Chapitre 4. Stabilité des systèmes échantillonnés

1. Définition

Un système est stable si en l'écartant de sa position d'équilibre il tend à y revenir.

2. Condition de stabilité

$H(z)$: La fonction de transfert échantillonnée d'un système.

Ecarter le système de sa position d'équilibre revient à lui appliquer une impulsion.

$e(t)=\delta(t) \Rightarrow E(z)=1$

La sortie du système est :

$S(z)=H(z)E(z)=H(z)$

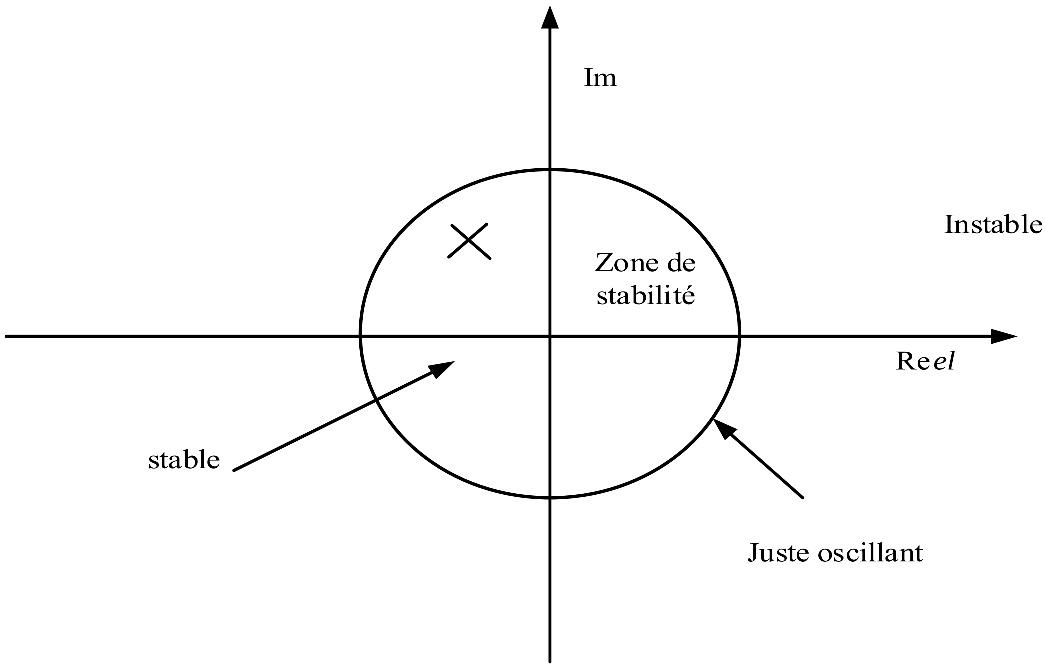
Supposant que $H(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}=\dfrac{N(z)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}$

Avec : p_i, $i=1...n$ sont les racines de $D(z)$.

$$S(z)=\frac{N(z)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i z}{z-p_i}$$

$$s(nT_e)=\sum_{i=1}^{n}A_i\,(p_i)^n.$$

Pour qu'un système échantillonné soit stable il faut que tous ces pôles soient de module inférieur à 1. On dit encore tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité.



3. Critère de stabilité

3.1. Critère de Routh

Le critère de Routh a été utiliser pour analyser la stabilité des systèmes continus. Pour pouvoir l'applique pour analyser la stabilité des systèmes échantillonnés, il faut utiliser une transformation qui fait correspond l'intérieur du cercle unité le demi plan ouvert gauche.

On pose : $z=\frac{1+w}{1-w}$; $w=\frac{z-1}{z+1}$ si $|z|<1$

$$z=\alpha+j\beta \Rightarrow w=\frac{\alpha+j\beta-1}{\alpha+j\beta+1}$$

$$=\frac{(\alpha+j\beta-1)(\alpha+1-j\beta)}{(\alpha+1)^2+\beta^2}$$

$$w=\frac{\alpha^2-1+\beta^2+j\left(\beta(\alpha+1)-\beta(\alpha+1)\right)}{(\alpha+1)^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2-1+\beta^2+2j\beta}{(\alpha+1)^2+\beta^2}$$

$$reel(w)=\frac{\alpha^2-1+\beta^2}{(\alpha+1)^2+\beta^2}.$$

$$|z|<1 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2<1$$

Avec $reel(w) < 0$

$$z = \frac{1+w}{1-w},\ w = a + jb,\ \ a < 0$$

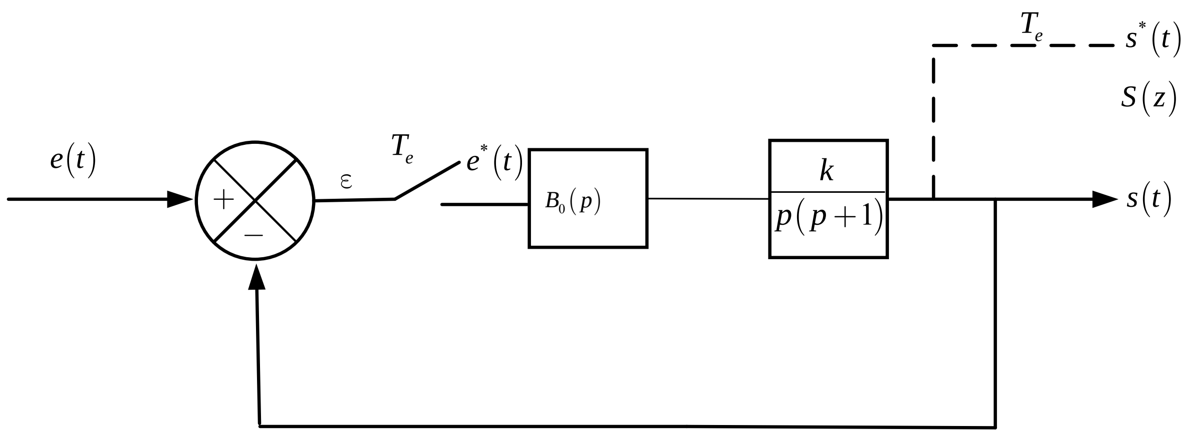
$$z = \frac{1+a+jb}{1-a-jb},\ a < 0$$

$$|z| = \sqrt{\frac{(1+a)^2 + b^2}{(1-a)^2 + b^2}} < 1$$

$$a < 0 \Rightarrow (1+a)^2 < (1-a)^2$$

$$(1+a)^2 (1-a)^2 < 4a < 0.$$

Exemple 1.



Déterminer k pour que le système bouclé soit stable.

$$H(z) = \frac{Z\left(TL^{-1}\left(B_0(p)\dfrac{k}{p(p+1)}\right)\right)}{1+Z\left(TL^{-1}\left(B_0(p)\dfrac{k}{p(p+1)}\right)\right)}\ \ ;\ H(z) = \frac{k(0.37z+0.26)}{z^2+(0.37k-1.37)z+0.26k}\ ;\ z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$H(w) = \frac{k\left(0.37\left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)+0.26\right)}{\left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)^2 + (0.37k-1.37)\left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)+0.26k}$$

$$H(w) = \frac{N(w)}{D(w)}$$

$$D(w) = (2.74 - 0.11k)w^2 + (1.26 - 0.25k)w + 0.63k$$

$$2.74 - 0.11k > 0 \Rightarrow k < \frac{2.74}{0.11} \simeq 25$$

$$1.26 - 0.25k > 0 \Rightarrow k < \frac{1.26}{0.52} \simeq 2.42$$

$$0.63k > 0 \Rightarrow k > 0$$

$$0 < k < 2.42 .$$

3.2. Critère de Jury (cas du second ordre)

Soit $H(z)$ la fonction de transfert échantillonnée d'un système.

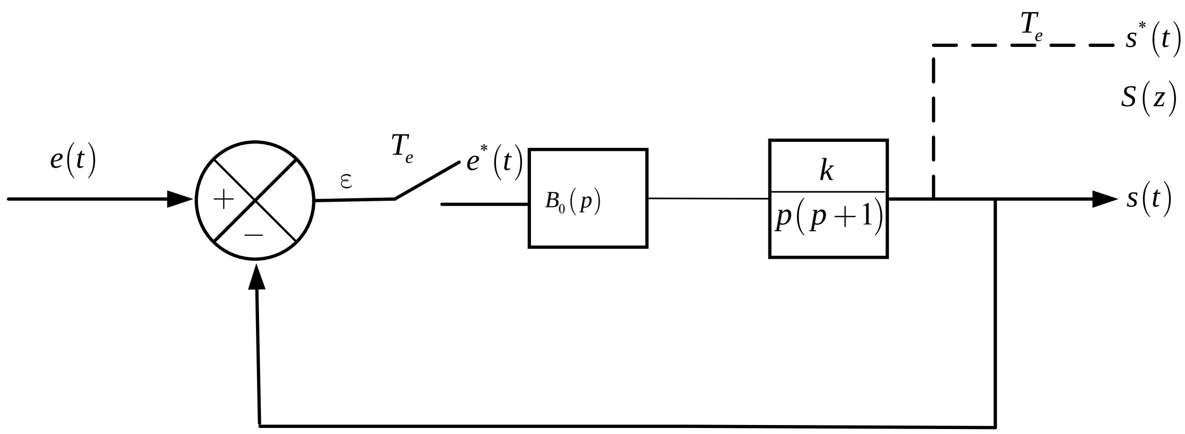
$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

avec : $D(z) = d_2 z^2 + d_1 z + d_0$

Les conditions de stabilité sont les suivantes :

- $|d_2| < |d_0|$
- $D(1) = d_2 + d_1 + d_0 > 0$
- $D(-1) = d_2 - d_1 + d_0 < 0$

Exemple 2.



Déterminer k pour que le système bouclé soit stable.

$$D(z) = z^2 + (0.37k - 1.37)z + 0.37 + 0.26k$$

$$d_0 = 0.37 + 0.26k$$

$$d_1 = 0.37k - 1.37$$

$$d_2 = 1.$$

Les conditions de stabilité :

- $|0.37 + 0.26k| < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0.37 + 0.26k < 1 \\ 0.37 + 0.26k > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 2.42 \\ k > -5.26 \end{cases}$
- $D(1) = 0.63k > 0 \Rightarrow k > 0$
- $D(-1) = 2.74 - 0.11k < 0 \Rightarrow k < 25$

$0 < k < 2.42$