Ecole Nationale des Sciences
et des Technologies Avancées
à Borj Cedria

2022-2023
H.Ben Majdouba

TD n°3 : Optimisation avec contraintes d'égalités

Exercice 1.

1. *Trouver les extremums de la fonction* $f(x,y) = x^3 + y^3$ *sous la contrainte* $x^2 + y^2 = 4$.
2. *Trouver les extremums de la fonction* $f(x,y) = xy$ *sous la contrainte* $x^2 + y^2 = 1$
3. *Trouver les extremums de la fonction* $f(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2$ *sous la contrainte* $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.
4. *Trouver les extremums de la fonction* $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + y + z^2$ *sous les contraintes* $x + y + z = 0$ *et* $x + y - z = 0$.

Exercice 2. *On considère la fonction*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1$$

et soit le problème d'optimisation :

$$(P): \min_{(x,y,z)\in K} f(x,y,z)$$

Où $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x + y + z = 1\}$

1. *Montrer que K est fermé et convexe.*
2. *Montrer que f est coercive et strictement convexe.*
3. *Que peut-on conclure ?*
4. *Résoudre le problème* (P).

Exercice 3. *Soit la fonction f définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$$

1. *Déterminer les points critiques de f et donner leur nature.*
2. *Soit l'ensemble*

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2 + y^2 = 1\}$$

   a. *Déterminer les points critiques de f dans K.*

   b. *Donner le maximum et le minimum de f dans K.*