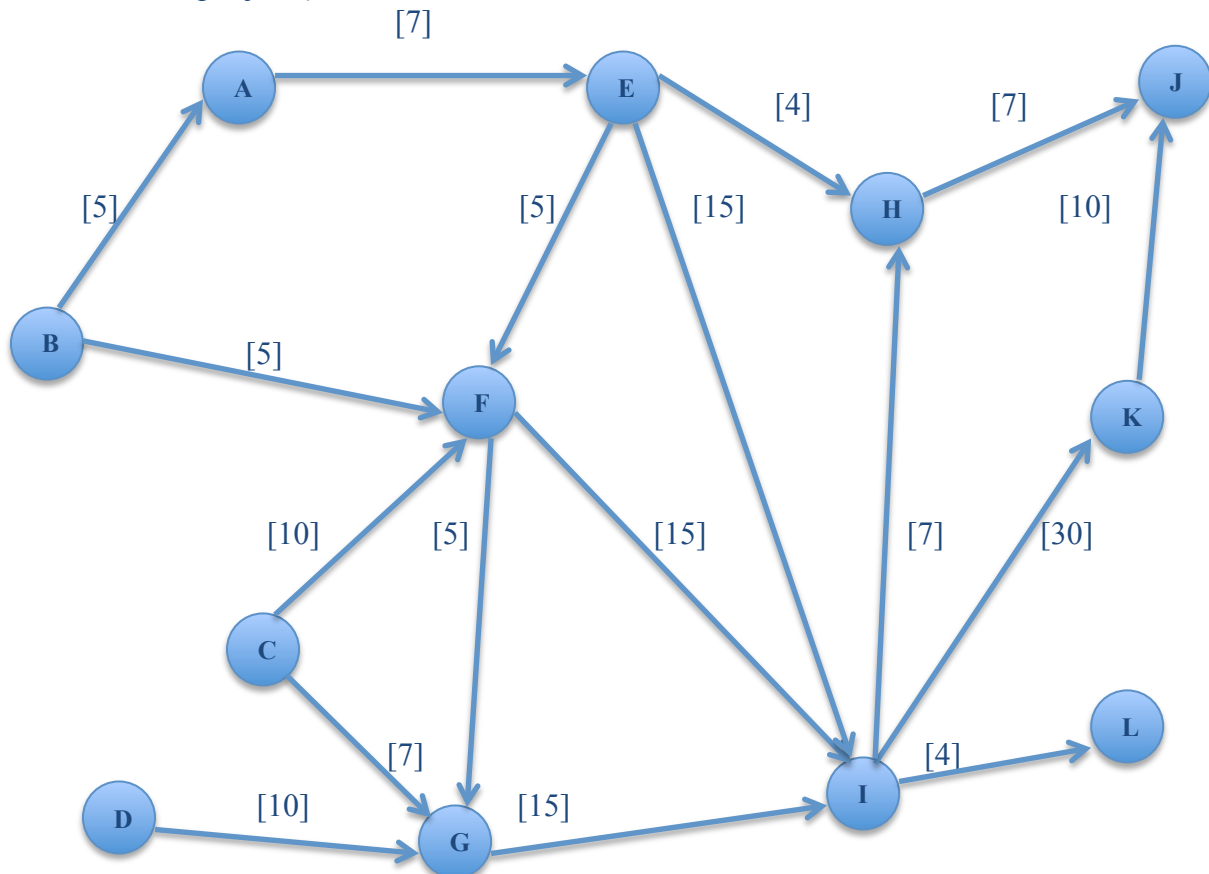


TD 2. Flots maximaux

Exercice 1 : Adduction d'eau

Trois villes J, K, L sont alimentées en eau grâce à quatre réserves A, B, C, D (nappes souterraines, châteaux d'eau, usines de traitement ...). Les réserves journalières disponibles sont de 15 milliers de m^3 pour A, de 10 pour B, de 15 pour C et de 15 pour D. Le réseau de distribution, comprenant aussi bien des aqueducs romains que des canalisations récentes, peut être schématisé par le graphe ci-dessous (les débits maximaux sont indiqués sur chaque arc en milliers de m^3 par jour) :



Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir pour la ville J : 15 milliers de m^3 , pour la ville K : 20 et 15 par la ville L.

1. Déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel et donner la coupe minimale correspondante.
2. La valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante, aussi le conseil inter- communal décide –t-il de refaire les canalisations (A, E) et (I, L). Déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations et la valeur du nouveau flot optimal.
3. Devant l'importance des travaux, le conseil intercommunal décide de ne pas refaire les deux canalisations en même temps. Dans quel ordre doit-on entreprendre leur réfection de façon à augmenter, après chaque tranche de travaux, la valeur du flot optimal passant dans le réseau ?
4. Quelles sont, après chaque tranche de travaux, les valeurs des flots optimaux.

Exercice 2 :

Un graphe de $n=5$ sommets et $m=8$ arcs est décrit par la liste des successeurs :

| | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| d_i^+ | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |

où d_i^+ le demi-degré extérieur du sommets i , est le nombre d'arcs partant du sommet i .

| | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Ext(j) | 2 | 5 | 1 | 5 | 1 | 2 | 5 | 4 |

Le tableau ext(j) liste, dans l'ordre lexicographique, les extrémités terminales des arcs issus du sommet 1 puis celles du sommet 2, etc. Ainsi le sommet 1 a deux successeurs : ce sont les 2 premiers éléments du tableau ext(j), donc les sommets 2 et 5.

1/ Tracer ce graphe. Montrer, en détail, qu'il s'agit d'un réseau de transport (la capacité de chaque arc étant donnée à la question suivante).

2/ On associe à chaque arc u_j une capacité c et un flux f :

| | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|----|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| c(j) | 1 | 3 | 2 | 5 | 5 | 3 | 4 | 12 |
| f(j) | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 9 |

Vérifier que les flux proposés forment bien un flot sur ce réseau de transport. Déterminer, obligatoirement à l'aide de l'algorithme approprié, si ce flot est maximal. Sinon, l'optimiser. Donner la valeur du flot maximal ; indiquer une coupe minimale, et rappeler sa signification concrète.

Exercice 3 :

Le serveur est connecté à la machine T par un réseau avec les nœuds A, B, C, D, les capacités de connexion entre les nœuds sont les suivantes (en Mbit/s) :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | T |
| S | 2 | 6 | 1 | | |
| A | | 3 | | 7 | |
| B | | | | 3 | 5 |
| C | | 2 | | 6 | |
| D | 3 | | | | 4 |

L'utilisateur de la machine T télécharge un très grand fichier du serveur S. On veut trouver le Routage qui maximise le débit.

- 1/ Quel problème algorithmique de cours correspond à ce problème de routage ?
- 2/ Comment s'appelle l'algorithme qui permet de le résoudre ? L'appliquer.