Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Carthage
Ecole Nationale Des Sciences Et Technologies Avancées Borj Cedria-Enstab

Classes : 1 TA.

A.U : 2021/2022.
Nombre de pages : 3.

Série 3: Analyse pour l'ingénieur (Résolution des systèmes différentiels)

Exercice 1:

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -6 & -1 & -6 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le polynome caractéristique P_A de la matrice A.
(2) Donner les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicités
(3) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
(4) Déterminer une base de chaque sous espace propre de A.
(5) Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $D = PAP^{-1}$.
(6) En déduire le calcul de la matrice $exp(tA)$.
(7) Exprimer les solutions de système différentiel (S) suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 2y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = -6x(t) - y(t) - 6z(t) \\ z'(t) = -3x(t) - 2y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

Exercice 2:

On se propose de résoudre le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 3y(t) - z(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) \\ z'(t) = -2x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

(1) Déterminer une matrice A et un vecteur X tel que: $AX(t) = X'(t)$.
(2) Calculer le polynome cractéristique P_A de la matrice A. déterminer ses valeurs propres et leurs ordres de multiplicités.
(3) Justifier que la matrice A est trigonalisable.

(4) Déterminer les sous espaces propres associés à ses valeurs propres.
(5) Déduire que A n'est pas diagonalisable.
(6) Dterminer une matrice P inversible est une matrice triangulaire T telle que $A = PTP^{-1}$.
(7) Exprimer les solutions du système différentiel avec $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ et $z(0) = 1$.

Exercice 3:

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le polynome caractéristique P_A de la matrice A.
(2) Donner les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicités
(3) La matrice A est-elle diagonalisable? A est-elle trigonalisable?
(4) Déterminer une matrice T triangulaire et une matrice P inversible telle que $A = PTP^{-1}$.
(5) Exprimer les solutions de système différentiel (S) suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) - 1 \\ y'(t) = -x(t) + y(t) + 2z(t) + 1 \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + 4z(t) - 1 \end{cases}$$

Exercice 4:

Résoudre le système différentiel suivant suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = (2-t)x(t) + (t-1)y(t) \\ y'(t) = 2(1-t)x(t) + (2t-1)y(t) \end{cases}$$

Exercice 5:

(1) Soit $t_0 \in I$. Montrer qu'il existe une unique solution $M \in C^1(I, \mathbb{M}_n(R))$ définie sur I tout entier, au problème de Cauchy

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t) \\ M(t_0) = I_n \end{cases}$$

où I_n désigne la matrice identité de dimension n.
Pn notera $M(t) = R(t, t_0)$ pour tout $t \in I$.
L'application $R : I \times I \longrightarrow M_n(R)$, $(t, t_0) \longmapsto R(t, t_0)$ est appelée résolvante du système différentiel $x'(t) = A(t)x(t)$.

(2) Montrer que pour tout $t_0, t, t_1 \in I$, $R(t, t_0) = R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0)$.

(3) Montrer que pour tout $t, t_0 \in I$, $R(t, t_0)$ est une matrice inversible et que $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$.

(4) Cas particulier:

(a) En dimension $n = 1$ calculer explicitement $R(t, t_0)$.

(b) En dimension $n \geq 1$, on suppose que $A(t) = A$ pour tout t. Que vaut $R(t, t_0)$?

(5) Soit $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la solution de

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

s'écrit $x(t) = R(t, t_0)x_0$ pour tout $t \in I$.

<u>**Exercice 6:**</u>

On prend les même notations que l'exercice précédent. Montrer que la solution du problème

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est de la forme

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

TD3 : Résolution des Systèmes différentiels

Exercice 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Polynome Caracteristique P_A de A :

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$$= \begin{array}{c|l} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} \overset{+}{2-\lambda} & \overset{-}{-2+\lambda} & \overset{+}{0} \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 & C_2 & C_3 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2+\lambda & 0 \\ -\lambda & 1-\lambda & 2 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-2)\left[-\lambda(4-\lambda)+4\right]$$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$

$P_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3$

2) $\lambda = 2$ est la valeur propre de A de $m(2) = 3$

3) Sous-espace propre associé à $\lambda = 2$

$E_2 = \{ u \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - 2I_3)u = 0 \}$

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tq $(A - 2I_3)u = 0$

alors $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow -x - y + 2z = 0$

$\Leftrightarrow x = -y + 2z$

$\Leftrightarrow u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_2 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim(E_2) = 2 \neq m(2) = 3$

$\Leftrightarrow$ A n'est pas diagonalisable.

(*) $P_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3$: P_A est scindé donc A est trigonalisable

4) Determiner T : matrice triangulaire
P : matrice inversible

$A = P \cdot T P^{-1}$

$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: 2 vecteurs propres de A associé à λ

- Soit T : une matrice triangulaire Superieur

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Au_1 & Au_2 & Au_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

$Au_1 = 2u_1 = 2u_1 + 0u_2 + 0u_3$

$Au_2 = 2u_2 = 0u_1 + 2u_2 + 0u_3$

on cherche $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tq :

$Au_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 + 2u_3$

$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -\alpha + 2\beta \\ -x - y + 2z = \alpha \\ -x - y + 2z = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + 2z = -\alpha + \\ -x - y + 2z = \alpha \\ -x - y + 2z = \beta \end{cases}$

pour $\alpha = \beta = 1$

$\Rightarrow -x - y + 2z = 1$

$\Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

On choisit :
$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

avec
$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_4 & \\ (+) & (-) & (+) & \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{array}{c} (+) \\ (-) \\ (+) \end{array}$$
$$= \frac{1}{2}(-2) = -1 \neq 0$$

En conclusion, par construction,
$$A = PTP^{-1}$$
où
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et
$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Calculer : $P^{-1} = P_{B\mathcal{B}}$
$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 + e_2 \\ u_2 = 2e_1 + e_3 \\ u_3 = \frac{1}{2} e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(u_2 - e_3) = \frac{1}{2}u_2 - u_3 \\ e_3 = 2u_3 \\ e_2 = u_1 + \frac{1}{2}u_2 - u_3 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) - 1 \\ y'(t) = -x(t) + y(t) + 2z(t) + 1 \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + 4z(t) - 1 \end{cases}$$

$$\iff X'(t) = A.X(t) + B$$
où
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a $A = PTP^{-1}$
$$\iff X'(t) = PTP^{-1}X(t) + B$$
$$\iff \underbrace{P^{-1}X(t)}_{Y'(t)} = T\underbrace{P^{-1}X(t)}_{Y(t)} + \underbrace{P^{-1}B}_{C'}$$
$$\iff Y'(t) = TY(t) + C'$$

où on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$
$$\iff X(t) = PY(t)$$

$\Rightarrow$ les solutions du système homogène
$$Y'(t) = TY(t) + C'$$
sont :
$$Y(t) = e^{tT}\gamma + \int e^{(t-s)T}.C(s).ds$$
où $\gamma = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D + N$$

où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (matrice diagonale) et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice nilpotente

et
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= N.D$$

alors
$$e^{t.T} = e^{tD + tN} = e^{tD}.e^{tN}$$

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{tN} = \frac{(tN)^0}{0!} + \frac{(tN)^1}{1!} + \underbrace{\frac{(tN)^2}{2!} + \frac{(tN)^3}{3!} + \cdots}_{=0}$$
$$= I_3 + tN$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tT} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tT}.\gamma = e^{2t}\begin{pmatrix} a + tc \\ b + tc \\ c \end{pmatrix}$$

$$e^{(t-s)T}.C(s) = e^{2(t-s)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & t-s \\ 0 & 1 & t-s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= e^{2(t-s)}\begin{pmatrix} 1+2(s-t) \\ 2(s-t) \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \int e^{2(t-s)}ds = -\frac{1}{2}e^{2(t-s)}$$

$$\cdot 2\int (s-t)\, e^{2(t-s)}\, ds$$

exp × poly ⇒ IPP

$u = s-t \longrightarrow u' = 1$

$v' = 2e^{2(t-s)} \longrightarrow v = -e^{2(t-s)}$

$$\Rightarrow 2\int (s-t)\, e^{2(t-s)}\, ds$$

$$= (t-s)\, e^{2(t-s)} - \frac{1}{2}e^{2(t-s)}$$

$$\Rightarrow \int e^{(t-s)T} c(s)ds = \begin{pmatrix} \int e^{2(t-s)}ds + 2\int (s-t)e^{2(t-s)}ds \\ 2\int e^{2(t-s)}.(s-t)ds \\ -2\int e^{2(t-s)}ds \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int e^{(t-s)T} c(s)ds = \begin{pmatrix} (t-s-1) \\ 1-s-\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(t-s)}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} (a+ct)e^{2t} + (t-s-1)\, e^{2(t-s)} \\ (b+ct)\, e^{2t} + (t-s-\frac{1}{2})e^{2(t-s)} \\ c.\, e^{2t} + e^{2(t-s)} \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$X(t) = P.\, Y(t)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} Y(t)$$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{cases} x(t) = (-a+2b+ct)e^{2t} + (t-s)e^{2(t-s)} \\ y(t) = (a+ct)\, e^{2t} + (t-s-1)\, e^{2(t-s)} \\ z(t) = (b+\frac{1}{2}c+ct)e^{2t} + (t-s)e^{2(t-s)} \end{cases}$$

Exercice 8

i/ Soit $t_0 \in I$.

mq $\exists!$ solution $M \in \mathcal{C}^1(I, M_n(\mathbb{R}))$ définie sur I au problème de Cauchy

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t) \end{cases}$$

. On définie $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^N$ où $N = n^2$

$\Leftrightarrow$ Monter qu'il existe une unique solution $M : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} M'(t) = f(t, M(t)) \\ M(t_0) = Id_{\mathbb{R}^N} \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$(t, M) \longmapsto f(t, M) = A(t)M(t)$

f est continue sur $I \times \mathbb{R}^N$

$\forall t \in I$, Soit l'application :

$g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$M \longmapsto g(M) = A(t)M.$

$\rightarrow$ g est linéaire, continue, donc g est différentiable sur $\mathbb{R}$.

$\rightarrow Dg : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{L}c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$M \longmapsto Dg(M) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$H \longmapsto Dg(M)(H)$

Dg est une application constante donc Dg est continue sur $\mathbb{R}^N$

$\Rightarrow$ g est de Classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$

$\Rightarrow$ f est localement lipschitzienne par rapport à la 2ème variable.

Alors par application du théorème de Cauchy Lipschitz, on en déduit, l'existance d'une unique solution : $M : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} M'(t) = f(t.M(t)) \\ M(t_0) = Id_{\mathbb{R}^N} \end{cases}$$

2) On note $M(t) = R(t,t_0)$

pour $t \in I$, $t_0 \in I$

- l'application $R : I \times I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$
$(t,t_0) \longmapsto R(t,t_0)$

est la resolvante du système differentiel

- Soit $t_0 \in I$, $R(t,t_0)$ est l'unique solution sur I du problème de Cauchy.

$$(*) \begin{cases} R'(t,t_0) = A(t).R(t,t_0) \\ R(t,t_0) = I_n \end{cases}$$

Soit $t_0, t, t_1 \in I$, montrer que :

$$R(t,t_0) \overset{?}{=} R(t,t_1) R(t_1,t_0)$$

Soit $t_0, t_1 \in I$,

On pose $S(t) = R(t,t_1) R(t_1,t_0)$

$\rightarrow S'(t) = R'(t,t_1) R(t_1,t_0)$

$= A(t).R(t,t_1).R(t_1,t_0)$

avec pour $t \in I$, $R(t,t_1)$

verifie $\begin{cases} R'(t,t_1) = A(t) R(t,t_1) \\ R(t_1,t_0) = I_n \end{cases}$

$\Rightarrow S'(t) = A(t).S(t)$

$S(t_0) = R(t_0,t_1) R(t_1,t_0)$

$= R(t_0,t_1) R(t_0,t_1)^{-1}$

$= I_n$

puisque pour tout $t_0, t_1 \in I$

la matrice $R(t_0,t_1)$ est inversible

et $R(t_0,t_1)^{-1} = R(t_1,t_0)$

donc $S(t) = R(t,t_1) R(t_1,t_0)$ est une solution du systeme $(*)$

d'où $\begin{cases} R(t,t_0) = R(t,t_1) R(t_1,t_0) \\ \text{pour tout } t_0, t_1, t \in I. \end{cases}$

3) montrer que pour tout $t, t_0 \in I$

$R(t,t_0)$ est une matrice inversible

et $R(t,t_0)^{-1} = R(t_0,t)$?

On a pour tout $t_0, t, t_1 \in I$

$R(t_1,t_0) = R(t_1,t) R(t,t_0)$

Par Changement de variable $t_1 = t_0$

$\Rightarrow \underbrace{R(t_0,t_0)}_{I_n} = R(t_0,t) R(t,t_0)$

$I_n = R(t_0,t) R(t,t_0)$

$\Rightarrow$ la matrice $R(t,t_0)$ est inversible.

et $R(t,t_0)^{-1} = R(t_0,t)$.

4) a) En dimension $n = 1$.

alors $R(t,t_0) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} R'(t,t_0) = A(t) R(t,t_0) \\ R(t_0,t_0) = 1. \end{cases}$

avec $R : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$

et $A : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow R'(t,t_0) = A(t) R(t,t_0)$: c'est une equation differentielle lineaire du 1^er ordre (homogene)

$\Rightarrow$ les solutions de cette equations

$R(t,t_0) = k e^{\int_{t_0}^{t} A(s) ds}$, $k \in \mathbb{R}$

avec $R(t_0,t_0) = 1$.

$\Leftrightarrow k e^0 = 1$

$\Leftrightarrow k = 1$.

$\Rightarrow$ En dimension $n = 1$.

$$R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s) ds}.$$

b/ En dimension $n \geq 1$, on suppose que $A(t) = A$

$$\Rightarrow \begin{cases} R'(t, t_0) = A(R, t_0) \\ R(t_0, t_0) = I_n \end{cases}$$

système diff. linéaire homogène.
à coeff. constant.

$\Rightarrow$ la solution du système.

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)} R(t_0, t_0)$$

$$= e^{(t-t_0)A} I_n$$

avec $e^{(t-t_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t-t_0)A^n}{n!}$

c/ Soit $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$

X definie sur I, la solution du pb de Cauchy : $\begin{cases} x'(t) = A(t) x(t) \\ x(t_0) = X_0 \end{cases}$

Soit $X(t) = R(t, t_0) X_0$

$\rightarrow x'(t) = R'(t, t_0) X_0$

$= A(t) R(t, t_0)$

$\rightarrow X(t_0) = R(t_0, t_0) X_0$

$= I_n X_0 = X_0$

Donc $x(t) = R(t, t_0) X_0$ est bien l'unique solution du problem de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t) x(t) \\ x(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Exercice 6 (Série 3)

Les notions de l'exercice 5 :

Soit $t_0 \in I$. La résolvante $R : I \times I \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}),\ (t,t_0) \mapsto R(t,t_0)$ est l'unique solution du du système différentiel $X'(t) = A(t)\cdot X(t)$, est l'unique solution du problème de Cauchy, définie sur I : $\begin{cases} R'(t,t_0) = A(t)\cdot R(t,t_0) \\ R(t_0,t_0) = I_m. \end{cases}$

Soit X définie sur I, la solution du problème :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)\,X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Montrer que $X(t) = R(t,t_0)\cdot X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)\cdot b(s)\,ds,\ \forall t \in I.$?

- On a : $R(t,t_0)$ une matrice inversible et $R(t,t_0)^{-1} = R(t_0,t)$.
- On pose : $\boxed{Y(t) = R(t,t_0)^{-1}\cdot X(t)}$. Alors, on a :

$$Y'(t) = -R(t,t_0)^{-1}\cdot R'(t,t_0)\cdot R(t,t_0)^{-1}\cdot X(t) + R(t,t_0)^{-1}\cdot X'(t)$$

$$= -R(t,t_0)^{-1}\cdot A(t)\cdot \underbrace{R(t,t_0)\cdot R(t,t_0)^{-1}}_{= I_m}\cdot X(t) + R(t,t_0)^{-1}\left[A(t)\cdot X(t) + b(t)\right]$$

$$= -R(t,t_0)^{-1}\cdot \cancel{A(t)\cdot X(t)} + \cancel{R(t,t_0)^{-1}\cdot A(t)\cdot X(t)} + R(t,t_0)^{-1}\cdot b(t)$$

$$= R(t_0,t)\cdot b(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} Y'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)\cdot b(s)\,ds$$

$$\Rightarrow Y(t) - Y(t_0) = \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)\cdot b(s)\,ds, \text{ avec } \begin{cases} Y(t_0) = R(t_0,t_0)\cdot X(t_0) \\ \quad = I_m\cdot X_0 = X_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R(t,t_0)^{-1}\cdot X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)\cdot b(s)\,ds$$

$$\Rightarrow X(t) = R(t,t_0)\cdot X_0 + R(t,t_0)\cdot \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)\cdot b(s)\,ds$$

avec $R(t,t_0)\cdot R(t_0,s) = R(t,s)$.

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = R(t,t_0)\cdot X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)\cdot b(s)\cdot ds}$$

Formule : (Dérivée de l'inverse d'une application à valeurs matricielle) :

Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction matricielle dérivable sur I.

$$A : I \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$
$$t \longmapsto A(t)$$

($GL_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices inversibles)

Alors, la fonction matricielle : $A^{-1} : I \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est
$t \longmapsto A^{-1}(t)$
dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad \boxed{\frac{dA^{-1}}{dt}(t) = -A^{-1}(t) \cdot \frac{dA}{dt}(t) \cdot A^{-1}(t)}$$

Exercice 4 (Système différentiel à coefficients non constants)

$$\begin{cases} x'(t) = (2-t)\,x(t) + (t-1)\,y(t) \\ y'(t) = 2(1-t)\,x(t) + (2t-1)\,y(t) \end{cases}$$

$$\iff X'(t) = A(t)\,X(t) \quad \text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

On va procéder comme pour une matrice à coefficients constants en diagonalisant pour chaque t, la matrice $A(t)$.

→ Le polynôme caractéristique $P_{A(t)}$ de $A(t)$:

$$P_{A(t)}(\lambda) = \det(A(t) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-t-\lambda & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1-\lambda \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \qquad C_2$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & t-1 \\ 1-\lambda & 2t-1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2t-1-\lambda) - (1-\lambda)(t-1)$$

$$= (1-\lambda)(2t-\cancel{1}-\lambda-t+\cancel{1})$$

$$= (1-\lambda)(t-\lambda) \Rightarrow \boxed{P_{A(t)}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-t)}$$

⇒ Les valeurs propres de $A(t)$ sont $\{1, t\}$, d'ordre de multiplicité 1, donc $\{1, t\}$ sont des valeurs propres simples.

→ Vecteur propre de $A(t)$ associé à $\lambda = 1$:

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $A(t).U = U \iff (A(t) - I_2)U = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 1-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} (1-t)x + (t-1)y = 0 \\ 2(1-t)x + 2(t-1)y = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (1-t)x+(t-1)y=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{(1-t)}{1-t}y$

$\Leftrightarrow \boxed{x=y}$ Donc, $U=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

Donc, $u=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A(t)$ associé à $\lambda=1$.

+ Vecteur propre de $A(t)$ associé à $\lambda=t$:

Soit $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ tel que $(A(t)-tI_2)v=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2-2t & t-1\\ 2(1-t) & t-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2(1-t)x+(t-1)y=0$

$\Leftrightarrow y=\cancel{-}\frac{2(1-t)}{\cancel{t-1}}x$

$\Leftrightarrow \boxed{y=2x}$. Donc, $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

Donc, $v=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A(t)$ associé à $\lambda=t$

+ Puisque toutes les valeurs propres de $A(t)$ sont simples, alors $A(t)$ est diagonalisable. Donc, il existe une matrice diagonale $D(t)$ et une matrice de passage P inversible:

$D(t)=\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ tel que $A(t)=PD(t)P^{-1}$.

→ Revenons au système différentiel :

$$X'(t) = A(t)\,X(t)$$

$$\iff X'(t) = P \cdot D(t) \cdot P^{-1} \cdot X(t)$$

$$\iff \underbrace{P^{-1} \cdot X'(t)} = D(t) \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot X(t)}$$

$$\iff Y'(t) = D(t) \cdot Y(t) \quad , \text{ où on pose : } Y(t) = P^{-1} \cdot X(t)$$

$$\iff X(t) = P \cdot Y(t)$$

Alors, <u>les solutions</u> du système : $Y'(t) = D(t)\,Y(t)$ sont :

$$Y(t) = e^{tD(t)} \cdot \gamma \quad \text{où } \gamma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ et } e^{tD(t)} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{t} \\ \beta e^{t^2} \end{pmatrix}.$$

En conclusion, puisque $Y(t) = P^{-1} X(t)$, alors

$$X(t) = P \cdot Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{t} \\ \beta e^{t^2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, <u>les solutions</u> du système initial : $X'(t) = A(t)X(t)$, sont :

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{t} + \beta e^{t^2} \\ \alpha e^{t} + 2\beta e^{t^2} \end{pmatrix}}$$