PLAN

1. **Introduction**
2. **Rappel : La Statique**
3. **Théories élémentaires de la Résistance Des Matériaux « RDM »**
4. **Torseur des efforts intérieurs-Notion de contraintes**
5. **Traction simple – Compression simple**
6. **Cisaillement simple**
7. **Torsion des poutres circulaires**
8. **Flexion simple**
9. **Flambement**

I-Introduction

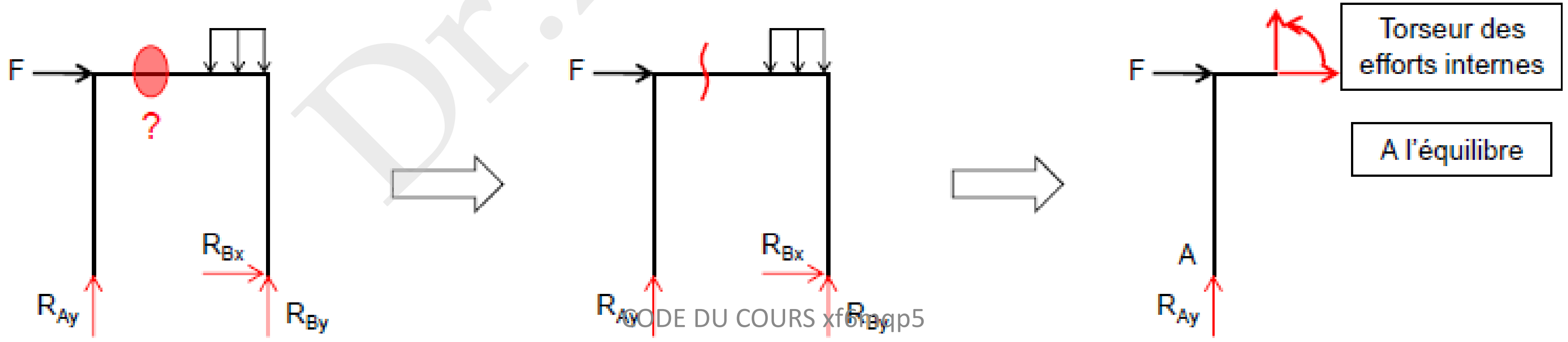
- Passage de l’échelle globale à l’échelle locale
- Des efforts extérieurs aux efforts intérieurs

But connaitre la répartition de ces efforts

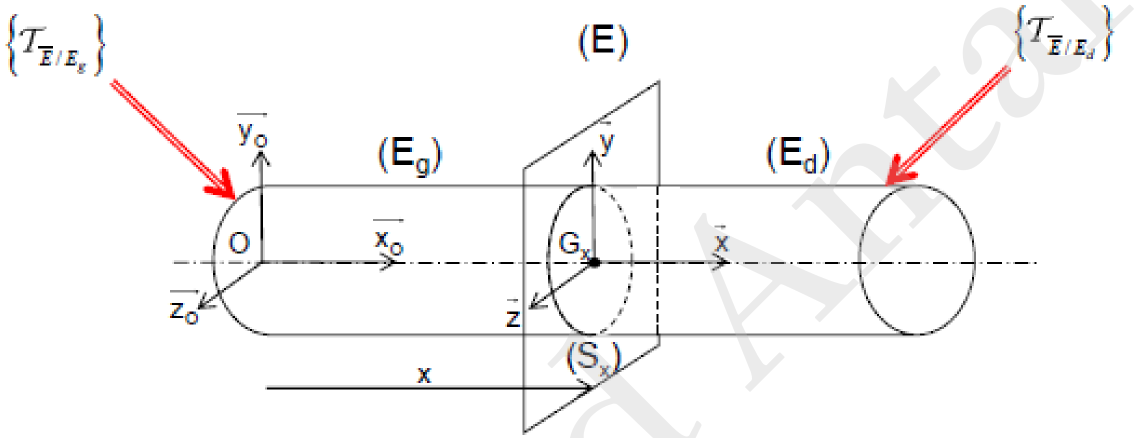
- les risques de rupture sont liés aux efforts de cohésion de la matière
- l’objectif de la RDM est de vérifier la tenue mécanique des structures

- Principe

On réalise une coupure afin de déterminer le torseur des efforts de cohésion



II-Torseur des efforts intérieurs



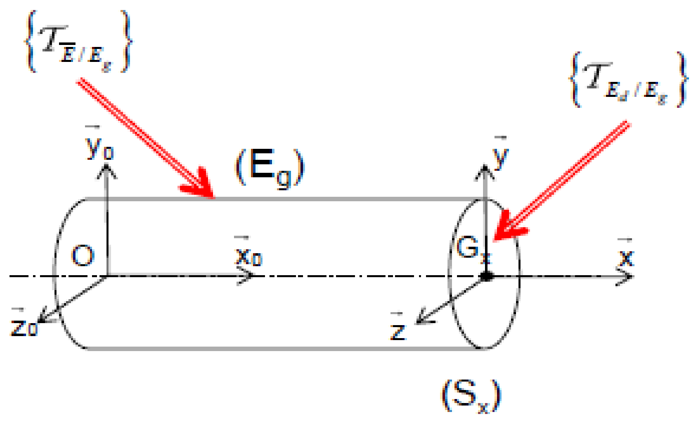
- On considère une coupure fictive de la poutre (E) au niveau de la section S_x de centre de gravité G_x
- E est partagée à droite, coté x positif en (E_d), à gauche, coté négatif en (E_g):

$$(E) = E_d \cup E_g$$

- Le repère (G_x, x, y, z) est le repère local à la section droite (S_x)
- Actions extérieurs appliqués à (E): $\{\boldsymbol{\tau}_{\bar{E}/E}\} = \{\boldsymbol{\tau}_{\bar{E}/E_d}\} + \{\boldsymbol{\tau}_{\bar{E}/E_g}\}$
- Équilibre statique de la poutre: $\{\boldsymbol{\tau}_{\bar{E}/E}\} = \mathbf{0}$ soit $\{\boldsymbol{\tau}_{\bar{E}/E_g}\} = -\{\boldsymbol{\tau}_{\bar{E}/E_d}\}$

TORSEUR DES EFFORTS INTÉRIEURS-NOTION DE CONTRAINTE

- Isolons le tronçon (E_g)



Actions extérieures appliquées à (Eg) : $\left\{\tau_{\bar{E}/E_g}\right\} + \left\{\tau_{E_d/E_g}\right\}$

→ Définition: Le torseur des efforts internes (effort de cohésion) en x est le torseur, en G_x, des actions de (E_d) sur (E_g).

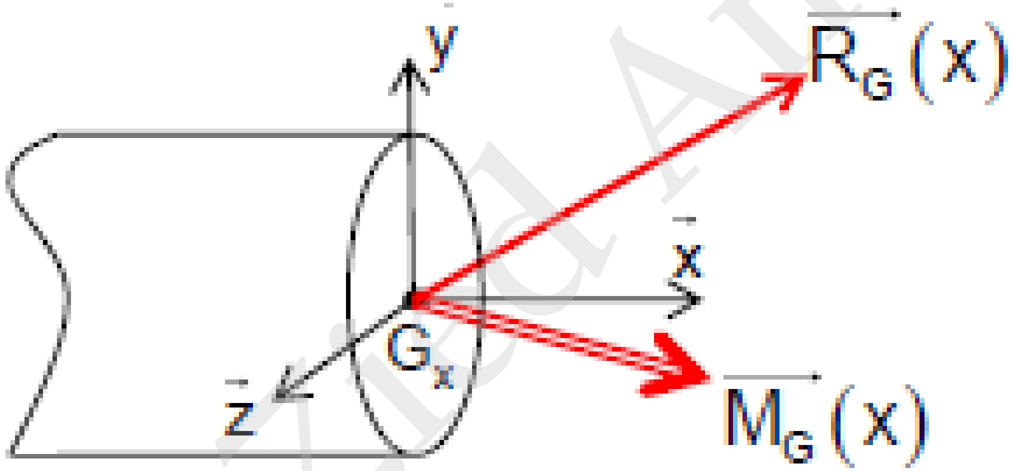
$$\left\{\tau_{efforts\ intérieurs}\right\} = \left\{\tau_{E_d/E_g}\right\}_{G_x}$$

→ Equilibre statique de (Eg): $\left\{\tau_{efforts\ intérieurs}\right\} = -\left\{\tau_{\bar{E}/E_g}\right\}_{G_x}$ **- Torseur des efforts extérieurs à gauche**

$\left\{\tau_{efforts\ intérieurs}\right\} = \left\{\tau_{\bar{E}/E_d}\right\}_{G_x}$ **Torseur des efforts extérieurs à droite**

TORSEUR DES EFFORTS INTÉRIEURS-NOTION DE CONTRAINTE

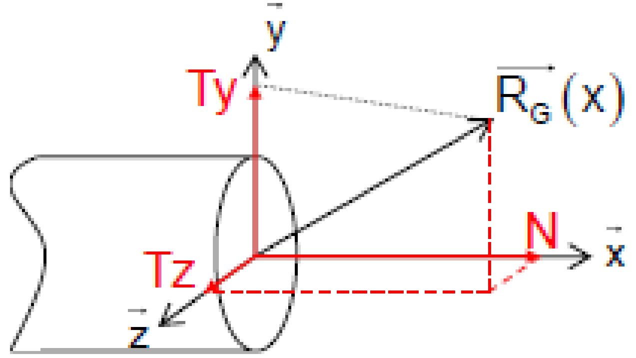
Dans le but de simplifier l'écriture des équations, nous désignons les éléments de réduction au point G, du torseur des efforts de cohésion dans la poutre exercés par le tronçon (Ed) sur le tronçon (Eg):



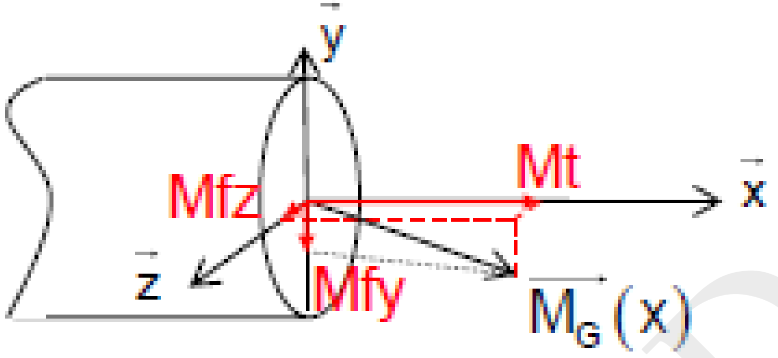
$$\{\tau_{efforts\ internes}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_G(X)} \\ \overrightarrow{M_G(X)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(E_d \to E_g) \\ \vec{M}(E_d \to E_g) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{E} \to E_d) \\ \vec{M}(\bar{E} \to E_d) \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{E} \to E_g) \\ \vec{M}(\bar{E} \to E_g) \end{Bmatrix}$$

TORSEUR DES EFFORTS INTÉRIEURS-NOTION DE CONTRAINTE

Par projection dans le repère local, on définit ainsi :



- $\vec{R}(x).\vec{x}$: *effort normal* $\boldsymbol{N(x)}$ *perpendiculaire à la section droite (traction ou compression)*
- $\vec{R}(x).\vec{y}$: *effort tranchant suivant* $\vec{y}$ $\boldsymbol{T_y(x)}$ *tangent à la section droite (cisaillement)*
- $\vec{R}(x).\vec{y}$: *effort tranchant suivant* $\vec{z}$ $\boldsymbol{T_z(x)}$ *tangent à la section droite (cisaillement)*



- $\vec{M}(x).\vec{x}$: *moment de torsion* $\boldsymbol{M_t(x)}$
- $\vec{M}(x).\vec{y}$: *moment fléchissant selon* $\vec{y}$ $\boldsymbol{M_{fy}(x)}$: Flexion
- $\vec{M}(x).\vec{z}$: *moment fléchissant selon* $\vec{z}$ $\boldsymbol{M_{fz}(x)}$: *Flexion*

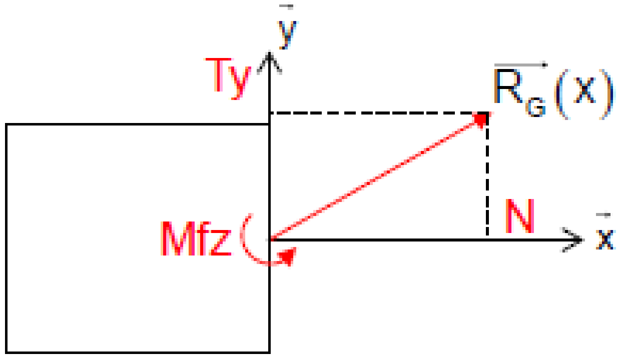
$$\{\mathcal{T}_{\text{efforts internes}}\}_x = \begin{Bmatrix} N(x) & Mt(x) \\ Ty(x) & Mfy(x) \\ Tz(x) & Mfz(x) \end{Bmatrix}_{R_x}$$

On Pose alors

$$\begin{cases} \vec{T} = T_y\vec{y} + T_z\vec{z} \longrightarrow \textbf{Effort Tranchant} \\ \vec{M_f} = M_{fy}\vec{y} + M_{fz}\vec{z} \longrightarrow \textbf{Moment de flexion} \end{cases}$$

Cas des problèmes plans

Dans le cas des poutres droites à plan moyen dont le plan moyen est le plan (x ,y), le torseur des efforts intérieurs se réduit à quatre composantes non nulles.



$$\left\{\mathcal{T}_{\text{efforts internes}}\right\}_x = \left\{\begin{matrix} N(x) \\ Ty(x) \end{matrix} \; Mfz(x) \right\}_{R_x}$$

→ Pour la suite des développements, il est indispensable de déterminer correctement les éléments du torseur des efforts internes.

Définitions des sollicitations simples

Sollicitation élémentaire	Composante(s) non nulle(s)	$\{\tau_{int}\}$
Traction /compression	N	$\begin{Bmatrix} N\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$
Cisaillement pur	T_y	$\begin{Bmatrix} T_y\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$
Torsion	M_t	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_t\vec{x} \end{Bmatrix}_G$
Flexion pure On motrera que dans ce cas, M_{fz}, est constante	M_{fz}	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_{fz}\vec{z} \end{Bmatrix}_G$
Flexion simple	T_y et M_{fz}	$\begin{Bmatrix} T_y\vec{y} \\ M_{fz}\vec{z} \end{Bmatrix}_G$

Étapes de calcul des efforts internes

1. Découpage en différents tronçons

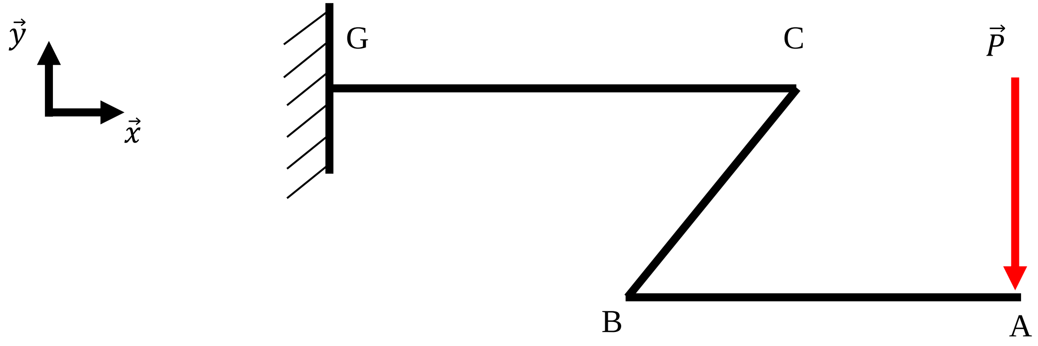
- Selon les actions mécaniques rencontrées.
- Selon la géométrie de la ligne moyenne.

2. Ecrire le PFS sur chaque tronçon dans le repère local

- Coupure fictive → on isole la partie droite ou gauche
- Détermination des composantes d’efforts internes grâce au bilan des actions extérieures
- Convention de signe en fonction du sens de parcours.
- Repère local ≠ repère global le plus souvent.

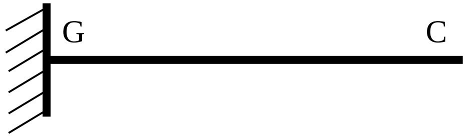
$$\left\{\mathcal{T}_{\text{efforts internes}}\right\}_X = -\left\{\mathcal{T}_{\overline{E}/E_g}\right\}_{G_x,R_x} = \left\{\mathcal{T}_{\overline{E}/E_d}\right\}_{G_x,R_x}$$

Application1

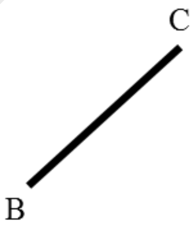


Coupure

→ **3 tronçons, 2 coupures en C et B**



3

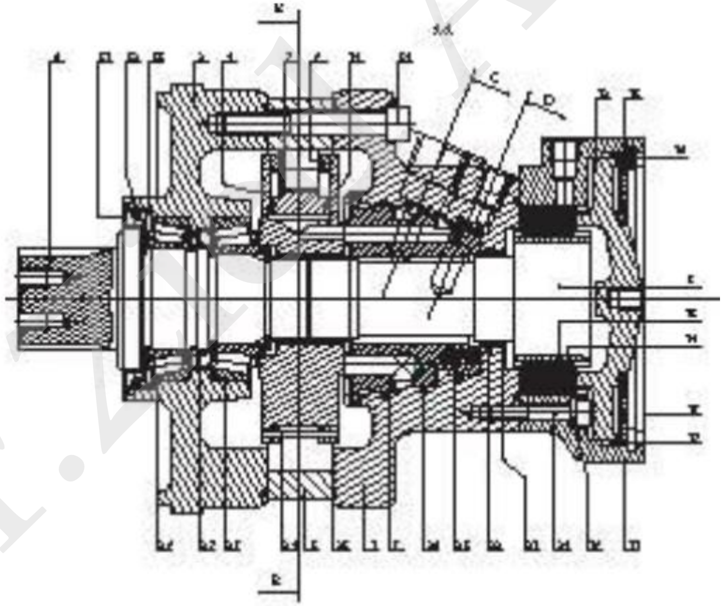


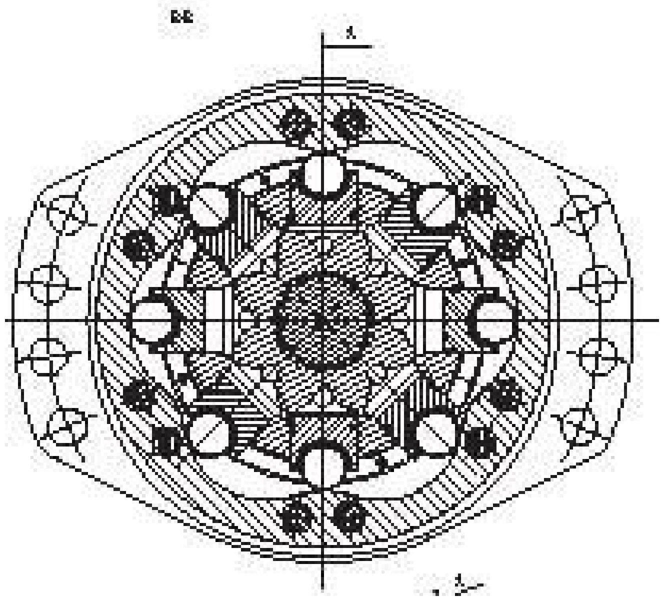
2

1

Application2

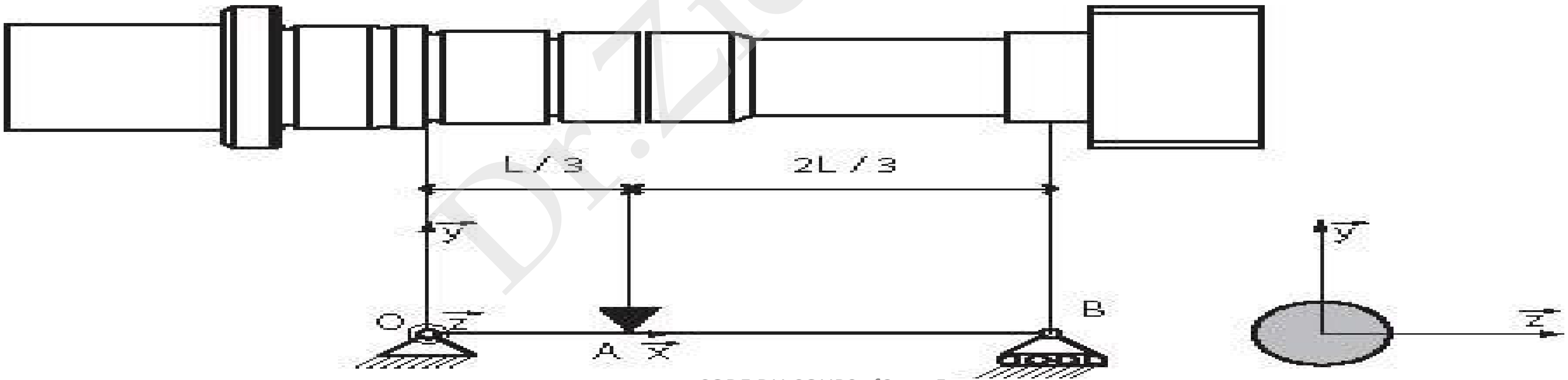
on considère le moteur Poclain. On s'intéresse ici exclusivement à l'arbre principal du moteur représenté en gras sur le dessin d'ensemble.





→ Pour étudier cet arbre:

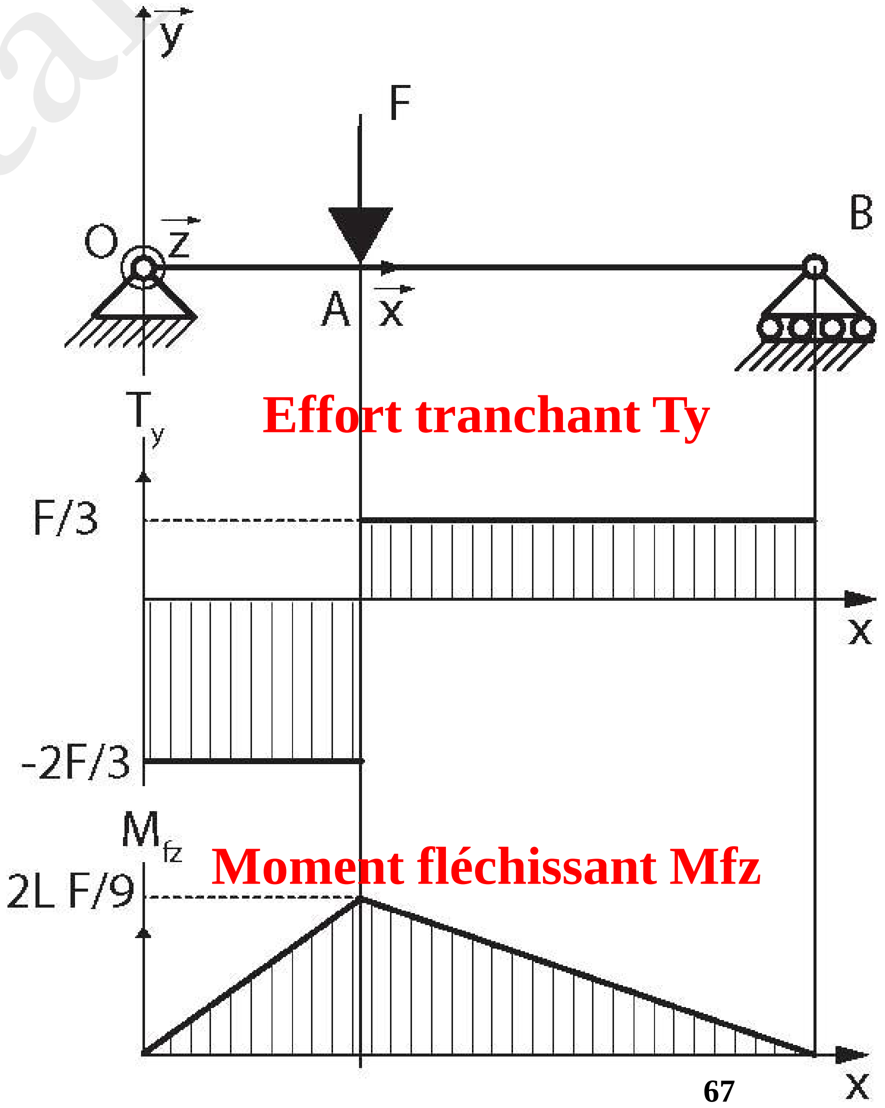
- on néglige les variations de diamètre de l'arbre
- on a choisi de modéliser la liaison réalisée par les deux roulements à rouleaux à contact oblique par une articulation.
- On suppose que la seule action mécanique extérieure est un glisseur de direction y, appliqué au point A.
- on néglige les actions axiales liées à la distribution



III-Diagrammes d'efforts tranchant et de moment fléchissant

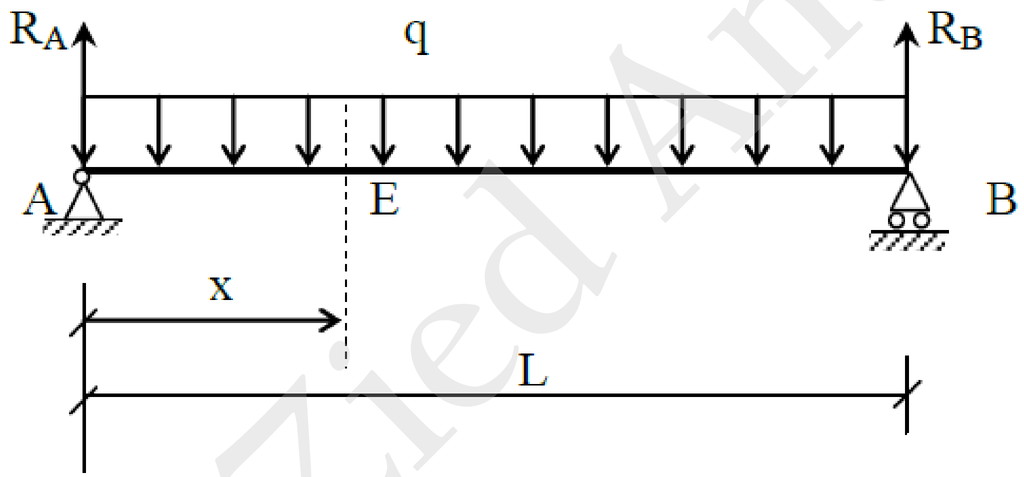
- Dimensionnement → il est utile de repérer la section de la poutre qui est la plus sollicitée.
- On utilise des diagrammes de sollicitation qui permettent de visualiser rapidement les sections de la poutre les plus chargées.
- En pratique: tracer en fonction de l'abscisse du point de coupure, l'évolution des différentes composantes non nulles du torseur des efforts intérieurs.

Arbre du moteur Poclain



Application

Soit le cas d'une poutre soumise à une charge verticale uniformément répartie

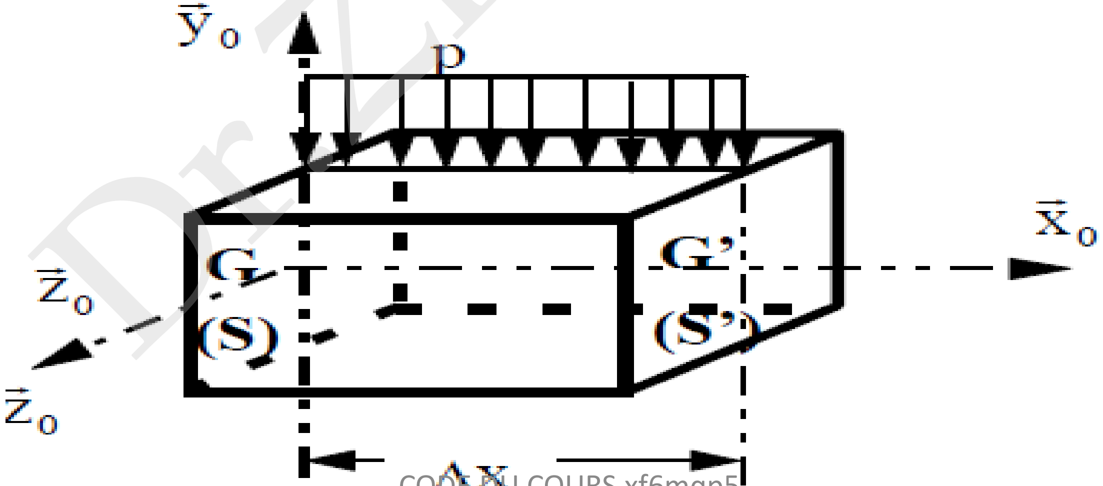


Sur une section droite de la poutre, la charge produit un effort tranchant Ty et un moment fléchissant Mfz.

- On peut mettre en évidence ces efforts intérieurs en faisant une coupe à la distance x de l'appui gauche A de la poutre et en isolant les deux tronçons AE et EB crées par cette coupe.

II-Relation entre effort tranchant et moment fléchissant

- On considère la répartition de charge, d'équation p(x) sur une poutre (E) ou sur un tronçon de la poutre. Afin de simplifier le calcul, nous supposons que la charge est uniformément répartie définie par sa densité linéique p parallèle à la direction du vecteur y .
- On considère un élément de la poutre de longueur Δx , délimité par les sections droites (S) et (S') de centre de gravité respectivement G et G'.
- On suppose qu'entre (S) et (S') aucune charge concentrée n'est appliquée.



TORSEUR DES EFFORTS INTÉRIEURS-NOTION DE CONTRAINTE

- Les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au centre de gravité de la section (S) d'abscisse x sont :

$$\left\{\tau_{coh}\right\}_G = \left\{\begin{matrix}\vec{R}(x)\\ \vec{m}_G(x)\end{matrix}\right\} = {}_G\left\{\begin{matrix} N(x) & M_t(x)\\ T_y(x) & M_{fy}(x)\\ T_z(x) & M_{fz}(x)\end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{T}(x) = T_y(x)\,\vec{y}_0 + T_z(x)\,\vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{M}_f(x) = M_{fy}(x)\,\vec{y}_0 + M_{fz}(x)\,\vec{z}_0$$

effort tranchant et le moment fléchissant en G

- Les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au centre de gravité G' de la section (S') d'abscisse x + Δx sont:

$$\left\{\tau_{coh}\right\}_{G'} = \left\{\begin{matrix}\vec{R}(x+\Delta x)\\ \vec{m}_{G'}(x+\Delta x)\end{matrix}\right\} = {}_{G'}\left\{\begin{matrix} N(x+\Delta x) & M_t(x+\Delta x)\\ T_y(x+\Delta x) & M_{fy}(x+\Delta x)\\ T_z(x+\Delta x) & M_{fz}(x+\Delta x)\end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_f(x+\Delta x) = M_{fy}(x+\Delta x)\,\vec{y}_0 + M_{fz}(x+\Delta x)\,\vec{z}_0$$

effort tranchant et le moment fléchissant en G'

- Évaluons les éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au point G’

$$\vec{R}(x+\Delta x) = \vec{R}(x) + \Delta\vec{R} \quad \text{avec} \quad \Delta\vec{R} = -p\ \Delta x\ \vec{y}_0$$

$$\vec{m}_{G'}(x+\Delta x) = \vec{m}_G(x) + \vec{R}(x) \wedge \overrightarrow{GG'} + p\frac{(\Delta x)^2}{2}\vec{z}_0 \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{GG'} = \Delta x\ \vec{x}_0$$

- On pose

$$\Delta\vec{R} = -p\ \Delta x\ \vec{y}_0$$

$$\Delta\vec{m} = \vec{m}_{G'}(x+\Delta x) - \vec{m}_G(x) = \vec{R}(x) \wedge \overrightarrow{GG'} + p\frac{(\Delta x)^2}{2}\vec{z}_0$$

- En remplaçant les vecteurs par leur expression respective et en faisant la projection sur les trois axes du repère R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les relations deviennent :

$$\Delta T_y = T_y(x+\Delta x) - T_y(x) = -p\ \Delta x \qquad \Rightarrow \frac{\Delta T_y}{\Delta x} = -p$$

$$\Delta M_{fy} = M_{fy}(x+\Delta x) - M_{fy}(x) = T_z\ \Delta x \qquad \Rightarrow \frac{\Delta M_{fy}}{\Delta x} = T_z$$

$$\Delta M_{fz} = M_{fz}(x+\Delta x) - M_{fz}(x) = -T_y\ \Delta x + p\frac{(\Delta x)^2}{2} \qquad \Rightarrow \frac{\Delta M_{fz}}{\Delta x} = -T_y + p\frac{\Delta x}{2}$$

- Au passage à la limite (en remplace Δ par d), et en faisant tendre Δx vers zéro, nous obtenons :

$$\frac{dT_y}{dx} = -p\ ; \qquad \frac{dM_{fy}}{dx} = T_z\ ;\ \text{et}\ \frac{dM_{fz}}{dx} = -T_y$$

- Nous démontrons que, pour une répartition de charge donnée, la relation suivante :

$$\frac{dM_f}{dx} = -T$$

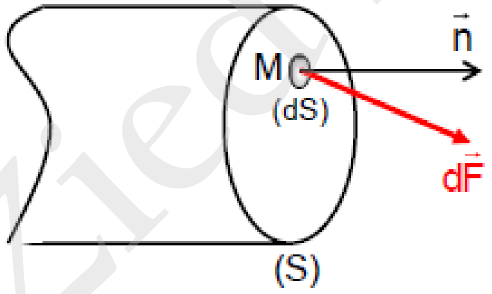
où T désigne la valeur algébrique de l'effort tranchant

et Mf la valeur algébrique du moment de flexion.

IV-Notion de contrainte-vecteur contrainte

→ Encore plus local…

- Le torseur des efforts internes n'est qu'une vision globale au niveau de la section considérée.
- Que se passe-t-il, localement, en chaque point de la poutre ?



Soit, en M, une facette de surface élémentaire dS.

- $\vec{n}$: normale, en M, à la facette. (ici perpendiculaire à la ligne moyenne, mais peut être quelconque)
- $d\vec{F}$: effort élémentaire s'appliquant sur la facette.

TORSEUR DES EFFORTS INTÉRIEURS-NOTION DE CONTRAINTE

→ Définition

La densité surfacique d'effort s'appliquant sur la facette dS de normale est caractérisée par le vecteur contrainte :

$$\boxed{\vec{T}(M,\vec{n}) = \lim_{dS \to 0} \frac{d\vec{F}}{d\vec{S}}}$$

→ Remarques

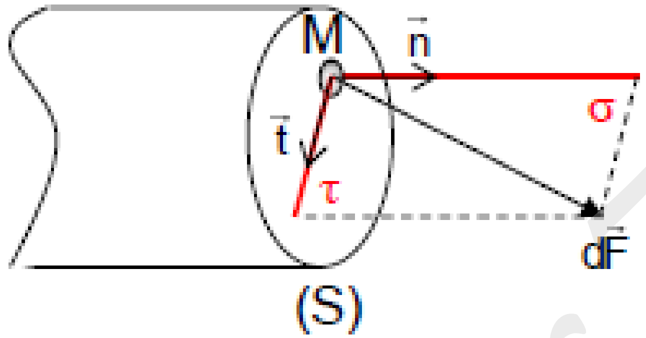
- Unité SI : Pascal, Pa. 1 Pa = 1 N/m² (comme la pression).
- Unité couramment utilisée : Mégapascal, MPa. 1 MPa = 1 N/mm².
- dépend à la fois du point M considéré et de l'orientation $\vec{n}$ de la facette.

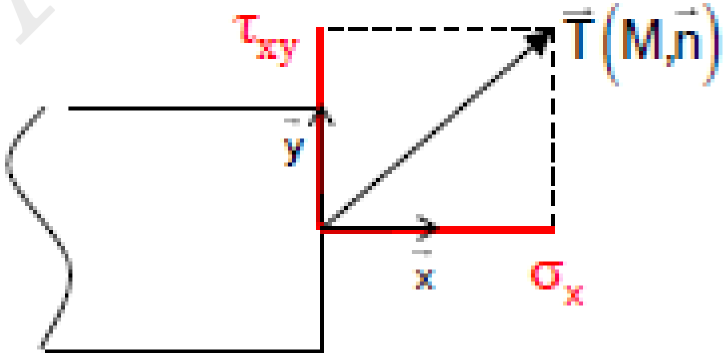
→ Contraintes normales et tangentielles

Par projection, on définit :

- σ : contrainte normale.
- τ : contrainte tangentielle.

$$\boxed{\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma\vec{n} + \tau\vec{t}}$$





→ Remarque

Cas général : $\tau\vec{t} = \tau_{xy}\vec{y} + \tau_{xz}\vec{z}$ Problème plan $\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_x\vec{x} + \tau_{xy}\vec{y}$