

MÉTHODES ITÉRATIVES POUR LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Matière : Analyse Numérique

Sommaire

3.1	Description et principe des méthodes itératives.	43
3.1.1	Description des méthodes itératives.	43
3.1.2	Critères de convergence des méthodes itératives.	45
3.2	Quelques exemples de méthodes itératives.	46
3.2.1	Méthode de Jacobi.	46
3.2.2	Méthode de Gauss-Seidel.	48
3.2.3	Méthode de relaxation.	49
3.3	Vitesse de convergence.	50
3.4	Critère ou test d'arrêt.	51

3.1 Description et principe des méthodes itératives.

3.1.1 Description des méthodes itératives.

Pour des systèmes linéaires de grande taille, les méthodes directes (telles que la décomposition LU ou de Cholesky) deviennent coûteuses en temps de calcul ou en place mémoire. On introduit alors dans ce chapitre, certaines méthodes numériques dites **méthodes itératives**.

Ainsi, l'idée est de ne plus chercher à résoudre exactement le système linéaire $AX = b$, mais d'approcher sa solution X par une suite de vecteurs $(X^{(k)})$ vérifiant :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|X^{(k)} - X\| = 0$$

On dit que la suite $(X^{(k)})$ converge vers X , l'unique solution du système linéaire $AX = b$. La suite $(X^{(k)})$ est construite à l'aide d'une relation de récurrence simple de type $X^{(k+1)} = F(X^{(k)})$, pour une application affine $F(X) = BX + c$ où B dépend de A et c dépend de A et b .

Définition 3.1 (Méthode itérative)

On appelle méthode itérative de résolution du système linéaire $AX = b$, une méthode qui construit une suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, où l'itéré $X^{(k)}$ est calculé à partir des itérés $X^{(0)}, \dots, X^{(k-1)}$, censée converger vers X la solution du système linéaire $AX = b$. ■

Afin d'utiliser les méthodes itératives pour résoudre un système linéaire $AX = b$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, le principe de ces méthodes est d'écrire A comme la différence de deux matrices :

$$A = M - N$$

où M est une matrice inversible.

Remarque. La matrice M est en général diagonale, triangulaire ou facile à inverser.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} AX = b &\Leftrightarrow MX = NX + b \\ &\Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}b \end{aligned}$$

La matrice M étant inversible, on définit alors la méthode itérative permettant d'approcher la solution du système linéaire $AX = b$ par la suite $(X^{(k)})$ définie par :

$$\begin{cases} X^{(0)} \text{ donné,} \\ X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b, \end{cases} \quad \text{pour } k \geq 0.$$

Remarque. On n'a pas toujours besoin de calculer M^{-1} , mais il faut savoir calculer la solution de $MX^{(k+1)} = NX^{(k)} + b$, pour $X^{(0)}$ donné.

Parmi les méthodes itératives, dont elles font l'objet de ce chapitre, on cite :

- la méthode de Jacobi,
- la méthode de Gauss-Seidel,
- la méthode de relaxation.

Dans ces méthodes itératives classiques, on utilise la décomposition suivante de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A = D - (E + F) = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}$$

avec D matrice diagonale, E matrice triangulaire inférieure (qui représente l'opposé de la partie en dessous de la diagonale) et F matrice triangulaire supérieure (qui représente l'opposé de la partie en dessus de la diagonale) :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n1} & \dots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Critères de convergence des méthodes itératives.

Définition 3.2

1. Si la suite $(X^{(k)})$ converge, alors elle converge vers l'unique solution X du système linéaire $AX = b$:

$$\text{pour tout choix initial } X^{(0)}, \quad X^{(k)} \longrightarrow X \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty$$

On dit que la méthode itérative correspondante est **convergente** pour la résolution du système linéaire $AX = b$.

2. Si on définit **l'erreur d'approximation** à l'itération k par :

$$e^{(k)} = X^{(k)} - X, \quad k \in \mathbb{N}$$

alors, $M e^{(k+1)} = N e^{(k)}$ et on a la formule de récurrence :

$$e^{(k+1)} = M^{-1} N e^{(k)} = \dots = (M^{-1} N)^{k+1} e^{(0)} = B^{k+1} e^{(0)}$$

La matrice $B = M^{-1} N$ est appelée **matrice d'itération** de la méthode itérative. La suite $(X^{(k)})$ vérifie alors

$$X^{(k+1)} = B X^{(k)} + c, \quad \text{pour } c = M^{-1}b.$$

D'une manière générale, le critère de convergence de la suite $(X^{(k)})$ est assuré sous certaine condition nécessaire et suffisante sur la matrice d'itération B

Théorème 3.3 (Convergence d'une méthode itérative)

Si $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$, alors la suite $(X^{(k)})$ définie par :

$$\begin{cases} X^{(0)} \text{ donné,} \\ X^{(k+1)} = B X^{(k)} + c, \end{cases}$$

converge vers X l'unique solution de $X = B X + c$, pour tout choix de $X^{(0)}$, si et seulement si la matrice d'itération B vérifie :

$$\rho(B) < 1.$$

■

Ainsi, pour montrer la convergence de la suite $(X^{(k)})$ générée par la méthode itérative, il suffit de vérifier que le rayon spectral de sa matrice d'itération B est plus petit que 1, ou encore que pour au moins une norme matricielle $||| \cdot |||$ (induite ou non) :

$$||| B ||| < 1$$

Un résultat de convergence d'une méthode itérative est adapté au cas où la matrice A est symétrique définie positive

Proposition 3.4 (Cas d'une matrice symétrique définie positive)

Soient A une matrice symétrique définie positive et M, N deux matrices telles que $A = M - N$, où M est inversible. Si la matrice symétrique $M^T + N$ est définie positive, alors

$\rho(M^{-1}N) < 1$ et la suite $(X^{(k)})$ définie par :

$$\begin{cases} X^{(0)} \text{ donné,} \\ X^{(k+1)} = M^{-1}N X^{(k)} + M^{-1}b, \end{cases}$$

converge vers X l'unique solution du système linéaire $AX = b$, pour tout choix de $X^{(0)}$

■

3.2 Quelques exemples de méthodes itératives.

3.2.1 Méthode de Jacobi.

Une des méthodes itératives classiques, on considère la méthode de Jacobi. Notons que cette méthode n'est utilisable que si $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Dans la méthode de Jacobi, pour décomposer la matrice $A = M - N$, on choisit :

$$M = D \quad \text{et} \quad N = E + F = D - A$$

où on suppose que la matrice diagonale D est inversible ($a_{ii} \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$).

La matrice d'itération notée J , appelée "*matrice de Jacobi*" et est alors

$$J = D^{-1} (E + F)$$

et la suite $(X^{(k)})$ dans la méthode de Jacobi est définie par :

$$\begin{cases} \text{Initialisation : } X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné.} \\ \text{Pour } k \geq 0, \text{ calculer } X^{(k+1)} \text{ solution de :} \\ D X^{(k+1)} = (E + F) X^{(k)} + b \end{cases}$$

Les composantes du vecteur $X^{(k+1)}$ sont données en fonction de celles du vecteur $X^{(k)}$ par :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Remarque. Il est bien noter que les composantes $x_i^{(k+1)}$ du vecteur $X^{(k+1)}$ sont calculées les uns indépendamment des autres et dépendent seulement de l'itéré précédent $X^{(k)}$.

On rappelle en particulier, la définition d'une matrice à diagonale strictement dominate.

Définition 3.5

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante, si elle vérifie :

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

■

Ainsi, la convergence de la méthode de Jacobi est assurée par les matrices à diagonale strictement dominate :

Proposition 3.6

Soit A une matrice à diagonale strictement dominate. Alors, A est inversible et la méthode de Jacobi converge pour résoudre le système linéaire $AX = b$, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$.

■

3.2.2 Méthode de Gauss-Seidel.

Une deuxième méthode itérative, on considère la méthode de Gauss-Seidel. Dans cette méthode, pour décomposer la matrice $A = M - N$, on choisit :

$$M = D - E \quad \text{et} \quad N = F$$

où on suppose que la matrice M est inversible ($a_{ii} \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$).

La matrice d'itération notée \mathcal{L}_1 , appelée "*matrice de Gauss-Seidel*" et est alors

$$\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1} F$$

et la suite $(X^{(k)})$ dans la méthode de Gauss-Seidel est définie par :

$$\begin{cases} \text{Initialisation : } X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné.} \\ \text{Pour } k \geq 0, \text{ calculer } X^{(k+1)} \text{ solution de :} \\ (D - E) X^{(k+1)} = F X^{(k)} + b \end{cases}$$

La i -ème composante du vecteur $X^{(k+1)}$ est donnée en fonction des composantes $x_j^{(k+1)}$, $j < i$ du vecteur $X^{(k+1)}$ et des composantes $x_j^{(k)}$, $j > i$ du vecteur $X^{(k)}$ par :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Remarque. La méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de Jacobi. Contrairement à la méthode de Jacobi, les composantes $x_i^{(k+1)}$ du vecteur $X^{(k+1)}$ dépendent les uns des autres, le calcul doit s'effectuer alors dans l'ordre $i = 1, \dots, n$.

Bien évidemment, la convergence de la méthode de Gauss-Seidel est assurée pour les matrices symétriques définies positives et pour les matrices à diagonale strictement dominante :

Proposition 3.7

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge pour résoudre le système linéaire $AX = b$, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Gauss-Seidel converge pour résoudre le système linéaire $AX = b$, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$.

■

3.2.3 Méthode de relaxation.

Dans cette section, on définit une nouvelle méthode itérative, appelée méthode de relaxation. Notons que pour la méthode de relaxation, on introduit un paramètre réel ω non nul ($\omega \in \mathbb{R}^*$). Ainsi, pour décomposer la matrice $A = M - N$, on choisit :

$$M = \frac{1}{\omega}D - E \quad \text{et} \quad N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$$

La matrice d'itération notée \mathcal{L}_ω , est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega &= \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right) \\ &= (I_n - \omega D^{-1}E)^{-1} ((1-\omega)I_n + \omega D^{-1}F) \end{aligned}$$

Définition 3.8

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. La matrice d'itération \mathcal{L}_ω s'appelle "la matrice de relaxation" associée à A . Le paramètre réel non nul ω est "le facteur de relaxation".

- Si $\omega < 1$, alors on parle de sous-relaxation.
- Si $\omega > 1$, alors on parle de sur-relaxation.
- Si $\omega = 1$, alors on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.

■

La suite $(X^{(k)})$ dans la méthode de relaxation est définie par :

$$\begin{cases} \text{Initialisation : } X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné.} \\ \text{Pour } k \geq 0, \text{ calculer } X^{(k+1)} \text{ solution de :} \\ \left(\frac{1}{\omega}D - E\right) X^{(k+1)} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right) X^{(k)} + b \end{cases}$$

Indépendamment de la matrice A , on a un résultat de divergence pour certaines valeurs du paramètre ω :

Proposition 3.9

La méthode de relaxation diverge pour tout $\omega \in \mathbb{R}_{\setminus]0,2[}$.

■

Ainsi, le critère de convergence de la méthode de relaxation n'est assuré que pour $0 < \omega < 2$:

Proposition 3.10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors la méthode de relaxation converge si et seulement si

$$\omega \in]0, 2[$$

■

3.3 Vitesse de convergence.

En pratique, il faut tenir compte de la vitesse de convergence. Autrement dit, entre deux méthodes itératives convergentes, on choisit celle qui donne la solution plus rapidement que l'autre. Un critère de mesure de cette vitesse de convergence est l'évolution de l'erreur d'approximation $\|X^{(k)} - X\|$ qui dépend du rayon spectral de la matrice d'itération.

En effet, si on a une suite convergente $(X^{(k)})$ définie par :

$$\begin{cases} X^{(0)} \text{ donné,} \\ X^{(k+1)} = B X^{(k)} + c, \end{cases}$$

sa limite est X la solution de $X = BX + c$, et on a l'erreur d'approximation :

$$X^{(k)} - X = B(X^{(k-1)} - X) = B^k(X^{(0)} - X)$$

Par conséquent,

$$\|X^{(k)} - X\|_2 = \|B^k(X^{(0)} - X)\|_2 \leq \|B\|_2^k \|X^{(0)} - X\|_2$$

En particulier, si la matrice B est symétrique, alors $\|B\|_2 = \rho(B)$. Par suite,

$$\|X^{(k)} - X\|_2 \leq \rho(B)^k \|X^{(0)} - X\|_2$$

Ainsi, on voit clairement que la suite $(X^{(k)})$ converge plus vite vers X d'autant que $\rho(B)$ est plus petit. Le rayon spectral $\rho(B)$ de la matrice d'itération B est donc une bonne estimation de la vitesse de convergence.

Ceci reste encore vrai pour une norme matricielle quelconque et pour une matrice B quelconque, d'après le résultat suivant :

Lemme 3.11

Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|\cdot\|$ est une norme matricielle induite, alors

$$\rho(B) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|B^k\|^{1/k}$$

■

Afin de comparer la vitesse de convergence de deux méthodes itératives, on suit alors la façon suivante :

Définition 3.12

À la recherche d'une solution X d'un système linéaire $AX = b$, une méthode itérative de matrice d'itération B est dite **plus rapide** qu'une autre méthode itérative de matrice d'itération \tilde{B} , si

$$\rho(B) < \rho(\tilde{B})$$

■

Comparaison de Jacobi et Gauss-Seidel.

Il n'y a pas de résultat général établissant que la méthode de Gauss-Seidel converge toujours plus vite que celle de Jacobi. On peut cependant l'affirmer dans certains cas, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.13 (Jacobi et Gauss-Seidel pour les matrices tri-diagonales)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tri-diagonale (c-à-d : $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$). Alors, les rayons spectraux de Jacobi et Gauss-Seidel sont liés par la relation suivante :

$$\rho(\mathcal{L}_1) = (\rho(J))^2$$

Donc, les deux méthodes convergent ou divergent simultanément. Lorsqu'elles convergent, la méthode de Gauss-Seidel est plus rapide que celle de Jacobi.

■

3.4 Critère ou test d'arrêt.

En général, dans les méthodes itératives pour la détermination de \bar{X} solution d'un problème quelconque, on construit une suite $(X^{(k)})$ qui converge vers \bar{X} .

En pratique et si on n'exige pas un critère d'arrêt, le nombre d'itérations pour calculer les termes de cette suite pourrait être infini. Le calcul donc, devrait être interrompu dès qu'on obtient une solution approchée à ε près, vérifiant par exemple :

$$\|AX^{(k)} - b\| \leq \varepsilon \quad \text{si } \bar{X} \text{ est aussi solution de } AX = b$$

ou encore, dans le cas général, pour **une tolérance** ε donnée et une norme vectorielle $\| \cdot \|$ choisie :

$$\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \| \leq \varepsilon$$

Il existe aussi d'autres critères d'arrêt comme :

$$\frac{\| A X^{(k)} - b \|}{\| b \|} \leq \varepsilon$$

ou bien

$$\frac{\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \|}{\| X^{(k)} \|} \leq \varepsilon$$

pour les algorithmes de résolution des systèmes linéaires.