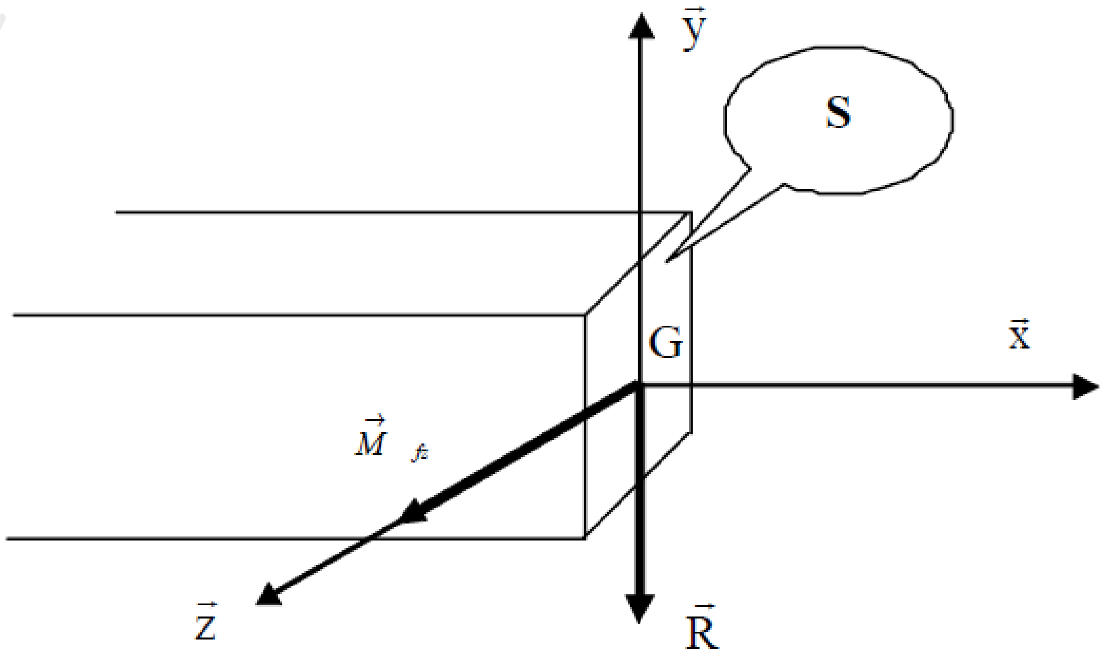
PLAN

1. **Introduction**
2. **Rappel : La Statique**
3. **Théories élémentaires de la Résistance Des Matériaux « RDM »**
4. **Torseur des efforts intérieurs-Notion de contraintes**
5. **Traction simple – Compression simple**
6. **Cisaillement simple**
7. **Torsion des poutres circulaires**
8. **Flexion simple**
9. **Flambement**

I-Définition

- Une poutre (E) est sollicitée à la flexion plane simple si le torseur des efforts de cohésion se réduit en G, centre de surface d’une section droite (S) de la poutre à laquelle on lie le repère de définition des sollicitations $\mathfrak{R} = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par :

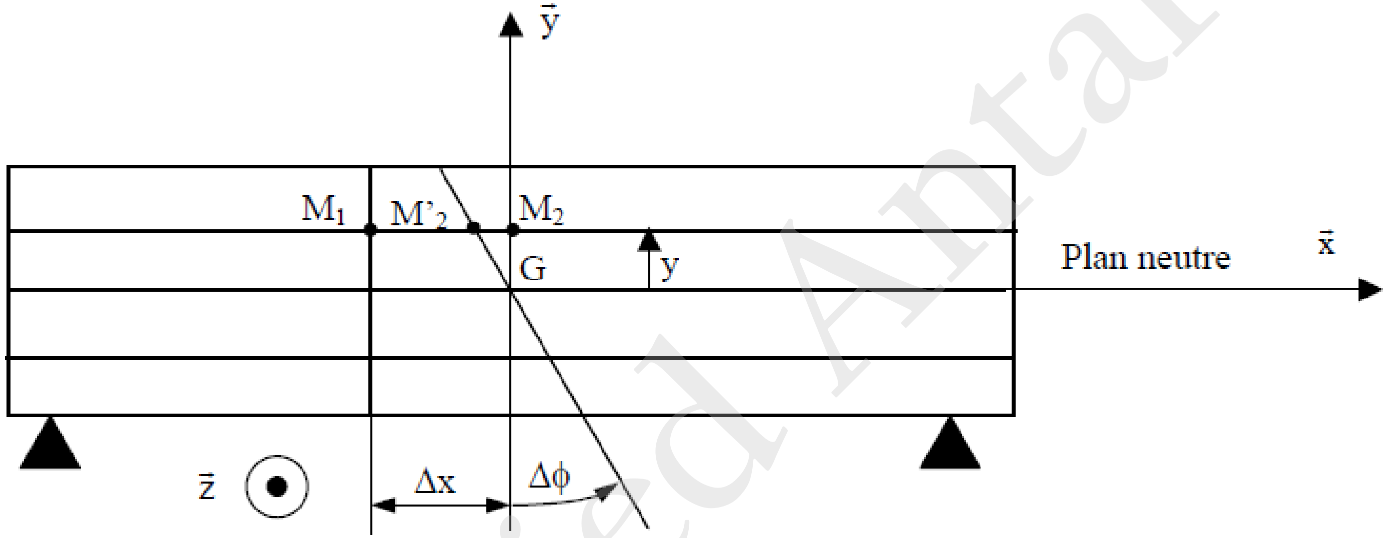
$$\{\tau_{\text{int}}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_G} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} N = 0 & M_t = 0 \\ T_y \neq 0 & M_{fy} = 0 \\ T_z = 0 & M_{fz} \neq 0 \end{Bmatrix}_G$$



II-Hypothèses

- La ligne moyenne de la poutre est rectiligne. L'axe $(O, \vec{x})$ est confondu avec la ligne moyenne.
- La section droite de la poutre est constante.
- La poutre admet un plan de symétrie longitudinal, par exemple le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$. Il en résulte que $(G, \vec{y})$ et $(G, \vec{z})$ sont les axes de principaux de la section droite.
- Toutes les forces appliquées à la poutre que ce soit les forces à distance ou les forces élémentaires de liaison sont :
  - perpendiculaires à la ligne moyenne
  - situées dans le plan de symétrie ou réparties symétriquement par rapport à celui-ci.
  - concentrées en un point ou réparties suivant une loi.
- Au cours de la déformation, les sections droites restent planes et normales à la ligne moyenne.

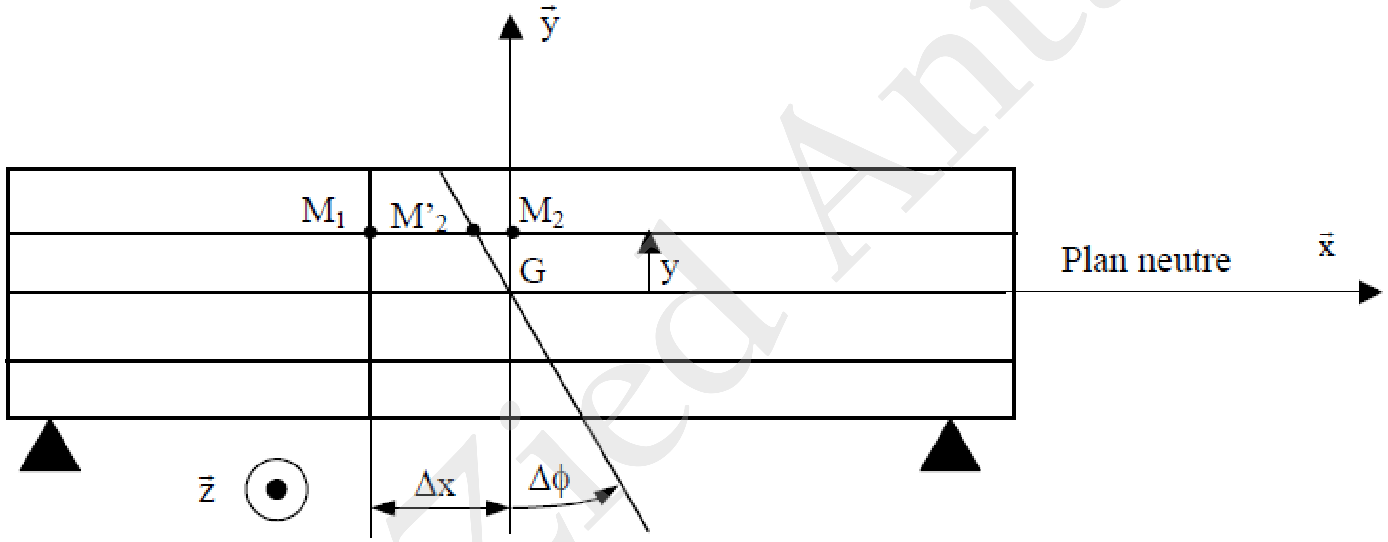
III-Etude des déformations



- Les fibres situées au dessus du plan $(G, \vec{x}, \vec{z})$se raccourcissent.
- Les fibres appartenant au plan $(G, \vec{x}, \vec{z})$ ne changent pas de longueur. Ce plan est appelé le plan neutre et la ligne moyenne est la fibre neutre.
- Les fibres situées au dessous du plan $(G, \vec{x}, \vec{z})$ s'allongent.
- Les allongements ou raccourcissements relatifs ε_x sont proportionnels à la distance y de la fibre considérée au plan $(G, \vec{x}, \vec{y})$

FLEXION SIMPLE

- Tout se passe comme si la section (S) avait pivoté autour de l'axe d'un angle faible $\Delta\varphi$ pour venir en (S')



$$\varepsilon_x = \frac{\overline{M_1M_2} - \overline{M_1M'_2}}{\overline{M_1M_2}} = \frac{\overline{M_2M'_2}}{\overline{M_1M_2}} \quad \text{Or} \quad \overline{M_2M'_2} = -y\,tg(\Delta\phi) \approx -y(\Delta\phi) \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = -y\frac{\Delta\phi}{\Delta x}$$

IV-Etude des contraintes

1. Contraintes normales

- La flexion plane simple engendre des contraintes normales aux sections droites et proportionnelles à leur distance au plan neutre.

- La loi de Hooke relative aux contraintes normales permet d'écrire:

$$\boldsymbol{\sigma = E.\varepsilon = E.y.\frac{\Delta\phi}{\Delta x}} \Rightarrow$$ σ_x est proportionnel à y soit: $\boldsymbol{\sigma = k.y}$

- Ce coefficient de proportionnalité k peut être calculé à partir de la relation entre le moment de flexion et la contrainte normale.

- Rappelons que:

$$\{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{int}}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T_y}\vec{\mathbf{y}} \\ \mathbf{M_{fz}}\vec{\mathbf{z}} \end{Bmatrix}_{\mathbf{G}} = \begin{Bmatrix} \iint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{T}}(\mathbf{M},\vec{\mathbf{x}})\mathbf{dS} \\ \iint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{\mathbf{GM}} \wedge \vec{\mathbf{T}}(\mathbf{M},\vec{\mathbf{x}})\mathbf{dS} \end{Bmatrix}_{\mathbf{G}} \qquad \text{Avec} \qquad \vec{\mathbf{T}}(\mathbf{M},\vec{\mathbf{x}}).\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{k.y}$$

- On s'intéresse uniquement contraintes normales, alors on ne prend en compte que la projection du vecteur contrainte sur l'axe x.

$$\mathbf{M_{fz}} = \iint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{\mathbf{GM}} \wedge \boldsymbol{\sigma}\vec{\mathbf{x}}\mathbf{dS} \qquad \text{Avec} \qquad \overrightarrow{\mathbf{GM}} = \mathbf{y}\vec{\mathbf{y}} + \mathbf{z}\vec{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{M_{fz}} = -\iint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{ydS} = -\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{k.y^2dS} = -\mathbf{k}\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{y^2.dS} = -\mathbf{kI_{Gz}} \qquad \text{soit} \qquad \mathbf{k} = -\frac{\mathbf{M_{fz}}}{\mathbf{I_{Gz}}}$$

- La quantité I_{GZ} est appelée moment quadratique de la section S par rapport à l'axe (G, z).

FLEXION SIMPLE

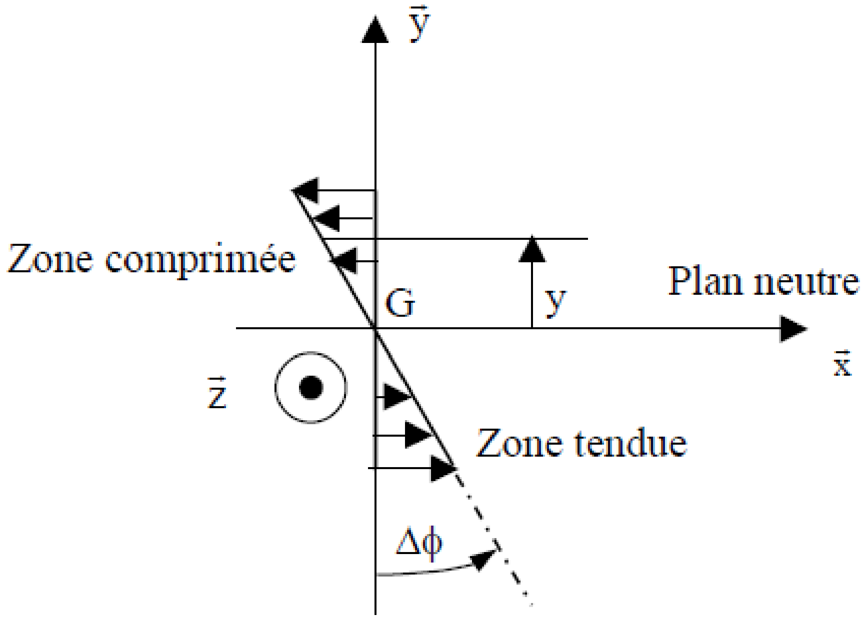
- Finalement, on obtient:

$$\boldsymbol{\sigma = -\frac{M_{fz}}{I_{Gz}}.y}$$

- La contrainte normale est maximale dans la section où M_{fz} est maximal et pour $y_{max} = v$:

$$\boxed{|\sigma_{max}| = \frac{|M_{fz}|_{max}}{\frac{I_{Gz}}{v}}}$$

$\frac{I_{Gz}}{v}$ est appelé module de flexion

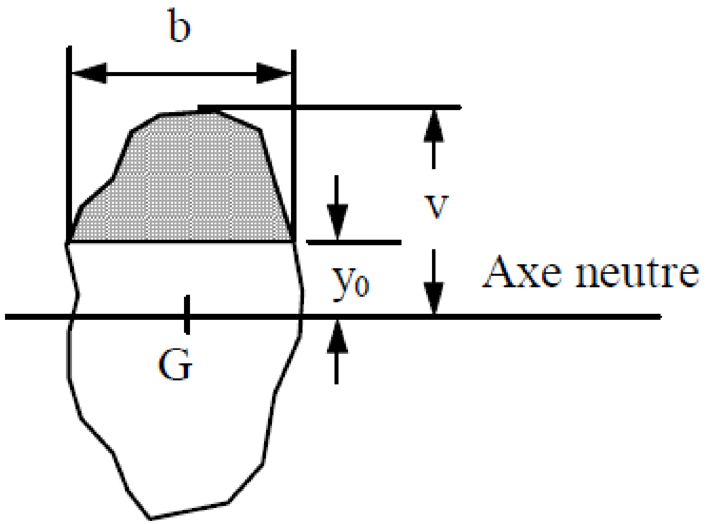


2. Contraintes tangentielles

- La répartition des contraintes tangentielles est plus difficile à déterminer. Pour cela on fait l'hypothèse que la contrainte tangentielle τ_y est uniformément répartie, non pas sur la section entière mais sur toutes les fibres situées à une distance y_0 de l'axe neutre dans le plan de la section (S). Sa valeur est donnée par :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau_y = -\frac{T_y . W_{Gz}}{b . I_{Gz}}}}$$

- $W_{Gz} = \iint_S ydS$ représente le moment statique (d'ordre un) de la région hachurée de la section par rapport à l'axe neutre
- b est la largeur de la poutre à l'endroit ou est calculé la contrainte de cisaillement



V-Condition de résistance

1. Contraintes normales

- En tenant compte des singularités de forme et des hypothèses simplificatrices, la contrainte réelle doit être inférieure à une contrainte admissible. La condition de résistance pour les contraintes normales s'écrit donc :

$$\mathbf{k}.\,|\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{max}}| \leq \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{e}}}{\mathbf{s}}$$

  - k : coefficient de concentration de contraintes en flexion.
  - s : coefficient de sécurité.

2. Contraintes tangentielles

- De même la condition de résistance pour les contraintes tangentielles s'écrit :

$$|\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{moy}}| \leq \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{e}}}{\mathbf{s}}$$

VI-Déformation de la poutre

1. Equation de la déformée

- Avant application des efforts mécaniques, la ligne moyenne est rectiligne (fig.1). Après application des efforts la ligne moyenne se déforme (fig.2). La courbe obtenue est appelée courbe déformée ou simplement la déformée. Son équation dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est y = f(x).

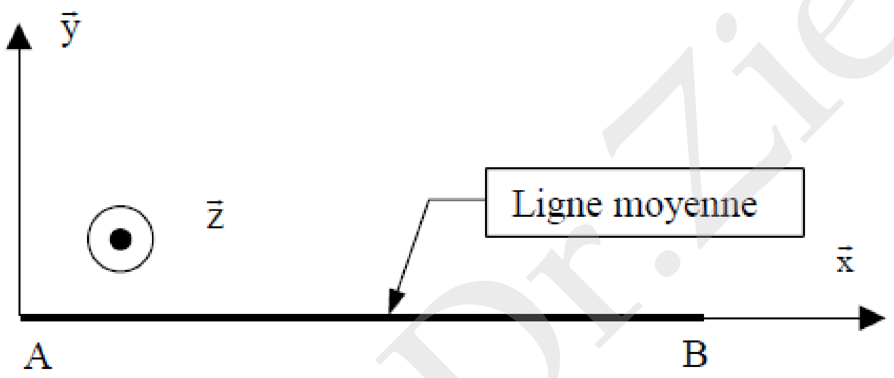


Figure 1

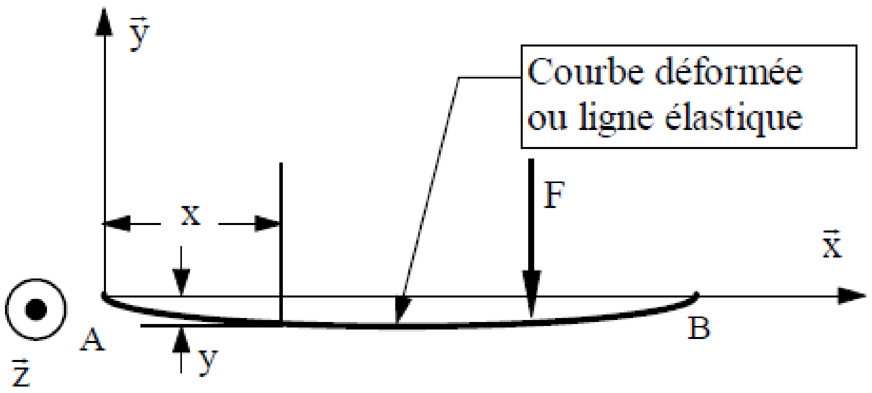


Figure 2

- L'équation de la déformée est :

$$\mathbf{y''(x)} = \frac{\mathbf{M_{fz}(x)}}{\mathbf{E.\,I_{Gz}}}$$

- y'' : la fonction dérivée seconde de la fonction y par rapport à la variable x.
- L'ordonnée y désigne la déflexion (ou la flèche) de la poutre à la distance x d'une extrémité de la poutre. Il est nécessaire d'intégrer deux fois l'équation différentielle pour obtenir une équation algébrique de la déflexion y en fonction de x.
- Attention : La fonction y ne doit pas être confondue avec l'ordonnée y d'une fibre donnée dans le plan de la section (S).

2. Conditions aux limites

- L'intégration de l'équation précédente introduit des variables d'intégration qui sont déterminées à partir des conditions aux limites qui sont :
  - Encastrement en un point A : le déplacement en A et la rotation en A sont nuls, alors $y(x_A) = 0$ et $y'(x_A) = 0$.
  - Appui simple en un point A : le déplacement en A est nul, alors $y(x_A) = 0$.
  - Pivot en un point A : le déplacement en A est nul, alors $y(x_A) = 0$.

• Lorsque la fonction M_{fz} est continue par zone, on doit écrire la condition de continuité de la fonction y (x) et de sa dérivée y'(x) à droite et à gauche des limites de zones : si le point A est la limite entre deux zones, alors on doit écrire :

- $y(x_A)$droite = $y(x_A)$gauche
- $y'(x_A)$droite = $y'(x_A)$gauche

Sinon, il faut prendre en compte les discontinuités.

VII-Condition de rigidité

- La valeur y(x) en un point donné est appelée la flèche et est notée f. Il arrive qu'une poutre vérifie les conditions de résistance mais se déforme dans des proportions inacceptables. Il faut donc exprimer des conditions de déformation en plus des conditions de résistance. La flèche maximale doit être inférieure à un flèche limite imposée par le cahier des charges :

$$\boxed{f_{max} \leq f_{lim}}$$