

# Cours : Capteurs et Instrumentation

Classe: 2 TA

## Chapitre 2: Caractéristiques Métrologiques des capteurs

*La science de la mesure*

Enseignants:

Dr. Ing. Faten Kardous

Durée: 1h

E-mail [faten.kardous@ensta.u-carthage.tn](mailto:faten.kardous@ensta.u-carthage.tn)

## Plan du chapitre

### Caractéristiques des capteurs:

- A. Statiques
- B. Dynamiques

## Plan du cours

Chapitre 1 – Les Capteurs : Définitions et classifications

Chapitre 2 – Caractéristiques des capteurs

Chapitre 3 – Les capteurs : Principaux Principes de fonctionnement

Chapitre 4 – Electronique Associée aux Capteurs (Conditionneurs)

Chapitre 5 – Acquisition de Données

### Introduction

Les critères les plus courants pour caractériser des capteurs :

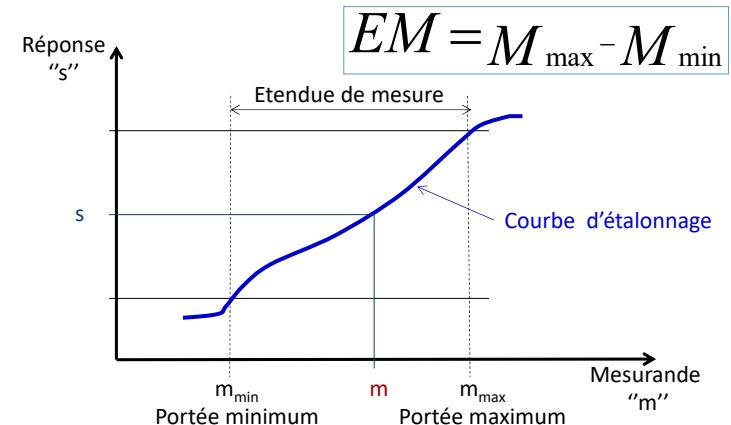
- la grandeur physique observée.
- l'étendue de mesure
- la sensibilité
- la précision
- la linéarité
- la résolution
- l'hystérésis
- la bande passante
- la plage de température de fonctionnement
- la dérive thermique

#### Remarque :

Pour utiliser un capteur dans les meilleures conditions, il est souvent utile de pratiquer un étalonnage et de connaître les incertitudes de mesures relatives à celui-ci.

## 1. Etendue de mesure

L'Etendue de Mesure **EM** d'un capteur est la plage de valeurs du mesurande pour lesquelles le capteur répond aux **spécifications du constructeur**. C'est la **zone nominale** d'emploi.



## A. Caractéristiques Statiques

Sensibilité, Précision, Fidélité, Justesse, Non-linéarité,  
Hystérésis, Résolution,

Durée: 1h

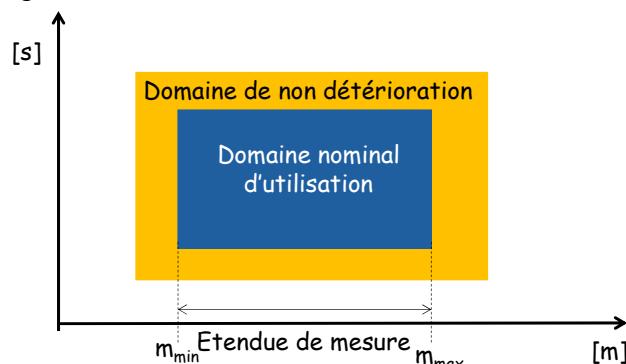
Remarque: Un capteur est dit **linéaire** si sa caractéristique l'est sur l'étendue de la mesure

## 1. Etendue de mesure

### Domaines d'utilisation d'un capteur

Un capteur doit être utilisé en respectant les consignes du fabricant. 3 domaines d'utilisation du capteur.

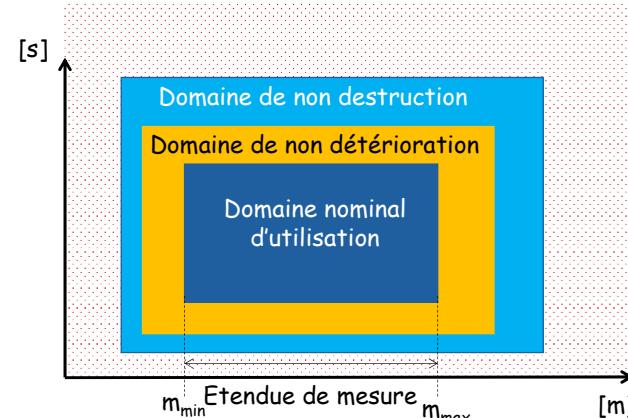
- **Domaine nominal:** les caractéristiques du capteur correspondent aux spécifications de fonctionnement normal ; correspond à l'EM.
- **Domaine de non détérioration:** dans lequel se produit une altération réversible des propriétés du capteur. Le retour au domaine nominal est possible avec la même courbe d'étalonnage.



## 1. Etendue de mesure

### Domaines d'utilisation d'un capteur

- **Domaine de non destruction:** où de détérioration dans lequel se produit une altération irréversible et permanente du capteur.
- **Au delà** on parle de **domaine de destruction** du capteur, où le capteur est hors d'usage.



## 1. Etendu de mesure

[2]

**Exemple 1 :** pour le capteur de force à sortie fréquentielle dont les caractéristiques sont données ici, la portée minimum est 0 N, la portée maximum est 30 N, soit une étendue de mesure de 30 N

étendue de mesure	0 - 30 N
sensibilité	10,5 Hz . N-1
linéarité	3,6 % de l'étendue de mesure
répétabilité	2 %
hystérésis	1,8 %
dérive temporelle	- 0,6 Hz . h-1
dérive thermique	0,5 Hz . °C-1
facteur de qualité	180

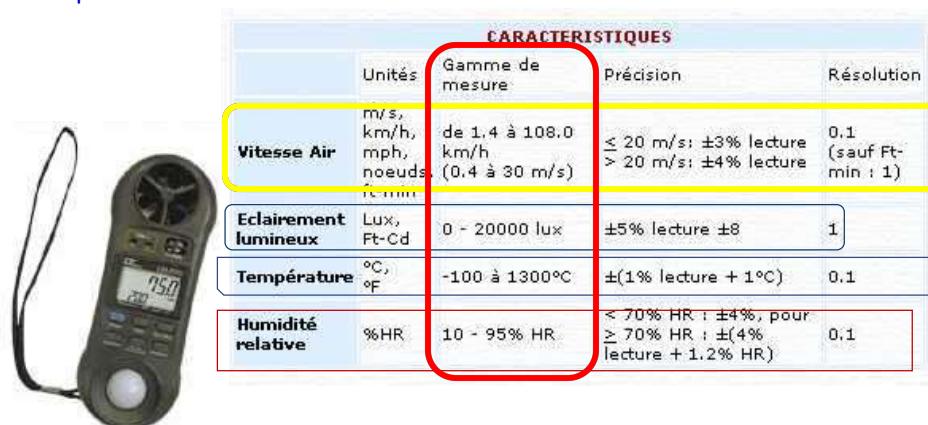
Caractéristique techniques du capteur

9

## 1. Etendu de mesure

[2]

**Exemple 3 :**



Station météo portable (4 en 1):  
Anémomètre, luxmètre,  
thermomètre, hygromètre

03/02/2021

11

## 1. Etendu de mesure

[2]

Exemple 2 :



Luminancemètre

Caractéristiques techniques	
Plages de mesures	de 0,01 cd/m <sup>2</sup> à 19990 cd/m <sup>2</sup> , en 4 plages de mesures
Résolution	PM I 0,01 cd/m <sup>2</sup> PM II 0,1 cd/m <sup>2</sup> PM III 1 cd/m <sup>2</sup> PM IV 10 cd/m <sup>2</sup>
Fréquence de mesure	env. 2,5 mesures/seconde
Affichage	numérique, LCD à 3½ chiffres
Erreurs admissibles	Pour lumière incandescente (éclairage normalisé type A) ±2,5 % de la valeur mesurée plus 4 chiffres. Ecart supplémentaire pour les autres types de lumière (selon CIE TC-2,2) max. ±3,3 % de la valeur mesurée.

Référence: Pierre Bonnet –Master GSI – Université de Lille 1 : Capteurs Chaînes de Mesures

03/02/2021

10

## 1. Etendu de mesure

[2]

## 1. Etendu de mesure

Exemple 4 :

capteur de température

Modèles	Application	Type de contact	Gamme de mesure
905-T1	Contrôle de température en laboratoire	Pointe	-50 / +500°C
Mini thermomètre	Mesure de surface	Pastille diam. 14mm	-50 / +250°C
905-T2	S'adapte à tout type de surface	Lamelles souples	-50 / +500°C

12

## 2. Régime statique

[2]

La **réponse statique** est la réponse du capteur en régime permanent, c'est à dire quand les grandeurs d'entrée (mesurande) et de sortie du capteur (mesure) n'évoluent plus dans le temps (dérivée des grandeurs d'entrée et de sortie nulles).

La réponse statique est déterminée pour l'EM du capteur (zone nominale d'emploi)

L'évaluation du régime statique suppose que le mesurande est constant et que le capteur n'est plus dans son régime transitoire

### Exemple:

un thermomètre indique la température du milieu dans lequel il se trouve quand il est en **équilibre thermique** avec ce milieu, c'est à dire quand leurs températures sont égales

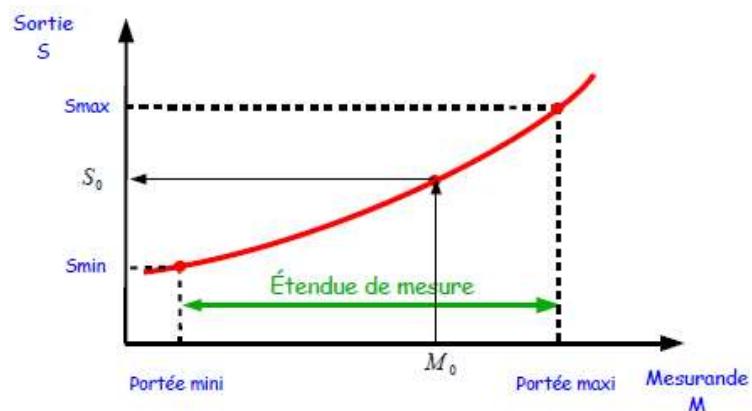
03/02/2021

13

## 3. Courbe d'étalonnage

[2]

La caractéristique statique est la courbe qui représente la **réponse statique** en fonction du **mesurande**. On l'appelle aussi **courbe d'étalonnage**.



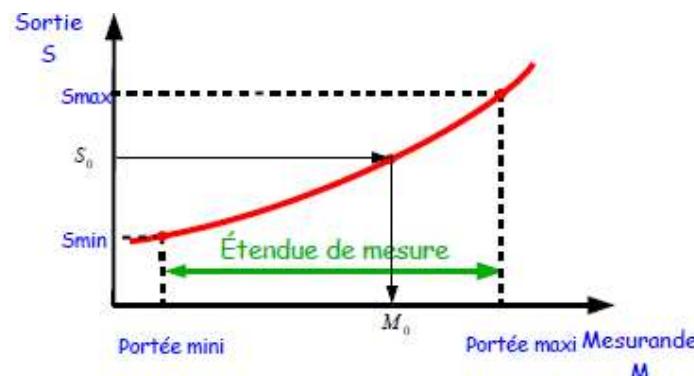
03/02/2021

14

## 3. Courbe d'étalonnage

[2]

La **courbe d'étalonnage** permet aussi de connaître la relation inverse entre le mesurande et la mesure.



Il est très rare de disposer de la courbe réciproque de la courbe d'étalonnage. Seule la courbe directe est fournie

03/02/2021

15

## 3. Courbe d'étalonnage

[2]

La courbe d'étalonnage peut être définie par un tableau représentatif de points discrets de mesure

Exemple : sonde de température résistive PT100

°C	+ 0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
0	100	100,39	100,78	101,17	101,56	101,94	102,33	102,72	103,11	103,59
+ 10	103,89	104,28	104,67	105,06	105,45	105,84	106,23	106,62	107,01	107,40
+ 20	107,79	108,18	108,57	108,95	109,34	109,73	110,12	110,51	110,89	111,28
+ 30	111,67	112,06	112,44	112,83	113,22	113,60	113,99	114,38	114,77	115,16
+ 40	115,54	115,93	116,31	116,70	117,08	117,47	117,86	118,24	118,63	119,01
+ 50	119,40	119,78	120,16	120,55	120,93	121,32	121,70	122,09	122,47	122,86
+ 60	123,24	123,62	124,00	124,39	124,77	125,15	125,54	125,92	126,30	126,69
+ 70	127,07	127,45	127,83	128,22	128,60	128,98	129,36	129,74	130,13	130,51

Le tableau s'emploie dans le **sens direct** (température→signal) à un °C près. et dans le **sens inverse** (signal→température)

Il est possible d'affiner la conversion réciproque par **interpolation linéaire**

03/02/2021

16

### 3. Courbe d'étalonnage

[2]

La courbe d'étalonnage peut être définie par une relation fonctionnelle  $s = f(m)$

**Cas 1 :** la loi est connue physiquement.

Exemple d'une sonde de température type thermistance

$$R(T) = R_0 \exp B \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

**Cas 2 :** la loi est une approximation polynomiale déterminée par régression.

Exemple d'une sonde de température type RTD - PT100:

$$R_T = 100 (1 + 3.9083 T - 5,775 \times 10^{-7} T^2)$$

Remarque :

L'inversion de la relation fonctionnelle n'est souvent pas facile

03/02/2021

17

### 4. Sensibilité

[2]

La sensibilité **S(m)** d'un capteur, pour une valeur donnée **M** du mesurande, est égale au rapport de la variation du signal électrique sur la variation du signal physique.

$$S = \frac{\Delta s}{\Delta m} \Big|_{M_0}$$

Pente locale au point M

Unité: unité de la grandeur électrique sur l'unité du mesurande

Lorsque la loi physique  $s = f(m)$  reliant la réponse au mesurande est connue, la sensibilité S se déduit par dérivation :

$$S = \frac{ds}{dm} \Big|_{M_0}$$

Remarque:

La sensibilité d'un capteur linéaire est constante et est égale à la pente de sa caractéristique

Capteurs & Instrumentation

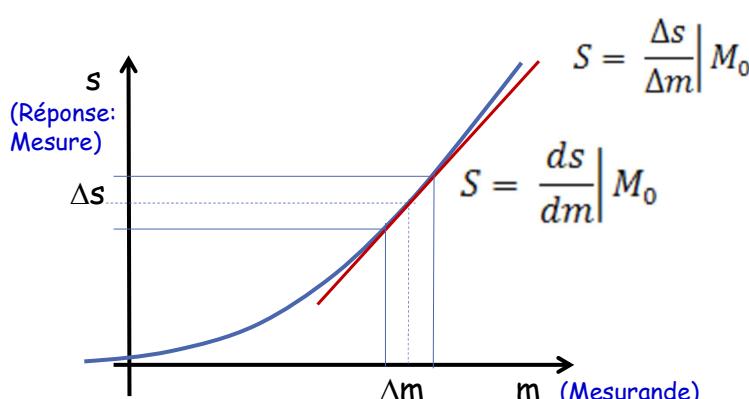
ENSTAB 2017/2018

18

### 4. Sensibilité

[2]

Evaluation graphique de la sensibilité:

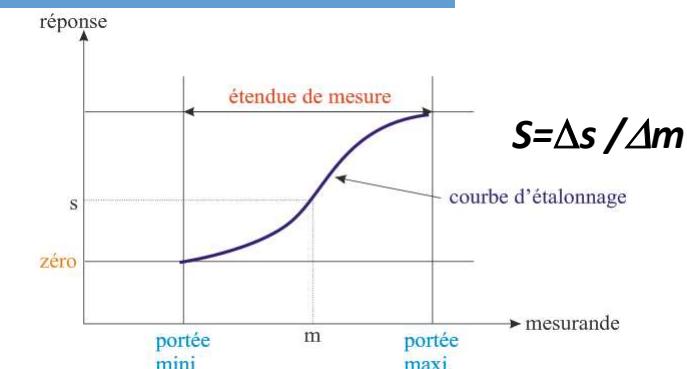


Un capteur est dit "linéaire" lorsque sa sensibilité est constante sur l'étendue de mesure

03/02/2021

19

### 4. Sensibilité



Conception d'un capteur : S doit dépendre le moins possible de :

- La valeur de m (linéarité)
- la fréquence de variation (bande passante)
- du temps (vieillissement)
- d'actions extérieures (grandeurs d'influence)

20

## 4. Sensibilité

[2]

### Application 1

Sensibilité calculée à partir du modèle physique:

#### Exemple 1 :

Pour un capteur à loi quadratique :  $s = a.e^2 + b.e + c$

$$S = 2a.e + b$$

#### Exemple 2:

Pour une thermistance ayant pour résistance  $R_0$  à la température absolue  $T_0$ , l'équation d'état est :

$$R(T) = R_0 \exp B \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

La sensibilité de ce capteur est donc :

$$S = \frac{dR}{dT} = -\frac{B}{T^2} R_0 \exp B \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

03/02/2021

21

## 4. Sensibilité

[2]

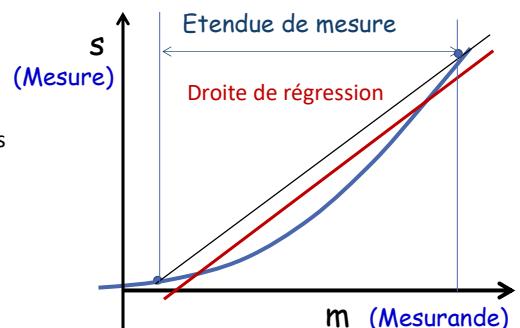
Sensibilité moyenne sur l'étendue de mesure

-sensibilité calculée entre le premier et le dernier point

- moyenne des sensibilités évaluées pour N points sur l'étendue de Mesure

-pente de la droite de régression

$$s_{reg} = a m + b$$



$$a = \frac{N \sum s_i m_i - \sum s_i \sum m_i}{N \sum m_i^2 - (\sum m_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum s_i m_i^2 - \sum s_i m_i \sum m_i}{N \sum m_i^2 - (\sum m_i)^2}$$

03/02/2021

22

## 4. Sensibilité

**Exemple 1 :** Capteur de force F à sortie fréquentielle f

$$\rightarrow \text{Sensibilité } S = \frac{\Delta s}{\Delta m} = \frac{\Delta f}{\Delta F} \text{ en Hz N}^{-1}$$

étendue de mesure	0 - 30 N
sensibilité	10,5 Hz . N-1
linéarité	3,6 % de l'étendue de mesure
répétabilité	2 %
hystérésis	1,8 %
dérive temporelle	- 0,6 Hz . h-1
dérive thermique	0,5 Hz . °C-1
facteur de qualité	180

Caractéristique techniques du capteur

23

## 5. Résolution

La résolution est **le plus petit incrément** du mesurande détectable (observable) c.à.d. **la plus petite variation** mesurable.

⇒ Unité : celle du mesurande.

Si le capteur génère du bruit, la résolution devient dépendante du niveau de bruit. Dans ce cas, elle s'obtient par le rapport de la densité spectrale du bruit sur la sensibilité.

$$\text{Unité : } \frac{\text{unité du mesurande}}{\sqrt{\text{Hz}}}$$

## 5. Résolution

[2]



References	Capacities	Resolutions
AND CNR EH 0.3	0.3 Nm	0.03 mNm
AND CNR EH 1.5	1.5 Nm	0.15 mNm
AND CNR EH 6	6 Nm	0.6 mNm
AND CNR EH 12	12 Nm	1.2 mNm

Les capteurs de couple de cette série ont une résolution égale à 1/10000 de leur étendue de mesure

**Attention :** la résolution est souvent supérieure qualitativement aux autres caractéristiques d'un capteur. Ce n'est pas parce que la mesure varie très finement qu'elle est juste dans sa valeur absolue.

03/02/2021

25

## 5. Résolution

Lorsque l'appareil de mesure est un appareil numérique, on définit la résolution par la formule suivante :

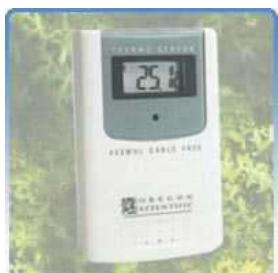
**Résolution = Etendue de mesure / Nombre de points de mesure**

26

## 5. Résolution

[2]

Exemple 2 :



capteurs de température

### FONCTIONS

Température de -20°C à 60°C (résolution : 0.1°C).

### CARACTÉRISTIQUES TECHNIQUES

Sélecteur °C/°F.  
Ecran LCD 1 ligne (affichage de la température ambiante).  
Affiche la mesure sur son écran LCD et la transmet à l'unité mère sur 433 Mhz.  
Boîtier résistant et étanche.  
Transmission sur 433 Mhz à 30 m maxi.  
Cycle de transmission vers l'unité mère : 30 secondes.  
LED rouge témoin de communication.  
Se fixe à une paroi ou se pose.  
Alimentation : 2 piles LR03 'AAA' (fournies).  
Dimensions : 91x59x20 mm. Poids : 78 g.  
Notice en français. Garantie d'un an.

## 5. Résolution

[2]

Exemple 3 :



Station météo portable (4 en 1):  
Anémomètre, luxmètre,  
thermomètre, hygromètre

CARACTÉRISTIQUES				
	Unités	Gamme de mesure	Précision	Résolution
Vitesse Air	m/s, km/h, mph, nœuds, ft-min	de 1.4 à 108.0 km/h (0.4 à 30 m/s)	≤ 20 m/s; ±3% lecture > 20 m/s; ±4% lecture	0.1 (sauf Ft-min : 1)
Eclairement lumineux	Lux, Ft-Cd	0 - 20000 lux	±5% lecture ±8	1
Température	°C, °F	-100 à 1300°C	±(1% lecture + 1°C)	0.1
Humidité relative	%HR	10 - 95% HR	< 70% HR : ±4%, pour ≥ 70% HR : ±(4% lecture + 1.2% HR)	0.1

**Attention : la résolution n'est pas la précision !!!!**

03/02/2021

27

03/02/2021

28

Elle caractérise la capacité d'un capteur à donner une mesure **M proche** de la **valeur vraie m** de la grandeur mesurée

L'incertitude de mesure  $\delta M$  est telle que :  $m = M \pm \delta M$

$$\text{L'erreur relative de précision} = \frac{\delta M}{M_{\max} - M_{\min}}$$

### Classe de précision:

La classe d'un appareil de mesure correspond à la valeur en % du rapport entre la plus grande erreur possible sur l'étendue de mesure.

$$\text{Classe} = 100 \times (\text{La plus grande erreur possible} / \text{Etendue de mesure})$$

Elle permet d'estimer l'incertitude de mesure.

**Exemple :** Capteur de force

- **Etendue de Mesure (Full Scale)** 100 N
- **Précision (Measurement uncertainty)** 1 % E.M

**Incertitude-type sur la valeur affichée :** Elle obéit ici à une loi uniforme (voir cours de métrologie 1<sup>ère</sup> année)

$$u(F) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

avec  $a = 100 * 1\% = 1 \text{ N}$ , on obtient  $u(F) = 0,58 \text{ N}$

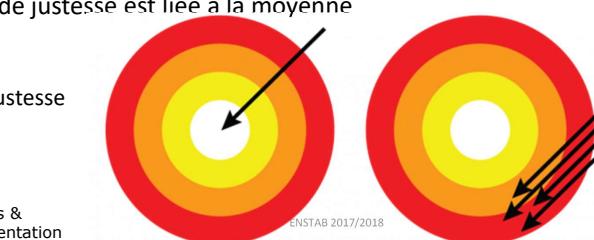
Erreur de précision = erreur de justesse + erreur de fidélité

## 7. Fidélité – Répétabilité

- Elle caractérise l'aptitude d'un capteur à donner, pour une **même valeur** de la grandeur mesurée, des **mesures concordant entre elles**
- ⇒ Les résultats de mesures répétées d'une même valeur de mesurande restent **groupés autour d'une valeur moyenne**.
- ⇒ L'erreur de fidélité est souvent caractérisée par **l'écart type**  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m_i - \langle m \rangle)^2}{n-1}}$

## 8. Justesse

- Elle caractérise l'aptitude d'un capteur à donner des **mesures proches** de la **vraie valeur** de la grandeur mesurée,
- ⇒ La valeur la plus probable du mesurande est très proche de la valeur vraie
- ⇒ L'erreur de justesse est liée à la moyenne

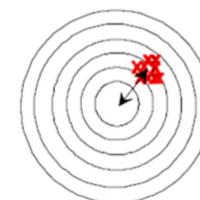


$$\langle m \rangle = \frac{\sum m_i}{n}$$

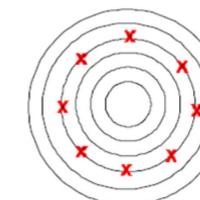
## 9. Illustrations de la fidélité et de la justesse



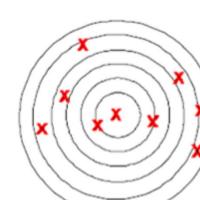
capteur juste et fidèle → précis



capteur fidèle mais non juste



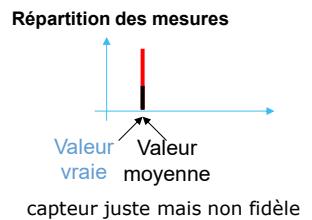
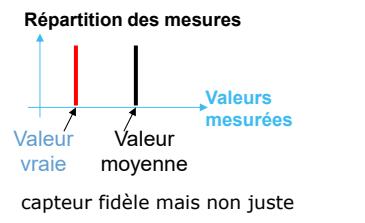
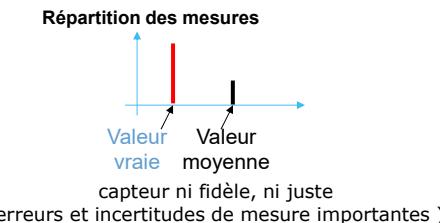
capteur juste mais non fidèle



capteur ni fidèle, ni juste

## 9. Illustrations de la fidélité et de la justesse

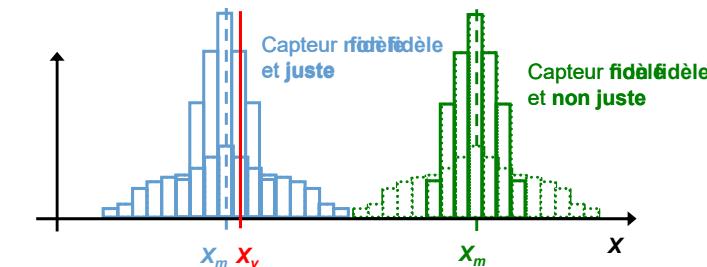
Mesures effectuées en **conditions de répétabilité** : même mesurande, même opérateur, mêmes conditions expérimentales.



33

## 9. Illustrations de la fidélité et de la justesse

La valeur vraie du mesurande est  $X_v$ , les valeurs mesurées sont notées  $X_i$  et la valeur moyenne des mesures  $X_m$  est notée  $X_m$

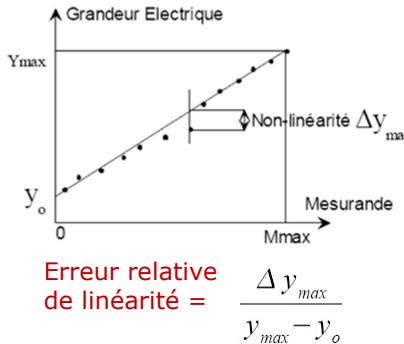


- L'erreur de fidélité caractérisée par l'**écart type**
- L'erreur de justesse caractérisée par la **moyenne**

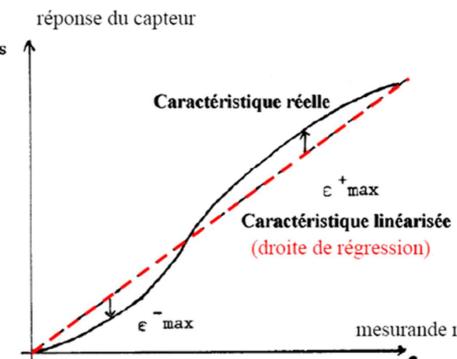
## 10. Non Linéarité ou Linéarité

- décrit la plus grande déviation possible entre la courbe caractéristique et une ligne droite idéale.
- est la déviation maximale de la réponse du capteur sur l'étendue de mesure, par rapport à la fonction de transfert linéaire.

Unité : % de l'E.M.



C'est l'**erreur relative maximale** entre la droite de régression et la caractéristique réelle.



## 10. Non Linéarité ou Linéarité

Exemple 1 : Capteur de force F à sortie fréquentielle f  
→

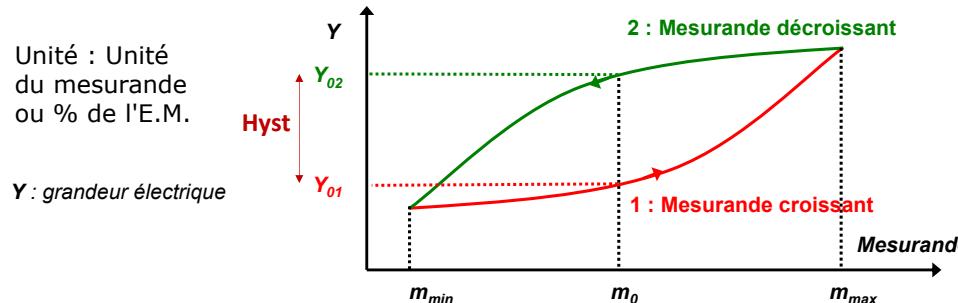
étendue de mesure	0 - 30 N
sensibilité	10,5 Hz . N-1
linéarité	3,6 % de l'étendue de mesure
répétabilité	2 %
hystérésis	1,8 %
dérive temporelle	- 0,6 Hz . h-1
dérive thermique	0,5 Hz . °C-1
facteur de qualité	180

Caractéristique techniques du capteur

## 10. Hystérésis

Certains capteurs ne retournent pas la même valeur de sortie, pour une même valeur du mesurande, selon la façon où cette valeur est obtenue (cycle croissant ou décroissant).

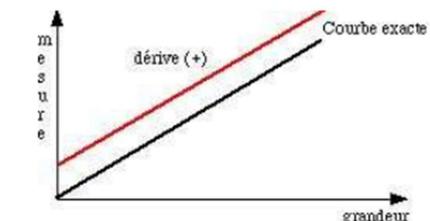
L'hystérésis est la différence maximale entre ces deux valeurs de sortie.



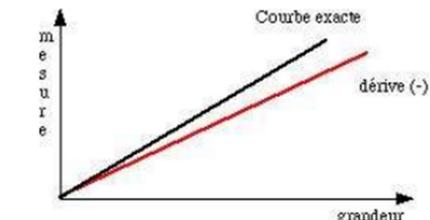
**Exemple :** mesure de **température** par un capteur comportant une **protection** en **plastique** comme les thermistances ou la Pt 100 surmoulée. Des résultats différents sont obtenus pour une étude par **température croissante** ou par **température décroissante**.

37

## 11. Erreurs Typiques



### ■ L'erreur de zéro (offset)



### ■ L'erreur d'échelle (gain)

C'est une erreur qui dépend de façon linéaire de la grandeur mesurée.

Capteurs & Instrumentation

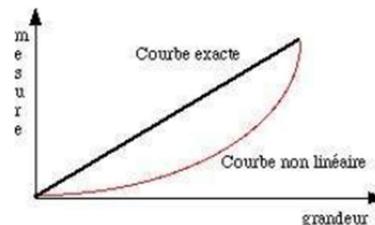
ENSTAB 2017/2018

38

## 11. Erreurs Typiques

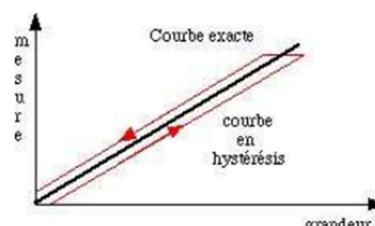
### ■ L'erreur de linéarité

La caractéristique n'est pas une droite.



### ■ L'erreur due au phénomène d'hystérésis

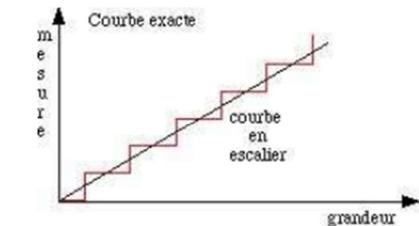
Il y a phénomène d'hystérésis lorsque le résultat de la mesure dépend de la précédente mesure.



## 11. Erreurs Typiques

### ■ L'erreur de quantification

La caractéristique est en escalier, cette erreur est souvent due à une numérisation du signal.



# Acquis !

- Identifier le mesurande à caractériser
- Identifier les conditions expérimentales, l'intervalle de mesure, la résolution requise, ...
- Sélectionner le capteur selon les caractéristiques exigées



41

## B. Caractéristiques dynamiques

Temps de réponse, temps de monté, traînage, bande passante.

Capteurs &amp; Instrumentation

ENSTAB 2017/2018

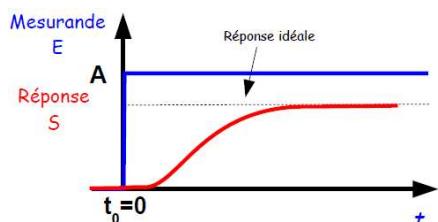
42

### 1. Réponse dynamique

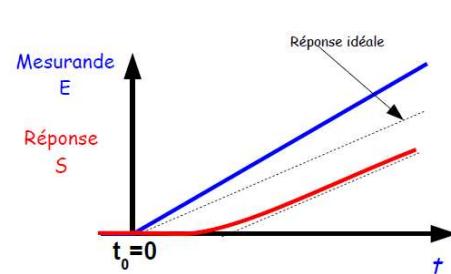
#### Variation du mesurande

La réponse temporelle d'un capteur s'évalue pour une variation du mesurande de **forme donnée**, liée à l'usage typique du capteur :

- Mesurande en échelon  $m(t) = a u(t)$



- Mesurande en rampe  $m(t) = a t u(t)$



- Réponse indicielle

43

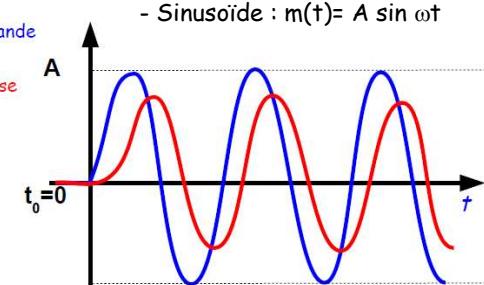
### 1. Réponse dynamique

#### Variation du mesurande

→ réponse fréquentielle

signal périodique →  
décomposition du signal en une  
somme de sinusoïdes  
(théorème de Fourier)

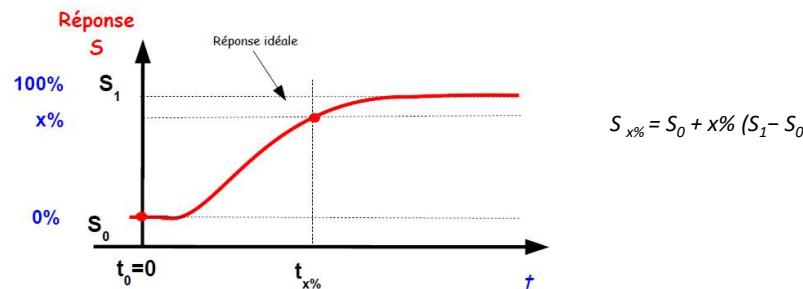
$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n \cdot \omega t + \Phi_n)$$



Attention : **le principe de superposition** ne peut être appliqué que pour un capteur dont la réponse est linéaire pour chacun des ses constituants (corps d'épreuve, capteur, conditionnement...)

## 2. Temps de réponse

**Définition :** le temps de réponse à  $x\%$  d'un capteur soumis à un **échelon** du mesurande est le temps mis pour passer d'une **valeur initiale**  $S_0$  à une valeur de  $x\%$  de **valeur finale**  $S_1$



Le temps de réponse permet d'évaluer la temps total de réaction d'un capteur à un échelon de position . C'est un indicateur global.

Le temps de réponse à  $x\%$  s'évalue par référence à la **courbe de réponse seule**, en tenant compte du décalage initial  $S_0$  éventuel

45

## 2. Temps de réponse

Le temps de réponse  $t_r(\varepsilon)$  ou d'établissement à  $\varepsilon$  près est défini comme la durée minimale d'attente après l'application d'un échelon à l'entrée, pour que l'écart relatif de la sortie par rapport à sa valeur finale demeure toujours inférieur à  $\varepsilon$ .

La grandeur d'entrée :  $x(t) = X_1 \cdot U(t)$

Avec  $U(t)=0$  pour  $t<0$  et  $U(t) = 1$  pour  $t \geq 0$

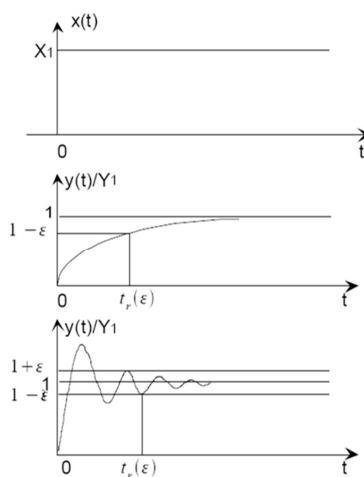
La grandeur de sortie  $y(t)$  tend vers  $Y_1$  quand  $t \rightarrow \infty$

$$\frac{Y_1 - y(t)}{Y_1} \leq \varepsilon \quad \text{pour } t \geq t_r(\varepsilon)$$

## 2. Temps de réponse

Exemples de temps de réponse

Signal d'entrée  $x(t)$

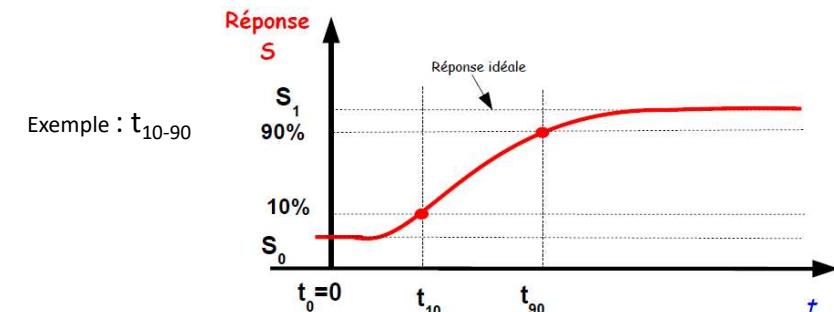


Temps de réponse d'un dispositif du 1<sup>er</sup> ordre

Temps de réponse d'un dispositif du 2<sup>nd</sup> ordre

## 3. Temps de monté

**Définition :** le temps de montée d'un capteur soumis à un échelon du mesurande est le temps mis pour passer d'une valeur de  $x_1\%$  de la réponse depuis la valeur initiale  $S_0$  à  $x_2\%$  de cette réponse

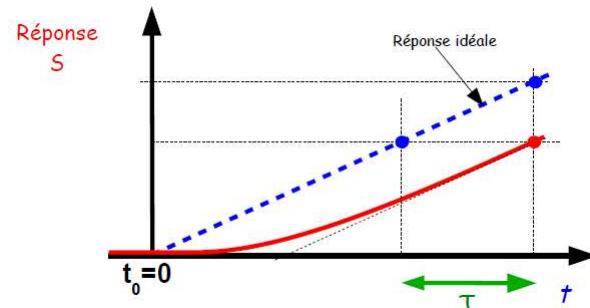


Le temps de montée permet d'évaluer la vitesse de réaction d'un capteur à un échelon de position, indépendamment de la notion de retard pur. C'est un indicateur global.

Il permet d'apprécier le comportement du capteur pour une succession d'échelons.

## 4. Traînage

Définition : Le traînage est l'écart de temps entre la réponse à la rampe et la droite idéale caractérisant cette réponse pour atteindre une même valeur de la sortie.



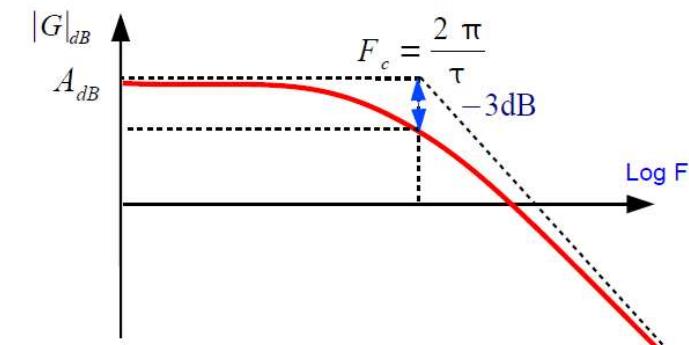
La mesure de l'erreur de traînage est indépendante des caractéristiques de la rampe appliquée pour un système linéaire

03/02/2021

49

## 5. Bande passante d'un capteur

Définition : La bande passante est la valeur de la fréquence pour laquelle le gain linéaire  $G = A/\sqrt{2}$ , soit une atténuation de -3dB. Elle représente la limite d'usage d'un capteur dans le domaine fréquentiel.



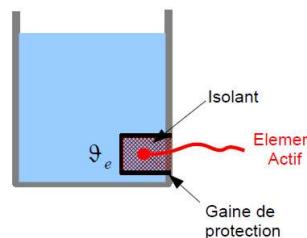
Remarque: une atténuation de -3db représente 30% de la valeur nominale .

03/02/2021

50

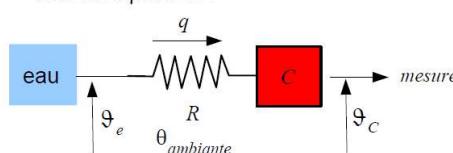
### Caractéristiques dynamiques des Capteurs Réponse dynamique du 1<sup>er</sup> ordre

- Exemple d'un capteur de température



- La transmission de chaleur se fait par conduction au travers de l'isolant jusqu'à l'élément actif : le milieu de conduction se comporte comme une résistance thermique  $R$ .
- L'élément actif représente une masse calorifique  $C$  à laquelle la chaleur est transmise.
- Les pertes thermiques par le câblage sont supposées négligeables

Schéma équivalent :



Equations fondamentales :

$$\sum q(t)_{\text{entrant}} - q(t)_{\text{sortant}} = C \frac{d\theta_c(t)}{dt}$$

$$q(t) = \frac{1}{R}(\theta_e(t) - \theta_c(t))$$

51

### Caractéristiques dynamiques des Capteurs Réponse dynamique du 1<sup>er</sup> ordre à un échelon

- Equation de fonctionnement

Équation de fonctionnement :  $\frac{1}{R}(\theta_e(t) - \theta_c(t)) = C \frac{d\theta_c(t)}{dt}$

d'où :  $RC \frac{d\theta_c(t)}{dt} + \theta_c(t) = \theta_e(t)$

C'est une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre .

En notant  $\tau = RC$ , l'équation devient :

$$\tau \frac{d\theta_c(t)}{dt} + \theta_c(t) = \theta_e(t)$$

- équation caractéristique  $\tau r + 1 = 0$  de solution  $r = -\frac{1}{\tau}$

- solution sans second membre  $\theta_{c1}(t) = K e^{rt} = K e^{-\frac{t}{\tau}}$

- solution particulière pour une entrée en échelon d'amplitude  $T_1$  :  $\theta_{c2}(t) = T_1 u(t)$

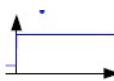
- solution générale :  $\theta_c(t) = \theta_{c1} + \theta_{c2} = K e^{-\frac{t}{\tau}} + T_1$

03/02/2021

52

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

Réponse dynamique du 1<sup>er</sup> ordre à un échelon



### Solution de l'équation

Détermination de la constante  $K$  par les conditions initiales : on suppose que le capteur est à la température  $T_0$  à l'instant  $t = 0$

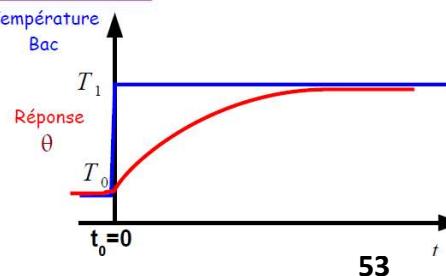
$$\theta_c(0) = K e^0 + T_1 \Rightarrow K = T_0 - T_1$$

la solution générale de la réponse à l'échelon s'écrit donc :

$$\theta_c(t) = T_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + T_1 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Le premier terme dit "des conditions initiales" décroît exponentiellement

Le deuxième terme tend vers le régime permanent de valeur  $T_1$



03/02/2021

53



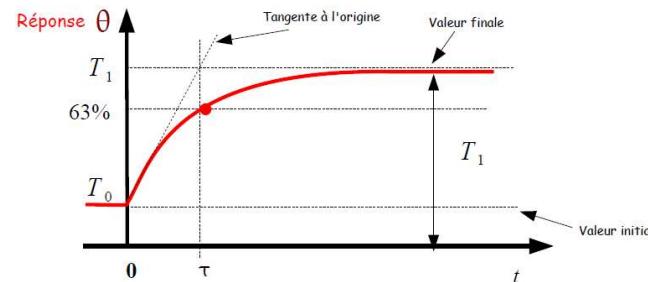
## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

Réponse dynamique du 1<sup>er</sup> ordre à un échelon

### Analyse de la solution

$$\theta_c(t) = T_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + T_1 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{ou encore}$$

$$\theta_c(t) = (T_1 - T_0)(1 - e^{-t/\tau}) + T_0$$



Le temps de réponse à 95% est environ de  $3\tau$

Le temps de montée est :  $t_m = t_{90} - t_{10} = \tau \cdot \ln(9) \approx 2,2\tau$

03/02/2021

54

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

Réponse dynamique du 1<sup>er</sup> ordre à une rampe



### Résolution de l'équation différentielle

La rampe a pour équation :  $\theta_e(t) = at + \theta_0$

$$\tau \frac{d\theta_c(t)}{dt} + \theta_c(t) = \theta_e(t)$$

- solution sans second membre

$$\theta_{cl}(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- solution particulière pour une entrée en rampe :  $\theta_{c2}(t) = \alpha t + \beta$

- remplacement dans l'équation diff. :  $\tau \alpha + \alpha t + \beta = a t + \theta_0$

- par identification, on obtient :  $\alpha = a$        $\beta = \theta_0 - a\tau$

- solution générale :  $\theta_c(t) = \theta_{cl} + \theta_{c2} = K e^{-\frac{t}{\tau}} + at + (\theta_0 - a\tau)$

- condition initiale :  $\theta_c(0) = \theta_0 = K + \theta_0 - a\tau \Rightarrow K = a\tau$

La solution générale

$$\theta_c(t) = a\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + a(t - \tau) + \theta_0$$

55



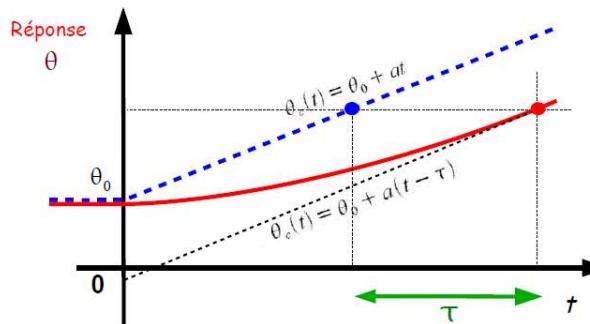
## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

Réponse dynamique du 1<sup>er</sup> ordre à une rampe

### Analyse de la réponse

La réponse a pour équation :

$$\theta_c(t) = a\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + a(t - \tau) + \theta_0$$



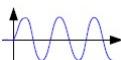
l'erreur de traînage est égale à la constante de temps du système

03/02/2021

56

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

### Réponse fréquentielle du 1<sup>er</sup> ordre à une sinusoïde

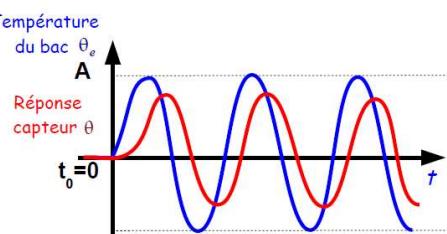


- Réponse à une entrée sinusoïdale

Le mesurande suit la loi :

$$\theta_e(t) = A \sin(\omega t)$$

$$\tau \frac{d\theta_c(t)}{dt} + \theta_c(t) = \theta_e(t)$$



Cherchons la solution de l'équation différentielle pour

- solution sans second membre :  $\theta_{cl}(t) = K_1 e^{-rt} = K_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$

- solution particulière de la forme :  $\theta_{c2}(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$

Par substitution dans l'équation différentielle, nous obtenons :

$$\alpha \tau \omega \cos \omega t - \beta \tau \omega \sin \omega t + \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t = A \sin \omega t$$

03/02/2021

57

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

### Réponse fréquentielle du 1<sup>er</sup> ordre à une sinusoïde

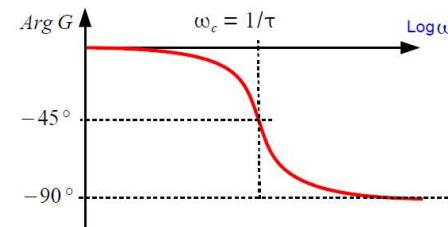
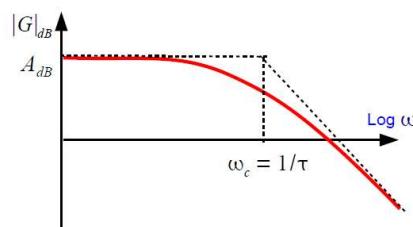


- Analyse de la réponse à une sinusoïde  $\theta_{2C} = \frac{A}{1 + \omega^2 \tau^2} [\sin \omega t + \omega \tau \cos \omega t]$

La réponse en régime permanent est sinusoïdale;

Amplitude:  $|G| = \frac{A}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$  Déphasage:  $\text{Arg } G = -\tan^{-1}(\tau \omega)$

Représentation graphique : Lieu de Bode



03/02/2021

59

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

### Réponse fréquentielle du 1<sup>er</sup> ordre à une sinusoïde



- Réponse à une entrée sinusoïdale

Les coefficients se déterminent par identification :

$$\begin{aligned} \alpha \omega \tau + \beta &= 0 \\ \alpha - \beta \omega \tau &= A \end{aligned}$$

La résolution par Cramer donne :

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ A & -\omega \tau \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega \tau & 1 \\ 1 & -\omega \tau \end{vmatrix}}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} \omega \tau & 0 \\ 1 & A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega \tau & 1 \\ 1 & -\omega \tau \end{vmatrix}}$$

soit :  $\alpha = \frac{A}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \beta = A \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$

La solution particulière, dite en régime permanent est :

$$\theta_{2C} = \frac{A}{1 + \omega^2 \tau^2} [\sin \omega t + \omega \tau \cos \omega t]$$

A cette solution, vient de rajouter la solution  $\theta_{cl}$  liée aux conditions initiales

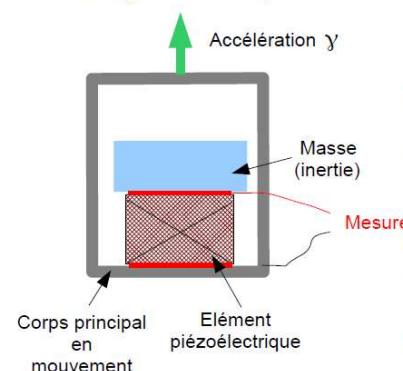
03/02/2021

58

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

### Réponse du 2<sup>ème</sup> ordre

- Exemple d'un capteur d'accélération



L'accéléromètre est constitué d'une masse m et d'un élément piézoélectrique qui fournit le signal électrique (variation de charges).

L'élément piézoélectrique a un comportement élastique vis à vis de la force qui lui est appliquée.

Le signal de mesure est lié linéairement à la force de compression (ou de traction) qui s'exerce sur l'élément piézoélectrique.

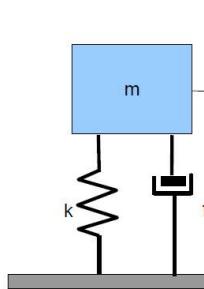
03/02/2021

60

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

### Réponse du 2<sup>ème</sup> ordre

- Exemple d'un capteur d'accélération



Soit  $x$  le déplacement de la masse par rapport au corps principal  
 $y$  le déplacement du corps principal dans le repère absolu

le déplacement de la masse  $m$  dans le repère absolu est donc  
 $(x + y)$

Les forces qui s'exercent sur la masse  $m$  sont :

- la force de rappel élastique  $F_1 = -kx$

- la force de frottement  $F_2 = -f \frac{dx}{dt}$

L'équation fondamentale de la mécanique appliquée à la masse dans le repère absolu donne:

$$m \frac{d^2(x+y)}{dt^2} = -kx - f \frac{dx}{dt}$$

03/02/2021

61

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

### Réponse du 2<sup>ème</sup> ordre

- Résolution de l'équation différentielle

L'équation de fonctionnement est donc :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = -m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

C'est une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_n^2} + 2z \frac{\dot{x}}{\omega_n} + x = e \quad \text{avec} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad z = \frac{f}{2\sqrt{km}}$$

- solution sans second membre de :  $\frac{\ddot{x}}{\omega_n^2} + 2z \frac{\dot{x}}{\omega_n} + x = 0$

l'équation caractéristique est :  $\frac{r^2}{\omega_n^2} + 2z \frac{r}{\omega_n} + 1 = 0$

qui a pour discriminant :  $\Delta = \frac{4}{\omega_n^2}(z^2 - 1)$

03/02/2021

62

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

### Réponse du 2<sup>ème</sup> ordre

- Résolution de l'équation différentielle (sans second membre)

3 cas se présentent suivant la valeur de  $z$  :

- cas **amorti**  $z > 1$  :  $x_1(t) = K_1 e^{(-z+\sqrt{z^2-1})\omega_n t} + K_2 e^{(-z-\sqrt{z^2-1})\omega_n t}$

- cas **critique**  $z = 1$  :  $x_1(t) = (K_1 + K_2 t) e^{-z\omega_n t}$

- cas **résonnant**  $z < 1$  :  $x_1(t) = K_1 e^{i(\sqrt{1-z^2})\omega_n t} + K_2 e^{-i(\sqrt{1-z^2})\omega_n t} e^{-z\omega_n t}$

qui se met sous la forme:  $x_1(t) = [a \cos(\omega_n \sqrt{1-z^2} t) + b \sin(\omega_n \sqrt{1-z^2} t)] e^{-z\omega_n t}$

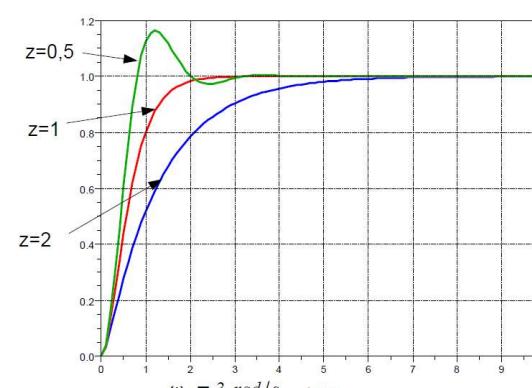
03/02/2021

63

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

### Réponse du 2<sup>ème</sup> ordre

- Réponse temporelle



Grandeur caractéristiques pour  $\zeta < 1$

temps de montée

$$t_m = \frac{1}{\omega_N \sqrt{1-\zeta^2}} (\pi - \arccos \zeta)$$

dépassement

$$D \% = 100 e^{-\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2}}$$

temps de réponse à n %

$$tr \approx \frac{1}{\omega_N \zeta} \ln \left( \frac{100}{n} \right)$$

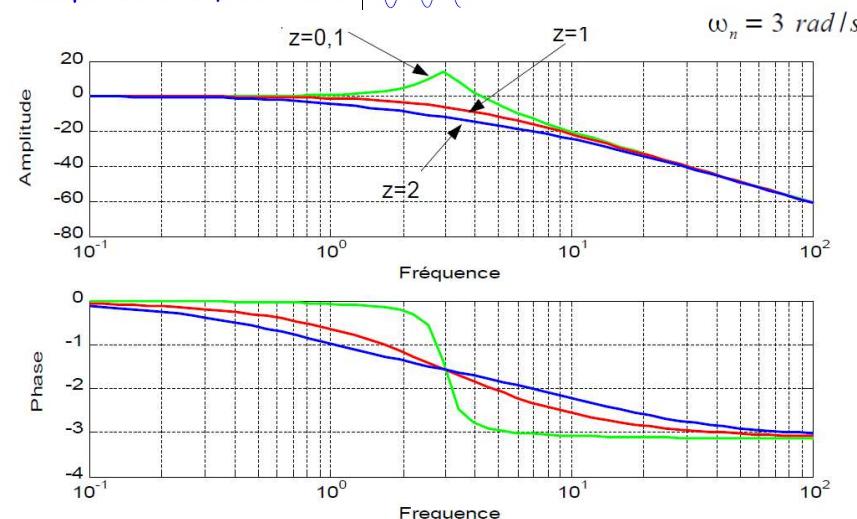
03/02/2021

64

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

Réponse du 2<sup>ème</sup> ordre

- Réponse fréquentielle



03/02/2021

**65**

## Caractéristiques dynamiques des Capteurs

Réponse du 2<sup>ème</sup> ordre

- Réponse fréquentielle

Grandeur caractéristiques pour  $\zeta < 1$

pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_N \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

pulsation de coupure à -3dB

$$\omega_c = \omega_N \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\zeta^2)^2}}$$

facteur de résonance

$$M_{dB} = 20 \log \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

03/02/2021

**66**

## Références

---

- [1] : "Capteurs", Thomas BEGOU, Marcel PASQUINELLI, IUT Mesures Physiques, France, consulté 15/03/2020
- [2] :" Capteurs Chaînes de Mesures", Pierre Bonnet –Master GSI, consulté le 01/02/2021.