Chapter 3

Intégration numérique

3.1 Introduction

On cherche à calculer l'intégrale:

$$I = \int_a^b f(x)w(x)dx, \tag{3.1}$$

avec $w(x)$ et $f(x)$ deux fonctions définies sur $[a, b]$ telles que $w(x) > 0$ sur $]a, b[$ et $f(x)w(x)$ est intégrable sur $[a, b]$.

Hormis quelques cas simples, où une primitive de fw peut être trouvée (et il faut inclure dans ce cas le calcul par changement de variables où l'intégration par parties), on ne sait pas calculer cette intégrale.

En outre, il arrive fréquemment qu'on ne connaisse la fonction que par ses valeurs en certains points. Il est alors hors de question de calculer exactement l'intégrale I. L'intégration numérique est une idée "naturelle". L'intégrale de Riemann en fournit l'idée première.

On considère une subdivision uniforme : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$, ($x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$) et on remplace I par:

$$I = \int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\, f(\alpha_i)w(\alpha_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\, w(\alpha_i) = S_n,$$

avec $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I = \displaystyle\int_a^b f(x)w(x)dx.$

La procédure de l'intégration numérique est donc de chercher à remplacer $\displaystyle\int_a^b f(x)w(x)dx$

par une somme finie:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(\alpha_i) \;+\; E_n(f) \tag{3.2}$$

où $E_n(f)$ désigne le terme de l'erreur commise en remplaçant I par $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(\alpha_i)$.

De telles formules sont appelées formules de quadrature.

L'idée de base dans la recherche des points x_i (noeuds de la formule de quadrature) et des coefficients λ_i (poids de la formule de quadrature), c'est de remplacer la fonction f par un polynôme d'interpolation. Dans ce cas, deux formules seront présentées:

- Les formules de Newton-Cotes.
- Les formules de quadrature de Gauss.

Remarque 3.1.1 *Lorsque les poids λ_i sont indépendants de la fonction f (c'est le cas pour les formules de type interpolation), les applications: $f \to \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(\alpha_i)$ et $f \to E_n(f)$ sont linéaires.*

Remarque 3.1.2 *En remarquant que*

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} g(\frac{b-a}{2}\, t \;+\; \frac{b+a}{2})\, dt$$

on peut toujours ramener l'intégration sur $[a,b]$ à une intégration sur $[-1,+1]$ qu'on peut prendre comme intervalle de référence.

Définition 3.1.1 *On dira que la formule de quadrature (4.2) est de degré k si $E_n(P) = 0$ pour tout P dans $\mathbb{P}_k$ et s'il existe $P \in \mathbb{P}_{k+1}$ tel que $E_n(P) \neq 0$, où $\mathbb{P}_j$ est l'ensemble des polynômes de degré $\leq j$.*

Autrement dit, en tenant compte de la remarque 3.1, la formule de quadrature (4.2) est de degré k si: pour toute base $(P_0, P_1, \ldots P_k, P_{k+1})$ de $\mathbb{P}_{k+1}$ avec $\deg(P_i) = i$, on a :

$E_n(P_i) = 0 \quad \forall\, i \in \{0, ..., k\}$ et $E_n(P_{k+1}) \neq 0$.

Exemple 3.1: (Formule du rectangle à gauche)

On prend dans la formule (4.2) $\alpha_i = x_{i-1}$ et $w(x) = 1$, on obtient alors la formule suivante:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \;&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \; f(x_{i-1}) \;+\; E_n(f)\\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \; f(a + i\, \frac{b-a}{n}) \;+\; E_n(f)\end{aligned}$$

Détermination du terme d'erreur $E_n(f)$:

Supposons que f est de classe C^1 sur $[a, b]$. D'après la formule des accroissements finis, on a:

Pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, il existe $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que:

$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)\, f'(\xi_i)$

d'où

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)\, f(\xi_i)dx$$

Or, puisque f' est continue et $x - x_i \geq 0$ sur $[x_i, x_{i+1}]$, il existe, d'après le théorème de la moyenne appliqué à f', un élément $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) f(\xi_i)dx = f'(\eta_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)dx = \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} f'(\eta_i)$$

On a alors:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} f'(\eta_i) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\eta_i)
\end{aligned}$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe $\eta \in [a, b]$ tel que :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\eta_i) = f'(\eta).$$

On obtient enfin :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}) + \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\eta) \quad avec\, \eta \in [a, b]$$

Exemple 3.2: (Formule du rectangle à droite)

On prend dans la formule (4.2) $\alpha_i = x_i$ et $w(x) = 1$, on obtient de la même manière que précédemment la formule suivante:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) + \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\eta) \quad avec\, \eta \in [a, b]$$

Exemple 3.3: (Formule du point milieu)

On prend dans la formule (4.2) $\alpha_i = \dfrac{x_i + \ x_{i-1}}{2}$ et $w(x) = 1$, on obtient la formule suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) \ + \ E_n\ (f)$$

Détermination de l'erreur $E_n(f)$

Supposons que f est de classe C^2 sur $[a, b]$. D'après la formule de Taylor, on a: pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, il existe $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que:

$$f(x) = f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) \ + (x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2})\ f'(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\ )^2 f''(\xi_i)$$

En procédant comme dans l'exemple 3.1 et en remarquant que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\ )dx\ = 0\ ,$$

on aboutit à la formule :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a\ + (2i+1)\frac{b-a}{2n}) \ + \ \frac{(b-a)^3}{24n^2}\ f''(\eta) \quad avec\ \eta\ \in [a, b]$$

3.2 Formules de Newton-Cotes fermées

3.2.1 Formules simples

Ce sont des formules de type interpolation en des points équidistants. Compe tenu de la remarque 3.2, considérons l'intervalle de référence $[-1, +1]$. Il s'agit alors de construire des formules du type:

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \ = 2 \sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p}\ g(t_i) \ + \ E_{p+1}(g) \tag{3.3}$$

Avec p un entier naturel donné. Posons $I_p(g) = 2 \sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p}\ g(t_i)$

Les formules de Newton-Cotes fermées consistent à choisir:

1/ Les noeuds t_i équidistants avec $t_0 = -1$ et $t_p = 1$ donc $t_i = -1 + \frac{2}{p}i$ pour $i = 0, ..., p$.

2/ Les poids $\lambda_{i,p}$ tels que $I_p(g) = \int_{-1}^{1} P_p(t)dt$ où P_p est le polynôme d'interpolation de la Lagrange de g relativement aux points $t_0, t_1, \ldots, t_p$.

Lemme 3.2.1
Les coefficients $\lambda_{i,p}$ (p fixé, et $i = 0, 1, ..., p$) sont donnés par la formule suivante:

$$\lambda_{i,p} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_i(t)dt$$

où $L_i(t)$ est le polynôme de Lagrange de base relativement aux points $t_0, t_1, \ldots, t_p$.
ou encore

$$\lambda_{i,p} = \tfrac{1}{p}\int_{0}^{p} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p} \left(\frac{t-j}{i-j}\right)dt \quad \textit{pour } i \in \{0, 1, ..., p\}.$$

Démonstration

Soient $L_0, L_1, \ldots, L_p$ les polynômes de base de Lagrange associés aux points $t_0, t_1, ..., t_p$.
Le polynôme $P_p(t)$ d'interpolation de la fonction g aux points $t_0, t_1, ..., t_p$ s'écrit alors:

$$P_p(t) = \sum_{i=0}^{p} g(t_i)L_i(t)$$

On a

$$I_p(g) = 2\sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p}\, g(t_i)$$

et

$$\int_{-1}^{1} P_p(t)dt = \sum_{i=0}^{p} g(t_i)\int_{-1}^{1} L_i(t)dt$$

D'où:

$$\lambda_{i,p} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_i(t)dt \quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p} \left(\frac{t-t_j}{t_i-t_j}\right)dt \quad \textit{pour } i \in \{0, 1, ..., p\}$$

Soit le changement de variable suivant: $t = -1 + \frac{2}{p}s$ alors:

$$\lambda_{i,p} = \frac{1}{p}\int_{0}^{p} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p} \left(\frac{s-j}{i-j}\right)ds \quad \textit{pour } i \in \{0, 1, ..., p\}$$

Lemme 3.2.2
Les coefficients $\lambda_{i,p}$ (p fixé , et $i = 0, 1, ..., p$) vérifient :

$$\lambda_{p-i,p} = \lambda_{i,p} \qquad \textit{pour } i \in \{0, 1, ..., p\}$$

Démonstration

D'après le lemme 3.1

$$\lambda_{p-i,p} = \tfrac{1}{p} \int_0^p \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq p-i}}^{p} \left(\frac{s - j}{p - i - j}\right) ds \text{ pour } i \in \{0, 1, ..., p\}$$

Si on calcule cette intégrale en faisant le changement de variables suivant: $t = p - s$ on obtient:

$$\lambda_{p-i,p} = \frac{1}{p} \int_0^p \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq p-i}}^{p} \left(\frac{p-t - j}{p - i - j}\right) dt = \frac{1}{p} \int_0^p \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p} \left(\frac{t - j}{i - j}\right) dt = \lambda_{i,p}$$

Lemme 3.2.3

Si la fonction g est une fonction impaire sur $[-1, 1]$, alors l'erreur de la formule d'intégration (4.3) est nulle: $E_{p+1}(g) = 0$.

Démonstration

Puisque la fonction g est une fonction impaire sur $[-1, 1]$, on a $g(0) = 0$ et $\int_{-1}^{1} g(t)dt = 0$.

Comme

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = 2 \sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p}\, g(t_i) + E_{p+1}(g)$$

on tire que

$$E_{p+1}(g) = -2 \sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p}\, g(t_i)$$

d'autre part on a:

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p}\, g(t_i) = \sum_{i \prec p/2} \lambda_{i,p}\, g(t_i) + \sum_{i \succ p/2} \lambda_{i,p}\, g(t_i) \quad \text{si } p \text{ est impair}$$

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p}\, g(t_i) = \sum_{i \prec p/2} \lambda_{i,p}\, g(t_i) + \lambda_{\frac{p}{2},p}\, g(t_{\frac{p}{2}}) + \sum_{i \succ p/2} \lambda_{i,p}\, g(t_i) \quad \text{si } p \text{ est pair}$$

Comme $t_{\frac{p}{2}} = 0$, $g(0) = 0$, $t_{p-i} = -t_i$

donc

$g(t_{p-i}) = -g(t_i)$ et que $\lambda_{p-i,p} = \lambda_{i,p}$

on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p}\, g(t_i) &= \sum_{i \prec p/2} \lambda_{i,p}\, g(t_i) \;+ \sum_{i \succ p/2} \lambda_{p-i,p}\, g(t_{p-i}) \\ &= \sum_{i \prec p/2} \lambda_{i,p}\, g(t_i) \;- \sum_{i \prec p/2} \lambda_{i,p}\, g(t_i) = 0.\end{aligned}$$

On conclut donc que $E_{p+1}(g) = 0$.

Proposition 3.2.1

Si p est impair, alors la formule (4.3) est de degré $\geq p$.

Si p est pair, alors la formule (4.3) est de degré $\geq p+1$.

Démonstration

On a pour $i \leq p$

$$\int_{-1}^{1} L_i(t)dt \;= 2\;\lambda_{i,p}$$

Or par construction les polynômes L_i vérifient :

$$L_i(t_j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

donc

$$\sum_{j=0}^{p} \lambda_{j,p}\, L_i(t_j) = \;\lambda_{i,p}\;.$$

Si on applique la formule (4.3) aux polynômes de base de Lagrange L_i, on obtient:

$$\int_{-1}^{1} L_i(t)dt \;= 2 \sum_{j=0}^{p} \lambda_{j,p}\, L_i(t_j) \quad + \; E_{p+1}(L_i)$$

on tire donc que $\quad E_{p+1}(L_i) = 0$

Comme les polynômes de Lagrange $L_0, L_1, \ldots, L_p$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_p$ on a alors: pour tout $P \in \mathbb{P}_p$ $E_{p+1}(P) = 0$. Donc la formule est de degré$\geq p$.

Si, de plus, p est un entier pair alors la fonction $g(t) = t^{p+1}$ est une fonction impaire et donc $E_{p+1}(t^{p+1}) = 0$, d'après le lemme 3.3.

Proposition 3.2.2

Soit $N = \begin{cases} p \text{ si } p \text{ est impair} \\ p+1 \text{ si } p \text{ est pair} \end{cases}$

on a

$$\sum_{j=0}^{p} \lambda_{j,p}\, t_j^k = \begin{cases} 0 \;\; pour\; k \leq N \;\;,\; k\; impair \\ \frac{1}{k+1} \;\; pour\; k \leq N \;\;,\; k\; pair \end{cases}$$

En particulier $\sum_{j=0}^{p} \lambda_{j,p} = 1.$

Démonstration

D'après la proposition 3.1, on a $\forall\, k \le N \quad E_{p+1}(t^k) = 0$. Ce qui donne :

$$2 \sum_{j=0}^{p} \lambda_{j,p}\, t_j^k = \int_{-1}^{1} t^k dt = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; k \le N \;\; et\; k\; impair \\ \frac{2}{k+1} \; si\; k \le N \;\; ,\; k\; pair \end{cases}$$

Exemple 3.4 (Formule du Trapèze)

On considère le cas $p = 1$, $w(t) = 1$, $t_0 = -1$, $t_1 = 1$, $\lambda_{0,1} = \lambda_{1,1} = \frac{1}{2}$, on obtient la formule suivante:

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = g(-1) + g(1) + E_2(g)$$

Détermination de l'erreur $E_2(g)$

Supposons que g est de classe C^2 sur $[-1, 1]$ et soit P_1 le polynôme d'interpolation de Lagrange de g aux points -1, $+1$, alors on a

$$g(t) - P_1(t) = \frac{g''(\eta_t)}{2}(t-1)(t+1) \quad \text{avec } \eta_t \in [-1, 1]$$

d'où

$$E_2(g) = \int_{-1}^{1}(g(t) - P_1(t))dt = \int_{-1}^{1} \left(\frac{g''(\eta_t)}{2}(t-1)(t+1)\right)dt$$

Puisque le polynôme $(t^2 - 1)$ garde un signe constant sur $[-1, 1]$ et g'' est une fonction continue sur $[-1, 1]$, on peut donc appliquer le théorème de la moyenne et on obtient:

il existe $\eta \in [-1, 1]$ tel que

$$E_2(g) = \frac{g''(\eta)}{2} \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)\, dt = -\frac{2}{3}\, g''(\eta)$$

Et d'après la remarque 3.2, on aura pour tout f de classe C^2 sur $[a, b]$ on a:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) \quad \eta \in [-1, 1]$$

3.2.2 Etude de l'erreur dans les formules de Newton-Cotes

Théorème 3.2.1
1/ Si p est pair , si f est de classe $C^{p+2}([a.b])$, alors il existe $\eta \in [a,b]$ tel que:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p} f(a+i\,\frac{b-a}{p}) - (\frac{b-a}{p})^{p+3}\frac{f^{(p+2)}(\eta)}{(p+2)!} \int_0^p t^2 \prod_{j=1}^{p}(t-j)dt$$

2/ Si p est impair, si f est de classe $C^{p+1}([a,b])$, alors il existe $\eta \in [a,b]$ tel que:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p} f(a+i\,\frac{b-a}{p}) - (\frac{b-a}{p})^{p+2}\frac{f^{(p+1)}(\eta)}{(p+1)!} \int_0^p \prod_{j=0}^{p}(t-j)dt$$

Démonstration

Nous donnons la démonstration dans le cas où p est pair. Le cas où p est impair est à traiter en exercice.

Soit $g \in C^{p+2}([-1,1])$. Soit $x \in [-1,1]$. Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $t_j = -1 + \frac{2}{p}j$, $j = 0,1,\dots,p$.

Posons:

$$* \prod(t) = \prod_{j=0}^{p}(t-j)$$

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{g(x)-P(x)}{\prod(x)} & si\ x \notin \{t_0,...t_p\} \\ et & \\ h(t_k) = \dfrac{g'(t_k)-P'(t_k)}{\prod'(t_k)} & pour\quad k=0,\dots,p \end{cases} \tag{3.4}$$

$$* \alpha(x) = \frac{g'(x)-P'(x)-h(x)\prod'(x)}{\prod(x)} \quad si\ x \notin \{t_0,...t_p\}$$

et

$$* \alpha(t_k) = \frac{\prod'(t_k)\ [g''(t_k)-P''(t_k)] - \prod''(t_k)\ [g'(t_k)-P(t_k)]}{2(\prod'(t_k))^2} \quad pour\quad k=0,\dots,p$$

On vérifie facilement que $\lim\limits_{x\to t_k} h(x) = h(t_k)$ et $\lim\limits_{x\to t_k} \alpha(x) = \alpha(t_k)$

En effet

$$\begin{aligned} \lim_{x\to t_k} h(x) &= \lim_{x\to t_k} \frac{g(x)-P(x)}{\prod(x)}\frac{(t-t_k)}{(t-t_k)} &&= \lim_{x\to t_k}\frac{g(x)-P(x)}{(t-t_k)}\frac{(t-t_k)}{\prod(x)} \\ &= \frac{g'(t_k)-P'(t_k)}{\prod'(t_k)} &&= h(t_k) \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient la deuxième égalité.

On conclut donc que les fonctions h et α sont continues sur $[-1,1]$.

Lemme 3.2.4
La fonction h définie par (3.4) est de classe C^1 sur $[-1,1]$. De plus, $\forall x \in [-1,1]$, $h'(x) = \alpha(x)$ et il existe $\xi = \xi(x) \in [-1,1]$ tel que $h'(x) = \dfrac{g^{(p+2)}(\xi)}{(p+2)!}$

Démonstration

1/ En définissant les fonctions $h, \prod$ et α comme précèdemment, on voit que la fonction h est dérivable en tout point x tel que $x \notin \{t_0, t_1, \ldots.., t_p\}$ et on a $g(x) - P(x) = \prod(x)h(x)$

d'où

$g'(x) - P'(x) = \prod'(x)h(x) \ + \prod(x)h'(x)$

et donc

$g'(x) - P'(x) - \prod'(x)h(x) \ = \prod(x)h'(x)$

D'après la définition de la fonction α, on obtient $\alpha(x) = h'(x)$. Et comme α est continue, on conclut donc que la fonction h est de classe C^1 sur $[-1,1]$ et $\alpha(x) = h'(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$.

2/ Posons, pour $x \in [-1,1]$, $Q_x(t) = P(t) + h(x)\prod(t) + (t-x)\alpha(x)\prod(t)$. On peut vérifer facilement qu'on a:

* Le polynôme Q_x est un polynôme de degré $(p+2)$, car $\prod$ est est un polynôme de degré $(p+1)$ et donc $Q_x \in IP_{p+2}$.

* $Q_x(t_i) = g(t_i)$ *pour* $i = 0, 1, ..., p$

* $Q_x(x) = g(x)$ et $Q'_x(x) = g'(x)$ pour tout x

* $Q''_x(x) = g''(x)$ pour $x \in \{t_0, t_1, ..., t_p\}$

Posons $\phi(t) = g(t) \ - Q_x(t)$ alors on a:

* $\phi(t_i) = 0$ pour $i \in \{0, ..., p\}$

* $\phi(x) = \phi'(x) = 0$

* $\phi''(x) = 0$ pour $x \in \{t_0, t_1, ..., t_p\}$

En appliquant le théorème de Rolle successivement à ϕ, ϕ', ϕ'', $\ldots...$, $\phi^{(p)}$, on aboutit à l'existence de $\xi = \xi(x) \in [-1,1]$ tel que $\phi^{(p+1)}(\xi) = 0$.

Or

$Q_x^{(p+2)}(t) = (p+2)!\alpha(x)$

car

$P^{(p+2)}(t) = \prod^{(p+2)}(t) = 0$

et $((t-x)\prod(t))^{(p+2)} = (p+2)!$

donc: $\phi^{(p+1)}(\xi) = 0$ d'où $\alpha'(x) = \frac{g^{(p+2)}(\xi)}{(p+2)!}$

Lemme 3.2.5

Si p est un entier pair, $p = 2m$, et $\prod(t) = \prod_{j=0}^{m-1}(t - t_j)$ *alors la fonction définie par:*

$$u(x) = \int_{-1}^{x} \prod(t)dt \quad \forall x \in [-1, 1]$$

vérifie

$$\begin{array}{l} u(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 1] \\ u(1) = u(-1) = 0 \end{array}$$

Démonstration

1/ on a:

$$\prod(t) = \prod_{j=0}^{2m}(t - t_j) = t\prod_{j=0}^{m-1}(t^2 - t_j^2)$$

car $t_{2m-j} = -t_j$ et donc $\prod(t)$ est une fonction impaire et alors $u(1) = u(-1) = 0$.

2/Soit $k \in \{0, 1, ..., p\}$. On a $\prod(t) \geq 0$ pour $t \in [t_{2k}, t_{2k+1}]$ et $\prod(t) \leq 0$ pour $t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}]$. La fonction u est donc croissante sur $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ et elle est décroissante sur $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$.

3/On a, pour tout k tel que: $2k + 2 \leq m$,

$$\begin{aligned}
\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} \prod(t)dt &= \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} \prod(t)dt + \int_{t_{2k+1}}^{t_{2k+2}} \prod(t)dt \\
&= \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} \prod_{j=0}^{2m}(t - t_j)dt + \int_{t_{2k+1}}^{t_{2k+2}} \prod_{j=0}^{2m}(t - t_j)dt \\
&(posons\ s = t - \tfrac{2}{2m}) \\
&= \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} \prod_{j=0}^{2m}(t - t_j)dt + \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} \prod_{j=-1}^{2m-1}(s - t_j)ds \\
&= \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} (t - t_{2m} + t - t_{-1})\prod_{j=0}^{2k}(t - t_j)\prod_{j=2k+1}^{2m-1}(t - t_j)dt \\
&(\ Comme\ t_j\ = -1 + \tfrac{2}{2m}j) \\
&= \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} 2(t + \frac{1}{2m})\prod_{j=0}^{2k}(t - t_j)\prod_{j=2k+1}^{2m-1}(t - t_j)dt
\end{aligned}$$

Or, pour $t \in [t_{2k}, t_{2k+1}]$, on a:

$$\begin{aligned}
* \quad (t + \frac{1}{2m}) \leq (t_{2k+1} + \frac{1}{2m}) &= -1 + \frac{2}{2m}(2k + 1) + \frac{1}{2m} \\
&= -1 + \frac{1}{2m}(4k + 2 + 1) \leq \frac{-1}{2} \leq 0 \quad (car\ 2k + 2 \leq m\ )
\end{aligned}$$

$*\ \prod_{j=0}^{2k}(t-t_j)\ \geq 0$ (produit de $(2k+1)$ facteurs positifs).

$*\ \prod_{j=2k+1}^{2m-1}(t-t_j) \leq 0$ (produit de $(2m-2k-1)$ facteurs négatifs).

donc $\displaystyle\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} \prod(t)\ dt\ \geq 0$ pour tout k tel que $2k+2 \leq m$

4/on a pour tout k tel que $m < 2k+2 \leq 2m$

$$
\begin{aligned}
u(t_{2k+2}) &= \int_{-1}^{t_{2k+2}} \prod(t)\ dt \\
&= \int_{-1}^{t_{2m-2k-2}} \prod(t)\ dt\ + \int_{t_{2m-2k-2}}^{t_{2k+2}} \prod(t)\ dt \\
&= u(t_{2m-2k-2})\ + \int_{t_{-2k-2}}^{t_{2k+2}} \prod(t)\ dt && \textit{car}\ \ t_{2m-2k-2} = -t_{2k+2} \\
&= u(t_{2m-2k-2}) && \textit{car}\ \prod\ \textit{est impaire}
\end{aligned}
$$

D'où $u(t_{2k+2}) \geq 0$ d'après 3/ et puisque $2m-2k-2\ \leq m$.

En conclusion, on a $u(t_{2k+2}) \geq 0$ pour tout $k\ \in \{0,\ldots,m-1\}$. Et comme la fonction u est donc croissante sur $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ et décroissante sur $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$ (d'après 1/ et 2/), on a alors $u(x)\ \geq 0$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Démonstration du théorème 3.1

On a:

$$
\begin{aligned}
E_{p+1}(g) &= \int_{-1}^{1} g(t)dt\ - 2\sum_{i=0}^{p}\ \lambda_{i,p}\ g(t_i) \\
&= \int_{-1}^{1}(g(t)-P(t))dt\ = \int_{-1}^{1} h(t)\prod(t)dt
\end{aligned}
$$

Par intégration par parties, on obtient:

$$
E_{p+1}(g) = [h(t)u(t)]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{1} h'(t)u(t)dt \quad = -\int_{-1}^{1} h'(t)u(t)dt
$$

d'où d'après le lemme 3.4,

$$
E_{p+1}(g) = -\int_{-1}^{1} \frac{g^{(p+2)}(\xi_t)}{(p+2)!}u(t)dt
$$

Comme la fonction u est de signe constant et $g^{(p+2)}$ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'un réel $\theta \in [-1,1]$ tel que:

$$
E_{p+1}(g) = -\frac{g^{(p+2)}(\theta)}{(p+2)!}\int_{-1}^{1} u(t)dt
$$

Or, par une intégration par parties, on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u(t)dt &= [(t+1)u(t)]_{-1}^{+1} - \textstyle\int_{-1}^{1}(t+1)\prod(t)dt \ = \displaystyle\int_{-1}^{1}(t+1) \ \prod_{j=0}^{p}(t-t_j)\ dt \\
&= \int_{-1}^{1}(t+1)^2 \ \prod_{j=1}^{p}(t+1-\frac{j}{m})\ dt \qquad \textit{changement de variable } s=t+1 \\
&= -\int_{0}^{2} s^2 \ \prod_{j=1}^{p}(s-\frac{j}{m})\ ds \qquad \textit{changement de variable } s=\tfrac{1}{m}\,t \\
&= -\left(\frac{1}{m}\right)^{p+3} \int_0^p t^2 \ \prod_{j=1}^{p}(t-j)\ dt
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = 2\sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p}\, g(t_i) \ + \left(\frac{1}{m}\right)^{p+3} \frac{g^{(p+2)}(\theta)}{(p+2)!} \int_0^p t^2 \ \prod_{j=1}^{p}(t-j)\ dt$$

En utilisant la remarque 3.2, on obtient:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,p} f(a+i\,\frac{b-a}{p}) - (\frac{b-a}{p})^{p+3}\frac{f^{(p+2)}(\eta)}{(p+2)!} \int_0^p t^2 \prod_{j=1}^{p}(t-j)dt$$

avec $\eta \ \in [a,b]$

Exemple 3.5 (Formule de Simpson)

Cas $p=2$. On a $\lambda_{0,2}=\lambda_{2,2}=\dfrac{1}{6}$, $\lambda_{1,2}=\dfrac{2}{3}$ et $\displaystyle\int_0^2 t^2(t-1)(t-2)dt = -\frac{4}{15}$. On a donc:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) \ + 4f(\frac{a+b}{2}) \ + \ f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880}\, f^{(4}(\eta) \quad \textit{avec } \eta \ \in [a,b]$$

Exemple 3.6 (Formule De Boole)

Cas $p=4$. On a $\lambda_{0,4}=\lambda_{4,4}=\frac{7}{90}$, $\lambda_{1,4}=\lambda_{3,4}=\frac{16}{45}$, $\lambda_{2,4}=\frac{2}{15}$.

L'application du théorème 3.1 donne en posant $h=\dfrac{b-a}{4}$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \frac{(b-a)}{90}(7f(a) \ + 32f(\,a+h) \ + 12\ f(a+2h) + 32f(a+3h) \\
&\quad +7f(b)\ ) + E
\end{aligned}$$

avec $E = -\dfrac{8}{945}\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\eta)$ et $\eta \in [a,b]$

3.3 Formules de Newton-Cotes composées

D'après l'expression du terme d'erreur dans les formules de Newton-Cotes, on constate que ces formules sont d'autant plus précises que la longeur de l'intervalle d'intégration $b-a$ est petit. C'est pour cela que ces formules sont en général utilisées d'une manière "composée". Plus précisément: on subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de même longueur: $a = \alpha_0 < ... < \alpha_n = b$ avec $\alpha_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$ $(i = 0,1,\ldots,n),)$ puis on écrit:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx$$

On applique alors la formule de quadrature sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, on obtient le:

Théorème 3.3.1

Soient p , $n \in I\!N^*$. On a, en posant $h = \dfrac{b-a}{n}$ *et* $\lambda_{i,p} = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^p \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{p} \left(\frac{t-j}{i-j}\right)dt$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= h\left(\lambda_0[\,f(a)+f(b)\,] + 2\lambda_0\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right.\\ &\left.+\sum_{j=1}^{p-1}\lambda_j\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih+j\frac{h}{p})\right) + E_{p+1,n}(f)\end{aligned} \tag{3.5}$$

avec:

1/ Si p est pair et la fonction f est de classe C^{p+2} sur $[a,b]$

$$E_{p+1,n}(f) = \left(\frac{b-a}{p}\right)^{p+3}\left(\frac{1}{n}\right)^{p+2}\frac{f^{(p+2)}(\eta)}{(p+2)!}\int_0^p t^2\prod_{j=1}^{p}(t-j)\,dt \qquad \text{avec } \eta\in[a,b]$$

2/ Si p est impair et la fonction f est de classe C^{p+1} sur $[a,b]$

$$E_{p+1,n}(f) = \left(\frac{b-a}{p}\right)^{p+2}\left(\frac{1}{n}\right)^{p+1}\frac{f^{(p+1)}(\eta)}{(p+1)!}\int_0^p \prod_{j=1}^{p}(t-j)\,dt \qquad \text{avec } \eta\in[a,b]$$

Démonstration

On a d'après le théorème 3.1:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\, dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \left(\sum_{j=0}^{p} \lambda_j\, f(\alpha_i + j\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{p}) \quad + \; E_i(f) \right)\end{aligned}$$

avec:

1/Si p est pair et la fonction f est de classe C^{p+2} sur $[a, b]$

$$E_i(f) = \left(\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{p} \right)^{p+3} \; \frac{f^{(p+2)}(\eta_i)}{(p+2)!} \int_0^p t^2 \prod_{j=1}^{p} (t-j)\, dt \quad avec\, \eta_i \in [\alpha_i,\ \alpha_{i+1}]$$

2/ Si p est impair et la fonction f est de classe C^{p+1} sur $[a, b]$

$$E_i(f) = \left(\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{p} \right)^{p+2} \; \frac{f^{(p+1)}(\eta_i)}{(p+1)!} \int_0^p \prod_{j=0}^{p} (t-j)\, dt \qquad avec\, \eta_i \in [\alpha_i,\ \alpha_{i+1}]$$

Or:

* $\dfrac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{p} = \dfrac{h}{p}$

d'où:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \left(\sum_{j=0}^{p} \lambda_j\, f(\alpha_i + j\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{p}) \right) \\ &= h \left(\sum_{i=0}^{n-1} ((\lambda_0 f(\alpha_i) + \lambda_p f(\alpha_{i+1})) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j\, f(\alpha_i + j\frac{h}{p}) \right) \\ &= h \left((\lambda_0 [f(a) + f(b)] + 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) \;\; + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i + j\frac{h}{p}) \right)\end{aligned}$$

* D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} f^{(k)}(\eta_i) \;=\; f^{(k)}(\eta) \text{ avec } \eta \in [a,\ b],$$

où $k = p + 1$ si p est impair et $k = p + 2$ si p est pair.

En utilisant ces trois égalités dans la formule donnée au début de la démonstration, on obtient la formule du théorème.

Exemple 3.7: (Formule du trapèze composée)

Pour $p = 1$ et $n \in I\!N^*$ on a:

$$\int_a^b f(x)dx = (\frac{b-a}{2n}) \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\frac{b - a}{n}) \right) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} \; f''(\eta)$$

Exemple 3.8: (Formule de Simpson composée)

Pour $p = 2$ et $n \in I\!N^*$ on a:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= (\frac{b-a}{6n})\left[f(a)+f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n})\right.\\ &\left.+4\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+\frac{1}{2})(\frac{b-a}{n})\right]\\ &-\frac{1}{90n^4}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f''(\eta)\end{aligned}$$

Exemple 3.9:(Formule de Boole composée)

Pour $p = 4$ et $n \in I\!N^*$ on a:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{(b-a)}{90}(7f(a) + 32f(a+h) + 12f(a+2h)\\ &+32f(a+3h)+7f(b)) + E\end{aligned}$$

avec $E = -\frac{8}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\eta)$ et $\eta \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= (\frac{h}{90})\left(7[f(a)+f(b)] + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right.\\ &+32\sum_{i=0}^{n-1}\left\{f(a+(i+\frac{1}{4})h)) + f(a+(i+\frac{3}{4})h)\right\}\\ &\left.+12\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+\frac{1}{2})h)\right)\\ &-\frac{8}{945n^6}\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\eta)\end{aligned}$$

3.4 Formule de quadrature de Gauss

On considère la formule de quadrature :

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i f(\alpha_i) + E_{p+1}(f) \tag{3.6}$$

Choisissons les poids λ_i ainsi que les noeuds x_i tels que la formule (4.3) soit de degré le plus élevé possible .

Exemple 3.10:

Cas où $p = 1, w(x) = 1$ et $[a, b] = [-1, 1]$.

Cherchons λ_0, λ_1, x_0, x_1 tels que la formule:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \;=\; \lambda_0\ f(x_0)\ + \lambda_1\ f(x_1) + E_2(f),$$

soit de degré le plus élevé possible, c'est à dire tels que: $E_2(f) = 0$ pour $f(x) = x^k$ avec $k = 0, 1, .., m$, et m le plus élevé possible. On aura donc:

$$\int_{-1}^1 1dx \;=\; \lambda_0\ + \lambda_1 = 2$$

$$\int_{-1}^1 xdx \;=\; \lambda_0\ x_0 + \lambda_1 x_1 = 0$$

$$\int_{-1}^1 x^2dx \;=\; \lambda_0\ x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^1 x^3dx \;=\; \lambda_0\ x_0^3 + \lambda_1 x_1^3 = 0$$

etc...

Les quatres premières équations forment un système non linéaire qui admet comme solution $\lambda_0 = \lambda_1 = 1,\ x_0 = -x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

On obtient donc la formule:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \;=\; f(-\frac{\sqrt{3}}{3})\ +\ f(\frac{\sqrt{3}}{3}) + E_2(f)$$

où $E_2(f)$ est un polynôme de degré 3.

3.4.1 Polynômes orthogonaux

Soit $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que :

* w soit continue sur $]a, b[$ et $w(x) > 0, \forall x \in\ ]a, b[$

*$x \to x^k w(x)$ soit intégrable sur $[a, b], \forall\ k \in I\!N$

On définit sur $I\!P$ (l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels) le produit scalaire:

$$(P, Q)_w = \int_{-1}^1 w(x)P(x)Q(x)dx$$

Théorème 3.4.1

Il existe une suite $(Q_n)_{n\in I\!N}$ unique de polynômes telle que :

1/ $\deg(Q_n) = n$ et Q_n est monique (i.e: Le coefficient de x^n est 1 dans Q_n)

2/ Pour tout P dans $\mathbb{P}_{n-1}$ (le sous espace vectoriel de $I\!P$ des polynômes de degré $\leq n-1$)

$$(P, Q_n)_w = 0$$

Et la suite (Q_n) est définie par :

$Q_0(x) = 1$

$Q_1(x) = x - \frac{(1,x)_w}{(1,1)_w}$

$Q_n(x) = (x - \alpha_n)Q_{n-1}(x) - \beta_n Q_{n-2}(x)$

avec $\alpha_n = \dfrac{(xQ_{n-1}, Q_{n-1})_w}{\gamma_{n-1}}$, $\beta_n = \dfrac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}}$ *et* $\gamma_k = (Q_k, Q_k)_w$

Démonstration

1/Existence:

En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur la base canonique $1, x, x^2, ...$, on obtient:

$Q_0(x) = 1$

$Q_1(x) = x - \dfrac{(1,x)_w}{(1,1)_w}$

$Q_n(x) = x^n - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,n} Q_i(x)$ avec $a_{i,n} = \dfrac{(x^n, Q_i)_w}{\gamma_i}$

Les polynômes $Q_0, Q_1, ..., Q_n$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_n$.Ils sont orthogonaux entre eux par construction et ils vérifient les conditions 1/ et 2/. Il est clair que 1/ et 2/ entrainent l'unicité de Q_n.

2/ Calcul des coefficients

On a que, pour tout $k \in I\!N^*$, les polynômes $Q_0, Q_1, ..., Q_k$ forment une base de l'espace vectoriel $I\!P_k$ et que tous les polynômes Q_k sont moniques. Alors, pour tout $k \in I\!N^*$, $Q_k - xQ_{k-1} \in I\!P_{k-1}$ et il s'écrit d'une façon unique sous la forme $Q_k - xQ_{k-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \mu_i Q_i$. Comme les Q_i sont orthogonaux on a:

$*$ $(Q_k - xQ_{k-1} , Q_k)_w = (\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \mu_i Q_i, Q_k)_w = \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i (Q_i, Q_k)_w = 0$

d'où

$(Q_k, Q_k)_w = (xQ_{k-1}, Q_k)_w$ pour tout $k \in I\!N^*$

$*$ $(Q_k - xQ_{k-1}, Q_j)_w = 0$ pour tout $j < k-1$ et pour tout $k \in I\!N^*$

Soit $n \in I\!N^*$. Alors on a $Q_n - xQ_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i Q_i$ et on peut calculer les produits scalaires suivants:

* $(Q_n - xQ_{n-1}, Q_{n-1})_w = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i Q_i \ , Q_{n-1} \right)_w = \mu_{n-1}(Q_{n-1} \ , Q_{n-1})_w$

D'autre part

$(Q_n - xQ_{n-1}, Q_{n-1})_w = (Q_n, Q_{n-1})_w - (xQ_{n-1}, Q_{n-1})_w = -(xQ_{n-1}, Q_{n-1})_w$

d'où

$$\mu_{n-1} = \frac{-(xQ_{n-1}, Q_{n-1})_w}{(Q_{n-1} \ , Q_{n-1})_w}$$

$(Q_n - xQ_{n-1}, Q_{n-2})_w = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i Q_i \ , Q_{n-2} \right)_w = \mu_{n-2}(Q_{n-2} \, , Q_{n-2})_w$

D'autre part

$(Q_n - xQ_{n-1}, Q_{n-2})_w = (Q_n, Q_{n-2})_w - (xQ_{n-1}, Q_{n-2})_w = -(xQ_{n-1}, Q_{n-2})_w$

d'où

$$\mu_{n-2} = \frac{-(xQ_{n-1}, Q_{n-2})_w}{(Q_{n-2} \ , Q_{n-2})_w} = -\frac{(Q_{n-1}, xQ_{n-2})_w}{(Q_{n-2} \ , Q_{n-2})_w}$$

* $(Q_n - xQ_{n-1}, Q_j)_w = 0$ pour tout $j < n-2$

On obtient donc $Q_n - xQ_{n-1} = \mu_{n-1}Q_{n-1} + \mu_{n-2}Q_{n-2}$ d'où

$Q_n = (x - \mu_{n-1})Q_{n-1} + \mu_{n-2}Q_{n-2}$

avec

$$\mu_{n-1} = \frac{(xQ_{n-1}, Q_{n-1})_w}{(Q_{n-1} \ , Q_{n-1})_w} \text{ et } \mu_{n-2} = -\frac{(Q_{n-1}, xQ_{n-2})_w}{(Q_{n-2} \ , Q_{n-2})_w}$$

Et en posant

$\alpha_n = \mu_{n-1}$ et $\beta_n = -\mu_{n-2}$, on obtient les formules du théorème.

Définition 3.4.1
Les polynômes $(Q_n)_{n \in I\!N}$ définis au théorème 3.3, s'appellent les polynômes orthogonaux sur $[a, b]$ relativement à la fonction poids w.

Exemples classiques 3.11:

$1/[a, b] = [-1, 1]$ et $w(x) = 1$. on a:

$Q_0(x) = 1$

$Q_1(x) = x$

$Q_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

$Q_3(x) = x(x^2 - \frac{3}{5})$

$Q_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$ etc...

Ces polynômes sont appelés les polynômes de Legendre.

2/ $[a,b] = [-1,1]$ et $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on a:

$Q_0(x) = 1$

$Q_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\ Arc\cos(x)),\ n \in I\!N^*$

Ces polynômes sont appelés **les polynômes de Tchebychev** et sont en général notés

$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\ Arc\cos(x)) \quad n \in I\!N^*$

Théorème 3.4.2
Soit $(Q_n)_{n\in I\!N}$ la suite des polynômes orthogonaux sur $[a,b]$ relativement à la fonction poids w. Alors les racines de Q_n sont réelles, distinctes et appartiennent à $]a,b[$ pour $n \in I\!N^*$.

Démonstration
Soient $\alpha_1, \alpha_1, \ldots.., \alpha_m$, les racines distinctes de Q_n appartenant à $]a,b[$. On a bien $m \leq n$. Montrons alors que $m = n$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $m < n$

Posons $\prod(x) = \prod_{i=0}^{m}(x - \alpha_i)$ alors le polynôme $\prod(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ car $m < n$ donc $(\prod(x), Q_n(x))_w = 0$

d'où $\int_a^b w(x) \prod(x) Q_n(x)dx = 0$,

comme $w(x)\prod(x)Q_n(x)$ garde un signe constant sur $]a,b[$ alors $\prod(x)Q_n(x) \equiv 0$ ce qui est absurde car $\deg(Q_n) = n \geq 1$.

Théorème 3.4.3
Pour tout $n \in I\!N$; il existe une formule de quadrature unique,

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, f(x_i) + E_{n+1}(f)$$

de degré $\geq 2n+1$. De plus:

1/ Les noeuds x_i sont les racines de Q_{n+1} (le $(n+1)^{ième}$ polynôme orthogonal sur $]a,b[$ relativement à w).

2/ $\lambda_i = \int_a^b L_i(x)\ w(x)dx$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right) \textit{ pour } i \in \{0, 1, ..., n\}$$

3/ Si f est de classe C^{2n+2} sur $[a, b]$ alors il existe $\eta \in [a, b]$ tel que:

$$E_{n+1}(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b [Q_{n+1}(x)]^2 w(x)\ dx$$

Démonstration

1/ unicité

Posons

$$\prod(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

et soit $P \in \mathbb{P}_n$ alors

$$\int_a^b \prod(x)P(x)\ w(x)dx = 0$$

car $\prod(x)P(x) \in \mathbb{P}_{2n+1}$. Donc $\prod$ est nécessairement le $(n+1)^{ième}$ polynôme orthogonal sur $]a, b[$ relativement à w. Ses racines $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont donc définies d'une manière unique. De plus, en écrivant que la formule est exacte pour tout $L_i(x)$ (les polynômes de base de Lagrange) appartenant à $\mathbb{P}_n$, on obtient:

$$\lambda_i = \int_a^b L_i(x)\ w(x)dx$$

Ce qui implique l'unicité des coefficients λ_i.

2/Existence

Soit Q_{n+1} le $(n+1)^{ième}$ polynôme orthogonal sur $]a, b[$ relativement à w. On sait que ses racines sont distinctes et appartiennent à $]a, b[$. Notons $x_0, x_1, ..., x_n$ ces racines alors

$$Q_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Posons

$$\lambda_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx$$

Considérons $(L_0, \ldots, L_n)$ la base de l'espace $I\!P_n$ formé par les polynômes de Lagrange, alors tout polynôme P de $\mathbb{P}_n$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \, L_i(x)$ où les α_i sont des constantes réelles.

Or puisque

$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & si \; i = j \\ 0 & si \neq j \end{cases}$

on a

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \, L_i(x)$

d'où

$\int_a^b P(x) \, w(x)dx \; = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \, L_i(x) \, w(x)dx \; = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \int_a^b L_i(x) \, w(x)dx$

et donc

$\int_a^b P(x) \, w(x)dx \; = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i) \; .$

La formule est donc exacte pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{P}_n$.

Soit maintenant le polynôme $S \in \mathbb{P}_{2n+1}$, la division Euclidienne du polynôme S par le polynôme Q_{n+1} donne l'existence de deux polynômes P et R dans $\mathbb{P}_n$ tels que:

$$S(x) = P(x)Q_{n+1}(x) \; + R(x),$$

d'où, on a donc:

$$\begin{aligned} \int_a^b S(x)w(x)dx \; &= \int_a^b P(x)Q_{n+1}(x) \, w(x)dx \; + \int_a^b R(x) \, w(x)dx \\ &= \int_a^b R(x) \, w(x)dx \; = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i R(x_i) \; = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i S(x_i) \end{aligned}$$

Car la formule est exacte sur $\mathbb{P}_n$ et $Q_{n+1}(x_i) = 0$.

La formule est donc exacte pour tout S dans $\mathbb{P}_{2n+1}$.

Pour $S = L_i^2$ qui est un polynôme de $\mathbb{P}_{2n}$ la formule est aussi exacte et on obtient: $\lambda_i = \int_a^b L_i^2(x) \, w(x)dx$ et donc $\lambda_i > 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.

3/ Etude de l'erreur

Soit $H(x)$ le polynôme d'interpolation d'Hermite relativement aux points x_0, x_1,..., x_n tel que $H(x_i) = f(x_i)$ et $H'(x_i) = f'(x_i)$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$. On a :

$\int_a^b H(x) \, w(x)dx \; = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i H(x_i) \; = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$

Or, si f est de classe C^{2n+2} sur $[a,b]$, on sait qu'il existe ξ dans $[a,b]$ tel que :

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)^2$$

d'où

$$\begin{aligned} E_{n+1}(f) &= \int_a^b f(x)\, w(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i) \\ &= \int_a^b (f(x) - H(x))\, w(x)dx \\ &= \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} Q_{n+1}^2(x) w(x)dx \end{aligned}$$

Comme la fonction $Q_{n+1}^2(x)$ garde un signe constant et que $f^{(2n+2)}$ est continue sur $[a,b]$, on aura :

$$E_{n+1}(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b Q_{n+1}^2(x) w(x)dx \text{ avec } \eta \in [a,b].$$

Remarque 3.3

En fait, la formule du théorème 3.5 est de degré exactement égal à $2n+1$. En effet, pour $f(x) = x^{2n+2}$, on a $f^{(2n+2)}(\eta) = (2n+2)!$ et donc

$$E_{n+1}(f) = \int_a^b Q_{n+1}^2(x) w(x)dx.$$

Remarque 3.4

Dans la formule de quadrature de Gauss à $(n+1)$ points (théorème 3.5), les coefficients λ_i peuvent s'exprimer sous la forme:

$$\lambda_i = \frac{\gamma_n}{Q'_{n+1}(x_i) Q_n(x_i)} = -\frac{\gamma_{n+1}}{Q'_{n+1}(x_i) Q_{n+2}(x_i)}$$

avec $\gamma_k = \int_a^b Q_{n+1}^2(x) w(x)dx$

Démonstration:

Les racines polynômes Q_{n+1} sont $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Il s'écrit alors

$$Q_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

On sait aussi que le polynôme d'interpolation de Lagrange est:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$$

il est facile de voir que

$$L_i(x) = \frac{1}{Q'_{n+1}(x_i)} \frac{Q_{n+1}(x)}{x - x_i}$$

et le coefficient λ_i est donné par:

$$\lambda_i = \int_a^b L_i(x)\, w(x)dx = \frac{1}{Q_{n+1}(x_i)} \int_a^b \frac{Q_{n+1}(x)}{x - x_i}\, w(x)dx$$

Calculons alors $\dfrac{Q_{n+1}(x)}{x - x_i}$. D'après la relation de récurrence qui lie les polynômes (Q_k), on a:

$$Q_{k+1}(x) = (x - \alpha_{k+1})\, Q_k(x) - \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}\, Q_{k-1}(x)$$

d'où:

$$Q_{k+1}(x_i) = (x_i - \alpha_{k+1})\, Q_k(x_i) - \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}\, Q_{k-1}(x_i)$$

En multipliant la première équation par $Q_k(x_i)$ et la deuxième par $Q_k(x)$, puis en retranchant la première de la deuxième, on aura après division par γ_k:

$$\frac{Q_{k+1}(x)Q_k(x_i) - Q_k(x)Q_{k+1}(x_i)}{\gamma_k} = (x-x_i)\frac{Q_k(x)Q_k(x_i)}{\gamma_k} + \frac{Q_k(x)Q_{k-1}(x_i) - Q_{k-1}(x)Q_k(x_i)}{\gamma_{k-1}}$$

Ce qui entraine que :

$$\begin{aligned}
(x - x_i) \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(x_i)}{\gamma_k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_{k+1}(x)Q_k(x_i) - Q_k(x)Q_{k+1}(x_i)}{\gamma_k} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k(x)Q_{k-1}(x_i) - Q_{k-1}(x)Q_k(x_i)}{\gamma_{k-1}} \\
&= \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(x_i)}{\gamma_n} - \frac{Q_1(x)Q_0(x_i) - Q_0(x)Q_1(x_i)}{\gamma_0} \\
&= \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(x_i)}{\gamma_n} - \frac{(x - x_i)}{\gamma_0}
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{Q_{n+1}(x)}{x - x_i} = \frac{\gamma_n}{Q_n(x_i)} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(x_i)}{\gamma_k} + \frac{1}{\gamma_0} \right)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \frac{1}{Q'_{n+1}(x_i)} \int_a^b \frac{Q_{n+1}(x)}{x - x_i}\, w(x)dx \\
&= \frac{\gamma_n}{Q_n(x_i)Q'_{n+1}(x_i)} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(x_i)}{\gamma_k} + \frac{1}{\gamma_0} \right) w(x)dx \\
&= \frac{\gamma_n}{Q_n(x_i)Q'_{n+1}(x_i)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k(x_i)}{\gamma_k} \int_a^b Q_k(x)\, w(x)dx + \int_a^b \frac{1}{\gamma_0} w(x)dx \right\}
\end{aligned}$$

Or $Q_0(x) = 1$, donc

$$\int_a^b Q_k(x)\ w(x)dx = \int_a^b Q_k(x)Q_0(x)\ w(x)dx = 0, \text{ pour } k \geq 1$$

et

$$\int_a^b Q_0(x)Q_0(x\ )\ w(x)dx = \gamma_0.$$

On obtient donc:

$$\lambda_i = \frac{\gamma_n}{Q_n(x_i)Q'_{n+1}(x_i)}$$

D'après la relation de récurrence, on a

$$Q_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2})\ Q_{n+1}(x) - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma n}\ Q_n(x)$$

d'où

$$Q_{n+2}(x_i) = -\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\ Q_n(x_i)$$

D'où

$$\frac{\gamma_n}{Q_n(x_i)} = -\frac{\gamma_{n+1}}{Q_{n+2}(x_i)}$$

et donc

$$\lambda_i = \frac{-\gamma_{n+1}}{Q_{n+2}(x_i)Q'_{n+1}(x_i)}$$

Corollaire 3.4.1 (La formule de Gauss -Tchebytchev à $(n+1)$ points)
Soit f une fonction définie sur $[-1, 1]$ telle que $\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ soit intégrable. Alors, pour tout n dans $I\!N$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi) \quad + \frac{\pi}{2}\ \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{4^n(2n+2)!} \qquad \textit{avec } \eta \in [-1, 1].$$

Démonstration

on a:

$Q_{n+1}(x) = T_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}\ \cos((n+1)\ Arc\cos(x)) \quad n \in I\!N^*$

et $x_i = \cos\dfrac{2i+1}{2(n+1)}\pi$,pour $i = 0, 1, ..., n.$

Donc, en posant $\sigma_i = \frac{2i+1}{2(n+1)}\pi$

$$Q'_{n+1}(x_i) = -\frac{n+1}{2^n}\frac{\sin(n+1)\sigma_i}{\sin\sigma_i} \quad \textit{et } Q_{n+2}(x_i) = \frac{1}{2^{n+1}}\ \sin(n+1)\sigma_i - \ \sin\sigma_i$$

$$\gamma_{n+1} = (\frac{1}{2^n})^2 \int_{-1}^{1} \frac{\cos^2((n+1)\ Arc\cos(x))}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{4^n}\int_0^{\pi} \cos^2((n+1)\ s)\,ds = \frac{\pi}{2}\frac{1}{4^n}$$

D'où

$$\lambda_i = \ -\frac{\gamma_{n+1}}{Q'_{n+1}(x_i)\ Q_{n+2}(x_i)} \ = \frac{\pi}{n+1} \quad pour\ i = 0, ..., n.$$