Chapitre 2
La méthode du simplexe

1

Introduction générale

- La méthode géométrique est utilisée pour la résolution des programmes linéaires.
- Cette méthode est **limitée** au cas de **deux variables de décision.**

- Or, pour les problèmes réels, on se ramène toujours à plus que deux variables.
- Pour un problème de **taille quelconque**, c'est la **méthode du simplexe** qui est utilisée.

- Cette méthode a été développée par George Dantzig en 1947.
- Elle est efficace et performante pour les **problèmes de grande taille** (notamment en terme de temps de résolution).

Lazhar Tlili 2

2

Introduction générale

- Puisqu'on sait que l'**optimum**, s'il existe, est un **point extrême**, on se déplace d'un point extrême a un autre, de telle façon que le nouveau point extrême soit au moins aussi bon que le précédent, jusqu'a ce qu'il n'y ait plus que d'amélioration.

- Comment alors caractériser un point extrême de **manière algébrique** et existe-t-il un moyen de **tester son optimalité?**

Concepts liés à la solution recherchée

- **Concept 1 :**

La méthode du simplexe se concentre uniquement sur la recherche de points extrêmes du Domaine des solutions réalisables (DR)

- a. Cela suppose que **DR est borné**
- b. Pour tout problème ayant **au moins une solution optimale**, trouver la solution qui correspond au **meilleur point extrême**.

Concepts liés à la solution recherchée

- **Concept 2 :**

La méthode Simplexe est un algorithme itératif qui nécessite l'application d'un certain nombre d'étapes.

- Partir d'une **solution initiale**,
- Tester l'optimalité de la solution courante ou non (**Test d'optimalité**)

a) Si cette **solution est optimale** → on **arrête** les calculs
b) Sinon Explorer une **autre solution adjacente** à la première qui permet d'**améliorer** la valeur de la fonction objectif

- Refaire l'étape 2 jusqu'à ce qu'on trouve la solution optimale (**Critère d'optimalité** vérifié)

Lazhar Tlili 5

5

Concepts liés à la solution recherchée

- **Comment vérifier si la solution courante est optimale?**
- **Quelle méthode d'énumération utilisée pour rechercher le point extrême permettant d'améliorer la solution courante obtenue?**

Lazhar Tlili 6

6

Concepts liés à la solution recherchée

- **Concept 3 :**

Quand c'est possible, choisir l'origine comme solution initiale de la méthode du simplexe.

→ Examiner si l'origine (toutes les variables de décision sont nulles) vérifie toutes les contraintes.

Concepts liés à la solution recherchée

- **Concept 4 :**

Étant donnée une solution qui correspond à un point extrême, c'est plus rapide (en terme de temps de calcul informatique), de rassembler les informations sur les points extrêmes adjacents.

→ A chaque fois qu'on veut améliorer une solution, la méthode simplexe considère les points extrêmes adjacents.

Concepts liés à la solution recherchée

Définition :

- Pour un PL à **n variables**, **2 points extrêmes réalisables** sont **adjacents**

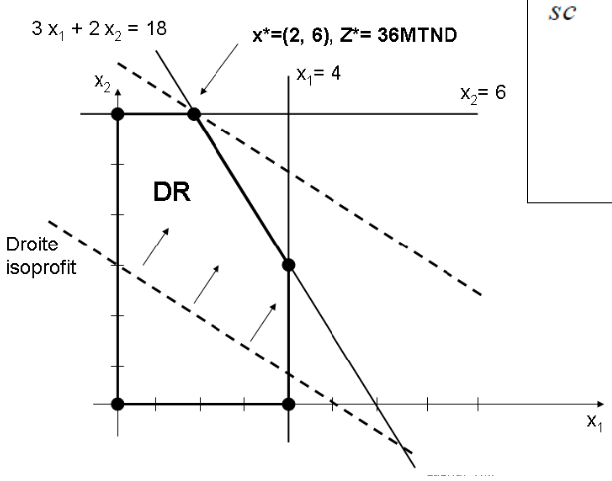
→ **SI:** Ils partagent les **frontières** données par (m-1) contraintes.

→ Ainsi, deux **solutions adjacentes** sont **reliées par un segment** (ou un bord) du Domaine Réalisable.

9

Concepts liés à la solution recherchée

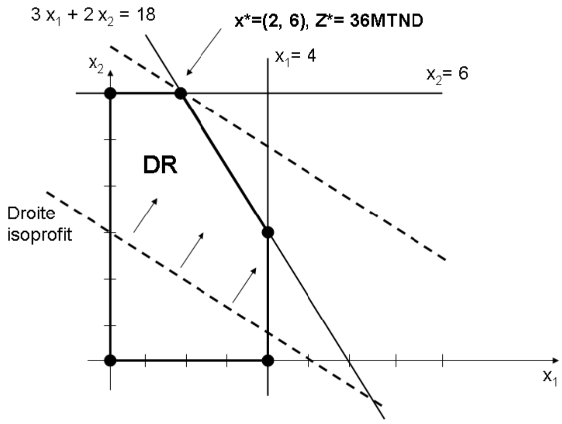
Exemple :



$$
\begin{aligned}
Max \quad Z &= 3x_1 + 5x_2 \\
sc \quad x_1 &\leq 4 \\
2x_2 &\leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

10

Concepts liés à la solution recherchée



Point extrême réalisable	Point extrême réalisable adjacent
(0,0)	(0,6) et (4,0)
(0,6)	(0,0) et (2,6)
(4,3)	(2,6) et (4,0)

Concepts liés à la solution recherchée

- **Concept 5 :**

Une fois une **solution** (qui correspond à un **point extrême**) est identifiée, la méthode du simplexe examine **chaque bord du domaine** qui émane de ce point.

Chacun des bords correspond à un **point extrême adjacent**.

→ La méthode identifie le **taux d'amélioration de Z** qui correspond au balayage de chacun des bords.

Parmi les bords qui correspondent à un taux d'amélioration positif, la méthode choisit celui qui correspond au **taux le plus élevé**.

→ C'est le point extrême correspondant qui sera considéré et constituera la **nouvelle solution** du problème qui subira le **test d'optimalité.**

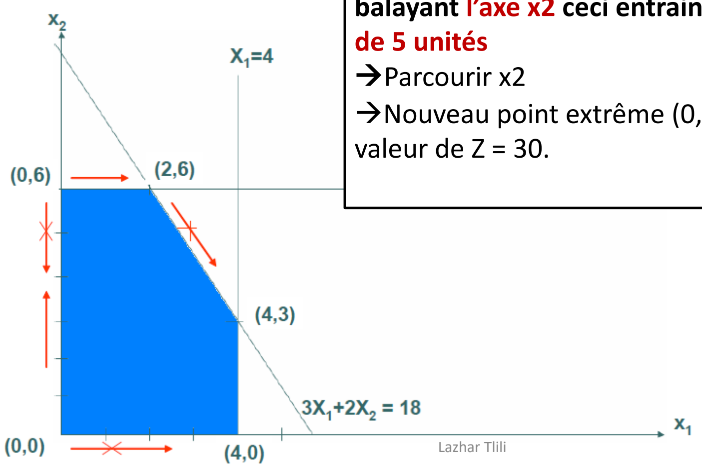
Concepts liés à la solution recherchée

- **Concept 6:**

Le test d'optimalité consiste à vérifier si l'un des bords correspond à un taux d'amélioration positif de Z.

Concepts liés à la solution recherchée

Fonction objectif:
Max $z = 3 X_1+5X_2$



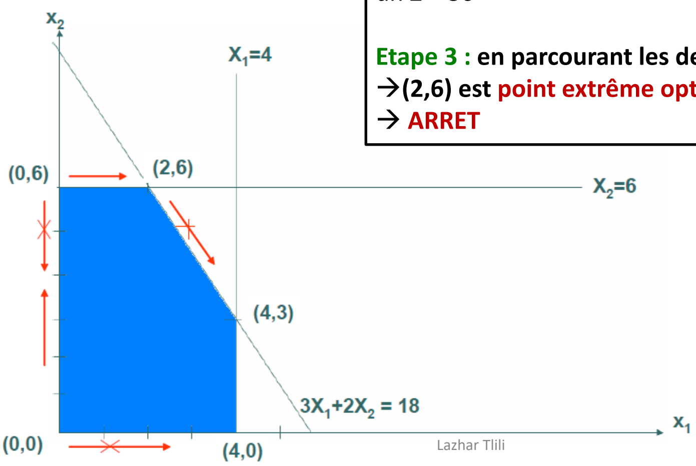
Etape 0 : (0,0) est Point extrême (Z = 0)
Etape 1 : En parcourant l'axe x1 ceci devra améliorer Z d'un taux de 3 unités ; alors qu'en balayant l'axe x2 ceci entraine une amélioration de 5 unités
→Parcourir x2
→Nouveau point extrême (0,6) et nouvelle valeur de Z = 30.

Concepts liés à la solution recherchée

Fonction objectif:
Max $z = 3X_1+5X_2$

Etape 2 : Le seul bord qui doit engendrer un taux d'amélioration de Z positif correspond à x1
→ Nouveau point extrême (2,6) qui correspond à un Z = 36

Etape 3 : en parcourant les deux bords, Z décroit
→**(2,6) est point extrême optimal**
→ **ARRET**



15

Forme Standard d'un PL

- Un PL peut avoir des contraintes d'**égalité** (=) et des contraintes d'**inégalité** (≤ et ≥).
- Avant l'application de Simplexe, le PL doit être converti en un PL équivalent ou **toutes les contraintes** sont des **égalités**, **toutes les variables** sont **non négatives** (≥), et le **second membre** est **non négatif** (**b ≥0**).

→ Un tel PL est dit **sous la forme standard**.

16

Forme Standard d'un PL

$\text{Max } C^t x$
Sc $Ax = b$
$x \geq 0$
Où $c \in \Re^n$, $x \in \Re^n$, $b \in \Re^m$, A une matrice réelle (m,n)
Avec :
- $b \geq 0$
- $m < n$ / $rg(A) = m$ (c'est-à-dire pas de contraintes redondantes)

Forme Standard d'un PL

$\text{Max } C^t x$
Sc $Ax = b$
$x \geq 0$
Où $c \in \Re^n$, $x \in \Re^n$, $b \in \Re^m$, A une matrice réelle (m,n)
Avec :
- $b \geq 0$
- $m < n$ / $rg(A) = m$ (c'est-à-dire pas de contraintes redondantes)

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \\ x_i \geq 0, (i=1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

avec $b_i \geq 0 \ \forall \ i=1, \ldots m.$

Forme Standard d'un PL

$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$

s.c. $\quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$

$x_i \geq 0, (i=1, 2, \ldots, n)$

avec $b_i \geq 0 \ \forall\ i=1, \ldots m.$

On définit $A = (a_{ij})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ $\Rightarrow Ax = b$

$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ (on supposera que $m \leq n$).

La matrice A(m*n): matrice des contraintes

Le vecteur b d'ordre m: vecteur des seconds membres

Le vecteur x d'ordre n: vecteur des variables

Le vecteur c d'ordre n: vecteur des coûts

Lazhar Tlili 19

19

Forme Standard d'un PL

Il est toujours possible de transformer n'importe quel PL en un PL équivalent exprimé sous la forme standard

- Un problème de minimisation est transformé en un problème équivalent de maximisation : **Min (C^t x) = Max (-C^t x)**

- Pour convertir une **inégalité** de la forme $\Sigma a_{ij}x_i \leq b_j$ en une **égalité,** on introduit **une variable supplémentaire non négative** ei, appelée **variable d'écart ou slack variable**.

→ La contrainte équivalente s'écrit alors $a_{ij}\, x_i + e_j = b_j$

- Pour convertir une **inégalité** de la forme $\Sigma a_{ij}x_i \geq b_j$ peut être transformée en une **égalité, on soustrait** du premier membre la variable d'écart ei,

$$a_{ij}\, x_i - e_j = b_j$$

Lazhar Tlili 20

20

Forme Standard d'un PL

- Dans la mesure du possible, et si on a des contraintes de type « $\geq$ » le sens d'une inégalité peut être inversé en multipliant des deux côtés par (-1) à condition que le second membre reste positif.

- une variable de décision xi non contrainte en signe ($x_i \in R$) peut être exprimée comme la différence de deux variables positives (x_i^+) et (x^{i-})
$x_i = (x_i^+) - (x_i^-)$

Forme Standard d'un PL

- **Exemple 1 :** Mettre le PL suivant sous la forme standard:

$$\begin{array}{lrrrcl}
\max\ z(x) = & 3x_1 + & 2x_2 + & x_3 & & \\
\text{s.c} & x_1 + & 2x_2 + & x_3 & \leq & 10 \\
 & 2x_1 + & x_2 + & x_3 & \geq & 20 \\
 & x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq & 15 \\
 & & x_1 \geq 0; & x_2 \geq 0; & & x_3 \in R
\end{array}$$

Quelques définitions

- **Solution de Base**

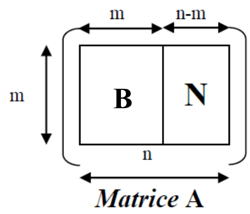
- Soit B une matrice **carrée inversible** d'ordre **m** extraite de la matrice A

- B est formée de colonnes **linéairement indépendantes**

→ B est dite **matrice de base**

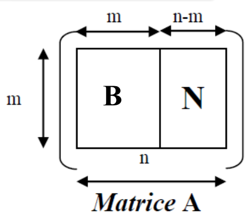
- Soit N la matrice formée par les **(n – m)** colonnes restantes de A

→ N est dite **matrice hors base**



Quelques définitions

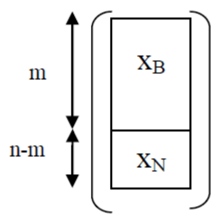
Tout vecteur $x \in R^n$ peut être partitionné en x_B et x_N



❖ **Solution**

On appelle **Solution** tout point x qui satisfait:
$Ax = b$ (pas nécessairement $x \geq 0$)

→ **$B\ x_B + N\ x_N = b$**



❖ **Solution Réalisable**

Une **solution** satisfaisant **$x \geq 0$** est dite **Solution Réalisable.**

❖ **Solution de Base associée à la Base B**

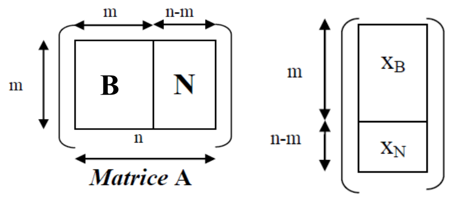
La solution définie par **$x_N = 0$ et $x_B = B^{-1}\ b$** est dite **Solution de Base** associée à la **Base B**

Quelques définitions

❖ **Solution**

Ax = b (pas nécessairement $x \geq 0$)

$\rightarrow$ **B x_B + N x_N = b**



❖ **Solution Réalisable**

Une **solution** satisfaisant **$x \geq 0$.**

❖ **Solution de Base associée à la Base B**

x_N= 0 et x_B = B^{-1} b

❖ **Solution de Base Réalisable (SBR)**

Soit x une **solution de base**.
Si de plus, on a **$x_B \geq 0$** alors x est une **Solution de Base Réalisable (SBR).**
Ainsi, on appelle :
x_B : Variables de Base
x_N : Variables Hors Base

Quelques définitions

Propriété

- Pour une **Solution de Base Réalisable (SBR)**

➢ Nombre de **variables de base** = Nombre de contraintes = **m**

➢ Nombre de **variables Hors Base** = Nombre total de variables – Nombre de contraintes = **(n-m)**

Théorème

Soit x $\in$DR une **solution réalisable** d'un PL

x est un point extrême $\leftrightarrow$ x est une SBR

$\rightarrow$A **chaque point extrême** on associe une **solution de Base Réalisable** et **inversement**.

$\rightarrow$ Une **SBR** correspond à un **point extrême augmenté des variables d'écart**.

Quelques définitions

Propriété

- Pour une **Solution de Base Réalisable (SBR)**

➢ Nombre de **variables de base** = Nombre de contraintes
= **m**

➢ Nombre de **variables Hors Base** = Nombre total de variables – Nombre de contraintes
= **(n-m)**

Exemples

Exemple 2

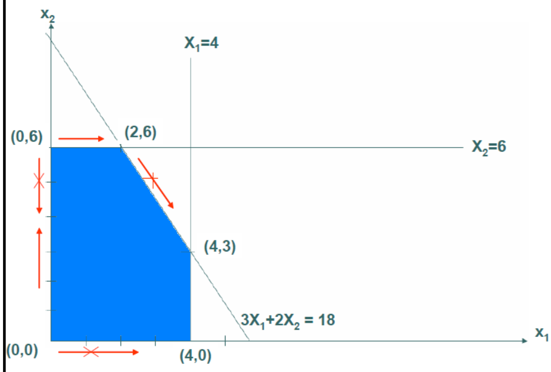
➢ On considère le PL suivant:

$$\begin{array}{lrrrl} \max\ z(x) = & 2x1 + & 3x2 & & \\ \text{s.c} & x1 + & 2x2 & \leq & 6 \\ & 2x1 + & x2 & \leq & 8 \\ & x1 & & \leq & 2 \\ & & x1 \geq 0; & x2 \geq & 0; \end{array}$$

1) Mettre ce problème sous la forme standard et en déduire la forme matricielle.
2) A partir d'une représentation graphique de ce PL, déterminer les solutions de base réalisables de ce problème,
3) Déterminer la base correspondante à chacune de ces solutions.

Exemples

Exemple 3: On considère le PL suivant:



$$
\begin{array}{llrl}
Max & Z = 3x_1 + 5x_2 & & \\
sc & x_1 & & \leq 4 \\
 & & 2x_2 & \leq 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & & \leq 18 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

- Après l'écriture de ce PL sous sa forme standard , définissons des **SBRs et des Solutions Réalisables**

→ (0,6,4,0,6) et (0,0,4,12,18) sont deux SBR

→(1,0,3,12,15) est une SR mais pas une SBR parce qu'elle admet plus de 3 variables non nulles.

Définition

- **Bases adjacentes**
- **Deux bases sont dites adjacentes si elles diffèrent par une seule colonne.**
- **Les SBR qui leurs correspondent sont appelées SBR adjacentes.**
- **Graphiquement, ces 2 SBR correspondent à 2 points extrêmes (ou 2 sommets) du DR adjacents.**

Reprendre l'exemple 2 et définir les SBR adjacentes!!!

Tableau canonique

Soit B une Base réalisable extraite de la matrice A
La Fonction Objectif s'écrit alors : $Z = C_B x_B + C_N x_N$
D'où : $C_B x_B + C_N x_N - Z = 0$
Les contraintes s'écrivent : $B x_B + N x_N = b$

Le programme linéaire (PL) s'écrit alors à partir de la forme standard sous forme d'un tableau comme suit:

1er Membre			2nd Membre
x_B	-Z	x_N	
B	0	N	b
C_B	1	C_N	0

Tableau canonique

1er Membre			2nd Membre
x_B	-Z	x_N	
B	0	N	b
C_B	1	C_N	0

Le **tableau canonique relatif à la base B** est obtenu:
-en transformant la matrice sous les variables x_B et –Z en une **matrice identité d'ordre (m+1).**

→ Il s'agit de multiplier à gauche de chaque colonne du tableau par:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C_B & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -C_B B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Tableau canonique

1^{er} Membre			2^{nd} Membre
x_B	$-Z$	x_N	
B	0	N	b
C_B	1	C_N	0

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C_B & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -C_B B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Le tableau canonique relatif à la Base B est :

1^{er} Membre			2^{nd} Membre
x_B	$-Z$	x_N	
I_m	0	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
0	1	$-C_B B^{-1}N + C_N$	$-C_B B^{-1}b$

Tableau canonique

1^{er} Membre			2^{nd} Membre
x_B	$-Z$	x_N	
I_m	0	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
0	1	$-C_B B^{-1}N + C_N$	$-C_B B^{-1}b$

La forme canonique est intéressante car elle permet de lire directement la **solution de base relative à la base B**:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0 \\ Z = C_B B^{-1}b \geq 0 \end{array}}$$

La forme canonique satisfait les **3 conditions** suivantes :
- La matrice extraite de A par la considération des m colonnes de Base est **une matrice Identité Im**
- Les coefficients des variables de Base dans la fonction objectif sont **nuls**
- Le second membre correspondant aux contraintes est **non négatif**.

Méthode du Simplexe

L'idée de la méthode simplexe est de **partir d'un point extrême initial** et de **générer une suite de points extrêmes adjacents** tout en assurant une **amélioration** de la fonction objectif.

→ Recherche d'une solution de Base Réalisable Initiale (Point extrême)

Méthode du Simplexe

Reprendre l'exemple 3 . La formulation standard est :

$$\begin{array}{llr} Max & Z = 3x_1 + 5x_2 & \\ sc & x_1 & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max & 3x_1 + 5x_2 - Z = 0 \\ sc & x_1 + x_3 = 4 \\ & 2x_2 + x_4 = 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

D'où le tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	2^{nd} Membre
1	0	1	0	0	4
0	2	0	1	0	12
3	2	0	0	1	18
3	5	0	0	0	0

Méthode du Simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	2^{nd} Membre
1	0	1	0	0	4
0	2	0	1	0	12
3	2	0	0	1	18
3	5	0	0	0	0

Il s'agit d'un **tableau canonique** relatif à la **solution de base réalisable initiale** (0,0,4,12,18).

Test d'optimalité

Disposant d'une SBR, il faut vérifier s'il s'agit d'une solution Optimale (**test d'optimalité**)

Soit x* une **Solution de Base Réalisable** associée à la base B:

$\rightarrow$ $Z(x^*) = C_B B^{-1} b$ (1) (car $x^* = B^{-1}b$ puisque $x_N = 0$)

Soit x une Solution Réalisable. D'où, on peut écrire : $x = x_B + x_N$

$\rightarrow$ $Z(x) = C_B x_B + C_N x_N$ (2)

De plus: $Bx_B + Nx_N = b$

En multipliant par ($C_B B^{-1}$) à gauche, on obtient :

$C_B B^{-1} B x_B + C_B B^{-1} N x_N = C_B B^{-1} b = Z(x^*)$ (3) (d'après 1)

D'où $Z(x) - Z(x^*) =$ **(2)-(3)**

$= (C_B - C_B B^{-1} B)\, x_B + (C_N - C_B B^{-1} N) x_N = (C - C_B B^{-1} A) x = \Delta x$

Test d'optimalité

$Z(x^*) = C_B B^{-1} b$ (1)

$Z(x) = C_B x_B + C_N x_N$ (2)

De plus: $Bx_B + Nx_N = b$ (à multiplier par: $(C_B B^{-1})$)

$\rightarrow C_B B^{-1} B x_B + C_B B^{-1} N x_N = C_B B^{-1} b = Z(x^*)$ (3)

D'où $Z(x) - Z(x^*)$ = (2)-(3)

$= (C_B - C_B B^{-1} B)\, x_B + (C_N - C_B B^{-1} N) x_N$

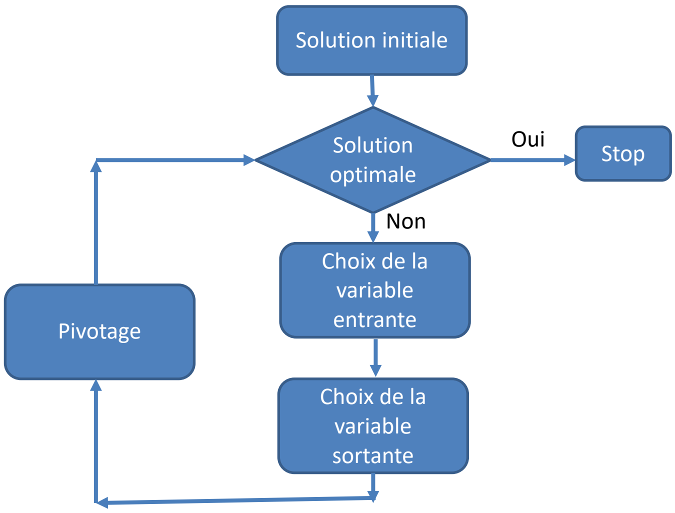
$= (C - C_B B^{-1} A) x = \Delta x$

Test d'optimalité

Soit x* une SBR relative à la base B.
Si $\Delta = C - CB^{-1}A \leq 0$ alors x* est optimale

1er Membre			2nd Membre
x_B	-Z	x_N	
I_m	0	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
0	1	$-C_B B^{-1} N + C_N$	$-C_B B^{-1} b$

Algorithme Simplexe



Algorithme Simplexe

- Mettre le PL sous la **forme standard**
- Trouver une **SBR réalisable**
- Écrire le PL sous la **forme canonique** relative à la SBR considérée
- Faire les itérations suivantes:

➢ **Tester l'optimalité :** si le critère d'arrêt est satisfait, donner le résultat final, sinon aller à l'étape suivante.

Pour un **PL de max** (resp. min)

- Si $\forall$**j = 1,…,n ;** $\Delta j \leq 0$ (resp. ≥ 0) Alors

la **solution courante est optimale** → Fin des calculs

- Sinon, $\exists$ j = 1,…,n tq $\Delta j > 0$ (resp. < 0)

→ Déterminer la **variable entrante** (colonne pivot)

→ a_j vecteur entrant noté A_e ou v.e

Si $\forall i$, $a_{ie} \leq 0$ → PL non borné: Fin des calculs

- **Tester l'optimalité :** si le critère d'arrêt est satisfait, donner le résultat final, sinon aller à l'étape suivante.

  Pour un **PL de max** (resp. min)

  - **Si $\forall j = 1,\ldots,n$; $\Delta j \leq 0$** (resp. ≥ 0) Alors

  la **solution courante est optimale** → Fin des calculs

  - Sinon, $\exists$ j = 1,…,n tq $\Delta j > 0$ (resp. < 0)

  → Déterminer la **variable entrante** (colonne pivot)

  → **a_e vecteur entrant noté A_e ou v.e**

  a_e est tel que **$\Delta e = \max \{\Delta j$, avec $\Delta j > 0\}$**

  - Si $\forall i$, $a_{ie} \leq 0$ → PL non borné: Fin des calculs

  - Sinon, calculer (b_i/a_{ie}) pour tout **$a_{ie} > 0$**

  → Déterminer la **variable sortante** (ligne pivot)

  $\text{Min}(b_i/a_{ie}) = b_s/a_{se}$ pour tout **$a_{ie} > 0$**

  → **a_s vecteur sortant noté A_s ou v.s**

- Effectuer les opérations nécessaires pour retrouver le tableau canonique

Lazhar Tlili 43

43

Algorithme du simplexe

Pour se déplacer d'une SBR à une autre, une variable hors base va prendre la place de l'une des variables de base.

Variables de base	$x_1 \ldots x_s \ldots x_m$	$x_{m+1} \ldots x_e \ldots x_n$	Valeurs des var de base
x_1 . x_s . x_m	$1 \ldots 0 \quad \ldots 0$ $0 \ldots 1 \ldots 0$ $0 \ldots 0 \quad \ldots 1$	$\bar{a}_{1,m+1} \ldots \bar{a}_{1,e} \ldots \bar{a}_{1,n}$ $\bar{a}_{s,m+1} \ldots \bar{a}_{s,e} \ldots \bar{a}_{s,n}$ $\bar{a}_{m,m+1} \ldots \bar{a}_{m,e} \ldots \bar{a}_{m,n}$	$\bar{b}_1$. $\bar{b}_s$. $\bar{b}_m$
-z	$0 \ldots 0 \ldots 0$	$\Delta_{m+1} \ldots \Delta_e \ldots \Delta_n$	$-c_B B^{-1} b = -\bar{z}$

Questions : **quelle est la variable entrante ?**

Pour déterminer une nouvelle SBR on considère la **solution de base réalisable adjacente** correspondant à la base B' et contenant xj tel que **$\Delta j = \text{Max}\{\Delta k, k = m+1\ldots n\}$** (k étant un indice relatif à une variable Hors Base)

Lazhar Tlili 44

44

Algorithme du simplexe

- x_j est appelée **variable entrante** (notée x_e)
- x_j prendra la place d'une autre variable de base dans la base B.
- Cette variable est dite **variable sortante** (x_s)

Pour faire entrer x_e, on augmente sa valeur de λ en gardant les autres variables hors bases nulles.

Deux questions se posent :

- **Question 1 : De quelle valeur λ augmente-t-on la variable entrante x_e ?**
- **Question 2 : Quelle sera la nouvelle variable sortante x_s ?**

Algorithme du simplexe

- **Question 1 : De quelle valeur λ augmente-t-on la variable entrante x_e ?**

Réponse 1 :

$$\lambda = \min_{i \in [1..m]} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ie}} / \bar{a}_{ie} > 0 \right\}$$

Avec :
bi: coefficient du second membre du tableau canonique relatif à la base B
a_{ie}: coefficient de la variable xe dans la ie ligne du tableau canonique relatif à la base B

- **Question 2 : Quelle sera la nouvelle variable sortante x_s ?**

Réponse 2 :

$$x_s / \quad \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{se}} = \min_{i \in [1..m]} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ie}} / \bar{a}_{ie} > 0 \right\} = \lambda$$

Résolution par la Méthode du Simplexe

Reprendre l'exemple précédent et écrire la forme standard associée à ce PL.

Max $Z=3\,x_1+5\,x_2$
Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} x_1 \quad &\le 4 \\ 2\,x_2 &\le 12 \\ 3\,x_1+2\,x_2 &\le 18 \\ x_1\ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Max $Z=3\,x_1+5\,x_2$
Sous les contraintes (s.c.) :

$$\begin{aligned} x_1 + s_1 \quad &= 4 \\ 2\,x_2 + s_2 \quad &= 12 \\ 3\,x_1+2\,x_2 + s_3 &= 18 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

On retrouve une forme canonique, on dresse alors le premier tableau de simplexe correspondant :

# 1	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18
-z	3	5	0	0	0	0

$\rightarrow$ s_2 est la variable sortante

$\uparrow$ x_2 est la variable entrante

Résolution par la Méthode du Simplexe

# 1	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12 $\rightarrow$
s_3	3	2	0	0	1	18
-z	3	5 $\uparrow$	0	0	0	0

# 2	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	1/2	0	6
s_3	3	0	0	-1	1	6 $\rightarrow$
-z	3 $\uparrow$	0	0	-5/2	0	-30

Résolution par la Méthode du Simplexe

# 2	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	1/2	0	6
s_3	3	0	0	-1	1	6 →
-z	3 ↑	0	0	-5/2	0	-30

Tableau canonique optimal

# 3	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
-z	0	0	0	-3/2	-1	-36

La solution optimale est **: $x^*_1=2$, $x^*_2=6$, $s^*_1=2$, $s^*_2=s^*_3=0$ et $z^*=36$**

Cas particulier

PL ayant une infinité de solution

Dans le tableau canonique optimal, si tous les $\Delta j \leq 0$ et à l'une des variables **hors base** xj correspond un **$\Delta j = 0$**, alors le PL considéré admet **une infinité de solutions optimales**.

Si on fait entrer xj dans la base, on obtient une autre SBR sans que la valeur de la fonction objectif change.

Le segment formé par ces deux SBRs optimales contient toutes les solutions optimales du problème.

Cas particulier

Exemple de PL ayant une infinité de solution

$$\text{Max } Z = 3x1 + 2x2$$
$$\text{s.c.} \quad 3x1 + 2x2 \leq 120$$
$$x1 + x2 \leq 50$$
$$x1, x2 \geq 0$$

Résoudre avec la méthode du simplexe.

Exercice

Exercice 1

Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\text{Max} \quad z = 2x_1 - x_2 + x_3$$
$$\text{SC} \quad 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Méthode simplexe pour un problème de minimisation

Nous pouvons procéder de deux manières :

1. Minimiser (Z) $\leftrightarrow$ Maximiser (-Z) et appliquer la démarche vue pour un problème de maximisation.

2. Minimiser Z directement.
Dans ce cas :
- Le critère d'optimalité devient :
- **Si $\Delta j \geq 0$ $\forall$ j = 1,…n alors la SBR actuelle est optimale**
- **Si il existe k / $\Delta k < 0$ et $a_{ik} \leq 0$ $\forall$i, le problème est non borné.**

Chapitre 3
Dualité

Introduction

- Soit (P) le programme linéaire suivant :

  Max Cx

  Sc Ax = b

  $x \geq 0$
- A chaque programme P (dit problème primal) on associe un programme D (dit problème dual) où chaque variable du dual est associée à une contrainte du problème primale.

Le dual d'un problème de Maximisation

- Une compagnie de meuble produit des :
  - bureaux
  - tables
  - chaises
- Elle utilise des ressources :
  - Matière première (exprimée en plaque de bois)
  - Activité de menuiserie (exprimée en heure)
  - Activité de finition (exprimée en heure)

Le dual d'un problème de Maximisation

- Le tableau suivant présente les données du problème

Ressources	Produit			Quantité disponible
	bureau	table	chaise	
Bois (plaque)	8	6	1	48
Menuiserie (h)	2	1,5	0,5	8
Finition (h)	4	2	1,5	20
Prix de revient (D/unité)	60	30	20	

Le dual d'un problème de Maximisation

- L'objectif est de déterminer les quantités à produire de façon à maximiser le profit.
- Les variables de décision sont définies comme suit :

x1 : nombre de bureau

x2 : nombre de table

x3 : nombre de chaise

Le dual d'un problème de Maximisation

- Le programme linéaire (P) qui correspond à ce problème est :

Max	$60x1 + 30x2 + 20x3$	
SC	$8x1 + 6x2 + x3 \leq 48$	Bois
	$2x1 + 1.5x2 + 0.5x3 \leq 8$	Menuiserie
	$4x1 + 2x2 + 1.5x3 \leq 20$	Finition
	$x1, x2, x3 \geq 0$	

Le dual d'un problème de Maximisation

- On suppose qu'un entrepreneur peut acheter la compagnie de meuble et ses ressources. Pour cet entrepreneur :

- L'objectif : le prix total de ces ressources est minimal mais
- Les contraintes il doit payer suffisamment pour convaincre meuble de lui vendre ses ressources (au moins couvrir le prix de revient de chaque produit.

- **Contraintes :**

Meubles peut utiliser 8 unités de bois pour fabriquer un bureau et le vendre à 60D pour convaincre la compagnie de vendre, l'entrepreneur doit payer cette combinaison à un prix d'au moins 60D.

D'où : $8y1 + 2y2 + 4y3 \geq 60$

De même, on a :

$$6y1 + 1.5y2 + 2y3 \geq 30$$
$$y1 + 0.5y2 + 1.5y3 \geq 20$$

De plus, on a les contraintes de signe :

$y1, y2, y3 \geq 0$

y1, y2, y3 sont dits **Coûts fictifs ou prix d'ombre**

Le dual d'un problème de Maximisation

- Min $w = 48y1 + 8y2 + 20y3$
- $8y1 + 2y2 + 4y3 \geq 60$
- $6y1 + 15y2 + 2y3 \geq 30$
- $y1 + 0.5y2 + 1.5y3 \geq 20$
- $y1, y2, y3 \geq 0$

→ (D) est le programme linéaire associé à (P).

Le dual d'un problème de Maximisation

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{SC} & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\
 & 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min } w = & 48y_1 + 8y_2 + 20y_3 \\
 & 8y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 60 \\
 & 6y_1 + 15y_2 + 2y_3 \geq 30 \\
 & y_1 + 0.5y_2 + 1.5y_3 \geq 20 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

Constatations sur les formes du Primal et du Dual

- La matrice des coefficients des contraintes de **D est la transposée de P et vice-versa.**

- Les composants du second membre de **D sont les coefficients de la fonction objective de P et vice-versa.**

- Les coefficients de la fonction objectif de **D sont les coefficients de second membre de P et vice-versa**

- Chaque colonne (ou variable) de **P résulte en une contrainte dans D et vice-versa.**

- Chaque contrainte de **P correspond à une variable dans D et vice-versa.**

- Si **P est un problème de maximisation avec contraintes ≤ alors D est un problème de minimisation avec contraintes ≥ et vice-versa.**

Règles de détermination du dual à partir d'un programme linéaire

- **Dual à partir d'une forme normale**

Nous définissons deux formes normales pour un PL :

- maximisation avec contraintes ≤ 0, x ≥ 0

- minimisation avec contraintes ≥ 0, x ≥ 0

Soit (P) :

$$\begin{aligned} & Max \ \ Cx \\ & Sc \quad Ax \le b \\ & \qquad\quad x \ge 0, \end{aligned}$$

Avec A une matrice $(m \times n)$

$b \in R^m; C, x \in R^n$

Alors le dual (D) associé est

$$\begin{aligned} & Min \ \ w = yb \\ & Sc \quad yA \ge C \\ & \qquad\quad y \ge 0, \end{aligned}$$

Avec

$y \in R^m$: un vecteur ligne

Lazhar Tlili 65

65

Règles de détermination du dual à partir d'un programme linéaire

- **Dual à partir d'une forme normale**

Nous définissons deux formes normales pour un PL :

- maximisation avec contraintes ≤ 0, x ≥ 0

- minimisation avec contraintes ≥ 0, x ≥ 0

Soit (P) :

$$\begin{aligned} & Max \ \ Cx \\ & Sc \quad Ax \le b \\ & \qquad\quad x \ge 0, \end{aligned}$$

Avec A une matrice $(m \times n)$

$b \in R^m; C, x \in R^n$

Alors le dual (D) associé est

$$\begin{aligned} & Min \ \ w = yb \\ & Sc \quad yA \ge C \\ & \qquad\quad y \ge 0, \end{aligned}$$

Avec

$y \in R^m$: un vecteur ligne

Lazhar Tlili 66

66

Détermination du dual à partir d'un LP à contraintes mixtes

- Si le primal **(P) est sous forme générale, on peut construire son dual (D) de deux façons différentes :**

a- Mettre P sous la forme normale

Exemple : Pour un problème de maximisation

- Multiplier chaque contrainte **≥ par (-1)**
- Remplacer $a_i x = b_i$ par $a_i x \leq b_i$ et $- a_i x \leq - b_i$
- Remplacer chaque x_j réel (x_j<>0) par ($x^+_j - x^-_j$)

Détermination du dual à partir d'un LP à contraintes mixtes

- **Appliquer les règles suivantes :**

Primal	**Dual**
Fonction à maximiser	Fonction à minimiser
ième contrainte ≤ 0 ième contrainte ≥ 0 ième contrainte $= 0$	ième variable ≥ 0 ième variable ≤ 0 ième variable $<> 0$
jème variable ≥ 0 jème variable ≤ 0 jème variable $<> 0$	jème contrainte ≥ 0 jème contrainte ≤ 0 ième contrainte $= 0$

Exemples

- **Exemple 1**

$$
\begin{aligned}
(P) \qquad & \text{Max } Z = 2x_1 + x_2 \\
& \text{Sc} \quad x_1 + x_2 = 2 \\
& \quad 2\,x_1 - x_2 \geq 3 \\
& \quad x_1 - x_2 \leq 1 \\
& \quad x_1 \geq 0\,;\, x_2 <> 0
\end{aligned}
$$

Exemples

- **Exemple 1**

$$
\begin{aligned}
(D) \qquad & \text{Min W} = 2y_1 + 3y_2 + y_3 \\
& \text{Sc} \qquad y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\
& \qquad y_1 - y_2 - y_3 = 1 \\
& \qquad y_1 \leq \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dualité et condition d'optimalité

Soit le problème standard (P) et son dual (D)

(P) Max z = Cx
Sc Ax = b
x ≥ 0

(D) Min w = yb
Sc yA ≥ C
y <> 0

Lemme fondamental (faible dualité)
Si x est une solution admissible de (P) et y est une solution admissible (D) alors **yb ≥ Cx**

Dualité et condition d'optimalité

Lemme fondamental (faible dualité)
Si x est une solution admissible de (P) et y est une solution admissible de (D) alors **yb ≥ Cx**

- ***Démonstration***

y solution admissible de (D) → yA ≥ C

x solution admissible de (P) → x ≥ 0 et yAx ≥ Cx d'où yb ≥ Cx

- ***Implications***

w* ≥ Z(x) pour tout x solution admissible de (P)

w(y) ≥ Z* pour tout y solution admissible de (D)

En particulier, on aura : **w* ≥ z***

Dualité et condition d'optimalité

- **Faible dualité**
- → Si on connaît une solution réalisable quelconque de l'un des problèmes (P ou D), la faible dualité peut être utilisée pour obtenir une borne (inf ou sup) sur la valeur de la fonction objectif de l'autre

Dualité et condition d'optimalité

- **Théorème de la forte dualité**
- Soit x* solution optimale de P ⇔

∃ des solutions x* et y* solutions admissibles de P et D / **Cx*=y*b**

Et on peut démontrer dans ce cas que **y* n'est que l'optimum de D**

Dualité et condition d'optimalité

- **Démonstration :**

$\Rightarrow$?

x^* est l'optimum de P

$\Delta = C - C_B B^{-1} A \leq 0 \Rightarrow C_B B^{-1} A \geq C$

et $Z^* = C_B B^{-1} b = Cx^*$

On pose $y^* = C_B B^{-1}$

On vérifie :

$y^* A = C_B B^{-1} A \geq C$ d'où y^* est bien une solution réalisable de D

$y^* b = C_B B^{-1} b = Cx^*$

Dualité et condition d'optimalité

- Maintenant démontrons que y^* est l'optimum de D:

y^* est solution réalisable pour D

$\Rightarrow w^* \leq y^* b$ (problème de minimisation)

D'après la faible dualité $w^* \geq z^* = Cx^* = y^*b$

D'où $w^* \leq y^* b$ et $w^* \geq y^*b$

$\Rightarrow w^* = y^* b$ d'où y^* est la solution optimale de D

Dualité et condition d'optimalité

$\Leftarrow$?

Il existe x* solution admissible de P, y* solution admissible de D avec Cx* = y* b (y* est l'optimum de D)

Soit x solution admissible de P, d'après la faible dualité :

$Cx \leq y^* b$

Comme y* b = Cx* donc $Cx \leq Cx^*$ pour tout x solution admissible de P

Ainsi x* est l'optimum de P

Résultat important :

Si x* est la solution optimale pour P alors $C_B B^{-1}$ est la solution optimale de D où B est la base associé à x*

Dualité et condition d'optimalité

A retenir:

1- Si l'un des problèmes (P) ou (D) a une solution optimale finie, alors l'autre problème possède aussi **une solution optimale finie**.

A l'optimum, on a égalité des fonctions objectifs.

2- Si l'un des deux problèmes admet une **fonction objectif non bornée**, alors l'autre problème aura un **ensemble de solutions admissibles vides**.

Dualité et condition d'optimalité

Démonstration de 2)

Supposons que (P) possède un **optimum non borné** c'est-à-dire:

Max z(x) = $+\infty$

Soit y solution admissible de D → (faible dualité) $\forall$x = solution admissible de (P) on a: **yb ≥ Cx**

→ yb ≥ max(Cx) = $+\infty$ → il n'existe aucune solution admissible de (D).

Théorème des écarts complémentaires

Soient x et y deux solutions admissibles respectives de P et D

x et y solutions optimales ⇔ $(y A_j - c_j)x_j = 0$ $\forall$j =1,…,n

- **Démonstration**

Soient: x solution admissible de P → x ≥ 0 et Ax=b

y solution admissible de D → yA ≥ C

"⇒" x et y optimales → Cx=yb

Comme Ax = b → Cx=yAx

→ (C-yA) x =0

→$(yA_j - c_j)x_j = 0$ $\forall$j=1…n, (où est la jème colonne de A)

"⇐" $(yA_j - c_j)x_j = 0$ $\forall$j=1…n → (yA- C).x=0 → yAx = Cx → yb = Cx

→ x et y des solutions optimales

Autre forme du T.e.c

- Soient x et y deux solutions admissibles respectives de (P) et (D).

$$
\text{X et y optimales} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i > 0 \rightarrow y\,A_i = c_i \\ y\,A_i < c_i \rightarrow x_i = 0 \end{cases}
$$

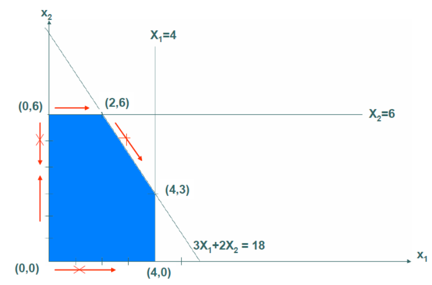
Si la ième contrainte de l'un des deux problème est non saturée
→La i^{ème} variable de l'auto problème est nulle.

Si la i^{ème} variable de l'un des deux problème est non nulle
→ La i^{ème} contrainte de l'autre problème est saturée.

Exemple

- Soit le PL (P) suivant:

$$
\begin{array}{llr}
Max & Z = 3x_1 + 5x_2 & \\
sc & x_1 & \leq 4 \\
 & 2x_2 & \leq 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$



1- Donner le dual de (P)
2- sachant que la solution optimale de (P) est x* = (2, 6), déterminer la solution optimale de (D)
3- Vérifier qu'à l'optimum on a égalité des fonctions objectifs de (P) et (D)

Exemple

$$\begin{array}{llr} Max & Z = 3x_1 + 5x_2 & \\ sc & x_1 & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow$

min w(y) = 4 y1 + 12 y2 + 18 y3
s.c y1 + 3 y3 ≥ 3
2y2 + 2 y3 ≥ 5
y1≥ 0; y2 ≥ 0; y3≥ 0;

X* = (2, 6), z*=36

X1 > 0 → y1 + 3 y3 =3
X2 > 0 → 2 y2 + 2 y3 = 5
X1=2 <4 → y1 = 0

y1 = 0
Y2 = 1.5
y3 = 1 → w* = 36