Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Carthage
Ecole Nationale Des Sciences Et Technologies Avancées Borj Cedria-Enstab

A.U : 2021/2022. **Classes : 1 TA.**
Nombre de pages : 3.

Série 1: Analyse pour l'ingénieur (Calculs différentiels)

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ d''efinie par $g(t) = f(2t, t^2 + 1)$.
   Démontrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

2. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(u, v) = f(uv^2, u^2 + v^2)$.
   Démontrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 2: Démontrer que les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 3: Montrer que les applications suivantes sont deux fois différentiables et trouver leurs différentielles secondes.

1. $f \in \mathcal{L}(E, G)$ continue.

2. $f : E \times F \to G$ bilinéaire continue.

3. $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = A^2$.

Exercice 4: Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Démontrer que f admet une dérivée suivant tout vecteur en $(0,0)$.
3. f est-elle differentiable en $(0,0)$?

Exercice 5: Justifier que les fonctions f suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle respectivement en $(1,1,2)$ et $(1,1)$:

1. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$
2. $f(x,y) = \Big(y \sin x,\ \cos x\Big)$
3. $f(x,y,z) = \Big(\frac{1}{2}(x^2 - z^2),\ \sin x \, \sin y\Big)$
4. $f(x,y) = \Big(xy,\ \frac{1}{2}x^2 + y,\ \ln(1+x^2)\Big)$

Exercice 6: Soit $f : R^3 \longrightarrow R$; $(x,y,z) \longmapsto \frac{xy}{z^2}$ si $z \neq 0$ et $f(x,y,0) = 0$.
1) Calculer les trois dérivées partielles de f au point $(1,1,1)$.
2) Montrer que f et différentiable au point $(1,1,1)$.
3) L'application f admet-elle des dérivées directionnelles dans toutes les directions au point $(0,0,0)$.
4) L'application f est-elle différentiable au point $(0,0,0)$.
5) Soit l'application $g : R^3 \longrightarrow R^3$ définie par

$$g(x,y,z) = (f(x,y,z), f(x,z,y), \frac{x^2y}{x^2+y^2}),$$

a) Déterminer la matrice Jacobienne de g au point $(2,2,2)$.
b) La fonction g admet-elle une réciprocque locale au voisinage du point $(2,2,2)$?

Exercice 7:

Calculer les matrices Hessiennes des fonctions f suivantes, sur leur domaine de définition:

1. $f(x,y,z) = \sin(x\,y\,z)$
2. $f(x,y) = \sin^2(\frac{y}{x})$

Exercice 8:

Écrire la formule de Taylor-Young en $(0,0)$ à l'ordre 2 pour la fonction:

$$f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}.$$

En déduire la limite $\frac{e^x-(1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Exercice 9: Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x,y) \mapsto < x,y >$ et de la norme associée $\| \; x \; \| = < x,y >^{1/2}$.
Soit u un endomorphisme continu de E que l'on suppose symétrique, i.e.

$$< u(x), y > = < x, u(y) >, \qquad \text{pour tout}\, x,y \in E.$$

Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto < u(x), x >$.
Montrer que f est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

Série 1 : Calculs Différentiels

Exercice 1

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de Classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

1/ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(t) = f(2t, t^2+1)$

On a :

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$
- la fonction $t \longmapsto (2t, t^2+1)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$
  Car : polynomiale

alors par composition, g est de Classe C^1 sur $\mathbb{R}$

on note $u(t) = 2t$ et $v(t) = t^2+1$

alors $g'(t) = u'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$

$\Rightarrow g'(t) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2t, t^2+1) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(2t, t^2+1)$

2/ $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u,v) \longmapsto h(u,v) = f(uv^2, u^2+v^2)$

On a :

- f de Classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
- la fonction $(u,v) \longmapsto (uv^2, u^2+v^2)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$
  Car : polynomiale

alors par composition, h est de Classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

on note $\alpha(u,v) = uv^2$

et $\beta(u,v) = u^2+v^2$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u,v) \frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)$$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = v^2 \frac{\partial f}{\partial x}(uv^2, u^2+v^2) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(uv^2, u^2+v^2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u,v) \frac{\partial f(\alpha\beta)}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial v} \frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 2uv \frac{\partial f}{\partial x}(uv^2, u^2+v^2) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(uv^2, u^2+v^2)$$

Exercice 2 :

1/ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'une part, f est de Classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

- les dérivées partielles de f d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3(x^2+y^2) - x^2y^3(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2xy^5 + 2x^3y^3 - 2x^3y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3x^2y^2(x^2+y^2) - x^2y^3(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4y^2 + 3x^2y^4 - 2x^2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4y^2 + x^2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

D'autre part, montrons que f admet des dérivées partielle en $(0,0)$

$f(x,0) - f(0,0) = 0$

$\Rightarrow \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

de même pour la dérivée partielle de f par rapport à la 2ème variable

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

· Reste à demontrer que les derivées partielles de f sont Continues en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2.|xy| \cdot \frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$y^2 \leqslant x^2+y^2$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 2|x.y|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$$

alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ est Continue en $(0,0)$

$$\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

On a $2|x.y| \leqslant x^2+y^2$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 3x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$$

alors $\frac{\partial f}{\partial y}$ est Continue en $(0,0)$

en conclusion f est de Classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

2) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x^2+y^2$

h est de Classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto g(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) & \text{si } t\neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

g est de Classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

de plus,

$$g'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t\neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $g'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 = g'(0)$

donc g' est continue en 0

donc g est de Classe C^1 sur $\mathbb{R}$

en conclusion, par composition $f = g\circ h$ est de Classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Rappel

Definition 1: f est differentiable en a si il existe $L_a \in \mathcal{L}_c(E,F)$ tq pour h: petit :

$$f(a+h) = f(a) + L_a h + \|h\| . \varepsilon(h)$$

ou $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

on note $L_a = Df(a)$

Definition 2 On dit que f est 2 fois differentiable en a si:

- f est differentiable en a
- L'application $Df: E \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$, $x \longmapsto Df(a)$

est differentiable en a.

$\longrightarrow$ la differentielle de Df en a est notée $D^2f(a)$

1) $f \in \mathcal{L}(E,G)$ Continue.

$f: E \longrightarrow G$ est lineaire et Continue

* Soit $x\in E$, h: petit tq:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x) + f(h) - f(x) \\ &= f(h) \\ &= L_a.h + 0 \end{aligned}$$

on pose $Df(x).h = f(h)$

puisque f est lineaire et Continue alors $Df(x) \in \mathcal{L}_c(E,G)$

donc f est differentiable.

et $Df(x).h = f(h)$

ou encore $Df(x) = f$

* l'application $Df : E \longrightarrow \mathcal{L}_c(E,G)$
$Df(x) \longmapsto f$
c'est l'application constante
donc Df est differentiable
et sa differentielle et $D^2f(x) = 0$

<u>en conclusion:</u>

f est 2 fois differentiable
et $D^2f(x) = 0$

2) $f : E \times F \longrightarrow G$ bilineaire Continue

Soit $(x,y) \in E \times F$; (h,k) petit

$f((x,y) + (h,k)) - f(x,y)$

$= f(x+h, y+k) - f(x,y)$

$= f(x,y) + f(x,k) + f(h,y) + f(h,k) - f(x,y)$

$= \underbrace{f(x,k) + f(h,y)}_{Df(x,y)(h,k)} + f(h,k)$

On pose $Df(x,y)(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$

Rappel
l'application bilineaire f est Continue
$\exists M > 0 / \forall (x,y) \in E \times F$
$\|f(x,y)\| \leq M \|x\| \cdot \|y\|$

* puisque f est bilineaire
donc lineaire par rapport à Chaque variable
donc $Df(x,y)$ est lineaire

** $\|Df(x,y)(h,k)\| = \|f(x,k) + f(h,y)\|$
$\leq \|f(x,k)\| + \|f(h,y)\|$
$\leq M \|x\| \|k\| + M' \|y\| \|h\|$

on note $\|h.k\| = \max(\|k\|, \|h\|)$

$\Rightarrow \|Df(x,y)(h,k)\| \leq (M \|x\| + M' \|y\|) \|h.k\|$

donc, il existe une constante
$c = M\|x\| + M'\|y\|$
tq $\|Df(x,y)(h.k)\| \leq c \|(h.k)\|$
donc Df est Continue
d'ou il existe $Df(x,y)$ lineaire et Continue
tq :
$Df(x,y)(h.k) = f(x,k) + f(h,y)$

* puisque l'application bilineaire f est Continue
alors $\exists M > 0$ tq
$\forall (h,k) \in E \times F$,
$\|f(h,k)\| \leq M \|h\| . \|k\|$
$\leq M \|(h,k)\|^2$

alors $\|f(h,k)\| \xrightarrow[(h,k) \to (0,0)]{} 0$

d'ou f est differentiable
et $Df(x,y)(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$

$\longrightarrow$ montrons que l'application :
$Df : E \times F \longrightarrow \mathcal{L}(E \times F, G)$
$(x,y) \longmapsto Df(x,y)$
est differentiable

On remarque que Df est lineaire par rapport à (x,y) et Continue (car f est lineaire par rapport à Chaque variable et Continue)
donc d'après question 1)
l'application Df est differentiable

et $D^2f(x,y)[(h,k),(u,v)]$
$= Df(x,k)u + Df(h,y).v$
$= f(u,k) + f(h,v)$

en conclusion, f est 2 fois differentiable
et $D^2f(x,y)[(h,k),(u,v)]$
$= f(u,k) + f(h,v)$

$f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$A \longmapsto f(A) = A^2 = A.A$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et H : petit

$f(A+H) - f(A)$

$= (A+H)^2 - A^2$

$= A^2 + AH + HA + H^2 - A^2$

$= AH + HA + H^2$

avec $\|H\|^2 \xrightarrow[H \to 0]{} 0$

On pose $Df(A)(H) = AH + HA$

$Df(A) \in \mathcal{L}c(M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R}))$

$Df(a)(h) = f(h)$

$Df(a) = f$

donc f est differentiable

et $Df(A)(H) = AH + HA$

montrons que l'application

$Df : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}c(M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R}))$

$A \longmapsto Df(A)$

Df est lineaire sur $M_n(\mathbb{R})$

espace de dimension finie : $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$

alors Df est Continue

donc d'aprés question 1/

Df est differentiable

et $D^2 f(A)(H, K) = D(Df(A)(H))K$

$= Df(H).K$

$= HK + KH$

Rappel

g : lineaire continue

$\Rightarrow g$ est differentiable

$Dg(a)(h) = g(h)$ differentiable en a par rapport à h

Exercice 4

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) $f(x, x^2) = \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2} \not\longrightarrow 0 = f(0,0)$

$\Rightarrow f$ n'est pas continue en $(0,0)$

2) Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

soit $t \neq 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(a,b)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(ta, tb)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{t^2 a^2 \, tb}{t^4 a^4 + t^2 b^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^3 a^2 b}{t^3 (t^2 a^4 + b^2)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{a^2 b}{t^2 a^4 + b^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } b = 0 \\ \dfrac{a^2}{b} & \text{si } b \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ admet une derivée en $(0,0)$ suivant le vecteur (a, b)

$$D_{(a,b)} f(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } b = 0 \\ \dfrac{a^2}{b} & \text{si } b \neq 0 \end{cases}$$

3) $a \Rightarrow b$; non $b \Rightarrow$ non a

f n'est pas continue

f n'est pas differentiable.

Exercice 5

1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = xy + yz + zx$

f est de Classe C^∞ (comme fonction polynomiale)

donc f est differentiable

$$Df(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$= (y+z \,,\, x+z \,,\, y+x)$$

donc $Df(1,1,2) = (3,3,2)$

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (y \sin x \,,\, \cos x)$

$= (f_1(x,y), f_2(x,y))$

f est de Classe C^∞ (comme composé de fonctions C^∞)

donc f est differentiable.

la differentielle de f est la matrice jacobienne de f

$$Df(x,y) = J(f)(x,y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,y)\right)_{1\le i,j\le 2}$$

$$= \begin{pmatrix} y\cos x & \sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$$

donc $Df(1,1) = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2) \,,\, \sin x \sin y\right)$

$= (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$

f est de Classe C^∞ (comme composée de fonction C^∞)

donc f est differentiable

$$Df(x,y,z) = J(f)(x,y,z)$$

$$= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,y,z)\right)_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 3}}$$

$$= \begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}$$

donc $Df(1,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \cos 1 \sin 1 & \sin 1 \cos 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x,y) = \left(xy \,,\, \frac{1}{2}x^2 + y \,,\, \ln(1+x^2)\right)$

$= (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$

f est de Classe C^∞ (comme composée de fonctions C^∞), donc f est differentiable

$$Df(x,y) = Jf(x,y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x,y)\right)_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 2}}$$

$$= \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+\alpha^2} & 0 \end{pmatrix}$$

donc $Df(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par :

$$\begin{cases} f(x,y,z) = \dfrac{xy}{z^2} & \text{si } z \neq 0 \\ f(x,y,0) = 0 \end{cases}$$

1) les trois derivées partielles de f au point $(1,1,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{y}{z^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{x}{z^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{-2xy}{z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = -2 \end{cases}$$

2)

Puisque les trois derivées partielles de f au point $(1,1,1)$ existent (et Continue)
on déduit alors que f est differentiable au point $(1,1,1)$

3) On fixe un vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$
Soit $t \neq 0$, On Calcule alors,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(ta, tb, tc) - f(0,0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(ta, tb, tc)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{1}{t} = \infty$$

en conclusion, f n'admet pas des derivées directionnelles en $(0,0,0)$ dans toutes les directions

4) donc f est n'est pas differentiable au point $(0,0,0)$.

5) Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par:

$$g(x,y,z) = \left(f(x,y,z), f(x,z,y), \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \left(\frac{xy}{z^2}, \frac{xz}{y^2}, \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \left(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z), g_3(x,y,z)\right)$$

la matrice jacobienne de g au pt $(2,2,2)$

$$J(g)(2,2,2) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(2,2,2)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b/ on remarque que :

$$\det\left(J(g)(2,2,2)\right) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-3}{8} \neq 0$$

alors la matrice Jacobienne $J(g)(2,2,2)$ est inversible.
Par conséquent, la fonction g admet une reciproque locale au voisinage du pt $(2,2,2)$

Exercice 7

Rappel

Matrice hessienne

$$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto f(x_1, \dots, x_m)$$

La matrice hesienne de f :

$$H(f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}$$

Proposition

si f est une fonction de Classe C^2 alors $H(f)$ est symetrique.

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

transposé de k

et $\boxed{D^2 f(a)(h.k) = h\, H(f)(a)\, {}^t k}$
où $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$
$k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^m$

1) $f(x,y,z) = \sin(x,y,z)$

Classe $C^2 \longrightarrow$ matrice hessienne est symetrique.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz\cos(xyz)$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz\cos(x,y,z)$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy\cos(xyz)$

+ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = -y^2z^2\sin(xyz)$
+ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -x^2z^2\sin(xyz)$
+ $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -x^2y^2\sin(xyz)$
+ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = z\cos(xyz) - xz^2y\sin(x,yz)$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)$
+ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) = y\cos(xyz) - xy^2z\sin(xyz)$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)$
+ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) = x\cos(xyz) - x^2yz\sin(xyz)$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)$

$$H(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

2) Soit $f(x,y) = \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$

f est de Classe C^2 (comme composée de fonction C^2)

Alors, la matrice hessienne de f est symetrique. et :

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y}{x^3}\sin\left(2\frac{y}{x}\right) + \frac{2y^2}{x^4}\cos\left(\frac{2y}{x}\right) & (\ldots \\ \\ \frac{-1}{x^2}\sin\left(2\frac{y}{x}\right) - \frac{2y}{x^3}\cos\left(2\frac{y}{x}\right) & (\ldots \end{pmatrix}$$

(1) : $\frac{-1}{x^2}\sin\left(2\frac{y}{x}\right) - \frac{2y}{x^3}\cos\left(2\frac{y}{x}\right)$

(2) : $\frac{2}{x^2}\cos\left(2\frac{y}{x}\right)$

Exercice 8

$$f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$$

$\longrightarrow$ Formule de Taylor Young en $(0,0)$ à l'ordre 2.

$$f(x,y) = f(0,0) + Df(0,0)(x,y) + \frac{D^2f(0,0)(x,y)^2}{2!} + o(\|(x,y)\|^2)$$

où $o(\|(x,y)\|^2 = \|(x,y)\|^2\,\varepsilon(x,y)$

où $\varepsilon(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

$\Rightarrow o(\|(x,y)\|^2) = (x^2+y^2)\,\varepsilon(x,y)$

avec. $f(0,0) = 1$

- $Df(0,0)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

or $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{e^x\sin y}{\cos^2 y}$

d'où $Df(0,0)(x,y) = (1,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$

• $D^2f(0,0)(x,y)^2$

$= D^2f(0,0)[\underbrace{(x,y)}_{h}.\underbrace{(x,y)}_{k}]$

$= (x,y)\, H(f)(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

• $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \dfrac{e^x}{\cos y}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 1$

• $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^x . \dfrac{\cos^3 y + \sin y 2\cos y}{\cos^4 y}$

$= \dfrac{e^x}{\cos y} + 2\dfrac{e^x \sin y}{\cos^3 y}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1$

• $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{e^x \sin y}{\cos^2 y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

$\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0$

$\Rightarrow D^2 f(0,0)[(x,y).(x,y)]$

$= (x,y)\, H(f)(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= (x,y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= x^2 + y^2$

$f(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\mathcal{E}(x,y)$

où $\mathcal{E}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2} - \dfrac{1+x}{x^2+y^2}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1+x}{x^2+y^2} + \dfrac{1}{2} + \mathcal{E}(x) - \dfrac{1+x}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{1}{2}.$

Exercice 9

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

definie par : $f(x) = \langle u(x), x \rangle$

1er Methode

Soit $x \in E$ tq h assez petit

$f(x+h) - f(x) = \langle u(x+h), x+h \rangle - \langle u(x), x \rangle$

le produit Scalaire $(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle$ est une application bilineaire continue

puisque u est un endomorphisme de l'espace vectoriel E

alors $u : E \longrightarrow E$ est une application lineaire.

donc on a :

$f(x,h) - f(x) = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), h \rangle + \langle u(h), x \rangle + \langle u(h), h \rangle - \langle u(x), x \rangle$

$= \langle u(x), h \rangle + \langle u(h), x \rangle + \langle u(h), h \rangle$

d'une part, on pose :

$Df(x)(h) = \langle u(x), h \rangle + \langle u(h), x \rangle$

où $Df(x) \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$

car l'application $(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle$ est bilineaire Continue

et l'application $u : E \longrightarrow E$ lineaire Continue

D'autre part, puisque l'application $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ est continue sur $E\times E$ et l'application u est continue sur E alors il existe deux constantes $C_0 > 0$ $C_1 > 0$ tq pour tout $h \in E$:

$$|\langle u(h),h\rangle| \leq C_0 \|u(h)\| \, \|h\|$$
$$\leq C_0 C_1 \|h\|^2$$

Ainsi $\langle u(h),h\rangle \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

en conclusion, f est differentiable sur E et $Df(x)(h) = \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), x\rangle$

2ème Methode

(Utiliser la differentiablité des applications particulières telles que l'application lineaire continue, l'application bilineaire continue, l'application composée, et l'application à valeurs dans un produit)

On remarque que f s'ecrit comme composée de deux fonctions :

$$\forall x \in E, \; f(x) = (g\circ\varphi)(x)$$
$$= g(\varphi(x))$$
$$= g(u(x), x)$$
$$= \langle u(x), x\rangle$$

Soit $g: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto \langle x,y\rangle$

le produit scalaire de E

g est une application bilineaire continue sur $E\times E$.

donc g est differentiable sur $E\times E$

$$Dg(x,y)(h,k) = g(h,y) + g(x,k)$$
$$= \langle h,y\rangle + \langle x,k\rangle$$

Soit $\varphi: E \longrightarrow E\times E$
$x \longmapsto (u(x), x) = (u(x), I(x))$

où : - l'identité $I: E \longrightarrow E$
$x \longmapsto I(x) = x$

est lineaire continue sur E

donc I est differentiable sur E

et $DI(x)(h) = I(h) = h$

puisque u est un endomorphisme de l'espace vectoriel E

alors $u: E \to E$ est une application lineaire

de plus u est continue sur E

donc u est differentiable sur E

et $Du(x)(h) = u(h)$

donc l'application φ est differentiable sur E (c'est une application à valeurs dans un produit) et :

$$D\varphi(x)(h) = (Du(x)(h), DI(x)(h))$$
$$= (u(h), h)$$

en conclusion,

$f = g\circ\varphi$ est la composée de deux fonctions differentiables

donc f est differentiable et :

$$Df(x)(h) = D(g\circ\varphi)(x)(h)$$
$$= [Dg(\varphi(x)) \circ D\varphi(x)](h)$$
$$= Dg(\varphi(x))\,[D\varphi(x)(h)]$$
$$= Dg(u(x), x)\,(u(h), h)$$
$$= \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), x\rangle$$