# Introduction au Transfert de chaleur

## 1. Introduction

Le thermique est la discipline qui permet à l'ingénieur de comprendre et de décrire le fonctionnement d'un grand nombre d'équipements industriels qui ont comme caractéristique commune de mettre en œuvre des échanges de chaleur.

Notre civilisation industrielle, née au XVIIème siècle, a été d'abord dominée par la vapeur, si bien que de nos jours, le thermicien est encore souvent défini dans l'industrie, comme « celui qui s'occupe des chaudières et des réseaux de vapeur ».

Pour se convaincre que l'aspect thermique des sciences et des techniques concerne réellement notre vie de tous les jours, il suffit de parcourir la liste suivante des grandes inventions s'appuyant sur des échanges de chaleur, de 1600 à 1950 :

*Tableau I - Liste des grandes inventions de 1600 à 1950, qui s'appuient sur des échanges de chaleur*

| DATE | INVENTION | INVENTEUR | NATIONALITÉ |
|---|---|---|---|
| 1629 | turbine à vapeur | Giovanni Branca | italien |
| 1687 | principe d'une machine à vapeur à piston | Denis Papin | français |
| 1712 | machine à vapeur | Thomas Newcomen | britannique |
| 1714 | thermomètre à mercure | Daniel Gabriel Fahrenheit | allemand |
| 1791 | turbine à gaz | John Barber | britannique |
| 1814 | locomotive | George Stephenson | britannique |
| 1855 | brûleur à gaz | Robert Wilhelm Bunsen | allemand |
| 1860 | moteur à gaz | Étienne Lenoir | français |
| 1861 | four électrique | Wilhelm Siemens | britannique |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1877 | moteur à combustion interne (quatre-temps) | Nikolaus August Otto | allemand |
| 1877 | camion frigorifique | G.F. Swift | américain |
| 1884 | turbine à vapeur | Charles Algernon Parsons | britannique |
| 1892 | bouteille Thermos (vase Dewar) | James Dewar | britannique |
| 1911 | air conditionné | W.H. Carrier | américain |
| 1925 | congélation des aliments | Clarence Birdseye | américain |
| 1942 | réacteur nucléaire | Enrico Fermi | américain |
| 1947 | four à micro-ondes | Percy L. Spencer | américain |

On constate dans ce tableau que les domaines d'application de la thermique sont très variés, et concernent principalement:

- l'énergie (machines à vapeur, turbines à gaz et à vapeur, réacteurs nucléaires)
- le chauffage, le séchage, la cuisson (fours électriques, à gaz, micro-ondes)
- l'industrie du froid
- la construction (chauffage, climatisation)

Mais de plus, les questions étudiées sont elles - mêmes très variées, et s'étendent du plus petit phénomène élémentaire (la solidification d'une goutte de métal en fusion, l'échauffement d'un circuit intégré) au plus vaste ensemble industriel (le bilan énergétique d'une usine).

## 2. Notion de chaleur

En physique, on appelle chaleur une forme particulière de l'énergie. Cette équivalence de la chaleur et du travail constitue le premier principe de la thermodynamique. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité: le joule (J).

Le transfert de chaleur d'une partie d'une substance à une autre partie, ou d'un corps à un autre corps, s'effectue sous forme d'énergie cinétique d'agitation moléculaire désordonnée.

Ce transfert est le fait d'une différence de température entre les deux corps. La chaleur se propage spontanément du corps ayant la température la plus élevée vers celui ayant la température la plus basse, élevant ainsi la température de ce dernier, tout en abaissant la température du premier, dans la mesure où le volume des deux corps reste constant. Ceci constitue *le second principe de la thermodynamique*.

Ce second principe met en évidence la notion d'*irréversibilité*: La chaleur ne pourra pas se propager d'un corps froid vers un corps chaud, sauf si on fournit un travail.

## 3. Notion de température

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu.
Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température. On dit alors qu'on a atteint l'équilibre thermique.

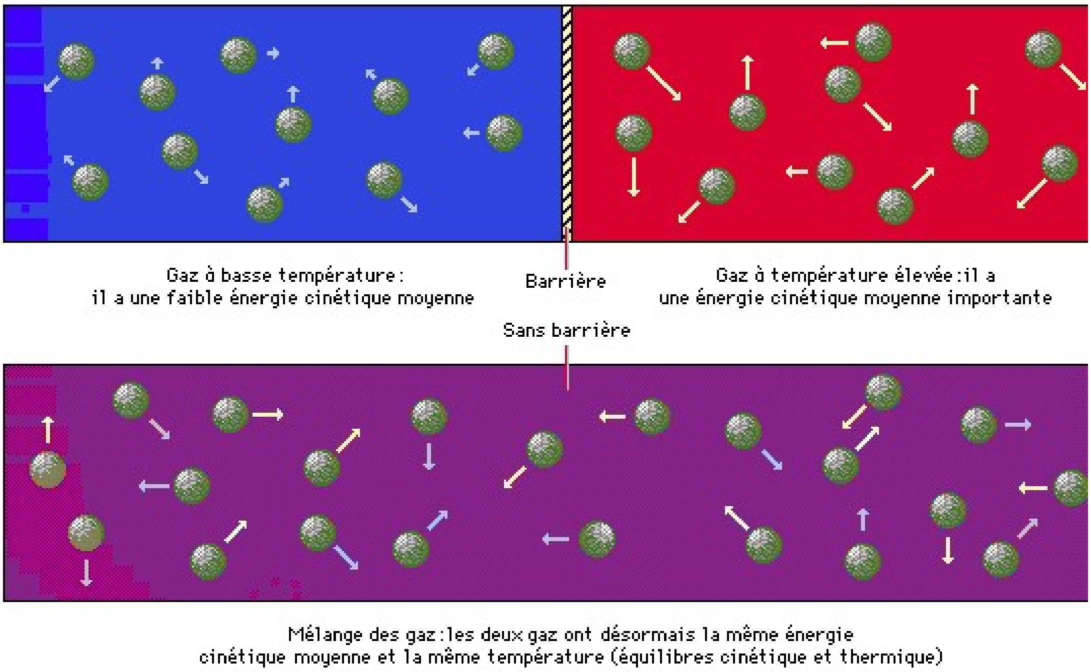



*Figure 1 - Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre thermique*

La température est une propriété thermodynamique du corps et mesure l'agitation microscopique de la matière. Selon la théorie cinétique, la température d'un corps est fonction de l'énergie cinétique moyenne de translation de ses molécules. L'énergie cinétique d'un corps est nulle à une température appelée zéro absolu.

## 4. Modes de transfert de chaleur

On appelle transferts de chaleur, les processus par lesquels de l'énergie est échangée sous forme de chaleur entre des corps ou des milieux à des températures différentes $T_1$ et $T_2$.

La chaleur peut être transmise par *conduction, convection* ou *rayonnement.* Bien que les trois processus puissent avoir lieu simultanément, l'un des mécanismes est généralement prépondérant. Par exemple, la chaleur est principalement transmise par conduction à travers les murs en brique d'une maison ; l'eau dans une casserole placée sur une cuisinière est surtout chauffée par convection ; la Terre reçoit sa chaleur du Soleil en grande partie par rayonnement.

### a. Transfert de chaleur par conduction

La conduction : échange de chaleur entre deux points d'un solide ou encore d'un liquide (ou d'un gaz) immobile et opaque. L'énergie de vibration (ou d'agitation) se transmet d'atome à atome (de molécule à molécule). C'est un transfert lent.

*Exemple :* Propagation de la chaleur dans une paroi entre un intérieur de bâtiment chauffé et l'extérieur.

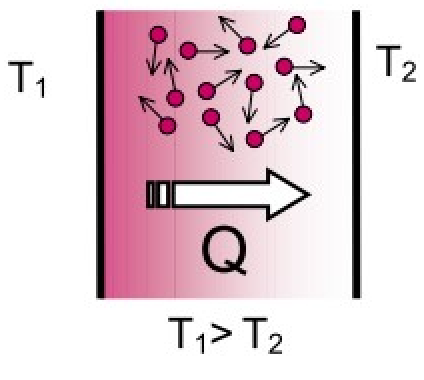



*Figure 2 – Conduction thermique*

### b. Transfert de chaleur par convection

La convection est un transfert de chaleur dans la matière avec mouvement macroscopique de la matière. Ce type de transfert n'intervient que pour les liquides et les gaz (c'est le fluide en mouvement qui transporte de la chaleur). On distingue deux types de convection :

***- La convection forcée*** : le mouvement du milieu est engendré par un dispositif externe (le vent, un ventilateur….)

*Exemple :* Refroidissement d'un bâtiment sous l'effet du vent.

***- La convection naturelle*** : le mouvement du fluide est engendré par les variations de densité causées par les variations de température au sein du fluide. C'est un mode de transfert rapide en général.

*Exemple :* Mouvement de la vapeur au-dessus d'une tasse de café, principe du convecteur.

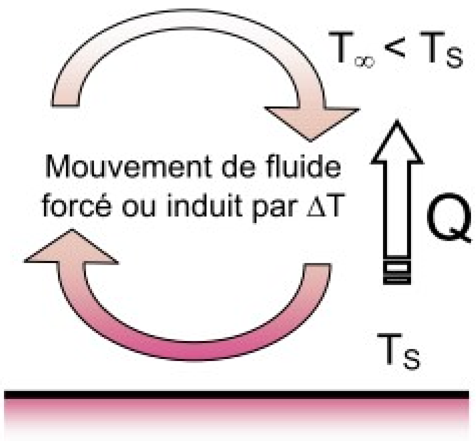



*Figure 3- Convection thermique*

### c. Transfert de chaleur par rayonnement

Le rayonnement c'est l'échange de chaleur entre deux parois séparées par un milieu transparent ou semi-transparent. Les matériaux ont la propriété d'absorber ou d'émettre des photons (ou des quantités d'énergie). L'énergie emportée par le photon est prélevée sur l'état d'énergie du corps et réciproquement l'énergie d'un photon absorbé est souvent transformée en chaleur. Cette propriété d'émission dépend donc de la température du milieu. Il s'agit d'un transfert à distance quasi-instantané sans nécessité de support matériel.

*Exemple :* Réchauffement d'un mur par le rayonnement solaire le jour, et chaleur émise par le mur la nuit.

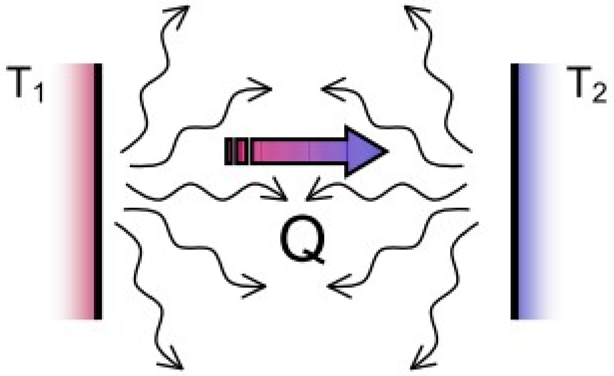



*Figure 4- Rayonnement thermique*

---

***Dans le module Transfert de chaleur, nous nous intéresserons à l'étude des trois modes de transfert : conduction, convection (naturelle et forcée) et rayonnement en régime permanent.***

***Le cours sera planifié en APP (Pédagogie Active), des situations problèmes seront présentées aux étudiants à la première séance du module, où ils doivent se mettre en groupes, et c'est à eux d'en trouver la solution en s'appuyant sur le support de cours déjà fourni par les professeurs. C'est à la deuxième séance que la solution doit être présentée par les groupes d'étudiants, c'est la séance du Retour. Il faut noter que chaque solution donnée est notée.***

***Une séance après le retour sera consacré à faire une restructuration du cours par le professeur, suivi d'une séance de travaux dirigés.***

***Notez bien que toute absence tout au long de ce module risque d'handicaper la bonne compréhension des notions introduites et elle sera prise en compte dans la note du contrôle continu.***

---

*Chapitre 1*

# Transfert de chaleur par CONDUCTION

## I. Définitions

### a. Flux Thermique

Pour tous les modes de transfert de chaleur, on définit le flux thermique (ou flux de chaleur) $\Phi$ (en W) comme la quantité de chaleur $\delta Q$ (en J) traversant une surface isotherme S (en m²) pendant le temps dt (en s) :

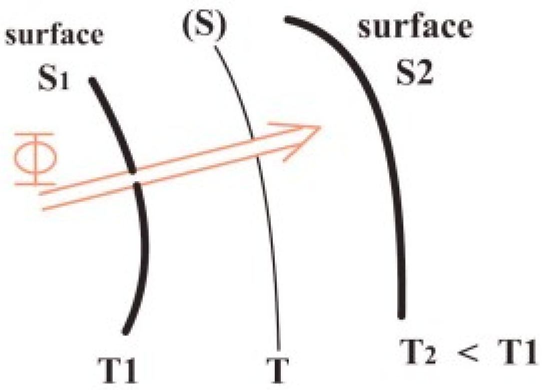



*Figure 1- Flux de chaleur*

Le 2ème principe de la thermodynamique nous enseigne que les transferts thermiques se font toujours du corps chaud vers le corps froid. Autrement dit, la puissance thermique s'écoulera toujours des régions les plus chaudes vers les régions les plus froides.

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt} \qquad (1)$$

## II. Conduction et loi de Fourier

### a. Vecteur Densité de courant de chaleur

On définit le vecteur densité de courant de chaleur $\vec{j}_Q$ à partir de son flux :

$$\Phi = \iint \vec{j}_Q.\vec{n}.dS \qquad \left[\vec{j}_Q\right]: W.m^{-2} \qquad (3)$$

$\|\vec{j}_Q\|$ est une puissance thermique par unité de surface.

### b. Enoncé de la loi de Fourier

La loi qui suit, a été établie expérimentalement par J. Fourier, et est de nature empirique. Elle invoque une proportionnalité entre le vecteur densité de courant de température (où vecteur densité du flux thermique) $\vec{j}_Q$ et le gradient de température. Nous l'énoncerons ainsi :

$$\vec{j}_Q = -k\ \overrightarrow{grad}\, T \tag{4}$$

- $k$ est la conductivité thermique du milieu qui s'exprime en **$W.m^{-1}.K^{-1}$** .
- Si T est non uniforme, alors le milieu est siège de transfert thermique.
- Le signe (-) traduit que le transfert thermique s'effectue des régions chaudes vers les régions froides.
- Cette loi n'est plus valide pour des écarts de température trop forts ou trop faibles (de l'ordre des fluctuations…).

### c. Application

Soit $\mathcal{R}(O,\vec{u}_x,\ \vec{u}_y,\vec{u}_z)$ une base orthonormé directe et soit un mur plan homogène d'épaisseur e et d'air S, constitué par un matériau de **conductivité thermique moyenne λ.** Le mur est soumis à un gradient de température suivant l'axe Oy. La première face est à une température $T_1$ et la deuxième est à une température $T_2$ où $T_1 > T_2$.

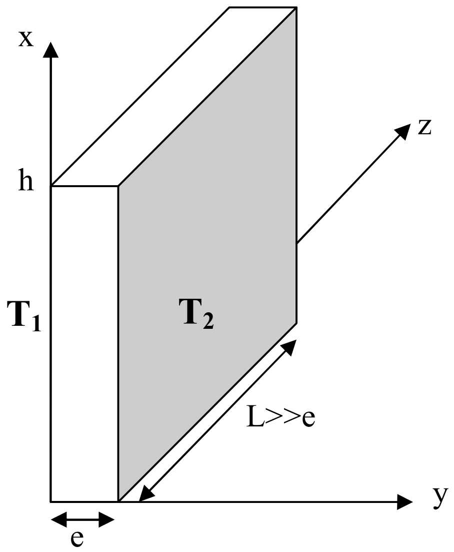



*Figure 2- Mur Plan*

La loi de Fourier dans ce cas s'énonce comme suit :

$$\vec{j}_Q = -k \frac{dT}{dy} \vec{u}_y \quad (5)$$

Autrement dit, le vecteur densité du flux thermique est suivant « y » est :

- Proportionnelle à la valeur de la dérivée de la température selon cette direction « y »
- Evacuée dans le sens de la décroissance en température (signe -)
- Proportionnelle à la conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S1 et S2

Donc on peut écrire que :

$$\Phi = \iint \vec{j}_Q . \vec{n} . dS \quad (6)$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint -k \frac{dT}{dy} \vec{u}_y . dS . \vec{u}_y \quad (7)$$

$$\Rightarrow \Phi = -k \frac{dT}{dy} \iint dS \quad (8)$$

$$\Rightarrow \Phi = -k . S . \frac{dT}{dy} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \Phi . dy = -k . S . dT \quad (10)$$

$$\Rightarrow \Phi . e = -k . S . (T_2 - T_1) \quad (11)$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{k . S}{e} . (T_1 - T_2) \quad (12)$$

## III. Conservation de l'énergie et équation de chaleur

### a. A une dimension

Soit un barreau cylindrique d'axe (Ox), de section S, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique C.

Le barreau est supposé parfaitement calorifugé sur sa surface latérale, mais est le siège d'un gradient de température $\frac{\partial T}{\partial x}$ , il n'ya pas non plus d'apport d'énergie (chaleur ou travail) dans la masse du matériau.

La répartition de température est donc de la forme T(x,t) ; comme il n'y a pas de transfert thermique par la surface latérale, il n'y a pas non plus de gradient de température transversal.

On considère le système constitué par la tranche de barreau comprise entre les abscisses x et x+dx.

Soit Φ(x,t) (respectivement Φ(x+dx,t)) le flux thermique conductif traversant la section du barreau ) l'abscisse x (respectivement x+dx) à l'instant t, la section étant selon $+\vec{u}_x$.

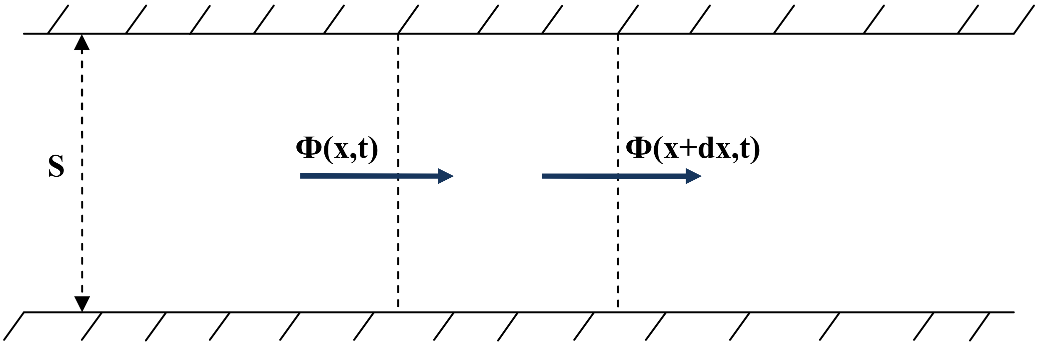



*Figure 3-Conduction unidimensionnelle*

Appliquons le premier principe de la thermodynamique à ce système entre les instants t et *t+dt* :

$$dU = w^{ext} + q, \qquad \text{avec} \quad w^{ext} = 0 \qquad \text{et} \quad q = \Phi(x,t)dt - \Phi(x+dx,t)dt$$

Il vient alors :

$$dU = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.dx.dt$$

Soit $u_v$ l'énergie interne volumique du matériau. On a :

$$dU = U(t+dt) - U(t) = u_v(x,t+dt)Sdx - u_v(x,t)Sdx = \left(\frac{\partial u_v}{\partial t}\right)Sdxdt$$

Par définition du vecteur densité de courant de chaleur :

$$\Phi(x,t) = j_Q(x,t).S$$

On en déduit alors ***l'équation locale de conservation d'énergie*** :

$$\frac{\partial u_v}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = 0$$

Or $\quad \frac{\partial u_v}{\partial t} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$ ce qui donne finalement :

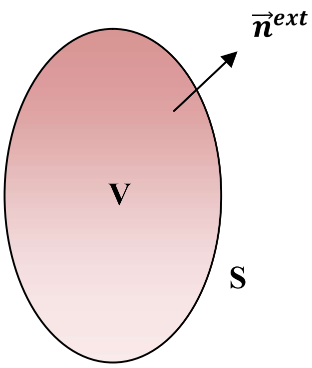
$$\boldsymbol{\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = 0}$$

Cette équation obtenue traduit la conservation de l'énergie (c'est-à-dire le premier principe de la thermodynamique) sous forme locale pour un échange conductif à une dimension.

### b. Généralisation à trois dimensions

Considérons un volume fermé fixe V délimitant une région du matériau étudié. Nous supposons que les seuls échanges énergétiques sont des transferts thermiques conductifs ; en particulier, aucun travail n'est mis en jeu.

Le système thermodynamique étudié est le contenu du volume V, délimité par la surface S fermée que l'on oriente vers l'extérieur :




Le premier principe appliqué à ce système s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q}{\delta t} = -\Phi$$

Où Φ est le flux thermique total à travers la surface S orienté vers l'extérieur :

$$\Phi = \iint \vec{j}_Q \,.\, \vec{n}^{ext} dS$$

Evaluons le taux de variation de l'énergie interne U(t) du système fermé délimité par le volume V :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\iiint u_v(M,t) d\tau\right] = \iiint \frac{\partial u_v}{\partial t}(M,t) d\tau$$

Le volume V étant fixe, il en est de même de tous les volumes élémentaires $d\tau$ et de tous les points de mesure M : La dérivée sous le signe somme est bien une dérivée partielle par rapport au temps.

On admet que : (Théorème d'Ostrogradski) :

$$\boldsymbol{\Phi = \iint \vec{j}_Q \,.\, \vec{n}^{ext} dS = \iiint div(\vec{j}_Q)\, d\tau}$$

On en déduit alors que :

$$\frac{\partial u_v}{\partial t}(M,t) + div(\vec{j}_Q) = 0$$

Or si : $p_v$ est une puissance volumique du à la création de l'énergie dans le volume du matériau (effet Joule). Alors l'équation de conservation de l'énergie devient.

$$\boldsymbol{\frac{\partial u_v}{\partial t}(M,t) + div(\vec{j}_Q) = p_v}$$

### c. Equation de chaleur

C'est le couplage entre la loi de conservation d'énergie et la loi de Fourier : on a :

$\vec{j}_Q = -k\,\overrightarrow{grad}(T)$ et $u_v = \rho.C.T$

Donc :

$div(\vec{j}_Q) = -k\,\Delta T$ et $\frac{\partial u_v}{\partial t} = \rho.C\frac{\partial T}{\partial t}$

On peut ainsi écrire l'équation finale dite équation de chaleur

$$\boldsymbol{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho.C}.\Delta T + \frac{p_v}{\rho.C}}$$

Avec : $\boldsymbol{D = \frac{k}{\rho.C}}$ ; Coefficient de diffusion thermique ou diffusivité. [D] : $m^2.s^{-1}$

## IV. Résolution de l'équation de chaleur

La résolution de l'équation de la chaleur est un problème complexe, admettant une grande variété de solutions analytiques ou numériques.

Dans tous les cas, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles d'ordre un par rapport au temps et d'ordre deux par rapport aux variables d'espace. Les dépendances temporelle et spatiale sont donc couplées.

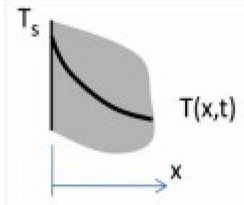
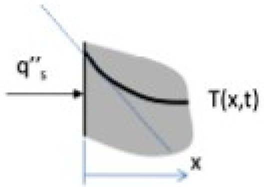
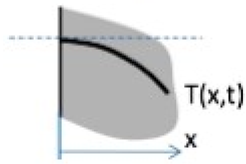
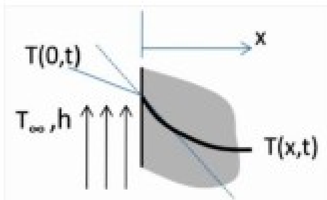
Plaçons-nous à une dimension pour simplifier.

La détermination complète du champ de température T(x,t) dans l'intervalle[0,L] nécessite de connaître :

- une condition initiale, en général du type T(x,t=0) pour tout $x \in [0, L]$.
- Deux conditions aux limites en x=0 et x=L pour tout t.

Les conditions aux limites rencontrées dans les problèmes de conduction sont présentées dans le tableau suivant :

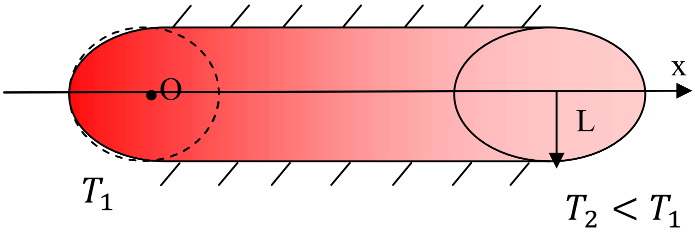
*Tableau 1 :Conditions aux limites*

| | |
|---|---|
| C.L. de Dirichlet : Température constante à la surface <br> $T(0,t) = T_S$ |   |
| C.L. De Neumann : Flux constant à la surface <br> • Flux thermique fini : <br> $-k\frac{\partial T}{\partial x}\Big\vert_{x=0} = q_s$ <br> • Surface dite adiabatique ou isolée : <br> $\frac{\partial T}{\partial x}\Big\vert_{x=0} = 0$ |     |
| C.L. De Cauchy : Convection à la surface : <br> $-k\frac{\partial T}{\partial x}\Big\vert_{x=0} = h[T_\infty - T(0,t)]$ |   |

### a. Régime permanent

En régime permanent, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$div(\vec{j}_Q) = 0 \;\Rightarrow\; \Delta T = 0$$




Soit à une dimension : $\frac{d^2T}{d^2x} = 0 \;\Rightarrow\; T = Ax + B$

$$T(x=0) = T_1 = B$$

$$T(x=L) = AL + T_1 = T_2 \Rightarrow \; A = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$\Rightarrow T(x,t) = \frac{T_2 - T_1}{L}.x + T_1$$

Donc on en déduit le vecteur densité du flux de chaleur :

$$\vec{j}_Q = -k\frac{\partial T}{\partial x}.\vec{u}_x \quad \Rightarrow \vec{j}_Q = k\frac{T_1 - T_2}{L}.\vec{u}_x$$

Le flux thermique s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\Phi = \iint \vec{j}_Q.\overrightarrow{dS} = \frac{k.S}{L}(T_1 - T_2)}$$

### b. Notion de résistance thermique

Par analogie avec l'électricité, on peut introduire un coefficient entre la puissance thermique et la différence de température

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{\mathrm{R}} \tag{2}$$

Le terme « R » est la résistance thermique qu'oppose la matière comprise entre les régions à $T_1$ et $T_2$ à l'égalisation des 2 températures. Cette résistance thermique s'exprime en **$K.W^{-1}$**

Dans le cas précédent on a déterminé le flux, donc la résistance thermique se déduit :

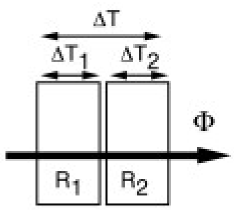
$$\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{k.S}}$$

### c. Analogie avec l'électrocinétique

| Grandeurs électrocinétiques | Grandeurs thermiques |
| --- | --- |
| **Loi d'Ohm** | **Loi de Fourier** |
| **Potentiel électrique : V en Volt [V]** | **Température : T en Kelvin [K]** |
| **Intensité électrique : I en Ampère [A]** | **Flux thermique : Φ en Watt [W]** |
| **Résistance électrique : R en Ohm [Ω]** | **Résistance thermique : R en [$K.W^{-1}$]** |
| **Conductivité électrique : σ en [$Ω^{-1}.m^{-1}$]** | **Conductivité thermique : k en [$W.\ K^{-1}.m^{-1}$]** |

### d. Montage en série ou en parallèle

Tout comme en circuit électrique, les résistances thermiques peuvent être ajoutées en série ou en parallèle, selon la distribution du flux thermique.




- **Montage en série**

  C'est le cas où on a un même flux traversant deux milieux de résistances thermiques différentes :

  $$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi \,, \Delta T_1 + \Delta T_2 = \Delta T$$

  $$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2$$

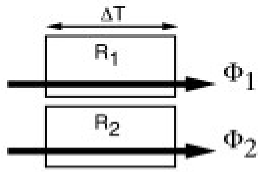
  $$\Delta T = R_1\Phi_1 + R_2\Phi_2$$

  $$\Delta T = (R_1 + R_2)\Phi$$

Donc on en conclu que :

$$\boldsymbol{R = R_1 + R_2}$$

- **Montage en parallèle**
  C'est le cas où le flux se divise en traversant les deux milieux :




$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi \, , \Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$

$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

$\Phi = \Delta T_1/R_1 + \Delta T_2/R_2$

$\Phi = (1/R_1 + 1/R_2)\Delta T$

Donc on en conclu que :

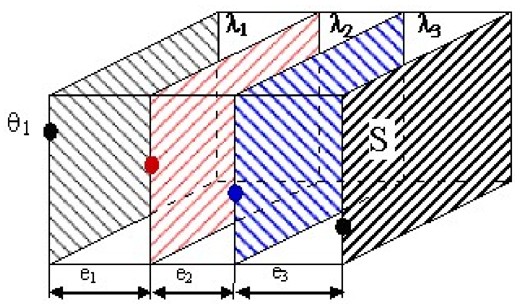
$$\boldsymbol{R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}$$

## e. Applications

- **Conduction à travers plusieurs Murs plans homogènes, en série**

Considérons plusieurs murs limités par des plans parallèles, constitués par des matériaux de conductivités différentes, mais en contact parfait.

Soient $K_1$, $K_2$, $K_3$, les conductivités thermiques moyennes de chaque mur dont les épaisseurs sont respectivement $e_1$, $e_2$, $e_3$. On suppose comme précédemment qu'il n'y a pas de pertes latérales de chaleur.
**Chaque mur est donc traversé par le même flux thermique Φ.**



On peut écrire d'après le paragraphe précédent le flux traversant chaque mur, et en déduire les différences de température entre les faces de chaque mur :

- **Mur 1 :** $\Phi = K_1.\frac{S}{e_1}.(T_1 - T_2) \Rightarrow (T_1 - T_2) = \frac{\Phi}{S}.\frac{e_1}{K_1}$
- **Mur 2 :** $\Phi = K_2.\frac{S}{e_2}.(T_2 - T_3) \Rightarrow (T_2 - T_3) = \frac{\Phi}{S}.\frac{e_2}{K_2}$
- **Mur 3 :** $\Phi = K_3.\frac{S}{e_3}.(T_3 - T_4) \Rightarrow (T_3 - T_4) = \frac{\Phi}{S}.\frac{e_3}{K_3}$

Et en additionnant membre à membre :

$$(T_1 - T_4) = \frac{\Phi}{S}\left(\frac{e_1}{K_1} + \frac{e_2}{K_2} + \frac{e_3}{K_3}\right)$$

$$(T_1 - T_4) = \Phi.\left(\frac{e_1}{K_1.S} + \frac{e_2}{K_2.S} + \frac{e_3}{K_3.S}\right)$$

$$\boldsymbol{\Delta T = \Phi.R}$$

Le flux s'exprime par :

$$\Longrightarrow \Phi = \left[\frac{1}{\left(\frac{e_1}{K_1.S} + \frac{e_2}{K_2.S} + \frac{e_3}{K_3.S}\right)}\right](T_1 - T_4) = \left[\frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}\right](T_1 - T_4)$$

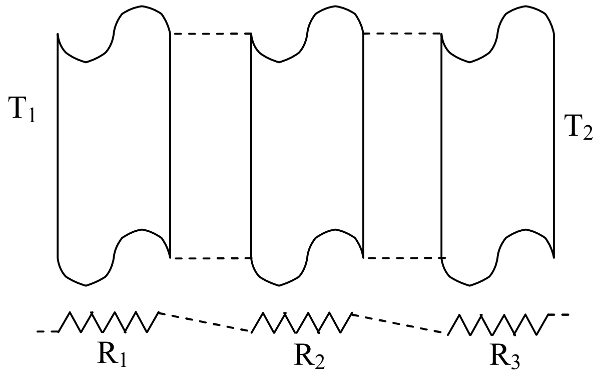
La résistance thermique équivalente est :

$$\mathbf{R_{équivalente} = R_1 + R_2 + R_3} = \boldsymbol{\frac{e_1}{K_1.S} + \frac{e_2}{K_2.S} + \frac{e_3}{K_3.S}}$$

En général :

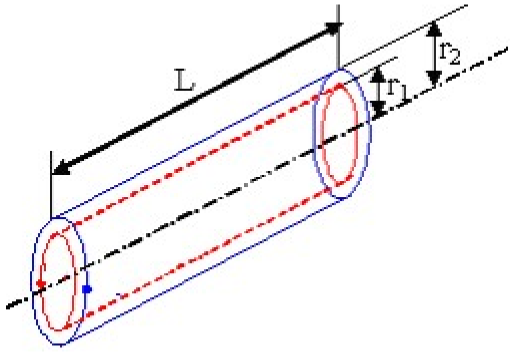
$$\mathbf{R_{équivalente}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\frac{e_i}{K_i.S}}$$

Avec $R_1$, $R_2$ et $R_3$ sont les résistances respectivement du Mur1, Mur 2 et du Mur 3.



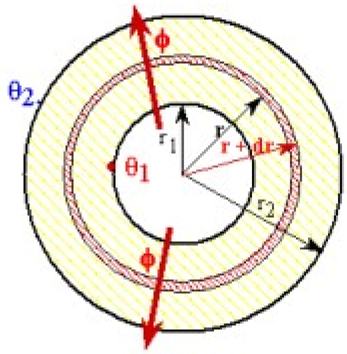

- **Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique**

Soient $r_1$ le rayon de la paroi interne, $r_2$ celui de la paroi externe, $T_1$ et $T_2$, les températures respectives des faces interne et externe et *k* la conductivité thermique moyenne entre $T_1$ et $T_2$ du matériau constituant le tube.




On désire connaître le flux thermique qui traverse le tube de l'intérieur vers l'extérieur (lorsque $T1 > T2$) pour une longueur L de tube. Par raison de symétrie, les lignes d'écoulement de la chaleur sont des droites dirigées selon des rayons. On dit que le transfert de chaleur est radial

Soit un cylindre de rayon intermédiaire r avec $r_1 < r < r_2$ et d'épaisseur dr



La densité de flux thermique à travers ce cylindre est donnée par la loi de FOURIER :

$$\vec{j}_Q = -k\overrightarrow{grad}T$$

Dans ce cas la distribution de température est uniforme pour une surface latérale c'est-à-dire pour r fixe, Donc on peut dire que :

$$\vec{j}_Q = -k\frac{dT}{dr}\vec{u}_r$$

Le flux thermique correspondant est :

$$\Phi = \iint \vec{j}_Q.\overrightarrow{dS}_{\text{latérale}} = \iint -k\frac{dT}{dr}rd\theta dz$$

$$\Rightarrow \Phi = -k\frac{r}{dr}\,dT\iint d\theta dz$$

$$\Rightarrow \Phi = -k\frac{r}{dr}\,dT.2\pi.L$$

$$\Rightarrow dT = \frac{-\Phi}{k.2\pi.L}\frac{dr}{r}$$

En intégrant cette expression on peut obtenir :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{-\Phi}{k.2\pi.L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = \frac{-\Phi}{k.2\pi.L}\,ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

On peut écrire alors que :

$$\underbrace{\boldsymbol{T_1 - T_2}}_{\Delta T} = \underbrace{\frac{\boldsymbol{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}{\boldsymbol{k.2\pi.L}}}_{R}.\boldsymbol{\Phi}$$

On en déduit alors l'expression du flux thermique passant à travers la paroi du cylindre en fonction sa la résistance thermique :

$$\boldsymbol{\Phi = (T_1 - T_2)\frac{k.2\pi.L}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

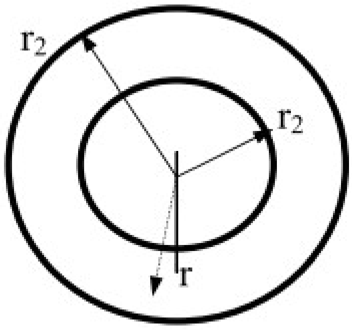
- **Conduction à travers la paroi d'une sphère**

  Considérons deux sphères concentriques de rayon $r_1$ et $r_2$ limitant un volume de matière sans sources internes de chaleur.

  Les conditions aux limites du problème sont des conditions de Dirichlet :

  $r = r_1 \Rightarrow T = T_1$

$$r = r_2 \Rightarrow T = T_2$$




$$\Phi = \iint \vec{j}_Q . \overrightarrow{dS}_{\text{sphérique}} = \iint -k\frac{dT}{dr}.r^2 sin\theta \, d\theta . d\varphi = -4\pi . k . r^2 \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \; dT = \frac{-\Phi}{4\pi . k}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}^2}$$

En intégrant cette expression on obtient :

$$T_2 - T_1 = \frac{\Phi}{4\pi . k}\left(\frac{1}{\mathrm{r}_2} - \frac{1}{\mathrm{r}_1}\right)$$

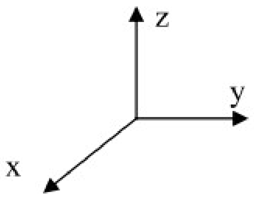
Soit donc :

$$\underbrace{\boldsymbol{T_1 - T_2}}_{\Delta T} = \frac{\mathbf{r_2 - r_1}}{\underbrace{\mathbf{r_1 r_2 . 4\pi . k}}_{\mathrm{R}}} . \boldsymbol{\Phi}$$

# Annexe

## Expression du Laplacien de la température dans différent repère

**En coordonnées cartésiennes (x, y, z)**

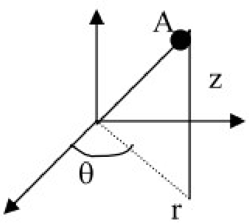



$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

**En coordonnées cylindriques (r, z,θ)**

Dans le cas général
$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}.\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Dans le cas d'une symétrie cylindrique T = f ( r )

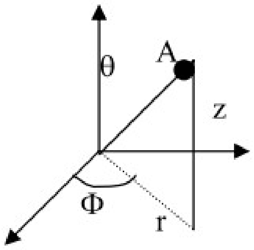



$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}.\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r}.\frac{\partial\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)}{\partial r}$$

**En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)**

Dans le cas général
$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}.\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}.\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}.\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$$

Dans le cas d'une symétrie sphérique T = f ( r )




$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}.\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r}.\frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}$$