ENSTAB

Université de Carthage
Ecole Nationale des Sciences
et Technologies Avancées à Borj-Cedria
Année Universitaire 2021-2022

Examen de Probabilités: Session Proncipale

Durée: 1.^{H}30. N^{bre} de pages: 2.

Exercice 1:

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi normale de moyenne m et de variance σ^2.

1. a) Rappeler la densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et la densité de la loi normale centré réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
   b) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$.

2. a) Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$.
   b) Calculer la fonction caractéristique de Y.
   c) Déterminer la loi de $Z = Y^2$.

3. a) Montrer que la loi de Y est symétrique (i.e Y et $-Y$ ont la même densité de probabilité)
   b) On pose $F_Y(t) = P(Y \leq t)$, déterminer $F_Y(-t)$ et $P(-t \leq Y \leq t)$.

Application:

Une usine produit des rondelles, un test de conformité a été effectué sur des échantillons de rondelles. Une rondelle est dite conforme si son diamètre en mm est dans l'intervalle $[89.4, 90.6]$.
On note D le diamètre d'une rondelle.

1. On suppose que D suit la loi normale $\mathcal{N}(89, 0.75)$, quelle est la probabilité qu'une rondelle soit conforme.

2. On suppose que D suit la loi normale de moyenne $m = 90$ et d'écart type σ inconnu,
   a) déterminer la valeur de σ pour qu'une rondelle soit conforme avec une probabilité 68%.
   b) Déterminer la valeur de σ pour qu'une rondelle soit conforme avec une probabilité 95%.

Exercice 2:

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité:

$$f_a(x) = \begin{cases} a^2xe^{-ax^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

avec $a > 0$.

1. a) Pour quelle valeur de a, f_a est bien une densité de probabilité.
   b) Pour cette valeur de a déterminer la fonction de répartition de X.
   c) Calculer $E(X)$.

2. Soit Y une variable aléatoire telle que $Y = 2X^2$
   a) Calculer la fonction de répartition de Y.
   b) en déduire la densité de probabilité de Y et son espérance $E(Y)$,
   c) en déduire $V(X)$.

3. On pose $Z = \ln(e^Y - 1)$.
   a) Calculer la fonction de répartition de Z,
   b) en déduire la densité de probabilité de Z, montrer que c'est une fonction paire.
   c) En déduire $E(Z)$.

Exercice 3:

Soit un couple aléatoire de densité jointe définie par:

$$f(x,y) = cxye^{-x^2} I_{0<y<x}.$$

1. Montrer que $c = 4$.

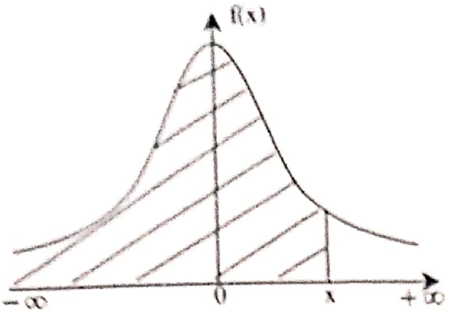
2. Déterminer les densités marginales de X et Y.

3. On pose $U = X$ et $V = \frac{X}{Y}$,

4. Déterminer la densité jointe du couple (U, V).

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921