Université de Carthage
ENSTA Borj-Cedria

A.U : 2021-2022
Classes : 1 TA

Série 1 : Analyse numérique

Norme vectorielle, norme matricielle et conditionnement

Exemple de perturbation demonstration de prop. $\boxed{2.10}$ p 41

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4+10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6+10^{-6} \end{pmatrix}$$

Si on change légèrement le second membre, on considère alors le système très voisin suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4+10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6-10^{-6} \end{pmatrix}$$

Interpréter.

Exercice 1 (*Caractérisation du conditionnement pour la norme 2*)
Soient $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidenne $\| \cdot \|_2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme matricielle induite $||| \cdot |||_2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note $Cond_2(A)$ le conditionnement associé à la norme matricielle induite par la norme euclidenne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique définie positive.
2. On note σ_n (resp. σ_1) la plus grande (resp. petite) valeur propre de $A^T A$. Montrer que
$$Cond_2(A) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_1}}$$
3. On suppose de plus que A est une matrice symétrique définie positive. Montrer que
$$Cond_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$
où λ_n (resp. λ_1) est la plus grande (resp. petite) valeur propre de A.

Exercice 2 (*Conditionnement pour la norme infinie*)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. En écrivant A sous la forme $A = 4(I_n - N)$, où N est à déterminer, montrer que A est inversible et que $||| A^{-1} |||_\infty \leq \frac{1}{2}$.
2. En déduire un majorant de $Cond_\infty(A)$.
3. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $2 \leq |\lambda| \leq 6$.

Exercice : (Notion de conditionnement)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$; $\delta A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-14} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{6} \end{pmatrix}$

1) Calculer $Cond(A)$. Que vaut $\dfrac{|||\delta A|||_2}{|||A|||_2}$?

En déduire une estimation de $\dfrac{\|\delta X\|_2}{\|X+\delta X\|_2}$

où $AX = (A+\delta A)(X+\delta X)$

2) Exprimer DA et $D\delta A$. Que vaut $Cond_2(DA)$?

En déduire une estimation de $\dfrac{\|\delta X\|_2}{\|X+\delta X\|_2}$. Conclure.

Rappel

$AX = b$ où A est mal conditionnée

$\Rightarrow PAX = Pb$ où P est inversible

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

or les v.p de AA^T sont les v.p de A^TA.

Car : si λ v.p de A associée au vect p. X
alors λ v.p de A^T associée au vect p X.

$$A \cdot A^T X = \lambda A X = \lambda^2 X$$
$$A^T A X = \lambda A^T X = \lambda^2 X$$
$$\Longrightarrow \tilde{\sigma}_1 = \sigma_1$$

Donc, $|||A^{-1}|||_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_1}}$

En conclusion : $Cond_2(A) = \sqrt{\dfrac{\sigma_m}{\sigma_1}}$.

3) Symétrie $\Longrightarrow A^TA = A^2$ et $\sigma_i = \lambda_i^2$ pour $1 \leq i \leq m$

$\Longrightarrow Cond_2(A) = \sqrt{\dfrac{\lambda_m^2}{\lambda_1^2}} = \left|\dfrac{\lambda_m}{\lambda_1}\right| = \dfrac{\lambda_m}{\lambda_1}$ car A est symétrique défini et positive

Exercice 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & 4 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $A = 4(I_m - N)$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{4} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \; -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

$\Big\{$ • $|||\cdot|||_\infty$ est une norme matricielle induite.
• $|||N|||_\infty = \max \sum_{j=1}^{m} |N_{ij}| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$

Sèrie 1 :

Exercice 1 : (Preuve de Prop 2.10)

1) . A^TA est une matrice symétrique

car : $(A^TA)^T = A^T.(A^T)^T = A^T.A$

. A^TA est une matrice définie positive.

Car : Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}}^n\}$, on a :

$$(A^TAX, X) = (AX, AX) = \|AX\|_2^2 > 0$$

2) $Cond_2(A) \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_1}}$ où $\begin{cases} \sigma_n : \text{la plus grande valeur propre de } A^TA. \\ \sigma_1 : \text{la plus petite v. p de } A^TA \end{cases}$

on a : $Cond_2(A) = |||A|||_2 . |||A^{-1}|||_2$

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$\longrightarrow |||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$

donc me kh dem b A

si $A \in M_n(\mathbb{K})$ me kh dem A^*

avec $\rho(A^TA) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\sigma_i| = |\sigma_n| = \sigma_n$

$\Longrightarrow |||A|||_2 = \sqrt{\sigma_n}$

$\longrightarrow |||A^{-1}|||_2 = \sqrt{\rho((A^{-1})^TA^{-1})} = \sqrt{\rho((A^T)^{-1}.A^{-1})}$

$= \sqrt{\rho(AA^T)^{-1}}$

. On note $\tilde{\sigma}_1$ la plus petite v. p de AA^T

alors $\frac{1}{\tilde{\sigma}_1}$ la plus grande v. p de $(AA^T)^{-1}$

$\Longrightarrow \rho((AA^T)^{-1}) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_1}$

Suite exercice 1 :

3) On suppose de plus que A est une matrice symétrique définie positive.

$$\Rightarrow A^T A = A^2 \text{ et } \sigma_i = \lambda_i^2$$

pour $1 \leq i \leq n$

$$\Rightarrow Cond_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_n^2}{\lambda_1^2}} = \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right| = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

A est symétrique définie positive.

Proposition :

1. soit une norme matricielle induite $|||\cdot|||$ et une matrice $B \in M_n(K)$ telle que $|||B||| < 1$.
Alors, la matrice $I_n + B$ est inversible
et $|||(I_n + B)^{-1}||| \leq \dfrac{1}{1 - |||B|||}$

inversible et que ||| ...

... de $Cond_2(A)$.

2. Si $I_n + B$ est singulière (non-inversible), alors $|||B||| \geq 1$, pour toute norme matricielle.

Exercice 2 :

$$A \in M_n(\mathbb{R}) ; \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) $A = 4(I_n - N)$

où $N = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 & \cdots & 0 \\ -1/4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & -1/4 \\ 0 & \cdots & 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \bullet\ |||\cdot|||_\infty \text{ est une norme matricielle induite} \\ \bullet\ |||N|||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |N_{ij}| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1 \end{cases}$

Proposition

$\Rightarrow$ La matrice $I_n - N$ est inversible.

Donc $A = 4(I_n - N)$ est inversible.

et $|||A^{-1}|||_\infty = \frac{1}{4} |||(I_n - N)^{-1}|||_\infty$

$$\leq \frac{1}{4} \frac{1}{1 - |||N|||_\infty}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

3. Soit λ une valeur propre de ...

$\Rightarrow |||A^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{2}$

2) $Cond_\infty (A) \leq ?$

$cond_\infty (A) = |||A|||_\infty . |||A^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{2} |||A|||_\infty$

avec $|||A|||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$= 1 + 4 + 1 = 6$

$\Rightarrow \boxed{Cond_\infty (A) \leq \frac{6}{2} = 3.}$

3) Soit λ une valeur propre de A

Mq : $2 \leq |\lambda| \leq 6$?

Soit v : un vecteur propre (norme inf) de A associé à λ telque:

$A v = \lambda v$

$\Rightarrow \|A v\|_\infty = \|\lambda\| . \|v\|_\infty$

$\Rightarrow |\lambda| = \frac{\|A v\|_\infty}{\|v\|_\infty}$

$\Rightarrow |\lambda| \leq \frac{|||A|||_\infty . \|v\|_\infty}{\|v\|_\infty}$

avec $|||A|||_\infty = 6$

$\Rightarrow \boxed{|\lambda| \leq 6}$ ①

D'autre part, puisque A est inversible,
donc $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}
Soit ~~un~~ vecteur propre de A^{-1} associé
à $1/\lambda$ tel que :

$$A^{-1} u = 1/\lambda \cdot u$$

$$\Rightarrow \|A^{-1} \cdot u\|_\infty = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|u\|_\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\lambda|} = \frac{\|A^{-1} \cdot u\|_\infty}{\|u\|_\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\lambda|} \leq \frac{|||A^{-1}|||_\infty \cdot \|u\|_\infty}{\|u\|_\infty}$$

avec : $|||A^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\lambda|} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\lambda| \geq 2}$$ ②

① et ② $\Rightarrow 2 \leq |\lambda| \leq 6$

3. Soit λ une valeur propre ...

Exercice 3 : (Notion de pré-conditionnement)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$; $\delta A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-14} \end{pmatrix}$

et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{6} \end{pmatrix}$

1) Calculer $Cond_2(A)$. Que vaut $\dfrac{|||\delta A|||_2}{|||A|||_2}$?

En déduire, une estimation de :

$$\frac{\|\delta X\|_2}{\|X + \delta X\|_2}, \text{ où}$$

$$AX = (A + \delta A)(X + \delta X)$$

2) Exprimer DA et $D\delta A$. Que vaut $Cond_2(DA)$?

En déduire une estimation de $\dfrac{\|\delta X\|_2}{\|X + \delta X\|_2}$. Conclure.

②

E
O

Résolution :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$

$\rightarrow \text{Cond}_2(A) = |||A|||_2 \cdot |||A^{-1}|||_2$;

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{6} \end{pmatrix}$

. A et A^{-1} sont symétriques, alors

. $|||A|||_2 = \rho(A) = 1$

. $|||A^{-1}|||_2 = \rho(A^{-1}) = 10^{6}$

$\Rightarrow \text{cond}_2(A) = 10^{6} \ggg 1$

$\Rightarrow$ On dit que A est mal conditionné.

$\rightarrow \delta A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-14} \end{pmatrix}$, matrice symétrique

alors $|||\delta A|||_2 = \rho(\delta A) = 10^{-8}$.

et $|||A|||_2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{|||\delta A|||_2}{|||A|||} = 10^{-8}.$$

$\longrightarrow$ <u>On a</u> :

$$AX = (A+\delta A)(X+\delta X)$$
$$= AX + A\delta X + \delta A(X+\delta X)$$
$$\Rightarrow \delta X = -A^{-1}.\delta A.(X+\delta X)$$

Ainsi la norme matricielle induite $|||\cdot|||_2$

$$\|\delta X\|_2 \leq |||A^{-1}|||_2 . \|\delta A\|_2 . \|X+\delta X\|_2 .$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta X\|_2}{\|X+\delta X\|_2} \leq |||A|||_2 |||A^{-1}|||_2 . \frac{|||\delta A|||_2}{|||A|||_2} = 10^{6}.10^{-8}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\|\delta X\|_2}{\|X+\delta X\|_2} \leq 10^{-2}}$$

2) $DA = B_2$, $\delta A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-14} \end{pmatrix}$

$$= 10^{-8}.A.$$

et alors $\delta A = 10^{-8}.A$

$$\Rightarrow D.\delta A = 10^{-8}.DA = 10^{-8}$$
$$\Rightarrow |||D.\delta A|||_2 = 10^{-8}$$

$\longrightarrow$ $Cond_2(DA) = cond_2(B_2) = 1$

on change légèrement le second membre, on

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 - 10^{-6} \end{pmatrix}$$

induite

it associé

ıtrer que

rer que

mont

$\Rightarrow$ La matrice DA est bien conditionnée

$$\rightarrow AX = (A + \delta A)(X + \delta X)$$

$$\Rightarrow \cancel{DAX} = D(A + \delta A)(X + \delta X)$$

$$= \cancel{DAX} + D\cancel{A\delta}X + D\delta A(X + \delta X)$$

$$\Rightarrow \delta X = -(DA^{-1}).(D\delta A)(X + \delta X)$$

Avec la norme matricielle induite $|||.|||_2$.

$$\Rightarrow \|\delta X\|_2 \leq |||(DA)^{-1}|||_2 . |||D\delta A|||_2 . \|X + \delta X\|_2$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta X\|_2}{\|X + \delta X\|_2} \leq |||DA|||_2 . |||(DA)^{-1}||| * \frac{|||D\delta A|||}{|||DA|||_2}$$

$$= 1 . 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta X\|_2}{\|X + \delta X\|_2} \leq 10^{-8}.$$

Conclusion, Dans ce cas, la matrice DA est bien conditionnée ($cond_2(DA) = 1$), on a obtenu alors, une estimation ectorielle,

d'erreur $\left(\frac{\|\delta x\|_2}{\|x+\delta x\|_2}\right)$ plus petite, que l'estimation d'erreur calculé au cas de la matrice A, qui est mal conditionnée ($cond_2(A) = 10^6 \gg 1$).

nontrer