Chapitre 3
Systèmes d'équations différentiels

I- Résolution des systèmes d'équation différentiels à coefficients constants.

1- exponentielle d'une matrice:

a- algèbre normé $M_n(\mathbb{K})$:

Définition: $M_n(\mathbb{K}) = \{A = (a_{ij}) ; 1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq n\}$ et défini par :

une norme sur $M_n(\mathbb{K})$ est une application notée $\|.\|$ et défini par :

$$\|.\| : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$A \longmapsto \|A\|$$

vérifiant: i/ $\|A\| = 0 \iff A = 0$

ii/ $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

iii/ $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Exemple:

$$\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_n = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \quad \text{(la norme euclidienne)}$$

Proposition

Soit $\|.\|$ une norme sur $M_n(\mathbb{K})$ Alors $\big| \|A\| - \|B\| \big| \leq \|A-B\|$

Définition: On dit que $\|.\|$ est une norme d'Algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$ si elle vérifie de plus

$$\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$$

Proposition:

La norme euclidienne est une norme d'Algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$

Proposition:

Soit $\|.\|$ une norme d'Algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$ alors on a: $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

Définition: Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11}(p) & a_{12}(p) & \cdots & a_{1n}(p) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(p) & a_{n2}(p) & \cdots & a_{nn}(p) \end{pmatrix}$$

La suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \in M_n(\mathbb{K})$ lorsque $\|A_p - L\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0_{M_n(\mathbb{K})}$

Exemple:

$$A_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+1} & \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{p}\right) \\ \ln\left(\frac{p+1}{p+1}\right) & \cos\left(\frac{p+1}{p+2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[p\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \cos(1) \end{pmatrix} = L$$

Proposition:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la serie de matrice $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles S_p

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \text{ converge vers } L$$

Definition:

la somme de la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est appellée exponentielle de la matrice A.

et on la note par e^A ou $exp(A)$.

Exemple:

① Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

une matrice diagonale.

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

en effet

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

② A diagonalisable

$\exists$ D diagonale et P une matrice de passage tq $A = P^{-1}AP$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = P \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} P^{-1}$$

$$e^A = Pe^DP^{-1}$$

Definition:

M nilpotente $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{N}$ tq $M^\alpha = 0$

Exemple

Si $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$N^3 = 0$$

$$e^N = Id + N + \frac{N^2}{2!}$$

$$e^{T+N} = e^T . e^N$$

$$DN = ND$$

Theoreme:

si le polynome caracteristique est scindé sur $\mathbb{K}$ alors d'après Dunford il existe P inversible, D diagonale, N nilpotente tq

$$P^{-1}AP = D + N$$

avec $ND = DN$

b_ Resolution du Systeme d'equation diff. à coeff. const.

$$\begin{cases} a_{11} y_1' + a_{12} y_2' + a_{13} y_3' + \dots + a_{1n} y_n' = b_1 \\ a_{21} y_1' + a_{22} y_2' + \dots + a_{2n} y_n' = b_2(t) \\ \vdots \\ a_{p1} y_1' + a_{p2} y_2' + \dots a_{pn} y_n' = b_p(t) \end{cases}$$

avec les b_i : $b_i : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, $t \longmapsto b_i(t)$

sont des fonctions reelles et continues ②

Les $y_i : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$
sont des fonctions dérivables inconnues.

Rq: Une solution d'un système (S):

$(S) \iff Y' = AY$

avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$

est la donnée de m fonction y_i

$y_i : I \longrightarrow \mathbb{K} \quad (i \in 1, \dots m)$

Definition: Soit (S) le système défini par $Y' = AY + B$

si $B = 0$, on dit que le système est homogène ou système sans second membre.

Théorème: les solution du système homogène $Y' = AY$ avec $A \in M_m(\mathbb{K})$ sont données par la formule suivante

$Y(t) = e^{tA} . \gamma$ avec $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

vecteur constant

de plus, il existe une solution unique du système $Y' = AY$ vérifiant la condition initiale $Y(t_0) = Y_0 \in \mathbb{K}^m$.
qui est donnée par:

$Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$

Théorème: l'ensemble de solution du système homogène $Y' = AY$ est un $\mathbb{K}$ ev de dimension m

.une base de cette espace est donnée par les vecteur colonne de la matrice e^{tA}.

c- Resolution du système non homogène $Y' = AY + B$

Théorème: la solution générale du système non homogène:

twal inzid primitive

$Y'(t) = AY(t) + B$. est:

$Y(t) = e^{tA}. \gamma + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s) ds$

(maj mou ndiw les données)

avec $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$

Hech to saler ma3andech condition initiale

de plus, il existe une solution unique vérifiant la condition initiale $y(t_0) = Y_0$

elle est donnée par:

$Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s) ds$

Proposition: Methode de la variation de la constante:

Soit $X' = AX + B$

Supposons $X_1, X_2, \dots, X_m$ une base de S_k l'ev de solutions de $X' = AX$

donc la solution:

$X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t) + \dots + \lambda_m X_m$

avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = \{1, \dots m\}$

on varie la constante donc

$X(t) = \lambda_1(t) X_1(t) + \dots + \lambda_m(t) X_m(t)$

. on dérive $X(t)$ et on substitue le résultat dans (*)

$$\begin{cases} \lambda_1' x_{11}(t) + \lambda_2' x_{12}(t) + \dots + \lambda_m' x_{1m}(t) = b_1 \\ \lambda_1' x_{21}(t) + \lambda_2' x_{22}(t) + \dots + \lambda_m' x_{2m}(t) = b_2 \\ \vdots \\ \lambda_1' x_{m1}(t) + \lambda_2' x_{m2}(t) + \dots + \lambda_m' x_{mm}(t) = b_m \end{cases}$$

mestaa3mlin det

c'est un système de Cramer.

en effet, le déterminant:

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1m}(t) & & x_{mm}(t) \end{vmatrix} = \det(e^{tA}) \neq 0$$

$\Rightarrow \lambda_1' = ? \longrightarrow \lambda_1(t)$

$\Rightarrow \lambda_2' = ? \longrightarrow \lambda_2(t)$

$\vdots$

$\Rightarrow \lambda_m' = ? \longrightarrow \lambda_m(t)$

Exercice :

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \tan t \end{pmatrix}$$

Resoudre ce systeme en utilisant la methode de la variation de la constante.

$Y'(t) = A + B(t)$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$(E.H) : Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y(t)$

V.P de A :

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d)$

$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda^2 + 1$

donc $\lambda_1 = i$

$\lambda_2 = -i$

P_A est Scindé sur $\mathbb{C}$ donc diagonalisable

$\Rightarrow$ A est semblable à $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1}$

$E_i = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle$

$E_{-i} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle$

$Y_H(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$

$$Y_H(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y_H(t) = \mu_1 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \end{pmatrix}}_{Z_1} + \mu_2 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-it} \\ -ie^{-it} \end{pmatrix}}_{\overline{Z_1}}}$$

$$\text{donc } Z_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}}_{X_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{X_2}$$

X_1 et X_2 forment une base $S_{\mathbb{R}}$

$Y_H(t) = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$

on pose $Y_p(t) = \lambda_1(t) X_1(t) + \lambda_2(t) X_2$

methode de variation de la constant.

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)\cos(t) + \lambda_2'(t)\sin(t) = 0 \\ -\lambda_1'(t)\sin(t) + \lambda_2'(t)\cos(t) = \tan(t) \end{cases}$$

c'est un systeme de CRAMER.

$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}$

$\lambda_1'(t) = \begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \tan t & \cos t \end{vmatrix} = -\sin(t)\tan(t)$

$\lambda_2'(t) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ \sin t & \tan t \end{vmatrix} = \sin(t)$

$\longrightarrow \lambda_2(t) = -\cos t$

$*$ $\int -\sin t \tan t \, dt$

$= -\int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = -\int \frac{1}{\cos t} dt + \int \cos t \, dt$

$$\lambda_1(t) = -\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt$$

$$= -\int \frac{dt}{\cos(t)} + \underbrace{\int \cos t\,dt}_{\sin t}$$

$$\cos t = \cos\left(2 \cdot \frac{t}{2}\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\lambda_1(t) = -\int \frac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt$$

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$du = \frac{dt}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$-\int \frac{2\,du}{1-u^2} = -\int \frac{2du}{(1-u)(1+u)}$$

$$= -2\int \frac{a}{1+u} + \frac{b}{1-u}\,du$$

$$= -2a\left[\ln(u+1)\right] + 2b\left(\ln(1-u)\right)$$

$$= -2a\left[\ln\left(tg\left(\frac{t}{2}\right)+1\right)\right] + 2b\left[\ln\left(1-tg\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]$$

$$\boxed{* \; y'(t) = \underset{\sim}{A(t)}\,y(t) + B(t) \quad \text{à coefficient Variable}}$$

II. Resolution des systemes d'equation differenciels à coefficients Variables

Dans la suite : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Definition :

Un systeme differentiel lineaire du 1er ordre dans $\mathbb{K}^m$ est une equation :

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)\,y(t) + B(t) \quad ; t \in I$$

où $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$

est la fonction inconnue et où $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathcal{M}_m(K)$

$1 \leq i, j \leq m$

$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix} \in K^m$ sont des fonctions continues données.

* $A : I \to \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$
* $B : I \to \mathbb{K}$ definies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Theoreme

Pour tout couple $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^m$ il passe une unique solution globale

Revoir