CHAPITRE I

Circuits Electriques En Régime Sinusoïdal

I. Représentation et Propriétés des Grandeurs Sinusoïdales

I.1. Notion de déphasage

Soient deux grandeurs sinusoïdales $x_1(t)$ et $x_2(t)$ intervenant dans le même circuit électrique (de même pulsation), "φ_1" et "φ_2" sont les phases initiales de ces deux grandeurs par rapport à l'origine du temps tel que.

$x_1(t) = X_{1max}\,Cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2(t) = X_{2max}\,Cos(\omega t + \varphi_2)$

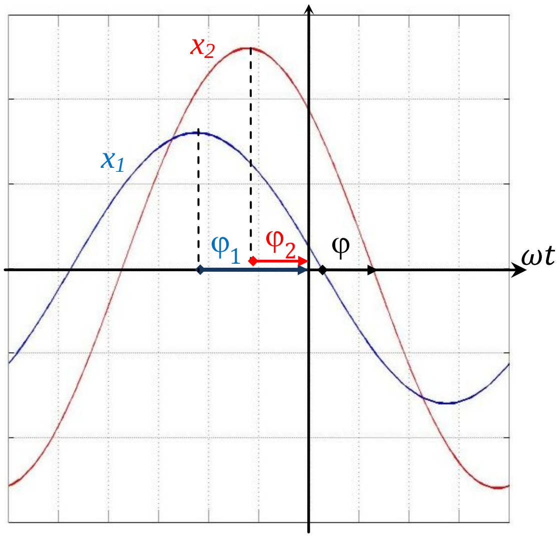
Le déphasage "φ" entre les deux grandeurs est : "$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$".

Si $\Delta\varphi = 0$, on dit que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont en phase,

Si $\Delta\varphi > 0$, on dit que $x_1(t)$ et en avance par rapport à $x_2(t)$ (en particulier si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on dit que $x_1(t)$ et en quadrature avance par rapport à $x_2(t)$).

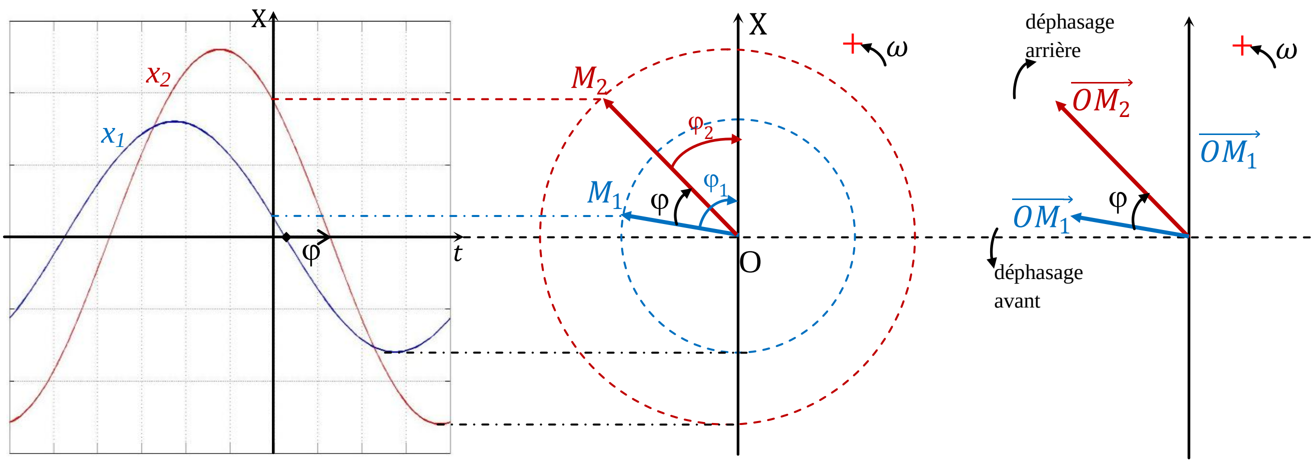
Si $\Delta\varphi < 0$, on dit que $x_1(t)$ et en arrière par rapport à $x_2(t)$ (en particulier si $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, on dit que $x_1(t)$ et en quadrature arrière par rapport à $x_2(t)$).

Si $\varphi = \pm\pi$, on dit que $x_1(t)$ et en opposition de phase par rapport à $x_2(t)$.



I.2. Représentation vectorielle

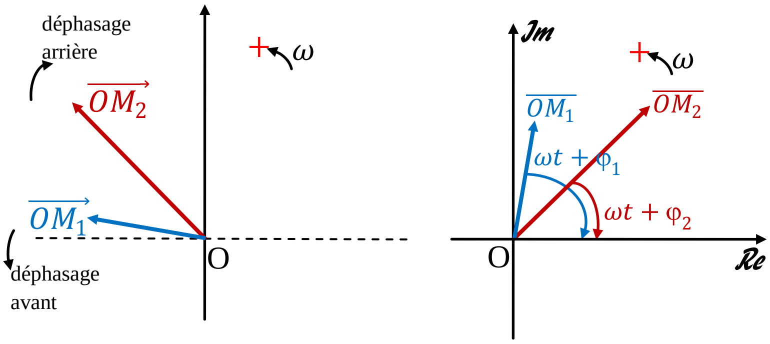
Les valeurs des grandeurs sinusoïdales $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont données par la projection des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ tournants dans le sens antihoraire tous deux à la vitesse angulaire "ω" sur l'axe OX (origine de phase) et ayant pour modules "X_1" et "X_2" et déphasages "φ_1" et "φ_2" successivement. Ainsi, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ représentent les grandeurs sinusoïdales $x_1(t)$ et $x_2(t)$ successivement dont l'axe OX est l'origine de phase.



Remarque : En électrotechnique, on caractérise les grandeurs sinusoïdales par ses valeurs efficaces"X_1" et "X_2" et non plus par ses valeurs maximales "X_{1max}" et "X_{2max}".

I.3. Notation complexe

Lorsqu'on prend l'origine de phases confondu avec l'axe des réelles du plan complexe, les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ peuvent être représentés à un instant donné dans le plan complexe ainsi.



$\overrightarrow{OM_1}$ est représenté en complexe par :

$$\overline{OM_1} = X_1\left[Cos\left(\omega t + \varphi_1\right) + jSin\left(\omega t + \varphi_1\right)\right] = X_1 e^{j\omega t + \varphi_1}$$

$\overrightarrow{OM_2}$ est représenté en complexe par :

$$\overline{OM_2} = X_2\left[Cos\left(\omega t + \varphi_2\right) + jSin\left(\omega t + \varphi_2\right)\right] = X_2 e^{j\,(\omega t + \varphi_2)}$$

Remarque : La notation complexe de la grandeur sinusoïdale $\sqrt{2}XCos(\omega t + \alpha)$ sera confondue avec celle d'une constante complexe $X[Cos(\alpha) + jSin(\alpha)]$. Mais en réalité, Elles sont totalement différentes. La première est une grandeur sinusoïdale de pulsation "ω" et de valeur efficace "X" et de phase initiale "α". Alors que la deuxième est un nombre complexe de module "X" et d'argument "α".

I.4. Propriétés des grandeurs sinusoïdales

Deux types d'opérations sur les grandeurs sinusoïdales donnent des grandeurs encore sinusoïdales de même pulsation donc représentable sur le même diagramme vectoriel. Il s'agit de l'addition (soustraction) et la dérivation (intégration).

I.4.a. Somme et différence

Soient deux grandeurs sinusoïdales

$x_1(t) = \sqrt{2}X_1Cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2(t) = \sqrt{2}X_2Cos(\omega t + \varphi_2)$.

Leur somme instantanée est aussi sinusoïdale $x(t) = \sqrt{2}XCos(\omega t + \varphi)$ tel que :

$$X = \sqrt{\left(X_1Cos\left(\varphi_1\right) + X_2Cos\left(\varphi_2\right)\right)^2 + \left(X_1Sin\left(\varphi_1\right) + X_2Sin\left(\varphi_2\right)\right)^2}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{X_1Sin\left(\varphi_1\right) + X_2Sin\left(\varphi_2\right)}{X_1Cos\left(\varphi_1\right) + X_2Cos\left(\varphi_2\right)}$$

I.4.b. Dérivation et Intégration

Soient une grandeur sinusoïdale $x(t) = \sqrt{2}XCos(\omega t + \varphi)$,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{2}X\omega Cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int x(t)dt = \sqrt{2}\frac{X}{\omega}Cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

La dérivée d'une grandeur sinusoïdale est aussi sinusoïdale dont sa valeur efficace est multipliée par la pulsation et son déphasage est en quadrature avance.

L'intégrale d'une grandeur sinusoïdale est aussi sinusoïdale dont sa valeur efficace est divisée par la pulsation et son déphasage est en quadrature arrière.

Remarque : La grandeur sinusoïdale, sa dérivée et son intégrale ne sont pas de même nature physique mais ils ont la même pulsation, donc sont représentable sur le même diagramme vectoriel.

II. Relations entre tension et courant dans un circuit RLC

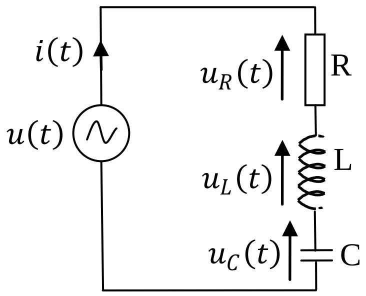
Soit un circuit RLC série alimenté sous une tension sinusoïdale comme le montre la figure ci-dessous. L'application de la loi de maille donne :

$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$ avec

$u_R(t) = R\, i(t)$

$u_L(t) = L\, \frac{di(t)}{dt}$

$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\, dt$



Donc

$$u(t) = R\, i(t) + L\, \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\, dt$$

II.1. Solution algébrique

Lorsqu'on applique une tension sinusoïdale à ce circuit, le courant résultant est la somme de deux termes. Le premier est obtenu par la solution générale de l'équation différentielle sans second membre. Il est apériodique amorti donc au bout de quelques périodes sera négligeable. Le deuxième est obtenu par la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre. Il est sinusoïdal et de même pulsation que la tension (le second membre). Après que le régime permanent s'établit (suivant les valeurs de R, L et C), Le terme libre sera négligeable et ne reste que le terme forcé. Alors le courant est sinusoïdal et ne reste que de définir sa valeur efficace et son déphasage par rapport à la tension.

Soit la tension sinusoïdale $u(t)$ de valeur efficace U et de phase initiale nulle (supposée comme origine de phases)

$$u(t) = \sqrt{2}UCos(\omega t)$$

Le courant circulant dans ce circuit est de valeur efficace I et supposé de déphasage arrière "φ" comme la plupart des récepteurs en pratique. En cas où le courant est déphasé en avance, les résultats seront les mêmes sauf que le déphasage "φ" sera négatif.

$$i(t) = \sqrt{2}ICos(\omega t - \varphi)$$

En utilisant les opérations établis dans les sections précédentes, nous aboutissons à :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad et \quad \varphi = arctg\left[\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]$$

On appelle

$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ l'impédance "Z" du circuit.

"$L\omega - \frac{1}{C\omega}$" la réactance "$X$" totale du circuit. C'est la somme de la réactance de la bobine "$L\omega$" et celle du condensateur "$-\frac{1}{C\omega}$".

Ainsi, on peut écrire:

$$I = \frac{U}{Z}, \quad tg\varphi = \frac{X}{R}, \quad sin\varphi = \frac{X}{Z}, \quad Cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

Remarque :

- Si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, on dit que le circuit est inductif et le déphasage "φ" du courant est en arrière par rapport à la tension.
- Si $L\omega < \frac{1}{C\omega}$, on dit que le circuit est capacitif et le déphasage "φ" du courant est en avance par rapport à la tension.
- Les valeurs efficaces des chutes de tension aux bornes de chaque élément du circuit

$$U_R = R\,I = Ucos\varphi,\ U_L = L\omega I,\ U_C = \frac{I}{C\omega}$$

A la résonnance "$L\omega = \frac{1}{C\omega}$", on aura :

$$I = \frac{U}{R}, \quad \varphi = 0, \ \text{et} \quad \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{L\omega}{R} = \frac{1}{C\omega R}$$

On note que U_L et U_C sont en opposition de phase et peuvent prendre des valeurs très supérieures à U.

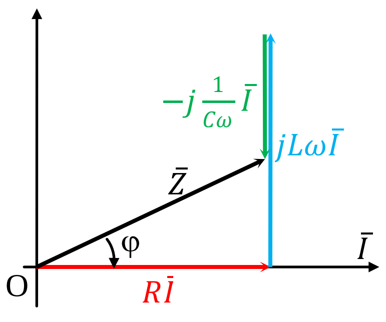
II.2. Solution complexe et diagramme vectoriel

Puisque touts les termes sont sinusoïdaux, l'équation différentielle s'écrit en complexe ainsi :

$$\overline{U_R} + \overline{U_L} + \overline{U_C} = \bar{U}$$

$$R\bar{I} + jL\omega\bar{I} - j\frac{1}{C\omega}\bar{I} = \bar{U}$$

$$\text{d'où } \bar{I} = \frac{\bar{U}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}}$$

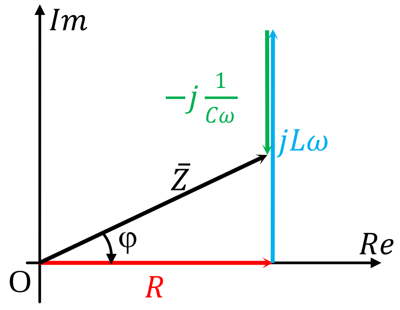


Avec $\bar{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R + jX$ est l'impédance en complexe

Remarque :

- On peut représenter l'impédance complexe "$\bar{Z}$" dans le plan complexe, mais il faut veiller à ne pas la confondre avec la représentation complexe des grandeurs sinusoïdale (courants et tensions). On dit que "$\bar{Z}$" est vecteur achronique et $\bar{U}$ et $\bar{I}$ sont des vecteurs chroniques.

- Depuis la relation $\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}}$, on déduit simplement la valeur efficace et le déphasage du courant. Sa valeur efficace égale le quotient de la valeur efficace de la tension par le module de l'impédance. Son déphasage par rapport à la tension égale l'argument de l'impédance.



$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\bar{Z})$$

- Les lois fondamentaux des circuits électriques alimentés en continue restent valables en alternatif en utilisant la notation complexe ou la représentation vectorielle.

III. Les Puissances

Dans un circuit électrique alimenté par une tension "$u(t)$", il y circule un courant $i(t)$. On peut définir plusieurs puissances.

III.1. Puissance Instantanée (Watt : [W])

C'est le produit instantané de la tension et le courant : $p(t) = u(t)i(t)$

En régime sinusoïdale, la puissance instantanée est :

$$p(t) = UI[Cos\varphi + Cos(2\omega t - \varphi)]$$

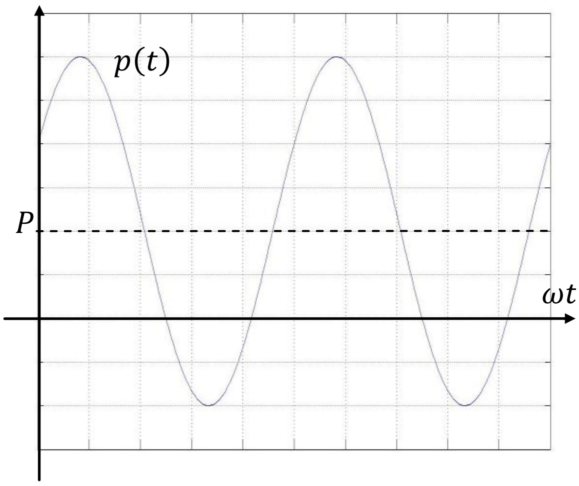
III.2. Puissance Active (Watt : [W])

C'est la valeur moyenne de la puissance instantanée.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

En régime sinusoïdale, la puissance active est :

$$P = UICos\varphi$$



On appelle puissance fluctuante, la puissance "$UICos(2\omega t - \varphi)$". C'est la variation de $p(t)$ autour de sa valeur moyenne.

Dans le cas du circuit RLC série, la puissance active $P = UICos\varphi = RI^2$. Ceci explique que toute la puissance active délivrée par la source est transformée en pertes Joule.

Remarque :

Si la tension et le courant d'un circuit ne sont pas sinusoïdaux, on peut utiliser le développement en série de Fourier pour les deux grandeurs et calculer par la suite la puissance active résultante.

$$u(t) = U_{moy} + U_1\sqrt{2}Cos(\omega t + \alpha_1) + U_2\sqrt{2}Cos(2\omega t + \alpha_2) + \cdots + U_n\sqrt{2}Cos(n\omega t + \alpha_n) + \cdots$$

$$i(t) = I_{moy} + I_1\sqrt{2}Cos(\omega t + \beta_1) + I_2\sqrt{2}Cos(2\omega t + \beta_2) + \cdots + I_n\sqrt{2}Cos(n\omega t + \beta_n) + \cdots$$

La puissance active sera trouvée ainsi :

$$P = U_{moy} I_{moy} + U_1I_1Cos(\alpha_1 - \beta_1) + U_2I_2Cos(\alpha_2 - \beta_2) + \cdots + U_nI_nCos(\alpha_n - \beta_n) + \cdots$$

III.3. **Puissance Apparente (Volt-Ampere : [VA])**

C'est le produit des valeurs efficaces de la tension et du courant d'un circuit électrique.

$$S = UI$$

Le facteur de puissance est définit comme le quotient de la puissance active par la puissance apparente.

$$f_p = \frac{P}{S}$$

En régime sinusoïdale, le facteur de puissance égale :

$$f_p = cos\varphi$$

Le facteur de puissance dépend directement du déphasage entre le courant et la tension aux bornes du dipôle. Si le dipôle est alimenté par une tension constante en amplitude "U" ,

$$I = \frac{P}{UCos\varphi}$$

Remarque :

Pour délivrer à une installation une même puissance P, le courant doit être d'autant plus important que le facteur de puissance est faible. L'utilisation des condensateurs permettra une compensation de la puissance réactive absorbée par l'installation (amélioration du cosφ). Le facteur de puissance renseigne donc sur la qualité de la transmission de l'énergie.

En régime non sinusoïdale, le facteur de puissance égale:

$$f_p = \frac{U_{moy} I_{moy} + U_1I_1Cos(\alpha_1 - \beta_1) + U_2I_2Cos(\alpha_2 - \beta_2) + \cdots + U_nI_nCos(\alpha_n - \beta_n) + \cdots}{\sqrt{U_{moy}^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2 + \cdots}\sqrt{I_{moy}^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots + I_n^2 + \cdots}}$$

III.4. **Puissance Réactive (Volt-Ampère Réactif: [VAR])**

Cette puissance n'est définie qu'en régime sinusoïdale.

$$Q = UISin\varphi$$

Dans le cas du circuit RLC série, la puissance réactive $Q = UISin\varphi = XI^2$. Sachant que la réactance "X" peut être positive (cas d'une charge inductive) ou négative (cas d'une charge capacitive), la puissance réactive peut être absorbée ou crée par la charge respectivement.

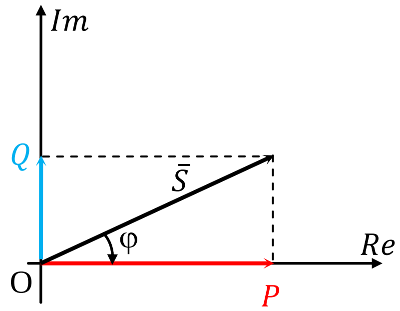
La bobine absorbe une puissance réactive selon la valeur de son inductance ($L\omega I^2$). Le condensateur crée une puissance réactive selon la valeur de sa capacité ($-\frac{1}{C\omega}I^2$). La puissance réactive totale échangée sera soit absorbée de l'alimentation soit fournie à l'alimentation suivant le signe de la réactance. Les signes adoptés pour la puissance réactive de la bobine et celle du condensateur ne sont qu'une convention pour caractériser ces échanges.

Remarque :

- En régime sinusoïdal, on peut représenter les puissances active, réactive et apparente dans le plan complexe comme il est illustré dans la figure.

On peut écrire :

$$\bar{S} = P + jQ$$



III.5. **Théorème de BOUCHEROT**

Une installation électrique est un ensemble de récepteurs (plusieurs résistances, bobines et condensateurs, moteurs, radiateur, …), groupés en parallèle et alimentés par une tension commune de valeur efficace constante fournie par le réseau de distribution.

Dans tout circuit électrique, le théorème de Boucherot énonce la conservation des puissances actives et réactives :

La puissance active totale consommée est égale à la somme **arithmétique** des puissances actives consommées par chaque récepteur ($P = \sum P_i$).

La puissance réactive totale consommée est la somme **algébrique** des puissances réactives consommées par chaque récepteur ($Q = \sum Q_i$).

Par contre les puissances apparentes ne se conservent pas. Pour le calcul de la puissance apparente totale, on peut utiliser la notation complexe.

$$\bar{S} = \sum \bar{S_i} = \sum P_i + j \sum Q_i$$

Sommaire

CHAPITRE II

Systèmes Electriques Polyphasés

On appelle un système q-phasé (polyphasé) un circuit électrique constitué de "q" sous systèmes (appelés phases). Il est caractérisé par un ensemble de grandeurs alternatives de même nature et de même pulsation. Les systèmes polyphasés sont particulièrement utiles pour le transport de puissance électrique et aux machines électriques. Il y a plusieurs avantages des systèmes polyphasés à savoir : La création des champs tournants essentiels au fonctionnement des moteurs électriques. A coût égale les machines polyphasées permettent de convertir plus d'énergie que les machines monophasées. La puissance instantanée fournit par un système polyphasé est constante donc un couple constant.

Il existe deux types de systèmes polyphasés système équilibré et déséquilibré. Un système q-phasé est équilibré si tous les "q" grandeurs ont la même amplitude et sont déphasées de "$2\pi/q$" l'une de l'autre qui la succède. Si une condition pour une grandeur n'est pas vérifiée, le système est alors déséquilibré.

I. Systèmes Polyphasés Equilibrés

I.1. Equations et propriétés des systèmes polyphasés équilibrés

Dans un système q-phasé équilibré, les grandeurs caractérisant ce système (courants, tensions, flux, inductions, …) s'écrivent de la manière suivante :

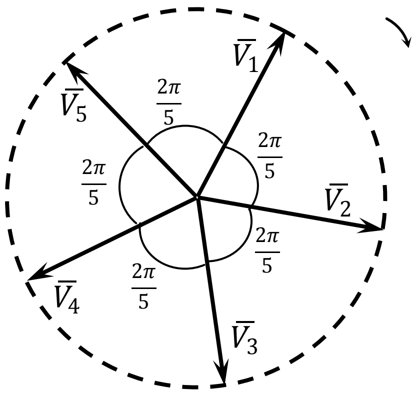
$$\begin{cases} x_1(t) = X_{1max}\,Cos(\omega t + \alpha_1) \\ x_2(t) = X_{2max}\,Cos(\omega t + \alpha_2) \\ \qquad\vdots \\ x_q(t) = X_{qmax}\,Cos(\omega t + \alpha_q) \end{cases}$$

avec

$$X_{1max} = X_{2max} = \cdots = X_{qmax} \text{ et } \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = \cdots = \alpha_q - \alpha_{q-1} = \pm\frac{2\pi}{q}$$

Par convention, lorsque $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = \cdots = \alpha_q - \alpha_{q-1} = -\frac{2\pi}{q}$, le système est dit direct. On donne un exemple d'un système de tension pentaphasé équilibré direct :

$$\begin{cases} v_1(t) = V_{max}\,Cos(\omega t + \alpha) \\ v_2(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{5}\right) \\ v_3(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{5}\right) \\ v_4(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t + \alpha - \frac{6\pi}{5}\right) \\ v_5(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t + \alpha - \frac{8\pi}{5}\right) \end{cases}$$

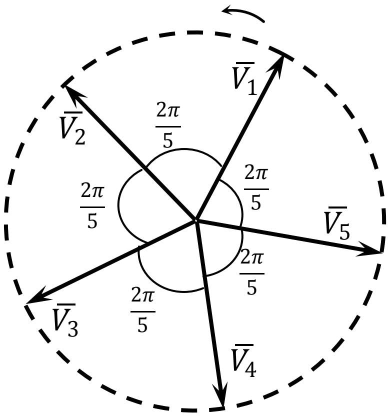


On représente ce système par le diagramme vectoriel ci-contre :

On constate bien le sens horaire de l'ordre de succession des tensions lorsque le système est direct.

Par convention, lorsque $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = \cdots = \alpha_q - \alpha_{q-1} = +\frac{2\pi}{q}$, le système est dit indirect (ou inverse). On donne un exemple d'un système de tension penta-phasé équilibré inverse :

$$\begin{cases} v_1(t) = V_{max}\,Cos(\omega t + \alpha) \\ v_2(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{5}\right) \\ v_3(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{5}\right) \\ v_4(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t + \alpha + \frac{6\pi}{5}\right) \\ v_5(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t + \alpha + \frac{8\pi}{5}\right) \end{cases}$$



On représente ce système par le diagramme vectoriel comme suit :

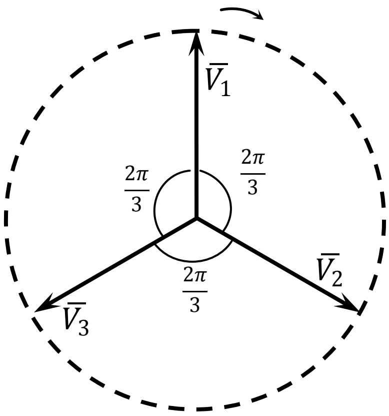
On constate bien le sens antihoraire de l'ordre de succession des tensions lorsque le système est inverse.

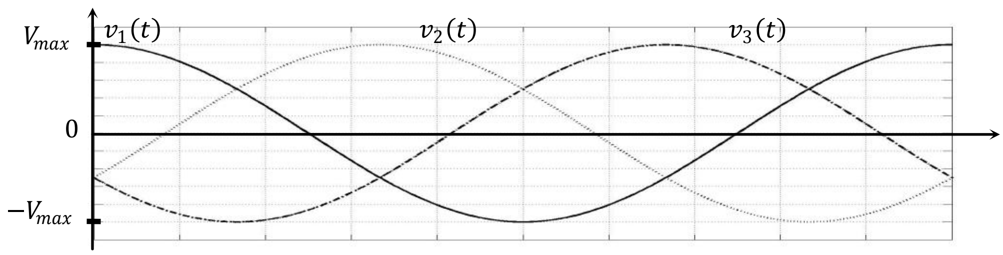
Remarques :

- La somme instantanée de l'ensemble des grandeurs formant un système polyphasé équilibré direct ou inverse est nulle.
- Un système polyphasé dont l'ensemble de ces grandeurs sont en phase est dit homopolaire.

Exemple de système de tensions triphasé direct.

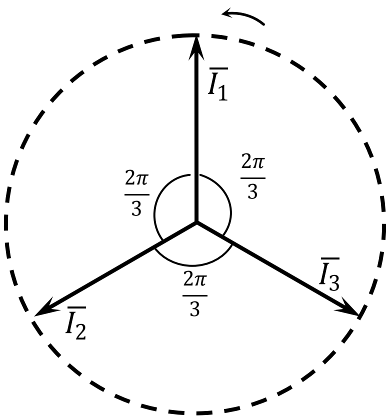
$$\begin{cases} v_1(t) = V_{max}\,Cos(\omega t) \\ v_2(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_3(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

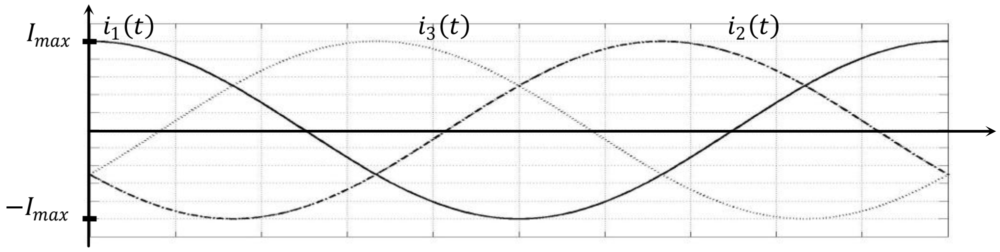




Exemple de système de courants triphasé inverse.

$$\begin{cases} i_1(t) = I_{max}\,Cos(\omega t) \\ i_2(t) = I_{max}\,Cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3(t) = I_{max}\,Cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$





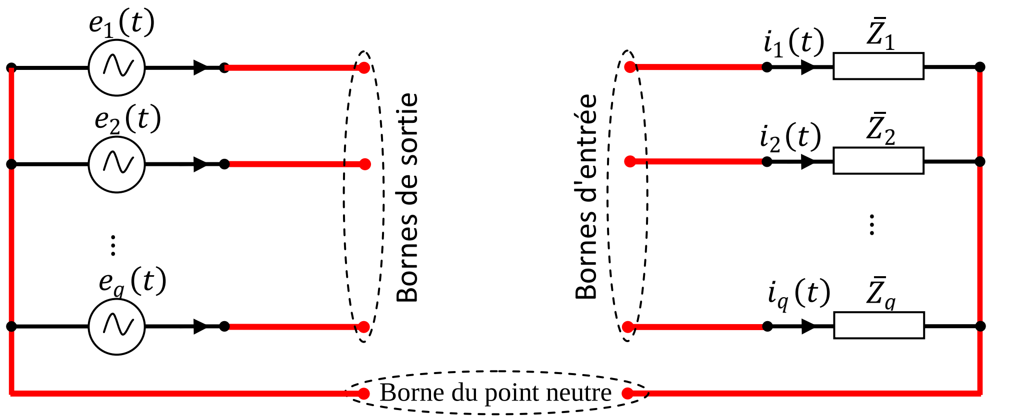
Application : Le système polyphasé le plus utilisé dans les applications industrielles et le transport de puissance électrique est le système triphasé. Pour raison de simplification, on prend la première grandeur du système comme origine de phase.

I.2. Couplage des systèmes polyphasés équilibrés

Un système polyphasé peut être une source d'alimentation polyphasée comme il peut être une charge (récepteur) polyphasée. Un système q-phasé est composé de "q" sources ou charges monophasés. Les liaisons entre sources et/ou charges ne sont pas assurées indépendamment (une des intérêts des systèmes polyphasés). L'ensemble des éléments constituants le système polyphasé sont d'abord montés entre eux selon un des deux types de montages possibles (montage étoile et le montage polygone).

I.2.a. Montage étoile

On réuni les "q" bornes des "q" éléments (sources ou charges) monophasés en un point commun pour former un point neutre. Les autres "q" bornes des "q" sources ou charges forment les bornes de sortie ou d'entée respectivement.



Source q-phasée montée en étoile Impédance q-phasée montée en étoile

La ligne neutre sert au retour du courant résultant des "q" phases. En cas de système polyphasé équilibré où la somme instantanée des "q" courants est nulle, la ligne neutre sera inutile.

On distingue deux types de tensions :

Les tensions simples qui représentent les d.d.p entre les bornes de sortie ou d'entée du système polyphasé et le neutre. On les note $\overline{V_k}$ tel que :

Pour les sources : $\overline{V_k} = \overline{E_k}$ avec $k = 1 \dots q$

Pour les charges : $\overline{V_k} = \bar{Z}_k \bar{I}_k$ avec $k = 1 \dots q$

Les tensions composées qui représentent les d.d.p entre deux bornes de sortie ou d'entée du système polyphasé. On les note $\bar{U}_{k,k+1}$ tel que :

Pour les sources : $\bar{U}_{k,k+1} = \overline{E_k} - \bar{E}_{k+1}$ avec $k = 1 \ldots q$

Pour les charges : $\bar{U}_{k,k+1} = \bar{Z}_k \bar{I}_k - \bar{Z}_{k+1} \bar{I}_{k+1}$ avec $k = 1 \ldots q$

En régime sinusoïdal équilibré direct, la relation entre les tensions composées et les tensions simples est :

$$\bar{U}_{k,k+1} = 2Sin\left(\frac{\pi}{q}\right) e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{q}\right)} \bar{V}_{k-1}$$

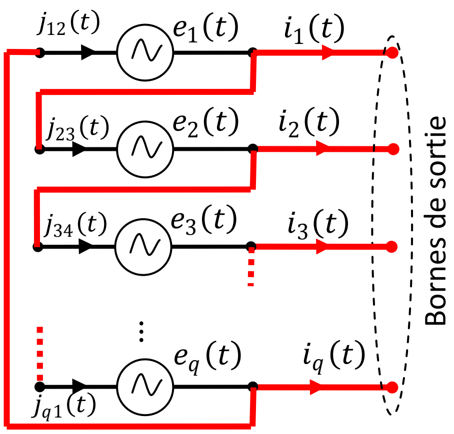
En régime sinusoïdal équilibré inverse, la relation entre les tensions composées et les tensions simples reste la même mais le déphasage $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{q}$ est en retard $\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{q}\right)\right)$.

Remarque

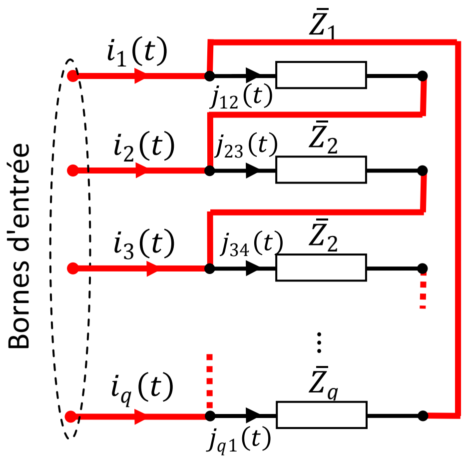
Il existe qu'un type de courants car le courant qui circule dans les sources ou charges est le même que le courant capté dans aux bornes de sorties ou d'entrées respectivement.

I.2.b. Montage polygone

On monte les "q" éléments (sources ou charges) monophasés en série pour former un circuit fermé. Il n'y circule aucun courant dans le cas d'un système équilibré (la somme instantanée des f.é.m ou d.d.p est nulle). Les "q" bornes communs forment les bornes de sortie ou d'entée respectivement.



Source q-phasée montée en polygone



Impédance q-phasée montée en polygone

On distingue deux types de courants :

Les courants de phase qui circulent dans les "q" éléments (sources ou charges) monophasés. On les note $\bar{J}_{kk-1}$.

Les courants de lignes qui sortent ou entrent à via les bornes de sortie ou d'entée du système polyphasé. On les note $\bar{I}_k$ tel que :

Pour les sources : $\bar{I}_k = \bar{J}_{k,k+1} - \bar{J}_{k+1,k}$

avec $k = 1 \ldots q - 1$

En régime sinusoïdal équilibré direct, la relation entre les courants de lignes et les courants de phase est :

$$\bar{I}_k = 2\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{q}\right) e^{-j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{q}\right)} \bar{J}_{k,k-1}$$

En régime sinusoïdal équilibré inverse, la relation entre les courants de lignes et les courants de phase reste la même mais le déphasage est en avance $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{q}\right)$.

Remarque

Il existe qu'un seul type de tensions car la d.d.p entre deux bornes de sorties ou d'entrées est la même que la f.é.m ou d.d.p dans les sources ou charges polyphasées respectivement.

I.3. Puissances des systèmes polyphasés équilibrés

Soit un système polyphasé équilibré direct monté en étoile à tensions simples $\left(v_1(t), v_2(t), \dots, v_q(t)\right)$ sinusoïdales et de courants de lignes $\left(i_1(t), i_2(t), \dots, i_q(t)\right)$ comme suit :

$$\begin{cases} v_1(t) = \sqrt{2}VCos(\omega t) \\ v_2(t) = \sqrt{2}VCos\left(\omega t - \frac{2\pi}{q}\right) \\ \vdots \\ v_q(t) = \sqrt{2}VCos\left(\omega t - \frac{2(q-1)\pi}{q}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} i_1(t) = \sqrt{2}ICos(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) = \sqrt{2}ICos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \\ \vdots \\ i_q(t) = \sqrt{2}ICos\left(\omega t - \frac{2(q-1)\pi}{q} - \varphi\right) \end{cases}$$

I.3.a. Puissance Instantanée et puissance active

C'est la somme des puissances instantanées des "q" éléments monophasés constituants le système q-phasé : $p(t) = \sum_{m=1}^{q} p_m(t)$

En régime sinusoïdale équilibré,

$$p(t) = qVICos\varphi + \sum_{m=1}^{q} VI\left[Cos\left(2\omega t - \frac{4(m-1)\pi}{m} - \varphi\right)\right] = qVICos\varphi$$

On constate bien que la puissance fluctuante est nulle. Donc la puissance instantanée est constante et égale à la puissance active.

$$P = qVICos\varphi$$

Cette propriété est très importante et donne un fort avantage aux machines électriques polyphasées où le couple développé par ce type de machines est constant. Ce qui n'est pas le cas pour les machines monophasées où la puissance fluctuante non nulle provoque plus de vibration et plus d'échauffement.

I.3.b. Puissance Réactive et Apparente

La puissance réactive d'un système polyphasé est la somme algébrique des puissances réactives des "q" éléments monophasés constituants le système q-phasé : $Q = \sum_{m=1}^{q} Q_m$

En régime équilibré,

$$Q = qVISin\varphi$$

La puissance apparente d'un système polyphasé est la somme en complexe des puissances apparentes des "q" éléments monophasés constituants le système q-phasé : $\bar{S} = \sum_{m=1}^{q} \bar{S}_m$

En régime équilibré,

$$\bar{S} = \sum_{m=1}^{q}(P_m + jQ_m) = P + jQ \quad \text{d'où } S = qVI$$

Le facteur de puissance est définit comme le quotient de la puissance active totale par la puissance apparente totale.

$$f_p = \frac{P}{S}$$

En régime sinusoïdale, le facteur de puissance est : $f_p = cos\varphi$

II. Application aux systèmes usuels

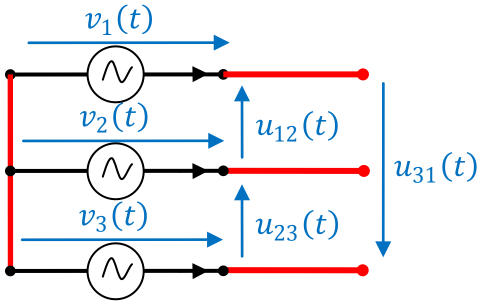
II.1. Systèmes triphasés

C'est le système polyphasé retenu pour la quasi-totalité des emplois. Il est particulièrement utilisé pour le transport de puissance électrique et aux machines électriques industriel.

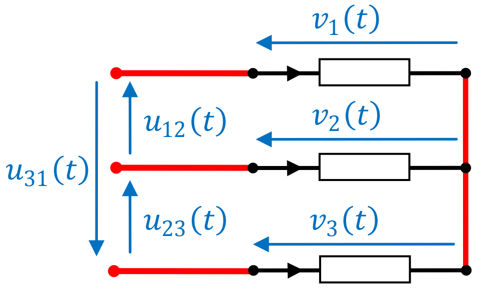
II.1.a.Montage étoile (symbole : Y, λ)

Soit le système de tensions triphasé direct de tensions simples $(v_1(t), v_2(t), v_3(t))$, de tensions composées $(u_{12}(t), u_{23}(t), u_{31}(t))$ et de courants de lignes $(i_1(t), i_2(t), i_3(t))$ (égale aux courant de phase) tel que :

$$\begin{cases} v_1(t) = V_{max}\,Cos(\omega t) \\ v_2(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_3(t) = V_{max}\,Cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases} \text{avec} \begin{cases} u_{12}(t) = v_1(t) - v_2(t) \\ u_{23}(t) = v_2(t) - v_3(t) \\ u_{31}(t) = v_3(t) - v_1(t) \end{cases}$$



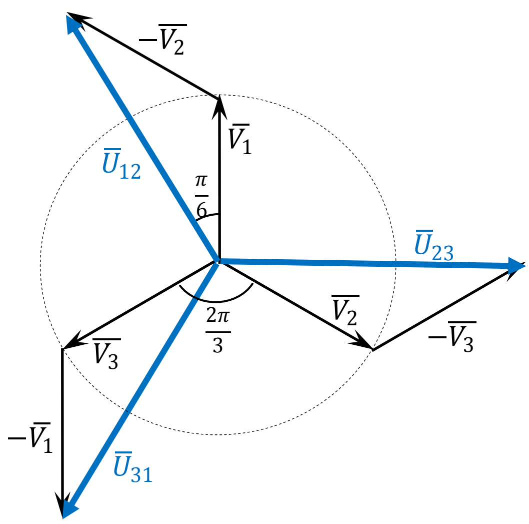
Source triphasée montée en étoile



Impédance triphasée montée en étoile

En régime sinusoïdal équilibré, la relation entre les tensions simples et les tensions composées peut être déduite simplement du diagramme vectoriel suivant :

$$\begin{cases} u_{12}(t) = \sqrt{3}V_{max}\,Cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ u_{23}(t) = \sqrt{3}V_{max}\,Cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ u_{31}(t) = \sqrt{3}V_{max}\,Cos\left(\omega t - \frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$



d'où :

$$U = \sqrt{3}V$$

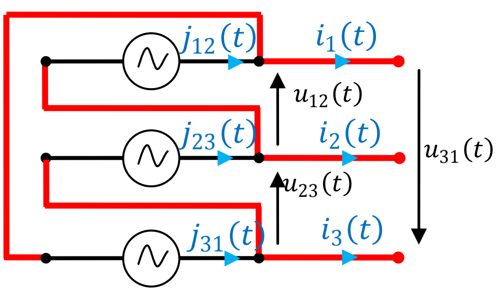
Alors que les puissances :

$$P = 3VICos\varphi = \sqrt{3}UICos\varphi$$
$$Q = 3VISin\varphi = \sqrt{3}UISin\varphi$$
$$S = 3VI = \sqrt{3}UI$$

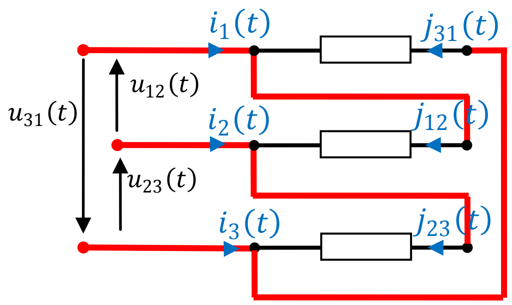
II.1.b. Montage Triangle (symbole : Δ, D)

Soit le système de tensions triphasé direct de tensions composées $\left(u_{12}(t), u_{23}(t), u_{31}(t)\right)$ (égale aux tensions simples), de courants de phases $\left(j_{12}(t), j_{23}(t), j_{31}(t)\right)$ et de courants de lignes $\left(i_1(t), i_2(t), i_3(t)\right)$ tel que :

$$\begin{cases} u_{12}(t) = U_{max}\, Cos(\omega t) \\ u_{23}(t) = U_{max}\, Cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_{31}(t) = U_{max}\, Cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} j_{12} = J_{max}\, Cos(\omega t - \varphi) \\ j_{23} = J_{max}\, Cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \\ j_{31} = J_{max}\, Cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} i_1(t) = j_{12}(t) - j_{31}(t) \\ i_2(t) = j_{23}(t) - j_{12}(t) \\ i_3(t) = j_{31}(t) - j_{23}(t) \end{cases}$$



Source triphasée montée en triangle



Impédance triphasée montée en triangle

En régime sinusoïdal équilibré, la relation entre les courants de phase et les courants de ligne peut être déduite simplement du diagramme vectoriel suivant :

$$\begin{cases} i_1(t) = \sqrt{3} J_{max}\, Cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6} - \varphi\right) \\ i_2(t) = \sqrt{3} J_{max}\, Cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6} - \varphi\right) \\ i_3(t) = \sqrt{3} J_{max}\, Cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{2} - \varphi\right) \end{cases}$$

d'où :

$$I = \sqrt{3} J$$

Alors que les puissances :

$$P = 3UJCos\varphi = \sqrt{3} UICos\varphi$$

$$Q = 3VJSin\varphi = \sqrt{3} UISin\varphi$$

$$S = 3VJ = \sqrt{3} UI$$