Équation de conservation de la masse ou équation de continuité

Définitions :

Débit

Le débit est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

Débit-volumique

Si ΔV est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt, par définition le débit-volumique est en **$m^3 \cdot s^{-1}$**.

$$\boxed{q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}}$$

Débit-massique

Si Δm est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt, par définition le débit-massique est en **$kg \cdot s^{-1}$**

$$\boxed{q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}}$$

Relation entre q_m et q_V

La masse volumique ρ est donnée par la relation : $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ d'où : $q_m = \rho\, q_V$

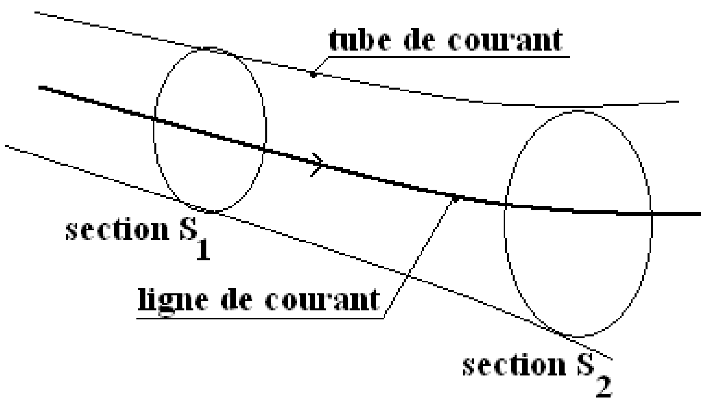
Conservation du débit

Considérons un tube de courant entre deux sections S_1 et S_1. Pendant l'intervalle de temps Δt, infiniment petit, la masse Δm_1 de fluide ayant traversé la section S_1 est la même que la masse Δm_2 ayant traversé la section S_2.

$q_{m1} = q_{m2}$ ***En régime stationnaire, le débit-masse est le même à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant.***

Dans le cas d'un **écoulement iso volume** (ρ = Cte) :

$q_{v1} = q_{v2}$ ***En régime stationnaire, le débit-volume est le même à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant***



Expression du débit en fonction de la vitesse v

Le débit-volume est aussi la quantité de liquide occupant un volume cylindrique de base S et de longueur égale à v, correspondant à la longueur du trajet effectué pendant l'unité de temps, par une particule de fluide traversant S.

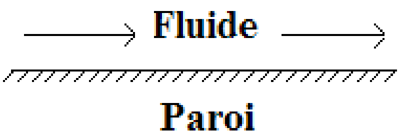
Il en résulte la relation importante : $\boxed{q_v = v\, S}$

Abbassi Fakhreddine

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES EN ECOULEMENT PERMANENT

1- Généralités :

- incompressible (peu dilatables) : masse volumique constante : $\rho = C\,te$
- permanent : Un régime d'écoulement est dit ***permanent*** ou ***stationnaire*** si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ...), ont une valeur constante au cours du temps : indépendant du temps $\left(\frac{d}{dt} = 0\right)$
- Fluide parfait (idéal) : pas de frottements (non visqueux).



un fluide parfait est un fluide dont l'écoulement se fait sans frottements

2- conservation de l'énergie : Equation de Bernoulli

L'énergie d'un fluide en mouvement est dûe à :

- L'altitude : Energie potentielle de pesanteur ou de position.
- La pression : Energie potentielle de pression ou pression statique
- La vitesse : Energie cinétique ou pression dynamique

Energie potentielle

Lorsqu'il n'a pas de forces extérieures qui agissent sur un fluide parfait incompressible en écoulement permanent, l'énergie mécanique volumique reste constante et se transforme d'un point à un notre du domaine fluide d'énergie cinétique on pression statique ou en énergie potentielle de position et vice-versa .
L'énergie dûe à : (l'altitude + la pression + la vitesse) = constante

$$p + \rho g z + \rho\frac{v^2}{2} = \textbf{Constante} \quad \text{Equation de Bernoulli}$$

p est la <u>pression statique</u>, $\rho g z$ est la <u>pression de pesanteur</u>, $\rho\frac{v^2}{2}$ est la <u>pression cinétique</u>.

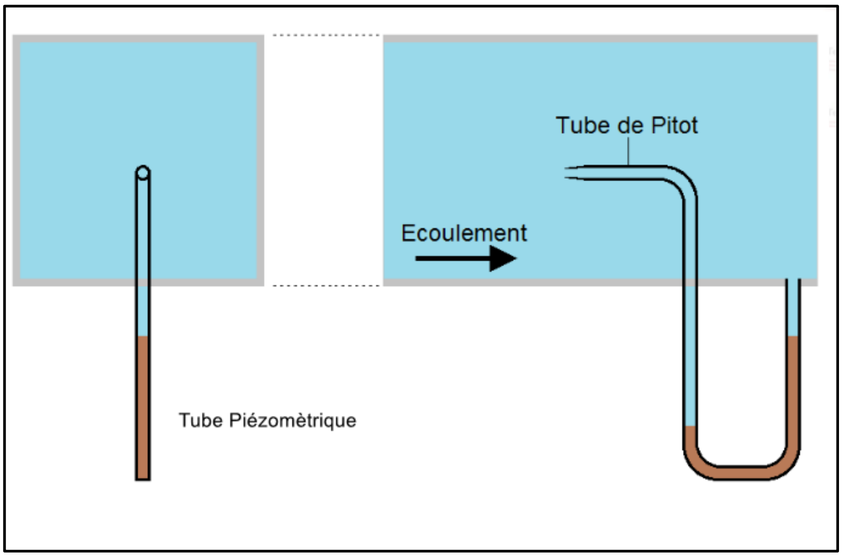
Tous les termes s'expriment en pascal.

b-en hauteur (m)

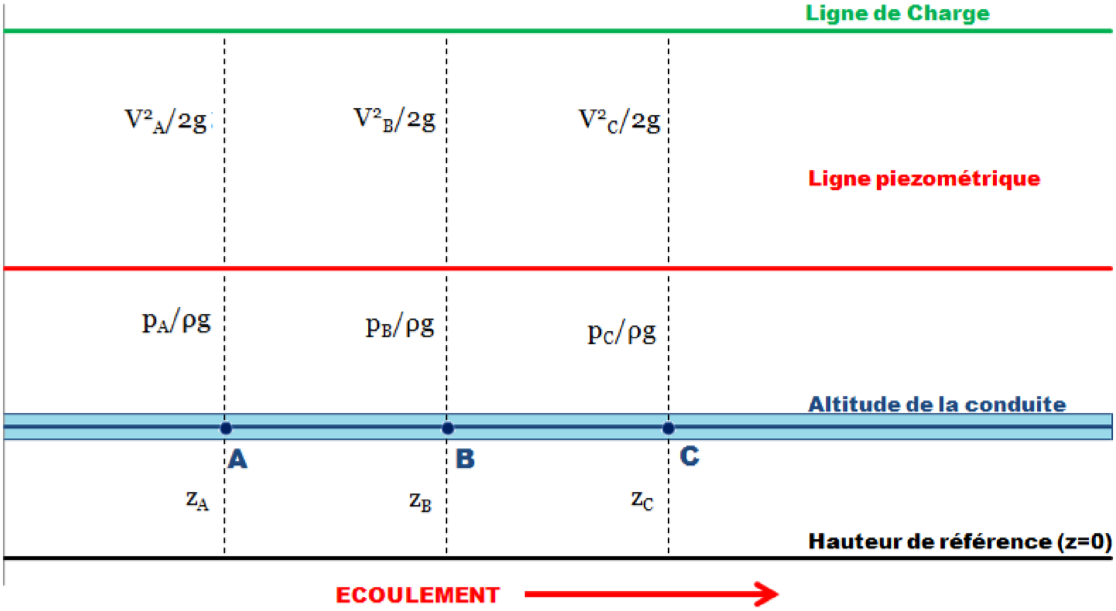
En divisant tous les termes de la relation précédente par le produit ρg, on écrit tous les termes dans la dimension d'une hauteur (pressions exprimées en mètres de colonne de fluide).

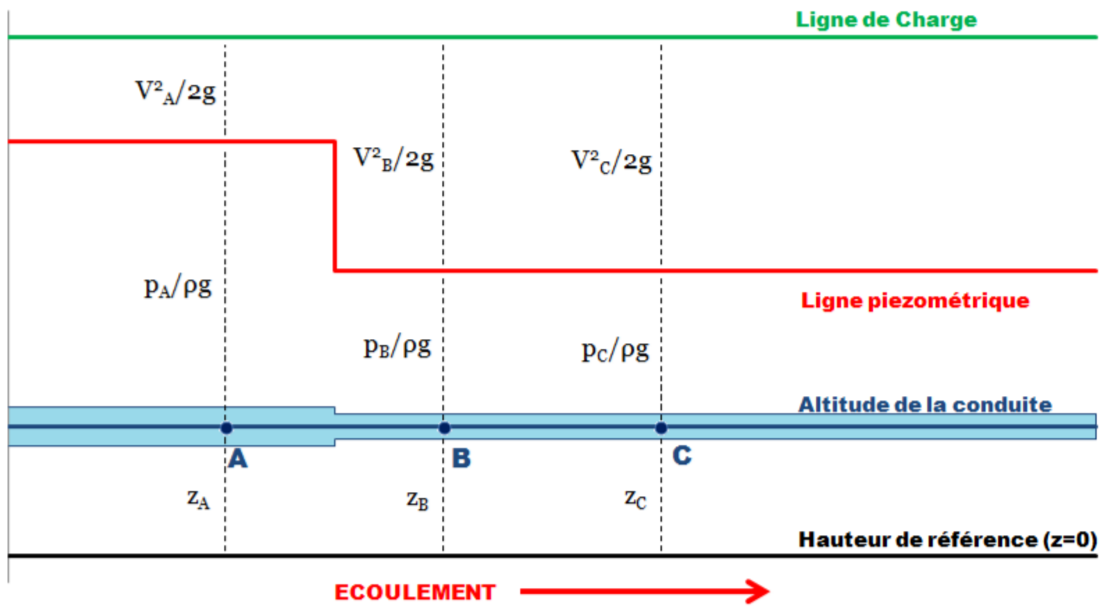
$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} = Cte = H_t \text{ (charge totale).}$$

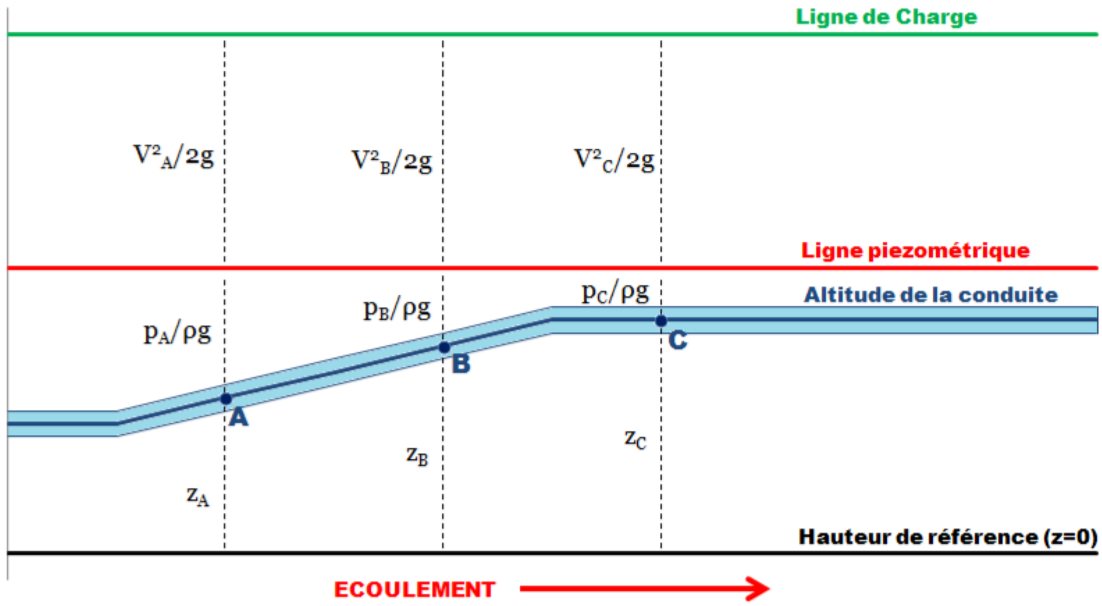
Chaque terme est homogène à une hauteur.

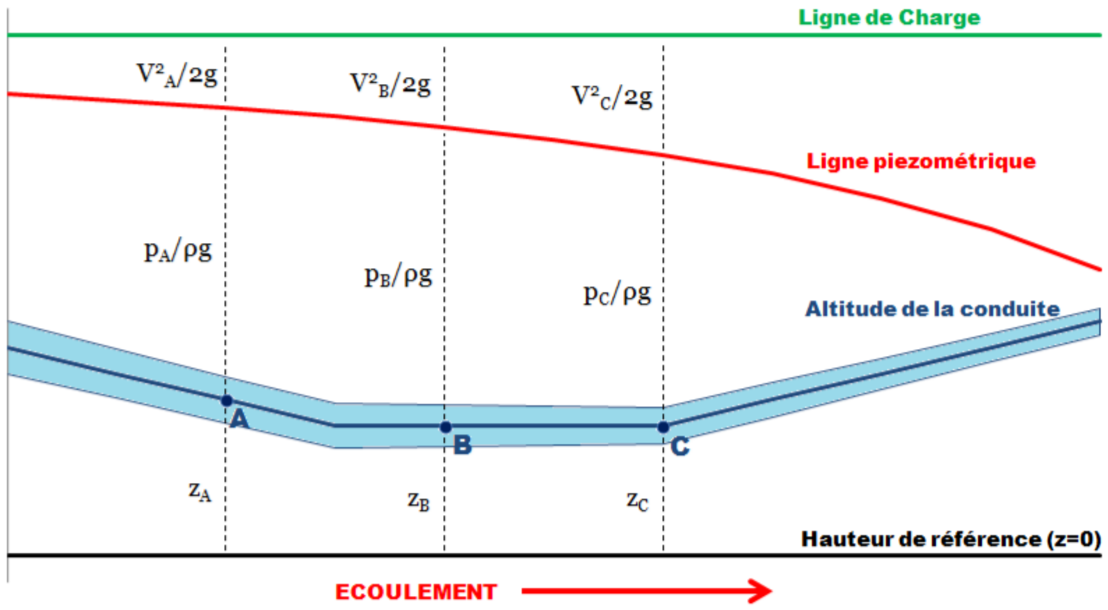


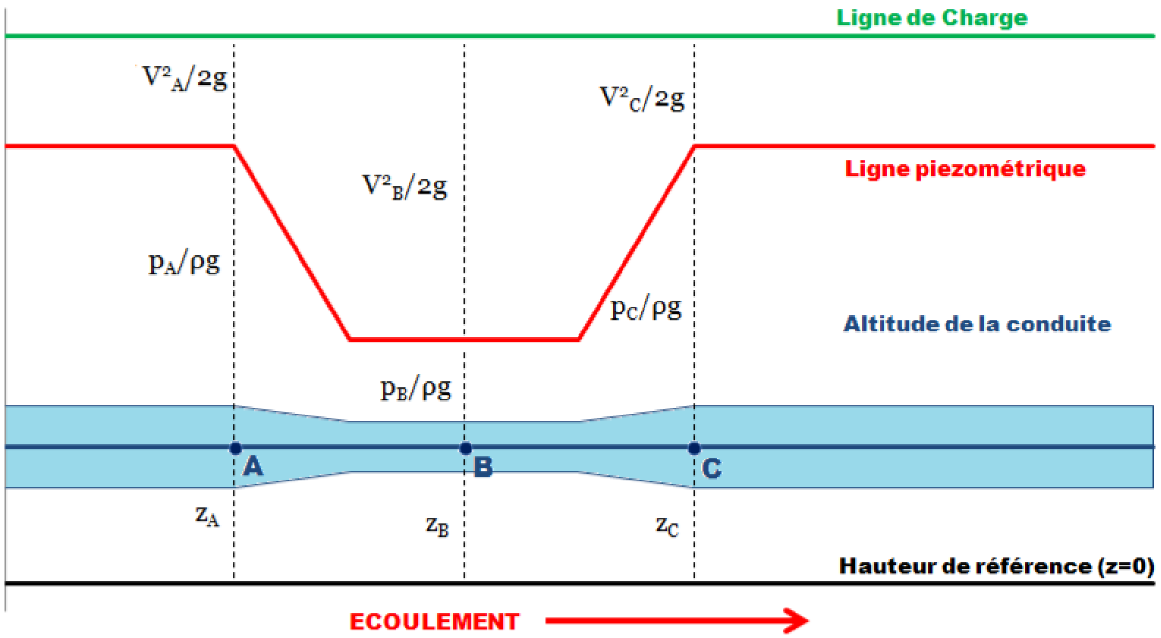
La ligne de charge est donnée par un tube de Pitot , tandis que la ligne piézométrique est donnée par un tube piézométrique perpendiculaire à l'écoulement




Ligne de Charge
V²A/2g
V²B/2g
V²C/2g
pA/ρg
Ligne piezométrique
pB/ρg
pC/ρg
Altitude de la conduite
A
B
C
zA
zB
zC
Hauteur de référence (z=0)
ECOULEMENT


Ligne de Charge
V²A/2g
V²B/2g
V²C/2g
Ligne piezométrique
pC/ρg
Altitude de la conduite
pB/ρg
pA/ρg
A
B
C
zB
zC
zA
Hauteur de référence (z=0)
ECOULEMENT





c - Equation de Bernoulli entre 2 points ou 2 sections

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = Cte$$

ou autrement , on peut écrire

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g\left(z_2 - z_1\right) + \left(p_2 - p_1\right) = 0}$$ ou

$$\boxed{\frac{1}{2g}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \left(z_2 - z_1\right) + \frac{\left(p_2 - p_1\right)}{\rho g} = 0}$$

ECOULEMENTS VISQUEUX DANS LES CANALISATIONS EN CHARGE

2 - Régimes d'écoulement :

L'expérience très simple effectuée par Reynolds a montré l'existence de deux régimes d'écoulement ***: Régime laminaire et régime turbulent***

En faisant varier le débit (la vitesse) et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer le régime d'écoulement est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds qui est donné par :

$$R = \frac{\rho . V . D}{\mu} = \frac{V . D}{\nu} = R_e$$ avec

ρ : masse volumique du fluide.

V : vitesse moyenne

D : diamètre de la conduite

μ :viscosité dynamique du fluide.

ν : viscosité cinématique du fluide. $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

si Re < 2000 le régime est LAMINAIRE

si 2000 < Re < 3000 le régime est intermédiaire (transitoire)

si Re > 3000 le régime est TURBULENT

3 - Pertes de charge :

Un fluide circulant dans une conduite et soumis à une force de frottement due à la viscosité et à l'état de surface de la conduite . Ce frottement provoque une perte d'énergie, donc une perte de charge.

En considérant une canalisation rectiligne cylindrique de grande langueur et en se plaçant dans une région du conduit oŭ l'écoulement est établit (profil des vitesses indépendant de la section considérée) et en régime laminaire ou turbulent .on applique le théorème de Bernoulli entre deux sections S_1 et S_2

$$p_1 + \rho . g . h_1 + \rho \frac{V_1}{2}^2 = p_2 + \rho . g . h_2 + \rho \frac{V_2}{2}^2 + \Delta p_t$$

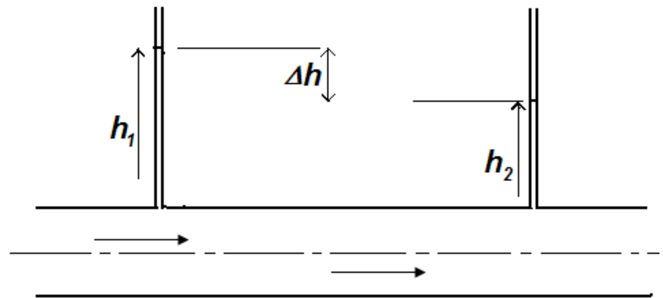
Ecoulement établi $V_1 = V_2$

on pose $p_g = p + \rho . g . h$ $\Longrightarrow$ $\Delta P_t = p_{g1} - p_{g2}$

D'un point de vue énergétique, la perte de charge se manifeste par une perte de pression motrice .
Pour une longueur l , elle peut se mesurer facilement au moyen de deux tubes piézométriques .

on a :

$$\begin{cases} P_{g1} = P_{at} + \rho g h_1 \\ P_{g2} = P_{at} + \rho g h_2 \end{cases}$$



<u>Facteurs de perte de charge :</u>

Les pertes de charge d'un écoulement dépendent de la forme, des dimensions et de la rugosité de la canalisation ; de la vitesse d'écoulement et de la viscosité du fluide (masse volumique).

<u>Calcul des pertes de charge</u>

Le calcul des pertes de charge dépend des principales grandeurs suivantes :

Caractéristiques de la canalisation : *section (diamètre D)
*longueur L
*rugosité k ou k_s ou δ (hauteur moyenne des aspérités de la paroi).

Caractéristiques du fluide : *masse volumique ρ
*viscosité cinématique ν

Caractéristique de l'écoulement : *vitesse moyenne V

Les pertes de charge sont de deux types :

- Perte de charge **linéaire** (ou régulière) : due au frottements dans une conduite de section constante et de longueur l .
- Perte de charge **singulière** . due aux singularités : coude - élargissement – diaphragme vanne - branchement …

*<u>***Perte de charge linéaire***</u>

Elle dépend de la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent)
La perte de charge linéaire peut être obtenue à partir de :

$$\Delta J = \Delta P = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v^2}{2} \quad \text{ou} \quad \Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{\Delta P}{\rho . g}$$

Avec : L – longueur de la conduite
D – diamètre intérieur de la conduite
v – vitesse moyenne de l'écoulement
ρ - masse volumique du liquide

Abbassi Fakhreddine

λ - facteur de frottement sans dimension , fonction du nombre de Reynolds (R) et de la rugosité relative $(\frac{\delta}{D})$

On peut déterminer λ à partir de l'une des expressions suivantes :

- Régime laminaire (R < 2000)
  λ **= 64 / Re** loi de Poiseuille (théorique)
- Turbulent lisse 2000 < R < 10^5
- λ **= 0.3164 / $Re^{1/4}$** : formule de Blasius .
- Turbulent rugueux . $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\log(\delta / D) + 1.14$$

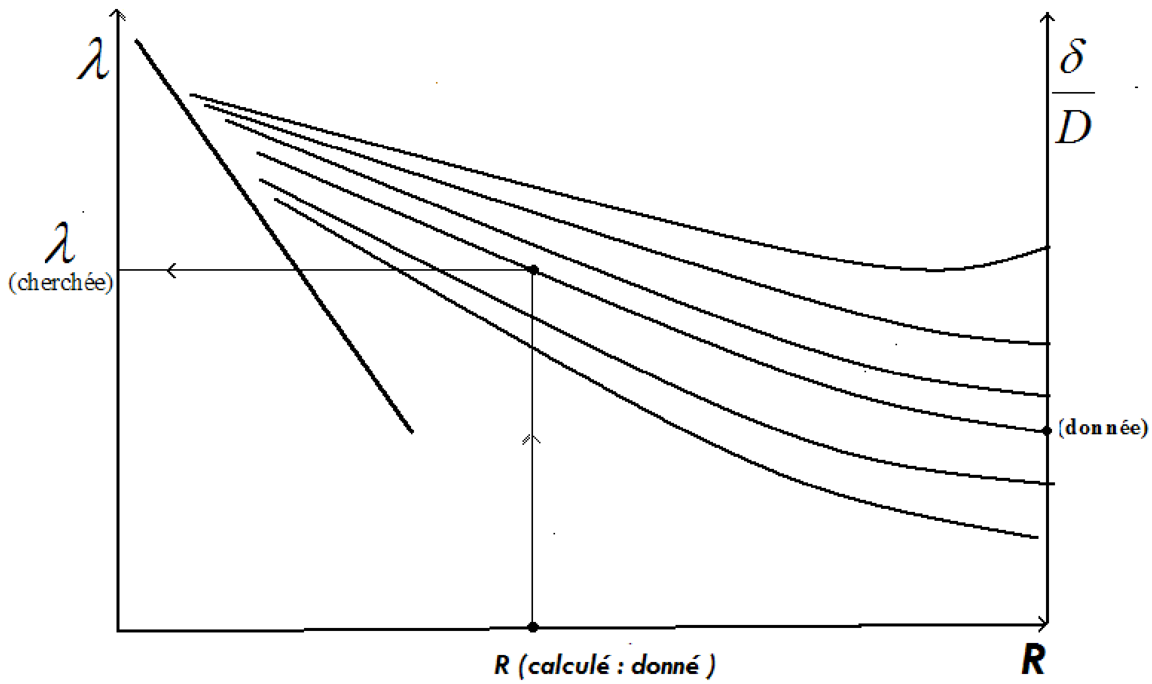
La rugosité absolue d'une paroi représente l'épaisseur moyenne des aspérités de surface du matériau composant la conduite. On la note ε , et on l'exprime le plus souvent en millimètres.

Pour une conduite d'un diamètre donné, on appelle rugosité relative le rapport $\frac{\varepsilon}{D}$. Pour calculer ce rapport, il faut veiller à exprimer les deux termes dans la même unité.

La rugosité ne joue aucun rôle dans les pertes de charges en écoulement laminaire, mais est décisive pour une certaine classe d'écoulements turbulents.

La meilleure alternative à ce calcul itératif est d'utiliser directement le **diagramme de Moody**.

Il s'agit d'un abaque de calcul direct du coefficient de perte de charge, à partir du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la paroi interne de la conduite.



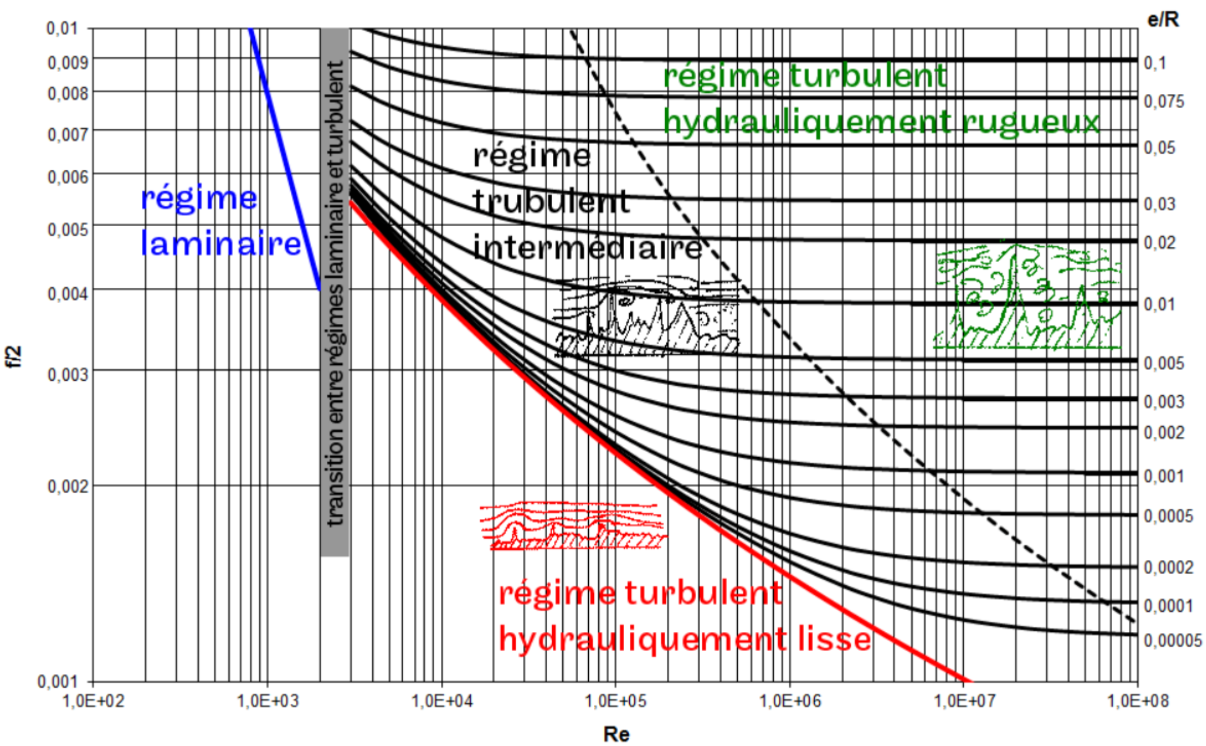


diagramme de MOODY avec illustration des différents régimes

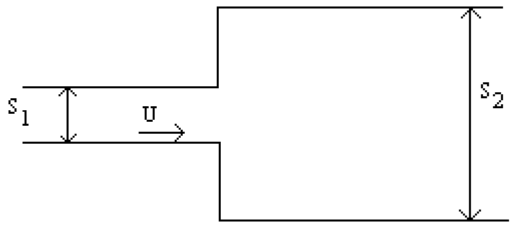
Abbassi Fakhreddine

*** Perte de charge singulière .**

$$\Delta p = \Delta J = k\rho \frac{U^2}{2} \quad \text{ou} \quad \Delta H = k\frac{U^2}{2g} = K\frac{\rho . U^2}{2} = \frac{\Delta P}{\rho . g}$$

*** Divergent brusque**

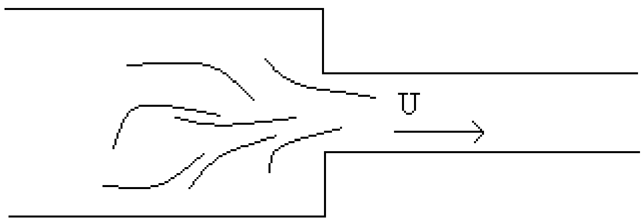
$$k = (1 - \frac{S_1}{S_2})^2$$



Donc on aura $\Delta J = \rho \frac{U^2}{2}(1 - \frac{S_1}{S_2})^2$

.

***Rétrécissement brusque**



K = 0.5

$$\Delta J = 0{,}5\rho \frac{U^2}{2}.$$

$$\Delta H = 0{,}5\frac{U^2}{2g}$$

Coude

Pour un coude arrondi, le coefficient de perte de charge adimensionnel se calcule par la relation :

$$k = \left[0{,}131 + 1{,}847\left(\frac{d}{2\,r}\right)^{3{,}5}\right]\frac{\theta}{90}$$

Avec

- d : diamètre intérieur du coude. [m]
- r : rayon de courbure du coude. [m]
- θ : déviation. [°]

Une fois la valeur de ce coefficient connue, le calcul de la perte de charge se fait par l'utilisation de la relation :

$$\Delta h = k\frac{\bar{V}^2}{2} \quad [\text{mCE}]$$

Avec

- V : Vitesse moyenne dans le coude arrondi. [m/s]