Table des matières

Chapitre 1

Espaces mesurables Fonctions mesurables Espaces mesurés

Dans la théorie de probabilités, les événements sont décrit par des sous-ensembles de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles d'une certaines expérience ou phénomène aléatoire (i.e. le résultat de l'expérience est soumis au hasard). La modélisation d'un phénomène aléatoire n'est possible que si les résultats possibles sont connus. certe certain de ces résultats peuvent être non réalisable dans la réalité.

1.1 Espaces mesurables

On commence cette section par rappeler quelques opérations ensemblistes.

1.1.1 Rappels ensemblistes

On considère un ensemble de base Ω non vide.
On rappelle que $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne la famille de toutes les parties (sous-ensembles) de Ω.
Si $card(\Omega) = n$ alors $card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$ (ceci se démontre par récurrence).
Soient A, B et C des sous-ensembles de Ω :
- Union : $A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- Intersection : $A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ et } x \in B\}$
- différence (ensembliste) : $A \backslash B = \{x \in A : \ x \notin B\} = A \cap B^c$
- différence propre : $B \backslash A$ lorsque $A \subset B$;
- différence symétrique : $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$;
- complémentaire : $A^c = \Omega \backslash A = \{x \in \Omega : x \notin A\}$;

- involution : $(A^c)^c = A$;
- lois de Morgan : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ et $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
- commutativité : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$;
- associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

A et B sont dit disjoints si $A \cap B = \emptyset$. - Une suite de parties $(A_n)_n)$ est une partition de Ω si elle sont deux á deux disjoint $(\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset)$ et $\displaystyle\bigcup_n A_n = \Omega$.

1.1.2 Tribus

Définition 1.1.1 *Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est dite tribu si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $\forall\ A \in \mathcal{A} \quad A^c \in \mathcal{A}$ *(stabilité par passage au complémentaire).*
3. *Pour toute suite de parties* $(A_n)_{n \in N}$ *de* $\mathcal{A}$, $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$(\Omega, \mathcal{A})$ est dit espace mesurable.
Tout élément $A \in \mathcal{A}$ est dit partie mesurable. Toute partie mesurable est dite événement.

Exemples 1
1. $\mathcal{P}(\Omega)$ *est une tribu sur* Ω, *dite tribu totale.*
2. $\{\emptyset,\ \Omega\}$ *est une tribu sur* Ω, *dite tribu grossière.*
3. *Si A est une partie propre de* Ω,
   $\mathcal{A} = \{\emptyset,\ A,\ A^c,\ \Omega\}$ *est une tribu sur* Ω.
4. *Si* $\Omega = \{a,\ b,\ c,\ d, \quad \mathcal{A} = \{\emptyset,\ \{a, b\},\ \{c, d\},\ \Omega\}$ *est une tribu sur* Ω.

Propriétés 1 *Comme conséquences immédiates des axiomes de base de la définition :*
- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- *Pour toute suite* $(A_n)_{n \in N}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- *Pour toute suite* $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ *et* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.
- *Pour tout A et* $B \in \mathcal{A}, \quad A \backslash B$ *et* $A \triangle\triangle B \in \mathcal{A}$.

Exercice : Montrer qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.

2. $\forall (A,B) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A},\ (A\subset B) \Rightarrow B\backslash A \in \mathcal{A}$.
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A},\ A\cup B \in \mathcal{A}$.
4. Pour toute suite $(A_n)_{n\in N}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}$.

Sous-tribu Soient $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω et $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{B}$ est une tribu, alors on dit que $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$. **Opération sur les tribus :**
Soient Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T}$ un ensemble non vide de tribus sur Ω $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{\mathcal{B}\in\mathcal{T}} \mathcal{B}$ est une tribu sur Ω.

Démonstration 1 *Il suffit de vérifier les trois axiomes de la définition d'une tribu :*
– $\forall\ \mathcal{B}\in\mathcal{T}\ \ \emptyset\in\mathcal{B}$, donc $\emptyset \in \bigcap\limits_{\mathcal{B}\in\mathcal{T}} \mathcal{B}$·
- Soit $A \in \bigcap\limits_{\mathcal{B}\in\mathcal{T}} \mathcal{B}$, montrons que $A^c \in \bigcap\limits_{\mathcal{B}\in\mathcal{T}} \mathcal{B}$·
Comme $A \in \bigcap\limits_{\mathcal{B}\in\mathcal{T}} \mathcal{B}\ \ \forall\ \mathcal{B}\in\mathcal{T},\ A\in\mathcal{B}$ qui est une tribu, alors $A^c\in\mathcal{B}$. Comme ceci est vrai pour tout $\mathcal{B}$ on a $A^c \in \bigcap\limits_{\mathcal{B}\in\mathcal{T}} \mathcal{B}$·
- Soit $(A_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $\bigcap\limits_{\mathcal{B}\in\mathcal{T}} \mathcal{B}$, montrons que $\bigcup\limits_{n>0} A_n \in \bigcap\limits_{\mathcal{B}\in\mathcal{T}} \mathcal{B}$. ON a $\forall\ \mathcal{B}\in\mathcal{T}$, la famille des A_n appartient à $\mathcal{B}$ qui est une tribu, donc $\bigcup\limits_{n>0} A_n \in \mathcal{B}$. Comme ceci est vrai pour toute tribu $\mathcal{B}$, alors $\bigcup\limits_{n>0} A_n \in \bigcap\limits_{\mathcal{B}\in\mathcal{T}} \mathcal{B}$.

Tribu engendrée par une famille de tribus : Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\in I}$ une famille de tribus sur Ω. La tribu engendrée par la famille des tribus $(\mathcal{A}_n)_{n\in I}$ est la plus petite tribu contenant toutes les $\mathcal{A}_n$ (i.e. c'est l'intersection de toutes les tribus contenant la famille $(\mathcal{A}_n)_{n\in I}$). On la note

$$\sigma(\mathcal{A}_n,\ n\in I)$$

Remarque : L'ensemble des tribus contenant des tribus contenant les $\mathcal{A}_n$ est non vide puisque $\mathcal{P}(\Omega)$ est une telle tribu.
Tribu engendrée par une famille d'ensembles : soit $(A_n)_{n\in I}$ une famille de parties de Ω. Pour tout $n\in I$, la plus petite tribu contenant A_n est la tribu $\mathcal{A}_n = \{\emptyset, \Omega, A_n, A_n^c\}$. Et la tribu engendrée par les ensembles A_n est

$$\sigma(\mathcal{A}_n,\ n\in I$$

et c'est la plus petite tribu contenant toutes les parties A_n. On la note

$$\sigma(A_n,\ n \in I = \sigma(\mathcal{A}_n,\ n \in I = \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathcal{T}} \mathcal{B}.$$

Tribu trace : Soit X une partie de Ω et soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.
La partie $\mathcal{T}_X = \{A \cap X,\ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur X. $\mathcal{T}_X$ est dite tribu trace.
Tribu borélienne
Si Ω est ensemble muni d'une topologie, on appelle tribu borelienne de Ω la tribu engendrée par les ouverts de Ω, on la note $\mathcal{B}_\Omega$.

Proposition 1.1.1 *Si $\Omega = R$, alors la tribu borélienne de R est*

$$\mathcal{B}_R = \sigma(S)$$

avec $S = \{[a, b[,\ -\infty < a < b < +\infty\}\cdot$

Démonstration 2 *Tout ouvert est réunion dénombrable d'éléments de S,comme suit*

$$]a, b[= \cup_{n>0}[a + \frac{1}{n}, b[,$$

donc $\mathcal{B}_R \subseteq \sigma(S)\cdot$ D'autre part $[a, b[= \cap_{n>0}]a - \frac{1}{n}, b[$, d'où $\sigma(S) \subseteq \mathcal{B}_R\cdot$ D'où l'égalité.

Remarque La tribu borelienne de R est engendrée par les ensembles de la forme $]-\infty, a[,\ a \in R,\ ]a, +\infty[\ a \in R$.

Définition 1.1.2 ***Tribu borélienne de*** $\overline{R}$ *est la tribu engendrée par les parties de $\overline{R}$ telles que $A = \{+\infty\}$ ou $A = \{-\infty\}$ ou bien les ouverts de R.*
Les éléments de R (rep $\overline{R}$) sont appelés les boréliens de R (resp de $\overline{R}$).

Proposition 1.1.2 *Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y. L'image réciproque par f d'une tribu sur Y est une tribu sur X.*
De plus si $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est un ensemble de parties de Y, est une tribu sur Y. Alors

$$f^{-1}(\mathcal{T}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\cdot$$

Démonstration 3 *Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Y, posons $\mathcal{R} = f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{T}\}\cdot$*
$\mathcal{R}$ vérifie :
$-\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{R}$.
- Soit $B \in \mathcal{R}$, alors il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $B = f^{-1}(A)$, d'où $B^c = (f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \in$

$\mathcal{R}$
- *Soit* $(B_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{R}$, $\forall n \ \ \exists A_n \in \mathcal{T}$ *tq* $B_n = f^{-1}(A_n)$,

$$\cup_{n>0} B_n = \cup_{n>0} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\cup_{n>0} A_n) \in \mathcal{R}\cdot$$

Si $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{A})$, *montrons que* $f^{-1}(\mathcal{T}) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\cdot$
D'une part on a $f^{-1}(\mathcal{A}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \Rightarrow \sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))\cdot$
D'autre part on a $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$ *est une tribu sur* X *qui contient* $f^{-1}(\mathcal{A})$. *Donc* $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\cdot$ *D'où le résultat.*

Tribu produit : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit sur $\Omega \times \Omega'$ la tribu engendrée par les parties $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}'$. On note cette tribu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$.

Théorème 1.1.1 *On suppose que* $\mathcal{A} = \sigma((A_i)_{i\in I})$ *et* $\mathcal{A}' = \sigma((B_j)_{j\in J})$. *De plus, on suppose qu'il existe* $I' \subseteq I$ *et* $J' \subseteq J$ *tels que* $\Omega = \cup_{i\in I'} A_i$ *et* $\Omega' = \cup_{j\in J'} B_j$. *Alors* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' = \sigma((A_i \times B_j)_{(i,j)\in I\times J})\cdot$

L'extension au produit d'un nombre quelconque d'espaces mesurables se fait par récurrence . Plus généralement, soit $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'espaces mesurables. L'ensemble

$$F = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$$

est munit de la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par les pavés de la forme

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n,$$

ou $A_i \in \mathcal{A}_i, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n$. La tribu $\mathcal{B}$ est appelée tribu produit et on note

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \cdot \otimes \mathcal{A}_n = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i\cdot$$

Théorème 1.1.2 *Pour tout entier* $n \geq 2$, *la tribu borélienne de* R^d *est la tribu engendrée par les pavés ouverts de* R^d *dont les cotés ont des extrimités rationnelles. Ce sont les ensembles de la forme*

$$\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[\qquad a_i < b_i \ \text{et} \ a_i, b_i \in Q$$

On a

$$\mathcal{B}_{R^d} = \mathcal{B}_R^{\otimes d}$$

1.2 Espaces mesurés

Définition 1.2.1 *(Mesure positive sur un espace mesurable) Soit* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace mesurable, on appelle mesure (positive) sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *toute application*

$$\mu : \ \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

vérifiant

1. $\mu(\emptyset) = 0\cdot$
2. *Pour toute suite* $(A_n)_{n \in N}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints, on a*

$$\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)\cdot$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est appelé espace mesuré.*
Si $\mu(\Omega) < +\infty$*, on dit que* μ *est une mesure finie. S'il existe une suite d'éléments* $(A_n)_n$ *de* $\mathcal{A}$ *tel que* $\Omega = \cup_n A_n$ *et* $\mu(A_n) < +\infty$ *pour tout* n*, on dit que* μ *est* $\sigma-$*finie.*
Une propriété $P(x)$ *est vraie* $\mu-$*presque partout s'il existe* $A \in \mathcal{A}$ *de mesure nulle* $(\mu(A) = 0) telleque \forall\ x \in \Omega \backslash A,\ P(x)$ *est vrai* Comme conséquence de la définition de mesure les propriétés suivantes :

1. μ est croissante : $\forall\ A,\ B \in \mathcal{A}$ tel que $A \subset B$, on a $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. $\forall\ A,\ B \in \mathcal{A}$ avec $B \subset A$ et $\mu(B) < +\infty$ on a $\mu(A) = \mu(A) - \mu(B)$
3. $\forall\ A,\ B \in \mathcal{A},\ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$,
   μ est dite fortement additive.
4. Si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$
5. Si $(A_n)_n$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$, alors

$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

6. Si $(A_n)_n$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu(A_1 < +\infty$ et $A = \cap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$, alors

$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

La démonstration à titre d'exercice.
Exemples de mesures :

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = 0$ mesure nulle.
2. $\mu(A) = +\infty$ si $A \neq \emptyset$ et($\mu(A) = 0$ sinon) mesure grossière.
3. Masse de Dirac : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et x un point de Ω. On appelle mesure de dirac au point x et on note δ_x la mesure définie par :
$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; \delta_x(A) = I_A(x)\cdot$$
4. Mesure de comptage : On appelle mesure de comptage sur Ω la mesure définie par :
$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; \mu(A) = card(A) \;\; (\text{ si } A \text{ est fini}),$$
Sinon $\mu(A) = +\infty$.
5. Comptage pondéré : Si $\Omega = N,\; \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et $p_i \geq 0$, alors
$$\tau_p(A) = \sum_{k \in A} p_k\cdot$$
6. Restruction d'une mesure : Soit $D \in \mathcal{A}$, on définit une nouvelle mesure
$$\nu(A) = \mu(D \cap A) \;\; \forall\; A \in \mathcal{A}$$
cette mesure s'appelle restruction de μ à D.
7. Mesure de Stieltjes sur R : Soit F une fonction réelle croissante sur R, on définit
$$\mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a)$$
est une mesure sur $\mathcal{B}_R$.

Mesure de Lebesgue :

Théorème 1.2.1 *(admis) Il existe une unique mesure λ sur $(R, \mathcal{B}_R)$ telle que pour tous réels a et b tq $a < b$ on ait :*
$$\lambda(]a, b]) = \lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[) = \lambda([a, b[) = b - a,$$
de plus,
$$\lambda(] - \infty, a]) = \lambda(] - \infty, a[) = \lambda[b, +\infty[) = \lambda(]b, +\infty[) = +\infty$$
et $\lambda(a) = 0$, cette mesure s'appelle mesure de Lebesgue sur R.

Mesure image : Soientt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et une application $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$. On pose
$$\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega'),\; f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}\cdot$$
On appelle mesure image de μ par f et on note μ_f la mesure définie par
$$\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A))\cdot$$

1.3 Fonctions mesurables

Définition 1.3.1 *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *et* $(Y, \mathcal{B})$ *deux espaces mesurable, une application* $f : X \longrightarrow Y$ *est dite mesurable si l'image réciproque de toute partie de* $\mathcal{B}$ *est un élément de* $\mathcal{A}$. *i.e*

$$\forall\ A \in \mathcal{B} \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{A},$$

on dit aussi $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *mesurable.*

Remarques :
- Si les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des tribus borélienne, alors f est dite borélienne.
-Si A est une partie de X, I_A est mesurable si et seulement si A est une partie mesurable $(A \in \mathcal{A})$.
- Toute application continue est mesurable.

Proposition 1.3.1 *Soient* $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ *et* $(X_3, \mathcal{A}_3)$ *trois espaces mesurables,* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *et* $g : X_2 \longrightarrow X_3$ *deux applications mesurables, alors* $g \circ f$ *est mesurable.*

Opérations sur les fonctions mesurables :
-Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Pour qu'une application$f : X \longrightarrow R$ soit mesurable il suffit de prouver que pour tout réel α, l'ensemble $\{f > \alpha\}$ (ou bien $\{f < \alpha\}$) appartient à $\mathcal{A}$.
-Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soient f et g deux applications définies sur X à valeurs dans R mesurables, alors les applications λf, $f + g$, $f.g$, $\frac{1}{f}$ (si f ne s'annule pas), $|f|^p$ (pour tout entier p) sont mesurables.
- Si f_n est une suite de fonctions mesurable à valeurs dans R, alors les fonctions $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\liminf f_n$, lim
sont mesurables.

1.4 Exercices

Exercice 1 : Soient X et Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Soit $\mathcal{B}$ une tribu donnée de Y.

1. Vérifier que $f : (X, \mathcal{P}(X))$â$(Y, \mathcal{B})$ est mesurable. L'image réciproque de la tribu $\mathcal{B}$ par f est la classe de parties de X notÂ´ee $f^{-1}(\mathcal{B})$ et définie par

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(A); A \in \mathcal{B}\}$$

2. Vérifier que l'image réciproque de $\mathcal{B}$ par f est une tribu.

3. Montrer que si $\mathcal{A}$ est une tribu rendant$f : (X, \mathcal{A})\hat{a}(Y, \mathcal{B})$ mesurable alors $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$
4. Déterminer la tribu $f^{-1}(\mathcal{B})$ dans le cas où $(Y, \mathcal{B}) = (R, \mathcal{B}_R)$ et où f est étagée.
5. Déterminer une classe de parties de X qui engendre $f^{-1}(\mathcal{B})$ dans le cas où $X = Y = R,\ \mathcal{B} = \mathcal{B}_R$ et f est la fonction sinus.

Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$S_n = \{n, n+1, n+2\}$$

1. Donner $S_{n-2} \cap S_n$
2. Donner une partion de $\mathbb{Z}$
3. On considère $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les ensembles S_n. Montrer que $\mathcal{T} = \sigma(S_n)$

Exercice 3 : Soient X est un ensemble non vide et $(A_n)_n$ une suite de parties de X,

1. Démontrer que
   a) si $(A_n)_n$ est une suite de partie croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \cup_{n\geq 1} A_n$.
   b) si $(A_n)_n$ est une suite de partie décroissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n\geq 1} A_n$
2. Déterminer les limites des suites $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$ définies par :

$$A_n = [-\frac{1}{n}, 1] \text{ et } B_n =]-\frac{1}{n}, 1]$$

3. Donner un exemple de suite de parties non constante$R$ dont la limite est $]0, 1]$.
4. Déterminer les limites supérieure et inférieure de la suite $(B_n)_n$ de parties de R définie par :

$$B_{2n\hat{a}1} =]-2-\frac{1}{n}, 1] \text{ et } B_{2n} = [-1, 2+\frac{1}{n^2}[$$

5. Existe-t-il une suite $(C_n)_{n>0}$ de parties de R telle que

$$\limsup_n C_n = [\hat{a}1, 2] \text{ et } \liminf_n C_n = [\hat{a}2, 1]$$

   Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de réels qui convergent respectivement vers â1 et
6. Trouver une condition sur ces deux suites qui sera équivalente à

$$\limsup_n [a_n, b_n[= [\hat{a}1, 1[$$

.

7. Existe t'il la limite $\lim\limits_n [a_n, b_n]$.

Exercice 4 : On considère un espace mésuré $(R, \mathcal{B}_R, \lambda)$, avec λ est la mesure de lebesgue sur R définie par :

$$\forall\ a,\ b \in R\ (a < b) \quad \lambda([a, b]) = b - a,$$

1. Démontrer que λ est une mesure.
2. Soit $A = \cup_{n\geq 1}[n, n + \dfrac{1}{2^n}]$, calculer $\lambda(A)$.
3. a) Soit $x \in R$, calculer $\lambda(\{x\})$
   b) Soient $(x_i)_{i\in N}$ une suite de réels, calculer $\lambda(\cup_{i\geq 1}\{x_i\})$
   c) En éduire que $\lambda(Q) = 0$.
4. Calculer $\lambda([0, 1]\backslash Q)$

Exercice 5 : On considère l'espace mesuré $(R, \mathcal{B}_R, \lambda)$ avec (λ mesure de Lebesgue), pour $A \in \mathcal{B}_R$ et $a \in R$ on note : $A + a = \{x + a;\ x \in A\}$. Soit a fixé.

1. Montrer que :

$$T_a = \{A \in \mathcal{B}_R;\ A + a \in \mathcal{B}_R\}$$

   est une tribu sur R.
2. montrer que $\mathcal{B}_R \subset T_a$ puis que $\mathcal{B}_R = T_a$. 3) Pour $A \in \mathcal{B}_R$ on pose $\mu(A) = \lambda(A + a)$. Montrer que μ est une mesure sur $(R, \mathcal{B}_R)$. 4) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{B}_R$, on a : $\lambda(A + a) = \lambda(A)$ (invariance de la mesure de Lebesgue par translation).