Chapitre 4

Vecteurs aléatoires

On généralise les notions introduites précédament aux variables aléatoires multidimentionnelles qu'on appelle vecteurs aléatoires.

4.1 Généralité

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité $(E_1, \mathcal{B}_1), \cdots, (E_n, \mathcal{B}_n)$ n espaces mesurables et $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires de Ω à valeurs respectivement dans $E_1, \cdots, E_n$.

Un vecteur aléatoire est une fonction X qui à chaque éventualité fait correspondre un vecteur de l'espace produit $E = E_1 \times \cdots E_n$ munin de la tribu produit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_n$:$X : \omega \in \Omega \longmapsto X(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$.OnnoteX=$(X_1, \cdots, X_n)$. Eventuellement X est une variable aléatoire de dimension n. En effet, X est mesuable si et seulement si les variables aléatoires X_i le sont. Les composantes de vecteur X (les X_i) sont appelées variables aléatoires marginales.

***Théorème 4.1.1** (Fubini-Tonelli)*
Soient $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces mesurables, et soient μ_1, μ_2 deux mesures $\sigma-$ finies sur respectivement $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}_2)$.
Soit $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2-$mesurable. Alors :

(a) $\forall y \in E_2$, $x \longmapsto f(x,y)$ est mesurable sur $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $y \longmapsto \int_{E_1} f(x,y)\mu_1(dx)$ est mesurable sur $(E_2, \mathcal{B}_2)$.

(b) $\forall x \in E_1$, $y \longmapsto f(x,y)$ est mesurable sur $(E_2, \mathcal{B}_2)$ et $x \longmapsto \int_{E_2} f(x,y)\mu_2(dy)$ est mesurable sur $(E_1, \mathcal{B}_1)$.

(c) De plus, on a :

$$\int_{E_1 \times E_2} f(x,y)\mu_1 \otimes \mu_2(dx,dy) = \int_{E_1} (\int_{E_2} f(x,y)\mu_2(dy))\mu_1(dx) = \int_{E_2} (\int_{E_1} f(x,y)\mu_1(dx))\mu_2(dy)$$

Ce théorème s'applique dans le cas d'une fonction à n variables. Dans le cas où f n'est pas à valeurs positives, on doit s'assurer que $|f|$ est intégrable, ce qui peut être vérifié en appliquant le théorème précent de Fubini-Tonelli. On peut alors appliquer le théorème suivant aux fonctions intégrables :

***Théorème 4.1.2** (Fubini) Soient $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces mesurables, et soient μ_1, μ_2 deux mesures $\sigma-$ finies sur respectivement $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}_2)$.*
Soit $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors :

(a) $x \longmapsto f(x,y)$ est intégrable (sur E_1) et $y \longmapsto \int_{E_1} f(x,y)\mu_1(dx)$ est intégrable (sur E_2).

(b) $y \longmapsto f(x,y)$ est intégrable (sur E_2) et $x \longmapsto \int_{E_2} f(x,y)\mu_2(dy)$ est intégrable (sur E_1).

(c) De plus, on a :

$$\int_{E_1 \times E_2} f(x,y)\mu_1 \otimes \mu_2(dx,dy) = \int_{E_1} (\int_{E_2} f(x,y)\mu_2(dy))\mu_1(dx) = \int_{E_2} (\int_{E_1} f(x,y)\mu_1(dx))\mu_2(dy)$$

Dans le cas particulier des fonctions boréliennes, on a le corollaire suivant :

***Corollaire 4.1.1** (Fubini-Tonelli pour les fonctions boréliennes) Soit m, n deux entiers et Soit $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction borélienne telle que $|f|$ est intégrable. Alors on a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f d\lambda_{m+n} &= \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n) d\lambda_m \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m) d\lambda_n \end{aligned}$$

Rappelons que pour tout entier $n > 0$, λ_n est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Des fois , en pratique, pour calculer une intégrale multiple, on est souvent amené à faire un changement de variables pour se ramener à une intégrale plus simple à la quelle on peut appliquer le théorème de Fubini. Pour faire un changement de variable, il faut utuliser des fonctions qui sont des difféomorphismes de classe C^1. Rappelons la définition d'un difféomorphisme de classe C^1 :

***Définition 4.1.1** Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $\varphi : U \longrightarrow V$ est un difféomorphismes de classe C^1 (on dit aussi un C^1-difféomorphisme) si :*

(a) φ *est une bijection de* U *sur* V.

(b) φ *est de classe* C^1 *(c.à d. les dérivées premières* $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ *existent et est continues sur* U.

(c) La fonction réciproque de φ, φ^{-1} *est de classe* C^1.

On note $J\varphi(x)$ *la matrice jacobienne de* φ *en un point* $x \in U$ *donnée par la matrice dont le coefficient* $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)$ *(c'est le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne).*

Théorème 4.1.3 *(Théorème de changement de variables)*
Soient U, V *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$, *et soit* $\varphi : U \longrightarrow V$ *un difféomorphismes de classe* C^1.
Si $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *est intégrable, alors* $y \longmapsto f(\varphi(y))|\det J\varphi(y)|$ *est intégrable sur* U *et on a :*

$$\int_V f(x)d\lambda_n(x) = \int_U f(\varphi(y))|\det J\varphi(y)|d\lambda_n(y),$$

et

$$\int_U f(y)d\lambda_n(y) = \int_V f(\varphi^{-1}(x))|\det J\varphi^{-1}(x)|d\lambda_n(x),$$

4.2 Lois conjointes, lois marginales

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité et* $X = (X_1, \cdots, X_n)$ *un vecteur aléatoire à valeur dans l'espace produit* $(E, \mathcal{B})$. *Comme pour les variables aléatoires, on définit la loi du vecteur* X.

Définition 4.2.1 *L'application*

$$\begin{aligned} P_X : \mathcal{B} &\longrightarrow [0,1] \\ B &\longmapsto P_X(B) = P(X \in B) = P(X^{-1}(B)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}$ *appelée loi de* X *ou bien loi conjointe du vecteur* X, *l'espace* $(E, \mathcal{B}, P_X)$ *est un nouvel espace de probabilité.*
Les lois des variables aléatoires marginales $X_1, \cdots, X_n$ *respectivement* $P_{X_1}, \cdots, P_{X_n}$ *sont appelées lois marginales de* X.

Pour tout $B \in \mathcal{B}$ *on a* $B = A_1 \times \cdots \times A_n$ *et*

$$P_X(B) = P(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n).$$

La connaissance de la loi conjointe de X *permet de déterminer les lois marginales* $P_{X_1}, \cdots, P_{X_n}$. *La réciproque est fausse, la connaissance des marginales ne permet pas de déterminer la loi conjointe* P_X.

Définition 4.2.2 *Fonction de répartition*
Soit X *un vecteur aléatoire de dimension* n *à valeurs dans* $(E, \mathcal{B})$. *On appelle fonction de répartion de* X *la fonction*

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0,1] \\ (x_1, \cdots, x_n) &\longmapsto F_X(x_1, \cdots, x_n) = P_X(]-\infty, x_1] \times \cdots]-\infty, x_n]) \\ &= P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n) \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, dans la suite on ne considère que des couples aléatoires (cas $n = 2$*) et les notions s'étendent aisement au cas général.*

Cas discret

Loi conjointe

On se donne X *et* Y *deux variables aléatoires discrètes, la loi conjointe du couple* (X, Y) *est donnée par* $(X, Y)(\Omega)$ *et les probabilités*

$$P_{(X,Y)}(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(\{\omega, X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}), \forall (x, y) \in (X, Y)(\Omega).$$

Bien entendu on doit avoir $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) = 1$

Exemple
Dans une urne il y'a quatre jetons numérotés de 1 à 4, on tire au sort successivement deux jetons sans remise et on note (X, Y) *le couple aléatoire, le résultat des deux tirages. On a :*

$$P(X = i, Y = i) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \cdots, 4, \text{ et } P(X = i, Y = j) = \frac{1}{12} \text{ si } i \ge 1,\ j \ne i.$$

On peut écrire les probabilités sous la forme d'un tableau.

Lois marginales

Définition 4.2.3 *Les lois marginales du couple* (X, Y) *sont les lois des variables aléatoires* X *et* Y. *On les obtient de la façon suivante :*

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

et

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

En effet, on a : l'événement

$$\{X = x\} = \{X = x, y \in Y(\Omega)\} = \bigcup_{y \in Y(\Omega)} \{X = x, Y = y\}$$

Comme cette réunion estune réunion dénombrable d'événements disjoints, alors, il vient :

$$P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x,Y=y).$$

De même pour $P(Y=y)$.

Exercice

Soit $p\in]0,1[$ et $\lambda>0$, on considère le couple de variables aléatoires (X,Y) à valeurs dans $\{0,1\}\times N$ dont la loi est donnée par : $P(X=0,Y=0)=1-p$

$P(X=1,Y=j)=pe^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!},\ \forall j\in N$

$P(X=i,Y=j)=0$ sinon.

(a) Vérifier qu'il s'agit bien de la loi conjointe du couple (X,Y).

(b) Déterminer les lois marginales du couple.

(c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z=XY$.

(a) On a bien

$$\sum_{i\in\{0,1\},j\in N} P(X=i,Y=j)=1$$

(b) On a :$P(X=1)=\sum_{j\in N}P(X=1,Y=j)=\sum_{j\in N}pe^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}=p$, de la même façon on a :

$$P(X=0)=\sum_{j\in N}P(X=0,Y=j)=1-p$$

Alors X suit la loi de Bernouilli de paramètre p. Pour la loi de Y on a :
$P(Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=1-p+pe^{-\lambda}$ et pour tout $j\geq 1$ on a :
$P(Y=j)=P(X=0,Y=j)+P(X=1,Y=j)=pe^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$.

(c) La variable aléatoire Z est à valeurs dans N et on a :

$$P(Z=0)=P(XY=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=1-p+pe^{-\lambda}$$

et pour tout $z\in N^*$ on a :

$$P(Z=z)=P(XY=z)=P(X=1,Y=z)=pe^{-\lambda}\frac{\lambda^z}{z!}.$$

Remarquons d'après la question 3 de l'exercice précdent, on a des fois tendance à calculer la loi d'une la variable aléatoire $Z=g(X,Y)$ (une fonction du couple) avec g est une fonction mesurable de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et le couple (X,Y) de loi conjointe connue $P_{(X,Y)}$

Proposition 4.2.1 *Soit (X,Y) un couple aléatoire discret et soit $Z=g(X,Y)$ avec g est une fonction mesurable. Z est une variable aléatoire telle que $Z(\Omega)=g(X,Y)(\Omega)$ et pour tout $z\in Z(\Omega)$ on a :*

$$P(Z=z)=\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega),\ g(x,y)=z} P(X=x,Y=y)$$

Cas continu

densité d'un couple aléatoire (X,Y)

Définition 4.2.4 *Un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles est dit à densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ s'il existe une fonction $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}_+$ telle que, pour tous intervalles I et J et pour toute fonction continue bornée ou bien positive φ on a :*

$$P(X\in I,\ Y\in J)=\int_{I\times J} f(x,y)dxdy \text{ et } E(\varphi(X,Y))=\int\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x,y)f(x,y)dxdy$$

Remarque 4.2.1 • *La définition est équivalente à, pour tout ouvert $U\in\mathbb{R}^2$ on a :*

$$P((X,Y)\in U)=\int\int_U f(x,y)dxdy$$

• *La densité f est toujours positive, intégrable et $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy=1$*

Exercice

Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 1\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et f la fonction définit sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}I_D(x,y),$$

Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

f est continue sur D et on a :

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \frac{1}{\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2} I_D(x,y)dxdy\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx,\end{aligned}$$

on effectue un changement de variable, on pose $x = \sin t$ (alors $dx = \cos t\, dt$), par la suite

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 1\end{aligned}$$

Lois marginales

Les lois marginales du couple (X,Y) sont les lois des variables aléatoires X et Y.

Proposition 4.2.2 *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité conjointe $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Alors les deux variables aléatoires X et Y ont chacune une densité respectivement f_X et f_Y données par :*

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \text{ et } f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$$

4.3 Indépendance

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans les espaces mesurable $(E_1, \mathcal{B}_1), (E_2, \mathcal{B}_2), \cdots, (E_n, \mathcal{B}_n)$ resp.. On dit que la famille des variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est indépendante si : Pour tout $A_i \in \mathcal{B}_i$ on a

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \cdots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i) \qquad (4.2)$$

Le vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$X(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega$$

à valeurs dans l'espace produit $(\prod_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_i)$ est une variable aléatoire de loi

$$P_X = P_{(X_1,\cdots,X_n)} = P_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_n}$$

Dans ce cas, (2.3) montre que les X_i, $i = 1, \cdots, n$ sont indépendantes si et seulement si la loi conjointe du vecteur X est éguale au produit des lois marginales (lois des variables marginales X_i)

$$P_X = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}$$

sur l'espace produit.

Proposition 4.3.1 *Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes à valeurs respectivement dans $(E_1, \mathcal{B}_1), \cdots, (E_n, \mathcal{B}_n)$ et φ_i des applications mesurables de $(E_i, \mathcal{B}_i)$ dans $(F_i, \mathcal{G}_i)$, alors les variables aléatoires $Y_i = \varphi_i \circ X_i$, $i = 1, \cdots, n$ à valeurs dans $(F_i, \mathcal{G}_i)$, $\forall i = 1, \cdots, n$ sont indépendantes.*

Dans la suite, on désigne toujours par $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire de dimension n de loi conjointe $P_X = P_{(X_1,\cdots,X_n)}$ et de fonction de répartition F_X. Les lois $P_{X_1}, \cdots, P_{X_n}$ sont les lois marginales et $F_{X1}, \cdots, F_{X_n}$ sont les fonctions de répartition de variables marginales.

Théorème 4.3.1 *Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tous réels $x_1, \cdots, x_n$, on a*

$$P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdots P(X_n \leq x_n)$$

ou encore

$$F_X(x_1, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n).$$

Dans le cas particulier où le vecteur aléatoire X est continue, on a :
Si les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont continues indépendantes, de densités marginales $f_{X_1,\cdots,f_{X_n}}$ respectives, alors la loi conjointe f_X du vecteur X est donnée par :

$$f_X(x_1, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n), \ \forall\, x_1, \cdots, x_n \in R$$

Réciproquement, si le vecteur aléatoire $(X_1, \cdots, X_n)$ possède une densité conjointe :

$$f_X(x_1, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n), \ \forall\, x_1, \cdots, x_n \in R$$

alors les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes et leurs densités respectives sont $f_{X_1}, \cdots, f_{X_n}$.

Théorème 4.3.2 *Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour toutes fonctions g_1 et g_2 mesurables, on a :*

$$E(g_1(X)g_2(Y)) = E(g_1(X))E(g_2(Y))$$

Comme conséquence de ce théorème on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.3.1 *Soient X et Y deux variables aléatoire réelles indépendantes intégrables, alors on a :*

(a) La variable aléatoire XY est intégrable et

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

(b) *Si X et Y admettent des fonctions génératrices respectivement g_X et g_Y, alors pour tout s*

$$g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s)$$

(c) *Pour tout t, la fonction caractéristique de $X+Y$ est*

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Proposition 4.3.2 *Soient X et Y deux variables aléatoire réelles indépendantes de densité f_X et f_Y. Alors $f_X * f_Y$ est la densité de $X+Y$.*

Dans le cas général on

Proposition 4.3.3 *Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et intégrables. Alors, la variable aléatoire $X = X_1.X_2 \cdots X_n$ est intégrables et on a :*

$$E(X) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

De plus, les X_i, $i = 1, \cdots, n$ possèdent des moments d'ordre 2 finies, alors : $Cov(X_i, X_j) = 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$,

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$

Théorème 4.3.3 *Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes si et seulement la fonction caractéristique de vecteur $(X_1, \cdots, X_n)$ est égale au produit des fonctions caractéristique de ses marginales*

$$\varphi_{(X_1,\cdots,X_n)}(t_1, \cdots, t_n) = \varphi_{X_1}(t_1), \cdots, \varphi_{X_n}(t_n)$$