Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Carthage
Ecole Nationale Des Sciences Et Technologies Avancées Borj Cedria-Enstab

A.U : 2021/2022. **Classes : 1 TA.**
Nombre de pages : 2. **Session principale**

NB : Une grande importance sera accordée à la clarté de la rédaction.

Exercice 1 :(3 points)
Répondre par vrai ou faux. Si la réponse est vrai donnez un exemple et si la réponse est négative corrigez la phrase.
a) Toute application T qui vérifie

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c_k \max_{|\alpha| \leq \beta} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

est une distribution.
b) Le produit de deux distributions est une distribution.
c) La transformation de Fourier est une opération qui permet le passage du mode fréquentiel au mode temporel. **Exercice 2** :(10 points)
Partie I :

1. Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{-a\,|x|}$$

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$-y''(x) + y(x) = f_2(x).$$

   (a) Montrer que

$$\mathcal{F}(y)(s) = \frac{4}{(4\pi^2 s^2 + 1)(4\pi^2 s^2 + 4)}$$

   (b) Déterminer les réels α et β tels que

$$\frac{4}{(p+1)(p+4)} = \frac{\alpha}{p+1} + \frac{\beta}{p+4}$$

   (c) En déduire la solution générale y de l'équation différentielle.

Partie II :
Le but de cette exercice est de rechercher des fonctions u intégrables telles que pour $\beta \in]0,1/2[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \mathrm{e}^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-s|} u(s)\, ds. \qquad (*)$$

1. On considère pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a(x) = \mathrm{e}^{-a\,|x|}$, pour $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de f_a.
2. Écrire l'équation $(*)$ sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
3. En déduire la transformée de Fourier de u.
4. En déduire que

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{1-2\beta}|x|}$$

<u>Exercice 3</u> :(7 points)
On désigne par $H(x)$ la fonction échelon unité de Heaviside.

$$\begin{cases} H(x) & = 1 \ \text{ si } \ x \geq 0, \\ & = 0 \ \text{ si } \ x < 0, \end{cases}$$

et on pose

$$f(x) = H(x) \ln |x|, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que cette fonction détermine une distribution sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer au sens des distributions

$$(H(x)\ln(x))'.$$

c) Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle Pf(\frac{H(x)}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0)\ln(\epsilon) \right\}.$$

Trouvez une relation simple entre $Pf(\frac{H(x)}{x}$ et $(H(x)\ln(x))'$.
d) L'application $Pf(\frac{H(x)}{x})$ est-elle une distribution sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
e) Etudier, au sens de distribution, l'équation

$$xT = H(x).$$