement les proportions de réussites dans les populations 1 et 2.

Exemple:

Disons que nous voulons déterminer si un nouveau logiciel produira des formulaires moins défectueux dans le cadre d’un processus d ’achat. les données collectées avant et après l’application du logiciel, déterminez si le nouveau logiciel constitue une amélioration.

	Ancien prog	Nouveau prog
Bon	143	162
Mauvais	12	8

Proportions sur 2 échantillons

- **Le nombre total inspecté lors du premier essai est 143 + 12 = 155 et pour le deuxième essai 162 + 8 =170.**

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d_o}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$$

((7,74%-4,7%)-0)/racine ((7,74%*92,26%)/155+(4,7%*95,3%)/170) =1,13

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}_o(1-\hat{p}_o)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

P_0 = (8+12)(155+170) = 6,154%
((7,74%-4,7%)-0)/racine ((6,154%*93,846%)*(1/155+ 1/170) = 1,14

Test and CI for Two Proportions

```
Sample    X    N  Sample p
1        12  155  0,077419
2         8  170  0,047059
Difference = p (1) - p (2)
Estimate for difference:  0,0303605
95% CI for difference:  (-0,0223986; 0,0831196)
```

Estimations individuelles de p

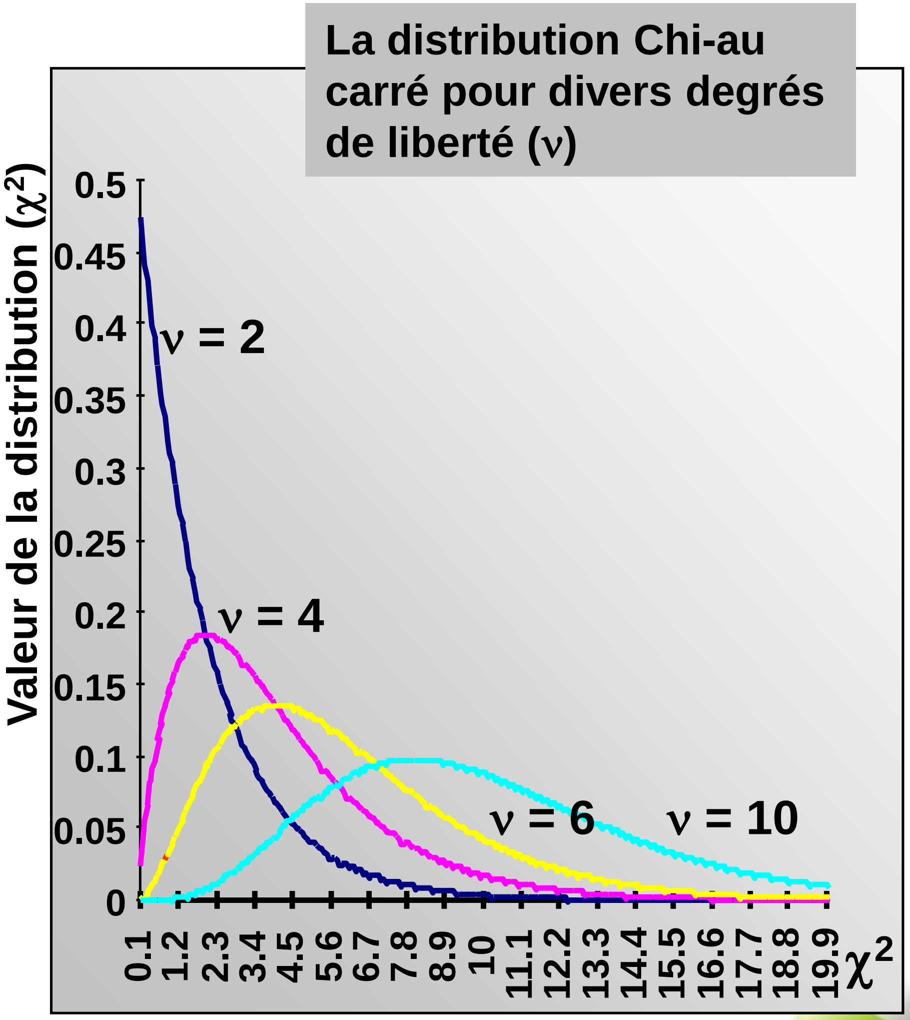
```
Test for difference = 0 (vs ≠ 0):  Z = 1,13  P-Value = 0,259
```

Estimation regroupée de p

```
Test for difference = 0 (vs ≠ 0):  Z = 1,14  P-Value = 0,255
```

Distribution Chi-carrée

- **Utiliser les fréquences**
- **Les observations doivent être indépendants. (pas de mesures répétés pour la même source).**
- **(R-1)(C-1)= df**
- **Chi-carré est adéquate avec 05 ou plus observations pour chaque source. Les sources peuvent être combinées pour extrapoler les observations.**



Méthode Chi-carrée

Step 1: Statuer le problème pratique

Step 2: Statuer l’hypothèse nule (supposition de l’indépendance) et l’hypothèse alternative (supposition de dépendance)

Step 3: Décider le test approprié (Chi-carrée test)

Step 4: Définir le niveau (habituellement 0.05)

Steps 5-6: Déterminer la taille approprié des échantillons et le plan d’échantillonnage. Combien d’échantillons vont être testés pour définir la fréquence d’information?

Step 7: Effectuer le test et collecter les data

Méthode Chi-carrée

- **Step 8: Déterminer le test statistique utilisant la formule suivante ou**

$$\chi^2(calc) = \sum\sum(O_{ij} - E_{if})^2 / E_{ij}$$

$$df = (r-1)(c-1)$$

  - Ou: O = la valeur des observations (données expérimentales)

E = La valeur attendue (Fr*Fc)/Ftotal
r = Le nombre des lignes
c = nombre des colonnes
Fr = fréquence total des lignes
Fc = fréquence total des colonnes
Ftotal = fréquence total du table

- **Step 9: Définir le χ^2 (critique) de la table de distribution Chi-carrée et le comparer avec χ^2 (calculé)**

- **Step 10: Traduire les conclusions statistiques en langage processus . Si on rejette H_o, donc les variables sont indépendants**

Chi-carré Test de représentativité

- ## Pourquoi utiliser la représentativité ?

Dans de nombreux problèmes, on ne connaît pas la distribution sous-jacente de la population, et il serait utile d'avoir une procédure pour tester l'hypothèse selon laquelle une distribution particulière sera un modèle satisfaisant de la population.

Exemple-

Supposons que nous jouions à pile ou face N = 100 fois et que nous observions 63 faces et 37 piles. Cette proportion de faces et piles peut-elle se produire par hasard ou devons-nous en conclure que la pièce est truquée ?

	Observé (fo)	Attendu (fe)
Face	63	50
Pile	37	50

Nota: ce tableau ne corrige pas la discontinuité.

Chi-carré Test de représentativité (suite)

	Observé (fo)	attendu (fe)	$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$
Face	63	50	3.38
Pile	37	50	3.38

$\chi^2 =$ 6.76 P-valeur = 0.0093

$\varkappa^2$ (calc) =6,76 CDF = 0,9906 p= 0,0093

$\varkappa^2$ (crit) = 3,84 pour α =0,05 ; df=1

Pour α = 0.05 le résultat de test est 0.0093, nous pouvons en conclure que les résultats ne sont pas dus au hasard et que la pièce est truquée.

Chi-carré Test d'association

- **La table d'éventualité est utilisée pour analyser des données générées par deux facteurs ou plus.**

- **Cet outil est utilisé pour tester la relation de dépendance entre deux sources de variation, elle peut être décrit comme suit:**
  - H_o: facteur A est indépendant du facteur B
  - H_a: facteur A est dépendant du facteur B

  (On est pas entrain de chercher la différence, on cherche la dépendance)

- **Un test statistique est calculé. Pour des données par attribue la valeur est estimée via une distribution χ^2 (chi-squared) et utilisé pour un test d'hypothèse sur les fréquences d'occurrence d'un évènement (occurrence d'un défaut discret)**

- **α et les degrés de liberté associés à chaque facteur, une valeur critique est définit**

- **Si le test statistique est plus grand que la valeur critique, H_o est rejeté.**

Calcul de la valeur attendue

Exercice: Calculer la valeur attendu pour chaque case.

Valeurs observées

	Good Coils	Bad Coils	
First Shift	O_{11} = 20	O_{12} = 50	Total = 70
Second Shift	O_{21} = 40	O_{22} = 70	Total = 110
	Total = 60	Total = 120	

Valeurs attendues

	Good Coils	Bad Coils
First Shift	E_{11} = 70 * 60 / 180 =	E_{12} = ( ) * ( ) / ( ) = 46.6
Second Shift	E_{21} = ( ) * ( ) / ( ) =	E_{22} = ( ) * ( ) / ( ) =

$$E = \frac{Fr * Fc}{Ftotal}$$

$$\chi^2(calc) = \sum\sum (O_{ij} - E_{if})^2 / E_{ij}$$

Calcul de la valeur Chi-carrée

Exercice: Calculer la valeur chi-carrée pour chaque case.

	Good Coils	Bad Coils
First Shift	$O_{11} = 20$ $E_{11} = 23.3$	$O_{12} = 5o$ $E_{12} = 46.6$
Second Shift	$O_{21} = 40$ $E_{21} = 36.6$	$O_{22} = 70$ $E_{22} = 73.3$

$$\chi^2(calc) = \sum\sum(O_{ij} - E_{if})^2 / E_{ij}$$

	Good Coils	Bad Coils
First Shift	$\chi^2 = (O_{11}\text{-}E_{11})^2 / E_{11}$ $=(20 - 23.3)^2 / 23.3$ $=0,467$	$\chi^2 = (O_{12}\text{-}E_{12})^2 / E_{12}$ $= 0,248$
Second Shift	$\chi^2 = (40 - 36,6)^2 / (36,6\ )$ $= 0,316$	$\chi^2 = (70 - 73,3)^2 / (\ 73,3\ )$ $= 0,148$

χ^2 (calc) = (0,467) + (0,248) + (0,316) + (0,148) = 1,18

χ^2 (crit) = 3,84 , df (2-1)*(2-1) =1, α =0,05

$\varkappa^2$ (calc)< $\varkappa^2$ (crit) donc p>α on échoue à rejeter H_0

Exemple:

Disons que nous voulons déterminer si un nouveau logiciel produira des formulaires moins défectueux dans le cadre d'un processus d 'achat. Voici ci-dessous les données collectées avant et après l'application du logiciel, déterminez si le nouveau logiciel constitue une amélioration.

	Ancien prog	Nouveau prog
Bon	143	162
Mauvais	12	8

		Ancien	Nouveau	Total
Observées	Bon	143	162	305
	Mauvais	12	8	20
	Total	155	170	325
Attendyes	Bon	145,462	159,538	
	Mauvais	9,538	10,462	
Khi²	Bon	0,042	0,038	1,294
	Mauvais	0,635	0,579	

$\varkappa^2$ (calc) =1,294   CDF = 0, 0,745   p= 0,255

$\varkappa^2$ (crit) = 3,84 pour α =0,05 ; df=1

Exemple, Steps 1-6

- **Exemple: On veut évaluer deux outils de mesure de l'épaisseur de peinture avec 03 méthodes et deux instruments de mesure**

Type	1 Cut/Drill	2 Cut/Drill	4 Cut/Drill
Tooke	37	41	44
DJH Borer	35	72	71

Step 1: **Problème pratique: Est ce que l'un des outils détecte différemment les défauts selon la méthode utilisée?**

Step 2: **H_o: La méthode du test indépendante de l'outil de mesure**

H_a: La méthode du test dépend de l'outil de mesure

Step 3-4: **On va utiliser le chi-square test et alpha 0.05**

Steps 5-6: **Echantillonnage: On utilise les données mensuelles pour chaque outil qui nous donnent 122 valeurs pour Tooke et 178 valeurs pour DJH Borer.**

Exemple, Steps 7-8

Step 7: Les données collectées

Step 8: Déterminer le test statistique χ^2(calc)

- Interpréter Output
  - La valeur χ^2 (calc)?
  - La valeur p-value?
  - Quel conclusion?

Chi-Square Test: 1 Cut/Drill, 2 Cut/Drill, 4 Cut/Drill

```
Expected counts are printed below observed
counts

      1 Cut/Dr 2 Cut/Dr 4 Cut/Dr    Total
    1       37       41       44      122
         29.28    45.95    46.77

    2       35       72       71      178
         42.72    67.05    68.23

Total       72      113      115      300

Chi-Sq =  2.035 +  0.534 +  0.164 +
          1.395 +  0.366 +  0.112 = 4.606
DF = 2, P-Value = 0.100
```

Exemple, Steps 9-10

Step 9: Déterminer la valeur critique et la comparer avec la valeur calculée (table chi carrée)

- Quel est le degré de liberté ?
- Quel est la valeur critique de χ^2 (critical)

Si χ^2 (calc) > χ^2 (critical), on rejette H_o.

χ^2 (calc) = 4.606

χ^2 (critical) = 5.99

Puisque 4.606 < 5.99, on échoue de rejeter H_o

Step 10: La différence entre les défauts ne dépend pas des outils de mesure utilisé.

Exercices

Problème:

utiliser le tableur pour décider si le résultat d'une opération chirurgicale dépend de l'hôpital où elle a lieu.

	Hosp A	Hosp B	Hosp C	Hosp D	Hosp E
no improvement	13	5	8	21	43
partial functional restoration	18	10	36	56	29
complete functional restoration	16	16	35	51	10

Ho: Les résultats des opérations chirurgicales NE dépendent PAS de l'hôpital où elles ont eu lieu.
Ha: les résultats des opérations chirurgicales dépendent de l'hôpital où elles ont eu lieu.

		Hop A	Hop B	Hop C	Hop D	Hop E	Total
Observés	Pas d'amélioration	13	5	8	21	43	90
	Guirison partielle	18	10	36	56	29	149
	Guirison complète	16	16	35	51	10	128
	Total	47	31	79	128	82	367

		Hop A	Hop B	Hop C	Hop D	Hop E
Estimé	Pas d'amélioration	11,53	7,60	19,37	31,39	20,11
	Guirison partielle	19,08	12,59	32,07	51,97	33,29
	Guirison complète	16,39	10,81	27,55	44,64	28,60

$$E = \frac{Fr * Fc}{Ftotal}$$

	Hop A	Hop B	Hop C	Hop D	Hop E
Pas d'amélioration	0,189	0,891	6,677	3,439	26,058
Guirison partielle	0,061	0,531	0,481	0,313	0,553
Guirison complète	0,009	2,489	2,013	0,905	12,096

$$\chi^2(calc) = \sum\sum (O_{ij} - E_{if})^2 / E_{ij}$$

χ^2 (calc) = 56,705 nous donne p =0,000

χ^2 (crit) = 15,51 pour α = 0,05 et df =8 ((3-1)*(5-1))

Test Chi-au carré

Les chiffres attendus sont imprimés en-dessous des chiffres observés

	Hosp A	Hosp B	Hosp C	Hosp D	Hosp E	Total
1	13	5	8	21	43	90
	11.53	7.60	19.37	31.39	20.11	
2	18	10	36	56	29	149
	19.08	12.59	32.07	51.97	33.29	
3	16	16	35	51	10	128
	16.39	10.81	27.55	44.64	28.60	
Total	47	31	79	128	82	367

Chi^2 = 0.189 + 0.891 + 6.677 + 3.439 + 26.058 +
0.061 + 0.531 + 0.481 + 0.313 + 0.553 +
0.009 + 2.489 + 2.013 + 0.905 + 12.096 = 56.705

DF = 8, P-Value = 0.000

Rejeter H_o, les résultats des opérations chirurgicales sont bien dépendantes de l'hôpital.