Chapitre 1 :

Applications différentielles

I. définition et notation :

* Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{t \to x_0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} = \ell_{x_0}$ existe et finie ($\in \mathbb{R}$)

(application fonction ?)

donc on peut écrire $f(x_0+t) - f(x_0) - h.\ell \underset{h \to 0}{=} o(h)$ (*)

* Soit $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad h \longmapsto h.\ell_{x_0}$

$L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: linéaire et continue

$f(x_0+h) - f(x_0) - \underbrace{L(h)}_{\text{application}} = o(h)$ (*)

Exemples :

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto e^{x}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$,

$L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad h \longmapsto h e^{x_0}$

$L(h_1 + \lambda h_2) = L(h_1) + \lambda L(h_2)$

$L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1
$\quad X = (x,y) \longmapsto f(x,y)$

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^2$

$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad H = (h_1, h_2) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(X_0).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0).h_2$

$= \underbrace{\langle \nabla f(X_0), H \rangle}_{\text{gradient}}$

3) Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^4$

f est différentiable en X_0

et $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad H = (h_1, \dots, h_4) \longmapsto \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial f}{\partial x_i} . h_i$

définition:

Soient E, F deux espaces vectoriels normés (evn) sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit $f : U \to F$ une application d'un ouvert $U \in E$ à valeurs dans F.

On dit que f est différentiable en un point x_0 lorsque il existe une application linéaire et continue $L \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant :

$$f(x_0+h) - f(x_0) - L(h) = o(\|h\|)$$

lorsque $h \to 0_E$

ou de façon équivalente:

$$\frac{\| f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} \xrightarrow[h \neq 0_E]{h \to 0_E} 0$$

Remarque:

une telle application $L(\cdot)$ si elle existe est unique.

Démo :

On suppose que $L_1(\cdot)$ et $L_2(\cdot)$ sont deux différentielles de l'application f en x_0.

$\|L_1(h) - L_2(h)\| \leqslant 0$? (ce qu'on veut montrer)

$$L_1(h) - L_2(h) = (f(x_0+h) - f(x_0) - L_2(h)) - [f(x_0+h) - f(x_0) - L_1(h)]$$

$$\Rightarrow \frac{\|L_1(h) - L_2(h)\|}{\|h\|} \leqslant 0$$

$$\Rightarrow L_1(\cdot) = L_2(\cdot) \quad \text{absurde.}$$

L est notée $Df(x_0)$ et est appelée la différentielle de f en x_0.

$$Df(x_0) \in \mathcal{L}(E,F)$$

$$Df(x_0) : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ h \longmapsto Df(x_0)(h) \end{array}$$

Exemples:

1) la différentielle d'une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E et F deux $\mathbb{K}$ev

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \underbrace{f(h)}_{L(h)} = o(\|h\|) \quad \begin{array}{l} h \to 0 \\ h \neq 0 \end{array}$$

donc f est différentielle en x_0

et de plus :

$$Df(x_0) : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ h \longmapsto f(h) \end{array} \in \mathcal{L}(E,F)$$

Exercice :

mq ces applications sont différentiable en un point et exprimer leurs différentielles en ce point.

1) $f : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \longmapsto tr(A) \end{array}$

2) $\varphi : \begin{array}{l} (\mathcal{C}[0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto f(0) \end{array}$

3) $\psi : \begin{array}{l} (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt \end{array}$

1) Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$Tr(A_0+H) - Tr(A_0) - Tr(H) = 0 = o(\|H\|)$

f est différentiable en A_0.

et $Df(A_0) : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ H \longmapsto Tr(H) \end{array}$

2) φ est différentiable en f_0

et $D\varphi(f_0) : \begin{array}{l} (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ h \longmapsto h(0) \end{array}$

3) ψ est différentiable en f_0

et $D\psi(f_0) : \begin{array}{l} (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ h \longmapsto \int_0^1 h(t)\,dt \end{array}$

Théorème:

Soit E et F deux Revn

$\varphi : E \longrightarrow F$ une application linéaire et continue

alors φ est différentiable en tout point $a \in E$.

et de plus $D\varphi(a) : E \longrightarrow F$

$h \longmapsto D\varphi(a)(h) = \varphi(h)$

Théorème:

Soit $f : U \longrightarrow F$ où U un ouvert $\subset E$

E et F deux $\mathbb{R}$-evn

Soit $a \in U$

si f est différentiable en a.

alors f est continue en a.

Démo en effet:

$f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) = o(h)$

$\Rightarrow \|f(a+h) - f(a)\|_F$

$= \|Df(a)(h) + o(h)\|_F \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0$

$\Rightarrow$ d'où le résultat.

définition:

$f : U \longrightarrow F$ où U est un ouvert $\subset E$

E, F deux Revn

i/ On dit que l'application f est différentiable sur U si f est différentiable en tout pt $a \in U$.

ii/ si f est différentiable sur l'ouvert U.

On définit l'application différentiable

$Df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$

$a \longmapsto Df(a)$

Exemple

E et F deux Revn.

1) $f : U \longrightarrow F$ (U ouvert $\subset E$)

$a \longmapsto f(a) = \varphi(a)$

où $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$

$f = \varphi|_U$

f est différentiable sur U puisque φ avec $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$

$Df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$

$a \longmapsto Df(a) = \varphi$

$\varphi(a)$ élément de F

φ élément de $\mathcal{L}(E,F)$

2) $\mathcal{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto \int_0^1 f(t)\, e^t\, dt$

mq $\mathcal{F}$ est différentiable et déterminer sa différentielle.

$G : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto \int_0^1 f(t)\, e^t\, dt$

$\mathcal{F} = G|_U$

$G \in \mathcal{L}(E,F)$

G est linéaire (évident)

Continue?

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$

s'il existe $c > 0$, vérifiant:

$\left| \int_0^1 f(t)\, e^t\, dt \right| \leq c\, \|f\|_\infty$; $c = \int_0^1 e^t\, dt$

$\Rightarrow$ G est continue

G est linéaire et continue

$\Rightarrow$ G est différentiable

Soient $\mathcal{F}$ différentiable sur U

et $D\mathcal{F} : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

$a \longmapsto D\mathcal{F}(a) : G \longrightarrow \mathbb{R}$

$h \longmapsto \int_0^1 h(t)\, e^t dt$

Exercice

On muni $E = \mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$

Soit $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$P \longmapsto \int_0^1 (P(t))^3 dt$

mq ϕ est differentiable sur E et Calculer sa differentiable.

$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$P \longmapsto \int_0^1 (P(t))^3 dt$

$\|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$

Soit $H \in E$

$\phi(P+H) - \phi(P) \underset{H\to 0}{=} \underbrace{L(H)}_{\in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})} + o(\|H\|)$

$\phi(P+H) - \phi(P) = \int_0^1 (P+H)^3(t)dt - \int_0^1 P^3(t)dt$

$= \int_0^1 P^3(t)dt + \int_0^1 H^3(t)dt + 3\int_0^1 P^2(t)H(t)dt$

$+ 3\int_0^1 P(t)H^2(t)\,dt - \int_0^1 P^3(t)dt$

$= \underbrace{3\int_0^1 P^2(t)H(t)dt}_{L(H)} + 3\int H^2(t)P(t)dt + \int H^3(t)dt$

→ il suffit de montrer que $L(H)$ est lineaire et Continue

et $\int_0^1 H^3(t)dt + 3\int_0^1 H^2(t)P(t)dt = o(\|H\|)$

•) $L(\cdot)$ est lineaire (evident)

••) Continuité de $L(\cdot)$

$\left|3\int_0^1 P^2(t)H(t)dt\right| \leq 3\|H\|\,\|P\|^2$
$\leq \underbrace{3\|P\|^2}_{c}\,\|H\|$

•••) $\dfrac{\left\| \int_0^1 H^3(t)dt + 3\int_0^1 H^2(t)P(t)dt \right\|}{\|H\|} \xrightarrow[H\to 0_E]{(*)} 0$

$(*) \leq \|H\|^2 + 3\|H\|\,\|P\| \xrightarrow[H\to 0_E]{} 0$

$\Rightarrow (*) \xrightarrow[H\to 0_E]{} 0$ CQFD

II - application de Classe C^1 et differentiabilité d'ordre 2 :

definition:

i/ Soit $f : U \longrightarrow F$ differentiable
$Df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$

on dit que f est deux fois differentiable en un point $a \in U$ si l'application Df est elle même differentiable.

ii/ $f : U \longrightarrow F$ est dite de Classe C^1 si f est differentiable sur U et Df est Continue sur I

Propriètes:

Soit E, F et G trois evn.
U un ouvert $\subset E$ et V un ouvert $\subset F$

$f : U \longrightarrow F$
$g : V \longrightarrow G$

on suppose que :
i/ $f(U) \subset V$
ii/ f est differentiable et g est differentiable en $f(a)$

alors $g\circ f$ est differentiable en a et de plus

$D g\circ f(a)(h) = [Dg[f(a)] \circ Df(a)](h)$

Démo: il faut montrer que lineaire et Continue par rapport à H sinon on ne peut parler de diff.

$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) = Dg[f(a)] \circ Df(a)](h) + o(\|h\|)$

Soit $f(a) = b$

$g(f(a+h)) - g(b)$

$= g(f(a) + Df(a)(h) + o(\|h\|)) - g(b)$

$= g(b + \underbrace{Df(a)(h) + o(\|h\|)}_{H}) - g(b)$

$= g(b+H) - g(b)$

$= Dg(b)(H) + o(\|H\|)$

$= Dg(f(a))\big(Df(a)(h) + o(\|h\|)\big) + o(\|H\|)$

$= Dg\big(f(a) \circ Df(a)\big)(h) + o(\|h\|)$

Proposition:

Soit $f : U \longrightarrow F$ une application de classe C^1.

$g : V \longrightarrow G$ une application de classe C^1 et $f(U) \subset V$

alors $g \circ f$ de classe C^1.

Démo

On sait que $g \circ f$ est différentiable sur U et $D(g\circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$

mq $D(g\circ f)$ est continue sur U ⚠ $\circ$ n'est pas commutative

- Continue en tout point de l'intervalle ma3meha limite f pt heya l'image
- morme mta3 différence inférieure 3ala c.fois hqja li tend vers o
- Composition

$$D(g\circ f) : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,G)$$
$$a \longmapsto Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

$$D(g\circ f) : U \to F \times \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E,G)$$
$$a \mapsto (f(a), Df(a))$$
$$(u,v) \longrightarrow (Dg(u), id)$$

$(\eta_3 \circ \eta_2 \circ \eta_1)(a) = (\eta_3 \cdot \eta_2)(f(a) \cdot Df(a))$

$= \eta_3(Dg(f(a)), Df(a)) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$

- η_1 est continue puisque f est C^1
- η_2 est continue puisque g est C^1 et $id(\cdot)$ continue
- η_3 est continue

(car $\|\eta_3(x,y)\| \leqslant c\|(x,y)\|$

$\|x \circ y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$

$\leqslant c(\|x\| + \|y\|)$

Proposition:

Soient f et g deux application différentiable en un point $a \in U$

$f, g : U \longrightarrow F$

U ouvert $\subset E$

Alors, on a $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\alpha f + \beta g$ est diff

et $D(\alpha f + \beta g)(a)$

$= \alpha Df(a) + \beta Dg(a)$

Proposition:

Soit $f : U \longrightarrow F$ constante sur U. Alors f est diff sur U et de plus :

$$Df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$$
$$a \longmapsto 0_{\mathcal{L}(E,F)}$$

Théorème:

Soient E, F et G trois evn

$$f : E \times F \longrightarrow G$$
$$(u,v) \longmapsto f(u,v)$$

une application bilinéaire et continue.

... f est differentiable et on a

$\forall (u,v) \in E\times F$
$(h,k) \in E\times F$

$Df(u,v)(h,k) = f(u,k) + f(h,v)$

Demo

$f((u,v)+(h,k)) - f(u,v)$

$= f(u+h, v+k) - f(u,v)$

bilineaire

$= f(u+h, v+k) - f(u,v)$

$= f(u,v) + \boxed{f(h,v) + f(u,k)}$ $L(H) \in \mathcal{L}(E\times F, G)$

$+ \underbrace{f(h,k)}_{o(\|H\|)} - f(u,v)$

* Verifions que:

$L(u,v) : E\times F \longrightarrow G$

$H = (h,k) \longmapsto f(u,k) + f(h,v)$

est lineaire et Continue.

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $H, H_1 \in E\times F$

$L(\lambda H + H_1) = \lambda L(H) + L(H_1)$

On a $L(\lambda H + H_1)$

$= f(u, \lambda k + k_1) + f(\lambda h + h_1, v)$

$= f(\mu, \lambda k) + f(\mu, k_1) + f(\lambda h, v)$
$+ f(h_1, v)$

$= \lambda f(u,k) + f(u,k_1) + \lambda f(h,v) + f(h_1,v)$

$= \lambda [f(u,k) + f(h,v)] + f(u,k_1) + f(h_1,v)$

$= \lambda L(H) + L(H_1)$

Continuité:

$\| f(u,k) + f(h,v)\|_G$

$\leq \|f(u,k)\|_G + \|f(h,v)\|_G$

$\leq M_1 \|u\|_G \times \|h\|_F + M_2 \|h\|_F . \|k\|_E$

$\leq M \|H\|$

avec $M = \max(M_1, M_2)$

et $H = \max(\|h\|, \|k\|)$

d'où : $L(.)$ est continue par rapport à H.

* Montrons que.

$\|f(h,k)\|_G \leq M \|h\|_E \|k\|_F$
$\leq M \times (\|h\|_E \times \|k\|_F)^2$

alors $\dfrac{\|f(h,k)\|_G}{\|H\|} \leq M . \|H\| \underset{H \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow f(h,k) = o(H)$

Conclusion:

h est differentiable et sa diff est:

$Df(h,k) = h(M,k) + f(h,v)$.

Exemple:

Etudier et Calculer la differentielle si elle est differentiable.

1) $\varphi: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$

2) $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$(A,B) \longmapsto A.B$

produit matricielle.

1) $(f,g) \in E \times F$

Soit $(f_1, g_1) \in E \times F$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 (f(t) + \lambda f_1(t))\, g(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 f(t) g(t)\, dt + \lambda \int_0^1 f_1(t) g(t)\, dt$$

$$= \varphi(f(t), g(t)) + \lambda\, \varphi(f_1(t), g(t))$$

$\Rightarrow \varphi$ est lineaire par rapport à la 1^{er} variable + symetrique

$\Rightarrow \varphi$ est bilineaire

puisque $f \times g$ est continue alors φ est continue.

$\Rightarrow \varphi$ est differentiable et sa differentielle

$$D\varphi(f,g)(h,k) = \varphi(f,k) + \varphi(h,g)$$
$$= \int_0^1 f(t)k(t)\, dt + \int_0^1 h(t) g(t)\, dt$$

__Exercice:__

mq l'application.

$\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ est diferentiable
$f \longmapsto f \circ f = f^2$

et determiner sa differentielle.

__Proposition:__

(i) tout application lineaire et continue, est de classe C^1 (même C^∞) sa differentielle seconde est nulle.

(ii) tout application bilineaire est continue est C^1 (même C^∞) et sa differentielle seconde est constante

__Remarque:__ hellu ti: eser el wanso

Pour montrer qu'une application est differentiable en un point a. on effectue les étapes suivantes:

1. les derivées directionnelles $f'(a,h)$, $\forall h \neq 0 \in E$
2. on verifie que l'application $h \longmapsto f'(a,h)$ est lineaire et Cont
3. $f(a+h) - f(a) - f'(a,h) = o(\|h\|)$

(lorsque $h \longrightarrow 0$)

III - dérivée directionnelle :

Définition:

Soit $f : U \longrightarrow F$

U un ouvert $\subset E$

E et F deux $\mathbb{R}$ evn

Soit $a \in U$, on dit que f est différentiable en a dans la direction μ si l'application

$$\varphi : t \longrightarrow f(a+t\mu)$$

est bien définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ (voisinage de o) et dérivable en $t=0$ càd :

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$ existe et finie.

on la note par $\varphi'(0)$.

on note aussi cette dérivée par :

$$f'(a)(h) = f'(a,h) = \boxed{Df(a)(h)}$$ cette notation à éviter

$$Df(a)(h) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

Remarque:

(i) si f est différentiable en a alors f admet en a des dérivées directionnelles suivant toutes les directions,

(ii) si il existe une direction $\mu \in E$ suivant laquelle l'application f n'est pas dérivable en a suivant cette direction alors f n'est pas différentiable en a

(Pour démontrer que f n'est pas différentiable

(iii) l'application f peut admettre des dérivées directionnelle dans tout ($\forall h$) les directions en a sans qu'elle soit différentiable en a.

Contre Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) mq f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $a=(0,0)$

2) f est-elle différentiable ?! justifier votre réponse.

1) $$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(th_1, th_2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(th_1)^2 th_2 / (th_1)^2+(th_2)^2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 h_1^2 h_2}{(th_1)^2+(th_2)^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 h_1^2 h_2}{t^2(h_1^2+h_2^2)} = \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

cette limite existe est finie,

Alors f admet des dérivées directionnelles dans tout les direction en $a=(0,0)$

2) f n'est pas différentiable en $(0,0)$

par l'absurde:

on suppose que f est différentiable en $(0,0)$

$$Df(0,0)(h) = f'((0,0),(h_1,h_2))$$

$$= \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

$$= f(h)$$

n'est possible que si f est linéaire

or f n'est pas linéaire, absurde

IV. Différentielles d'applications à valeurs dans un produit fini d'evm :

Soit $f : U \longrightarrow F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$

$x \longmapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

où U un ouvert $\subset E$

$E, F_1, F_2, \dots, F_m$ sont des evm.

f est différentiable en un point a.

si et ssi

$f_i : U \longrightarrow F_i$

$x \longmapsto f_i(x)$

est différentiable en a, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$

de plus :

$Df(a) : E \longrightarrow F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$

$h \longmapsto Df_1(a)(h), \dots, Df_m(a)(h)$

__Exemple:__

$E = (\mathcal{C}^0[0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$

$F : E \longrightarrow E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$f \longmapsto \left(f^2, \int_0^1 f(t)\,dt, e^{f(0)}\right)$

On note :

$F_1 : E \longrightarrow E$

$f \longrightarrow f^2$

$F_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt$

$F_3 : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto e^{f(a)}$

mq F_i est différentiable et exprimer sa différentielle.

- F_2 est linéaire et continue, donc diff

$DF_2(f) : h \mapsto \int_0^1 h(t)\,dt$

- $F_1(f+h) - F_1(f) = (f+h)^2 - f^2$

$= \underbrace{2fh}_{L_h :\text{ linéaire et continue}} + \underbrace{h^2}_{o(h)}$

$\Rightarrow F_1$ est diff

$DF_1(f) : h \longrightarrow 2fh$ où f est fixé : constante

- $F_3 : E \xrightarrow{\psi} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$

$f \longmapsto f(0)$

$x \longmapsto e^x$

$DF_3(f)(h)$

$\Rightarrow F_3 = \varphi \circ \psi$.

$DF_3 = D(\varphi \circ \psi)$

ψ est linéaire et continue donc diff et sa diff

et sa diff :

$D\psi(f) : h \longrightarrow h(0) \longrightarrow$

φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est diff

et $D\varphi(f) : h \longrightarrow e^h$

$DF_3(f)(h) = [D(\varphi \circ \psi)(f)](h)$

$= [D\varphi(f(0)) \cdot D\psi(f)](h)$

$= h(0)e^{f(0)}$

V Differentielle d'application définie sur un produit d'evn :

· Soit $\mathcal{U}$ un ouvert $\subset E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m$ où les E_i sont des evn $(i = 1, \ldots, m)$

et Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$ une application avec F un evn.

Considérons $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{U}$

on suppose que f est differentiable en a

Theoreme : si f est differentiable en a alors toutes les derivées partielles

$\frac{\partial f}{\partial E_r}(a)$ $(r \in \{1, \ldots, m\})$ exsistent et finies

de plus, on a :

$$Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$ produit Scalaire

avec $h = (h_1, \ldots, h_m)$

et $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial E_m}, \ldots, \frac{\partial f(a)}{\partial E_m} \right)$

Proposition :

Soit $f : \mathcal{U} \subset E_1 \longrightarrow F_1$ diff en $a \in \mathcal{U}$

$g : \mathcal{U} \in E_1 \longrightarrow F_2$ diff en $a \in \mathcal{U}$

$B : F_1 \times F_2 \longrightarrow G$ bilineaire et Continue

Alors l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{U} &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto \Psi(x) = B(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

est differentiable en a.

de plus :

$$D\Psi(a)(h) = B(Df(a)(h), g(a)) + B(f(a), Dg(a)(h))$$

Demonstration :

$$\Psi : \mathcal{U} \xrightarrow{T} F_1 \times F_2 \xrightarrow{\varphi} G$$

$$a \longmapsto (f(a), g(a))$$

$$(x, y) \longmapsto B(x, y)$$

$\Psi(a)(h)\ [\varphi \circ T(a)](h)$

$D\Psi(a)(h) = [D\varphi(T(a))](h)$

$= D\varphi(f(a), g(a)) \circ (Df(a)(h), Dg(a)(h))$

$= B(f(a), Dg(a)(h)) + B(Df(a)(h), g(a))$

Exemple :

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Psi : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto (f)^2 \sin(f) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad t \longmapsto (f(t))^2 \sin(f(t)) \end{aligned}$$

mq Ψ est $\mathcal{C}^1$ et Calculer sa diff.

VI - Cas d'application definie sur un produit à Valeurs dans un produit d'evn :

Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \underbrace{F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m}_{m \text{ evn}}$

une application, où $\mathcal{U}$ est un ouvert

$\mathcal{U} \subset \underbrace{E_1 \times \cdots \times E_m}_{m \text{ evn}}$

f differentiable en a avec $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{U}$

f est differen en a, donc $f_i : \mathcal{U} \longrightarrow F_i$
$a \longmapsto f_i(a)$

sont diff en a, pour $i = 1, \ldots, m$

$Df_i(a)(h) = \langle \nabla f_i(a), h \rangle$

$\forall h \in \mathcal{U}$

$$Df(a) = \prod_{i=1}^{m} E_i \longrightarrow \prod_{j=1}^{m} F_j$$

$$h \longrightarrow (Df_1(a)(h), Df_2(a)(h), \dots, Df_m(a)(h))$$

$$\text{or } (Df_1(a)(h), Df_2(a)(h), \dots, Df_m(a)(h))$$

$$= (\nabla f_1(a)(h), \nabla f_2(a), \dots, \nabla f_m(a)(h))$$

$$\begin{array}{c} \\ \nabla f_1(a) \\ \nabla f_2(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{array} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial E_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial E_m} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial E_m} & \cdots & \frac{\partial f_2(a)}{\partial E_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial E_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial E_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

$$J_f(a) \cdot h$$

la matrice $J_f(a)$ s'appelle la matrice Jacobienne ou aussi la matrice de Jacobi

Exemple:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (x^2 \cdot y, x^2 + y^2, 2xy)$

Question: Calculer la diff de l'app. f au point $(1,1)$

$f_1(x,y) = x^2 \cdot y$

$f_2(x,y) = x^2 + y^2$

$f_3(x,y) = 2xy$

$\frac{\partial f_1}{\partial E_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xy + x^2$

$\frac{\partial f_2}{\partial E_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x + y^2 + x^2 + 2y$

$\frac{\partial f_3}{\partial E_3} = \frac{\partial y}{\partial x}$

en $(1,1)$

$$J_f(x,y)(h) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$J_f(1,1)(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2h_1 + h_2 \\ 2(h_1 + h_2) \\ 2(h + h_2) \end{pmatrix}$$

VII - Différentielle seconde:

Soit $f: U \longrightarrow F$

U est un ouvert $\subset E$

E et F deux evn

On dit que f est 2 fois différentiable en un pt $a \in U$ lorsque il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ où V un ouvert inclus dans U tq f est différentiable sur V et $Df: V \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est différentiable en a.

Dans ce cas la différentielle seconde de f en a est donnée par:

$$D^2f(a): E \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$$

donc $D^2f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$

Remarque:

- interprétation de la différentielle seconde:

$D^2f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$

Pour $h \in E$,

$D^2 f(a)(h) \in \mathcal{L}(E,F)$ linéaire et Continue en h.

Pour $k \in E$,

$D^2 f(a)(h)(k)$ application linéaire et Continue en k

donc $D^2 f(a)$ bilinéaire et Continue

$$D^2 f(a) : E \times E \longrightarrow F$$
$$(h,k) \longrightarrow D^2 f(a)(h,k) = D^2 f(a)(h)(k)$$

Théorème de Schwarz:
Si f est deux fois différentiable en un point $a \in \mathcal{U}$, alors :
$$D^2 f(a)(h,k) = D^2 f(a)(k,h)$$
càd $D^2 f(a)$ est Symétrique.

Exemples:

1) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \langle x,x\rangle \text{ produit scalaire}$$

Question: Trouvez $D^2 f$ et vérifiez quelle est bilinéaire, Continue et Symétrique.

Réponse

$$f(a+h) - f(a) = \langle a+h, a+h\rangle - \langle a,a\rangle$$
$$= \langle a,a\rangle + \langle a,h\rangle + \langle h,a\rangle + \langle h,h\rangle - \langle a,a\rangle$$
$$= \underbrace{2\langle a,h\rangle}_{L_a\, =\, ?} + \underbrace{\langle h,h\rangle}_{=\, o(\|h\|)\, ?}$$

- linéarité : évident.
- Continuité:

$$|\langle a,h\rangle| \leq \underbrace{2\|a\|}_{=C}.\|h\|$$

vérifions que $\langle h,h\rangle = o(\|h\|)$

$$|\langle h,h\rangle| \leq \|h\|^2$$
$$\Rightarrow \frac{|\langle h,h\rangle|}{\|h\|} \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$$

d'où f est diff. et $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$Df(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \longrightarrow 2\langle x,h\rangle$$

$Df(.)$ est linéaire et Continue en x donc diff et sa différentielle est :

$$D^2 f = Df[h \longrightarrow 2\langle a.h\rangle](k)$$
$$= \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(h,k) \longmapsto 2\langle h,k\rangle$$

2) Soit $b : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire et Continue.

Question : trouvez $D^2 b$

b est différentiable sur $E \times F$ et de plus on a.

$$Db(x,y) : E \times F \longrightarrow G$$
$$(h,k) \longmapsto b(x,k) + b(h,y)$$

$$Db((x,y) + \lambda(x',y'))$$
$$= Db(x,y) + \lambda Db(x',y')$$

$$D^2 b(x,y) = D[(h,k) \longrightarrow b(x,k) + b(h,y)](h',k')$$

$$D^2 b(x,y) : E \times F \times E \times F \longrightarrow G$$
$$((h,k),(h',k')) \longrightarrow b(h',k) + b(h,k')$$

Définition:

Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$

$\mathcal{U}$ ouvert $\subset E$

E et F deux evn

Soit $m \geqslant 2$

on dit que f est m fois diff en a lorsqu'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tq f soit $(m-1)$ fois diff sur V.

$$D^{m-1} f : V \longrightarrow \mathcal{L}_{m-1}(E,F)$$

est diff en a.

$\mathcal{L}_{m-1}(E,F) = \{ \underbrace{E \times \dots \times E}_{(m \text{ fois})} \longrightarrow F, (m-1) \}$

ensemble des application $(m-1)$ continue et linéaire.

dans ce cas:

$$D^m f(a) : \underbrace{E \times \dots \times E}_{m \text{ fois}} \longrightarrow F$$

$$(h_1, \dots, h_m) \longmapsto Df(a)(h_1, \dots, h_m)$$

est m linéaire et continue.

Généralisation du théorème de Schwartz

si f est m fois diff. en un point a alors pour tout $(h_1, h_2, \dots, h) \in E^m$ et $\forall$ σ permutation, $\sigma : \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, m\}$ on a :

$$D^m f(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(m)})$$

$$= D^m (h_1, \dots, h_m)$$

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^m$

trouvez $D^m f$.

- pour $m = 2$

$D f(x) = 2 x . h_1$; $D^2 f = 2 h_1 h_2$

- pour $m = 3$, $Df(x) = 3x^2 h_1$

$D^2 f(x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(h_1, h_2) \longmapsto 6x^2 h_1 h_2$

$D^3 f(x) = 6\, h_1 h_2 h_3 = 3!\, h_1 . h_2 . h_3$

pour $m \geqslant 2$, on peut vérifier que

$$D^m f(x) : \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{m \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(h_1, \dots, h_m) \longmapsto m!\, h_1 \dots h_m$$

Théorème : (Taylor Young)

Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$

$\mathcal{U}$ ouvert $\subset E$

E et F deux evn

on suppose que f est m fois diff en un pt a, alors on a :

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(h)^2 + \dots + \frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m + o(\|h\|)^m$$

(lorsque $h \longrightarrow 0$)

Remarques

1) Souvent on note :

$D^m f(a)(h)^m = D^m f(a)(h_1, \dots, h_m)$

2) si f est deux fois différentiable en un point a alors:

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(h)^2 + o(\|h\|^2).$$

si on suppose que a est un point critique

$Df(a)(h) = 0$

donc $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} D^2 f(a)(h)^2 + o(\|h\|^2)$

par suite la nature de ce point (min/max) est donnée par le signe de $D^2 f(a)(h)^2$

Théorème de Taylor avec reste intégral :

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \longrightarrow F$

F est un evn complet de classe C^{m+1}, alors

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^m}{m!} f^{(m+1)}$$