École Nationale des Sciences et Technologies Avancées à Borj-Cedria

Section : 1TA1 1TA2 1TA3	Niveau : 1ère année	Matière : Probabilités
Date : 21 Novembre 2020	Durée : 1H30	Nombre de pages : 2

Exercice 1

Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ une fonction intégrable pour la mesure μ.

1. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\mu(\{|f| \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_{\mathcal{X}} |f| d\mu.$$

2. a) Montrer que $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$
   (Il suffit d'écrire l'ensemble $\{|f| = +\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{|f| > n\}$).
   b) Enoncer le Théorème de convergence dominé.
   c) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathcal{X}} |f| I_{\{|f| > n\}} d\mu \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

3. Soit $\alpha > 0$, on pose pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $n > 0$, $f_n(x) = n^{-\alpha} f(nx)$.
   a) montrer que f_n est mesurable.
   b) Montrer que f_n converge vers 0 en mesure.
4. Si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est la fonction indicatrice donnée par $f(x) = I_{[0,1]}(x)$.
   a) En déduire que f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ et que f_n converge en mesure vers 0.
   b) Calculer $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et étudier sa convergence.
   c) Etudier la convergence de $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\lambda$.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers appartenant à $\{1, \cdots, n\}$ et premier avec n. Si $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_4^{\alpha_4}$ est la factorisation de n en produit de facteurs premier, on se propose de démontrer que l'on a $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{2}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_1})$
Soit $\Omega = \{1, \cdots, n\}$, muni de la probabilité uniforme.

1. Si d est un diviseur de n, on note D_d l'ensemble des multiples d dans Ω. Calculer $\mathbb{P}(D_d)$.

2. On rappelle que n événements $A_1, \cdots, A_n$ sont dit mutuellement indépendants si, pour toute famille finie I de $\{1, \cdots, n\}$ on a :

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i).$$

Montrer que si $p_1, \cdots, p_r$ sont les facteurs premiers de n. alors les événements $D_{p_1}, \cdots, D_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3. En déduire la formule annoncée.

Exercice 3

Le produit de convolution $f * g$ de deux fonctions f et g est défini par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

1. Montrer que le produit de convolution est commutatif : $f * g = g * f$.
2. On note $g_a(x) = e^{-ax^2}$ et $g_b(x) = e^{-bx^2}$.
   a) calculer $g_a * g_b(x)$.
   b) En déduire $\|g_a * g_b\|_1$.
3. Montrer que $g_a * g_b$ est dérivable et donner sa dérivée.

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$.