Physique pour l'ingénieur

TD 2: Système à deux niveaux

Exercice 1

Soit un système physique à deux niveaux d'énergie dont l'espace des états admet comme base orthonormée les vecteurs propres $|1\rangle$ et $|2\rangle$ de l'hamiltonien H_0, associés respectivement aux énergies propres E_1 et E_2.

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad , \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ est une base complète de l'espace des états, un état possible $|\Psi(t)\rangle$ du système à l'instant t peut être représenté par : $|\Psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$, où toute la dépendance temporelle de $|\Psi(t)\rangle$ est contenue dans les coefficients $c_n(t)$.

1- Quelle relation doivent satisfaire $c_1(t)$ et $c_2(t)$ pour que $|\Psi(t)\rangle$ soit normé ?

2- Ecrire l'équation de Schrödinger et donner l'équation d'évolution du coefficient $c_n(t)$, $n = 1,2$.

3- Déterminer $c_1(t)$ et $c_2(t)$ et réécrire $|\Psi(t)\rangle$.

4- Supposons qu'à l'instant $t=0$, l'état du système est $|\Psi(0)\rangle = |1\rangle$ Déterminer la Probabilité $P_2(t)$ de trouver le système dans l'état $|2\rangle$

Exercice 2

Soit un système physique dont l'espace des états à deux dimensions admet comme base orthonormée les vecteurs propres $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ de l'hamiltonien H_0, associés aux valeurs propres $E_1 = E_2 = E$, avec E est une constante positive.

$$H_0|\varphi_1\rangle = E_1|\varphi_1\rangle \text{ et } H_0|\varphi_2\rangle = E_2|\varphi_2\rangle$$

intérieure

Le système est soumis à une perturbation extérieure décrite par l'opérateur indépendant du temps W, de sorte que l'hamiltonien total du système s'écrit : $H = H_0 + W$. On désigne par $|\Phi_1\rangle$ et $|\Phi_2\rangle$ les états propres de H et par ε_1 et $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ses valeurs propres.

$$H|\Phi_1\rangle = \varepsilon_1|\Phi_1\rangle \text{ et } H|\Phi_2\rangle = \varepsilon_2|\Phi_2\rangle$$

Dans la base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$, H_0 et W s'écrivent :

$$H_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & 0 \end{pmatrix}, |\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où A est une constante positive.

1- Déterminer les valeurs propres ε_1 et ε_2 de H.

2- Déterminer les vecteurs propres normés $|\Phi_1\rangle$ et $|\Phi_2\rangle$ de H.

Supposons qu'à l'instant $t = 0$, l'état du système est $|\Psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle$:

Scanné avec CamScanner

3- Exprimer $|\Psi(0)\rangle$ dans la base $\{|\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle\}$.
4- Déterminer le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ à l'instant t.
5- Déterminer la probabilité $P_2(t)$ de trouver le système à l'instant t dans l'état $|\varphi_2\rangle$.

Exercice 3

Soit un système physique à deux niveaux d'énergie dont l'espace des états admet comme base orthonormée les vecteurs propres $|0\rangle$ et $|1\rangle$ de l'hamiltonien non perturbé H_0, associés respectivement aux valeurs propres $\varepsilon_0 = 0$ et $\varepsilon_1 = \hbar\Delta$.

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\Delta \end{pmatrix} \quad , \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où Δ est une constante réelle et positive. On cherche à évaluer les modifications qui apparaissent lorsqu'on introduit un terme de couplage W qui permettra au système de passer d'un état à l'autre. Dans la base $\{|0\rangle , |1\rangle\}$, W s'écrit :

$$W = \frac{\hbar\Omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

Le système présente donc un hamiltonien total $H = H_0 + W$. Les paramètres Ω et φ sont des constantes réelles et positives.

1- Déterminer les énergies propres E_1 et $E_2 < E_1$ de H.

Les vecteurs propres $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ de H associés respectivement aux énergies propres E_1 et E_2 s'écrivent :

$$|\varphi_1\rangle = \sin(\theta)\,|0\rangle + \cos(\theta)\,e^{i\varphi}|1\rangle \quad \text{et} \quad |\varphi_2\rangle = \cos(\theta)\,|0\rangle - \sin(\theta)\,e^{i\varphi}|1\rangle$$

$$cos(2\theta) = \frac{\Delta}{\eta} \quad , \quad sin(2\theta) = \frac{\Omega}{\eta} \quad , \quad \eta = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}$$

2- Vérifier que la base $\{|\varphi_1\rangle , |\varphi_2\rangle\}$ est orthonormée.

L'état du système à l'instant $t = 0$ est décrit par le ket $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle$.

3- Exprimer $|\Psi(0)\rangle$ dans la base $\{|\varphi_1\rangle , |\varphi_2\rangle\}$.
4- Déterminer l'état du système $|\Psi(t)\rangle$ à l'instant t.
5- Déterminer la probabilité $P_1(t)$ de trouver le système à l'instant t dans l'état $|1\rangle$ en fonction de Ω et Δ.
6- Tracer $P_1(t)$ en fonction de t. Commenter l'amplitude de $P_1(t)$.

Scanné avec CamScanner

** TD2 : Systeme à deux niveaux **

Exercice n°1 :

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1| = (1 \quad 0) \qquad \langle 2| = (2 \quad 0)$$

$$H_0 |1\rangle = E_1 |1\rangle$$

$$H_0 |2\rangle = E_2 |2\rangle$$

$$|\Psi(t)\rangle = C_1(t)\,|1\rangle + C_2(t)\,|2\rangle$$

1) $\| \, |\Psi\rangle \|^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = C_1(t)\,|1\rangle + C_2(t)\,|2\rangle = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\langle \Psi(t)| = \langle 1|\, C_1(t)^* + \langle 2|\, C_2^*(t) = (C_1^*(t) \quad C_2^*(t))$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \left(\langle 1|\, C_1(t)^* + \langle 2|\, C_2^*(t)\right)\left(C_1(t)\,|1\rangle + C_2(t)\,|2\rangle\right)$$

$$= C_1^* C_1 \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1} + C_1^* C_2 \underbrace{\langle 1|2\rangle}_{=0} + C_2^* C_1 \underbrace{\langle 2|1\rangle}_{=0} + C_2^* C_2 \underbrace{\langle 2|2\rangle}_{=1}$$

$$= |C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2$$

ou bien $\langle \Psi | \Psi \rangle = (C_1^*(t) \quad C_2^*(t)) \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = C_1^* C_1 + C_2^* C_2 = |C_1|^2 + |C_2|^2$

$|\Psi\rangle$ est normé $\Rightarrow \| \, |\Psi\rangle \|^2 = 1$

$\Rightarrow |C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 = 1$

2) l'équation de schrödinger $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H_0 |\Psi(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i\hbar \frac{d}{dt} C_1(t) \\ i\hbar \frac{d}{dt} C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1\, C_1(t) \\ E_2\, C_2(t) \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{d}{dt} C_1(t) = E_1 C_1(t) \\ i\hbar \dfrac{d}{dt} C_2(t) = E_2 C_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} C_n(t) = E_n C_n(t) \qquad n = 1, 2$$

3) $i\hbar \dfrac{d}{dt} C_n(t) = E_n C_n(t)$

$$\frac{dC_n}{C_n} = -i \frac{E_n}{\hbar} dt$$

$$\int \frac{dC_n}{C_n} = \int -i \frac{E_n}{\hbar} dt + cst$$

$$\ln(C_n(t)) = -i \frac{E_n}{\hbar} t + cst$$

$$C_n(t) = e^{cst} \, e^{-i\frac{E_n}{\hbar} t}$$

or $C_n(0) = e^{cst}$

d'où $C_n(t) = C_n(0) \, e^{-i\frac{E_n}{\hbar} t}$

on a alors $\begin{cases} C_1(t) = C_1(0) \, e^{-i\frac{E_1}{\hbar} t} \\ C_2(t) = C_2(0) \, e^{-i\frac{E_2}{\hbar} t} \end{cases}$

Ainsi $|\Psi(t)\rangle = C_1(0) \, e^{-i\frac{E_1}{\hbar} t} |1\rangle + C_2(0) \, e^{-i\frac{E_2}{\hbar} t} |2\rangle$

interprétation :

$|\Psi(0)\rangle = C_1(0)|1\rangle + C_2(0)|2\rangle$ (*)

Dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ formée par les vecteurs propres $|1\rangle$ et $|2\rangle$ de l'Hamiltonien, associés aux energies propres E_1 et E_2. si l'état du systéme à l'instant $t = 0$ est donnée par (*).

alors $|\Psi(t)\rangle = C_1(0) \, e^{-i\frac{E_1}{\hbar} t} |1\rangle + C_2(0) \, e^{-i\frac{E_2}{\hbar} t} |2\rangle$

Scanné avec CamScanner

4)

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\,|1\rangle$$

$$P_2(t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2$$

$$\langle 2|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\langle 2|1\rangle = 0$$

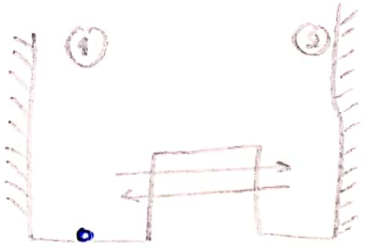
$$P_2(t) = 0$$

l'état $|1\rangle$ est un état stationnaire c'est à dire si le système est dans l'état $|1\rangle$ il reste dans cet état indéfiniment

les deux états propres de H sont des état stationnaire.

Scanné avec CamScanner

Exercice n°2 :



$|\varphi_1\rangle$ $|\varphi_2\rangle$

1/ $H = H_0 + W$

$$H = \begin{pmatrix} E & -A \\ -A & E \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les valeurs propres de H, il faut resoudre l'equation $\mathrm{Det}(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$$\begin{vmatrix} E-\lambda & -A \\ -A & E-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(E-\lambda)^2 - A^2 = 0$$

$$(E-\lambda)^2 = A^2$$

$$E - \lambda = \pm A$$

$$\lambda = E \pm A$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_1 = E + A$$

$$\varepsilon_2 = E - A$$

2/ $|\phi_1\rangle$ vecteur propre de H associé à la valeur propre ε_1

$$H|\phi_1\rangle = \varepsilon_1 |\phi_1\rangle$$

$$|\phi_1\rangle = x|\varphi_1\rangle + y|\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E+A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Ex - Ay = (E+A)x \\ -Ax + Ey = (E+A)y \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} \cancel{Ex} - Ay = \cancel{Ex} + Ax \\ -Ax + Ey = Ey + Ay \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = x \\ -x = y \end{cases}$$

$$\boxed{y = -x}$$

$$|\Phi_1\rangle = x(|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle) = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

$|\Phi_1\rangle$ normée $\longrightarrow \| |\Phi_1\rangle \|^2 = \langle \Phi_1 | \Phi_1 \rangle = 1$

$$\langle \Phi_1 | = x^* (\langle \varphi_1 | - \langle \varphi_2 |) = (x^*, -x^*)$$

$$\langle \Phi_1 | \Phi_1 \rangle = x^* x (\langle \varphi_1 | - \langle \varphi_2 |)(|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle)$$

$$= x^* x (\underbrace{\langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle}_{=1} - \underbrace{\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle}_{=1})$$

$$\| |\Phi_1\rangle \|^2 = 2|x|^2 = 1$$

pour simplifier l'écriture on prend toujours x réel et positif

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$|\Phi_2\rangle$ vecteur propre de H associé à la valeur propre ε_2

$$H|\Phi_2\rangle = \varepsilon_2 |\Phi_2\rangle$$

Soit $|\Phi_2\rangle = x|\varphi_1\rangle + y|\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Ex - Ay = (E-A)x \\ -Ax + Ey = (E-A)y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Ay = -Ax \\ -Ax = -Ay \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = x}$$

$$|\Phi_2\rangle = x(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$|\Phi_2\rangle$ est normé $\Rightarrow \| |\Phi_2\rangle \|^2 = \langle \Phi_2 | \Phi_2 \rangle = 1$

Scanné avec CamScanner

$$\langle \Phi_2 | = x^* (\langle \varphi_1 | + \langle \varphi_2 |) = (x^*, x^*)$$

$$\langle \Phi_2 | \Phi_2 \rangle = (x^*, x^*)\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x^* x + x^* x$$

$$\| |\Phi_2\rangle \|^2 = \langle \Phi_2 | \Phi_2 \rangle = 2|x|^2 = 1$$

pour simplifier l'écriture de $|\Phi_2\rangle$ on prend x réel et positif

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3/ $|\Psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle$

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle)$$

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)$$

$$|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle = \sqrt{2}\,|\varphi_1\rangle$$

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle)$$

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle)$$

4/ $|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|\Phi_1\rangle + e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|\Phi_2\rangle\right)$

5) $P_2(t) = |\langle \varphi_2 | \Psi(t)\rangle|^2$

$$\langle \varphi_2 | \Psi(t)\rangle = \langle \varphi_2 | \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|\Phi_1\rangle + e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}|\Phi_2\rangle\right)$$

$$\langle \varphi_2 | \Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\langle \varphi_2 | \Phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\langle \varphi_2 | \Phi_2\rangle$$

$$\langle \varphi_2 | \Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \varphi_2 | (|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{\langle \varphi_2 | \varphi_1\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle \varphi_2 | \varphi_2\rangle}_{=1})$$

$$\langle \varphi_2 | \Phi_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Scanné avec CamScanner

$\langle \Phi_2 | = x^* (\langle \varphi_1 | + \langle \varphi_2 |) = (x^*, x^*)$

$\langle \Phi_2 | \Phi_2 \rangle = (x^*, x^*) \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x^* x + x^* x$

$\| |\Phi_2\rangle \|^2 = \langle \Phi_2 | \Phi_2 \rangle = 2 |x|^2 = 1$

pour simplifier l'écriture de $|\Phi_2\rangle$ on prend x réel et positif

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3/ $|\Psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle$

$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle)$

$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)$

$|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} |\varphi_1\rangle = \sqrt{2}\, |\varphi_1\rangle$

$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle)$

$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle)$

4/ $|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} |\Phi_1\rangle + e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} |\Phi_2\rangle \right)$

5) $P_2(t) = |\langle \varphi_2 | \Psi(t)\rangle|^2$

$\langle \varphi_2 | \Psi(t)\rangle = \langle \varphi_2 | \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} |\Phi_1\rangle + e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t} |\Phi_2\rangle \right)$

$\langle \varphi_2 | \Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} \langle \varphi_2 | \Phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t} \langle \varphi_2 | \Phi_2\rangle$

$\langle \varphi_2 | \Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \varphi_2 | (|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underbrace{\langle \varphi_2 | \varphi_1\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle \varphi_2 | \varphi_2\rangle}_{=1} \right)$

$\langle \varphi_2 | \Phi_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Scanné avec CamScanner

Exercice n° 3 :

1/ $H = H_0 + W$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar\Omega}{2}e^{-i\varphi} \\ \frac{\hbar\Omega}{2}e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar\Omega}{2}e^{-i\varphi} \\ \frac{\hbar\Omega}{2}e^{i\varphi} & \hbar\Delta \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les valeurs propres de H il faut résoudre l'équation $\mathrm{Det}\,(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\hbar\Omega}{2}e^{-i\varphi} \\ \frac{\hbar\Omega}{2}e^{i\varphi} & \hbar\Delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(\hbar\Delta - \lambda) - \left(\frac{\hbar\Omega}{2}\right)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \hbar\Delta\lambda - \left(\frac{\hbar\Omega}{2}\right)^2 = 0$$

$$\delta = (\hbar\Delta)^2 + (\hbar\Omega)^2 = \hbar^2(\Delta^2 + \Omega^2)$$

$$\lambda = \frac{\hbar\Delta \pm \hbar\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E_1 = \frac{\hbar}{2}\left(\Delta + \sqrt{\Delta^2+\Omega^2}\right)$$
$$E_2 = \frac{\hbar}{2}\left(\Delta - \sqrt{\Delta^2+\Omega^2}\right)$$

2/ $|\varphi_1\rangle = \sin(\theta)\,|0\rangle + \cos(\theta)\,e^{i\varphi}|1\rangle = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta\, e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

$\langle\varphi_1| = \sin(\theta)\,\langle 0| + \cos(\theta)\,e^{-i\varphi}\langle 1| = (\sin\theta \quad \cos\theta\; e^{-i\varphi})$

$\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = \left(\sin(\theta)\langle 0| + \cos(\theta)e^{-i\varphi}\langle 1|\right)\left(\sin(\theta)\,|0\rangle + \cos(\theta)e^{i\varphi}|1\rangle\right)$

avec $\langle 0|0\rangle = 1$ et $\langle 0|1\rangle = 0$
$\langle 1|1\rangle = 1$ $\quad \langle 1|0\rangle = 0$

$\||\varphi_1\rangle\|^2 = \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

$|\varphi_1\rangle$ est normé

Scanné avec CamScanner

(9

$|\varphi_2\rangle = \cos\theta\,|0\rangle - \sin(\theta)\,e^{i\varphi}|1\rangle = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ -\sin(\theta)\,e^{i\varphi}\end{pmatrix}$

$\langle\varphi_2| = \cos\theta\,\langle 0| - \sin(\theta)\,e^{-i\varphi}\langle 1| = (\cos\theta \quad -\sin\theta\, e^{-i\varphi})$

$\||\varphi_2\rangle\|^2 = \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = (\cos(\theta) \quad -\sin(\theta)\,e^{-i\varphi}) \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ -\sin(\theta)\,e^{i\varphi}\end{pmatrix}$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1$

$|\varphi_2\rangle$ est normé

$\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = (\sin(\theta)\langle 0| + \cos(\theta)\,e^{-i\varphi}\langle 1|)\,(\cos\theta\,|0\rangle - \sin(\theta)\,e^{i\varphi}|1\rangle)$

$= \sin\theta\cos\theta - \cos(\theta)\sin\theta$

$= 0$

$|\varphi_1\rangle \perp |\varphi_2\rangle$

3/ $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$

$|\varphi_1\rangle = \sin(\theta)\,|0\rangle + \cos\theta\, e^{i\varphi}|1\rangle$

$|\varphi_2\rangle = \cos(\theta)\,|0\rangle - \sin(\theta)\,e^{i\varphi}|1\rangle$

$\sin\theta\,|\varphi_1\rangle + \cos\theta\,|\varphi_2\rangle = \sin^2\theta\,|0\rangle + \cos^2(\theta)\,|0\rangle$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,|0\rangle$

$= |0\rangle$

d'où $|0\rangle = \sin\theta\,|\varphi_1\rangle + \cos\theta\,|\varphi_2\rangle$

$\Rightarrow |\psi(0)\rangle = \sin\theta\,|\varphi_1\rangle + \cos\theta\,|\varphi_2\rangle$

4/ $|\psi(t)\rangle = \sin\theta\, e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|\varphi_1\rangle + \cos\theta\, e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}|\varphi_2\rangle$

5/ $P_1(t) = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2$

$\langle 1|\psi(t)\rangle = \langle 1|\left(\sin\theta\, e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|\varphi_1\rangle + \cos\theta\, e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}|\varphi_2\rangle\right)$

$= \sin\theta\, e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\langle 1|\varphi_1\rangle + \cos\theta\, e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\langle 1|\varphi_2\rangle$

$\langle 1|\varphi_1\rangle = \langle 1|\left(\sin(\theta)\,|0\rangle + \cos\theta\, e^{i\varphi}|1\rangle\right) = \cos\theta\, e^{i\varphi}$

$\langle 1|\varphi_2\rangle = \langle 1|\left(\cos\theta\,|0\rangle - \sin\theta\, e^{i\varphi}|1\rangle\right) = -\sin\theta\, e^{i\varphi}$

$\langle 1|\psi(t)\rangle = \sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}\, e^{-i\frac{\hbar\Delta t}{2}}\left(e^{-i\frac{\hbar y}{2}t} - e^{i\frac{\hbar y}{2}t}\right)$ avec $y = \sqrt{\Delta^2 + \omega^2}$

Scanné avec CamScanner

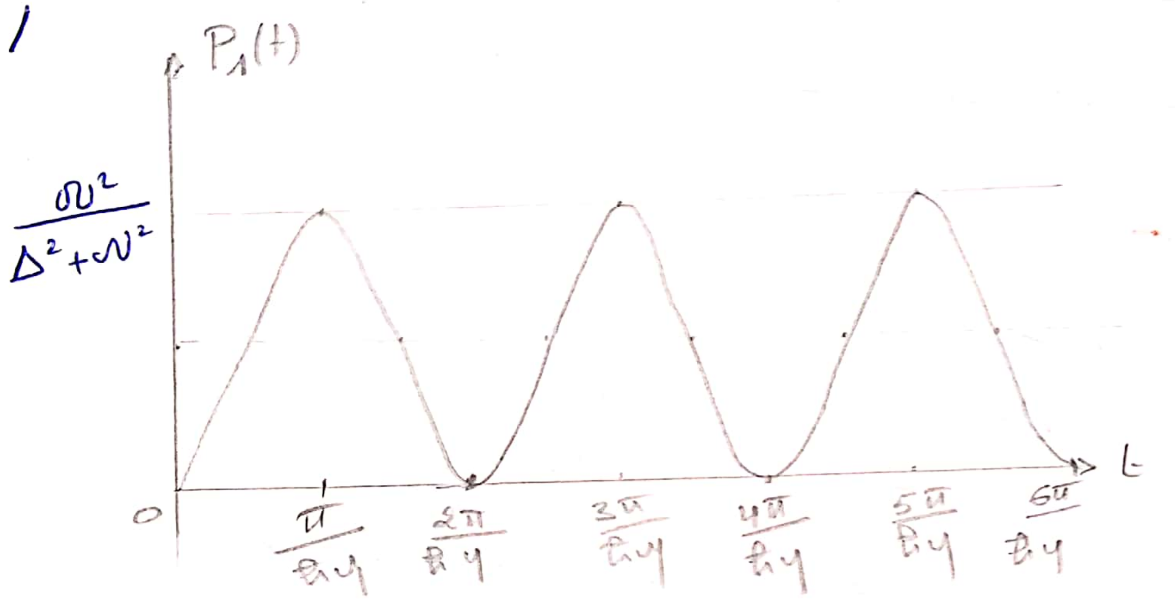
$$\langle 1|\Psi(t)\rangle = -2i\sin\left(\frac{\hbar y}{2}t\right)\sin(\theta)\cos(\theta)\, e^{i\varphi} e^{-i\frac{\hbar\Delta}{2}t}$$

$$= -i\sin(2\theta)\sin\left(\frac{\hbar y t}{2}\right) e^{i\varphi} e^{-i\frac{\hbar\Delta}{2}t}$$

$$P_1(t) = \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{\hbar y t}{2}\right)$$

$$= \frac{\Omega^2}{\Delta^2+\Omega^2}\sin^2\left(\frac{\hbar y}{2}t\right)$$

6/



$\frac{\Omega^2}{\Delta^2+\Omega^2} < 1 \Rightarrow$ le transfert de l'état $|0\rangle$ à $|1\rangle$ n'est pas total.

Scanné avec CamScanner