CHAPITRE 1

PROBLÈMES AUX LIMITES ET LEURS FORMULATIONS VARIATIONNELLES

<u>Matière</u> : Modélisation Mathématiques pour l'Industrie 4.0

Sommaire

Ce cours présente les fondements mathématiques ainsi que les aspects pratiques de la méthode des éléments finis (MEF), qui permet notamment la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) issues de la physique, de la mécanique, de la finance, et de bien d'autres domaines.

Dans ce chapitre, on présente une étude mathématique des problèmes aux limites dont on peut les remplacer par des formulations, dite variationnelles, beaucoup plus avantageuses.

1.1 Quelques exemples de problèmes aux limites.

On présente quelques problèmes typiques pouvant être résolus par la méthode des éléments finis. Il s'agit systématiquement d'un problème aux limites dont on peut trouver une formulation variationnelle équivalente.

1. <u>Problème modèle 1D</u> :

Ce problème modèle peut modéliser l'équilibre thermique d'une barre chauffée à ses extrémités et plongée dans une pièce maintenue à une température donnée, où :

- α désigne le cœfficient de diffusion thermique de la barre,
- γ est un cœfficient de perte de chaleur due à la convection de l'air.

On généralise le problème aux limites ci-dessus, sous la forme suivante :

Ce problème modèle est utilisé pour décrire des processus de diffusion, d'advection et de convection (ou de réaction) d'une certaine quantité physique u.

Le terme $-(\alpha\, u')'$ modélise la diffusion, $\beta\, u'$ l'advection (ou le transport), $\gamma\, u$ la convection (ou l'absorption (si $\gamma > 0$)).

2. <u>Problème modèle 2D</u> :

Ce problème modèle peut modéliser par exemple :

- un problème thermique sans convection,
- un problème d'électrostatique,
- un problème d'écoulement d'un fluide irrotationnel incompressible,
- une membrane soumise à une pression f et des conditions d'encastrement au bord de la membrane.

3. Problème modèle 2D/3D : Problème de Stokes :
On considère un fluide Newtonien visqueux et incompressible à faible nombre de Reynolds occupant une surface/volume $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.

4. Problèmes non-linéaires :
Les problèmes précédents sont tous des problèmes linéaires. En effet, la méthode des éléments finis (MEF) est définie à partir des problèmes linéaires puisqu'en pratique, il revient à résoudre un système linéaire.
Cependant, il est tout à fait possible d'utiliser la MEF pour des problèmes non-linéaires tel que par exemple le **problème de Navier-Stokes**, mais ce dernier passe systématiquement par un processus de linéarisation et la résolution se fait de façon itérative et non plus directe.

1.2 Formulation variationnelle.

Un problème aux limites pose malheureusement un certain nombre de difficultés pour démontrer l'existence d'une solution. C'est pourquoi on le remplacera par une formulation, dite variationnelle, beaucoup plus avantageuse. Ainsi, chaque problème aux limites possède une formulation variationnelle *équivalente*. Ce sont sur ces formulations qu'on se base pour établir non seulement les résultats d'existence et d'unicité (pour les problèmes linéaires), mais aussi ce sont ces formulations qui sont à la base de la méthode des éléments finis.

Afin de définir ce qui est une formulation variationnelle (FV), on utilise quelques formules d'intégration par parties, dites formules de Green. On introduit ensuite, le *théorème de Lax-Milgram* qui est l'outil essentiel permettant de démontrer que la formulation variationnelle (FV) est un problème bien posé (existence, unicité d'une solution et continuité par rapport aux données du problème).

1.2.1 Formulation variationnelle.

D'une manière générale, un problème modèle se définit sous plusieurs formes, suivant le type des conditions aux limites (au bord du domaine) adapté. On considère l'exemple du Laplacien, qui est le prototype des équations aux dérivées partielles :

$$\textbf{(1)} \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ -\Delta u = f \qquad \text{dans } \Omega \\ + \text{ condition aux limites} \end{cases}$$

1. avec condition de <u>Dirichlet homogène</u> : $u = 0$ sur $\partial\Omega$
2. avec condition de <u>Dirichlet non-homogène</u> : $u = g$ sur $\partial\Omega$
3. avec condition de <u>Neumann non-homogène</u> : $\nabla u.\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = g$ sur $\partial\Omega$
4. avec condition de <u>Fourier</u> : $\lambda\, u + \nabla u.\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = g$ sur $\partial\Omega$

où f, g et λ sont des données du problème modèle. Ainsi, le choix des conditions aux limites joue un rôle important dans l'étude du problème modèle.
Afin de définir une formulation variationnelle équivalente au problème modèle (1), on suit la démarche suivante :
- on multiplie (1) par une fonction v, appelée fonction test et on intègre sur le domaine Ω,
- on applique certaines formules d'intégration par parties, si nécessaire, dans le but de réduire l'ordre de dérivation sur l'inconnue du problème.

Notons que la solution u du problème et la fonction test v appartiennent au même espace.
En notation compacte, **<u>la formulation variationnelle</u> (F.V)** associée au problème modèle (1) est définie sous <u>*la forme abstraite*</u> (ou problème abstrait) suivante :

$$\textbf{(F.V)} \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u,v) = l(v), \qquad \text{pour toute fonction } v \in V \end{cases}$$

où

- $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur $V \times V$
- $l(.)$ est une forme linéaire sur V

avec V est l'espace dans lequel on cherche la solution. (C'est un espace de dimension infinie, défini par les espaces de Sobolev.)
La formulation variationnelle (F.V) est aussi appelée "*formulation faible*" associée au problème modèle (1).

Équivalence des deux problèmes :
Soit $u \in H^1(\Omega)$. u est une solution du problème modèle (1) si et seulement si, $u \in V$ et vérifie (F.V).

Pourquoi avoir introduit une formulation variationnelle (F.V) ?

- Elle permet d'évaluer des intégrales plutôt que des dérivées en tout point.
- On réduit l'ordre de dérivation sur l'inconnue en augmentant celle sur une fonction test. Cela engendre une certaine "symétrie" entre inconnue et fonction test.
- Elle a un lien avec "l'énergie" du problème.
- La méthode des éléments finis se base sur la formulation variationnelle.

1.2.2 Théorie de Lax-Milgram.

L'idée principale de l'approche variationnelle est de montrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (F.V), ce qui entraîne le même résultat pour le problème aux limites ((1) (à cause de l'équivalence des deux problèmes).

Ainsi, il existe une théorie à la fois simple et puissante, présentée par le **théorème de Lax-Milgram**, pour analyser les formulations variationnelles. Néanmoins, cette théorie ne fonctionne que si l'espace dans lequel on cherche la solution et dans lequel on prend les fonctions test (l'espace V), est un espace de *Hilbert*.

Théorème 1.1 *(***Lax-Milgram***)*
Soient

- *V un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire, noté $< .,. >$ et de norme associée, notée $\| u \|_V = \sqrt{< u, u >}$,*
- *$a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue, coercive sur V,*
- *$l(.)$ une forme linéaire, continue sur V.*

Alors, la formulation variationnelle (F.V) admet une unique solution *:*

$$\exists ! \quad u \in V \quad / \quad a(u,v) = l(v), \qquad \forall\, v \in V.$$

De plus, cette solution u dépend continûment des données du problème *:*

$$\exists \text{ une constante } C > 0 \quad / \quad \| u \|_V \leq \; C \;\; \| f \|_{L^2(\Omega)}$$

*Ainsi, cette inégalité nous permet de déduire "***la stabilité de la solution** *u".* ∎

Bien évidemment, le théorème de Lax-Milgram est basé sur certaines hypothèses sur a et l :

$\boxed{\mathbf{1}}$ $l(.)$ est continue sur V, c-à-d. que :

$$\exists\, C > 0 \quad / \quad |l(v)| \;\leq\; C \;\; \| \, v \, \|_V, \qquad \forall\, v \in V.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a(.,.)$ est continue sur $V \times V$, c-à-d. que :

$$\exists\, C > 0 \quad / \quad |a(u,v)| \;\leq\; C \;\; \| \, u \, \|_V \| \, v \, \|_V, \qquad \forall\, u, v \in V.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a(.,.)$ est coercive sur V, c-à-d. que :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad / \quad a(u,u) \;\geq\; \alpha \;\; \| \, u \, \|_V^2, \qquad \forall\, u \in V.$$

Toutes ces hypothèses sur a et l sont nécessaires pour pouvoir résoudre (F.V). En particulier, la coercivité de $a(.,.)$ est essentielle.
Quelques remarques sur la coercivité :

- Si $\forall\, u \in V,\;\; a(u,u) < 0$, alors il faut montrer la coercivité sur $-a$.
- Si $\exists\, u \in V_{|\{0\}},\;\; a(u,u) = 0$, alors $a(.,.)$ n'est pas coercive.
- Si $\exists\, u_n \in V_{|\{0\}},\;\; \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a(u_n, u_n)}{\| \, u_n \, \|_V^2} = 0$, alors $a(.,.)$ n'est pas coercive.

Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier si la forme bilinéaire $a(.,.)$ est *symétrique*. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle (F.V) réalise <u>*le minimum d'une énergie*</u> (en physique ou en mécanique).

Proposition 1.2
On se place sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique *(c-à-d. que $a(u,v) = a(v,u),\ \forall\, u, v \in V$).*
Alors, l'unique solution $u \in V$ de (F.V) minimise dans V l'énergie $J(v)$ définie pour tout $v \in V$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - l(v).$$

Autrement dit,

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v),$$

ou encore,

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall\, v \in V.$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est l'unique solution de la formulation variationnelle (F.V).

1.3 Espaces de base : Espaces de Sobolev.

Dans cette section, on introduit quelques éléments d'analyse fonctionnelle permettant de définir le *théorème de Lax-Milgram*. On se limite aux résultats principaux éventuellement sous une forme simplifiée et généralement sans démonstration, afin de définir essentiellement les espaces de Sobolev qui sont les espaces de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles des problèmes aux limites. Physiquement, les espaces de Sobolev s'interprètent comme des espaces de fonctions d'énergie finie.

1.3.1 Domaine physique Ω.

Dans toute la suite, Ω est un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^n$ (borné ou non), dont le bord (ou la frontière) est notée $\partial\Omega$. On suppose aussi que Ω est un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$, ou bien on dit que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière.
(La connaissance de la définition précise d'un ouvert régulier, n'est pas nécessaire pour la bonne compréhension de la suite de ce cours. Il suffit juste de savoir qu'un ouvert régulier est un ouvert dont la frontière est une surface (une variété de dimension $n-1$) régulière et que cet ouvert est localement situé d'un seul coté de sa frontière.)

On définit alors la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ comme étant le vecteur unité $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (n_i)_{1\leq i\leq n}$ normal en tout point au plan tangent de Ω et pointant vers l'extérieur de Ω.

Dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note $d\Omega$ la mesure volumique, ou mesure de Lebesgue de dimension n. Sur $\partial\Omega$, on note $d\Gamma$ la mesure surfacique, ou mesure de Lebesgue de dimension $n-1$ sur la variété $\partial\Omega$.

1.3.2 Quelques rappels d'intégration.

Comme les espaces de Sobolev se construisent à partir de la notion de fonction mesurable et de l'espace de Lebesgue $\mathbb{L}^2$ des fonctions de carrés sommables, on donne alors quelques rappels à ce sujet.

$\star$ Espace de Hilbert.

Définition 1.3
Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.,.)_H$ *est qui est complet pour la norme induite par le produit scalaire,* $\|\ .\ \|_H$

Notation. H désigne un espace de Hilbert muni de son produit scalaire $(.,.)_H$ et sa norme $\| \,.\, \|_H$:

$$\| u \|_H^2 = (u,u)_H$$

Rappel. un espace complet est un espace normé dans lequel toute suite de Cauchy converge.

Proposition 1.4
Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert E, alors muni de la norme induite par le produit scalaire, c'est un espace de Hilbert.

$\star$ Espace de Lebesgue $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

L'espace de Lebesgue $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est indispensable à la définition des espaces de Sobolev. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. On définit l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de carrés sommables dans Ω :

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \Big/ f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega |f(x)|^2 dx < +\infty\}$$

muni du produit scalaire :

$$< f, g >= \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$$

et de la norme :

$$\| f \|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2}$$

$\mathbb{L}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Rappel. les fonctions mesurables dans Ω sont définies presque partout dans Ω.

$\star$ Espace $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ (ou $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω :

$$\mathcal{D}(\Omega) \equiv \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K}, (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ou} \mathbb{C}) \Big/ f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \text{ et } \mathrm{Supp}(f) \text{ compact dans } \Omega\}$$

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}}$$

Notons que les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ s'annulent, ainsi que toutes leurs dérivées, sur le bord de Ω.

On rappelle le résultat de densité suivant :

Théorème 1.5 ***(Densité)***
L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$:

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

c-à-d. pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, il existe une suite $f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f - f_n \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$.

1.3.3 Espaces de Sobolev.

À partir de l'espace de Lebesgue $\mathbb{L}^2(\Omega)$, on définit les espaces de Sobolev.

$\star$ **Espace $H^1(\Omega)$.**

$\star$ Espace $H_0^1(\Omega)$.

On définit maintenant un autre espace de Sobolev, qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de type Dirichlet.

L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Propriétés.
- Par définition, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.
- Par définition, $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.
- Si Ω est un ouvert borné, alors $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.
- Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

Des résultats essentiels sont les inégalités suivantes :

Proposition 1.6 ***(Inégalité de Poincaré)***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx, \qquad \textit{pour toute fonction } u \in H_0^1(\Omega)$$

ou encore,

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C \ \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} \qquad \textit{pour toute fonction } u \in H_0^1(\Omega)$$

De plus, la semi-norme :

$$|u|_{H_0^1(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$, $\| u \|_{H^1(\Omega)}$.

Proposition 1.7 ***(Inégalité de Poincaré généralisée)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, dont sa frontière $\partial\Omega$ est régulière. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C \Big(\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} + \Big|\int_\Omega u(x)\,dx\Big|\Big) \qquad \textit{pour toute fonction } u \in H^1(\Omega)$$

$\star$ Espace $H^m(\Omega)$.

On peut généraliser la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ aux fonctions qui sont m-fois dérivables.

Notation. On donne tout d'abord, un convention d'écriture bien utile :
Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et pour une fonction u, on note :

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \qquad \text{et} \qquad \partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$$

Pour tout entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m, \quad \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

muni du produit scalaire :

$$< u, v > = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x)\, \partial^\alpha v(x)\, dx$$

et de la norme :

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{< u, u >}$$

L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Exemple.

$$\begin{aligned} H^2(\Omega) &= \Big\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tels que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega),\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \Big\} \\ &= \Big\{ u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega),\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \Big\} \end{aligned}$$

Comme pour $H^1(\Omega)$, les fonctions régulières sont denses dans $H^m(\Omega)$.

Théorème 1.8 ***(Densité)***
Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.

1.3.4 Principaux résultats sur les espaces de Sobolev.

Cette section contient certaines définitions et résultats qu'il faut absolument connaître sur les espaces de Sobolev et qui seront utiles dans la suite.

Définition 1.9
• *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ sa fermeture. On note $\mathcal{C}(\Omega)$ (respectivement, $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$) l'espace des fonctions continues dans Ω (respectivement, dans $\overline{\Omega}$).*
• *Soit un entier $k \geq 0$. On note $\mathcal{C}^k(\Omega)$ (respectivement, $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$) l'espace des fonctions k-fois continûment dérivables dans Ω (respectivement, dans $\overline{\Omega}$).* ■

Pour les problèmes aux limites qu'on étudie, il y a un moyen pour définir la "valeur au bord" ou "trace" de v sur le bord $\partial\Omega$, notée $v_{|\partial\Omega}$, d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Ce résultat essentiel, appelé théorème de trace, est le suivant :

Théorème 1.10 ***(Théorème de trace)***
Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. On définit l'application trace :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) &\longrightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega) \\ v &\longmapsto \gamma(v) = v_{|\partial\Omega} \end{aligned}$$

vérifiant $\quad \exists C_0 / \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \| \gamma(v) \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \| v \|_{H^1(\Omega)}$.
Comme $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, alors l'application trace γ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\partial\Omega)$, notée encore γ :

$$\begin{aligned} \gamma : H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega) \\ v &\longmapsto \gamma(v) = v_{|\partial\Omega} \end{aligned}$$

qui vérifie $\quad \exists C / \forall v \in H^1(\Omega), \| \gamma(v) \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \| v \|_{H^1(\Omega)}$.

Proposition 1.11
Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Le noyau de γ est $H_0^1(\Omega)$. Autrement dit,

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \textit{ tel que } v_{|\partial\Omega} = 0\}$$

On rappelle ensuite, quelques formules d'intégration par parties, dites formules de Green.

Théorème 1.12 ***(Formule de Green)***
Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\omega \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$.
Alors, ω vérifie la formule de Green :

$$\int_\Omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \omega\, n_i\, d\Gamma, \qquad \textit{pour } 1 \leq i \leq n \tag{1.1}$$

De nombreuses formules sont tous des conséquences immédiates de la formule de Green.

Corollaire 1.13 ***(Formule d'intégration par parties)***
Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors, u et v vérifient la formule d'intégration par parties :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \, v \, n_i \, d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\Omega, \qquad \textit{pour } 1 \leq i \leq n \tag{1.2}$$

Corollaire 1.14 ***(Formule d'intégration par parties)***
Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, toutes deux à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors, u et v vérifient la formule d'intégration par parties :

$$\int_{\Omega} \Delta u \, v \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \, \nabla v \, d\Omega$$

Notation. $\dfrac{\partial u}{\partial n} \equiv \nabla u . \vec{\boldsymbol{n}}.$

Le théorème de trace 1.10 permet de généraliser la formule de Green (1.1) (ou la formule d'intégration par parties (1.2)) précédemment établie pour des fonctions de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ aux fonctions de $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.15 ***(Formule de Green)***
Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour toutes fonctions $u, v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \, v \, n_i \, d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\Omega, \qquad \textit{pour } 1 \leq i \leq n$$