Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Carthage
Ecole Nationale Des Sciences Et Technologies Avancées Borj Cedria-Enstab

A.U : 2020/2021. **Classes : 1 TA.**
Nombre de pages : 2. **Session principale**

Examen : Analyse pour l'ingénieur

NB : Une grande importance sera accordée à la clarté de la rédaction.

Exercice 1: (6 points)

1) Montrer q'au sens des distributions on a $(T_{|x|})'' = 2\delta_0$.
(où $(T_{|x|})''$ est la dérivée seconde de la distribution associée à la valeur absolue de x).
2) Montrer que $H(t)$ la fonction de Heaviside est une distribution. ($H(t) = 1$ si $t \geq 1$, sinon $H(t) = 0$).
3) En déduire que $f(t) = H(t)\sin(t)$ est une distribution.
4) Calculer de deux façons différentes la dérivée de T_f (la distribution associée à la fonction f).

Exercice 2: (8 points)

Partie I:

On considère l'équation différentielle d'odre 2 suivante:

$$(E1) \left\{ \; x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0, \;\; t \in \mathbb{R}. \right.$$

1) Mettre (E1) sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 à deux inconnues.
2) Donner toutes les solutions de (E1).
3) Trouver les solutions du problème de Cauchy.

$$(E1) \begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = t, \;\; t \in \mathbb{R}. \\ x(0) = \frac{27}{25} \\ x'(t) = 0 \end{cases}$$

4) Trouver la solution maximale du problème de Cauchy.

$$(E1) \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t), \;\; t \in \mathbb{R}. \\ y_2' = -2y_1(t) + 4y_2(t) + \exp(t) y_1(0) = 2; \;\; y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Partie II:

1) Soit $t_0 \in I$. Montrer qu'il existe une unique solution $M \in C^1(I, \mathbb{M}_n(R))$ définie sur I tout entier, au problème de Cauchy

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t) \\ M(t_0) = I_n \end{cases}$$

où I_n désigne la matrice identité de dimension n.
Pn notera $M(t) = R(t, t_0)$ pour tout $t \in I$. L'application $R : I \times I \longrightarrow M_n(R)$, $(t, t_0) \longmapsto R(t, t_0)$ est appelée résolvante du système différentiel $x'(t) = A(t)x(t)$.
2) Montrer que pour tout $t_0, t, t_1 \in I$, $R(t, t_0) = R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0)$.
3) Montrer que pour tout $t, t_0 \in I$, $R(t, t_0)$ est une matrice inversible et que $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$.
4) Cas particulier:
a) En dimension $n = 1$, calculer explicitement $R(t, t_0)$.
b) En dimension $n \geq 1$, on suppose que $A(t) = A$ pour tout t. Que vaut $R(t, t_0)$?
4) Soit $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la solution de

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

s'écrit $x(t) = R(t, t_0)x_0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 3: (6 points)

I) On considère l'espace $E = (C^0([-1, 1], \|.\|_\infty)$, et F le sous-espace vectoriel formé des fonctions impaires dont l'intégrale est nulle sur $[0, 1]$. Soit $\varphi : t \in [-1, 1] \longrightarrow t$.
1) Montrer que F est fermé.
2) Montrer que $d(\varphi, F) \geq \frac{1}{2}$.
3) Existe-t-il $\psi \in F$ tel que $\|\varphi - \psi\|_\infty = \frac{1}{2}$?
4) Montrer que $d(\varphi, F) = \frac{1}{2}$.
II) Soit D la droite engendré par $x \longmapsto 1 - x$.
Montrer que la distance de D à la fonction $x \longmapsto 1$ est atteinte en plusieurs points.

Bonne chance.