PLAN

1. **Introduction**
2. **Rappel : La Statique**
3. **Théories élémentaires de la Résistance Des Matériaux « RDM »**
4. **Torseur des efforts intérieurs-Notion de contraintes**
5. **Traction simple – Compression simple**
6. **Cisaillement simple**
7. **Torsion des poutres circulaires**
8. **Flexion simple**
9. **Flambement**

I- Généralités

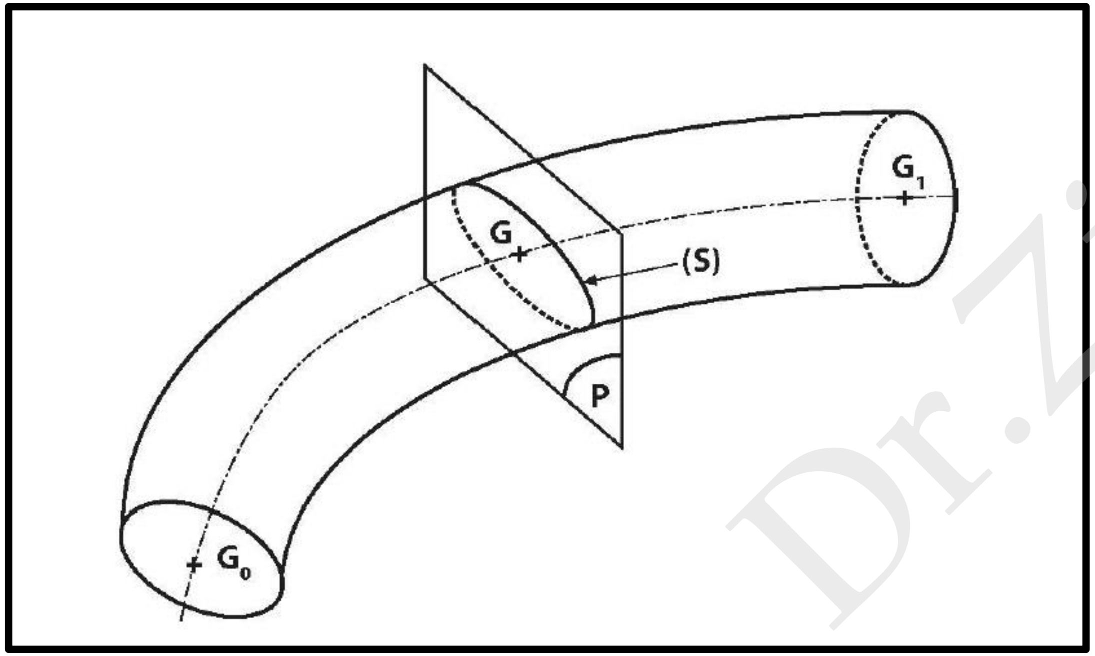
- Savoir étudier le comportement d'une structure de type « poutre » sous des actions (simples):
  - Calcul des contraintes
  - Calcul des déformations et déplacements

- Dans le but de les dimensionner / vérifier :
  - Actions connues + efforts/déplacements admissibles → problème de dimensionnement
  - Dimensions connues + actions connues → problème de vérification

- Il existe des restrictions qui portent sur **la géométrie** du solide étudié, **le matériau** dont il est constitué, et dans une moindre mesure **les liaisons** et les **efforts extérieurs**.

II- Notion de poutre

Une poutre est un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre d'inertie géométrique G décrit une courbe G0G1, le plan de (S) restant normal à la courbe G0G1.

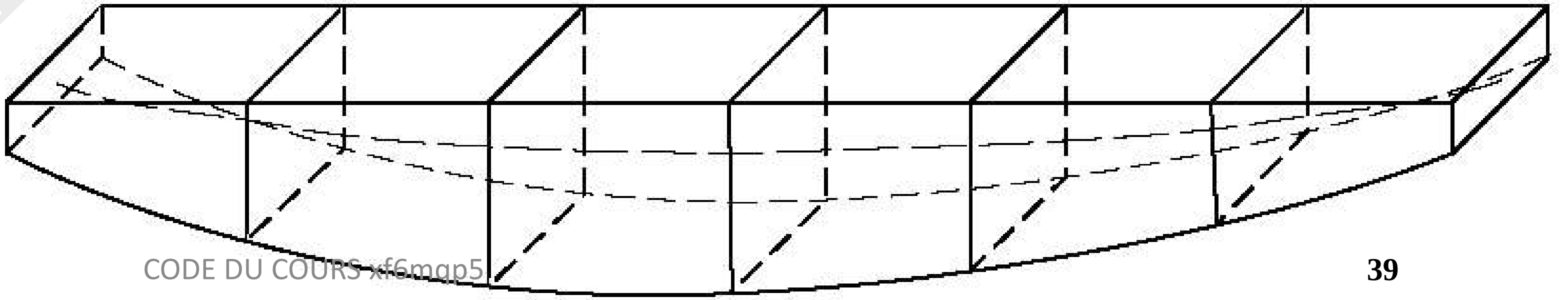


- L'aire (S) est appelée **section droite** de la poutre.
- La courbe $G0G1$est appelée **fibre moyenne** de la poutre.
- Le volume engendré le long de $G0G1$ par un petit élément dS de la surface (S) porte le nom de fibre.

- Une ***poutre gauche*** est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe gauche.
- une ***poutre plane*** est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe plane;
- une ***poutre droite*** est une poutre dont la fibre moyenne est un segment de droite orienté.
- Une **poutre à plan moyen** est une poutre plane dont un plan de la fibre moyenne est un plan de symétrie, appelé plan moyen de la poutre.

- Dans certains cas, le centre d'inertie peut dans de nombreux cas être confondu avec le centre de gravité.
- Si l'aire (S) est supposée constante; la poutre est alors dite de **section constante**.
- Si l'aire (S) varie lorsque son centre de gravité décrit la fibre moyenne; la poutre est alors dite de **section variable**, et l'on supposera que la section varie continument le long de la fibre neutre.

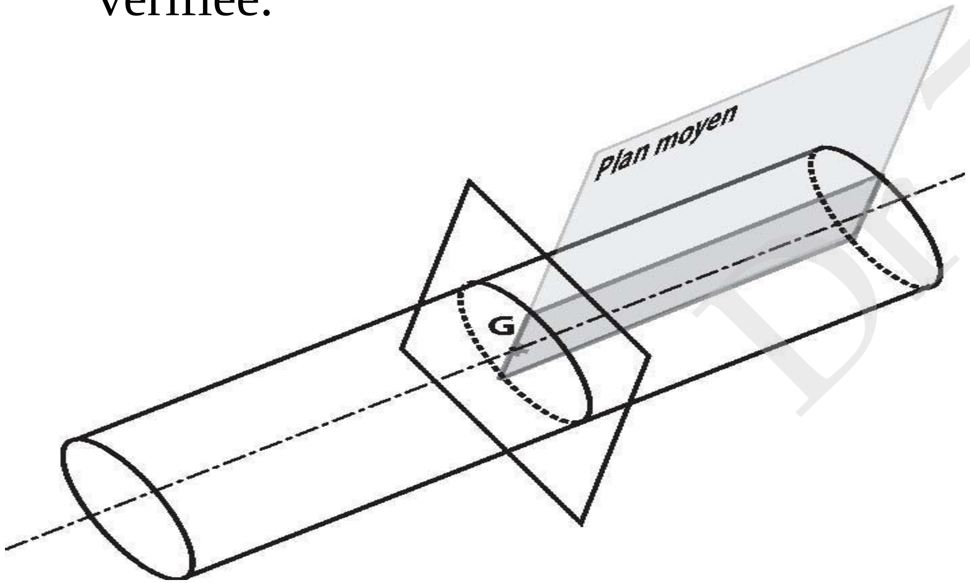
Exemple de Poutre à section variable



THÉORIES ÉLÉMENTAIRES DE « RDM »

De plus il faut que certaines propriétés géométriques soient vérifiées:

- le rayon de courbure de la ligne moyenne est grand par rapport à la plus grande dimension transversale de la section droite (rapport supérieur à 5);
- la longueur de la ligne moyenne est grande par rapport à la plus grande dimension transversale de la section droite (rapport supérieur à 5)
- Dans le cas des poutres droites, le rayon de courbure étant infini, la première propriété est naturellement vérifiée.



Dans ce cours on va s'intéresser qu'aux poutres droites à plan moyen

III- Hypothèses sur le matériau

Le matériau, dont est constituée la poutre, est un matériau:

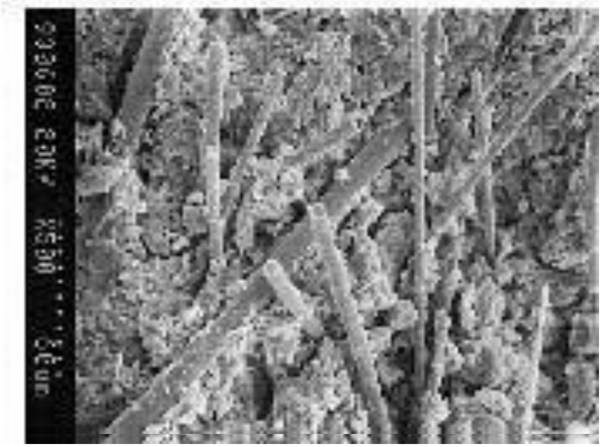
- homogène,
- isotrope,
- élastique linéaire.

1-Homogénéité

- L'homogénéité: un milieu matériel présentent des propriétés constantes dans toute son étendue.
- On peut pas parler de l'homogénéité sans parler d'échelle.
- Un milieu ne peut être considéré comme homogène qu'au-dessus d'une certaine échelle dimensionnelle qui lui est propre.

Béton: lorsqu'on regarde un pilier d'un point suffisamment loin, on le voit comme homogène. Pourtant le béton est un matériau composite de granulats, de ciment, d'eau et d'adjuvants

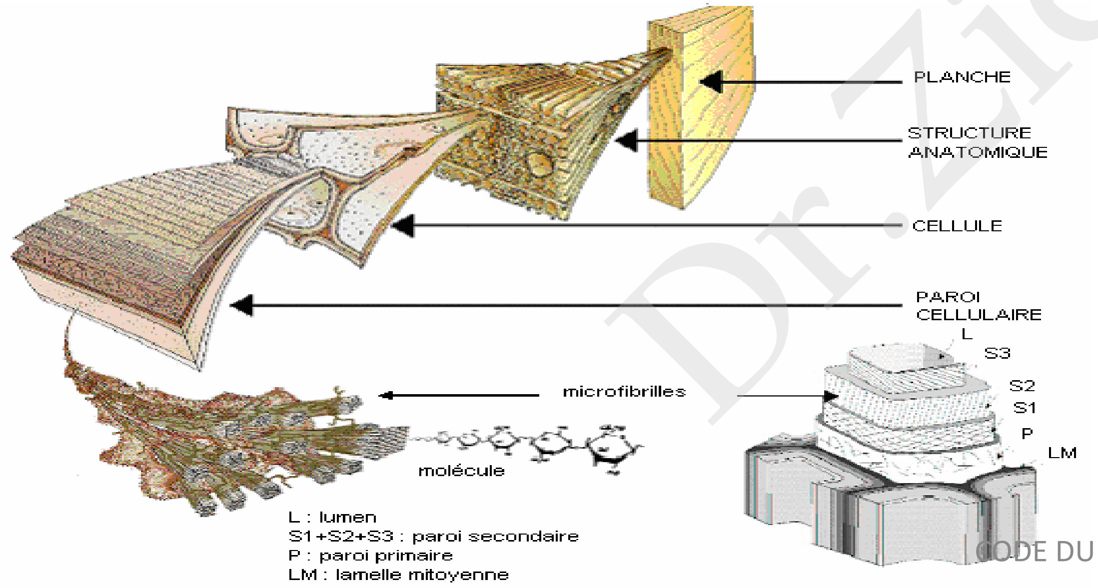


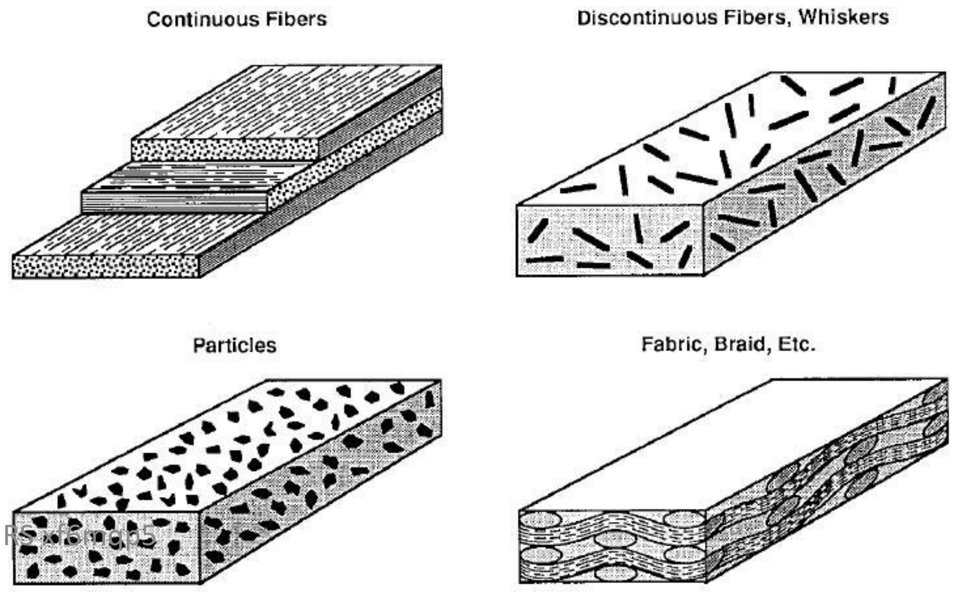


- Si dans un matériau, la répartition spatiale des hétérogénéités est régulière (périodique par exemple) → un matériau homogène équivalent.
- Pour l'étude des poutres, il faudra que la plus grande dimension transversale soit grande (supérieure à 10 fois) par rapport à la dimension de la plus grande hétérogénéité présente dans le matériau (taille des granulats du béton par exemple).
- On peut aussi ajouter qu'en pratique c'est souvent un choix de modélisation de considérer qu'un matériau est homogène.

2- Isotropie

- Un matériau est dit **isotrope** s'il présente les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace. Par exemple, on peut le caractériser par le fait qu'un signal quelconque (son, courant électrique, etc.) peut se propager de la même manière dans toutes les directions.
- Caractéristiques mécaniques des matériaux: un matériau qui possède des fibres ayant une direction privilégiée (comme le bois) → Matériau anisotrope.

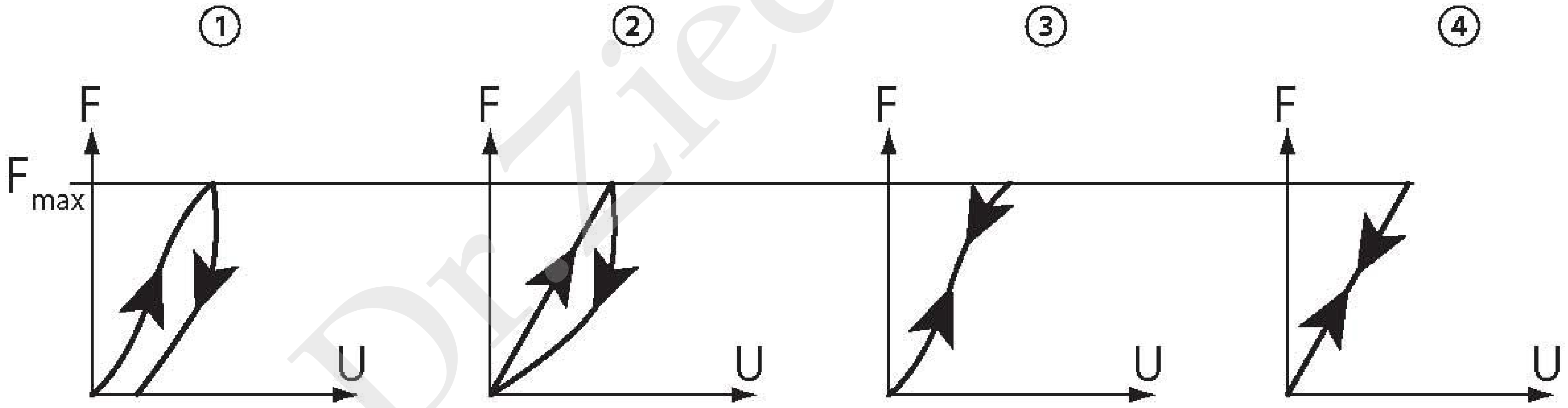




3- Élasticité

Un matériau est dit élastique:

- Retrouve entièrement sa forme ou son volume après avoir subi un cycle de charge/décharge quelconque.
- Au cours du chargement et du déchargement, le matériau ne dissipe aucune énergie → lors du chargement, le chemin suivi sera le même que lors de la décharge.
- L'état actuel du matériau ne dépend donc que des charges appliquées à l'instant considéré et non du chemin suivi.



- Dans le domaine de l'élasticité de la matière, les déformations sont proportionnelles aux contraintes: c'est **La loi de Hooke.**

III- Hypothèses fondamentales de la RDM

1- Hypothèse des petites déformations

On ne considère que la zone de comportement élastique des matériaux:

- Les déformations et déplacements restent petits.
- Les calculs se font à partir de la structure non déformée.

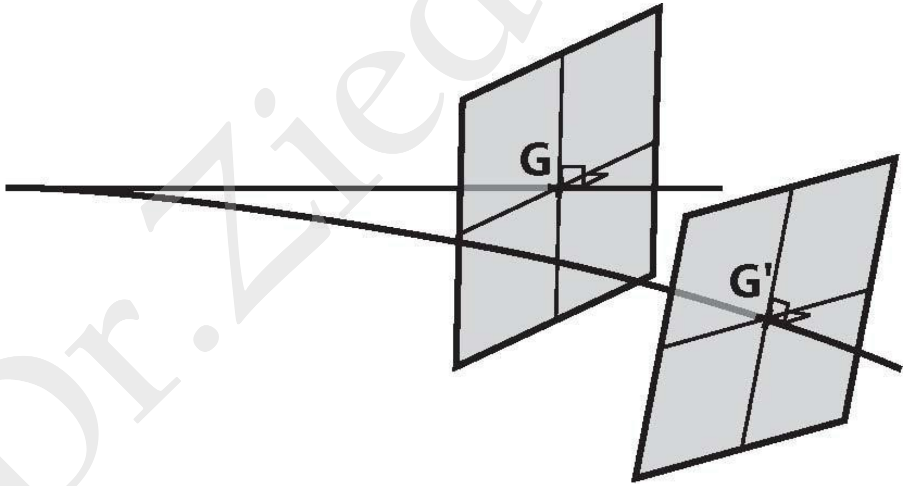
2- Hypothèse de Saint-Venant

Enoncé: Les contraintes (et déformations) dans une section droite éloignée des points d'application d'un système de forces ne dépendent que de la résultante et du moment résultant (au centre de gravité de la section) associés à ce système de forces.

- La conséquence directe de ce principe est que les résultats de la RDM ne s'appliquent qu'à une distance suffisamment loin de la zone d'application des efforts concentrés (problème de concentration de contraintes).
- En pratique on peut considérer que les résultats sont valables à partir d'une distance égale à 2 fois la plus grande dimension transversale.

2- Hypothèse de Navier-Bernoulli

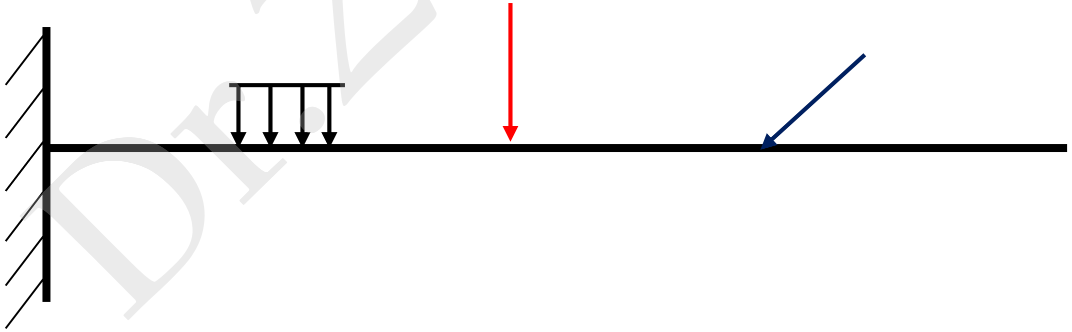
- Les sections normales à la ligne moyenne restent planes et normales à la ligne moyenne pendant la déformation de la poutre.
- Un énoncé souvent plus répandu est de dire que toute section droite (i.e. plane et perpendiculaire à la ligne moyenne) avant déformation reste droite après déformation.



La ligne moyenne se déforme mais les sections droites sont « rigides ».

IV- Principe de superposition

- Pour des structures sous chargement complexe, on décompose les chargements pour traiter des problèmes simples: les contraintes, les déformations et les déplacements liées à chacun des chargements sont additionnés pour obtenir la solution finale par superposition.
- Cette méthode est particulièrement intéressante quand on dispose de solutions établies pour des cas simples dans des traités de RDM.



U=u(1)+u(2)+u(3)

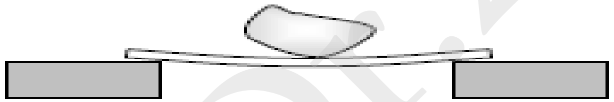
V-Conditions aux limites

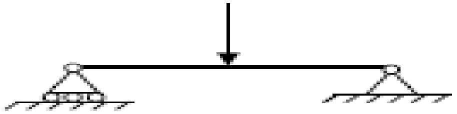
Les conditions aux limites qui s'appliquent sur une poutre sont de deux natures. Celles constituées par les **liaisons** avec l'extérieur, et celles liées à la présence du **chargement**.

1- Efforts extérieurs

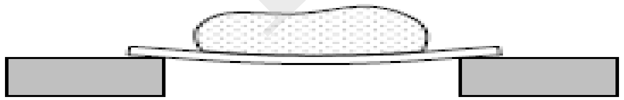
- Les efforts extérieurs sont situés dans le plan de symétrie de la poutre (plan moyen) ou disposés symétriquement par rapport à ce plan.
- Deux types d'actions mécaniques:

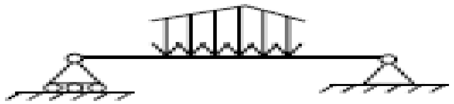
Concentrées





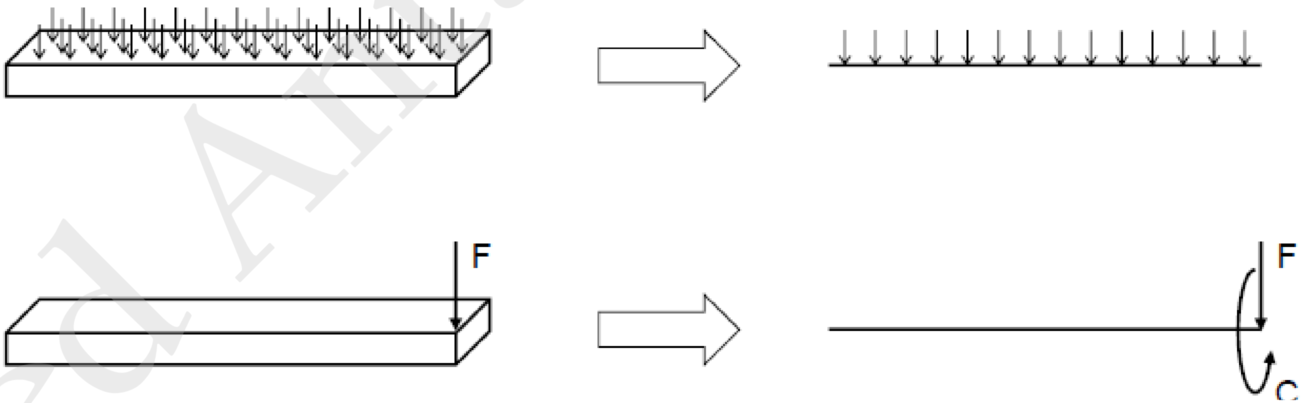
Réparties





➢ Charge équivalente à une charge répartie

Le Chargement doit être ramenée à la ligne moyenne



Une charge uniformément répartie sur une longueur L est globalement équivalente à une force ponctuelle d'intensité « pL » et appliquée au milieu de la poutre

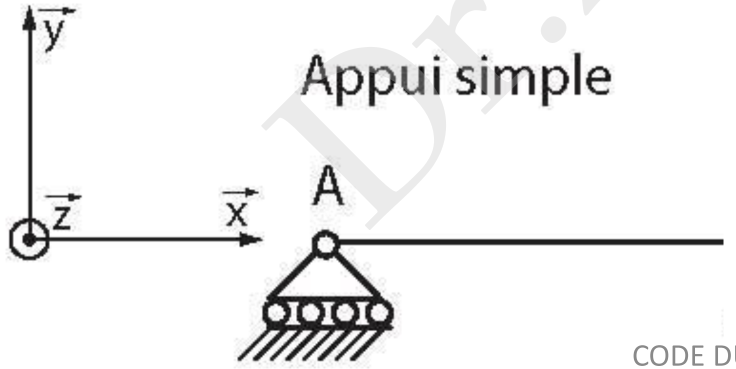
De plus, comme on travaille sur des poutres à plan moyen (plan(x, y)), on supposera alors que la forme générale du torseur des actions mécaniques extérieurs se réduit à:

$$\{\tau_{(Ext\to Poutre)}\} = \begin{Bmatrix} X_G\vec{x} + Y_G\vec{y} \\ L_G\vec{x} + M_G\vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

2- Liaisons

➢ Appui simple

Les mouvements autorisés par l'appui simple sont un déplacement dans la direction x, ainsi que les rotations autour des axes x et z, donc le déplacement bloqué est: v(A)=0

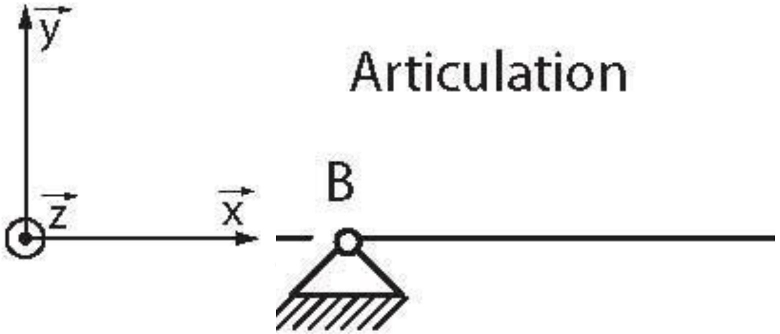


$$\{\tau_{(Ext\to Poutre)}\} = \begin{Bmatrix} Y_A\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Articulation

Les rotations autorisées sont les rotations autour des axes x et z. Les deux déplacements bloqués sont:

$u(B)=0, v(B)=0$



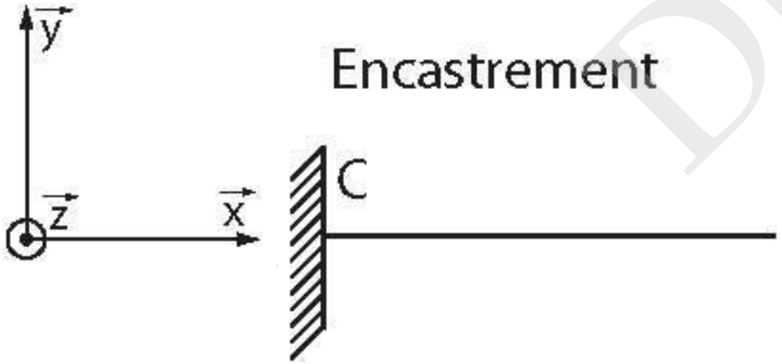
$$\{\tau_{(Ext\rightarrow Poutre)}\} = \begin{Bmatrix} X_B\vec{x} + y_B\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

Encastrement

Cette liaison n'autorise aucun déplacement et aucune rotation.

u(C)=0, v(C)=0

Θ(C)=0, ω(C)=0

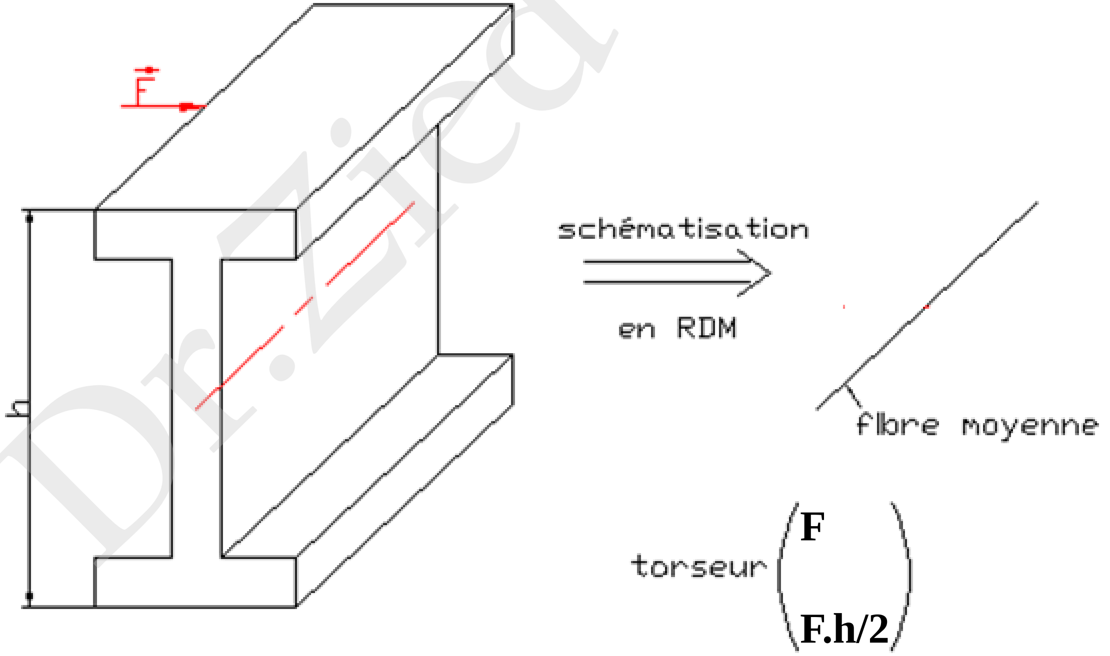


$$\{\tau_{(Ext\rightarrow Poutre)}\} = \begin{Bmatrix} X_C\vec{x} + Y_C\vec{y} \\ L_C\vec{x} + N_C\vec{z} \end{Bmatrix}_C$$

VI-Schématisation en RDM

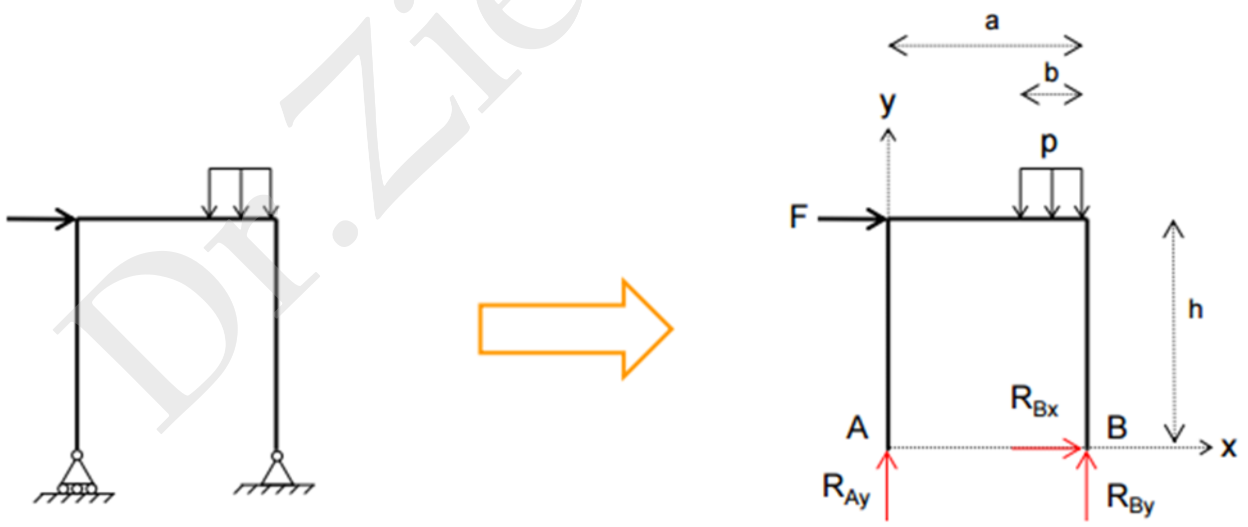
➡ **Le chargement doit être ramenée au niveau de la ligne moyenne**

Ces charges extérieures sont connues (données, décrit dans le cahier des charges, …). Elles sont définies par leur torseur ramené à la fibre moyenne.



Règles de schématisation

- Poutre → Schématisée par sa ligne moyenne (fibre moyenne)
- Actions de liaison → Schématisées par les composantes de réactions
- Actions extérieures → Schématisées par les forces réparties/concentrées ramenées à la ligne moyenne
- Repère de référence à représenter (car convention de signe pour les composantes de réaction)
- Il est recommandé de reporter les indications de longueurs



VI-Notion d'iso/hyper statisme

- Isostatique → Le PFS suffit à déterminer les inconnues statiques
- Hyperstatique de degré n → n équations supplémentaires sont nécessaires
- En Pratique:

•structure isostatique: libérer un ddl → instabilité.

•structure hyperstatique → on peut libérer jusqu'à n ddl et rester stable.

Si l'on travaille dans le plan (cadre de ce cours) alors nous avons pour équations :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{n = Nr - Ne}$$

Ne : nombre d'équations (pour un solide dans le plan, Ne=3)
Nr : nombre de composantes de réaction
n : degré d'hyperstaticité

n = 0 → isostatique (cadre de ce cours)

n < 0 → hypostatique, instable (pb. insoluble)