A.U : 2022/2023. **Classes : 1 TA.**
Nombre de pages : 2.

Série 5 : Transformée de Fourier

Exercice 1 :

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4} dx$.

Exercice 2 :

On considère les fonctions suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}, \text{ pour } a > 0, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

1) Calculer la transformée de Fourier de f_a.
2) À l'aide de la transformée de Fourier inverse, en déduire la transformée de Fourier de g.
3) Calculer la transformée de Fourier de $f_a * f_a$.
4) Déterminer la transformée de Fourier de h.

Exercice 3 :

1) Pour $a < 0$, on désigne par f_a la fonction définie par :

$$f_a(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de f_a.
2. Pour $a < 0$ et $b < 0$, en déduire la transformée de Fourier de $f_a * f_b$.

2) Soit (E) l'équation différentielle définie par :

$$\begin{array}{l} y'' + 4y' + 3y = f_{-3}(x) \\ y'(0) = y(x) = 0, \quad \forall x \leq 0 \end{array}$$

1. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{(s+1)(s+3)^2}$
2. En appliquant la transformée de Fourier à l'équation différentielle (E), calculer la transformée de Fourier de y.
3. Calculer $f_a * f_b, \quad \forall a < 0, \quad \forall b < 0$.

4. En déduire la solution y de l'équation différentielle (E).

Exercice 4 :

On considère la fonction :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}, \quad \text{pour } a > 0.$$

1. Montrer que f vérifie l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2\,a\,x\,y = 0.$$

2. En déduire une équation différentielle en $\mathcal{F}(f)$, la transformée de Fourier de f.
3. Trouver $\mathcal{F}(f)$, en résolvant l'équation différentielle du question 2.
(*Donnée* : $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$)