ECOLE NATIONALE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES AVANCÉES À BORJ-CEDRIA

Cours de Résistance des Matériaux « RDM » à l’intention des Étudiants de Technologies Avancées

Dr. ZIED ANTAR

Maître Assistant en Sciences des Matériaux

Année Universitaire :2023-2024

PLAN

1. Introduction
2. Rappel : La Statique
3. Théories élémentaires de la Résistance Des Matériaux « RDM »
4. Torseur des efforts intérieurs-Notion de contraintes
5. Traction simple – Compression simple
6. Cisaillement simple
7. Torsion des poutres circulaires
8. Flexion simple
9. Flambement

INTRODUCTION

La RDM présente 3 buts principaux :

- Connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux et leurs comportement lorsqu’on modifie les conditions expérimentales: vitesse de sollicitation, variation de la température, traitement thermique …

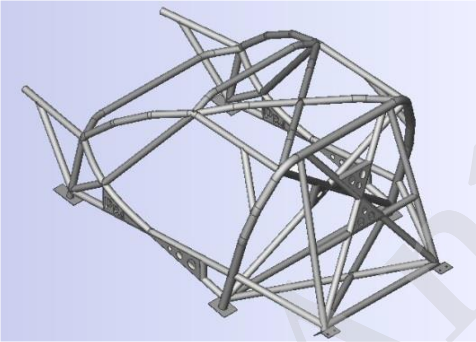
- Etude de la résistance des pièces constituants une machine ou édifice (pont …) pour que ceci supporte les efforts qui le sont appliqués dans les conditions requise de sécurité.

- Etude de la déformation des pièces mécaniques. En construction on ne tolère que de très faible déformation de sorte que la rupture n’est jamais atteinte.

La RDM est une théorie simplifié de la théorie des solide permettant de dimensionner une structure simple formé de poutre avec un calcul analytique.

INTRODUCTION

❑ Calcul de structures
- Bâtiments, charpentes, structures métalliques…
- Ouvrages de génie civil…
- Squelette structural de systèmes divers



❑ Calcul de pièces mécaniques
- Arbres de transmission

❑ Première approche de calculs complexes
- Etablir un premier résultat simplement

PLAN

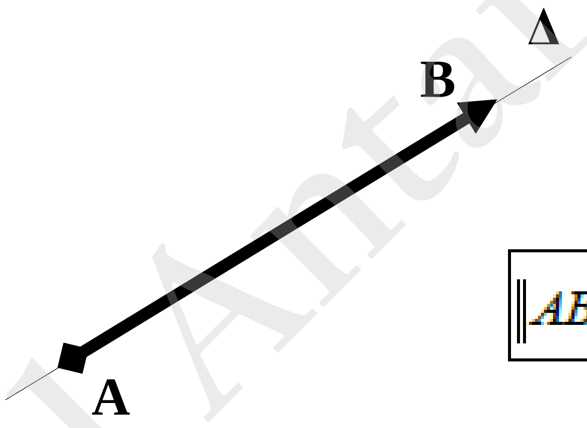
1. **Introduction**
2. **Rappel : La Statique**
3. **Théories élémentaires de la Résistance Des Matériaux « RDM »**
4. **Torseur des efforts intérieurs-Notion de contraintes**
5. **Traction simple – Compression simple**
6. **Cisaillement simple**
7. **Torsion des poutres circulaires**
8. **Flexion simple**
9. **Flambement**

I- Rappel Mathématique

Notion d'un vecteur

- Le vecteur est caractérisé par :

- la direction (ligne d'action) (Δ)
- le sens (de **A** vers **B**)
- le point d'application (le point **A**)
- l'intensité (ou module)



$$\|AB\| = \sqrt{\left((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\right)}$$

- Deux vecteurs sont dits **coplanaires** s'ils agissent dans le même plan. De plus si leurs lignes d'action passent par le même point on dit qu'ils sont **concourants**.
- On peut remplacer les vecteurs concourants par un seul vecteur résultant.
- Expression du produit vectoriel :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{Bmatrix} y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 \\ z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2 \\ x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 \end{Bmatrix}$$

II- Modélisation des actions mécaniques

1- Définition d'une action mécanique

D'une façon générale, on appelle action mécanique toute cause physique susceptible de maintenir un corps au repos, de créer, de maintenir ou de modifier un mouvement, de déformer un corps.

2- Classification des actions mécaniques

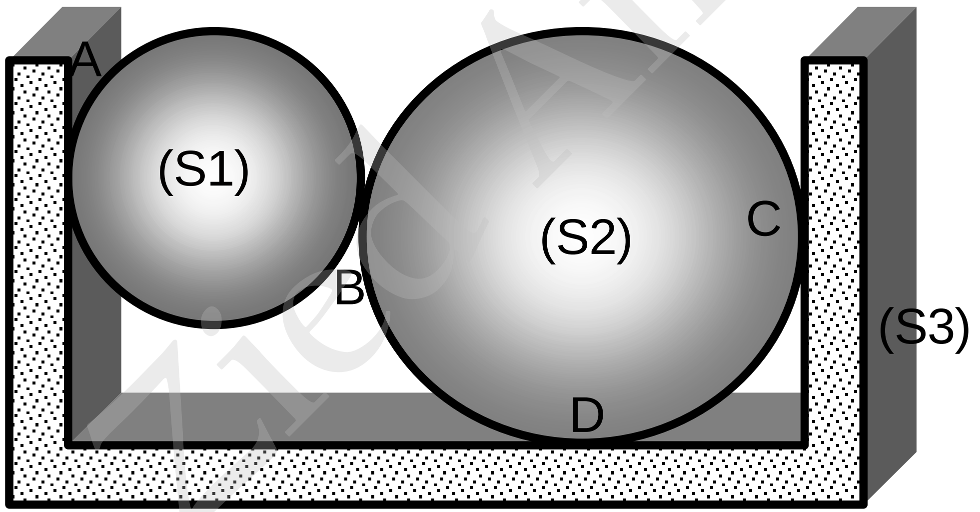
Les actions mécaniques sont de deux sortes:

- ✓ Les actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, champ électromagnétique)
- ✓ Les actions mécaniques de contact (liaisons surfaciques…)

On distingue les actions mécaniques extérieures et intérieures à un ensemble de corps.

RAPPEL: LA STATIQUE

- Soient 3 solides (S1), (S2), (S3).
- Soit (E) l'ensemble constitué par les 2 corps (S1) et (S2).



- Bilan des actions mécaniques extérieures qui agissent sur le solide (E) :

  - Poids
  - Action de (S3) sur (E)

3- Le torseur des actions mécaniques

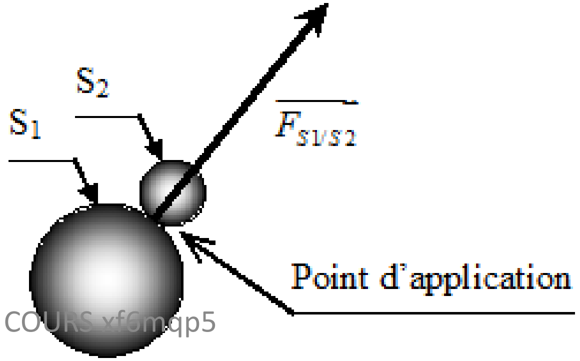
L'ensemble des forces auxquelles est soumise un solide peut être remplacé par le torseur τ (R ; M) défini comme suit :

- R est la somme géométrique des forces $\mathbf{F_i}$ (résultante)
- M est le moment résultant de toutes les forces $\mathbf{F_i}$ de point d'application $\mathbf{A_i}$ par rapport au point **O** du solide

3-1- Notion de force

On appelle **force**, l'action mécanique qui s'exerce mutuellement entre deux particules élémentaires, pas forcément en contact. Une force est toujours appliquée en un point. Elle est modélisée par un vecteur, caractérisé par :

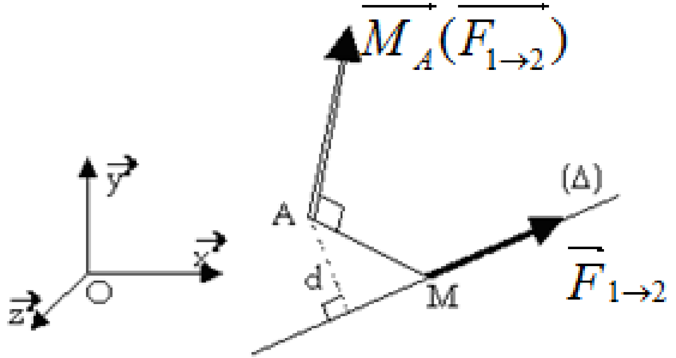
- Un point d'application ;
- Une direction ;
- Un sens ;
- Une norme (intensité).



3-2- Notion de moment

- Les effets physiques d'une Action Mécanique (A.M) dépendent de la position et de l'orientation dans l'espace de la force associée à cette A.M. On est amené à introduire la notion **de moment de la force** pour caractériser complètement l'A.M.

- On appelle moment par rapport au point A de la force $\vec{F}_{1\to2}$ appliquée au point M, le vecteur d'origine A défini par la relation :



$$\boxed{\overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F_{1\to2}}) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F_{1\to2}}}$$

- Définition géométrique du vecteur : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F_{1\to2}}$

  ✓ Origine : point A

  ✓ Direction : perpendiculaire au plan ($\overrightarrow{F_{1\to2}}$; $\overrightarrow{AM}$)

  ✓ Sens : $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{F_{1\to2}}$ et $\overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F_{1\to2}})$ forment un trièdre direct.

- **Relation fondamentale sur les moments**

Soit $\overrightarrow{F_{1\to 2}}$ une force appliquée en M, et deux points quelconques A et B. On sait, par définition, que :

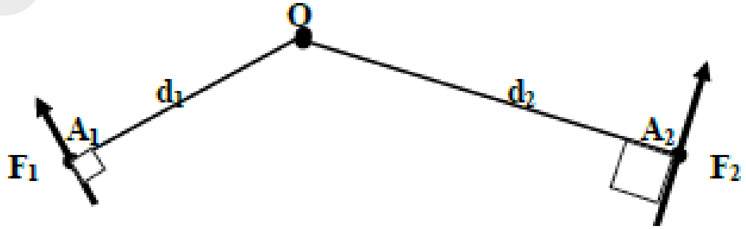
$$\boxed{\overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F_{1\to 2}}) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F_{1\to 2}}}$$

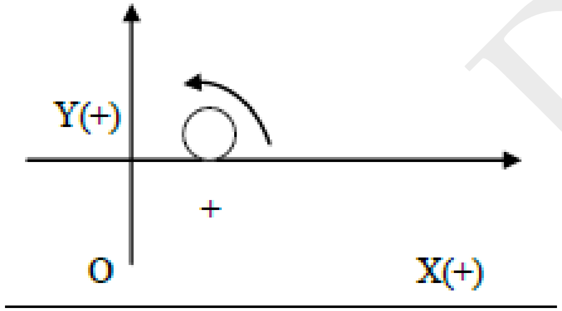
$$\boxed{\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{F_{1\to 2}}) = \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F_{1\to 2}}) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{1\to 2}}}$$

<u>**Cas particulier : dans le plan**</u>

$$\boxed{M_{F1/O} = \|F_1\| \times \|OA_1\| = F_1 \times d_1}$$

$$\boxed{M_{F2/O} = \|F_2\| \times \|OA_2\| = F_2 \times d_2}$$





On peut écrire

$$\boxed{\begin{aligned} M_{F1/O} &= -\ F_1 \times d_1 \\ M_{F2/O} &= +\ F_1 \times d_1 \end{aligned}}$$

3-3- Torseur associé à l'action mécanique d'une force

- Pour définir complètement une A.M nous avons donc besoin des vecteurs $\overrightarrow{R_{(ext\to 1)}}$ et $\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{F_{ext\to 1}})$
- L'ensemble des deux vecteurs $\overrightarrow{R_{(ext\to 1)}}$ et $\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{F_{ext\to 1}})$ définis en tout point B, est appelé **torseur** associé à l'action mécanique relative à la force il est noté :

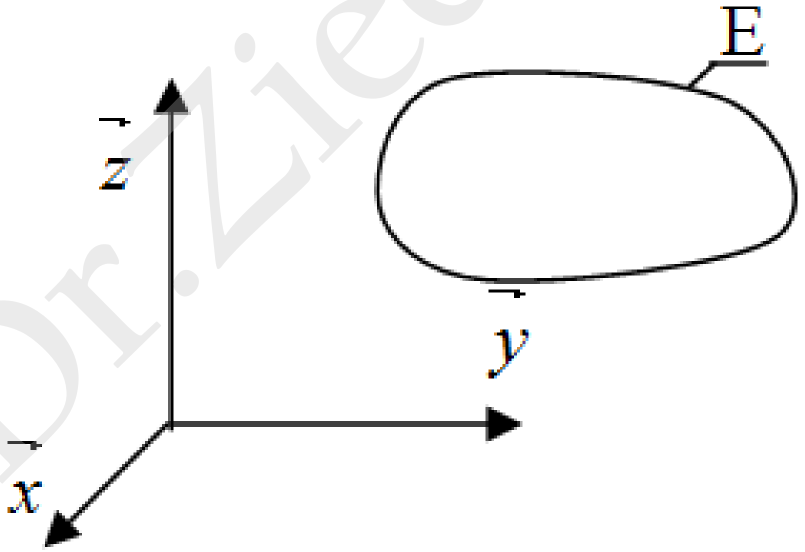
$$\{\tau_{ext\to 1}\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R(ext\to 1)} \\ \overrightarrow{M_B(ext\to 1)}\end{matrix}\right\}_R = {}_B\left\{\begin{matrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}_R$$

Remarque:

- Le point B n'est pas nécessairement un point appartenant au solide 1 ;
- $\overrightarrow{R_{(ext\to 1)}}$ et $\overrightarrow{M_{B(ext\to 1)}}$ sont appelés *éléments de réduction* du torseur au point B.

III- Equilibre d'un système matériel par rapport à un repère

Soit un système matériel (E) quelconque. On dira que (E) est en équilibre par rapport à un repère R si, au cours de temps, chaque point de (E) conserve une position fixe par rapport au repère R.



IV- Enoncé du PFS

Un solide indéformable en équilibre sous l'action de n force extérieures $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}, \dots \dots \dots, \vec{F_n}\right)$ reste en équilibre si :

- La somme vectorielle (résultante $\vec{R}$) de toutes les forces extérieures est nulle:

$$\boxed{\overrightarrow{R} = \sum_{1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \dots + \overrightarrow{F_n} = \vec{0}} \qquad \textbf{(1)}$$

- La somme vectorielle des moments (moment résultant $\overrightarrow{M_I}$) de toutes les forces extérieures en n'importe quel point I de l'espace est nulle:

$$\boxed{\overrightarrow{M_I} = \sum_{1}^{n} \overrightarrow{M_{I_i}} = \overrightarrow{M_{I_1}} + \overrightarrow{M_{I_2}} + \dots + \overrightarrow{M_{I_n}} = \vec{0}} \qquad \textbf{(2)}$$

- L'équation (1) est appelée Théorème de la Résultante Statique (T.R.S)
- L'équation (1) est appelée Théorème du moment résultant Statique (T.M.S)

1- Statique par les torseurs

- Le principe énoncé précédemment (sous forme vectorielle) peut être écrit en utilisant les torseurs. Un solide (S), en équilibre sous l'action de n torseurs d'actions mécaniques $\{t_{1/S}\}_R$, $\{t_{2/S}\}_R$, ….., $\{t_{n/S}\}_R$ reste en équilibre si la somme des n torseurs écrits au même point I, est égale au torseur nul $\{0\}$:

$$\boxed{{}_I\{t_{eq}\}_R = {}_I\{t_{1/S}\}_R + {}_I\{t_{2/S}\}_R + \ldots + {}_I\{t_{n/S}\}_R = \{\vec{0}\}}$$

2- Equation de la projection

- Les équations vectorielles (1) et (2) donnent chacune trois équations scalaires de projection sur les axes x, y et z. Dans le cas le plus général on disposera donc de six équations scalaires qui permettront de déterminer, au plus, six inconnues.

Exemple

$$\overrightarrow{F_1}\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{F_2}\begin{pmatrix}X_2\\Y_2\\Z_2\end{pmatrix} \quad ; \quad (\ldots) \quad \overrightarrow{F_n}\begin{pmatrix}X_n\\Y_n\\Z_n\end{pmatrix}$$

$$\text{T.R.S.} \Rightarrow \begin{cases}\text{Sur x} : X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0\\ \text{Sur y} : Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0\\ \text{Sur z} : Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0\end{cases} \quad : 3 \text{ équations.}$$

$$\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{F_1})}\begin{pmatrix}L_1\\M_1\\N_1\end{pmatrix}_R \quad ; \quad \overrightarrow{M_A(\overrightarrow{F_2})}\begin{pmatrix}L_2\\M_2\\N_2\end{pmatrix}_R \quad ; \quad \ldots \quad \overrightarrow{M_A(\overrightarrow{F_n})}\begin{pmatrix}L_n\\M_n\\N_n\end{pmatrix}_R$$

$$\text{T.M.S.} \Rightarrow \begin{cases}\text{Sur x} : L_1 + L_2 + \ldots + L_n = 0\\ \text{Sur y} : M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0\\ \text{Sur z} : N_1 + N_2 + \ldots + N_n = 0\end{cases} \quad : 3 \text{ équations.}$$

V- Théorème des actions mutuelles

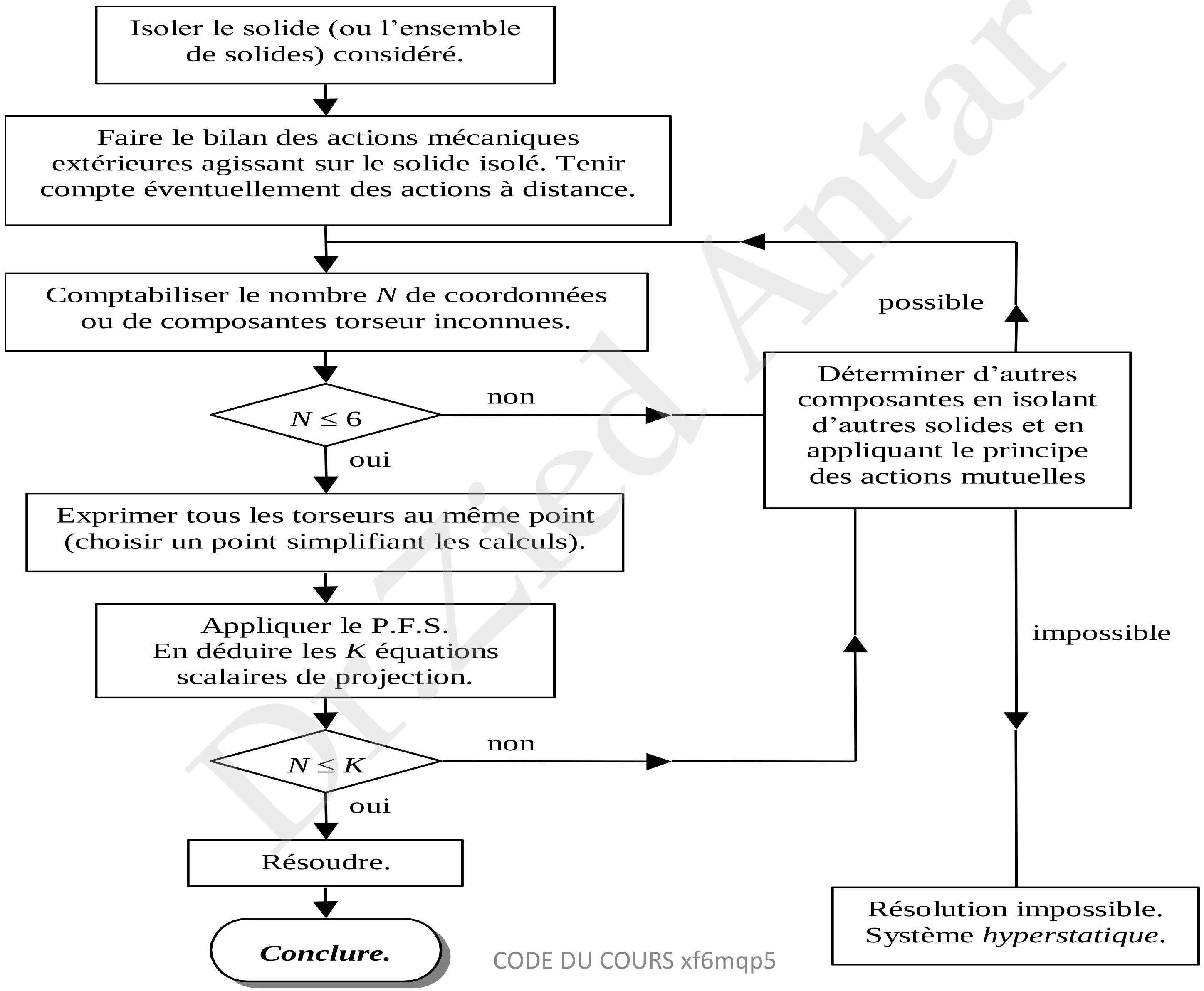
Si un système matériel E_1 exerce sur un autre système E_2 une action mécanique, alors E_2 exerce sur E_1 une action opposée:

$$\boxed{\left\{\tau_{(E1/E2)}\right\} = -\left\{\tau_{(E2/E1)}\right\}}$$

VI- Démarche de résolution d'un problème de statique

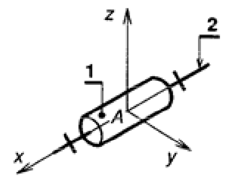
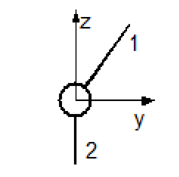
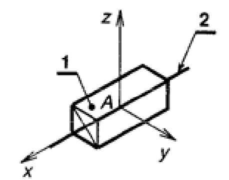
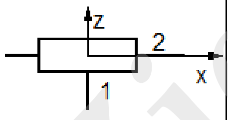
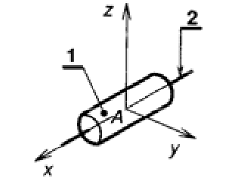
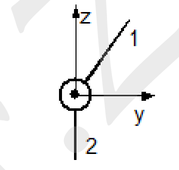
Pour réussir la résolution d'un problème de statistique, il est conseillé de suivre la démarche suivante:

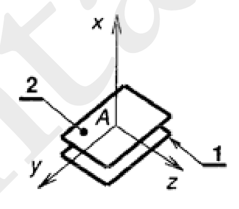
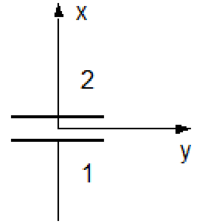
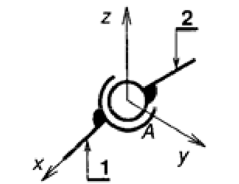
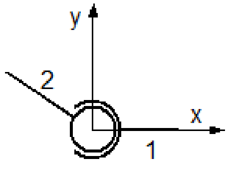
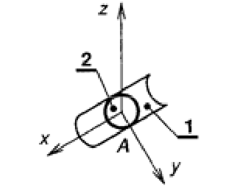
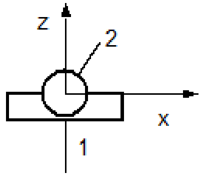
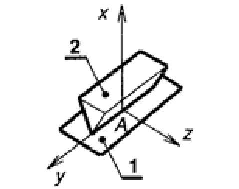
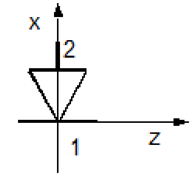
RAPPEL: LA STATIQUE



CODE DU COURS xf6mqp5

RAPPEL: LA STATIQUE

Type de liaison et repère local associé $R=(A,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Schématisation plan
Pivot d'axe $(A,\vec{X})$		– Rx – – – –	$\left\{\begin{matrix} X_2^1 & 0 \\ Y_2^1 & M_2^1 \\ Z_2^1 & N_2^1 \end{matrix}\right\}_{A,\mathcal{R}}$	
Glissière d'axe $(A,\vec{X})$		Tx – – – – –	$\left\{\begin{matrix} 0 & L_2^1 \\ Y_2^1 & M_2^1 \\ Z_2^1 & N_2^1 \end{matrix}\right\}_{A,\mathcal{R}}$	
Pivot glissant d'axe $(A,\vec{X})$		Tx Rx – – – –	$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_2^1 & M_2^1 \\ Z_2^1 & N_2^1 \end{matrix}\right\}_{A,\mathcal{R}}$	

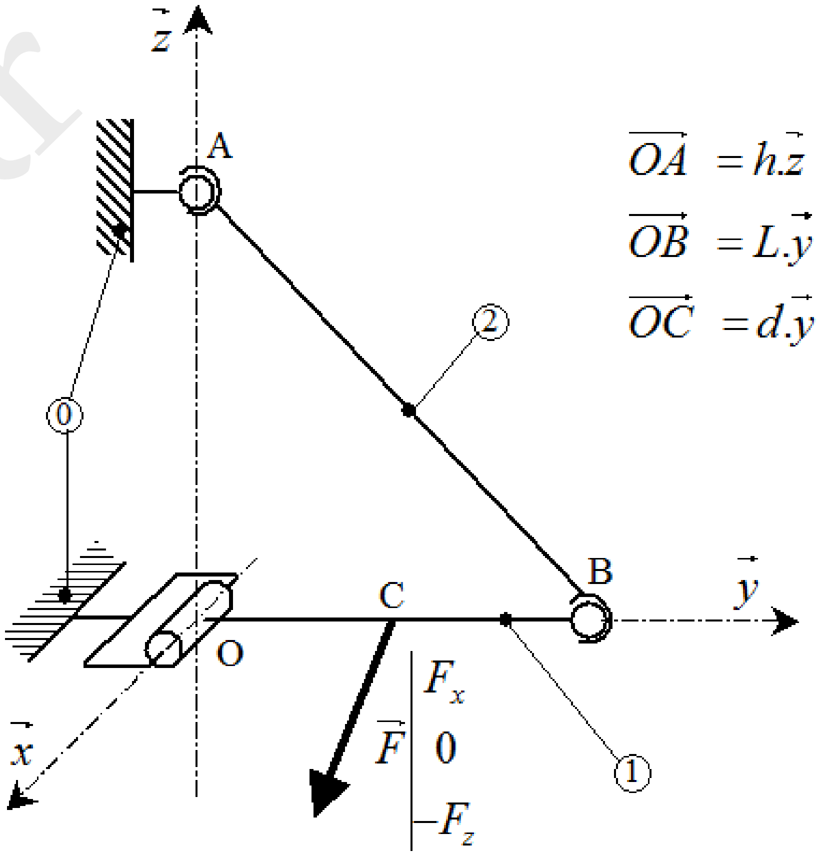
Appui plan De normale $(A,\vec{X})$		– Rx Ty – Tz –	$\left\{\begin{matrix} X_2^1 & 0 \\ 0 & M_2^1 \\ 0 & N_2^1 \end{matrix}\right\}_{A,\mathcal{R}}$	
Sphérique de centre A		– Rx – Ry – Rz	$\left\{\begin{matrix} X_2^1 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{matrix}\right\}_{A,\mathcal{R}}$	
Linéaire circulaire de centre A et d'axe $(A,\vec{X})$		Tx Rx – Ry – Rz	$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{matrix}\right\}_{A,\mathcal{R}}$	
Linéaire rectiligne de normale $(A,\vec{X})$ droite de contact $(A,\vec{Y})$		– Rx Ty Ry Tz –	$\left\{\begin{matrix} X_2^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_2^1 \end{matrix}\right\}_{A,\mathcal{R}}$	

VII- Application : Etude d'un portique

Nous souhaitons étudier l'équilibre du portique représenté dessous. Nous émettrons les hypothèse suivantes:

- Les liaisons sont supposées parfaites
- Nous négligeons le poids du tirant 2 par rapport aux autres efforts mis en jeu.

Nous souhaitons exprimer les actions mécaniques dans les liaisons centrées en O, A et B en fonction des paramètres d, h, L, F_x et F_z.



Si nous nous limitons à l'étude de la géométrie du portique, nous constatons que le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$ est un plan de symétrie pour le mécanisme. Mais lorsque nous examinons l'effort $\vec{F}$ qui s'applique au point C nous constatons que cet effort n'est pas généralement porté par le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$.Ce problème ne peut donc pas être traité dans le plan. C'est un véritable **problème 3D** que nous traiterons avec l'outil « Torseur ».

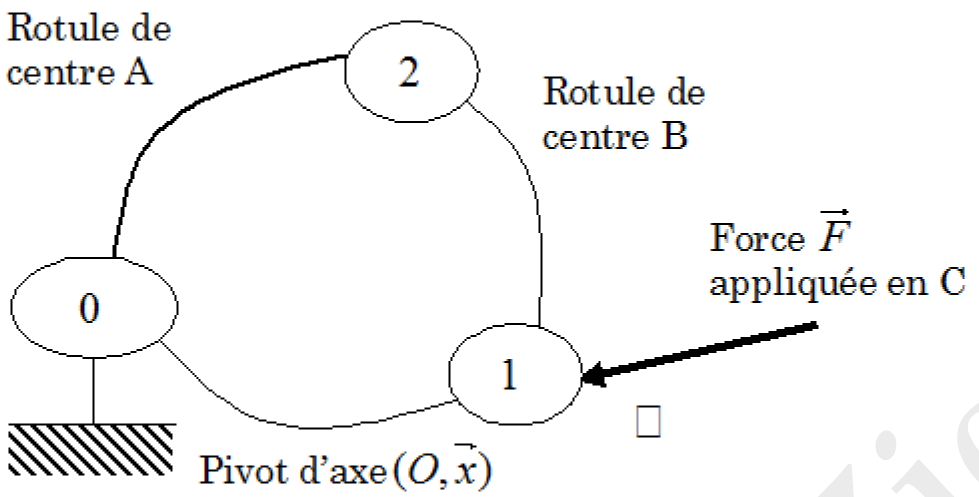
RAPPEL: LA STATIQUE

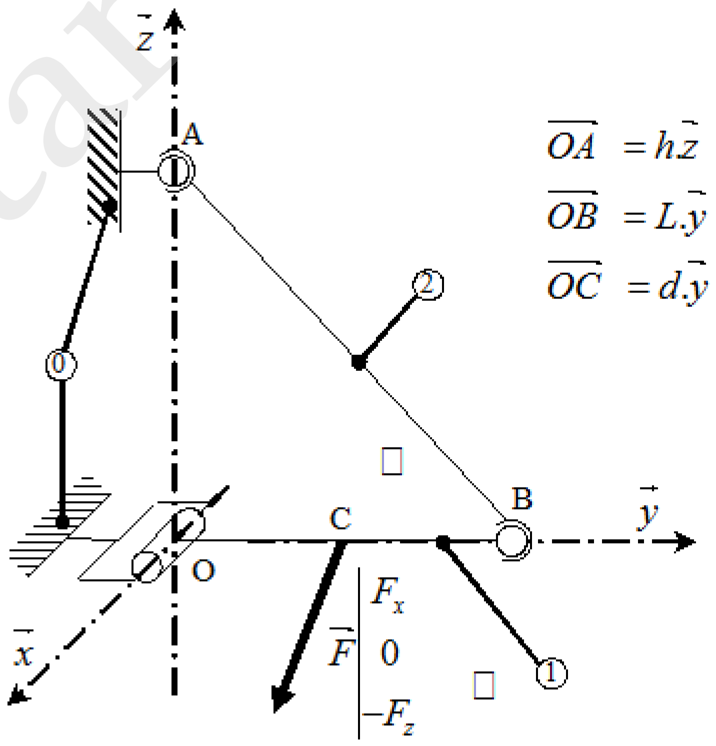
1. Représentez le graphe des liaisons de ce système
2. Ecrire sous forme de torseur les actions exercées sur le tirant (2). Puis appliquer la PFS au solide (2) en écrivant l'équation du moment en B et en déduire les équations scalaires.
3. Ecrire sous forme de torseurs les actions exercées sur le portique (1). Puis appliquer le PFS sur ce dernier en écrivant l'équation du moment en O et en déduire les équations scalaires.
4. Calculer numériquement les inconnues.

Données $L=h=5$ m; $F_x=50$ N ; $F_z= 500$ N

RAPPEL: LA STATIQUE

1- Graphe des liaisons





2- Isolement du tirant 2

Si nous isolons le tirant (2), nous pouvons écrire que :

$$\boxed{\{\tau_{(\bar{2}\to 2)}\} = \{\tau_{(0\to 2)}\} + \{\tau_{(1\to 2)}\}}$$

3- Bilan des actions mécaniques exercées sur 2

L'action mécanique exercée par le mur 0 sur le tirant 2 est transmise par une liaison. Nous écrirons:

- L02: une liaison rotule parfaite de centre A.

Mobilités $\overrightarrow{Tr}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\Ry\\Rz\end{vmatrix}$ → Le torseur statique associé $\{\tau_{(0\to 2)}\} = \left\{\begin{matrix}X_{02} & 0\\ Y_{02} & 0\\ Z_{02} & 0\end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

- Il en est de même pour la liaison rotule parfaite de centre B entre 1 et 2:

$$\{\tau_{(1\to 2)}\} = \left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4- Ecriture au même centre de réduction

- Pour pouvoir additionner les torseurs, nous allons les écrire au même point B. $\{\tau_{(1\to2)}\}$ est déjà exprimé au point B. nous devons donc déplacer uniquement $\{\tau_{(0\to2)}\}$

$$\boxed{\overrightarrow{M}_B(0\to2) = \overrightarrow{M}_A(0\to2) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}(0\to2)}$$

or $\overrightarrow{M}_A(0\to2) = \vec{0}$ Et nous avons $\overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} 0 \\ -L \\ h \end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{M}_B(0\to2) = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ -L \\ h \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_{02} \\ Y_{02} \\ Z_{02} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -L.Z_{02} - h.Y_{02} \\ h.X_{02} \\ L.X_{02} \end{vmatrix}$$

Soit $$\{\tau_{(0\to2)}\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{02} & -L.Z_{02} - h.Y_{02} \\ Y_{02} & h.X_{02} \\ Z_{02} & L.X_{02} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5- Application du PFS au tirant 2

Si 2 est en équilibre, alors, d'après le PFS

$$\boxed{\left\{\tau_{(\bar{2}\to 2)}\right\} = \left\{\tau_{(0\to 2)}\right\} + \left\{\tau_{(1\to 2)}\right\} = \{0\}}$$

<u>Équation de Résultante</u> : $\vec{R}_{(0\to 2)} + \vec{R}_{(1\to 2)} = \vec{0}$;

$$\begin{array}{l|ll} \text{Proj. Sur } \vec{x} & \textbf{(1)} & X_{02} + X_{12} = 0 \\ \text{Proj. Sur } \vec{y} & \textbf{(2)} & Y_{02} + Y_{12} = 0 \\ \text{Proj. Sur } \vec{z} & \textbf{(3)} & Z_{02} + Z_{12} = 0 \end{array}$$

<u>Équation de Moment Résultant par rapport au point B</u> $\overrightarrow{M}_{B(0\to 2)} + \overrightarrow{M}_{B(1\to 2)} = \vec{0}$

$$\begin{array}{l|ll} \text{Proj. Sur } \vec{x} & \textbf{(4)} & -L.Z_{02} - h.Y_{02} = 0 \\ \text{Proj. Sur } \vec{y} & \textbf{(5)} & h.X_{02} = 0 \\ \text{Proj. Sur } \vec{z} & \textbf{(6)} & L.X_{02} = 0 \end{array}$$

RAPPEL: LA STATIQUE

- Les équations (5) et (6) sont linéairement dépendantes. Nous obtenons donc 5 équations significatives, pour 6 inconnues de liaison. Nous ne pourrons pas résoudre complétement le problème. Par contre nous pouvons exprimer toutes les inconnues restantes en fonction d'une seule inconnue.

$$
\begin{cases}
(5) \text{ -> } X_{02} = 0 \\
(1) \text{ -> } X_{12} = -X_{02} = 0 \\
(4) \text{ -> } Y_{02} = -\dfrac{L}{h}.Z_{02} \\
(2) \text{ -> } Y_{12} = -Y_{02} = \dfrac{L}{h}.Z_{02} \\
(3) \text{ -> } Z_{12} = -Z_{02}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\{\tau_{(0\to 2)}\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{L}{h}.Z_{02} & 0 \\ Z_{02} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \\
\\
\{\tau_{(1\to 2)}\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{L}{h}.Z_{02} & 0 \\ -Z_{02} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}
\end{cases}
$$

- Pour poursuivre la résolution de notre problème, nous devons isoler un autre système matériel.

6- Isolement du portique 1

- Si nous isolons le portique 1, nous pouvons écrire que:

$$\left\{\tau_{(\bar{1}\to 1)}\right\} = \left\{\tau_{(Op\to 1)}\right\} + \left\{\tau_{(0\to 1)}\right\} + \left\{\tau_{(2\to 1)}\right\}$$

7- Bilan des actions mécaniques exercées sur le portique 1

- L'action mécanique exercée en C par l'opérateur sur 1 est une force. Elle se modélise donc par un glisseur en son point d'application:

$$\left\{\tau_{(Op\to 1)}\right\} \underset{C}{\left\{\begin{matrix} F_x & 0 \\ 0 & 0 \\ -F_z & 0 \end{matrix}\right\}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

RAPPEL: LA STATIQUE

L'action mécanique exercée par le mur 0 sur le portique 1 est transmise par une liaison. Nous écrirons:

- L01: Liaison Pivot parfaite

Mobilités $\overrightarrow{Tr}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$ → Le torseur statique associé $\{\tau_{(0\rightarrow 1)}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

L'action mécanique exercée par le tirant 2 sur le portique 1 a un air de déjà-vu. En effet, nous l'avons déjà abordée lorsque, nous avons isolé le tirant 2. un principe est à notre disposition.

D'après le Principe des actions Mutuelles, si un solide S1 exerce une action mécanique sur S2, alors, le solide S2 exerce une action mécanique S1 similaire mais opposée. Le P.A.M peut donc s'écrire:

$$\{\tau_{(S1\rightarrow S2)}\} = -\{\tau_{(S2\rightarrow S1)}\}$$

→

$$\{\tau_{(2\rightarrow 1)}\} = -\{\tau_{(1\rightarrow 2)}\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{L}{h}.Z_{02} & 0 \\ Z_{02} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

8- Ecriture au même centre de réduction

Nous devons exprimer les torseurs au même point. Le torseur $\{\tau_{(0\to1)}\}$ a une allure compliquée (5 inconnues). Nous allons donc le « laisser » au point O, et exprimer les deux autres torseurs en ce même point O.

$$\overrightarrow{M}_{O(Op\to1)} = \overrightarrow{M}_{C(Op\to1)} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{R}_{(Op\to1)} \qquad \text{or} \quad \overrightarrow{M}_{C(Op\to1)} = \vec{0} \qquad \text{et nous avons } \overrightarrow{OC}\begin{vmatrix}0\\ d\\ 0\end{vmatrix}.$$

Et par conséquent:

$$\overrightarrow{M}_{O(Op\to1)} = \vec{0} + \begin{vmatrix}0\\ d\\ 0\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}F_x\\ 0\\ -F_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-d.F_z\\ 0\\ -d.F_x\end{vmatrix} \qquad \text{Soit} \qquad \{\tau_{(Op\to1)}\} \, {}_O\!\begin{Bmatrix}F_x & -d.F_z\\ 0 & 0\\ -F_z & -d.F_x\end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\overrightarrow{M}_{O}(2\rightarrow 1) = \overrightarrow{M}_{B}(2\rightarrow 1) + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R}_{(2\rightarrow 1)} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{M}_{B}(2\rightarrow 1) = \vec{0} \quad \text{et nous avons } \overrightarrow{OB}\begin{vmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{vmatrix}.$$

- Par conséquent

$$\overrightarrow{M}_{O}(2\rightarrow 1) = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -\dfrac{L}{h}.Z_{02} \\ Z_{02} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L.Z_{02} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Soit} \qquad \{\tau_{(2\rightarrow 1)}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & L.Z_{02} \\ -\dfrac{L}{h}.Z_{02} & 0 \\ Z_{02} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

9- Application du PFS au portique 1

- Si 1 est en équilibre, alors, d'après le PFS:

$$\{\tau_{(\bar{1}\rightarrow 1)}\} = \{\tau_{(Op\rightarrow 1)}\} + \{\tau_{(0\rightarrow 1)}\} + \{\tau_{(2\rightarrow 1)}\} = \{0\}$$

- On écrit les équations statiques en projetant les équations de résultante et de moment sur les axes de repère d'étude:

✓ Équation de la résultante: $\boxed{\vec{R}_{(Op\to1)} + \vec{R}_{(0\to1)} + \vec{R}_{(2\to1)} = \vec{0}}$

Proj. Sur $\vec{x}$	(1)	$F_x + X_{01} + 0 = 0$
Proj. Sur $\vec{y}$	(2)	$0 + Y_{01} - \frac{L}{h} Z_{02} = 0$
Proj. Sur $\vec{z}$	(3)	$-F_z + Z_{01} + Z_{02} = 0$

✓ Équation de moment résultant: $\boxed{\overrightarrow{M_O}(Op \to 1) + \overrightarrow{M_O}(0 \to 1) + \overrightarrow{M_O}(2 \to 1) = \vec{0}}$

Proj. Sur $\vec{x}$	(4)	$-d.F_z + 0 + L.Z_{02} = 0$
Proj. Sur $\vec{y}$	(5)	$0 + M_{01} + 0 = 0$
Proj. Sur $\vec{z}$	(6)	$-d.F_x + N_{01} + 0 = 0$

- Nous obtenons un système de 6 équations pour 6 inconnues. La résolution est envisageable:

$$(5) \text{->} \; M_{01} = 0$$

$$(4) \text{->} \; Z_{02} = \frac{d}{L} F_z$$

$$(2) \text{->} \; Y_{01} = \frac{L}{h} . Z_{02} = \frac{L}{h} . \frac{d}{L} F_z = \frac{d}{h} . F_z$$

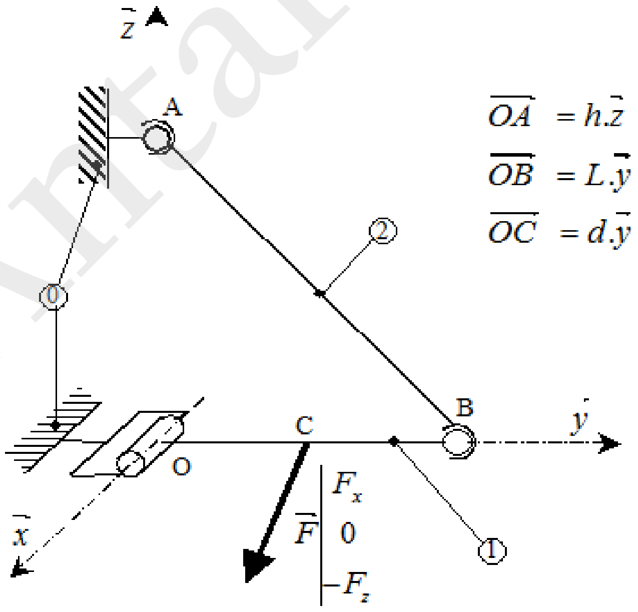
$$(3) \text{->} \; Z_{01} = F_z - Z_{02} = F_z - \frac{d}{L} F_z = \frac{L-d}{L} . F_z$$

$$(1) \text{->} \; X_{01} = -F_x$$

$$(6) \text{->} \; N_{01} = d . F_x$$

RAPPEL: LA STATIQUE

Si nous récapitulons les résultats de nos deux études précédentes, nous obtenons:



Dans la pivot entre 0 et 1

$$\{\tau_{(0\to1)}\} \left\{ \begin{matrix} -F_x & 0 \\ \dfrac{d}{h}.F_z & 0 \\ \dfrac{L-d}{L}.F_z & d.F_x \end{matrix} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Dans la rotule entre 1 et 2

$$\{\tau_{(1\to2)}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \dfrac{d}{h}.F_z & 0 \\ -\dfrac{d}{L}.F_z & 0 \end{matrix} \right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Dans la rotule entre 0 et 2

$$\{\tau_{(0\to2)}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{d}{h}.F_z & 0 \\ \dfrac{d}{L}.F_z & 0 \end{matrix} \right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

10- Application numérique

Avec L = h = 5 m ; d = 4 m ; Fx = 50 N ; Fz = 500 N , nous obtenons :

$$\{\tau_{(0\to1)}\} \left\{\begin{matrix} -50 \ N & 0 \\ 400 \ N & 0 \\ 100 \ N & 200 \ N.m \end{matrix}\right\}_{O \ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{et} \quad \{\tau_{(1\to2)}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 400 \ N & 0 \\ -400 \ N & 0 \end{matrix}\right\}_{B \ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

VIII- Application : Etude d'une poutre

Soit une poutre P, articulée au point M et appuyée au point N, P supporte une première charge F1=800 N, une deuxième F2=1200 Net une troisième F3=700 N. Si on néglige le poids de la poutre ainsi que tout frottement, on demande de déterminer les actions de contact en M et en N.