Université de Carthage
Ecole Nationale Des Sciences Et Technologies Avancées Borj Cedria-Enstab

A.U : 2021/2022. **Classes : 1 TA.**
Nombre de pages : 1.

Série 4 :Notion de distribution sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 1:

1) $T_1(\varphi) = \prec T_1, \varphi \succ = \displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{1+t} dt$ est-elle une distribution ?

2) $T_2(\varphi) = \prec T_2, \varphi \succ = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi(k)$ est-elle une distribution ?

3) $T_3(\varphi) = \prec T_3, \varphi \succ = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mid \varphi(k) \mid$ est-elle une distribution ?

4) $T_4(\varphi) = \prec T_4, \varphi \succ = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^t \varphi'(t) dt$ est-elle une distribution ?

5) $T_5(\varphi) = \prec T_5, \varphi \succ = \displaystyle\int_0^1 \varphi^2(t) dt$ est-elle une distribution ?

Exercice 2:

1) Montrer que la valeur principale de $\frac{1}{x}$, notée $vp(\frac{1}{x})$, est une distribution sur $\mathbb{R}$, où: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \prec vp(\frac{1}{x}), \varphi \succ = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$

2) Monter que $\frac{d}{dx} \ln(|x|) = vp(\frac{1}{x})$.

Exercice 3:

Soit H la fonction de Heaviside. On considère les distributions suivantes:
$T_1 = \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\left(H(x)\, e^{\lambda x}\right), \quad$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$
$T_2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)\left(H(x)\, \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\right), \quad$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$
$T_3 = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n}\left(H(x)\, x^{n-1}\right) = S_n, \quad$ où $n \in \mathbb{N}^*$
Monter que pour $i = 1, 2, 3, \quad T_i = \delta$, où δ est la distribution de Dirac en 0.

Exercice 4:

1) Montrer que la partie finie de $\frac{1}{x^2}$, notée $Pf(\frac{1}{x^2})$, est une distribution sur $\mathbb{R}$, où: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \prec Pf(\frac{1}{x^2}), \varphi \succ = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \left(\frac{\varphi(x)}{x^2} - \frac{2}{\varepsilon}\varphi(0)\right) dx.$

2) Montrer que $\frac{d}{dx} vp(\frac{1}{x}) = -Pf(\frac{1}{x^2})$.

Exercice 5:

1) Montrer que $\prec T, \varphi \succ = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x| \varphi(x) dx$ définit une distribution.

2) Calculer la dérivée de cette distribution.

Série 4 : Notion de distribution sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 1.

1/ $T_1(\varphi) = \langle T_1, \varphi \rangle = \int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{1+t}\, dt.$

. Il est clair que T_1 est linéaire (car : $T_1(\varphi_1 + \lambda \varphi_2) = \int_0^1 \frac{\varphi_1'(t) + \lambda \varphi_2'(t)}{1+t} dt$
$= T(\varphi_1) + \lambda T(\varphi_2)$)

. De plus, ~~on a~~ soit K un compact de $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \quad |\langle T_1, \varphi \rangle| \leq \int_0^1 \frac{|\varphi'(t)|}{1+t}\, dt$$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{1+t} \sup_{t \in K} |\varphi'(t)|\, dt$$

$$\leq C \cdot P_1(\varphi).$$

où $C = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2).$

$\Rightarrow T_1$ est une distribution sur $\mathbb{R}$: $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

2/ $T_2(\varphi) = \langle T_2, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{m} \varphi(k).$

. Il est clair que T_2 est une forme linéaire.

. De plus, soit K un compact de $\mathbb{R}$, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \quad |\langle T_2, \varphi \rangle| \leq \sum_{k=0}^{m} |\varphi(k)|$$

$$\leq C \cdot P_0(\varphi)$$

où $C = \sum_{k=0}^{m} 1 = m+1$ et $P_0(\varphi) = \sup_{k \in K} |\varphi(k)|$

$\Rightarrow T_2$ est une distribution sur $\mathbb{R}$: $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3/ $T_3(\varphi) = \langle T_3, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{m} |\varphi(k)|$

$T_3 \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ car T_3 n'est pas linéaire.

4/ $T_4(\varphi) = \langle T_4, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} e^t \cdot \varphi'(t)\, dt$

- On a T_4 est linéaire.
- De plus, soit K un compact de $\mathbb{R}$, on a

$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \quad |\langle T_4, \varphi \rangle| \leq \int_{-1}^{1} e^t |\varphi'(t)|\, dt$

$\leq C \cdot P_1(\varphi)$

où $C = \int_{-1}^{1} e^t\, dt = [e^t]_{-1}^{1} = e - e^{-1}$.

$\Rightarrow T_4 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

5/ $T_5(\varphi) = \langle T_5, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi^2(t)\, dt$.

$T_5 \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ car T_5 n'est pas linéaire.

Exercice 2

1/ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$

$vp(\frac{1}{x})$: la valeur principale de $\frac{1}{x}$.

• Il est clair que $vp(\frac{1}{x})$ est une forme linéaire.

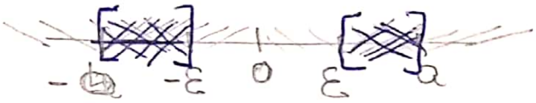
• De plus, soit $K = [-a, a]$, pour $a > 0$, un compact de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R}), \quad \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) / \underbrace{supp(\varphi)}_{=\overline{\{x \in \mathbb{R} / \varphi(x) \neq 0\}}} \subset [-a,a]\} \quad \Updownarrow \quad x \in [-a,a] \Longleftrightarrow |x| \leq a}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ |x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a \\ \bullet\ |x| \geq \varepsilon \Longleftrightarrow x \geq \varepsilon \text{ et } x \leq -\varepsilon \\ \Rightarrow \varepsilon \leq x \leq a \text{ et } -a \leq x \leq -\varepsilon \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right)$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

avec : $\varphi(0) \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x} \right) = \varphi(0) \left(\int_{a}^{\varepsilon} \frac{-dX}{-X} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x} \right)$

$\left[\text{on pose : } X = -x \Longleftrightarrow dX = -dx \right]$

$$= \varphi(0) \left(-\int_{\varepsilon}^{a} \frac{dy}{y} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dy}{y} \right) = 0.$$

$$\Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}),\ \left|\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq \left(\int_{-a}^{a} dx\right)\cdot\left(\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|\right)$$

$$\leq 2a \cdot P_1(\varphi)$$

$\Rightarrow$ La valeur principale de $\frac{1}{x}$, $vp\left(\frac{1}{x}\right)$, est une distribution sur $\mathbb{R}$

$$\underline{vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})}.$$

2/ Montrer que $\frac{d}{dx}\ln(|x|) = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $a>0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-a,a]$ $\Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, On applique la formule de dérivée d'une distribution:

$$\left\langle \frac{d}{dx}\ln|x|, \varphi \right\rangle = -\left\langle \ln|x|, \varphi' \right\rangle$$

$$= -\int_{-a}^{a} \ln|x|\, \varphi'(x)\, dx$$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \begin{cases} -x & \text{si } x \leq -\varepsilon \\ x & \text{si } x \geq \varepsilon \end{cases}$$

$-\varepsilon \quad 0 \quad \varepsilon$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \ln(-x)\,\varphi'(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{a} \ln(x)\,\varphi'(x)\,dx\right)$$

• Par intégration par parties, on a:

$$\begin{cases} U = \ln(-x) \longrightarrow U' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \\ V' = \varphi'(x) \longrightarrow V = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_{-a}^{-\varepsilon} \ln(-x)\,\varphi'(x)\,dx = \Big[\ln(-x)\,\varphi(x)\Big]_{-a}^{-\varepsilon} - \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

$\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-a,a]$ $\Rightarrow \varphi(-a^-) = \varphi(a^+) = 0$: φ s'annule en dehors de $[-a,a]$

φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

$$= \ln(\varepsilon)\,\varphi(-\varepsilon) - \underbrace{\ln(a)\,\varphi(-a)}_{0} - \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$\rightarrow \int_{\varepsilon}^{a} \ln(x)\,\varphi'(x)\,dx = \Big[\ln(x)\,\varphi(x)\Big]_{\varepsilon}^{a} - \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

Puisque φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$= \underbrace{\ln(a)\,\varphi(a)}_{0} - \ln(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

• On applique ensuite la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 1:

$$\ln(\varepsilon)\left[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\right] = \ln(\varepsilon)\left[\varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) - \left(\varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0)\right) + o(\varepsilon)\right]$$

où $o(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

$$= -2\varphi'(0)\,\varepsilon\cdot\ln(\varepsilon) + o(\varepsilon\ln(\varepsilon))$$

(F. de Taylor-Young en x_0 à l'ordre 1:
$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$)

Donc, on obtient :

$$\left\langle \frac{d}{dx} \ln|x|, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \underbrace{2\varphi'(0)\varepsilon \ln(\varepsilon)}_{\downarrow \; 0} + \underbrace{o(\varepsilon \ln \varepsilon)}_{\downarrow \; 0} \right)$$

où $\left(\varepsilon \ln(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \right)$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$= \left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle$$

En conclusion,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln|x| = vp\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2/ $2^{ème}$ méthode : Montrer que $\frac{d}{dx} \operatorname{Ln}(|x|) = vp\left(\frac{1}{x}\right)$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on applique la formule de la dérivée d'une distribution :

$$\left\langle \frac{d}{dx} \operatorname{Ln}|x|, \varphi \right\rangle = -\langle \operatorname{Ln}|x|, \varphi' \rangle$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Ln}|x| \cdot \varphi'(x)\, dx$$

$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} -x & \text{si } x \leq -\varepsilon \\ x & \text{si } x \geq \varepsilon \end{cases}$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \operatorname{Ln}(-x)\varphi'(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \operatorname{Ln}(x) \cdot \varphi'(x)\, dx \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \operatorname{Ln}|x| \cdot \varphi'(x)\, dx$$

$(|x| \geq \varepsilon) \Leftrightarrow (\boxed{x \leq -\varepsilon} \text{ et } \boxed{x \geq \varepsilon})$

Par intégration par parties, on pose $U = \operatorname{Ln}(-x) \to U' = \frac{1}{x}$

$V' = \varphi'(x) \to V = \varphi(x)$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\left[\operatorname{Ln}(-x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \left[\operatorname{Ln}(x)\varphi(x)\right]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\operatorname{Ln}(\varepsilon)\left[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\right] - \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right)$$

Formule de Taylor Young

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\underbrace{2\varphi'(0)\varepsilon \cdot \operatorname{Ln}(\varepsilon)}_{\to 0} + \underbrace{\theta(\varepsilon \operatorname{Ln}(\varepsilon))}_{\to 0} + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right)$$

$$= \left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

Exercice 3

- H la fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) \quad : \text{la fonction indicatrice de } [0,+\infty[$$

- δ la distribution de Dirac en 0 :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

$\rightarrow$ $T_1 = \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\left(H(x)\, e^{\lambda x}\right)$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Soit. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. on applique la formule du dérivée d'une distribution

$$\left\langle \frac{d}{dx}\left(H(x)\, e^{\lambda x}\right), \varphi \right\rangle = -\left\langle H(x)\, e^{\lambda x}, \varphi' \right\rangle$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, e^{\lambda x} \varphi'(x)\, dx$$

Par intégration par parties :

$U = e^{\lambda x} \longrightarrow U' = \lambda e^{\lambda x}$

$V' = \varphi'(x) \longrightarrow V = \varphi(x)$

$$= -\int_{0}^{+\infty} e^{\lambda x} \varphi'(x)\, dx$$

$$= -\left[e^{\lambda x} \cdot \varphi(x)\right]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} \varphi(x)\, dx$$

φ est à support compact et $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K = [-a, a]$ $\Rightarrow$ φ s'annule en dehors de K : $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

$$= \varphi(0) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, e^{\lambda x} \varphi(x)\, dx$$

$$= \langle \delta, \varphi \rangle + \left\langle \lambda H(x)\, e^{\lambda x}, \varphi \right\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(H(x)\, e^{\lambda x}\right) = \delta + \lambda H(x)\, e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\left(H(x)\, e^{\lambda x}\right) = \delta}$$

$\Rightarrow T_2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)\left(H(x)\,\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\right)$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On applique la formule du <u>dérivée d'ordre 2 d'une distribution</u>:

$$\left\langle \frac{d^2}{dx^2}\left(H(x)\,\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\right), \varphi \right\rangle = (-1)^2 \left\langle H(x)\,\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}, \varphi'' \right\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\,\varphi''(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\,\varphi''(x)\,dx$$

<u>1ère intégration par parties:</u>

$U = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} \longrightarrow U' = \cos(\lambda x)$

$V' = \varphi''(x) \longrightarrow V = \varphi'(x)$

$$= \underbrace{\left[\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\,\varphi'(x)\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \cos(\lambda x)\,\varphi'(x)\,dx$$

<u>2ème intégration par parties:</u>

$U = -\cos(\lambda x) \longrightarrow U' = \lambda \sin(\lambda x)$

$V' = \varphi'(x) \longrightarrow V = \varphi(x)$

$$= \left[-\cos(\lambda x)\,\varphi(x)\right]_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} \sin(\lambda x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \varphi(0) - \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \langle \delta, \varphi \rangle - \left\langle \lambda^2 H(x)\,\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}, \varphi \right\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\left(H(x)\,\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\right) = \delta - \lambda^2 H(x)\,\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)\left(H(x)\,\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\right) = \delta}$$

$$T_3 = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(H(x)\cdot x^{n-1}\right) = S_n \quad , \text{ où } n\in\mathbb{N}^*$$

Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On applique la formule de dérivée d'ordre n d'une distribution:

$$\langle S_n,\varphi\rangle = \langle T_3,\varphi\rangle = \left\langle \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(H(x)x^{n-1}\right),\varphi\right\rangle$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left\langle H(x)\,x^{n-1},\varphi^{(n)}\right\rangle$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,x^{n-1}\,\varphi^{(n)}(x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_{0}^{+\infty} x^{n-1}\,\varphi^{(n)}(x)\,dx$$

Par intégration par parties:

$U = x^{n-1} \longrightarrow U' = (n-1)x^{n-2}$

$V' = \varphi^{(n)}(x) \longrightarrow V = \varphi^{(n-1)}(x)$

Pour $n\geq 2$:

$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left\{\underbrace{\left[x^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)\right]_0^{+\infty}}_{} - \int_0^{+\infty}(n-1)\,x^{n-2}\,\varphi^{(n-1)}(x)\,dx\right\}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\int_0^{+\infty} x^{n-2}\cdot\varphi^{(n-1)}(x)\cdot dx$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\left\langle H(x)\,x^{n-2},\varphi^{(n-1)}\right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{(n-2)!}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(H(x)x^{n-2}\right),\varphi\right\rangle$$

$$= \langle S_{n-1},\varphi\rangle$$

$n\in\mathbb{N}^*$

Donc, pour tout $n\geq 2$, $S_n = S_{n-1} = S_{n-2} = S_{n-3} = \dots = S_2 = S_1$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = S_1 = \frac{1}{0!}\,\frac{d}{dx}\left(H(x)\cdot x^0\right)$

$$\Rightarrow T_3 = \frac{d}{dx}H(x)$$

avec $\left\langle \frac{d}{dx}H(x),\varphi\right\rangle = -\langle H(x),\varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\,dx = -\left[\varphi(x)\right]_0^{+\infty} = \varphi(0)$

donc, $\left\langle \frac{d}{dx}H(x),\varphi\right\rangle = \langle \delta,\varphi\rangle$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} H(x) = \delta$$

En Conclusion, $\boxed{T_3 = \delta}$

Exercice 4

1/ Partie finie de $\frac{1}{x^2}$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\quad \left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{|x|\geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2}{\varepsilon}\varphi(0)\right)$$

• Il est clair que $Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est <u>une forme linéaire</u>.

• De plus, soit $K=[-a,a]$, pour $a>0$, <u>un compact de $\mathbb{R}$</u> tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R}),\quad \left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2}{\varepsilon}\varphi(0)\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2}{\varepsilon}\varphi(0)\right)$$

avec :

$$\rightarrow \int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx = \int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\,dx + \int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(0)+x\varphi'(0)}{x^2}\,dx$$

$$\rightarrow \int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx = \int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi(0)+x\varphi'(0)}{x^2}\,dx$$

et : $\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(0)+x\varphi'(0)}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi(0)+x\varphi'(0)}{x^2}\,dx$

$$= \varphi(0)\left(\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon}^{a}\frac{dx}{x^2}\right) + \varphi'(0)\underbrace{\left(\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{a}\frac{dx}{x}\right)}_{=0 \text{ (Voir Exercice 2)}}$$

$$= \varphi(0)\left(-\int_{a}^{\varepsilon}\frac{dX}{X^2} + \int_{\varepsilon}^{a}\frac{dx}{x^2}\right) \quad \text{On pose : } X=-x \Rightarrow dX=-dx$$

$$= 2\varphi(0)\int_{\varepsilon}^{a}\frac{dx}{x^2} = 2\varphi(0)\left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{a} = 2\varphi(0)\left[\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{a}\right]$$

$$= \frac{2}{\varepsilon}\varphi(0) - \frac{2}{a}\varphi(0).$$

Donc,

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\,dx - \frac{2}{a}\varphi(0)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle = \int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\,dx - \frac{2}{a}\varphi(0)}$$

+ Puisque φ est $\mathcal{C}^\infty$, on écrit alors, la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\,x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + o(x^2), \text{ où } o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2} = \frac{1}{2}\varphi''(0).$$

Donc, $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$,

$$|\langle Pf(\tfrac{1}{x^2}), \varphi\rangle| \leq \frac{1}{2}\left(\int_{-a}^{a} dx\right)\left(\sup_{x\in K}|\varphi''(x)|\right) + \frac{2}{a}\left(\sup_{x\in K}|\varphi(x)|\right)$$

$P_0(\varphi) \leq P_2(\varphi)$?

$$\leq a \cdot P_2(\varphi) + \frac{2}{a} P_0(\varphi)$$

$$\leq \left(a + \frac{2}{a}\right) P_2(\varphi)$$

$\Rightarrow$ La partie finie de $\frac{1}{x^2}$, $Pf(\frac{1}{x^2})$, est une distribution sur $\mathbb{R}$

$$\underline{\underline{Pf\left(\frac{1}{x^2}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})}}$$

2/ Montrer que : $\frac{d}{dx} vp(\frac{1}{x}) = -Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on applique la formule du dérivée d'une distribution :

$$\left\langle \frac{d}{dx} vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\right\rangle = -\left\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi'\right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$

Soit $K = [-a, a]$, pour $a > 0$, un compact de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \frac{d}{dx} vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx\right)$$

Par intégration par parties, on a :

$$U = \frac{1}{x} \longrightarrow U' = \frac{-1}{x^2}$$

$$V' = \varphi'(x) \longrightarrow V = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \langle \frac{d}{dx} vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{a} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} + \frac{\overbrace{\varphi(-a)}^{0}}{a} + \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \frac{\overbrace{\varphi(a)}^{0}}{a} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \left[\frac{\varphi(-\varepsilon) + \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \right)$$

avec : $\varphi(-\varepsilon) + \varphi(\varepsilon) =$

Puisque φ est C^∞, on applique alors la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 : $\varphi(-\varepsilon) + \varphi(\varepsilon) = \varphi(0) - \cancel{\varphi'(0) \cdot \varepsilon} + \varphi(0) + \cancel{\varphi'(0)\varepsilon} + \theta(\varepsilon)$

$$= 2\varphi(0) + \theta(\varepsilon) \quad \text{où } \theta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \langle \frac{d}{dx} vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{\theta(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2}{\varepsilon} \varphi(0) \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2}{\varepsilon} \varphi(0) \right)$$

$$= \langle -Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \rangle$$

En conclusion,

$$\boxed{\frac{d}{dx} vp\left(\frac{1}{x}\right) = -Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

Exercice 5

1| $$\langle T,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}}|x|\cdot\varphi(x)\cdot dx$$

. Il est clair que T est linéaire.

. De plus, soit $K=[-a,a]$, pour $a>0$, un compact de $\mathbb{R}$, tel que $\forall\varphi\in\mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R})$,

$$\langle T,\varphi\rangle=\int_{-a}^{a}|x|\,\varphi(x)\,dx.$$

alors, $$|\langle T,\varphi\rangle|\leq\int_{-a}^{a}|x|\,|\varphi(x)|\,dx$$
$$\leq\left(\int_{-a}^{a}|x|\,dx\right)\left(\sup_{x\in K}|\varphi(x)|\right)$$
$$\leq C\cdot P_0(\varphi)$$

où $C=\int_{-a}^{a}|x|\,dx=\int_{-a}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{a}x\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-a}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{a}=a^2.$

Donc T est une distribution sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2| Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On applique la formule du dérivée d'une distribution

$$\langle T',\varphi\rangle=-\langle T,\varphi'\rangle$$
$$=-\int_{\mathbb{R}}|x|\,\varphi'(x)\,dx$$
$$=\int_{-\infty}^{0}x\,\varphi'(x)\,dx-\int_{0}^{+\infty}x\,\varphi'(x)\,dx$$

Par intégration par parties, on pose: $U=x \Rightarrow U'=1$, $V'=\varphi'(x) \Rightarrow V=\varphi(x)$

$$=\underbrace{\left[x\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0}}_{=0}-\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx-\underbrace{\left[x\varphi(x)\right]_{0}^{+\infty}}_{=0}+\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$$

$\operatorname{supp}(\varphi)\subset[a,a]$

$$=-\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx+\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\text{signe}(x)\,\varphi(x)\,dx+\int_{0}^{+\infty}\text{signe}(x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\text{signe}(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

où signe est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ +1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Donc, $\langle T', \varphi \rangle = \langle \text{signe}(x), \varphi \rangle$

D'où, $\boxed{T' = \text{signe}(x)}$

2ème calcul :

$$\langle T', \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) - \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x) \right) \cdot \varphi(x) \cdot dx$$

$$= \langle \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) - \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x), \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad T' = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) - \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} - \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases} = \text{Signe}(x)$$

Scanné avec CamScanner