Chapitre 2. Transformée en z

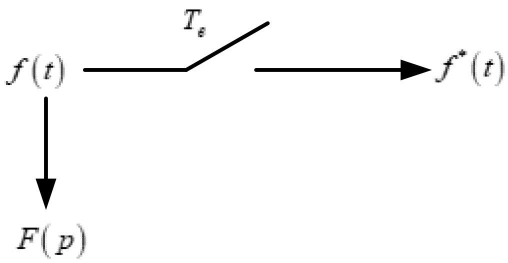
1. Définition

Soit un signal $f(t)$ (fonction continue) :

$$f(t) \ \underrightarrow{TL} \ TL\left(f(t)\right) = F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \ ;$$

$$f(t) \ \underrightarrow{Z} \ Z\left(f(t)\right) = F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e) z^{-n} , \ z = e^{T_e p}$$

$$TL\left(f^*(t)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e) e^{-nT_e p}$$



2. Exemple

Soit $f(t) = u(t) = \begin{Bmatrix} o \text{ si } t<0 \\ 1 \ \text{ sinon} \end{Bmatrix}$

Calculer $F(z)$.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-n} + \ldots.$$

$$\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, \quad \begin{matrix} z^{-N} \to 0 \\ |z| < 1 \end{matrix} .$$

$$F(z) = \frac{z}{z-1}.$$

3. Propriétés

3.1.Linéarité

$f(t) \underset{\rightarrow}{Z} \mathrm{F}(z)$

$g(t) \underset{\rightarrow}{Z} \mathrm{G}(z)$

Soit $(\alpha,\beta) \in \Re$.

$\alpha f(t)+\beta g(t) \underset{\rightarrow}{Z} = \mathrm{H}(z) = \alpha \mathrm{F}(z) + \beta \mathrm{G}(z)$.

Démonstration :

$$\mathrm{H}(z) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e) z^{-n} + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} g(nT_e) z^{-n} = \alpha \mathrm{F}(z) + \beta \mathrm{G}(z)$$

3.2.Le retard :

En continu : $TL\left(f(t-\tau)\right) = e^{-\tau p} F(p)$.

En échantillonné, le retard est multiple de la période d'échantillonnage T_e.

$f(t) \underset{\rightarrow}{Z} \mathrm{F}(z)$

$$f(t-kT_e) \underset{\rightarrow}{Z} \mathrm{G}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e - kT_e) z^{-n} ;$$

On pose $m = n-k$; $\mathrm{G}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(mT_e) z^{-(m+k)}$

$$\mathrm{G}(z) = z^{-k} \sum_{n=0}^{+\infty} f(mT_e) z^{-m}$$

$$Z\left(f(t-kT_e)\right) = z^{-k} Z\left(f(t)\right) .$$

3.3. Avance

$f(t) \underset{\rightarrow}{Z} \mathrm{F}(z)$

$$f(t+kT_e) \underset{\rightarrow}{Z} \mathrm{G}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e + kT_e) z^{-n}$$

On pose $m = n+k$; $\mathrm{G}(z) = z^{k} \sum_{n=0}^{+\infty} f(mT_e) z^{-n}$

$$G(z)=z^{k}\sum_{m=0}^{k-1} f(mT_e)z^{-n}.$$

3.4.Théorème de la valeur initiale

En continu **:** $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\lim\limits_{P\to+\infty} pF(p)$.

En échantillonné : $\lim\limits_{n\to 0} f(nT_e)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)z^{-n}$ = $f(0)+f(T_e)z^{-1}+f(2T_e)z^{-2}+....$

$\lim\limits_{n\to 0} f(nT_e)=\lim\limits_{z\to+\infty} F(z)$.

3.5.Théorème de la valeur finale

En continu : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{P\to 0} pF(p)$ **.**

En échantillonné : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nT_e)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)z^{-n}$

$= f(0)+f(T_e)z^{-1}+f(2T_e)z^{-2}+....f(nT_e)z^{-n}+...$

$(z-1)F(z)=zf(0)-f(0)+f(T_e)-f(T_e)z^{-1}+f(2T_e)-f(2T_e)z^{-2}....$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(nT_e)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)\, F(z)$.

3.6.Multiplication par t

Calculer $Z(tf(t))$.

$$Z(tf(t))=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((nT_e)\, f(nT_e)\right)z^{-n}$$

$$=T_e\sum_{n=0}^{+\infty}\left(f(nT_e)\right)nz^{-n}=-T_e\sum_{n=0}^{+\infty}\left(f(nT_e)\right)(-n)z^{-n}=-T_e\sum_{n=0}^{+\infty}\left(f(nT_e)\right)(-n)z^{-n-1}z=$$

$$-T_e\sum_{n=0}^{+\infty}\left(f(nT_e)\right)\frac{dz^{-n}}{dz}=-T_e z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(f(nT_e)\right)z^{-n}=-T_e z\frac{dF(z)}{dz}.$$

Application : calculer $Z(tu(t))=\dfrac{T_e z}{(z-1)^2}$.

3.7.Translation complexe

Calculer $Z\left(e^{-at}f(t)\right)$.

$$Z\left(e^{-at} f(t)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-anT_e} f(nT_e) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)\left(ze^{aT_e}\right)^{-n} = F\left(ze^{aT_e}\right).$$

Exemple : soit $f(t) = u(t)$

$$Z\left(e^{-at} f(t)\right) = F\left(e^{-at}\right) = \frac{Z}{Z-1}$$

Avec: $Z = ze^{aT_e}$.

$$Z\left(e^{-at} f(t)\right) = \frac{ze^{aT_e}}{ze^{aT_e}-1}.$$

4. Transformée en z inverse

4.1. Division Euclidienne

$$F(z) = \frac{2z+1}{z^2+3z+1}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\quad 2z+1 & z^2+3z+1 \\
\hline
2z+6+4z^{-1} & 2z^{-1}-5z^{-2}+11z^{-3}+\dots \\
\hline
-5-4z^{-1} & \\
-5-15z^{-1}-10z^{-2} &
\end{array}$$

$$F(z) = \frac{2z+1}{z^2+3z+1} = 2z^{-1} - 5z^{-2} + 11z^{-3} + \dots$$

$$= f(0) + f(T_e)z^{-1} + f(2T_e)z^{-2} + f(3T_e)z^{-3} + \dots.$$

$$f(0) = 0,\ f(T_e) = 2,\ f(2T_e) = -5,\ f(3T_e) = 11.$$

4.2. Décomposition en éléments simples

Soit $F(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$;

On decompose $\dfrac{F(z)}{z}$.

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{(z-a_i)} \Rightarrow F(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i z}{(z-a_i)}$$

$$\frac{z}{z-a_i} \xrightarrow{Z^{-1}} (a_i)^n$$

$$f(nT_e) = \sum_{i=1}^{m} A_i (a_i)^n .$$

Exemple : $F(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 1.3z + 0.4} = \dfrac{2z}{(z-0.8)(z-0.5)}$.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{(z-0.8)(z-0.5)} = \frac{A}{(z-0.8)} + \frac{B}{(z-0.5)}$$

$$A = \frac{20}{3}, B = -\frac{20}{3} .$$

$$F(z) = \frac{\frac{20}{3}z}{(z-0.8)} + \frac{\frac{-20}{3}z}{(z-0.5)}$$

$$f(nT_e) = -\frac{20}{3}(0.5)^n + \frac{20}{3}(0.8)^n .$$

5. Résolution des équations récurrentes

On considère l'équation récurrente suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i e(k-i) .$$

Le but c'est calculer $x(k)$ en connaissent les a_i, les b_i et les $e(k-i)$.

Transformée en z :

$x(k) \xrightarrow{Z} \mathrm{X}(z)$

$x(k-1) \xrightarrow{Z} z^{-1}\mathrm{X}(z)$

....

$x(k-n) \xrightarrow{Z} z^{-n}\mathrm{X}(z)$

$e(k) \xrightarrow{Z} \mathrm{E}(z)$

$e(k-1) \xrightarrow{Z} z^{-1}E(z)$

....

$e(k-m) \underset{\rightarrow}{Z} z^{-m}E(z)$

A la fin on aura : $\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i} X(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i} E(z)$

$$X(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i} E(z)}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}$$

$$\Big\downarrow Z^{-1}$$

$$x(k)$$