$* \; ay'' + by' + cy = d(x)$

$* \; (P_C) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

i) f Continue sur $I \times \mathbb{R}^m$

ii) f lipschitzienne en y sur $I_0 \times \mathbb{R}^m$

$\rightarrow$ (Pc) admet une unique solution sur I_0

seignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Carthage
Sciences Et Technologies Avancées Borj Cedria-Enstab

Classes : 1 TA.

: 2.

e Pour l'Ingénieur (Équations Différentielles)

Exercice 1:

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1. $y' + \frac{1}{x}y = y^3$, sur $]0, +\infty[$ (equation de Bernoulli)
2. $y' + 2y = (x+1)\sqrt{y}$, sur $\mathbb{R}$ (equation de Bernoulli)
3. $x^2(y' + y^2) = xy - 1$, sur $]0, +\infty[$, avec $y_p(x) = \frac{1}{x}$ (equation de Riccati)
4. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ (eq. diff. linéaire de second ordre avec second membre)
5. $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$, sur $]0, +\infty[$

Exercice 2:

On désigne par $q(t)$ la température (exprimée en degré Celsius) d'un corps à l'instant t (exprimé en heure). A l'instant $t = 0$, ce corps dont la température est de 100 degré Celsius (DC) est placé dans une salle à 20 DC. D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $q'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle. On suppose que le coefficient de refroidissement est $-2,08$ (le coefficient de proportionnalité).

1) Justifier que $q'(t) = -2.08q(t) + 41.6$

2) En déduire l'expression de $q(t)$.

3) Déterminer le sens de variation de la fonction q sur $[0, +\infty[$.

4) Déterminer la température du corps, arrondie au degrés au bout de $20min$,

$* \; y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$

$* \; g(y)y' = h(x)$

$* \; y' = f(\frac{y}{x})$

$* \; y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^m$

$* \; y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^2(x) + c(x)$

puis au bout de $30min$.

5) Déterminer la valeur du temps au bout duquel le corps tombera à 30 DC.

Exercice 3:

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad z' = (6x + \frac{1}{x})z + z^2, \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

2. On considère l'équation différentielle

$$(E_2) \qquad xy' - xy^2 - y + 9x^3 = 0, \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

   (a) Déterminer $a > 0$ tel que $y_0(x) = a\,x$ soit une solution particulière de (E_2).

   (b) Résoudre l'équation (E_2) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4:

Résoudre les équations différentielles suivantes, à l'aide du changement suggéré.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0, \quad$ sur $]0, +\infty[, \quad$ en posant $x = \mathrm{e}^t$
2. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0, \quad$ sur $]0, +\infty[, \quad$ en posant $z(x) = x\,y(x)$

Exercice 5:

1. On considère l'équation différentielle

$$y' = \frac{\sin(xy)}{x^2}$$

   Justifier l'existence d'une solution maximale y vérifiant $y(1) = 1$.

2. On considère l'équation différentielle

$$y' = y^2 + x^2$$

   (a) Justifier l'existence d'une solution maximale y vérifiant $y(0) = 0$.

   (b) Montrer que y est une fonction impaire.

Sèrie 2 : Equations Différentielles

Exercice 1

1) $y' + \frac{1}{x} y = y^3$; sur $]0,+\infty[$

$\iff y' = -\frac{1}{x} y + y^3$

$\iff \boxed{\frac{y'}{y^3} = \frac{-1}{x} y^{-2} + 1}$ (E)

Rappel : Equation de Bernoulli

$y' = a(x) y + b(x) y^\alpha$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$

on pose $z = y^{-2}$

$\Rightarrow z' = -2y'y^{-3} = -2\frac{y'}{y^3}$

$(E) \iff \frac{-1}{2} z' = \frac{-1}{x} z + 1$

$\iff \boxed{z' = \frac{2}{x} z - 2}$ (E_1)

equation differentielle lineaire d'ordre 1.

$\Rightarrow$ les solutions de cette equation :

$z(x) = z_p(x) + z_h(x)$

où $z_h(x) = k\exp(\ln(x^2)) = kx^2$

les solutions de l'equation homogène : $z' = \frac{2}{x} z$

. z_p une solution particulière de (E_1) de la forme :

$z_p(x) = k(x) . x^2$, où k est une f^{ct} à determiner

z_p est une solution de (E_1)

$z'_p = \frac{2}{x} z_p - 2$

$k'(x)x^2 + 2x k(x) = \frac{2}{x} k(x) x^2 - 2$

$k'(x) = \frac{-2}{x^2}$

$k(x) = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow z_p(x) = \frac{2}{x} . x^2 = 2x$

les solutions de (E_1) sont :

$z(x) = 2x + kx^2$; $\forall k \in \mathbb{R}, \forall x \in]0,+\infty[$

$\Rightarrow$ les solutions de (E) sont :

$z = \frac{1}{y^2} \iff y^2 = \frac{1}{z}$

$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{z}}$

$\boxed{y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2x + kx^2}}}$; $k \in \mathbb{R}, x \in]0,+\infty[$

3) $x^2(y' + y^2) = xy - 1$; sur $]0,+\infty[$

avec $y_p(x) = \frac{1}{x}$

$(E) : \boxed{y' = -y^2 + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}}$

Rappel : Equation de Recatti

$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

$z = y - y_p$

on pose $z(x) = y(x) - y_p(x)$

$\iff z = y - \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y = z + \frac{1}{x} = z + y_p$

$z' - \frac{1}{x^2} = -(z^2 + 2z\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) + \frac{1}{x}(z + \frac{1}{x})$

$\boxed{z' = -z^2 - \frac{1}{x} z}$ (E_1) equation de Bermoulli

$\frac{z'}{z^2} = -1 - \frac{1}{x} . \frac{1}{z}$

on pose $u = \frac{1}{z} \iff u' = \frac{-z'}{z^2}$

$(E_1) \iff u' = \frac{1}{x} u + 1$

$$\boxed{u' = \frac{1}{x}u + 1} \quad (E_2)$$ equation diff linéaire du 1er ordre

$\Rightarrow$ les solutions de (E_2) sont :

$u(x) = u_p(x) + u_h(x)$

où • $u_h(x) = k\,e^{\ln x} = kx \quad (k \in \mathbb{R})$

les solutions de l'equation homogène

$u' = \frac{1}{x}u$

• $u_p(x) = k(x).x$: une solution particulière de (E_2)

u_p est une solution de (E_2)

$\Leftrightarrow u'_p = \frac{1}{x}u_p + 1$

$\Leftrightarrow k'(x).x + k(x) = \frac{1}{x}k(x)x + 1$

$\Leftrightarrow k'(x) = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow k(x) = \ln x$

$u_p(x) = x\ln(x)$

$\Rightarrow$ les solutions de (E_2) sont :

$u(x) = x\ln x + kx \; ; \; \forall x \in]0,+\infty[$

$\Rightarrow$ les solutions de l'equation (E) :

$y(x) = z(x) + \frac{1}{x} = \frac{1}{u(x)} + \frac{1}{x}$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{x\ln x + kx} + \frac{1}{x}} \quad k \in \mathbb{R}\setminus\{-\ln x, x \in]0,+\infty[\}$$

$x \in]0,+\infty[$

4) $\boxed{y'' + y = \frac{1}{\cos x}}$ (E) ; sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$y(0) = 1$

$y'(0) = 2$

$y'' + ay' + by = c(x)$

equation differentielle linéaire du 2nd ordre à coeff const

l'equation homogène associée à (E)

$\boxed{y'' + y = 0}$ (E_h)

l'equation caracteristique associée à (E_h)

$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -1 = i^2$

$\Leftrightarrow r_1 = i$ et $r_2 = -i$

2 racines complexes conjugués.

les solutions de (E_h) sont :

$r_1 = \alpha + i\beta \; ; \; r_2 = \alpha - i\beta$

$y_h(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$

$y_h(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$

$$\boxed{y_h(x) = A\cos(x) + B\sin(x)}$$

$\Rightarrow$ les solutions de (E) sont :

$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$

où y_p est une solution particulière de (E)

sous la forme :

$y_p(x) = A(x).\cos x + B(x)\sin(x)$

où A et B sont deux fonctions à determiner

verifiant :

$$(S)\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Rappel

$\{y_1, y_2\}$ une base de solution de (E)

$\Delta > 0$: $y(x) = A\exp(r_1 x) + B\exp(r_2 x)$
$\quad A y_1 + B y_2$

$\Delta < 0$: $y(x) = A\cos(\beta x)e^{\alpha x} + B\sin(\beta x)e^{\alpha x}$
$\quad A y_1 + B y_2$

$$(S)\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \\ A'(x)y'_1(x) + B'(x)y'_2(x) = c(x) \end{cases}$$

$\Delta = 0$: $y(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$

$$(S) \iff \begin{cases} A'(x)\cos x \cdot \sin x + B'(x)\sin^2 x = 0 \quad (1) \\ -A'(x)\cos x \sin x + B'(x)\cos^2 x = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1) \quad A'(x)\cos x = -B'(x)\sin x \\ (1)+(2) \implies B'(x)\left[\cos^2 x + \sin^2 x\right] = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} B'(x) = 1 \\ A'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} B(x) = x \\ A(x) = \displaystyle\int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} B(x) = x \\ A(x) = \ln(\underbrace{\cos x}_{>0}) \quad , x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

la solution particulière de (E)

$$\boxed{y_p(x) = \ln(\cos x).\cos x + x \sin x.}$$

$\implies$ les solutions de (E) sont :

$$\boxed{\begin{gathered} y(x) = \ln(\cos x).\cos x + x\sin x \\ + A\cos x + B\sin x \\ A, B \in \mathbb{R},\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{gathered}}$$

• Determinons l'unique solution de (E) verifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

$$\longrightarrow y'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x}\cos x - \ln(\cos x)\sin x + \sin x + x\cos x - A\sin x + B\cos x$$

$$= -\ln(\cos x)\sin x + x\cos x - A\sin x + B\cos x$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln 1 + A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

en conclusion, l'unique solution de (E
vérifiant :
$y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ est :

$$y(x) = \ln(\cos x)\cos x + x\sin x + \cos x + 2\sin$$

$$\boxed{\begin{gathered} y(x) = \left[\ln(\cos x) + 1\right]\cos x + \left[x + 2\right]\sin x \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{gathered}}$$

Exercice 2 :

1) $q(t=0) = 100\ °C$

temperature de la salle $20°C$

$$q'(t) = -2{,}08\,(q(t) - 20)$$

$$q'(t) = -2{,}08\,q(t) + 41{,}6$$

2) $q'(t) + 2{,}08\,q(t) - 41{,}6 = 0$

equation diff du 1er ordre

les solutions de E sont :

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t)$$

où $q_h(t) = k e^{-2{,}08t}$ solution de l'eq homogene

$q_p(t) = k(t)\, e^{-2{,}08t} = \beta = \text{const}$

$q_p(t) = \beta$ solution de (E)

$$\iff q_p'(t) = -2{,}08\,q_p(t) + 41{,}6$$

$$0 = -2{,}08\,\beta + 41{,}6$$

$$\beta = \frac{41{,}6}{2{,}08} = 20$$

$$\implies q(t) = 20 + k e^{-2{,}08t}$$

$$q(0) = 100 \implies 20 + k = 100 \implies k = 80$$

$$\boxed{q(t) = 20 + 80\,e^{-2{,}08t}}$$

3) $\forall t \in [0, +\infty[$, $q'(t) = -80 * 2{,}08\, e^{-2{,}08}$

$q'(t) < 0$

q est une fonction strictement ↘ sur $[0, +\infty[$.

4) $20\,min = \frac{1}{3}h$

$30\,min = \frac{1}{2}h$

pour $t = \frac{1}{3}$

$$q\left(\frac{1}{3}\right) = 20 + 80\,e^{-2{,}08\times\frac{1}{3}}$$
$$= 59{,}99°C$$
$$\simeq 60°C$$

Au bout de 20 min, la temperature du corps atteint 60° C.

pour $t = \frac{1}{2}$

$$q\left(\frac{1}{2}\right) = 20 + 80\,e^{-2{,}08\times\frac{1}{2}}$$
$$= 48{,}27°C$$
$$\simeq 48°C$$

au bout de 30 min, la temperature du corps atteint 48°C.

5) $t = ?$; $q(t) = 30$

$$q(t) = 30$$
$$20 + 80e^{-2{,}08t} = 30$$
$$e^{-2{,}08t} = \frac{10}{80}$$
$$-2{,}08t = -\ln 8$$
$$t = \frac{\ln 8}{2{,}08} = 0{,}97 \simeq 1$$

La temperature du corps atteint 30° C au bout d'une heure

Exercice 4:

1) $x^2y'' + xy' + y = 0$; $]0,+\infty[$

on pose $x = e^t$

$\Rightarrow t = \ln x$: Changement de variable

on pose $z(t) = y(e^t) = y(x)$

$$z'(t) = e^t\,y'(e^t) = x\,y'(x)$$
$$z''(t) = e^t\,y'(e^t) + e^{2t}y''(t)$$
$$= x\,y'(x) + x^2y^2(x)$$

$(E) : x^2y'' + xy' + y = 0$

$(E_1) : \boxed{z'' + z = 0}$ equation diff. de 2^{nd} ordre sans second membre

l'equation caracteristique associé à E_1

$$r^2 + 1 = 0$$
$$r^2 = -1 = i^2$$
$$r_1 = i \; ; \; r_2 = -i$$

$r_1 = \alpha + i\beta$
$r_2 = \alpha - i\beta$
$\alpha = 0$
$\beta = 1$

les solutions de E_1 sont:

$z(t) = A\cos t + B\sin t$; $A, B \in \mathbb{R}$
$t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ les solutions de (E) sont:

$$y(x) = z(\ln(x))$$
$$\boxed{y(x) = A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x)}$$

$\forall x \in]0,+\infty[$; $A, B \in \mathbb{R}$

2) $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, $]0,+\infty[$

on pose $z(x) = x\,y(x)$: Changement de fonctions inconnues

$$z'(x) = y(x) + x\,y'(x)$$
$$z''(x) = y'(x) + y'(x) + x\,y''(x)$$
$$= 2y'(x) + x\,y''(x)$$

$$xy''(x) + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$
$$xy'' + 2xy' + 2y' + xy + 2y = 0$$
$$\boxed{z'' + 2z' + z = 0} \quad (E_2)$$

equation caracteristique associé a (E_2)

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad \Delta = 0$$
$$(r+1)^2 = 0$$
$$r_0 = -1$$
$$z(x) = (Ax + B)\,e^{-x} \quad ; A, B \in \mathbb{R}$$

les solutions de (E) sont:

$$y(x) = \frac{z(x)}{x}$$
$$\boxed{y(x) = \frac{Ax + B}{x}\,e^{-x}}$$

Exercice 5

1) $y' = \frac{\sin(xy)}{x^2}$

$y(1) = 1$

On definit la fonction f :

$]0,+\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{\sin(x,y)}{x^2}$

cette fonction est de Classe 1 :

donc continue et localement lipshitzienne par rapport à la 2eme variable sur $]0,+\infty[$

alors par application du theoreme de Cauchy lipshitz . on en deduit l'existence d'une seule solution maximale verifiant $y(1) = 1$.

2) $\begin{cases} y' = y^2 + x^2 = f'(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

- on definit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto y^2 + x^2$

cette fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ par application du theoreme de Cauchy lipshitz, on verifie l'existance d'une solution maximale y verifiant $y(0) = 0$ et définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

b/ on pose $z(x) = -y(-x)$

verifie I' intervalle symetrique de I

$\begin{cases} -y(-x) = -y(x) \\ -y(x) = -y(-x) \end{cases}$

z est derivable $z(0) = 0$

et $z'(x) = y'(x)$

$= y^2(-x) + (-x)^2$

$= z^2 + 2$

$\Rightarrow$ z verifie le probleme de Cauchy que f

puisque y est une solution maximale

alors on a $I' \subset I$ et $z(x) = y(x)$

pour $\forall x \in I'$.

d'autre part, puisque I' est symetrique de I et $I' \subset I$

$\Rightarrow I' = I$

$y(x) = z(x) = -y(-x)$

$y(-x) = -y(x)$

donc y est impair.