PLAN

1. **Introduction**
2. **Rappel : La Statique**
3. **Théories élémentaires de la Résistance Des Matériaux « RDM »**
4. **Torseur des efforts intérieurs-Notion de contraintes**
5. **Traction simple – Compression simple**
6. **Cisaillement simple**
7. **Torsion des poutres circulaires**
8. **Flexion simple**
9. **Flambement**

I-Hypothèses

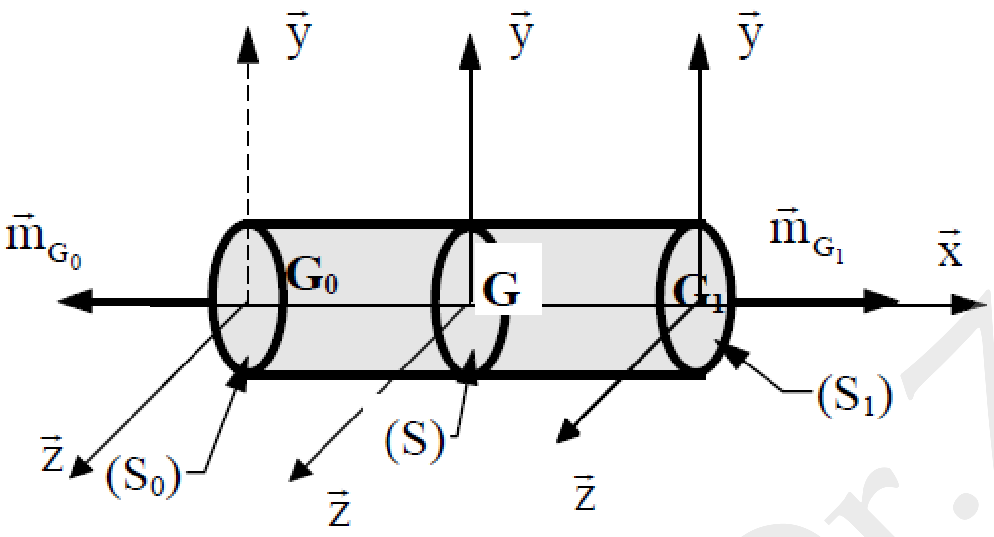
- On se restreint à l'étude des poutres à section droite circulaire car pour les autres types de poutre:
  - les sections ne restent pas planes et se gauchissent;
  - la contrainte de cisaillement ne peut pas être tangente au contour non circulaire de la section.
- Le poids du solide étudié est négligé.

II-Définition

- Une poutre est sollicitée à la torsion simple quand les éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion s'expriment dans le repère de définition des sollicitations R lié à la section droite (S) de centre de surface G par :

$$\boxed{\{\tau_{int}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_G = M_t\vec{x} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G}$$

- Un cylindre de révolution est soumis à un ensemble d'actions mécaniques modélisées au centre de surface des deux sections extrêmes par un torseur couple :



$$\boxed{\{\tau_0\}_{G_0} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{G_0}} \end{Bmatrix}_{G_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\{\tau_1\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{G_1}} \end{Bmatrix}_{G_1}}$$

- L'équilibre général de la poutre impose:

$$\boxed{\overrightarrow{M_{G_0}} + \overrightarrow{M_{G_1}} = \vec{0}}$$

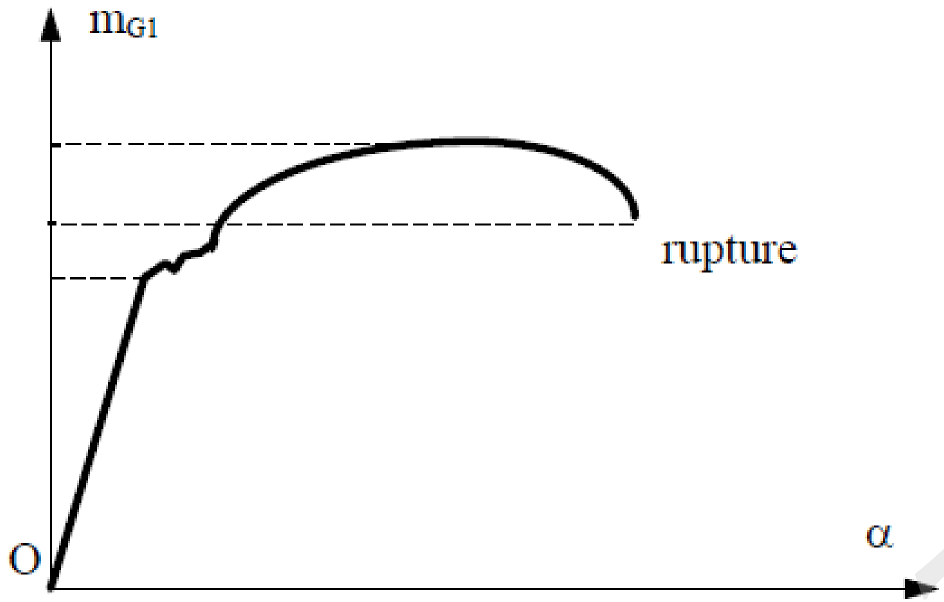
III-Essai de torsion simple

- Une éprouvette cylindrique de révolution est encastrée à son extrémité (S0) de centre de surface G0. On applique à l'extrémité droite sur la section (S1) de centre de surface G1 une action mécanique modélisée en G1 par un torseur « couple » :

$$\boxed{\{\tau_1\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{G_1}} \end{Bmatrix}_{G_1}} \quad \text{Tel que} \quad \boxed{\overrightarrow{M_{G_1}} = M_{G_1}\vec{x}}$$

- On augmente graduellement la valeur de M_{G_1} et on mesure la rotation d'angle α d'une section droite autour de son axe. La courbe obtenue a une allure semblable à celle de l'essai de traction.

TORSION SIMPLE

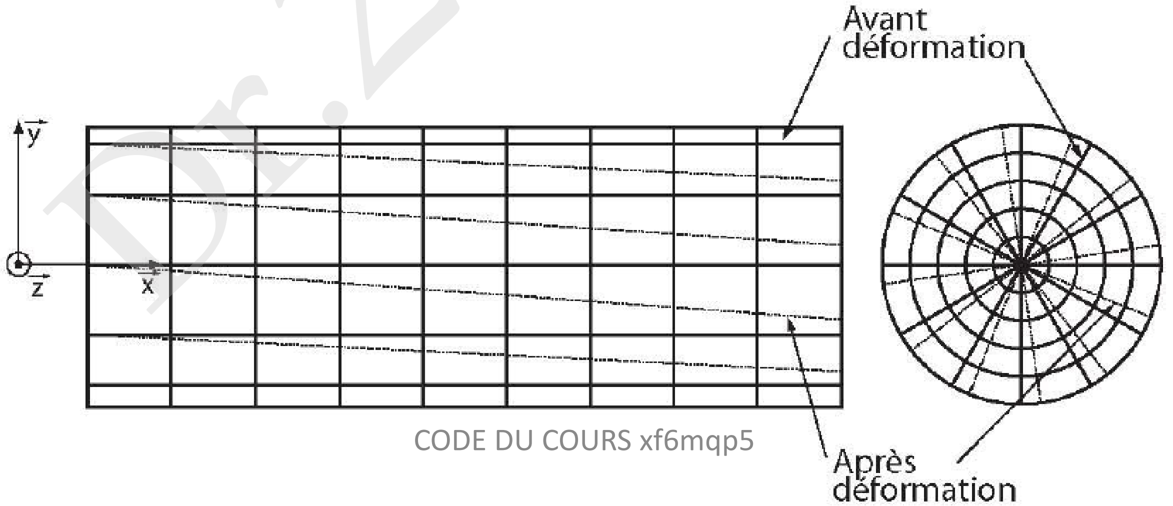


Essai de torsion simple

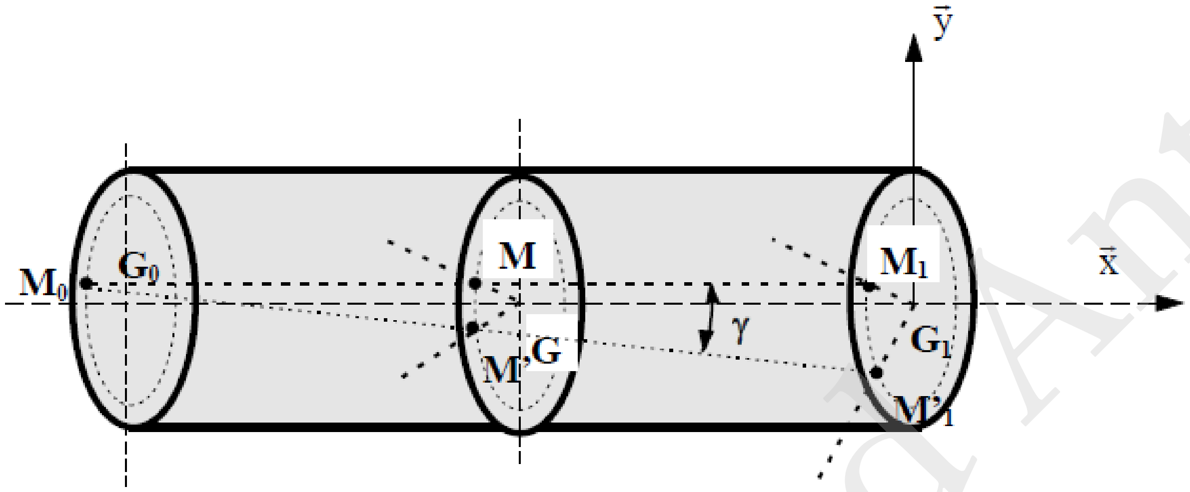
IV-Étude des déformations

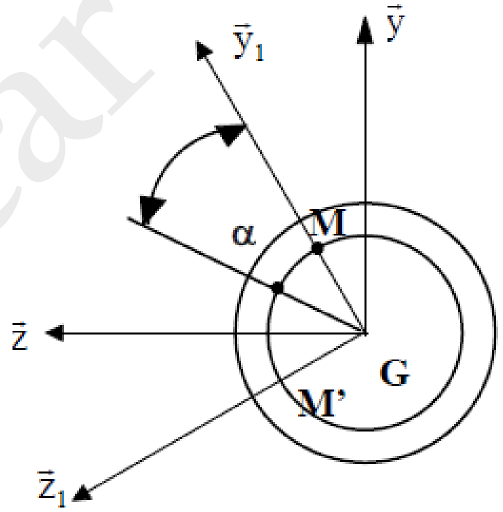
L'essai montre que :

- Toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe.
- La distance relative entre deux sections reste sensiblement constante.
- Dans une section droite, il n'y a pas de déformation longitudinale donc de contrainte normale, la section (S) subit uniquement une rotation d'angle α proportionnel à sa distance x par rapport à la surface (S_0) → les seules contraintes sont donc des contraintes tangentielles.



TORSION SIMPLE





- Avant déformation, les points M_0, M et M_1 sont situés sue la même génératrice.
- Après déformation, le point M vient en M' et le point M_1 vient en M'_1.
- Dans la zone des déformations élastiques, on appelle angle unitaire de torsion, la déformation angulaire relative θ entre deux sections distantes de l'unité de longueur :

$$\boxed{\theta = \alpha / x}$$

<u>Unités:</u> α (rad), x (mm) et θ (rad/mm)

TORSION SIMPLE

- L'essai montre que θ est une constante. Toutes les fibres se déforment donc suivant une hélice, sauf la ligne moyenne qui reste droite.
- D'autre part l'angle $(\overline{\mathbf{M_0M}}, \overline{\mathbf{M_0M'}}) = \boldsymbol{\gamma_M}$ et dans la zone des déformations élastiques, l'angle γ_M est petit → L'arc $\mathbf{MM'} = \boldsymbol{\alpha.\rho}$
- On peut écrire $$\mathbf{tang}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\gamma_M} = \boldsymbol{\rho.\alpha/x}$$
- La fibre M_0M a subit une distorsion ou glissement γ_M tel que :

$$\boxed{\gamma_M = \frac{\alpha}{x}.\rho = \theta.\rho}$$

- γ_M est aussi appelé déviation (qui s'exprime en rad)

V-Étude des contraintes

- Si on admet l'hypothèse que la distance relative entre deux sections reste constante au cours de la déformation, donc l'allongement Δx = 0, alors on peut écrire que la déformation longitudinale $\boldsymbol{\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = 0}$

  En tout point de la section (S).

- On admet donc que la composante normale du vecteur contrainte est nulle ($\sigma = 0$) et par la suite $\vec{\mathbf{T}}(\mathbf{M}, \vec{\mathbf{x}}) =$

  $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau_{y1}\overrightarrow{y1} + \tau_{z1}\overrightarrow{z1}}$ avec $\vec{y}_1 = \frac{\overrightarrow{GM}}{\|\overrightarrow{GM}\|}$

- D'autre part on admet que la composante $\boldsymbol{\tau_{y1} = 0}$

- La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles est : $\boldsymbol{\tau = G.\gamma_M = G.\theta.\varrho}$

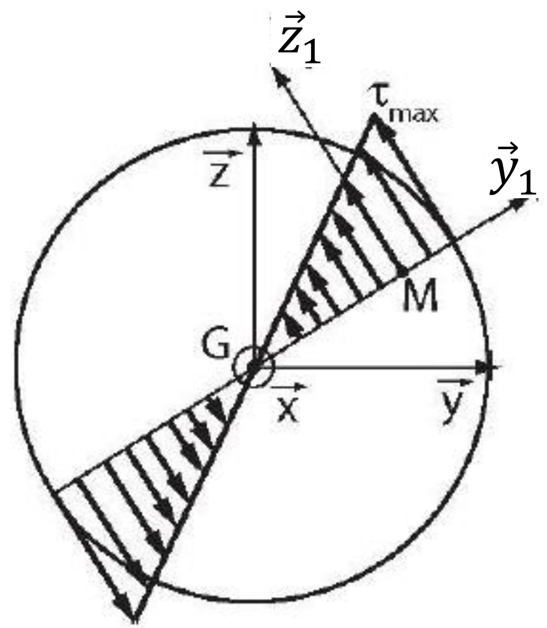
<u>Unités :</u> G (MPa), θ (rad/mm), ρ (mm) , τ (MPa).

TORSION SIMPLE

- $\boldsymbol{\tau = \tau_{z1} = G.\theta.\varrho}$

- $\mathbf{M_t} = \iint_{(S)} \mathbf{y_1 \cdot \tau_{z1} . dS} = \iint_{(S)} \boldsymbol{\rho^2 . G.\theta.dS} = \mathbf{G.\theta} \iint_{(S)} \boldsymbol{\rho^2 . dS}$

  Or $\iint_{(S)} \boldsymbol{\rho^2 . dS}$ représente le moment quadratique polaire I_0 de (S)



- Si la section (S) est de diamètre D, alors $\mathbf{I_0} = \frac{\boldsymbol{\pi.D^4}}{\mathbf{64}} = \frac{\boldsymbol{\pi.R^4}}{\mathbf{2}}$ avec $R = D/2$

- $\mathbf{M_t = G.\theta.I_0}$

  Unités : G (MPa), θ (rad/mm), I_0 (mm^4), Mt (N.mm).

VI-Condition de Résistance

➢ Relation entre contrainte et moment de torsion

$$\mathbf{M_t = G.\theta.I_0 = \frac{\tau}{\varrho}.I_0 \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{I_0/\varrho}}$$

Dans cette relation, τ et M_t sont algébriques.

➢ Condition de résistance

- Lorsque le moment de torsion est variable le long de l'arbre, on prend sa valeur maximale, soit Mt max.
- Soit ν la valeur maximale de ρ ; Dans la plupart des cas ν est égal au rayon maximum de l'arbre.
- La contrainte maximale de torsion s'exprime par :

$$\boldsymbol{\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{I_0/\nu}}$$

- Le rapport $\frac{\mathbf{I_0}}{\mathbf{v}} = \frac{\boldsymbol{\pi}.\mathbf{D^3}}{\mathbf{32}}$ s'appelle « module de torsion »

- La condition de résistance est :

$$|\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{max}} \leq \boldsymbol{\tau_{adm}}$$

- En torsion la contrainte admissible

$$|\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{max}} = \frac{\boldsymbol{\tau_e}}{\mathbf{s}} = \left(\frac{\mathbf{R_{eg}}}{\mathbf{s}}\right) = \boldsymbol{\tau_p}\ (\mathbf{R_{pg}})$$

  - τ_p (ou R_{pg}) : contrainte pratique de cisaillement.
  - s : coefficient de sécurité.

VII-Condition de rigidité

Le calcul des dimensions des arbres de transmission ou barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire θ ne doit pas dépasser , pendant le service, une valeur limite θ_{lim}

$$\boldsymbol{\theta = \frac{M_t}{G.I_0} \leq \theta_{lim}}$$

θ_{lim} est généralement de l'ordre 0,5° / m