Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Carthage
Ecole Nationale Des Sciences Et Technologies Avancées Borj Cedria-Enstab

A.U : 2020/2021.
Nombre de pages : 2.

Classes : 1 TA.
Durée : 1h30.

Devoir Surveillé : Analyse pour l'ingénieur

NB : Une grande importance sera accordée à la clarté de la rédaction.

Exercice 1: (5 points) On considère l'équation différentielle suivante:

$$(E_1) : y" + y' = e^{-x}.$$

1) On posant $z = y'$, montrer que z est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) : z' + z = e^{-x}.$$

2) (a) Déterminer le réel a pour que la fonction $g(x) = axe^{-x}$ soit solution de (E_2).
(b) Montrer que z est une solution de (E_2) si et seulement si $(z - g)$ est solution de $(E_0) : y' + y = 0$.
(c) Résoudre l'équation (E_2) et donner la solution de (E_2) vérifiant $z(0) = 1$.
3) Déterminer la solution f de (E_1) telle que $f(0) = f'(0) = 0$.

Exercice 2: (5 points) Soit

$$(PC) \begin{cases} x''(t) = 2x^3(t) \;\; t \in R \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

1) Montrer que (PC) admet une unique solution (I, x), en justifiant la nature de cette solution (maximale ou globale).
2) Montrons que pour tout $t \in I$, $(x'(t))^2 = x(t)^4$.
3) Montrons que $x(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.
4) Trouvons l'expression de $x(t)$.

Exercice 3: (5 points) Un pendule élastique horizontal est constitué d'un ressort de raideur k et d'un solide de masse m.
On écarte le solide à partir de sa position d'équilibre, d'une distance

$$= \begin{pmatrix} \frac{y}{z^2} & \frac{x}{z^2} & -\frac{2xy}{z^3} \\ \frac{z}{y^2} & -\frac{2xz}{y^3} & \frac{x}{y^2} \\ \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & 0 \end{pmatrix}$$ $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\}$

$$J_g(1,1,2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 2 & -4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5-b) $$J_g(0,1,2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Det}(J_g(0,1,2)) = 0 \implies g$ n'admet pas une réciproque locale au voisinage de $(0,1,2)$.

6) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{1}{z^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -\frac{2x}{z^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 1/z^2$,

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\}$.

Hessienne $\implies H_f(2,2,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2,2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,2,2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,2,2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ +\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ex4 DS (20_21)

1) $x \longmapsto \frac{xy}{z^2}$, $y \longmapsto \frac{xy}{z^2}$ sont dérivables

$\hookrightarrow$ dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ $\forall z \in \mathbb{R}^*$

$\Downarrow$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)$ existe

$\hookrightarrow$ dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall z \in \mathbb{R}^*$

$\Downarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)$ existe

et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y}{z^2}$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\}$

et on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x}{z^2}$ // ————

• $z \longmapsto \frac{xy}{z^2}$ est dériv. sur $\mathbb{R}^*$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial z}$ ~~(x,y,z)~~ existe sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\}$

et on a $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{2xy}{z^3}$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z \neq 0\}$

D'où $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 1, \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = -2}$

2) $(x,y,z) \longmapsto x$, $(x,y,z) \longmapsto y$, $(x,y,z) \longmapsto z$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$ en particulier sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont continues sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\}$

Comme $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\} \Rightarrow$ f est diffehentiable en $(1,1,1)$.

3) Soit $\vec{u} = (1,1,1) \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$. Alors

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0_{\mathbb{R}^3} + tu) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,t,t)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} = \infty.$$ Donc f ~~n'admet pas de dérivées selons~~ n'st pas derivable selon la direction $\vec{u}$ en $(0,0,0)$.

4) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\} \ni (1,2,2) \Rightarrow$ f est diffehentiable en $(1,2,2)$.

5) $g(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$

$$= \left(f(x,y,z); f(x,z,y), \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right)$$

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

c) (E_2) est une équ. diff. linéaire de 1er ordre

alors une solution est $Z = \cancel{Z}_H + Z_p$ avec

$Z_H(x) = c e^{-x}$ sol. de $Z' + Z = 0$ (H)

$c \in \mathbb{R}$

et $Z_p = \cancel{g(x)}$ car d'après 2-a) $g(x) = x e^{-x}$ est une sol. particulière de (E_2)

$= x e^{-x}$

Donc $Z(x) = c e^{-x} + x e^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$ est ~~une sol~~ la forme générale d'une sol. de (E_2).

Si de plus,

$Z(0) = 1 \iff c = 1$ et par suite la fonction

l'unique sol. de (E_2) est la fonction

$Z(x) = (1+x) e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

3) f sol. de (E_1) ssi $\begin{cases} f' = Z \\ f(0) = f'(0) = 1 \end{cases}$ et Z sol. de (E_2)

$$\iff \begin{cases} f'(x) = c e^{-x} + x e^{-x} = (c+x) e^{-x} \\ f(0) = f'(0) = 1 \end{cases}$$

I. par parties $\begin{cases} e^{-x} \xrightarrow{\int} -e^{-x} \\ c+x \xrightarrow{'} 1 \end{cases} \Rightarrow \int (c+x) e^{-x} dx = -(c+x) e^{-x} + \int e^{-x}$

$$\iff \begin{cases} f(x) = -(c+1+x) e^{-x} + \lambda, \ (c, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - c = 0 \\ -c + 1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{ c = 1 = \lambda$

Ex1 : 1) $z = y'$, y est sol. de (E_1) $\Rightarrow$

z est dérivable et $z' = y'' = e^{-x} - y' = e^{-x} - z$

$\Rightarrow$ z est solution de $z' + z = e^{-x}$ (E_2).

2-a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$g'(x) = (a - ax)e^{-x} \cancel{= a(1-x)e^{-x}}$

$= ae^{-x} - g(x)$

g est sol. de (E_2) $\Rightarrow$ $g'(x) + g(x) = e^{-x}$

$\Rightarrow ae^{-x} - g(x) + g(x) = e^{-x}$

$e^{-x} \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{a = 1}$

2-b) z est sol. de (E_2) ssi z est dérivable et

on a $z' + z = e^{-x} \Leftrightarrow z'(x) - g'(x) = e^{-x} - z(x) + g(x) - e^{-x}$

$g' = e^{-x} - g$

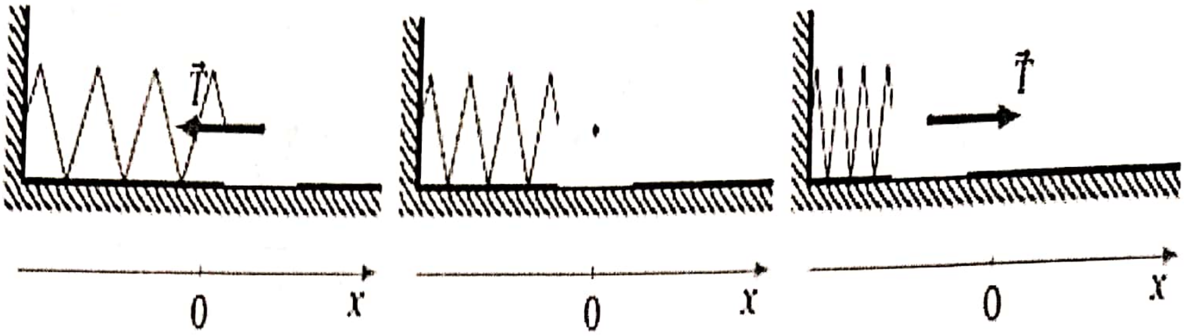
$\Leftrightarrow z'(x) - g'(x) = g(x) - z(x)$

$\Leftrightarrow (z-g)'(x) = -(z-g)(x)$

$\Leftrightarrow (z-g)'(x) + (z-g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow (z-g)$ est sol. de $y' + y' = 0$

d, ou on le rapproche vers le mur puis on le lâche sans vitesse initiale (voir le dessin).
On note que $\vec{T}$ est une force du rappel qui est un vecteur horizontal qui pointe vers la position d'équilibre.



1) D'aprés le principe fondamental de la mécanique, quelle est l'équation du mouvement du solide?
2) Dans un premier temps, on suppose qu'il n'y a pas de frottement. Ecrire l'equation différentielle du mouvement.
3) Résoudre cette éequation sachant qu'on lâche le solide au point d'abscisse 1 et sans vitesse initiale.
Exercice 4: (5 points) Soit $f : R^3 \longrightarrow R$; $(x, y, z) \longmapsto \frac{xy}{z^2}$ si $z \neq 0$

et $f(x, y, 0) = 0$.
1) Calculer les trois dérivées partielles de f au point $(1, 1, 1)$.
2)Montrer que f et différentiable au point $(1, 1, 1)$.
3) L'application f admet-elle des dérivées directionnelles dans toutes les directions au point $(0, 0, 0)$.
4) L'application f est-elle différentiable au point $(1, 2, 2)$.
5) Soit l'application $g : R^3 \longrightarrow R^3$ définie par

$$g(x, y, z) = (f(x, y, z), f(x, z, y), \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}),$$

a) Déterminer la matrice Jacobienne de g au point $(1, 1, 2)$.
b) La fonction g admet-elle une récipropque locale au voisinage du point $(0, 1, 2)$.
6) Calculer la matrice Hessienne de l'application f au point $(2, 2, 2)$.

Donc la solution de (E_1) telle que $f(0)=f'(0)=0$

est la fonction $f : x \longmapsto 1-(2+x)e^{-x}$