Cours Recherche Opérationnelle

Lazhar TLILI

1

Plan du cours RO

- **Chapitre 1:** Programmation linéaire
- **Chapitre 2:** Méthode du simplexe
- **Chapitre 3:** Dualité
- Chapitre 4: Théorie des graphes - Concepts de base
- **Chapitre 5:** Problème du Plus Court Chemin
- **Chapitre 6:** Problème de Planification de projet
- **Chapitre 7:** Problème du flot maximal

2

Chapitre 1
La Programmation Linéaire

3

Plan

- Introduction générale
  - Recherche opérationnelle
  - Programmation mathématique
- Exemple de formulation de programme linéaire (PL)
- Résolution graphique d'un PL à deux variables

Lazhar Tlili 4

4

Introduction générale

- Recherche opérationnelle

- ensemble de méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche de la meilleure façon d'opérer des choix en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.
- Elle fait partie des "aides à la décision" dans la mesure où elle propose des modèles conceptuels pour:
  - analyser
  - maîtriser des situations complexes

→ permettre aux décideurs de comprendre et d'évaluer les enjeux et d'arbitrer et/ou de faire les choix les plus efficaces.

Introduction générale

Ce qui revient à:

→ construire un « modèle » de la réalité,

→ de déterminer la « décision » permettant d'optimiser (minimiser ou maximiser) une certaine « fonction économique »,

→ en présence de « contraintes » multiples.

❖ Démarche de RO

Problème → Modélisation → Résolution du problème

Introduction générale

- Programmation mathématique

- La programmation mathématique est la technique de la (RO) basée sur des modèles mathématiques.

- Elle met en jeu :
  (1) une fonction objectif,
  (2) des variables de décision à déterminer
  (3) des contraintes à respecter.

Introduction générale

- Programmation linéaire

La **programmation linéaire** constitue la branche de la programmation mathématique pour laquelle toutes les fonctions du modèle (fonction objectif et contraintes) **sont linéaires**.

Modélisation d'un programme linéaire

Modéliser un probléme consiste à:

- Nommer les variables de décision (inconnues)
- Déterminer la fonction objectif visée (optimisation: maximisation ou minimisation), ou fonction économique.
- les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables

Modélisation d'un programme linéaire

- Par exemple, si une usine fabrique deux produits P1 et P2, avec des ressources limitées.

La question qui se pose:

Quelle quantité doit-on fabriquer de chaque produit afin de maximiser le profit total tout en respectant la contrainte de disponibilité des ressources?

Modélisation d'un programme linéaire

Pour résoudre ce problème, il faut procéder en 2 étapes:

- **1ère étape: Formulation du problème**
- **2 ème étape: La résolution**

Modélisation d'un programme linéaire

- **1ère étape: Formulation du problème**

Il s'agit de traduire le problème considéré sous forme d'un problème mathématique.

Pour cela, il faut:

a) Identifier les variables du problèmes (Variables de décision)

Exemple: quantité à fabriquer de chaque produit

b) Définir la fonction objectif: c'est une fonction mathématique qui traduit l'objectif du problème

Exemple: maximiser le profit ou minimiser les coûts

c) Définir les contraintes du problème: qui sont généralement exprimées sous forme d'équations et inéquations mathématiques.

Exemple: Nombre d'heures de travail disponibles, Quantité de matières premières disponible.

Modélisation d'un programme linéaire

- **2 ème étape: La résolution**

Il s'agit de chercher la (ou les) solution (s) optimale (s) du problème, en utilisant la méthode de résolution la plus adéquate au type de problème considéré (nature des variables, linéarité de la fonction objectif,...)

Solution optimale: c'est la solution qui permet d'obtenir la meilleure valeur possible pour la fonction objectif tout en respectant les contraintes du problème.

Exemple de formulation d'un PL

- On considère une entreprise qui fabrique 2 produits, P1 et P2 vendus respectivement à 27 D et 21 D la pièce.
- Pour fabriquer P1, on doit utiliser l'équivalent de 10 D de matières premières et de 14 D de main d'œuvre, pour chaque pièce.
- Pour P2, on a besoin de l'équivalent de 9D de MP et de 10 D de MO, par pièce.
- La fabrication de ces deux articles nécessite l'exécution de 2 opérations.
- Pour la 1ére opération, on a besoin d'une heure de travail pour chaque pièce de P1 et une heure de travail pour chaque pièce de P2.
- Pour la 2ème opération, on a besoin de 2 h de travail pour chaque pièce de P1 et 1h de travail pour chaque pièce de P2.
- Chaque semaine, l'entreprise peut obtenir toute la quantité de la MP dont elle a besoin.
- Cependant, elle peut investir chaque semaine uniquement 90h pour la 1ère opération et 100h de travail pour la 2ème opération.
- La demande pour le 1er produit P1 est non limitée, mais pour P2, la quantité maximale qui peut être vendue chaque semaine est de 40 pièces.

Déterminer le problème mathématique qui permettra de maximiser le profit total de cette entreprise.

Exemple de formulation d'un PL

On considère une entreprise qui fabrique 2 produits, P1 et P2 vendus respectivement à 27 D et 21 D la pièce.
Pour fabriquer P1, on doit utiliser l'équivalent de 10 D de matières premières et de 14 D de main d'œuvre, pour chaque pièce.
Pour P2, on a besoin de l'équivalent de 9D de MP et de 10 D de MO, par pièce.
La fabrication de ces deux articles nécessite l'exécution de 2 opérations.
Pour la 1ére opération, on a besoin d'une heure de travail pour chaque pièce de P1 et une heure de travail pour chaque pièce de P2.
Pour la 2ème opération, on a besoin de 2 h de travail pour chaque pièce de P1 et 1h de travail pour chaque pièce de P2.
Chaque semaine, l'entreprise peut obtenir toute la quantité de la MP dont elle a besoin.
Cependant, elle peut investir chaque semaine uniquement 90h pour la 1ère opération et 100h de travail pour la 2ème opération.
La demande pour le 1er produit P1 est non limitée, mais pour P2, la quantité maximale qui peut être vendue chaque semaine est de 40 pièces.

Déterminer le problème mathématique qui permettra de maximiser le profit total de cette entreprise.

Modélisation d'un programme linéaire

- Variables de décision
x1: quantité à fabriquer chaque semaine pour le produit P1
x2: quantité à fabriquer chaque semaine pour le produit P2

- Fonction objectif:
Objectif : maximiser le profit total

Fonction objectif: z(x) = profit total
$= (27-10-14)x1+(21-9-10)x2$
$z(x) = 3\,x1 + 2\,x2$

→ Fonction objectif: max z(x) = 3 x1 + 2 x2

Modélisation d'un programme linéaire

- Contraintes:

Disponibilité des ressources

1ère opération: max =90h/semaine → $x1 + x2 \leq 90$

2ème opération: max= 100 h/semaine → $2x1 + x2 \leq 100$

Volume des ventes:

Pour P2: max =40 pièces/semaine → $x2 \leq 40$

Restriction de signe:

Variables positives ou nulles: → $x1 \geq 0;\ x2 \geq 0$

Modélisation d'un programme linéaire

- En résume, ce problème de production se modélise sous la forme d'un programme linéaire :

$$\rightarrow (PL) \left\{ \begin{array}{ll} \max\ z(x) = 3\,x1 + 2\,x2 & \\ \text{s.c} \quad x1 + x2 \leq 90 & \\ \quad 2x1 + x2 \leq 100 & \\ \quad x2 \leq 40 & \\ \quad x1 \geq 0;\ x2 \geq 0 & \end{array} \right.$$

- 2ta12024enstab@gmail.com (TA 1)
- ~~enstab.ta1@gmail.com (TA 2)~~
- 2ta3.2023@gmail.com (TA 3)

Résolution

❖ **Solution réalisable:** on appelle solution réalisable ou admissible d'un problème donné, toute solution qui répond à toutes les contraintes.

❖ **Domaine réalisable:** c'est l'ensemble de toutes les solutions réalisables du problème considérées.

Exemple: (20,50) $\notin$ DR; (20,40) $\in$DR.

❖ **Solution optimale:** Pour un problème de maximisation (resp. un problème de minimisation) une solution optimale est une solution du DR qui donne la valeur la plus large possible (resp. la plus faible possible) de la fonction objectif.

Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)

- Pour résoudre un PL **à 2 variables** avec la méthode graphique, il faut:

- Représenter les droites qui définissent les contraintes et en déduire le domaine réalisable DR.

- Représenter la fonction objectif par une droite appelée **droite d'Isoprofit**.

- Déplacer cette droite dans le sens qui permet d'améliorer la valeur de la fonction objectif. Le **dernier point du DR** touché par cette droite, est un point optimal.

Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)

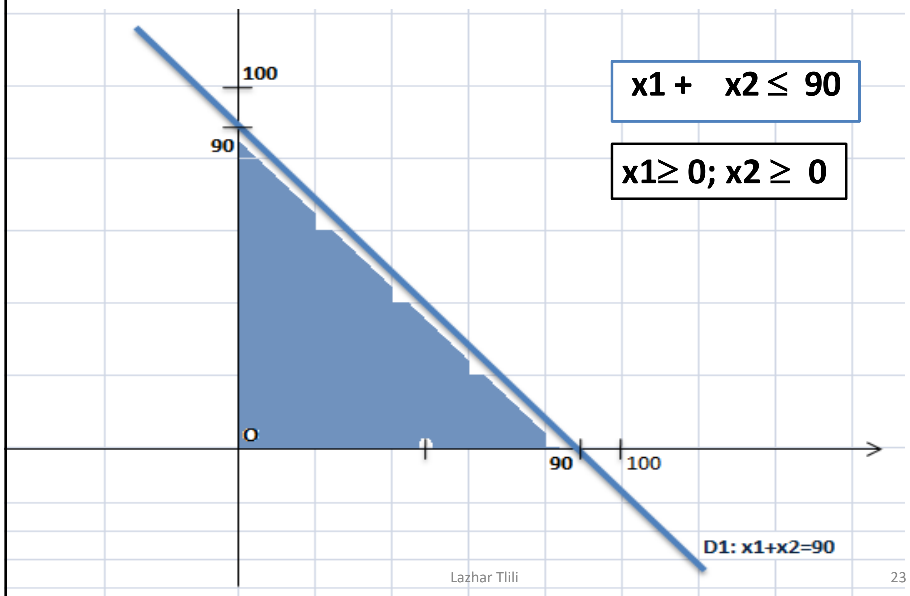
Exemple: Résoudre graphiquement le PL suivant:

$$\boxed{\begin{array}{lrl} \max\ z(x) = & 3x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.c} & x_1 + x_2 & \leq 90 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 100 \\ & x_2 & \leq 40 \\ & x_1 \geq 0;\ x_2 & \geq 0 \end{array}}$$

Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)

$x1 + \quad x2 \leq 90$

$x1 \geq 0; x2 \geq 0$

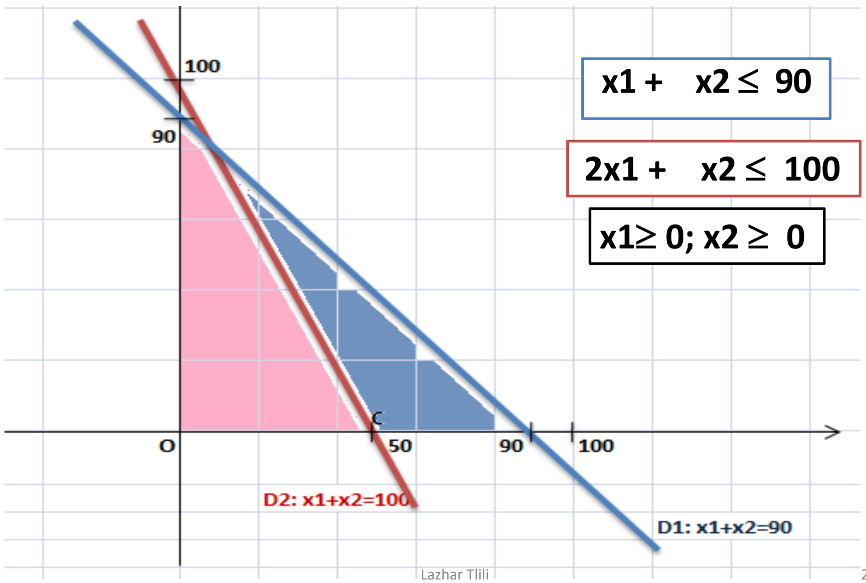


Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)

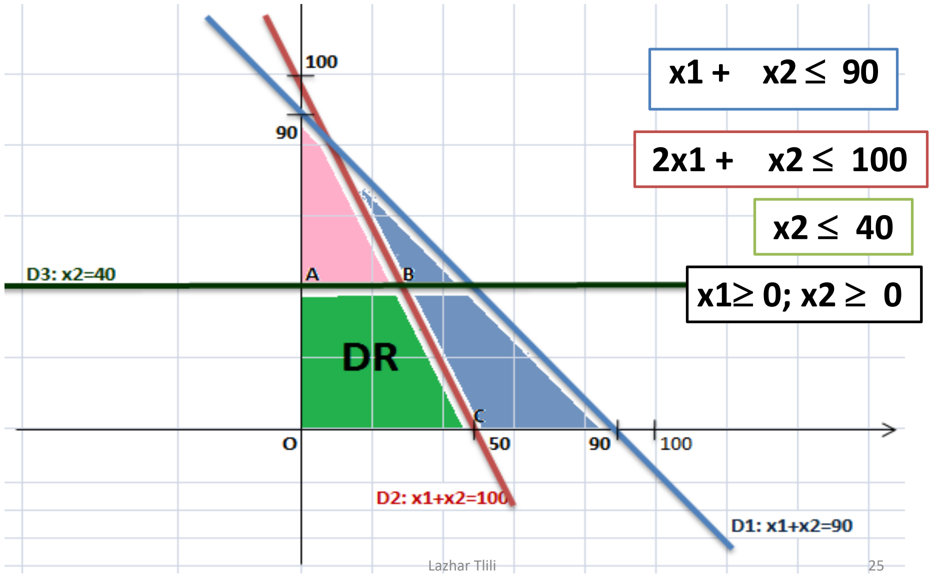
$x1 + \quad x2 \leq 90$

$2x1 + \quad x2 \leq 100$

$x1 \geq 0; x2 \geq 0$

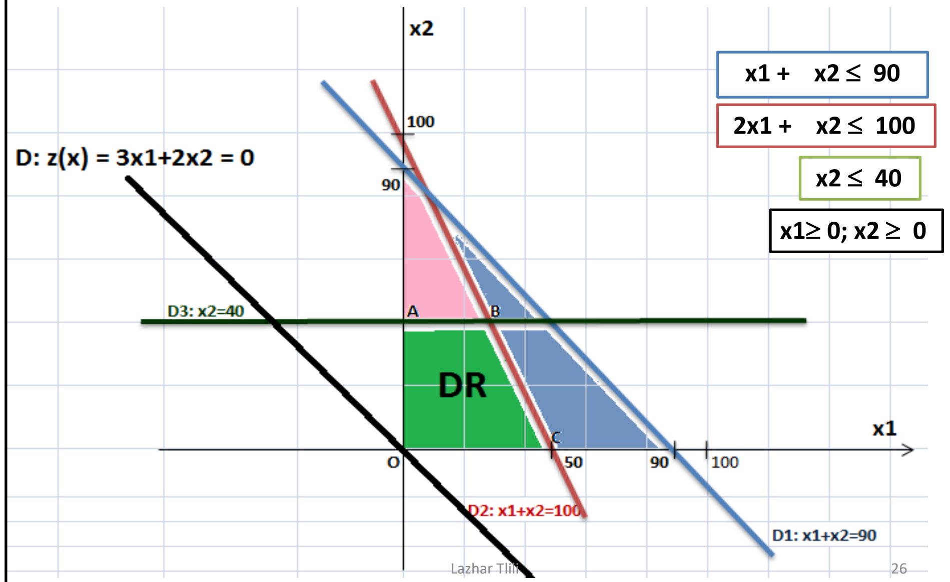


Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)



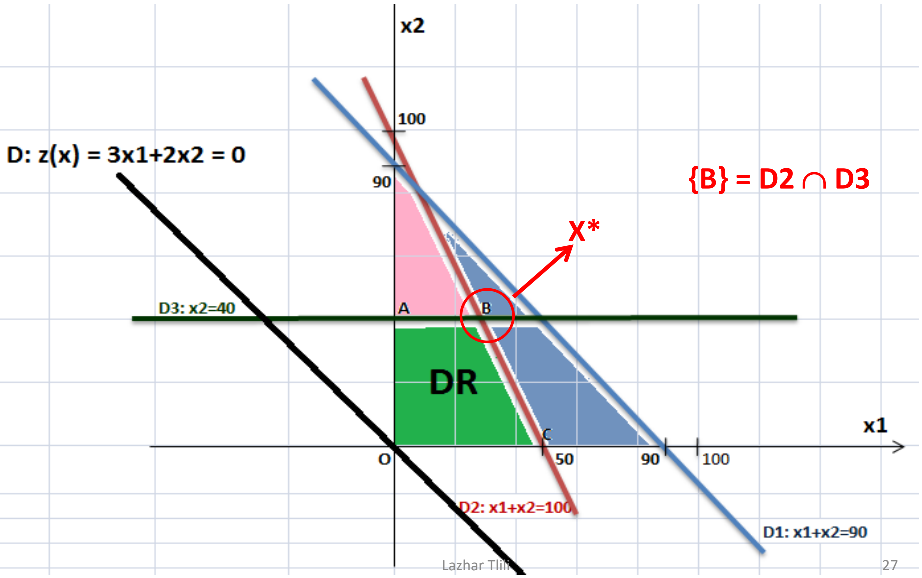
25

Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)



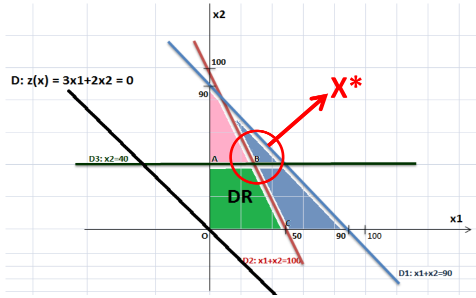
26

Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)



Lazhar Tlili 27

Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)



$\{B\} = D2 \cap D3 \quad \begin{cases} 2x1 + x2 = 100 \\ x2 = 40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x1 = 30 \\ x2 = 40 \end{cases}$

O (0,0)	→ z(x) = 0
A(0.40)	→ z(x) = 80
B(30,40)	→ z(x) = 170
C(50,0)	→ z(x) = 150

→ $\boxed{X^* = (30,40) \text{ et } z^*(x) = 170}$

Lazhar Tlili 28

Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)

❖ Cas particulier de PL

$$\begin{array}{lrl} \min\ z(x) = & 3x + 2y & \\ \text{s.c} & 3x + 2y & \leq 120 \\ & x + y & \leq 50 \\ & x & \geq 30 \\ & y & \geq 20 \\ & x \geq 0;\ y \geq 0 & \end{array}$$

Construire le graphe!

Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)

❖ Cas particulier de PL

- PL non bornés

$$\begin{array}{lrl} \max\ z(x) = & x1 + 2x2 & \\ \text{s.c} & 7x1 + 2x2 & \geq 28 \\ & x1 + 6x2 & \geq 12 \\ & x1 \geq 0;\ x2 \geq 0 & \end{array}$$

Construire le graphe!

Résolution graphique d'un PL (à 2 variables)

❖ **Cas particulier de PL**

$$\begin{array}{llll} \max & z(x) = 3x + 2y & & \\ \text{s.c} & 3x + 2y \leq 120 & & \\ & x + y \leq 50 & & \\ & x \geq 0;\ x \geq 0 & & \end{array}$$

Construire le graphe!

Exercice

- Considérons le problème suivant
  Maximiser $Z=-2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5$

- **Sous les contraintes**
  - $-2x_3 - x_4 + x5 = 4$
  - $-x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8$
  - $x_1 + x_3 + x_4 = 6$

    $x_j \geq 0$, pour tout j

- $x_5 = 4 + 2x_3 + x4$
- $x_2 = 4x_3 + 2x_4 - 8$
- $x_1 = 6 - x_3 - x_4$

Remplaçant x_1 , x_2 et x_3 par leurs expression dans fa fonction objectif Z, on obtient la nouvelle expression de Z :

- **Maximiser** $Z = - x_3 + 3 x_4$

- $x_5 = 4 + 2x_3 + x4$
- $x_2 = 4x_3 + 2x_4 - 8$
- $x_1 = 6 - x_3 - x_4$

Sachant $x_j \geq 0$ pout tous *j*, donc les contraintes seront comme suit :

(1) : $- 2x_3 - x_4 \leq \mathbf{4}$

(2) : $4x_3 + 2x_4 \geq 8$

(3) : $x_3 + x_4 \leq 6$

Exercice 4

On annonce à la gérante d'une charcuterie qu'elle dispose de 112 Kg de mayonnaise dont 70 Kg seront bientôt périmés. Pour écouler cette mayonnaise, elle a décidé de l'utiliser pour préparer une mousse au jambon et une autre aux épices. Les mousses sont préparées par lots. Un lot de mousse au jambon nécessite 1.4Kg de mayonnaise contre 1Kg pour la mousse aux épices. La gérante reçoit une commande de 10 lots de mousse au jambon et 8 aux épices. Elle désire garder (au moins) 10 lots par type pour la vente locale.

Chaque lot coûte 3Dt à préparer et se vend à 5Dt le lot au jambon et 7Dt aux épices.

Formuler le problème pour maximiser le profit de la gérante.

35

Correction

- F.O : **max Z = max ((5-3)X+(7-3)Y)**

  =max (2 X + 4 Y)

Sc:

$1,4\ X + Y \leq 112$

$1,4\ X + Y \geq 70$

$X \geq 20$

$Y \geq 18$

$X, Y \geq 0$

Lazhar Tlili 36

36