Chapitre 3

Variables aléatoires

Dans plusieurs expériences aléatoires on ne s'interesse pas directement au résultat de l'expérience mais a une fonction de ce résultat, on introduit dans la partie qui suit quelques exemples qui illustre la définition de variable aléatoire

3.1 Définitions générales

3.1.1 exemples introductifs

• On considére n pièces éléctriques produites par une machine, on attribue la valeur 1 si la pièce est défectueuse et 0 si non, l'univers de cette éxpérience est $\Omega = \{0,1\}^n$, l'événement intéressant pour le fabriquent est de savoir la proportion p de pièces défectueuses produite par la machine, alors on introduit une fonction X de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ aui a tout $w = (w_1, cdots, w_n)$ de Ω on associe

$$X(w) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{n} = p$$

une telle fonction s'appelle variable aléatoire.

• On lance un dé. On s'intéresse au résultat du lancer, on note X le numéro de la face obtenue. L'univers associé à cette expérience aléatoire est

$$\Omega = \{w_i : \text{" obetenir la face numéro i"}, \ \forall\, i \in \{1, \cdots, 6\}\}$$

muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme P (i.e. $P(\{w_i\}) = \frac{1}{6}\ \forall w_i \in \Omega$). Les événements élémentaires w_i, $i \in \{1, \cdots, 6\}$ se traduisent par les événements

équiprobables :

$$"X = 1", \ "X = 2", \ "X = 3", \ "X = 4", \ "X = 5", \ "X = 6",$$

tels que :

$$P("X = 1") = P("X = 2") = P("X = 3") = P("X = 4") = P("X = 5") = P("X = 6") = \frac{1}{6}.$$

Le nombre aléatoire X dépond du résultat de l'expérience aléatoire, on peut le voir comme une application de Ω à valeurs dans $\{1, \cdots, 6\}$. définie par

$$X(w_i) = i, \ \forall w_i \in \Omega.$$

• L'exemple de Montfort (1996) : on jette une pièce de monnaie n fois, l'espace $\Omega = \{P, F\}^n$ est muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme P (i.e. $P(\{w\}) = \frac{1}{2^n}\ \forall w \in \Omega$).
On s'intéresse au nombre de piles sortis au cours de n jets, on considère l'application

$$\begin{array}{rcll} X: & \Omega & \longrightarrow & \{0, 1, \cdots, n\} \\ & w & \longmapsto & X(w) = \text{ nombre de pile dans } \Omega \end{array}$$

• Supposons qu'on observe la durée de vie d'une ampoule éléctrique qu'on note X et on s'intéresse à la répartition de X dans $\mathbb{R}_+$. On voudrait par exemple estimer la probabilité

$$P(\{\omega \in \Omega; 2ans \leq X(\omega) \leq 10ans\}),$$

dans un cadre plus général pour tout réel positif x, $P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\})$, ne sera définie que si l'ensemble $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{P}(\Omega)$. Ce qui motive la définition suivante :

Définition 3.1.1 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espace mesurable. Une application $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{X}$ est une variable aléatoire si elle est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, c.àd. $\forall\, B \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*
Lorsque $X(\Omega) \in \mathbb{R}$, alors X est dite variable aléatoire réelle. Lorsque l'espace $\mathcal{X}$ est fini ou dénombrable, la tribu $\mathcal{B}$ est généralement, égale à $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ et X est dite variable aléatoire discrète.

Notations : généralement les variables aléatoires sont toujours désignées par des lettres majuscules X, Y, $Z\cdots$

Etant donné un Borélien B, l'image réciproque de B par X :

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\},$$

qui sera tout simplement noté par $\{X \in B\}$, avec un léger abus de notation, on écrit

$$P(X \in B) = P(\{X \in B\}) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)).$$

Par exemple : $P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\})$.

Si E est fini ou dénombrable, pour tout $x \in E$ on a $X^{-1}(\{x\}) = (X = x)$.

Par exemple : $P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}) = \sum_{k \leq x} P(X = k)$.

Définition 3.1.2 *Soit X une variable aléatoire. La fonction*

$$F_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto F_X(x) = P(X \leq x)$$

est appelée fonction de répartition de X.

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction constante $X : \omega \in \Omega \longmapsto a$. X est une variable aléaroire dont la fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x) = I_{[a,+\infty[}(x)$.

Proposition 3.1.1 *Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Alors :*

(i) F_X est à valeurs dans $[0,1]$

(ii) F_X est croissante

(iii) F_X est continue à droite

(iv) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

La fonction de répartition admet une limite à gauche en x, qu'on note $F_X(x^-) = \lim_{y \to x, y < x} F_X(y)$.

Le 'saut' de F_X en x est notée $\triangle F_X(x) = F_X(x^+) - F_X(x^-) = F_X(x) - F_X(x^-)$.

F_X en continue en tout x si et seulement si $P(X = x) = \triangle F_X(x) = 0$, on parle alors de loi diffuse ou bien de variable aléatoire continu (qu'on verra plus tard).

Proposition 3.1.2 *Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Soient x et y deux réels $x \leq y$, on a :*

$P(X > x) = 1 - F_X(x)$

$P(X < x) = F_X(x^-)$

$P(x < X \leq y) = P(X \in]x, y]) = F_X(y) - F_X(x)$

$P(x < X < y) = P(X \in]x, y[) = F_X(y^-) - F_X(x)$

3.2 Loi d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et soit $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{X}$ une variable aléatoire. On définit une nouvelle mesure de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ par :

$$P_X(B) = P(X \in B),$$

pour tout $B \in \mathcal{B}$. En effet :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints. On a $P_X(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \in A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(X \in A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_X(A_n)$, alors P_X est σ-additive.

Définition 3.2.1 *La probabilité P_X est appelée loi de la variable aléatoire réelle X, qu'on note $\mathcal{L}(X)$ ou bien tout simplement loi de X.*

3.3 Variables aléatoires discrètes

Définition 3.3.1 *On dit qu'une loi μ est discrète s'il existe un ensemble $D \in \mathbb{R}$ fini ou dénombrable tel que*

$$\mu(D) = 1.$$

Une variable aléatoire X définie sur un espace de probabilité est discrète si sa loi P_X est discrète.

Soit D un ensemble de $\mathbb{R}$ fini ou dénombrable, on a

$$P_X(D) = P(X \in D) = P(\bigcup_{k \in D} (X = k)) = \sum_{k \in D} P(X = k) = 1.$$

On pose

$$p_k = P(X = k), \ \forall\, k \in D.$$

La loi de la variable aléatoire discrète X s'identifie à la famille de nombre réels positifs $(p_k)_{k \in D}$ vérifiant $\sum_{k \in D} p_k = 1$. La connaissance de D et des p_k permet la reconstitution de la loi de X. On dit aussi que $(p_k)_{k \in D}$ est la densité discrète de X.

Si X est à valeurs discrètes dans l'ensemble $\{x_1, \cdots, x_n\}$, la loi de X est entièrement caractérisée par la famille $(P(X = x_i))_{1 \leq i \leq n}$. Cette famille vérifie

(a) pour tout $i > 1$, $P(X = x_i) \in [0,1]$,

(b) $\sum_i P(X = x_i) = 1$.

Donner la loi de la variable aléatoire X revient à donner les probabilités des évènements élémentaires qu'elle induit, et le plus souvent cette loi est représentée dans un tableau.

Exemple :

i) On lance une pièce deux fois. On appelle X le nombre de piles obtenus. l'univers $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ muni de la probabilité uniforme, et X est définie par $X(PP) = 2$, $X(PF) = 1$, $X(FP) = 1$, $X(FF) = 0$. La loi de X est :

$$P(X = k) = \frac{1}{4}C_2^k, \forall\, k \in \{0,1,2\}.$$

ii) Si X est le résultat d'un lancer de dé, alors $\forall B \in \mathcal{B}$, $P_X(B) = \frac{card(B\cap\{1,2,3,4,5,6\})}{6}$

iii) On lance deux dés distincts, et on s'intéresse à la somme de deux faces obtenues

$$\begin{aligned} X:\ \Omega &\longrightarrow \{2,\cdots,12\} \\ (w_1, w_2) &\longmapsto X(w_1, w_2) = w_1 + w_2 \end{aligned}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Théorème 3.3.1 *Soit D un ensemble fini ou dénombrable, $(p_k)_{k\in D}$ une famille de réels positifs vérifiant*

$$\sum_{k\in D} p_k = 1.$$

Alors on peut construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire discrète X sur cet espace vérifiant :

$$\forall k \in D,\ P(X = k) = p_k.$$

Théorème 3.3.2 *La fonction de répartition est une caractérisation de la loi : si X et Y ont la même fonction de répartition alors $P_X = P_Y$. Autrement dit, si X et Y vérifient $P(X = x) = P(Y = x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, alors $P(X \in B) = P(Y \in B)$ pour toute partie $B \in \mathcal{B}$.*

Théorème 3.3.3 *Soit X une variable aléatoire discrète de loi P_X définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$ mesurable. Alors la fonction $Y = f(X)$ définie par :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y = f(X(\omega)),$$

est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exemple : On considère $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, de loi $P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = 1/3$.

On pose $Y = X^2$, Y est une variable aléatoire à valeurs dans $Y(\Omega) = \{0, 1\}$, de loi :

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 1/3 \text{ et } P(Y = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = 2/3$$

Remarque 3.3.1 *La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier. La connaissance de F_X détermine la densité f et réciproquement :*

$$F_X(x) = \sum_i f(x_i) I_{[x_i,+\infty[}(x),$$

avec $(x_i)_i$ sont les points où f est non nulle, ce sont les points où F_X fait un saut et $f(x_i)$ est la taille du saut que fait F_X en x_i.

Exercice1 : Soit X une variable aléatoire discrète de densité

$$f(x) = \frac{e^{-1}}{x!},\ x = 0, 1, 2, \cdots$$

(a) Déterminer $P(X = 2)$

(b) calculer $P(X < 2)$

(c) déterminer la valeur de la constante c pour que $\frac{c}{x!}$ soit une densité de probabilité

(d) à quelle condition sur α, $p_n = \alpha\frac{\lambda^n}{n!}$ sont les coefficients d'une loi de probabilité, pour $\lambda > 0$

Exercice 2 : Dans une urne, on place n boules portant de numéros 2 à 2 distincts. Un premier joueur effectue des tirages d'une boule sans remise jusqu'a l'obtention d'une boule portant le plus grand numéro. On note X_1 le nombre de tirage effectués par le joueur et X_2 le nombre de tirage effectués par le second joueur. Déterminer la loi de X_1 et la loi de X_2, conditionnée par X_1

3.4 Variables aléatoires continues

Rappel

Théorème 3.4.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. L'application*

$$\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$A \longmapsto \nu(A) = \int_A f d\mu$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On dit qu'elle est de densité f par rapport à μ.
De plus, pour toute application mesurable $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ on a :

$$\int_A g d\nu = \int_A g f d\mu.$$

On note $d\nu = f d\mu$ (ou bien $\frac{d\nu}{d\mu} = f$) pour dire que ν est à densité f par rapport à μ.
Lorsque la densité f existe elle est unique.
Soit X une variable aléatoire de loi P_X. On dit que P_X est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue s'il existe une fonction f mesurable positive d'intégrale 1 ($\int_{\mathbb{R}} f(w) d\lambda(w) = 1$) qui soit une densité de P_X par rapport à la mesure de Lebesgue $dP_X = f d\lambda$, ainsi pour tout borélien A

$$P_X(A) = \int_A dP_X = \int_A f(w) d\lambda(w).$$

Définition 3.4.1 *Une variable aléatoire X est dite à densité f (ou bien absolument continue) si sa loi P_X est à densité f par rapport à la mesure de Lebesgue , et f sera dite densité de X ou bien densité de probabilité.*

Définition 3.4.2 *Soit X une variable aléatoire continue de densité f, on appelle fonction de répartition se X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F_X(x) = \int_{]-\infty, x]} f(t) d\lambda(t).$$

En faisannt tendre x vers l'infini on obtient $\int_{\mathbb{R}} f(w) d\lambda(w) = 1$.

Théorème 3.4.2 *Soit f une fonction positive continue par morceaux sur un intervalle $]a, b[$ ($]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$). Alors $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\int_{]a,b[} f(x) d\lambda(x) < +\infty$ et dans ce cas on a :*

$$\boxed{\int_{]a,b[} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x) dx.}$$

Théorème 3.4.3 *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]a, b[$ ($]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$). Alors f integrable sur $]a, b[$ par rapport à la mesure de lebesgue λ si et seulement si $\int_a^b |f(x)| dx$ est convergente, et dans ce cas on a :*

$$\int_{]a,b[} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

D'après les deux théorèmes précédants, la fonction de répartition sera donnée par

$$F_X(x) = \int_{]-\infty, x]} f(t) d\lambda(t) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Lemme 3.4.1 *Soit X une variable aléatoire continue de densité f. Alors*
(i) $P(X = x) = 0$ pour tout réel x.
(ii) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$ pour tous $a < b$.

Comme conséquence de ce lemme, si $D = \{x_1, x_2, \cdots\}$ est un ensemble dénombrable alors $P(X \in D) = \sum_{x \in D} P(X = x) = 0$. Par la suite une variable aléatoire ne peut pas être à la fois discrète et continue.
La fonction de répartition d'une variable continue est continue. La réciproque n'est pas vraie.

Proposition 3.4.1 *Soit F une fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ p.s., alors F est la fonction de répartition d'une variable continue de densité $f(x) = F'(x)$ si F est dérivable en x et $f(x) = 0$ sinon.*

Remarque 3.4.1 *La valeur $f(x) = 0$ est attribuée à f là où F' n'est pas définie. De manière générale, changer la valeur de la densité en un nombre fini de points ne change rien à la répartition de X.*

important

Propriétés *Soit X une variable aléatoire continue de densité f, alors :*
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ on a $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t) dt$.
- $\forall\, a \in \mathbb{R}$ on a $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F_X(a) = \int_a^{+infity} f(t) dt$.
- $\forall\, a \in \mathbb{R}$ on a $P(X \leq a) = P(X < a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$.

Remarque 3.4.2 *Si deux variables aléatoires X et Y ont la même fonction de répartition, donc il ont la même loi (même densité f) c.àd. f est la densité de la loi de X et la densité de la loi de Y.*

Lois usuelles (discrètes et continues) Voir tableau annexe 1

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

(a) Donner la fonction de répartition de X

(b) Montrer que $Y = -\ln(1-X)$ est continue et déterminer sa densité de probabilité.

Exercice 2 : Soit X une variable continue de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$.

(a) Montrer que X est symetrique ($P(X \leq x) = P(X \geq -x)$) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Exprimer la fonction de répartition de X^2 en fonction de celle de X.

(c) En déduite que X^2 est une variable continue, et déterminer sa densité.

(d) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} x^{-1/2}\exp(-x)dx.$$

3.4.1 Espérances des variables aléatoires réelles

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et un entier $p \geq 1$. On définit l'espace

$$L^p(\Omega,\mathcal{A},P) = \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ mesurable}; \int_\Omega |f|^p dP < +\infty\}.$$

Une fonction f est intégrable si et seulement $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire réelle intégrable, on définit l'espérance de X par :

$$E(X) = \int_\Omega XdP.$$

Si X est une variable aléatoire discrète, alors :

$$X = \sum_{k\in X(\Omega)} kI_{\{X=k\}} \text{ et } |X| = \sum_{k\in X(\Omega)} |k|I_{\{X=k\}}$$

X est intégrable si et seulement si $E(|X|) = \int_\Omega |X|dP = \sum_{k\in X(\Omega)} |k|P(X=k) < +\infty.$

Dans ce cas

$$E(X) = \int_\Omega XdP = \sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k).$$

Si X est une variable aléatoire continue (X est à densité f) on a :

$$E(X) = \int_\Omega XdP = \int_{\mathbb{R}} xP_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx.$$

Propriétés de l'espérance : Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$, X, Y deux v.a. intégrable.

- *Linéarité :* la v.a. $\alpha X + \beta Y$ est intégrable et :

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

- *Monotonie :* si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Proposition 3.4.2 Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi P_X. Pour toute application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (mesurable) on a :

$\varphi(X)$ est $P-$ intégrable si et seulement si φ est $P_X -$ intégrable

dans ce cas

$$\int_\Omega \varphi(X)dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi dP_X \text{ (formule de transfert)} \tag{3.1}$$

Démonstration 4 Pour démontrer la formule de transfert on prend d'abord $\varphi = I_A$ ($A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$), an a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dP_X = \int_A dP_X = P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = \int_\Omega I_{X^{-1}(A)}dP = \int_\Omega I_{(A)}\circ XdP = \int_\Omega (\varphi\circ X)dP$$

donc (2.1) est vérifiée pour $\varphi = I_A$ ($A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$), aussi elle est vérifiée lorsque φ est une variable aléatoire étagée sous la forme $\varphi = \sum_{i\in I}\alpha_i I_{(A_i)}$, telle que $\forall i \in I$ fini , $\alpha_i > 0$ et $A_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Soit φ une application mesurable positive, il existe une suite de fonctions étagées positives $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissantes telles que

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dP_X = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \varphi_n dP_X = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n \circ XdP = \int_\Omega \varphi\circ XdP.$$

Soit φ une application mesurable, alors elle s'écrit :

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$$

et dans ce cas

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi dP_X &= \int_{\mathbb{R}} \varphi^+ dP_X - \int_E \varphi^- dP_X \\ &= \int_\Omega \varphi^+ \circ X dP - \int_\Omega \varphi^- \circ X dP \\ &= \int_\Omega \varphi \circ X dP.\end{aligned}$$

Remarque 3.4.3

• *Si X une variable aléatoire discrète, alors pour toute application $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable , on a :*
$\varphi(X)$ est intégrable si et seulement si $\sum_{k \in X(\Omega)} |\varphi(k)| P(X=k) < \infty$ et dans ce cas :

$$E[\varphi(X)] = \sum_{k \in X(\Omega)} \varphi(k) P(X=k).$$

• *Si X une variable aléatoire continue, pour toute application $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive (ou bien mesurable bornée) on a :*

$$E[\varphi(X)] = \int_\Omega \varphi(X) dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx.$$

Exemple : Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramétre $\lambda > 0$. On considère la variable aléatoire $X = e^Y$. Calculer $E(X)$. La variable aléatoire $\varphi(X)$ est $P-$intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| f(x) dx < \infty$
et dans ce cas

$$E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx < \infty$$

• *Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a :*

$$P(A) = \int_A dP = \int_\Omega I_A dP = E(I_A),$$

et Pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ on a :

$$P(X \in B) = P_X(B) = \int_B dP_X = \int_E I_B dP_X = \int_\Omega I_B \circ X dP = E(I_B(X)).$$

Souvent le calcul de la loi d'une variable aléatoire se fait à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 3.4.3 *Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{B})$. Pour qu'une mesure de probabilité μ soit la loi de X il faut et il suffit que, pour toute application φ de E dans $\mathbb{R}$ mesurable positive (ou bornée), on ait :*

$$E[\varphi(X)] = \int_E \varphi(x) \mu(dx)$$

Exercice : Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, quelle est la loi de $Y = X^2$.

3.4.2 Moments d'ordre n

Généralité :
Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi P_X sur $(E, \mathcal{B})$. $X \in L^1$ est dite centrée si $E(X) = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $X^n \in L^1$ ($X \in L^n$) on définit le moment d'ordre n :

$$E(X^n) = \int_E x^n P_X(dx).$$

On pose $E(X) = m$, on définit le moment centré d'ordre n par :

$$E((X - E(X))^n) = \int_E (x-m)^n P_X(dx).$$

Si $X \in L^2$,alors le moment centré d'ordre 2 de X est appelé variance de X :

$$Var(X) = E((X - E(X))^2).$$

L'ecart type est donné par :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

On appelle corrélation de X et Y le nombre $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.
Si $E(X) = 0$ et $Var(X) = 1$, alors la variable aléatoire X est dite centrée réduite.
Une variable aléatoire X a un moment d'ordre 2 fini si son espérance mathématique et sa variance existent et sont finies et on a

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Soient X, $Y \in L^2$, on définit la covariance de X et Y par :

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X)(Y - E(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

***Exercice :** Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Y = X^2$, Donner la fonction de répartition, la densité, l'espÃ©rance et la variance de Y*

Proposition 3.4.4

(a) Pour tous variables aléatoires X, $Y \in L^2$, on a

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)} \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

en prenant $Y = 1$

$$|E(X)| \leq \sqrt{E(X^2)}$$

De plus

$$|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)} = \sigma(X)\sigma(Y)$$

(b) Inégalité de Hölder : Pour tout $X \in L^p$ et $Y \in L^q$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$|E(XY)| \leq (E(|X|^p))^{\frac{1}{p}}(E(|Y|^q))^{\frac{1}{q}}$$

(c) Inégalité de Minkowski : Pour tout X, $Y \in L^p$, on a :

$$(E(|X+Y|^p))^{\frac{1}{p}} \leq (E(|X|^p))^{\frac{1}{p}} + (E(|Y|^p))^{\frac{1}{p}}$$

(d) Inégalité de Markov :
Soit X in L^1, alors pour tout $a > 0$:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a}E(|X|)$$

(e) Inégalité de Bienaymé-Chebichev :
Soit X in L^2, alors pour tout $a > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2} = \frac{\sigma^2(X)}{a^2}$$

(f) Inégalité de Jensen : Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe et positive alors, pour tout $X \in L^1$, on a :

$$\varphi[E(X)] \leq E[\varphi(X)]$$

***Proposition 3.4.5** Soient X et Y deux variables aléatoires de L^2 et $\alpha > 0$, on a :*

(a) $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$

(b) $Var(X + \alpha) = Var(X)$

(c) $Var(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire constante presque sûrement ($E(X) = X$ p.s.)

(d) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + Cov(X,Y)$.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on cherche des fonctions qui permettent de caractériser la loi de X et qui permettent de calculer de façon aisée les moments de X s'ils existent, comme c'est le cas pour les fonctions caractéristiques et les Fonctions génératrices

3.4.3 Fonctions génératrices

Cette fonction est définie uniquement pour les v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit P_X la loi de X.

***Définition 3.4.3** On appelle fonction génératrice la fonction*

$$g_X(s) = E(s^X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} s^k P(X = k).$$

***Remarque 3.4.4** (a) g_X est définie pour tout réel s tel que $E(s^X) < \infty$*

(b) la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} s^k P(X = k)$ est absolument convergente dans $]-1,1[$.

(c) g_X admet des dérivées de tout ordre sur $]-1,1[$

La connaissance de g_X permet de calculer les moments de X et de déterminer la loi de X,

***Proposition 3.4.6** (a) $g_X^{(k)}(0) = k!P(X = k)$.*

(b) Si g_X est deux fois dérivable à gauche de 1, alors

$$E(X) = g_X'(1), \; E(X(X-1)) = g_X''(1)$$

d'où

$$Var(X) = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2.$$

Dans le cas générale, la fonction génératrice g_X admet une dérivée à gaucge en 1 d'ordre k si et seulement si le moment $E(X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1))$ existe et finie, autrement

$$E(X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)) = g_X^k(1)$$

Exemple 1 *: Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, la fonction génératrice de X est :*

$$g_X(s) = (1-p) + sp$$

d'où $g_X(0) = 1-p = P(X=0)$ et $g_X'(0) = p = P(X=1)$.
$Var(X) == g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2 = p - p^2 = p(1-p)$ Les fonctions génératrices permettent le calcul des moments de X et caractérisent la loi de X. En pratique souvent il est difficile de calculer la loi à partir de g_X . C'est pourquoi pour caractériser la loi des variables aléatoires discrètes (à valeurs dans N), on utulise la relation suivante

$$g_X(e^u) = E(e^{uX}$$

Pour les variables aléatoires continues on utulise souvent les fonctions caractéristiques.

3.4.4 Fonctions caractéristiques

On considère X une variables aléatoire définie sur $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.
Définition 3.4.4 *On appelle fonction caractéristique la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :*

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX})$$

Si X est une variable aléatoire discrète á valeurs dans E, on a :

$$\varphi_X(t) = \sum_{x \in E} e^{itx} P(X = x).$$

Si X est une variable aléatoire continue de densité f, on a :

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{its} f(s) ds$$

Remarque 3.4.5
- *Si X est une variable discrète, la somme est finie donc défnie.*
- *Si X est une variable dénombrable,*

$$|\varphi_X(t)| \leq \sum_{x \in E} |e^{itx}| P(X = x) = \sum_{x \in E} P(X = x) 1$$

et donc la série est uniformément convergente.
- *Si X est une variable réelle,*

$$|\varphi_X(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} f(s) ds = 1$$

alors l'intégrale est uniformément convergente. La fonction caracéristique est bornée : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ |\varphi_X(t)| \leq 1$.

Exemples :
- *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p*

$$\varphi_X(t) = pe^{ts} + (1-p)$$

- *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[-a, a]$*

$$\varphi_X(t) = \frac{\sin ta}{ta}$$

- *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, on a :*

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

La connaissance de la fonction caracéristique permet de déterminer la loi de X une variable aléatoire continue et on a le Théorème suivant :

Théorème 3.4.4 *Si φ_X la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est intégrable :*

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_X(t)| dt \leq \infty$$

alors X admet une densité de probabilité f défnie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t) e^{-itx} dt.$$

Ce théorème est liés à la théorie de la transformée de Fourier (fourrier inverse).