Chapitre 2 :
Equations différentielles

I. Equations différentielles du premier ordre :

1. Equations différentielles linéaires du premier ordre :

Soit I un intervalle $\subset \mathbb{R}$; a et b deux fonctions qcq.

$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x)$; $\forall x \in I$ (1)

linéarité par rapport à y

Théorème :

la solution générale de (1) est la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière (2)

$$y'_H(x) + a(x)\,y_H(x) = 0 \quad (2)$$

Remarque

$y'_H(x) = -a(x)\,y_H(x)$

Soit $I_0 \subset I$ tq $y_H(x) \neq 0$ $\forall x \in I_0$

$$\Rightarrow \frac{y'_H(x)}{y_H(x)} = -a(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'_H(x)}{y_H(x)}\,dx = -\int a(x)\,dx + K$$

$$\Rightarrow \ln|y_H(x)| = -\int a(x)\,dx + K$$

$$\Rightarrow |y_H(x)| = e^{-\int a(x)\,dx}\, e^K$$

time scales T

$$\Rightarrow |y_H(x)| = c\, e^{-\int a(x)\,dx}.$$

Comment on cherche la solution particulière ?!

On cherche $y_p(x)$ de la fonction $c(x)\, e^{-\int a(x)\,dx}$

Exemple $y' - \frac{1}{x} y = x$, avec $x \in \mathbb{R}_+^*$

$y_G(x) = y_H(x) + y_p(x)$

Sur I_0 : $y' - \frac{1}{x} y = 0$ équation homogène tq $y(x) \neq 0$, $\forall x \in I_0$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + K$$

$$\Rightarrow \ln|y(x)| = \ln|x| + K.$$

$y(x) = C.x \quad ; C \in \mathbb{R}$

On cherche $y_p(x)$ de la fonction $C(x).x$.

$y'_p(x) = C'(x).x + C(x)$

$(*) \Rightarrow C'(x).x + C(x) - C(x) = x$

$\Rightarrow C'(x) = 1$

$\Rightarrow C(x) = x$

$\Rightarrow y_p(x) = x^2$

$y_G(x) = C.x + x^2 \quad ; C \in \mathbb{R}$

Rq: si on fixe une condition initiale on peut parler d'une solution unique. $(y(0) = 1)$

2. equation à variables séparables :

c'est une equation de la forme :

$$\underbrace{g(y).y'}_{\text{depend de } y} = \underbrace{h(x)}_{\text{depend de } x}$$

elle peut être non linéaire

pour la resoudre, on intègre :

$$\int g(y)y'dy = \int h(x)\,dy$$

Exemple:

$y' = (1+x)(1+y^2)$

$\frac{y'}{1+y^2} = 1+x$

$\Rightarrow \int \frac{y'dy}{1+y^2} = \int (1+x)\,dx$?

$\Rightarrow \text{Arctan}(y) = x + \frac{x^2}{2} + c$

$\Rightarrow y = \tan\left(x + \frac{x^2}{2} + c\right)$

$\forall c$ verifie : $x + \frac{x^2}{2} + c \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

3- equation homogène en (x,y) :

c'est une equation differentielle qu'on peut l'ecrire sous la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{avec } x \neq 0 \quad (**)$$

Pour resoudre $(**)$, on pose $t = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow y = tx$

$y' = t'x + t$

$(**)\ t'x + t = f(t)$

$\Rightarrow t'x = f(t) - t$

c'est une equation à variables séparables

4. Equations de Bernoulli :

c'est une equation differentielle de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)\,y^m$$

avec $m \neq 1$.

Sur un intervalle I tq $y(x) \neq 0$, Vue

$\frac{y'(x)}{y^m(x)} + a(x)\frac{y(x)}{y^m(x)} = b(x)$

$\Rightarrow y'(x)\,y^{-m}(x) + a(x)\frac{y(x)}{y^m(x)} = b(x)$

$\Rightarrow y'(x)\,y^{-m}(x) + a(x)\,y^{1-m}(x) = b($

on pose $Z = y^{1-m}(x)$

$Z' = \left(\frac{1}{1} - m\right) y'(x)\,y^{-m}(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{1-m} Z' = y'(x)y^{-m}(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{1-m} Z' + a(x)Z = b(x)$

on cherche Z, puis y.

5- Equation de Ricatti :

elle est de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^2(x) + c(x)$$

pour resoudre ce genre d'equation, il faut connaitre une solution particulière $y_0(x)$

On pose ensuite $Z = y - y_0$

$\Rightarrow Z' = y' - y'_0$

$$Z' + y'_0 = a(x)(Z + y_0) + b(x)(Z + y_0)^2 + c(x).$$

$$\Rightarrow Z' + y'_0 = a(x)Z + a(x)y_0 + b(x)Z^2 + 2b(x)y_0 Z + b(x)y_0^2 + c(x)$$

$$\Rightarrow Z' = a(x)Z + b(x)Z^2 + 2b(x)y_0 Z$$

$$\Rightarrow Z' = (a(x) + 2b(x)y_0)Z + b(x)Z^2$$

c'est une equation de type de Bernoulli avec ($m = 2$)

on trouve Z, puis y.

II- Equations differentielles lineaires du 2nd ordre à coefficient constant

$$ay'' + by' + cy = d(x) \quad (3)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $d(.)$ une f^{ct} continue

Thèoreme :

la solution de l'equation (3) est la somme d'une solution homogène (solution de $ay''_H + by'_H + cy_H = 0$) et une solution particulière y_p :

$\Rightarrow y_G(x) = y_H(x) + y_p(x)$

Rq (solutions de l'equation differentielle homogène)

On associe à l'equation differentielle homogène le polynome caracteristique :

$ar^2 + br + c = 0 : p(r)$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$

on distingue les cas suivants :

* si $\Delta = 0 \Rightarrow p(r)$ admet r_0 solution double

Dans ce cas la solution,

$y_H(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^{r x}$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

** si $\Delta > 0$

$\Rightarrow p(r)$ admet deux racines distincts r_1 et r_2.

donc $y_H(x) = \lambda_3 e^{r_1 x} + \lambda_4 e^{r_2 x}$

$\forall \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$

*** si $\Delta < 0$ (recherche de solutions reels)

$\Rightarrow p(r)$ admet deux racines complexes conjugués :

$\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$

Dans ce cas,

$y_H(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$

$\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

III - Problème de Cauchy : Solutions maximale et solution globale.

1- Proposition du problème :

Soit I_0 un intervalle $\subset \mathbb{R}$ et soit $f : I_0 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ f^{ct} continue.

Definition 1 : On appelle equation diff du premier ordre, l'equation de la forme :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ \forall t \in I_0 \end{cases}$$

Definition 2 On appelle equation diff d'ordre p toute equation de la forme :

$$\begin{cases} y^p(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{p-1}(t)) \\ \forall t \in I_0 \end{cases}$$

Definition 3

une fonction $y : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ derivable est dite solution de ① si elle verifie l'equation ①

Definition 4 :

Une fonction $y : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, p fois derivable sur I_0 est appelée solution de ② si elle verifie l'equation ②

Remarque :

toute l'équation d'ordre p peut se ramener à une equation diff d'ordre 1.

en fait,

posons :

$$\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y' = z_1' \\ \vdots \\ z_{p-1} = y^{p-2} \\ z_p = y^{p-1} \end{cases} \quad ; \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$$

$$Z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_p \\ f(t, z_1, \dots, z_p) \end{pmatrix}$$

donc $Z' = G(t, Z)$

avec $G : I_0 \times (\mathbb{R}^n)^p \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^p$

$$(t, \underset{(z_1, z_2, \dots, z_p)}{\overset{\shortparallel}{Z}}) \longmapsto \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_p \\ f(t, z_1, \dots z_p) \end{pmatrix}$$

$z_i \in \mathbb{R}^n$

Exemple :

(*) $y''(t) + y'(t) = \sin(y(t))$

transformez (*) sous la forme d'une equation diff. d'ordre 1.

on pose $z_1 = y$

$z_2 = y' = z_1'$

$$z_2' = y'' = \sin(y(t)) - y'(t) = \sin(z_1) - z_2$$

$$Z' = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \sin(z_1) - z_2 \end{pmatrix}$$

$$Z' = G(t, Z)$$

avec $G : I_0 \times (\mathbb{R}^m)^2 \longrightarrow (\mathbb{R}^m)^2$

$$(t, Z) \longmapsto \begin{pmatrix} Z_2 \\ \sin(Z_1) - Z_2 \end{pmatrix}$$

Remarque:

① Si $y : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une solution de ①, alors elle est derivable sur I_0 et de plus $y'(t) = f(t, y(t))$

$\wedge$ f est Continue.

donc y est $\mathcal{C}^1(I_0, \mathbb{R})$

② Parfois on peut trouver des solutions qui sont définies sur I ($I \subset I_0$) uniquement.

Definition:

On appelle condition de Cauchy la donnée de la valeur de la solution en un pt donnée

Le problème de Cauchy (Pc) consiste à la recherche d'une fonction derivable verifiant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{avec } y_0 \text{ donnée.} \end{cases}$$

Definition 2: Solution locale: On appelle solution locale de Pc la donnée d'un couple (I, y) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui est voisinage t_0 et où y est solution derivable sur I verifiant:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Remarque: On dit que la solution locale (J, z) prolonge la solution (I, y) si $I \subset J$ et $z_{|I} = y$.

2- Solutions maximales et Solution globale.

Definition: (solution maximales)

(I, y) est une solution maximale de (pc) s'il n'existe pas des solutions locales qui la prolonge strictement.

Remarque:

on dit que (J, z) prolonge (I, y) strictement lorsque (J, z) prolonge (I, y) et $I \neq J$.

Definition: (solution globale)

on dit que (I, y) est solution globale de (pc) si (I, y) est solution locale et si $I = I_0$

Exemple:

1) (PC) $\begin{cases} y'(t) = -2t\, y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$; $I_0 = \mathbb{R}$ 2) $\begin{cases} y'(t) = 2t\, y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $I_0 = \mathbb{R}$

Determinez la nature de la solution de (Pc) ainsi que son expression et son intervalle de définition

1) on pose : $z = y^{-1}(t)$

$\Rightarrow z' = -y'(t)\, y^{-2}(t)$

$\Rightarrow -z' = -2t$

$\Rightarrow z' = 2t$

$\Rightarrow z = t^2 + c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{t^2 + c}$

$\wedge$ $y(0) = 1$

$\Rightarrow c = 1$

donc $\left(\mathbb{R}, \dfrac{1}{t^2+1}\right)$ est la solution globale.

2)

on pose $z' = y^{-1}(t)$

$\Rightarrow z' = y'(t)\, y^{-2}(t)$

$\Rightarrow z' = -2t$

$\Rightarrow z = -t^2 + c \quad ; c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{c - t^2}$

or $y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$

$\Rightarrow \left( ]-1,1[\,, \dfrac{1}{1-t^2} \right)$ est la solution maximale de (pc)

Exercice :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) = -y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Determiner la solution de (pc) ainsi que son expression et son intervalle de definition.

3 - Thèoreme de Cauchy - lipsctiz :

Thèoreme de Cauchy - Lipsctiz (Global)

on concidere le probleme de cauchy (Pc)
on suppose f vérifie les hypotheses suivante :

(i) f est Continue sur $I \times \mathbb{R}^n$
(ii) f est lipsctizienne en y sur $I_0 \times \mathbb{R}$

alors le probleme (pc) admet une unique solution sur I_0

Rq on a l'excistance d'une solution globale

Corrollaire (Cauchy - Lipsctiz (locale)

On considère le probleme de Cauchy (Pc)
on suppose que f verifie :

(i) f est Continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$
(ii) f est localement Lipsctizienne en y sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$

alors (pc) admet une unique sol° maximale

Remarque

si f est $\mathcal{C}^1(I_0 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ alors le corollaire s'applique :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t) = y_0 \end{cases}$$