Ecole Nationale des Sciences et Technologies Avancées à Borj Cedria

A.U. 2023-2024
TA1/TA2/TA3

TD 2 : Interpolation polynômiale

Exercice1

Soient $x_0, \ldots\ldots, x_n$des réels deux à deux distincts et $(\lambda_0, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n) \in R^{n+1}$.

1. Montrer que :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, L_i(\mathrm{x}), \quad \text{où} \qquad L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Est l'unique polynôme de $R_n[X]$ qui vérifie $P(x_i) = \lambda_i, \qquad 0 \leq i \leq n$.

2. Soit la fonctions définie sur R par $f(x) = x + 2^x$. Calculer le polynôme d'interpolation de f aux points -1,0,1 :

a. En calculant le polynôme de base de Lagrange.
b. Par la méthode des différences divisées.
c. Donner une estimation de l'erreur d'interpolation pour chaque méthode d'interpolation utilisée.

Exercice2

Soient $x_0, \ldots\ldots, x_n$ (n+1) points deux à deux distincts de $[a, b]$. Soit $f \in C^1[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme de degré $P \in P_{2n+1}$tel que :

$$\forall i = 0, \ldots\ldots, n \qquad P(x_i) = f(x_i) \qquad et \qquad P'(x_i) = f'(x_i)$$

2. Montrer qu'il existe un polynôme et un seule $P \in P_{2n+1}$ tel que :

$$\forall i = 0, \ldots\ldots, n \qquad P(x_i) = f(x_i) \qquad et \qquad P'(x_i) = f'(x_i)$$

3. Soient $L_k, \;\; 0 < k < n$, les polynômes de base de Lagrange associés aux points $x_0, \ldots\ldots, x_n$. On pose

$$H_k(x) = (x - x_k).(L_k(x))^2$$

$$\widetilde{H}_k(x) = (1 - 2(x - x_k). L_k'(x)).(L_k(x))^2$$

4. Calculer $H_k(x_i), \widetilde{H}_k(x_i), \; H'_k(x_i) \; et \; \widetilde{H'}_k(x_i)$ pour $i = 0, \ldots$n.
5. Endéduire une expression de $P(x)$où P est le polynôme d'interpolation d'Hermite de f aux points $x_0, \ldots\ldots, x_n$ tel que

$$P(x_i) = f(x_i) \qquad et \qquad P'(x_i) = f'(x_i)$$

Exercice3

Dans cet exercice, nous souhaitons interpoler $f \in C^2([a, b], R)$ par une fonction cubique par morceaux. C'est ce que nous appelons une spline cubique.

Pour cela nous définissons $(x_i)_{0 \le i \le n+1}$, qui déterminent une partition de l'intervalle $[a, b]$, avec $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$.

Nous appelons spline cubique une fonction S vérifiant

1. $S \in C^2([a, b], R)$,
2. $S_{|[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré 3 pour $i = 0, \ldots\ldots, n$.

Pour construire une telle approximation, nous cherchons à définir une spline S en fonction seulement de ses valeurs aux points x_i et de sa dérivée seconde en x_i.

1. Sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égale à 3 défini par ses valeurs $P(\alpha), P(\beta), P''(\alpha)$ *et* $P''(\beta)$.
2. Déterminer les valeurs des dérivées premières en α *et* β en fonction des données.
3. En-déduire qu'il existe une unique spline cubique S qui interpole f au sens suivant :

$$\begin{cases} S(x_i) = f(x_i), \quad pour\ i = 0{:}\, n+1 \\ S'(a) = f\,'(a), \qquad S'(b) = f\,'(b) \end{cases}$$

4. En prenant pour $i \in \{0, , \ldots\ldots n+1\}$ la fonction S_i telle que

$$S_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad S_i{}'(a) = S_i{}'(b) = 0,$$

Puis les splinesS_a *et* S_b *telles que* $S_a(x_i) = S_b(x_i) = 0$ et $S'_a(a) = S'_b(b) = 1$

Et $S'_b(a) = S'_a(b) = 0$ montrer que S interpolant f sur $[a, b]$.