Université de Carthage
ENSTA Borj-Cedria

A.U : 2021-2022
Classes : 1 TA

Série 2 : Analyse numérique
Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Exercice 1

1. Calculer dans chacun des cas suivants le rayon spectral de la matrice d'itération de Jacobi et le rayon spectral de la matrice d'itération de Gauss-Seidel, pour la résolution du système linéaire $AX = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Que peut-on déduire ?

2. Montrer que si la matrice A est à diagonale strictement dominante :

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

alors, A est inversible et la méthode de Jacobi converge pour la résolution du système linéaire $AX = b$. (*Indication* : Montrer que $\| J \|_\infty < 1$)

3. Étudier la convergence de la méthode de relaxation pour la résolution du système linéaire $AX = b$, lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dans le cas où on a convergence de la méthode de Jacobi, calculer les itérées de cette méthode en prenant $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Conclure.

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit le système linéaire $AX = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de α, la matrice A est-elle symétrique définie positive ?
2. Écrire la méthode de Jacobi correspondante. Pour quelles valeurs de α, la méthode converge-t-elle ?
3. Montrer que pour tout $\alpha \in]\frac{-1}{2}, 1[$, la méthode de relaxation converge pour tout $\omega \in]0, 2[$.

Exercice 3

Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 0$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ régulière et $b \in \mathbb{R}^n$. On veut résoudre le système linéaire $AX = b$. On note D la matrice diagonale construite à partir des éléments de la diagonale de A. Soit $\alpha \neq 0$, on étudie la méthode itérative :

$$X^{(k+1)} = \left(I_n - \alpha\, D^{-1} A\right) X^{(k)} + \alpha\, D^{-1} b$$

1. Montrer que la méthode est consistante, c-à-d.
   si $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers X, alors X est la solution du système linéaire $AX = b$.
2. Exprimer les coefficients de $D^{-1}A$ en fonction de ceux de A.
3. On suppose que $0 < \alpha \leq 1$ et que A satisfait la propriété suivante :

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

   Montrer que la méthode est bien définie et que

$$|||\, I_n - \alpha\, D^{-1} A \,|||_\infty < 1$$

   En déduire que la méthode est convergente.

Exercice 1 :

1/ Calculer dans chacun des cas suivants le rayon spectral de la matrice d'iteration de Gauss-Seidel pour la résolution du système $AX = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Que peut-on en déduire.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi :

$J = D^{-1}(E+F)$ avec $D = I_3 = D^{-1}$

et $E+F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow J = E+F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Polynôme caractéristique de J

$P_J(\lambda) = \det(J - \lambda I_3) = -\lambda^3$ $\Rightarrow$ 0 valeur propre d'ordre 3 de J

$\Rightarrow$ Rayon spectral : $\rho(J) = 0 < 1$

$\Rightarrow$ Méthode de Jacobi converge pour résoudre le système linéaire $AX = b$ pour $b \in \mathbb{R}^3$

Méthode de Gauss-Seidel :

$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}.F$

où $D-E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(D-E \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_3 \mid (D-E)^{-1})$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: matrice triangulaire

les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont 0 et 2

$\Rightarrow \rho(\mathcal{L}_1) = 2 > 1$

$\Rightarrow$ La méthode de Gauss Seidel est divergente pour résoudre le système $AX = b$ pour tout $b \in \mathbb{R}^3$

2/ Montrer que si la matrice A est à diagonale strictement dominante alors A est inversible et la méthode de Jacobi converge pour $AX = b$.

(Indice : Mq $\|J\|_\infty < 1$)

strictement dominante $= |a_{ii}| > \sum |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ Montrons que A est inversible, soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \, / \, AX = 0$

alors pour tout $i = 1, \dots, n$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$

ou encore $\displaystyle a_{ii} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = 0$

Alors $\displaystyle |a_{ii}| \, |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \, |x_j|$

On suppose que $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ $\left(\Rightarrow \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \neq 0 \right)$

$\displaystyle \Rightarrow |a_{ii}| \, |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot \|X\|_\infty$

$\displaystyle \Rightarrow |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot \|X\|_\infty$, pour tout $i = 1, \dots, n$

$|a_{ij}| < 1$

$\Rightarrow |x_i| < \|X\|_\infty$ pour tout $i = 1, \dots, n$

$\hookrightarrow$ absurdité

ce qui est impossible car il existe $i_0 = \{1, \dots, n\}$ tq

$|x_{i_0}| = \max |x_i| = \|X\|_\infty$

Donc $X = 0_{\mathbb{R}^n}$ $\Rightarrow$ A inversible

La matrice de Jacobi

$$J = D^{-1}(E+F)$$

$$= \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1\,n} \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \\ -\frac{a_{2n}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (J) = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad \forall\ i,j \in [1,n]$$

$$\|J\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1} |J_{ij}|$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \frac{\sum |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$ car A à diago strictement dominante.

$\|J\|_\infty < 1$ avec $\rho(J) \le \|J\|_\infty < 1$

$\Rightarrow$ la méthode de Jacobi converge pour résoudre $Ax = b$

3/ Etudier la convergence de la méthode de relaxation pour la résolution du système $AX = b$, lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de relaxation :

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{1}{w} D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} D + F\right) \quad , \text{ pour } w \in \mathbb{R}^*$$

avec $\frac{1}{w} D - E = \begin{pmatrix} \frac{1}{w} & 0 & 0 \\ 1 & 1/w & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{w} \end{pmatrix}$

et $\frac{1-w}{w} D + F = \begin{pmatrix} \frac{1-w}{w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-w}{w} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1-w}{w} \end{pmatrix}$

$$\left(\frac{1}{w} D - E \mid I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{w} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/w & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow wL_2 \\ L_3 \leftarrow wL_3}]{L_1 \leftarrow wL_1}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ w & 1 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - wL_1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w^2 & w & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w \end{array}\right) = \left(I_3 \mid \left(\tfrac{1}{w} D - E\right)^{-1}\right)$$

Polynôme characteristique de $\mathcal{L}_w$ = $\begin{vmatrix} 1-w-\lambda & 0 & 0 \\ w(w-1) & 1-w-\lambda & -w \\ 0 & 0 & 1-w-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\omega-\lambda)^3$

$\Rightarrow$ $\lambda = 1-\omega$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_\omega$ d'ordre 3

$\Rightarrow$ $\rho(\mathcal{L}_\omega) = |1-\omega|$

La méthode de relaxation converge pour résoudre

$AX = b$ ssi $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$

$\Leftrightarrow \quad |1-\omega| < 1$

$\Leftrightarrow \quad -1 < 1-\omega < 1$

$-2 < -\omega < 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{0 < \omega \quad 2}$

Exercice 1 question 4:

La méthode de Jacobi converge pour résoudre $AX = b$, pour tout $b \in \mathbb{R}^3$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

méthode de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} \text{initialisation } X^{(0)} \text{ donné ;} \\ \text{pour } k \geq 0, \text{ calculer } X^{(k+1)} \text{ solution de :} \\ X^{(k+1)} = \underbrace{D^{-1}(E+F)}_{J} X^{(k)} + D^{-1}.b \end{cases}$$

avec

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ième composante de vecteur $X^{(k+1)}$ s'écrit :

$$X_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right], \quad \forall \ i = 1, 2, 3$$

on a $a_{ii} = 1$

$$\Rightarrow X^{(1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} a_{ij} \, x_j^{(0)} \right)_{i=1,2,3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

$$X^{(2)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} a_{ij} \, x_j^{(1)} \right)_{i=1,2,3}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 - a_{12} x_2^{(1)} - a_{13} x_3^{(1)} \\ b_2 - a_{21} x_1^{(1)} - a_{23} x_3^{(1)} \\ b_3 - a_{31} x_1^{(1)} - a_{32} x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Suite exercice 1 :

Remarque : on s'arrête lorsque $X^{(k)} = X^{(k+1)}$

$$X^{(3)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} a_{ij} x_j^{(2)} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = X^{(2)}$$

$\Rightarrow$

On s'arrête

En conclusion : la suite $X^{(k)}$ converge quand $k \to +\infty$ vers $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ la solution du système linéaire $AX = b$

Exercice 2 : $\alpha \in \mathbb{R}$, $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Mat déf strict positive
$\Rightarrow$ Valeurs propres strictement positives

1) A est une matrice symétrique pour toute valeur de α ; si $\alpha = 0$ alors $A = I_3$ qui est symétrique défini positive.

Si $\alpha \neq 0$, alors le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On pose $\alpha N = 1 - \lambda$
$\det(\alpha B) = \alpha^n \det B$
$B \in M_n(K)$

$$= \alpha^3 \det \begin{vmatrix} N & 1 & 1 \\ 1 & N & 1 \\ 1 & 1 & N \end{vmatrix}$$

$C_2 \rightarrow C_2 - C_3$

$$\longrightarrow \quad \alpha^3 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (+) & (-) & (+) \end{array} \\ \begin{vmatrix} N & 0 & 1 \\ 1 & N-1 & 1 \\ 1 & 1-N & N \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \alpha^3 \left([N(N-1) - (1-N)]N + 1[1-N-(N-1)] \right)$$

$$= \alpha^3 [N(N-1)(N+1) - 2(N-1)]$$

$$= \alpha^3 (N-1)(N^2+N-2) \rightarrow \quad N_1 = 1, \quad N_2 = -2$$

$$= \alpha^3 (N-1)^2 (N+2)$$

Suite exercice 2 :

$P_A(\lambda) = 0 \iff N = 1$ ou $N = -2$

$\iff \alpha N = \alpha$ ou $\alpha N = 2\alpha$

$\iff 1 - \lambda = \alpha$ ou $1 - \lambda = 2\alpha$

$\iff \lambda_1 = 1 - \alpha$ ou $\lambda_2 = 1 + 2\alpha$

Donc les val propres sont $\lambda_1 = 1 - \alpha$ et $\lambda_2 = 1 + 2\alpha$

La matrice A est symétrique définie positive ssi $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$

ssi $\alpha < 1$ et $\alpha > -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \alpha < 1$

2) Méthode de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Initialisation : } X^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \text{ donnée} \\ \text{pour } k \geq 0, \text{ calculer } X^{(k+1)} \text{ solution de} \\ X^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)\,X^{(k)} + D^{-1}b \end{cases}$$

où $D = I_3 = D^{-1}$ et la matrice de Jacobi $J = E + F$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Suite

exercice 2

le polynôme caractéristique de J :

$$P_J(\lambda) = \det(J - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\lambda & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix}$$

on pose $\boxed{\alpha N = \lambda}$

$$= (-\alpha)^3 \begin{vmatrix} +N & +1 & +1 \\ +1 & +N & +1 \\ +1 & +1 & +N \end{vmatrix}$$

$$= -P_A(\lambda)$$

$$= -\alpha^3 \left((N-1)^2 (N+2) \right)$$

$P_J(\lambda) = 0$ ssi $N = 1$ ou $N = -2$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \alpha$ ou $\lambda = -2\alpha$

$\Rightarrow$ le rayon spectral de J est $\rho(J) = \max_{1 \leq i \leq 3} |\lambda_i|$

$= \max \{ |\alpha| , 2|\alpha| \}$

$\rho(J) = 2|\alpha|$

$\rho(J) < 1$ ssi $2|\alpha| < 1$

ssi $|\alpha| < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$

En conclusion la méthode de Jacobi converge ssi $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$

3)

soit $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 1[$

la matrice de relaxation :

$$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right)$$

où $\frac{1}{\omega} D - E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 & 0 \\ \alpha & \frac{1}{\omega} & 0 \\ \alpha & \alpha & \frac{1}{\omega} \end{pmatrix}$

et $\frac{1-\omega}{\omega} D + F = \begin{pmatrix} \frac{1-\omega}{\omega} & -\alpha & -\alpha \\ 0 & \frac{1-\omega}{\omega} & -\alpha \\ 0 & 0 & \frac{1-\omega}{\omega} \end{pmatrix}$

ici pour éviter d'avoir 3 paramètres on va pas calculer le polynôme caractéristique

$\det(A * B) = \det(A) \times \det(B)$
$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \det\left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^{-1} \times \det\left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right)$$

$$= \frac{1}{\det\left(\frac{1}{\omega} D - E\right)} \times \det\left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)^3}{\left(\frac{1}{\omega}\right)^3} = (1-\omega)^3$$

suite exercice 2

$$\left|\det(A)\right| \leqslant \cancel{\det}\left[\rho(A)\right]^n \quad , A \in M_n(\mathbb{R})$$

avec $\left|\det(\mathcal{L}_\omega)\right| \leqslant \rho(\mathcal{L}_\omega)^3 \quad \left(\mathcal{L}_\omega \in M_3(\mathbb{R})\right)$

$$\Rightarrow \left|(1-\omega)^3\right| \leqslant \rho(\mathcal{L}_\omega)^3$$

$$\Rightarrow |1-\omega| \leqslant \rho(\mathcal{L}_\omega)^3$$

ainsi la méthode de relaxation converge ssi $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$

$$\Leftrightarrow |1-\omega| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < 1-\omega < 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 < \omega < 2}$$