Table des matières

Définition de la transformée de Fourier

Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la fonction $\hat{f}(\omega)$ (pour $\omega \in \mathbb{R}$) est définie par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

à la condition que l'intégrale du membre de droite existe en tant qu'intégrale impropre de Riemann.

Définition

L'application qui associe la nouvelle fonction $\hat{f}$ à f est appelée la transformation de Fourier alors que la fonction $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

Avertissement

La définition précédente de la transformation de Fourier n'est pas toujours celle choisie.

Par exemple, certains auteurs définissent la transformée de Fourier de f par $\tilde{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\omega t}dt$.

La définition retenue peut entraîner des modifications dans certaines propriétés (tout simplement parce que, par exemple, $\hat{f}(\omega) = \tilde{f}(\frac{\omega}{2\pi})$).

Il faut donc toujours vérifier la définition employée avant d'appliquer une formule.

Un peu de terminologie

Du point de vue de la physique, on dit que f dépend du temps alors que $\hat{f}$ dépend de la fréquence. On dit aussi parfois que f est définie dans le domaine temporel et que $\hat{f}$ l'est dans le domaine fréquentiel.

Puisque $t \mapsto e^{-i\omega t}$ est une fonction à valeurs complexes, $\hat{f}$ est en général aussi à valeurs complexes, donc $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. En général $\hat{f}$ se scinde donc en une partie réelle et une partie imaginaire.

On étudie aussi parfois le spectre d'amplitude $|\hat{f}(\omega)|$ de f, et son spectre de phase $\arg \hat{f}(\omega)$.

Enfin en analyse du signal la quantité $|\hat{f}(\omega)|^2$ s'appelle la densité spectrale d'énergie.

Un premier contre-exemple

Rappelons que la fonction $\mathcal{U}$ échelon unité de Heaviside est la fonction valant 1 sur $[0, +\infty[$ et 0 partout ailleurs.

La transformée de Fourier de $\mathcal{U}$ n'existe pas parce que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-i\omega t} = \lim_{R \to +\infty} \int_{0}^{R} e^{-i\omega t} dt.$$

Puisque $(e^{-i\omega t})' = -i\omega e^{-i\omega t}$, il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} \lim_{R \to +\infty} \left[e^{-i\omega t} \right]_{t=0}^{t=R} = \frac{i}{\omega} \left(\lim_{R \to +\infty} e^{-i\omega R} - 1 \right).$$

Cependant la limite $\lim\limits_{R \to +\infty} e^{-i\omega R}$ n'existe pas (sauf pour $\omega = 0$) car ni $\lim\limits_{R \to +\infty} \sin R\omega$ ni $\lim\limits_{R \to +\infty} \cos R\omega$ n'existent.

Fonctions absolument intégrables (1/2)

Introduisons maintenant une classe de fonctions pour laquelle la transformée de Fourier existe à coup sûr.

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite absolument intégrable (sur $\mathbb{R}$) si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

existe en tant qu'intégrale impropre de Riemann.

Fonctions absolument intégrables (2/2)

Nous avons, pour f absolument intégrable, $|\hat{f}(\omega)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt| \leq$
$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-i\omega t}|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \underbrace{|e^{-i\omega t}|}_{=1} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty.$

De sorte que $\hat{f}$ existe quand f est absolument intégrable.

Remarque

La transformée de Fourier peut exister pour des fonctions non absolument intégrables (et pour certaines dont nous aurons besoin). Cela explique la formulation choisie pour la définition de $\hat{f}$.

Table des matières

L'impulsion rectangulaire (1/2)

Soit $a > 0$. La fonction impulsion rectangulaire ρ_a de hauteur 1 et de durée a est définie par

$$\rho_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Observons que ρ_a est sans aucun doute absolument intégrable.

Calculons sa transformée de Fourier. Pour $\omega \neq 0$, on a

$$\hat{\rho}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_a(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{-e^{-i\omega t}}{i\omega} \right]_{t=-a/2}^{t=a/2} =$$

$$\frac{e^{\frac{ia\omega}{2}} - e^{-\frac{ia\omega}{2}}}{i\omega} = \frac{2\sin(a\frac{\omega}{2})}{\omega}$$ (rappelons que $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$).

Alors que pour $\omega = 0$, on a $\hat{\rho}_a(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_a(t) dt = \int_{-a/2}^{a/2} dt = a$.

L'impulsion rectangulaire (2/2)

Puisque $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on en déduit que $\lim_{\omega \to 0} \hat{\rho}_a(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{2 \sin(a\frac{\omega}{2})}{\omega} = a$.

Bien que ρ_a ne soit que continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (discontinuités en $\pm\frac{a}{2}$), on voit donc que $\hat{\rho}_a$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Par ailleurs, $\hat{\rho}_a$ est à valeurs réelles, et $\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{\rho}_a(\omega) = 0$.

On remarque finalement que $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas absolument intégrable (l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi/2$ n'est pas absolument convergente et n'existe que comme une valeur principale de Cauchy) de sorte que la transformée de Fourier d'une fonction absolument intégrable peut être non absolument intégrable.

La fonction triangle (1/4)

Soit $a > 0$. La fonction triangle q_a de hauteur 1 et de durée $2a$ est définie par

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{a} & \text{pour } |t| \leq a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Son graphe est donc constitué des demi-droites $]-\infty; -a]$ et $[a; +\infty[$ ainsi que des segments $[(-a; 0)(0; 1)]$ et $[(0; 1)(a; 0)]$.

La fonction triangle (2/4)

Calculons sa transformée de Fourier.
Cette fonction est absolument intégrable. Et nous avons

$$\hat{q}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_a(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} q_a(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{0} q_a(t)e^{-i\omega t}dt$$

et puisque $q_a(t) = q_a(-t)$, en substituant $t \leftrightarrow -t$ dans la seconde intégrale on obtient $\hat{q}_a(\omega) = \int_{0}^{+\infty} q_a(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{+\infty} q_a(t)e^{i\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} q_a(t)(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})dt = 2\int_{0}^{+\infty} q_a(t)\cos\omega t \; dt.$

Par définition de q_a il s'ensuit que

$$\hat{q}_a(\omega) = 2\int_{0}^{a} \left(1 - \frac{t}{a}\right)\cos\omega t \; dt.$$

La fonction triangle (3/4)

Pour $\omega = 0$, nous avons $\cos \omega t = 1$ et ainsi

$$\hat{q}_a(0) = 2\left[t - \frac{1}{2a}t^2\right]_0^a = a.$$

Pour $\omega \neq 0$, une intégration par parties donne

$$\hat{q}_a(\omega) = \frac{2}{\omega}\int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right)(\sin \omega t)' dt = \frac{2}{\omega}\left[(1 - \frac{t}{a}) \sin \omega t\right]_0^a + \frac{2}{a\omega}\int_0^a \sin \omega t \, dt$$

car $(1 - \frac{t}{a})' = -\frac{1}{a}$. Le premier terme de cette somme vaut zéro et donc

$$\hat{q}_a(\omega) = \frac{2}{a\omega}\int_0^a \sin \omega t \ dt = -\frac{2}{a\omega^2}\left[\cos \omega t\right]_0^a = \frac{2}{a\omega^2}(1 - \cos a\omega).$$

Finalement $1 - \cos a\omega = 2\sin^2(a\frac{\omega}{2})$, et ainsi

$$\hat{q}_a(\omega) = \frac{4\sin^2(a\frac{\omega}{2})}{a\omega^2}.$$

La fonction triangle (4/4)

Comme pour la fonction d'impulsion rectangulaire, $\lim_{\omega \to 0} \hat{q}_a(\omega) = a$ ce qui signifie que $\hat{q}_a$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus $\hat{q}_a$ est à valeurs réelles et $\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{q}_a(\omega) = 0$.

La fonction $e^{-a|t|}$ (1/2)

Soit $a > 0$. Considérons la fonction $f(t) = e^{-a|t|}$. Calculons sa transformée de Fourier.

Puisque pour $x, y \in \mathbb{R}$ donnés, on a $\dfrac{d}{dt}e^{(x+iy)t} = (x+iy)e^{(x+iy)t}$, il en résulte que $\hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-i\omega t}dt =$

$$-\left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right]_{t\to-\infty}^{t=0}.$$

Maintenant, $\lim_{R\to+\infty} e^{-(a+i\omega)R} = \lim_{R\to+\infty} e^{-aR}e^{-i\omega R} = 0$ puisque $|e^{-i\omega R}| = 1$ et $\lim_{R\to+\infty} e^{-aR} = 0$ pour $a > 0$. De façon similaire, $\lim_{R\to-\infty} e^{(a-i\omega)R} = 0$.

Ainsi $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{a+i\omega} + \dfrac{1}{a-i\omega} = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$.

Donc $\hat{f}$ est une fonction continue à valeurs réelles avec $\lim_{\omega\to\pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

La fonction $e^{-a|t|}$ (2/2)

La fonction suivante ℓ est étroitement liée à l'exemple précédent : $\ell(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t)$, pour $a \in \mathbb{C}$ avec $\Re(a) > 0$.

On montre alors, en s'inspirant du traitement de la fonction f, que

$$\hat{\ell}(\omega) = \frac{1}{a + i\omega} = \frac{a - i\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

Cette fonction est à valeurs complexes. Pour $a > 0$, $\Re(\hat{\ell}(\omega)) = \dfrac{a}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega)$. Notons enfin que $\dfrac{\omega}{a^2 + \omega^2}$ n'est pas intégrable au sens de l'intégrale impropre de Riemann.

La fonction gaussienne (1/3)

Considérons, pour $a > 0$, la fonction gaussienne $g_a(t) = e^{-at^2}$.

Afin d'esquisser le calcul de sa transformée de Fourier nous admettons que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. En particulier, il s'avère que g_a est absolument intégrable.

Comme $g_a(t) = g_a(-t)$, il s'ensuit que

$$\hat{g}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos \omega t \; dt.$$

(Nous verrons plus loin un traitement plus détaillé des fonctions paires.)

Nous allons maintenant dériver $\hat{g}_a$ (en admettant qu'il soit possible de dériver sous le signe somme). On obtient

$$\hat{g}_a'(\omega) = -2 \int_0^{+\infty} t e^{-at^2} \sin \omega t \; dt.$$

La fonction gaussienne (2/3)

En intégrant par parties on arrive à $\hat{g}_a'(\omega) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{d}{dt}(e^{-at^2}) \sin \omega t \ dt =$ $\dfrac{1}{a}\left[e^{-at^2} \sin \omega t\right]_{t=0}^{t\to+\infty} - \dfrac{\omega}{a}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos \omega t \ dt.$

Le premier terme de cette différence est égal à 0, alors que le second terme est égal à $-\dfrac{\omega \hat{g}_a(\omega)}{2a}$.

Nous obtenons ainsi une équation différentielle satisfaite par $\hat{g}_a$, à savoir $\hat{g}_a'(\omega) = -\dfrac{\omega}{2a}\hat{g}_a(\omega)$.

En divisant par $\hat{g}_a(\omega)$ les deux membres de l'égalité il vient $\dfrac{\hat{g}_a'(\omega)}{\hat{g}_a(\omega)} = -\dfrac{\omega}{2a}$, soit encore $\dfrac{d}{d\omega} \ln |\hat{g}_a(\omega)| = -\dfrac{\omega}{2a}$.

Par ailleurs, $\dfrac{d}{d\omega}(-\dfrac{\omega^2}{4a}) = -\dfrac{\omega}{2a}$, et donc $\ln |\hat{g}_a(\omega)| = -\dfrac{\omega^2}{4a} + C$, pour une constante arbitraire C.

La fonction gaussienne (3/3)

Par suite $|\hat{g}_a(\omega)| = e^C e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

En posant $\omega = 0$, il vient
$$e^C = \hat{g}_a(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t\sqrt{a})^2} \sqrt{a}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Au final nous avons
$$\hat{g}_a(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Remarque

Une fois encore $\hat{g}_a$ est une fonction continue à valeurs réelles et $\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{g}_a(\omega) = 0$.

Table des matières

Avertissements

En analyse de Fourier nous avons à considérer des intégrales impropres de Riemann.

Or cette théorie présente quelques subtilités sur lesquelles nous ne nous attarderons pas dans la suite du cours. Par exemple, dans les calculs précédents, nous avons admis que l'on pouvait permuter dérivation et intégrale impropre, sans formuler les conditions pour le justifier.

Un autre problème apparaissant souvent concerne l'ordre d'intégration dans les intégrales doubles. Par exemple, même quand

$$\int_b^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy \text{ et } \int_a^{+\infty}\left(\int_b^{+\infty} f(x,y)dy\right)dx$$

existent, elles n'ont pas nécessairement la même valeur. Nous ne présentons pas les théorèmes généraux permettant de changer l'ordre d'intégration, et donc nous admettrons certains résultats qui les utilisent.

Linéarité

Proposition

Soient f et g deux fonctions admettant une transformée de Fourier. Alors, quels que soient les nombres complexes α, β, $\alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $\alpha f(t) + \beta g(t)$.

Preuve

Provient directement de la linéarité de l'intégrale. $\square$

Conjugaison

Proposition

Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier. Alors $\bar{f} : t \mapsto \overline{f(t)}$ admet également une transformée de Fourier et

$$\widehat{\bar{f}}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}.$$

Preuve

On a $\widehat{\bar{f}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt} = \overline{\hat{f}(-\omega)}$. □

Remarque

En particulier si f est à valeurs réelles, alors la proposition (si elle s'applique à f) donne $\overline{\hat{f}(-\omega)} = \hat{f}(\omega)$ soit encore $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$.

Décalage dans le domaine temporel

Proposition

Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier. Soit $\tau \in \mathbb{R}$ et posons $g\colon t \mapsto f(t-\tau)$. Alors g admet également une transformée de Fourier et

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega\tau}\hat{f}(\omega).$$

Preuve

En effectuant le changement de variables $s = t - \tau$ il vient

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-i\omega(s+\tau)}ds = e^{-i\omega\tau}\hat{f}(\omega).$$

$\square$

Remarque

Le facteur $e^{-i\omega\tau}$ est appelé facteur de phase.

Décalage dans le domaine fréquentiel

Proposition

Soit une fonction f admettant une transformée de Fourier. Considérons, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \colon t \mapsto e^{i\alpha t} f(t)$. Alors f_α admet une transformée de Fourier et

$$\hat{f}_\alpha(\omega) = \hat{f}(\omega - \alpha).$$

Preuve

On a

$$\hat{f}(\omega - \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(\omega-\alpha)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} f(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{f}_\alpha(\omega).$$

$\square$

Application : Théorème de modulation

Proposition

Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier, et posons $h(t) = f(t)\cos(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega - \alpha) + \hat{f}(\omega + \alpha)}{2}.$$

Preuve

Puisque $\cos(\alpha t) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t})$, il vient (en utilisant la propriété de décalage dans le domaine fréquentiel, et en gardant les mêmes notations)

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2}(\hat{f}_\alpha(\omega) + \hat{f}_{-\alpha}(\omega)) = \frac{1}{2}(\hat{f}(\omega - \alpha) + \hat{f}(\omega + \alpha)).$$

$\square$

Dilatation (dans le domaine temporel)

Proposition

Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier. Pour $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, posons $g(t) = f(\mu t)$. Alors g admet également une transformée de Fourier et

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{|\mu|}\hat{f}(\frac{\omega}{\mu}).$$

Un cas spécial de dilatation est obtenu en remplaçant t par $-t$, ce que l'on appelle le renversement du temps, et qui donne $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(-\omega)$.

Preuve

Supposons $\mu > 0$ (la preuve pour $\mu < 0$ est laissée au lecteur). En posant $s = \mu t$ il vient

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega \frac{s}{\mu}} ds = \frac{1}{\mu} \hat{f}(\frac{\omega}{\mu}).$$

$\square$

Exemple

Considérons la fonction impulsion rectangulaire ρ_a dont la transformée de Fourier est donnée par $\hat{\rho}_a(\omega) = \dfrac{1}{\omega}(2\sin(a\frac{\omega}{2}))$.

Pour $\mu > 0$, en posant $g(t) = \rho_a(\mu t)$, on a

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\mu}\ \frac{2\sin(a\frac{\omega}{2\mu})}{\frac{\omega}{\mu}} = \frac{2\sin(a\frac{\omega}{2\mu})}{\omega}.$$

Il s'ensuit que la transformée de Fourier de g est égale à la transformée de Fourier de $\rho_{a/\mu}$.

Fonctions paires et impaires

Proposition

- Soit f une fonction paire (i.e., $f(-t) = f(t)$) admettant une transformée de Fourier. Alors $\hat{f}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t \; dt$.
- Soit f une fonction impaire (i.e., $f(-t) = -f(t)$) admettant une transformée de Fourier. Alors $\hat{f}(\omega) = -2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t \; dt$.

Preuve

Supposons f paire. On a
$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\omega}dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-it\omega}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-it\omega}dt =$
$\int_{-\infty}^{0} f(-t)e^{-it\omega}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-it\omega}dt = -\int_{+\infty}^{0} f(s)e^{is\omega}ds +$
$\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-it\omega}dt = \int_{0}^{+\infty} f(s)e^{is\omega}ds + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-it\omega}dt =$
$\int_{0}^{+\infty} f(t)(e^{it\omega} + e^{-it\omega})dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t \; dt.$

Le cas d'une fonction impaire se traite d'une façon similaire (on utilise alors la formule $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$). □

Dérivation dans le domaine temporel

Proposition

Soit f une fonction de classe C^1 admettant une transformée de Fourier. Supposons de plus que $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$. Alors la dérivée f' de f admet une transformée de Fourier et

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Preuve

Puisque f' est continue, par une intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B f'(t)e^{-i\omega t}dt &= \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{t=A}^{t=B} \\
&\quad + \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} i\omega \int_A^B f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \lim_{B\to+\infty} f(B)e^{-i\omega B} \\
&\quad - \lim_{A\to-\infty} f(A)e^{-i\omega A} \\
&\quad + i\omega\hat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, il s'ensuit que $\lim_{B\to+\infty} f(B)e^{-i\omega B} = 0$ et $\lim_{A\to-\infty} f(A)e^{-i\omega A} = 0$.

Ainsi $\widehat{f'}(\omega)$ existe et est donné par $\widehat{f'}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$. $\square$

Corollaire

Soit f une fonction de classe C^n et admettant une transformée de Fourier. Supposons que $\lim_{t \to \pm\infty} f^{(k)}(t) = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

Alors

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega).$$

Exemple

Considérons la fonction gaussienne $g_a(t) = e^{-at^2}$ $(a > 0)$ qui est de classe C^1.

Sa dérivée est $g_a'(t) = -2at\ g_a(t)$. Par ailleurs $\lim_{t \to \pm\infty} g_a(t) = 0$.

Il en résulte que l'on a $\widehat{g_a'}(\omega) = i\omega \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

Dérivation dans le domaine fréquentiel

Proposition (admise)

Soit f une fonction absolument intégrable. Si $g : t \mapsto tf(t)$ est absolument intégrable, alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est dérivable et

$$\hat{f}'(\omega) = -i\widehat{g}(\omega).$$

Cette règle peut être appliquée en répétition.

Corollaire (admis)

Supposons que $f(t), tf(t), \cdots, t^n f(t)$ sont toutes absolument intégrables, alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est n fois dérivable et

$$\widehat{f}^{(n)}(\omega) = (-i)^n \widehat{g_n}(\omega)$$

où $g_n(t) = t^n f(t)$.

Exemple

La fonction $g(t) = t\rho_a(t)$ satisfait les conditions de la proposition précédente, et donc

$$\widehat{g}(\omega) = -\frac{1}{i}\widehat{\rho}_a'(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{2\sin(a\frac{\omega}{2})}{\omega}\right) = i\frac{a\cos(a\frac{\omega}{2})}{\omega} - i\frac{2\sin(a\frac{\omega}{2})}{\omega^2}.$$

Intégration

Proposition

Soit f une fonction continue et absolument intégrable. Supposons que $\lim_{R\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{R} f(t)dt = 0$. Alors, pour $\omega \neq 0$,

$$\hat{F}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{i\omega}$$

où on a posé $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds$.

Preuve

Puisque f est continue, il s'ensuit que F est de classe C^1.

Par ailleurs, $F'(t) = f(t)$.

De plus, par hypothèse, $\lim_{t \to \pm\infty} F(t) = 0$.

La proposition concernant la dérivation dans le domaine temporel peut donc s'appliquer et donne $\hat{f}(\omega) = \widehat{F'}(\omega) = i\omega \hat{F}(\omega)$. Le résultat est donc obtenu en divisant par $i\omega$ pour $\omega \neq 0$. □

Produit de convolution

Proposition (admis)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux, absolument intégrables et bornées.

Alors $f * g\colon t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)ds$ est également absolument intégrable et

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Table des matières

Rappel : Fonctions C^1 par morceaux

Définition

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite C^1 par morceaux sur $[a, b]$ si sa dérivée est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Plus précisément, il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, f est dérivable sur $[x_{i-1}, x_i]$ et sa dérivée y est continue.

La fonction f est dite C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est C^1 par morceaux sur tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Valeur principale de Cauchy

Il arrive parfois que $\lim\limits_{R \to +\infty} \displaystyle\int_{-R}^{R} f(t)dt$ existe sans que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ ne converge (bien entendu si l'intégrale impropre converge, alors sa valeur est égale à la limite précédente).

On parle alors de valeur principale de Cauchy de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

Exemple

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t \, dt$ n'existe pas, mais sa valeur principale de Cauchy est 0 puisque $\displaystyle\int_{-R}^{R} t \, dt = 0$ quel que soit $R > 0$.

Formule d'inversion

Théorème (admis) : Formule d'inversion

Soit f une fonction absolument intégrable et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors l'intégrale de Fourier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ converge pour chaque $t \in \mathbb{R}$ comme valeur principale de Cauchy, et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$$

où $f(t^+) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(t+h)$ et $f(t^-) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} f(t+h)$.

En particulier, si f est continue en t, alors

$$\frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = f(t).$$

Remarque

La notation $\hat{\hat{f}}$ de l'égalité $\frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-t) = f(t)$ de la formule d'inversion est ambiguë.

Si le premier signe "$\hat{\ }$" au-dessus de f correspond bien à la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f, le second désigne une intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{i\omega t}d\omega$, pour $g(\omega) = \hat{f}(\omega)$, convergeant seulement comme valeur principale de Cauchy. Ce n'est donc formellement pas la transformée de Fourier de g.

Toutefois il arrive souvent que intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{i\omega t}d\omega$, pour $g(\omega) = \hat{f}(\omega)$, soit convergente au sens des intégrales impropres de Riemann (par exemple, quand $\hat{f}$ est absolument intégrable).

Dans le cas où l'intégrale de Fourier converge comme une intégrale impropre, alors la formule $\hat{\hat{f}}$ désigne bien la transformée de Fourier de $\hat{f}$.

Exemple

Soit $f(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t)$.

Cette fonction satisfait les hypothèses du théorème précédent.

Par ailleurs on peut montrer que $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{1+i\omega}$.

Pour $t = 0$, il s'ensuit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1+i\omega} = \pi$ car $\dfrac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) = \dfrac{1}{2}$ pour $t = 0$.

Remarque

Cette intégrale doit bien être considérée comme une valeur principale de Cauchy car elle ne converge pas en tant qu'intégrale impropre de Riemann. En effet la partie imaginaire de $\dfrac{1}{1+i\omega}$ est $\dfrac{-\omega}{1+\omega^2}$ et $\displaystyle\int_A^B \frac{\omega}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2}(\ln(1+B^2) - \ln(1+A^2))$, ce qui signifie que la limite en $A \to -\infty$ (ou $B \to +\infty$) n'existe pas.

Exemple

Prenons $f(t) = e^{-a|t|}$. Alors on sait que $\hat{f}(\omega) = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$.

De plus f satisfait les hypothèses de la formule d'inversion et est continue.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a donc

$$e^{-a|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} e^{i\omega t} d\omega.$$

Et comme f est une fonction paire, on peut même écrire

$$e^{-a|t|} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} \cos \omega t \; d\omega.$$

Conséquence de la formule d'inversion

Proposition

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions absolument intégrables et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Si $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, alors $f(t) = g(t)$ en tout point t où f et g sont continues.

Preuve

Soit t un point où f et g sont toutes deux continues. Puisque $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)$, il s'ensuit par la formule d'inversion que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = g(t).$$

$\square$

Remarque

La proposition précédente est souvent appliquée (implicitement) quand on s'intéresse au problème fréquemment rencontré qui consiste, étant donné $F(\omega)$, à trouver une fonction $f(t)$ dont la transformée de Fourier est précisément $F(\omega)$.

Exemple

On cherche une fonction dont la transformée de Fourier est $F(\omega) = \dfrac{1}{(1+i\omega)^2}$. Cette fonction est le produit de la fonction $\dfrac{1}{(1+i\omega)}$ avec elle-même. Or la fonction $g(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t)$ a pour transformée de Fourier $\dfrac{1}{(1+i\omega)}$. Par la propriété du produit de convolution il en résulte que F est la transformée de Fourier de $g * g$, qui, après calcul, se trouve être $f(t) = te^{-t}\mathcal{U}(t)$.

Fonctions de carré sommable

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite de carré sommable sur $\mathbb{R}$ si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

existe en tant qu'intégrale impropre de Riemann.

Remarque

Une fonction absolument sommable n'est pas nécessairement de carré sommable. Par exemple $f(t) = \rho_2(t)\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$ est absolument intégrable, mais n'est pas de carré sommable car $\dfrac{1}{|t|}$ n'est pas intégrable sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Convolution dans le domaine fréquentiel

Proposition (admise)

Soient f et g deux fonctions C^1 par morceaux, absolument intégrables et de carré sommable sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})$$

est la transformée de Fourier de $t \mapsto f(t)g(t)$.

Égalité de Parseval

Proposition

Soient f et g deux fonctions C^1 par morceaux, absolument intégrables et de carré sommable sur $\mathbb{R}$. Alors nous avons l'égalité de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega.$$

En particulier (en prenant $f = g$), nous obtenons l'identité de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

(Il résulte notamment de l'identité de Plancherel que $\hat{f}$ est aussi de carré sommable.)

Preuve

D'après la propriété de convolution dans le domaine fréquentiel, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\tau)\hat{g}(\omega-\tau)d\tau$$

et en particulier en $\omega = 0$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\tau)\hat{g}(-\tau)d\tau.$$

Si on remplace g par $\bar{g}$ et qu'on utilise le fait que la transformée de Fourier de $\bar{g}$ est $\overline{\hat{g}(-\omega)}$, alors on obtient l'égalité de Parseval. $\square$

Table des matières

Formulaire des transformées de Fourier usuelles

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\rho_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lvert t\rvert \leq \dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\begin{cases} \dfrac{2\sin(a\frac{\omega}{2})}{\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \\ a & \text{sinon} \end{cases}$
$\dfrac{\sin at}{t} \ (a > 0)$	$\pi \rho_{2a}(\omega)$
$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lvert t\rvert}{a} & \text{si } \lvert t\rvert \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\begin{cases} \dfrac{4\sin^2(a\frac{\omega}{2})}{a\omega^2} & \text{si } \omega \neq 0 \\ a & \text{sinon} \end{cases}$
$\dfrac{\sin^2 at}{t^2} \ (a > 0)$	$\pi a q_{2a}(\omega)$
$e^{-a\lvert t\rvert} \ (a > 0)$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\dfrac{1}{a^2+t^2} \ (a > 0)$	$\dfrac{\pi}{a} e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$e^{-at}\mathcal{U}(t) \ (a \in \mathbb{C},\ \Re(a) > 0)$	$\dfrac{1}{a+i\omega}$
$te^{-at}\mathcal{U}(t) \ (a \in \mathbb{C},\ \Re(a) > 0)$	$\dfrac{1}{(a+i\omega)^2}$
$e^{-at}\sin(bt)\mathcal{U}(t) \ (a \in \mathbb{C},\ \Re(a) > 0,\ b \in \mathbb{R})$	$\dfrac{b}{(a+i\omega)^2+b^2}$
$e^{-at}\cos(bt)\mathcal{U}(t) \ (a \in \mathbb{C},\ \Re(a) > 0,\ b \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a+i\omega}{(a+i\omega)^2+b^2}$
$e^{-at^2} \ (a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

Propriétés de la transformation de Fourier

Vérifier que les hypothèses données dans le cours sont satisfaites pour utiliser ce tableau

Soient f, g deux fonctions admettant une transformée de Fourier.

Propriété	Fonction	Transformée de Fourier
Linéarité	$f(t) + \alpha g(t), \ \alpha \in \mathbb{C}$	$\hat{f}(\omega) + \alpha \hat{g}(\omega)$
Conjugaison	$\overline{f(t)}$	$\overline{\hat{f}(-\omega)}$
Décalage (temporel)	$f(t-\tau), \ \tau \in \mathbb{R}$	$e^{-i\omega\tau}\hat{f}(\omega)$
Décalage (fréquentiel)	$e^{i\alpha t} f(t), \ \alpha \in \mathbb{R}$	$\hat{f}(\omega - \alpha)$
Dilatation (temporelle)	$f(\mu t), \ \mu \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{\lvert\mu\rvert}\hat{f}(\frac{\omega}{\mu})$
Dérivation (temporelle)	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$
Dérivation (fréquentielle)	$tf(t)$	$i(\hat{f})'(\omega)$
Intégration	$\int_{-\infty}^{t} f(s)ds$	$\frac{\hat{f}(\omega)}{i\omega}, \ \omega \neq 0$
Produit de convolution (temporel)	$(f * g)(t)$	$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
Produit de convolution (fréquentiel)	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega)$
Inversion	$\frac{1}{2\pi}\hat{f}(t)$	$f(-\omega)$