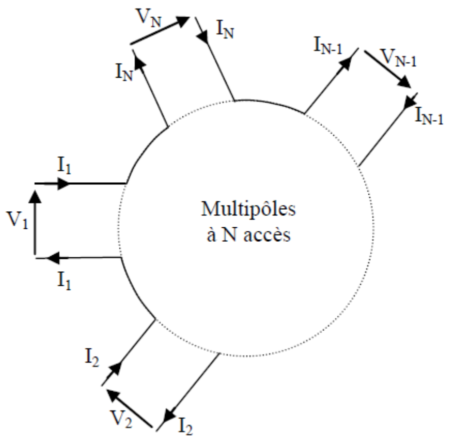
Chapitre III: La Matrice de répartition « S »

SOMMAIRE

I. Introduction

La matrice de répartition « S » ou "Scattering Matrix" est un outil essentiel de caractérisation de multipôles en hyperfréquence. Les coefficients de cette matrice, appelés paramètres S, lient les puissances incidente dans un multipôle aux puissances réflechie.
On peut se demander l’intérêt de définir une nouvelle matrice alors qu'il existe déjà de nombreuses autres matrices en électronique caractérisant un multipôle.
Ainsi la matrice impédance Z relie les tensions aux bornes d'un multipôle aux courants :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & . & Z_{1n} \\ . & Z_{22} & . & . \\ . & . & . & . \\ Z_{n1} & . & . & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ I_n \end{bmatrix}$$



Ou la matrice admittance [Y] :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & . & Y_{1n} \\ . & Y_{22} & . & . \\ . & . & . & . \\ Y_{n1} & . & . & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ V_n \end{bmatrix}$$

Plus classique encore, la matrice hybride H est utilisée par exemple pour caractériser des transistors bipolaires linéarisés :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

On utilise aussi les matrices cascades (matrice de transfert [T] par exemple) qui permettent de calculer facilement la matrice globale d'une cascade de quadripôles en faisant le produit des matrices cascades de chacun des quadripôles. Cependant toutes ces matrices relient les tensions et courants aux bornes des multipôles. Or, en hyperfréquence, il est très difficile d'accéder à ces grandeurs, alors qu'il beaucoup plus facile de mesurer des puissances. De plus, les puissances mises en jeu dans la majorité des applications en hyperfréquence (émission/réception d'ondes) sont très faibles. Ainsi un téléphone portable (GSM 900MHz ou DCS 1800MHz) doit être capable de fonctionner avec une puissance de -108dBm (environ

10-14 W…). Il est donc important de savoir comment les faibles puissances mises en jeu sont distribuées à la traversée d'un multipôle. Pour toutes ces raisons, les matrices de distribution sont un outil indispensable caractérisant la répartition des puissances.

Soit un multipôle linéaire (ou linéarisé) à N accès (2N pôles). Les ondes incidentes (V_k^+ et I_k^+) dans le plan de référence de l'accès k et les ondes réfléchies (V_k^- et I_k^- par l'accès k donnent naissance à une tension V_K et un courant I_K qui s'écrivent :

$$\begin{cases} V_k = V_k^+ + V_k^- \\ I_k = I_k^+ + I_k^- = \dfrac{1}{Z_k}\,[V_k^+ - V_k^-] \end{cases}$$

Ce qui nous conduit à :

$$\begin{cases} V_k^+ = \frac{V+Z_0 I}{2} \\ V_k^- = \dfrac{V - Z_0 I}{2} \end{cases}$$

où Z_k est l'impédance caractéristique de référence de l'accès k, c'est-à-dire l'impédance caractéristique de la ligne d'alimentation qui est utilisé pour faire les mesures ou les calculs.

Les puissances incidente (onde P_k^+) et réfléchie (onde P_k^-) sur l'accès k s'expriment comme :

$$P_k^+ = \frac{1}{2}\Re e(V_k^+ (I_k^+)^*) = \frac{1}{2}\Re e\left[\frac{V_k^+ (V_k^+)^*}{Z_k}\right]$$

C'est-à-dire si Z_k est réel (lignes à faibles pertes)

$$P_k^+ = \frac{\left|V_k^+\right|^2}{2\,Z_k}$$

et de la même manière :

$$P_k^- = \frac{\left|V_k^-\right|^2}{2\,Z_k}$$

- The average power delivered to a load

$$P_L = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{VI^*\right\} = \frac{1}{2Z_0}\mathrm{Re}\left\{\left|V_0^+\right|^2 - V_0^+V_0^{-*} + V_0^{+*}V_0^- - \left|V_0^-\right|^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2Z_0}\left(\left|V_0^+\right|^2 - \left|V_0^-\right|^2\right),$$
$$= \frac{1}{2}\left|a\right|^2 - \frac{1}{2}\left|b\right|^2,$$

- The reflection coefficient for the reflected power wave

$$\Gamma_p = \frac{b}{a} = \frac{V - Z_R^* I}{V + Z_R I} = \frac{Z_L - Z_R^*}{Z_L + Z_R}.$$

Z_R : reference impedance

Z_L : load impedance

On pourrait caractériser le multipôle en reliant les ondes de puissances P_k^+ et P_k^-, cependant, toute notion de déphasage a disparue en passant en puissance. On préfère donc définir les ondes a_k et b_k comme suit :

$$\boxed{a_k = \frac{V_k^+}{\sqrt{Z_k}}} \quad \text{et} \quad \boxed{b_k = \frac{V_k^-}{\sqrt{Z_k}}}$$

et on retrouve

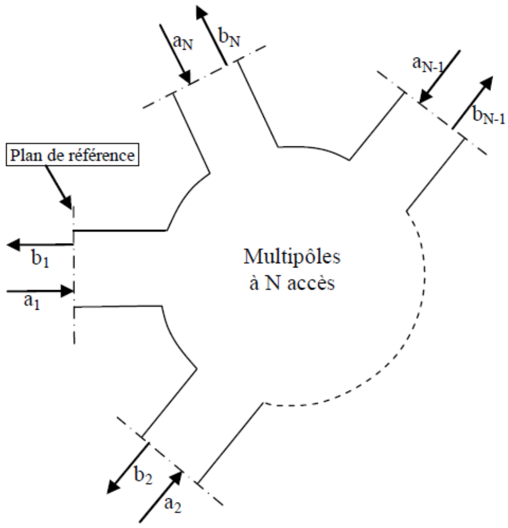
$$P_k^+ = \frac{\left|a_k\right|^2}{2} \quad \text{et} \quad P_k^- = \frac{\left|b_k\right|^2}{2}$$

⇨ les ondes a_k et b_k sont donc équivalente à des $\sqrt{\text{puissance}}$.

Définition :

On appelle Matrice [S] la matrice qui lie le vecteur **d'ondes incidentes** au vecteur **ondes réflechies** [b].

⇨ Ce qui peut s'exprimer de la manière suivante : $[b] = [S][a]$



ou encore :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1N} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ S_{N1} & . & \dots & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_N \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{cases} b_1 = S_{11}\, a_1 + S_{12}\, a_2 + \dots + S_{1N}\, a_N \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ b_N = S_{N1}\, a_1 + S_{N2}\, a_2 + \dots + S_{NN}\, a_N \end{cases}$$

ou encore :

$$b_j = \sum_{k=1}^{N} S_{jk}\, a_k$$

La matrice S permet donc de calculer les ondes réfléchies connaissant les ondes incidentes.

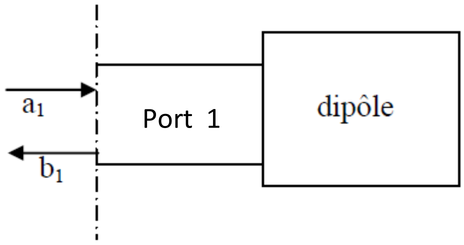
Remarques:

- Les paramètres S_{ij} sont des nombres complexes.
- Les paramètres S_{ij} dépendent généralement de la fréquence.
- Les paramètres S_{ij} dépendent du plan de référence choisit et des impédances caractéristiques de référence.
- En général, les impédances caracteristiques sont identiques sur tous les ports (Z_i=Z_0 pour tout i)

II. Détermination de la matrice S

1. Cas du dipôle

Dans le cas d'un dipôle, on a un seul port et deux ondes a_1 (incidente) et b_1 (réfléchie).



La relation reliant ces deux ondes est :

$$b_1 = S_{11}.a_1$$

On a donc :

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}$$

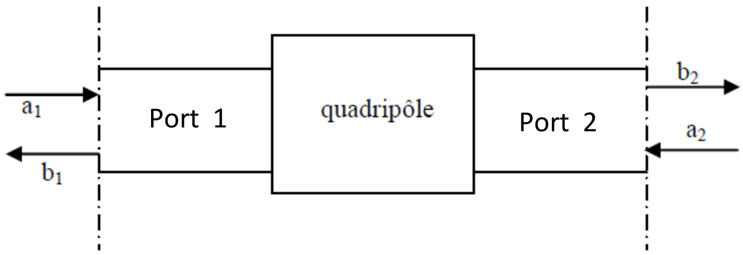
Ou encore :

$$S_{11} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \Gamma_1$$

⇨ **S_{11}** est donc le coefficient de réflexion du port 1.

2. Cas du quadripôle

Dans le cas d'un dipôle, on a deux pôles (1 et 2) et quatre ondes (a_1, b_1, a_2 et b_2 comme le montre la figure ci-contre :



Dans ce cas, les ondes incidentes et réfléchies sont reliées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \end{cases}$$

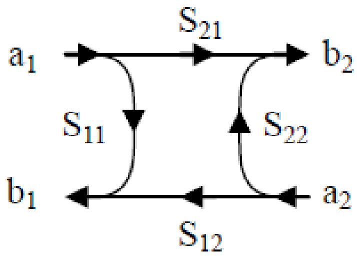
Les matrices reliant les ondes réfléchies ***b_1*** et ***b_2*** aux ondes incidentes ***a_1*** et ***a_2*** s'écrivent comme suit :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

⇨ Les paramètres **S_{ij}** sont appelés les <u>**paramètres S**</u> du quadripôle.

<u>Signification physique des paramètres S</u>

- **$S_{11} = b_1/a_1$** (pour a_2=0) : C'est le coefficient de réflexion du port 1 du quadripôle.
- **$S_{21} = b_2/a_1$** (pour a_2=0) : C'est le coefficient de transmission du port 1 vers le port 2 du quadripôle.
- **$S_{22} = b_2/a_2$** (pour a_1=0) : C'est le coefficient de réflexion du port 2 du quadripôle.
- **$S_{12} = b_1/a_2$** (pour a_1=0) : C'est le coefficient de transmission du port 2 vers le port 1 du quadripôle.
  - ⇨ Les résultats précédents peuvent être représentés par le graphe de transfert suivant



3. *Cas du multipôle*

On peut généraliser le résultat précédent au cas du multipôle. Par conséquent :

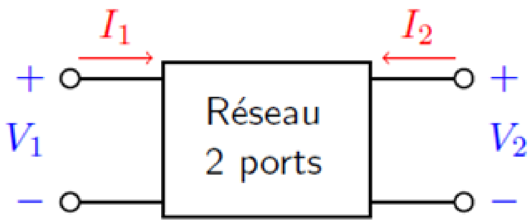
- **$S_{ii} = b_i/a_i$** (pour $a_{i\neq j}$ = 0) : C'est le coefficient de réflexion du port **i** lorsqu'aucune onde ne pénètre par les autres ports,
- **$S_{ij} = b_i/a_j$** (pour $a_{i\neq j}$ = 0) : C'est le coefficient de transmission du port ***j*** vers le port ***i*** lorsque l'onde pénètre uniquement par le port **j**.
  - ⇨ La répartition de puissance se fait alors comme suit :
- **$|S_{ii}|^2 = P_i^-/P_i^+$** (pour $a_{i\neq j}$=0) : C'est le coefficient de réflexion en puissance du port ***i*** lorsqu'aucune onde ne pénètre par les autres ports.
- **$|S_{ij}|^2 = P_i^-/P_j^+$** (pour $a_{i\neq j}$=0) : C'est le coefficient de transmission en puissance du port **j** vers le port **i** lorsque l'onde pénètre uniquement par le port **j**.

VI. Matrice ABCD

Nous allons présenter dans cette session les matrices de chaine en tension/courant appelées couramment matrices ABCD.

1. Définition

Sur le quadripôle de la figure suivante ont été tracés les tensions et courants sur les 2 accès.



On définit la matrice de chaine ABCD qui permet de relier les entrées aux sorties comme suit :

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 + BI_2 \\ I_1 = CV_2 + DI_2 \end{cases}$$

En encore :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

On calcule les éléments A, B, C et D de la matrice de l'une de deux méthodes

<u>Méthode 1 :</u>

$$A = \frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_2=0} \qquad B = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{V_2=0}$$

$$C = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{I_2=0} \qquad D = \frac{I_1}{I_2}\Big|_{V_2=0}$$

⇨ On applique $V_2 = 0$ ou $I_2 = 0$.

<u>Méthode 2:</u>

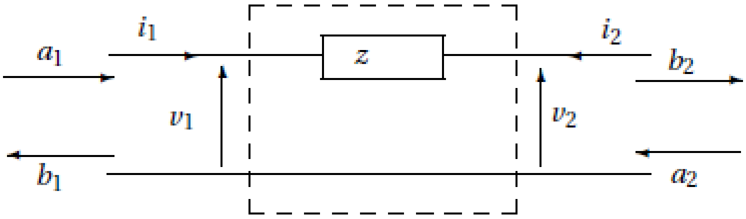
$$A = V_1\Big|_{V_2=1,\, I_2=0} \qquad B = V_1\Big|_{V_2=0,\, I_2=1}$$

$$C = I_1\Big|_{V_2=1,\, I_2=0} \qquad D = I_1\Big|_{V_2=0,\, I_2=1}$$

On applique la source appropriée, avec des court-circuit ou circuits ouverts.

***Exemple 1**: Impédance série*

Considérons une impédance *z* en série dans une ligne.



Les lois de Kirchoff et d'Ohm, donnent :

$$\begin{cases} i_1 = -i_2 = i \\ \quad et \\ v_1 - z.i = v_2 \end{cases}$$

En utilisant les définitions des ondes incidentes et réfléchies de on montre facilement que :

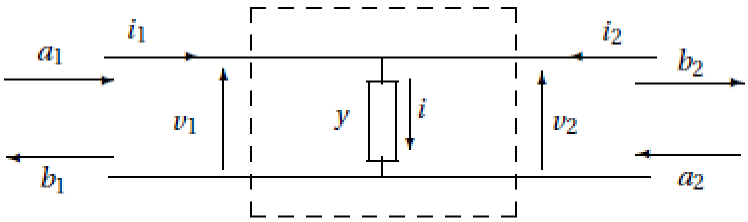
$$b_1 = \frac{z}{z+2}a_1 + \frac{2}{z+2}a_2$$
$$b_2 = \frac{2}{z+2}a_1 + \frac{z}{z+2}a_2$$

et donc la matrice [*S*] d'une impédance série s'écrit

$$S = \begin{bmatrix} \frac{z}{z+2} & \frac{2}{z+2} \\ \frac{2}{z+2} & \frac{z}{z+2} \end{bmatrix}$$

***Exemple 2**: Admittance parallèle*

Considérons une impédance *z* en série dans une ligne.



Les lois de Kirchoff et d'Ohm, donnent :

$$i_1 + i_2 = i$$
$$\text{Et} \qquad v_1 = v_2 = \frac{i}{y}$$

En utilisant les définitions des ondes incidentes et réfléchies de on montre facilement que :

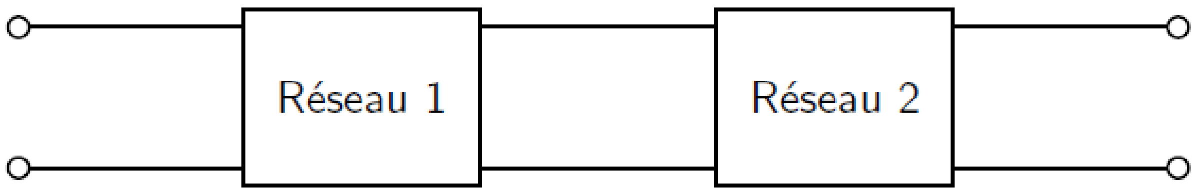
$$b_1 = -\frac{y}{y+2}a_1 + \frac{2}{y+2}a_2$$
$$b_2 = \frac{2}{y+2}a_1 - \frac{y}{y+2}a_2$$

et donc la matrice $[S]$ d'une impédance parallèle s'écrit :

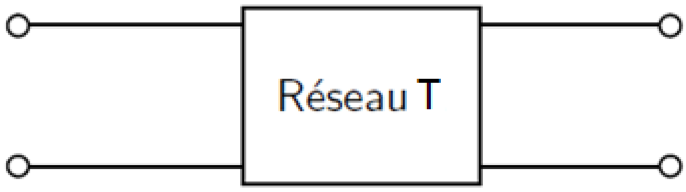
$$S = \begin{bmatrix} -\dfrac{y}{y+2} & \dfrac{2}{y+2} \\ \dfrac{2}{y+2} & -\dfrac{y}{y+2} \end{bmatrix}$$

2. Mise en cascade

La matrice ABCD permet de calculer la matrice d'un circuit en cascade.



Equivalent à :

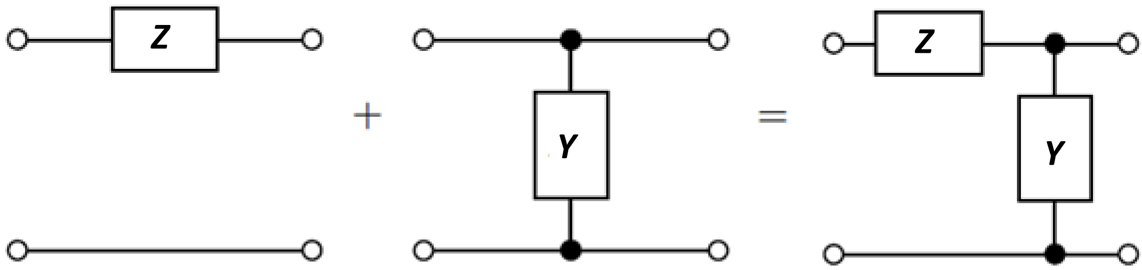


Il faut multiplier les matrices :

$$[ABCD]_T = [ABCD]_1 \times [ABCD]_2$$

Avec les matrices ABCD, on peut construire des réseaux complexes avec seulement quelques éléments de base.

<u>Exemple :</u>



$$\begin{bmatrix} \dfrac{z}{z+2} & \dfrac{2}{z+2} \\ \dfrac{2}{z+2} & \dfrac{z}{z+2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\dfrac{y}{y+2} & \dfrac{2}{y+2} \\ \dfrac{2}{y+2} & -\dfrac{y}{y+2} \end{bmatrix} = \left[\qquad \right]$$

III. Propriétés de la matrice S

On considère un dispositif multi accès (multipôle).

1. Réciprocité des multipoles

Un multipôle réciproque est un multipôle qui respecte la loi de réciprocité :

$$S_{ij} = S_{ji}$$

c'est-à-dire que la matrice S est symétrique, ce qui peut s'exprimer par :

$$[S]^t = [S]$$

où $[S]^t$ est la matrice transposée de S.

- En pratique, les multipôles linéaires et passifs sont en général réciproques. Ainsi les multipôles constitués de lignes et de composants passifs (résistances, capacités, inductances) sont réciproques. Au contraire, les dispositifs usants de matériaux magnétiques tels que les ferrites (circulateurs, isolateurs…) et les montages comprenant des dispositifs actifs (diodes, transistors, …) même linéarisés autour de leur point de polarisation, ne sont pas réciproques.

2. Multipoles passif et sans pertes

Si un multipôle est passif (sans apport extérieur d'énergie) et sans pertes, on peut alors écrire la loi de conservation de l'énergie comme :

$$\boxed{\sum_{tous\ les\ ports} Puissance_{entrante} = \sum_{tous\ les\ ports} Puissance_{sortante}}$$

Ce qui peut être exprimé par la relation suivante :

$$[S]^{t*}[S] = I$$

Les multipôles passifs et sans perte possèdent donc une matrice S dont l'inverse est sa matrice conjuguées transposée.

<u>Remarque :</u> Si le multipôle est de plus réciproque, $[S]^t = [S]$ alors :

$$[S]^*[S] = I$$

Cela revient à écrire :

$$\begin{cases} |S_{11}^2| + |S_{21}^2| + \cdots .. + |S_{n1}^2| = 1 \\ et \\ |S_{11}^2| + |S_{21}^2| + \cdots .. + |S_{n1}^2| = 1 \\ . \\ . \\ . \\ |S_{11}^2| + |S_{21}^2| + \cdots .. + |S_{n1}^2| = 1 \end{cases}$$

<u>Exemple :</u>

On considère un quadripôle Q représenté par sa matrice S ci-contre :

$$[S] = \begin{bmatrix} 0.2e^{j\,0°} & 0.9e^{j\,90°} \\ 0.9e^{j\,90°} & 0.1e^{j\,90°} \end{bmatrix}$$

Montrons que ce quadripôle est :
- Réciproque.
- Sans pertes.

- **Réciprocité** ➔ $[S] = [S]^t$

$$S^T = \begin{bmatrix} 0.2e^{j\,0°} & 0.9e^{j\,90°} \\ 0.9e^{j\,90°} & 0.1e^{j\,90°} \end{bmatrix} = S$$

⇨ Ce quadripôle est **réciproque**.

- **Sans pertes** ➔ $[S]^{t*}[S] = I$ (or le quadripôle est réciproque : $S = S^T$ donc : $[S]^*[S] = I$

  Cela revient à écrire :

$$\begin{cases} |S_{11}^2| + |S_{21}^2| = 1 \\ |S_{12}^2| + |S_{22}^2| = 1 \end{cases}$$

  et

  Dans notre cas, on a : $|S_{11}^2| + |S_{21}^2| = 0.2^2 + 0.9^2 = 0.85 \neq 1$

⇨ Ce quadripôle est **avec pertes**.

IV. Matrice S de quelques dispositifs hyperfréquences

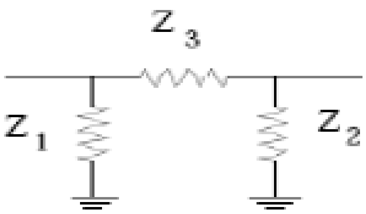
1. Atténuateur

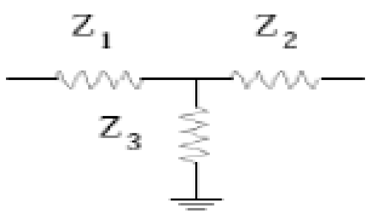
L'atténuateur idéal est un quadripôle réciproque, dissipatif parfaitement adapté. En conséquence, sa matrice S s'écrit :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{12} & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } |S_{12}| < 1$$

Lorsqu'un tel quadripôle est inséré entre deux charges égales à la résistance de normalisation, l'atténuation introduite vaut : A = 20 log|S21| Db.

Les structures les plus courantes sont les structures en pi et en té.

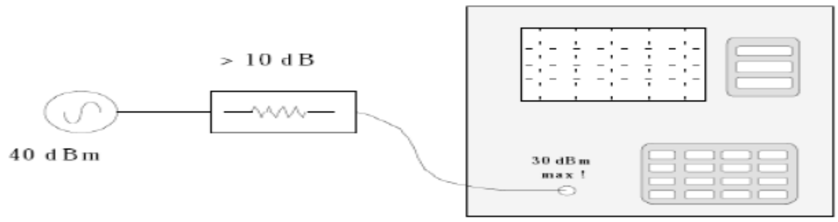




Les valeurs des résistances sont fonction de l'atténuation souhaitée et des impédances de fermeture. Voici deux applications possibles d'un atténuateur.

Application: Protection *d'un appareil de mesure*

Un atténuateur peut être utilisé pour protéger un dispositif contre les trop fortes puissances. Il est courant d'introduire une telle protection dans une chaîne de mesure où les récepteurs sont toujours limités en puissance d'entrée (analyseur de spectre, analyseur de réseau vectoriel).

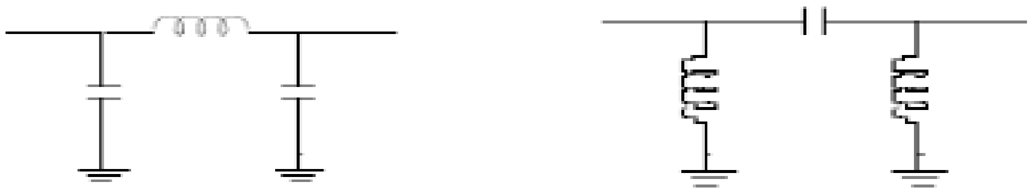


2. Déphaseur

Le déphaseur idéal est un quadripôle réciproque non dissipatif, parfaitement adapté. Sa matrice S est donc de la forme :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\varphi} \\ e^{j\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

Lorsqu'un tel déphaseur est inséré entre deux charges égales à la résistance de normalisation, le déphasage introduit vaut : Arg (S_{21})= f. Les structures en pi, passe haut ou passe bas permettent d'apporter un déphasage positif ou négatif.



Application: On souhaite réaliser un déphaseur 90° symétrique, sans pertes, adapté fonctionnant à la fréquence de 1 GHz à partir d'une topologie en pi. On prendra les conventions de la figure suivante : La matrice S du déphaseur se met sous la forme suivante :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{j90°} \\ e^{j90°} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}$$

Un déphaseur 90° peut être utilisé dans un modulateur hyperfréquences pour générer deux signaux en quadrature.

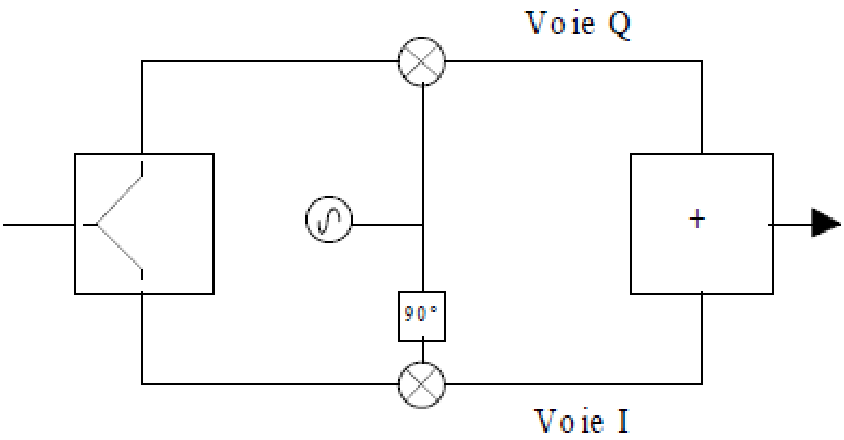


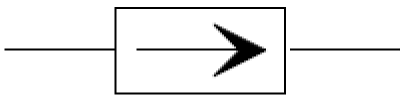
Figure 2-8 : Modulateur QAM

Ce type de modulateur se retrouve par exemple dans les émetteurs de radiocommunications spatiales ou terrestres. On le retrouve également dans la partie démodulation des récepteurs correspondants.

3. *Isolateur*

L'isolateur idéal est un quadripôle dissipatif parfaitement adapté. Si on prend la convention d'un transfert d'énergie de l'accès 1 vers l'accès 2, sa matrice S s'écrit :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

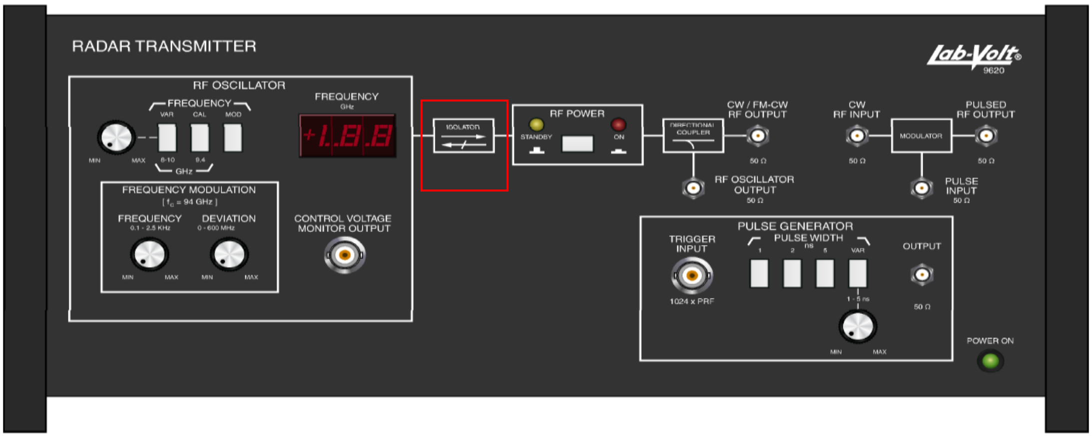


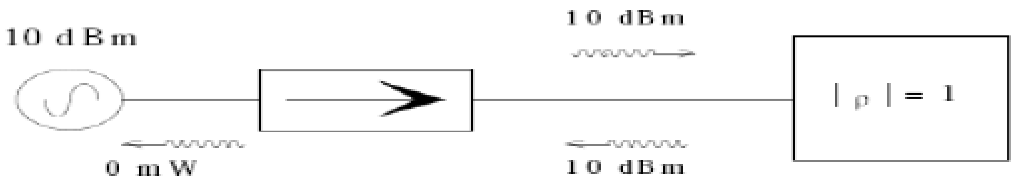
Symbole d'un isolateur

Par définition, un tel dispositif est non réciproque puisqu'il transmet parfaitement le signal dans un sens, alors qu'il l'atténue infiniment dans l'autre sens.

Application:

La principale application d'un isolateur consiste à protéger une source d'un circuit de charge éventuellement désadapté.



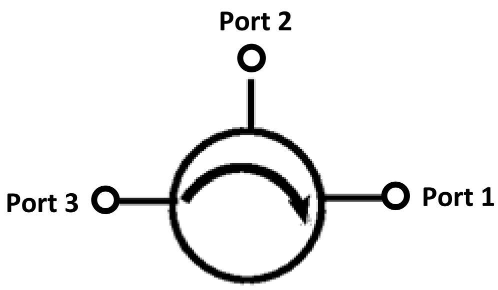


4. Circulateur

Un circulateur idéal est un hexapôle non dissipatif parfaitement adapté. Sa matrice S est de la forme suivante :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La distribution des signaux est conforme à la figure suivante :

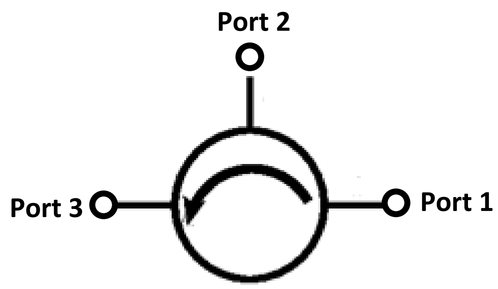


Circulateur horaire (CW circulator)

Un circulateur idéal est un hexapôle non dissipatif parfaitement adapté. Sa matrice S est de la forme suivante :

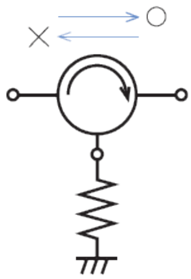
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La distribution des signaux est conforme à la figure suivante :



Circulateur anti-horaire (CCW circulator)

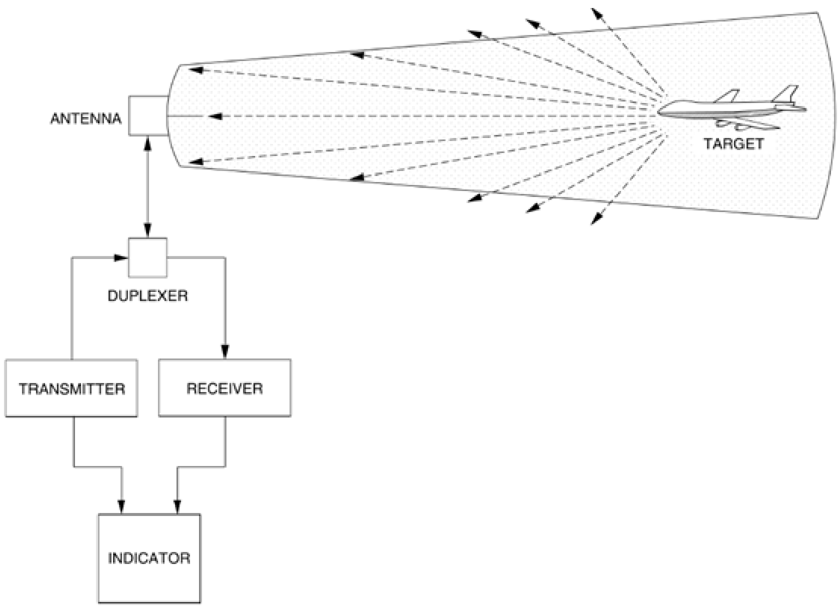
Très souvent, les isolateurs hybrides sont constitués de circulateurs dont l'un des accès est chargé par 50 ohms.



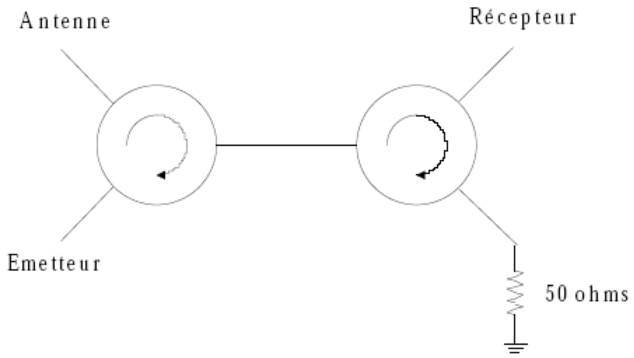
Isolateur à base d'un circulateur avec une charge adapatée

<u>Application:</u> Duplexage

Deux circulateurs peuvent être utilisés pour partager une antenne entre un émetteur et un récepteur. Ce dispositif est appeleé aussi duplexeur (duplexer)



Structure simplifié d'un système RADAR monostatique



Duplexeur à base de deux circulateurs

L'isolation entre émetteur et récepteur peut être relativement importante (30 à 40 dB).

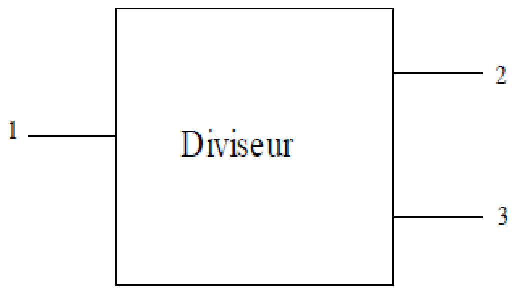
5. Diviseur/Combineur de puissance

Les diviseurs et combineurs de puissance sont des dispositifs possédant au minimum trois accès. Lorsqu'ils sont utilisés en diviseurs, il y a un accès d'entrée et deux ou plusieurs accès de sortie. Les accès de sortie peuvent être isolés ou non. Lorsqu'ils sont utilisés en combineurs, il y a deux ou plusieurs accès d'entrée et un accès de sortie.

a. Diviseur de puissance

Pour le cas particulier d'un dispositif à 3 accès, la matrice S d'un diviseur de puissance idéal dont les accès sont isolés est la suivante (s'ils ne le sont pas, les paramètres S32 et S23 sont non nuls):

$$S = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & 0 & 0 \\ S_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

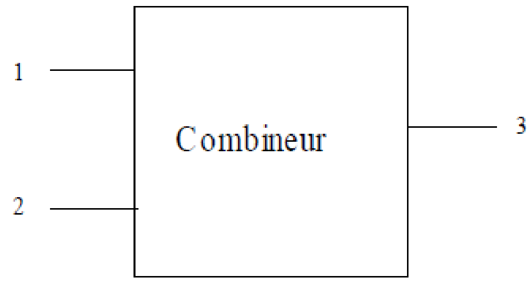


Diviseur de puissance

b. Combinateur de puissance

Pour un combineur de puissance à 3 ports, la matrice S s'écrit :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{31} \\ 0 & 0 & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{bmatrix}$$



Combineur de puissance