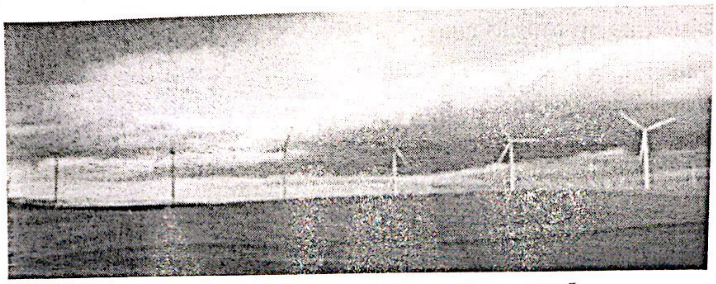
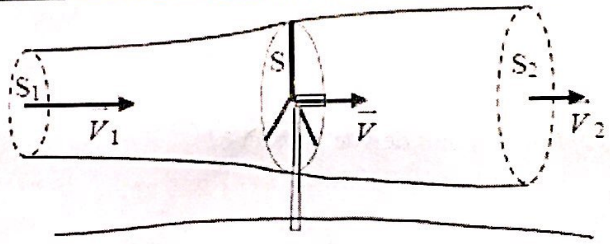
Aerodynamics of Wind Turbines

<u>Problem:</u> **La Limite de Betz** 1

La production d'énergie éolienne se fait par prélèvement d'énergie cinétique du vent par les pales.





On considère une veine de vent et on note :

V_1 : vitesse du vent avant l'éolienne

V : vitesse du vent au niveau de l'éolienne

V_2 : vitesse du vent après prélèvement de l'énergie par l'éolienne

On suppose l'air incompressible, ce qui permet d'écrire la conservation du débit volumique q_v (en m^3/s):

$$q_v = Cte = S_1.V_1 = S_2.V_2 = S.V$$

Le théorème d'Euler (dont la preuve figure en annexe) permet d'écrire que la force F s'exerçant sur les pales de l'éolienne est donnée par l'expression : $F = \rho\, S.V.(V_1 - V_2)$

avec ρ la masse volumique de l'air (en $kg.m^{-3}$), S en m², V_1 et V_2 en m/s.

On en déduit que la puissance mécanique P (en W) fournie par le vent à l'éolienne s'écrit :

$$P = F.V = \rho.S.V^2.(V_1 - V_2)$$

1) Relation entre V, V_1 et V_2 :

La masse d'air élémentaire dm traversant l'éolienne pendant le temps dt est dm = S.V.dt.ρ.
La diminution d'énergie cinétique de cette masse dm lorsque la vitesse passe de la vitesse V_1 à la vitesse V_2 est $dE_c = 0,5\ dm.V_1^2 - 0,5\ dm.V_2^2 = 0,5\ S.V.dt.\rho.(V_1^2 - V_2^2)$
La puissance P peut donc s'écrire aussi $P = = 0,5\ S.V.\rho.(V_1^2 - V_2^2)$

a) A partir des 2 expressions de la puissance P et en utilisant la relation (a +b) × (a - b) = … …., quelle relation simple existe-t-il entre les trois vitesses V_1, V_2 et V ?

b) En déduire que la puissance P peut s'écrire

$$P = 0,25\ \rho.S.(V_1 + V_2)^2.(V_1 - V_2)$$

(expression dans laquelle la vitesse V n'apparaît plus).

2) Limite de Betz : On se propose de déterminer dans quelle(s) condition(s), entre V_1 et V_2, la puissance P extraite par les pales est maximale. On pose x = V2/V1
Ce rapport x varie de 0 à 1 lorsque V_2 augmente de 0 (l'éolienne arrête totalement le vent) à V_1 (l'éolienne ne freine pas du tout le vent).

a) Montrer que la puissance P peut s'écrire en fonction de x :

$$P(x) = 0,25\ \rho.S.V_1^3.(1 + x)^2.(1 - x)$$

b) ρ, S et la vitesse du vent à l'« entrée » V_1 étant des constantes, étudier les variations de *P(x) pour x ∈ [0 ; 1]* et en déduire la relation devant exister entre V_1 et V_2 pour que la *puissance P passe par un maximum.*

c) *Exprimer alors cette puissance maximale* $P_{maxi\ éolienne}$ en fonction de ρ, S et V_1.

d) *Sachant que la puissance* contenue dans la veine de vent est donnée par $P_{veine} = (1/2).\rho.S.V_1^3$, exprimer le quotient entre $P_{maxi\ éolienne}$ et P_{veine}.

e) Que représente ce rapport d'un point de vue physique ?

f) - Calculer Pρair $_{maxi\ éolienne}$ pour S = 10 000 m², ρ_{air} = 1,225 kg.m^{-3} *(correspondant à une* altitude voisine de 600 m),
$V_1 = 36$ km.h^{-1} = 10 m.s^{-1}.

- Calculer Pρair $_{maxi\ éolienne}$ pour S = 10 000 m², ρ_{air} = 0,34 kg.m^{-3} (comme au voisinage de 10000 m d'altitude), Nedia

Exercice Aerodynamics of wind Turbines

Problem la limite de Betz

On a : (1) $P = \rho S v^2 (v_1 - v_2)$

(2) $P = \frac{1}{2} S \rho v (v_1^2 - v_2^2)$

(1) = (2)

$\Rightarrow \cancel{\rho} \cancel{S} v^2 (v_1 - v_2) = \frac{1}{2} \cancel{\rho} \cancel{S} v^2 (v_1^2 - v_2^2)^2$

$\Rightarrow v (\cancel{v_1 - v_2}) = \frac{1}{2} (\cancel{v_1 - v_2}) (v_1 + v_2)$

$\Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{2} (v_1 + v_2)}$

1_b) $P = \rho S v^2 (v_1 - v_2)$ ①

On a déjà $V = \frac{V_1 + V_2}{2}$

donc ① $\Rightarrow P = \frac{1}{4} \rho S (V_1 + V_2)^2 (V_1 - V_2)$

$$\boxed{P = 0{,}25 \rho S (V_1 + V_2)^2 (V_1 - V_2)}$$ ②

2) On pose $X = \frac{V_2}{V_1}$

Ce rapport $X \in [0, 1]$ lorsque V_2 augmente de 0 (l'éolienne arrête totalement le vent) à V_1 l'éolienne ne freine pas du tout le vent).

Nedia

suite Problem

2/a- $P(x) = 0,25 \rho S \left(\frac{V_2}{x} + V_2\right)^2 \left(\frac{V_2}{x} - V_2\right)$

$$= 0,25 \rho S \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 V_1^2 \left(\frac{1-x}{x}\right) V_2$$

$$= 0,25 \rho S \frac{V_2^3}{x^3} (1+x)^2 (1-x)$$

$$\boxed{P(x) = 0,25 \rho . S V_1^3 (1+x)^2 (1-x)}$$

b/ $\frac{dP}{dx} = 0,25 . \rho . S . V_1^3 \, 2(1+x)(1-x) - 0,25 \rho . S . V_1^3 (1+x)^2$

$= 0,25 \times \rho . S . V_1^3 \left(2(1-x^2) - (1+x)^2\right)$

$= 0,25 . \rho . S . V_1^3 \left(2 - 2x^2 - 1 - 2x - x^2\right)$

$= 0,25 \rho S V_1^3 (1 - 2x - 3x^2)$

Pourque P soit maximale il faut :

$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow (1 - 2x - 3x^2) = 0$

$1 - 2x - 3x^2 \Rightarrow x_1 = -1$ ou $x_2 = \frac{1}{3}$

et Puisque $x \in [0, 1]$ donc on retient

$\Rightarrow \boxed{V_1 = 3V_2}$

c/

$$P_{max,eolienne} = P\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\rho . S v_1^3 \frac{16}{9} . \frac{2}{3}$$

$$\boxed{P_{max\,eolienne} = \frac{8}{27}\rho S v_1^3}$$

$$\boxed{P_{max,eolienne} = \frac{1}{2}\rho S v_1^3 \frac{16}{27}}$$

d/ $P_{max,eolienne} = \frac{16}{27} P_{veine}$

e/ Le rendement du rotor de l'éolienne ne peut dépasser $\frac{16}{27} \sim 0,59$, ce qui constitue la limite de Betz.

$$P_{max} = 0,5 \rho . S . v_1^3 . \frac{16}{27}$$

* 1er point :

AN : $P_{max} = 0,5 \times 1,225 \times (10\,000) \times (10^3) \times \frac{16}{27}$

$P_{max} = 3,63$ MW

* 2ème point :

$P_{max} = 0,5 \times 0,34 \times (10000) \times (70^3) \times \frac{16}{27}$

$P_{max} = 345$ MW avec $v_1 = 252$ km.h^{-1} $= 70$ m.s^{-1}

→ D'où l'interêt de ~~placer les eoliennes~~ l'exploitation du vent d'une altitude proche de 10 000 mètre où les vitesses sont en permanance très elevé.

r 9 cours / chap 4

$v=(1-a)v_1$

$U=\omega r$

W

!! v_1 en (m/s)

vitesse relative

$W^2 = v^2 + u^2$

l'angle : $\varphi = \alpha + \beta$

attaque

pitch