Ecole Nationale des Sciences
et des Technologies Avancées
à Borj Cedria

2TA1-2TA2-2TA3
2022-2023

Examen :
Calcul scientifique
(Durée 1h30)

Exercice 1. (6 points)
Soient $(x_1, x_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On note

$$T(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

1. Quelle conditions doivent vérifier $x_1,\ x_2,\ \lambda_1$ et λ_2 pour que T soit une méthode d'intégration
   (a) d'ordre au moins 0 ?
   (b) d'ordre au moins 1 en supposant que $\lambda_i \neq 0, \quad i = 1:2$?
   (c) d'ordre au moins 2 en supposant que $0 < \lambda_i < 1, \quad i = 1:2$?
2. Montrer que si la méthode d'ordre au moins 2 et que si $x_1 = -x_2$ alors elle est d'ordre 3 (on l'appelle la méthode de Gauss).

Exercice 2. (6 points)
Soient les deux fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = sin(\frac{\pi}{2}(x-1))$ et trois points $x_0 = 1, x_1 = 3/2$ et $x_2 = 2$.

1. Montrer, sans calculer que f et g ont même polynôme d'interpolation aux points $x_0; x_1$ et x_2.
2. Calculer le polynôme P interpolant f en x_0, x_1 et x_2.
3. Trouver la valeur approchée de g aux point x = 1,75 et donner une majoration de l'erreur d'interpolation

Exercice 3. (8 points)
Pour calculer les solutions de l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in [-1, 1]; \forall t > 0 \tag{1}$$

avec $u(x, 0) = u_0(x) \in L^2([-1, 1])$.
avec $c > 0$, on considère une famille de schémas de différences finies explicites $S(\tau)$ associés à des maillages réguliers de l'espace et du temps $x_j = j\Delta x, t_n = n\Delta t$.

$$S(\tau) : \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{c}{\Delta}\left(\frac{\tau+1}{2}u_{j-1}^n - \tau u_j^n + \frac{\tau-1}{2}u_{j+1}^n\right)$$

où τ est un paramétre réel.

1. Etudiez la convergence le cas ou $\tau = 0$.
2. Pour τ quelconque, calculez l'erreur locale de troncature et discutez de l'ordre du schéma en fonction du paramètre τ.
3. Pour τ quelconque, donnez, en la justifiant, une condition nécessaire de convergence.