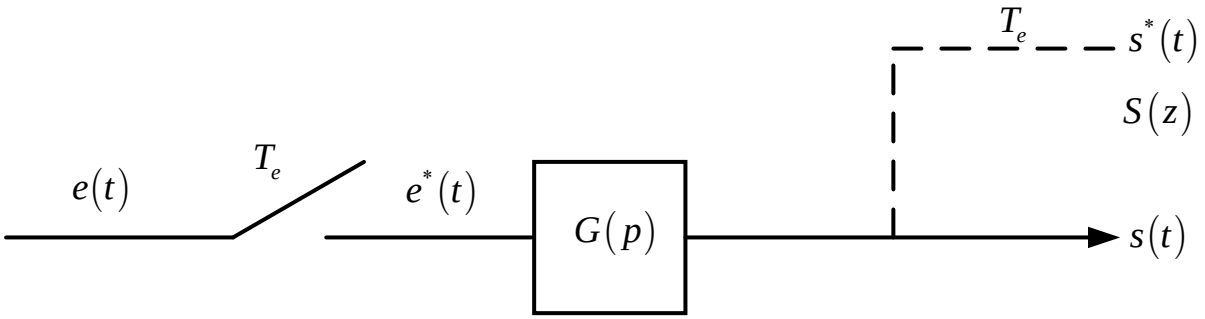
Chapitre 3. Les transmittances échantillonnées

1. Définition

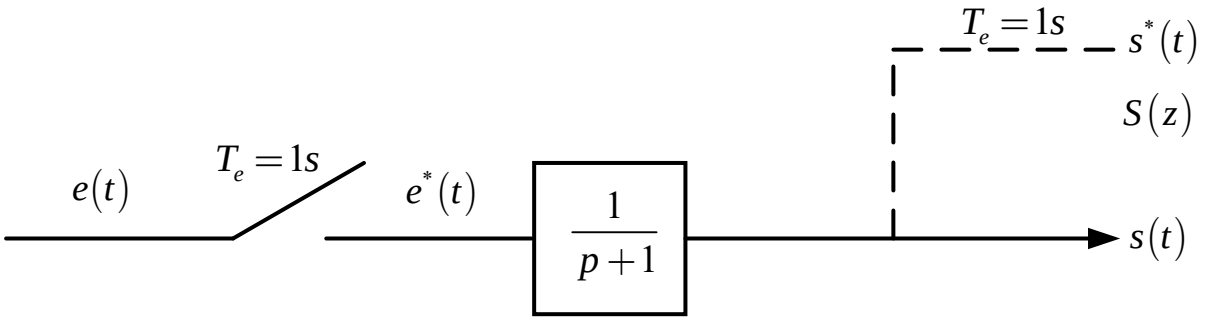
Lorsqu'un système continu de transmittance $G(p)$ est attaqué par un signal d'entrée échantillonné $e^*(t)$ alors sa sortie $s(t)$ est continue.



Si on s'intéresse seulement aux valeurs prise par la sortie $s(t)$ aux instants d'échantillonnage alors on définit la transmittance échantillonnée du système par :

$$G(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=Z\left[TL^{-1}\left(G(p)\right)\right].$$

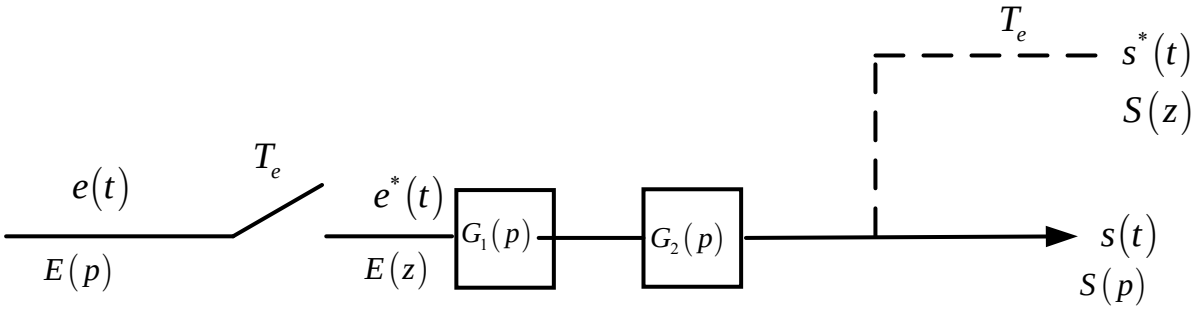
Exemple 1.



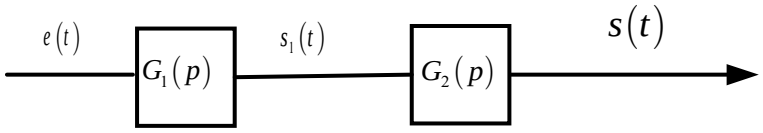
Calculer $G(z)=\frac{S(z)}{E(z)}$.

$$G(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=Z\left[TL^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)\right]=Z\left[e^{-t}\right]=\frac{\frac{Z}{Z-1}}{Z=ze^{T_e}}$$

$$=\frac{ze^{T_e}}{z-e^{-T_e}}=\frac{z}{z-0.37}.$$



En continu :



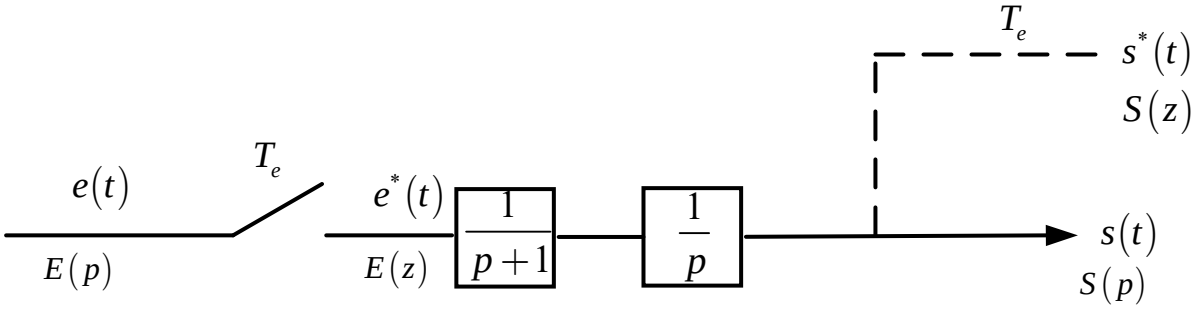
$$G_1(p)=\frac{S_1(p)}{E(p)}\ ;\ G_2(p)=\frac{S(p)}{E(p)}$$

En échantillonné :

$$G(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=Z\left[TL^{-1}\left(G_1(p)G_2(p)\right)\right]$$

$$G(z)=\frac{S(z)}{E(z)}\neq G_1(z)G_2(z).$$

Exemple 2.



$$G_1(z)=Z\left[TL^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)\right]=\frac{z}{z-0.37}$$

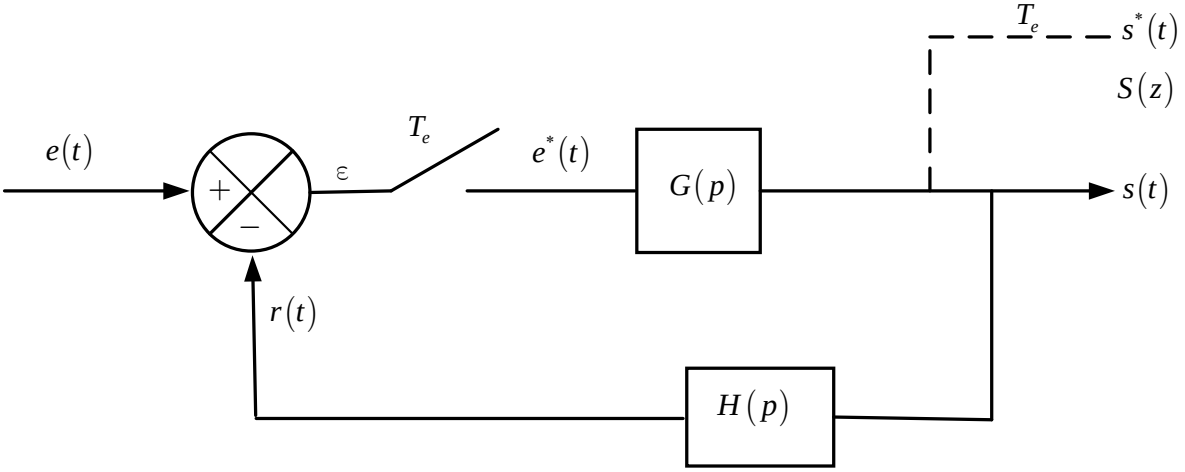
$$G_2(z)=Z\left[TL^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)\right]=\frac{z}{z-1}$$

$$G_1(z)G_2(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.37)}$$

$$G_1(p)G_2(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$$

$$Z\left(TL^{-1}\left(G_1(p)G_2(p)\right)\right)=\frac{0.63}{(z-1)(z-0.37)}.$$

Exemple 3.



Calculer $\frac{S(z)}{E(z)}$.

$$\frac{S(z)}{\varepsilon(z)}=H(z)$$

$\varepsilon(t)=e(t)-r(t)$, $\varepsilon(z)=E(z)-R(z)$;

$$R(z)=Z\left(TL^{-1}\left(H(p)G(p)\right)\right)\varepsilon(z)$$

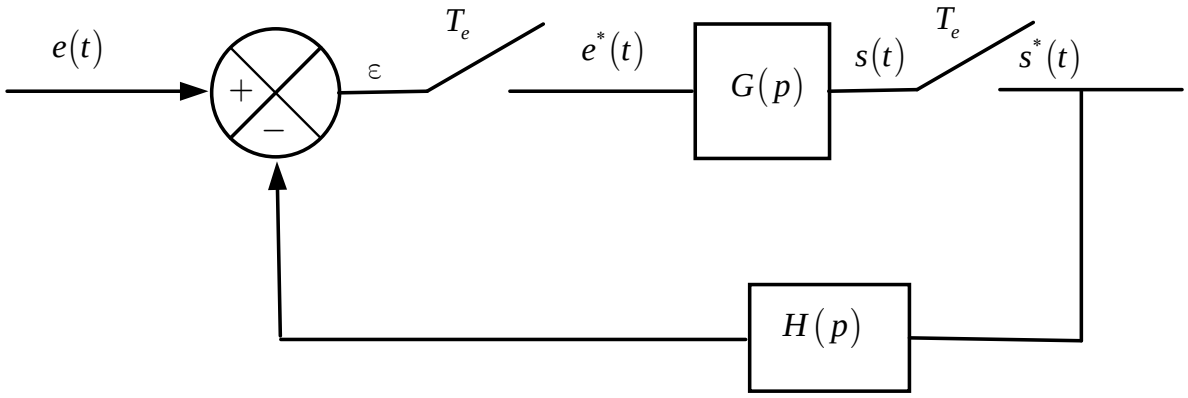
Donc : $\varepsilon(z)=E(z)-R(z)=E(z)-Z\left(TL^{-1}\left(H(p)G(p)\right)\right)\varepsilon(z)$

$$\varepsilon(z)=\frac{E(z)}{1+Z\left(TL^{-1}\left(H(p)G(p)\right)\right)}$$

$$S(z)=\frac{H(z)E(z)}{1+Z\left(TL^{-1}\left(H(p)G(p)\right)\right)}$$

$$\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{H(z)}{1+Z\left(TL^{-1}\left(H(p)G(p)\right)\right)}.$$

Exemple 4.



Calculer $\frac{S(z)}{E(z)}$.

$S(z)=H(z)\varepsilon(z)$

$\varepsilon(t)=e(t)-r(t)$, $\varepsilon(z)=E(z)-R(z)$;

$R(z)=H(z)G(z)\varepsilon(z)$

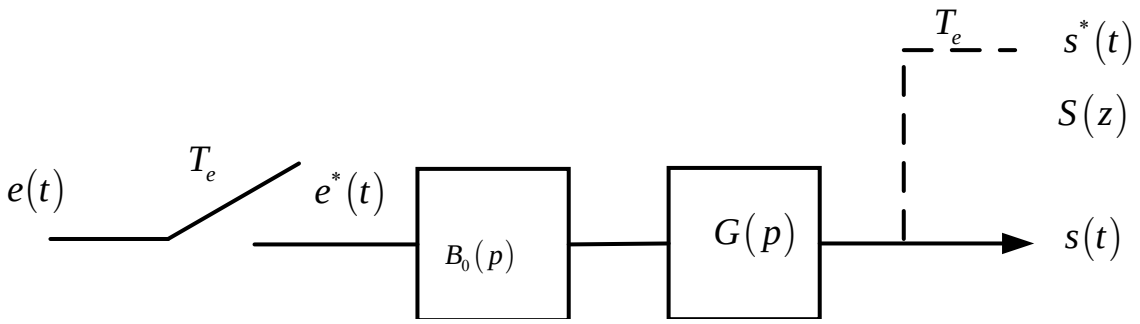
Donc : $\varepsilon(z)=E(z)-R(z)=E(z)-H(z)G(z)\varepsilon(z)$

$$\varepsilon(z)=\frac{E(z)}{1+H(z)G(z)}$$

$$S(z)=\frac{H(z)E(z)}{1+H(z)G(z)}$$

$$\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{H(z)}{1+H(z)G(z)}.$$

Exemple 5.



$B_0(p)$: la fonction de transfert de l'échantillonneur bloqueur.

Calculer $\frac{S(z)}{E(z)}$.

$$\frac{S(z)}{E(z)} = Z\left(TL^{-1}\left(B_0(p)G(p)\right)\right) = Z\left(TL^{-1}\left(\left(\frac{1-e^{-T_e p}}{p}\right)G(p)\right)\right)$$

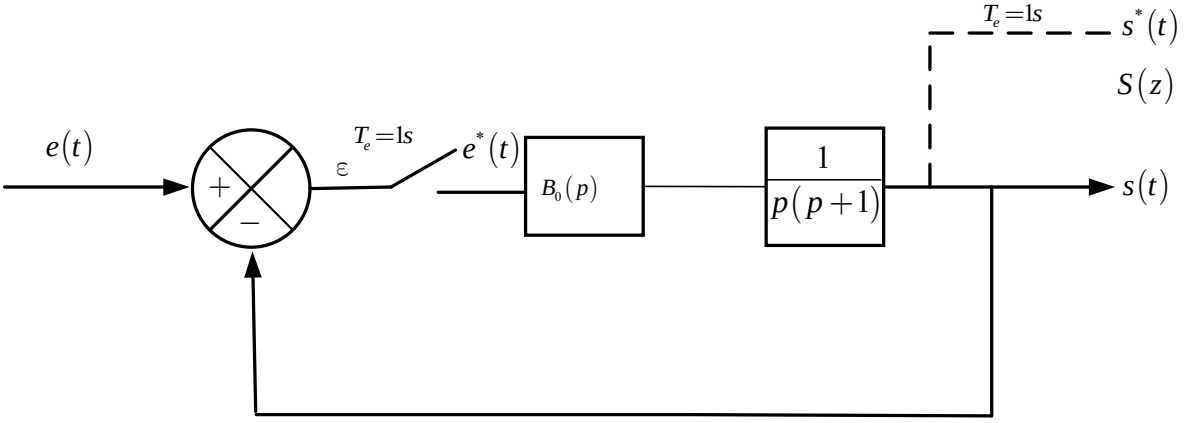
$$= Z\left(TL^{-1}\left(\frac{G(p)}{p}\right)\right) - Z\left(TL^{-1}\left(\left(\frac{e^{-T_e p}G(p)}{p}\right)\right)\right)$$

$$= Z\left(TL^{-1}\left(\frac{G(p)}{p}\right)\right) - z^{-1}Z\left(TL^{-1}\left(\left(\frac{G(p)}{p}\right)\right)\right).$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \left(1-z^{-1}\right)Z\left(TL^{-1}\left(\frac{G(p)}{p}\right)\right) = \frac{z-1}{z}Z\left(TL^{-1}\left(\frac{G(p)}{p}\right)\right)$$

Finalement : $Z\left(TL^{-1}\left(B_0(p)G(p)\right)\right) = \frac{z-1}{z}Z\left(TL^{-1}\left(\frac{G(p)}{p}\right)\right)$.

Exemple 6. Soit le système suivant :



1. Calculer $\frac{S(z)}{E(z)}$.
2. Calculer la réponse indicielle.

$$\frac{S(z)}{E(z)}=H(z)=\frac{Z\left(TL^{-1}\left(B_0(p)\frac{1}{p(p+1)}\right)\right)}{1+Z\left(TL^{-1}\left(B_0(p)\frac{1}{p(p+1)}\right)\right)}$$

$$Z\left(TL^{-1}\left(B_0(p)\frac{1}{p(p+1)}\right)\right)=\frac{z-1}{z}Z\left(TL^{-1}\left(\frac{1}{p^2(p+1)}\right)\right)=\frac{1}{z-1}-\frac{0.63}{z-0.37}$$

$$=\frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{\left(1-e^{-1}\right)z}{(z-1)\left(1-e^{-1}\right)}\right]=\frac{0.37z+0.26}{(z-1)(1-0.37)}$$

$$H(z)=\frac{0.37z+0.26}{z^2-z+0.63}.$$

Réponse indicielle :

$$S(z)=H(z)E(z)=\frac{(0.37z+0.26)z}{\left(z^2-z+0.63\right)(z-1)}=\frac{0.37z^2+0.26z}{z^3-2z^2+1.63z-0.63}$$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 0.37z^2 + 0.26z & z^3 - 2z^2 + 1.63z - 0.63 \\
- & 0.37z^2 - 0.74z + 0.6 - 0.23z^{-1} & \hline
 & & 0.37z^{-1} + z^{-2} + 1.4z^{-3} \\
\hline
 & z - 0.6 + 0.2233z^{-1} & \\
- & z - 2 + 1.63z^{-1} - 0.63z^{-2} & \\
\hline
 & 1.4 - 1.397z^{-1} + 0.63z^{-2} &
\end{array}
$$