

Examen : Modélisation et simulation

Exercice 1. (Formulation variationnelle (10 points))

On se place dans Ω , un ouvert borné connexe de \mathbf{R}^N , de frontière $\partial\Omega$ régulière. On découpe la frontière en $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ F, avec $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ et soit $\lambda > 0$. On cherche $u \in L^2(\Omega)$ définie sur Ω telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\Gamma_D} = 0 \quad (\lambda u + \frac{\partial u}{\partial \nu})|_{\Gamma_N} = g \end{cases} \quad (1)$$

avec $f \in L^2(\mathbf{R})$ et $g \in L^2(\Gamma_N)$.

1. Etablir la formulation variationnelle (FV) du problème (1).
2. Montrer que (FV) est bien posée.
Indication : $u \in H_{0,\Gamma_D}^1$ avec $H_{0,\Gamma_D}^1 = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}$.
3. Proposer une discrétisation de (FV), basée sur l'élément fini de Lagrange P_1 , lorsque $\Omega = [0, 1]$.
4. Construire le système linéaire équivalent à la formulation variationnelle discrète.
5. Rappeler les propriétés principales de la matrice de ce système linéaire.
6. En déduire le système linéaire vérifié par la solution de l'équation de la chaleur si le temps $t \in [0, T]$ avec u_0 est la solution à l'état initial et en gardant la même configuration du domaine que dans la questions 3).

Exercice 2. (Régression linéaire multiple (10 points))

Le syndic d'un immeuble cherche à savoir l'effet de l'âge et l'expérience sur le revenu des habitants de sa commune

individu	âge	expérience	revenu
1	48	5	40125
2	38	4	25955
3	48	10	53383
4	37	13.5	14286
5	52	25.5	10443
6	40	7.3	60384
7	42	2.3	70488
8	45	19	24134
9	55	19	52706
10	24	5	8144
11	36	6	70655
12	39	16	36656

1. Donner un modèle mathématique qui modélise le revenu par rapport à l'âge, l'expérience et l'individu en se basant sur les résultats suivants donnés par Excel.

-3454,538925	2917,857976	4492,315636	-74630,84819
633,5485775	586,3531137	1147,444529	25252,08314
.....	11538,07893	N/A	N/A
.....	N/A	N/A
.....	N/A	N/A

2. Que représente chaque case du tableau précédent et remplir les cases manquantes.
3. Etudier la validité du modèle.

$$Loi.F(11, 40960392, 3, 8) = 0.0029$$

$$Loi.F(15, 3, 8) = 0.001$$

$$Loi.F(24.763, 1, 8) = 0.001$$

$$Loi.F(29.731, 1, 8) = 0.0006$$

$$Loi.F(15.32, 1, 8) = 0.004$$