CHAPITRE 2

# MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS : PROBLÈMES AUX LIMITES 1D

**Matière : Modélisation Mathématiques pour l'Industrie 4.0**

## Sommaire



## 2.1 Description de la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis (MEF) est largement utilisée pour l'approximation numérique des problèmes aux limites. Il s'agit, comme dans toutes les méthodes numériques, de trouver une approximation discrète. En fait, d'un problème différentiel aux limites linéaire, on trouve une formulation variationnelle associée équivalente, dont on calcule une approximation de la solution en projetant sur un espace de dimension finie, ce qui revient à résoudre au final un système linéaire.

La méthode des éléments finis est une méthode puissante basée sur une théorie mathématique. L'appellation "Éléments Finis" vient de la décomposition du domaine d'étude en éléments : ils sont souvent représentés par un maillage.

Les éléments finis sont :
- un outil majeur en mécanique (fluides et solides, interactions, structures),
- applicable dans de nombreux domaines impliquant des problèmes d'EDP aux limites comme par exemple en mathématiques financières ou l'électromagnétisme.

De nombreux codes industriels existent et sont généralement couplés à un logiciel de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) (en anglais Computer Aided Design (CAD)).

Il est assez délicat de "théoriser" la méthode des éléments finis. La pratique pouvant facilement s'écarter du cadre théorique rigoureux.
Le but de la méthode des éléments finis est de produire une méthode numérique qui permettra de calculer une approximation de la solution. La démarche de la méthode des éléments finis est essentiellement très simple :

*discrétisation*, *choix d'une base*, *calcul des matrices* puis *résolution d'un système linéaire*.

On choisit de présenter des exemples génériques à partir desquels, il devrait être facile d'adapter la plupart des problèmes aux limites rencontrés dans les applications.

## 2.2 Problème aux limites 1D, interpolation $\mathbb{P}_1$.

On étudie un exemple de problème aux limites 1D où la discrétisation du domaine est triviale : un intervalle réel est subdivisé en sous intervalles consécutifs.

### 2.2.1 Problème approché.

On considère le problème aux limites 1D suivant, pour une fonction scalaire définie sur $[0,1]$, $f \in \mathbb{L}^2([0,1])$ et muni des conditions de Dirichlet homogènes :

$$\textbf{(1)} \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1([0,1]) \text{ telle que} \\ -u'' + u = f \qquad \text{dans } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La formulation variationnelle équivalente à ce problème (1) est définie par :

$$\textbf{(F.V)} \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u,v) = l(v), \qquad \forall\, v \in V \end{cases}$$

où

- $a(u,v) = \displaystyle\int_0^1 \big(u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\big)\,dx$
- $l(v) = \displaystyle\int_0^1 f(x)v(x)\,dx$

avec

$$V = \{u \in H^1([0,1]) \;/\; u(0) = u(1) = 0\} = H_0^1([0,1])$$

**Remarque.** $V$ étant un espace de dimension infinie, il est difficile de résoudre (F.V) directement.

Le principe de la méthode des éléments finis est de construire des espaces d'approximations ($V_h$) des espaces usuels $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$, ..., dont la définition est basée sur un maillage du domaine $\Omega$. On suit alors, la démarche suivante :

1. On "remplace" l'espace $V$ par un espace de *dimension finie* $V_h \subset V$ avec h>0 (qui va varier et tendre vers 0). Soit $u_h \in V_h$ solution du ***problème approché*** :

   $$(\boldsymbol{F.V_h}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \qquad \forall\, v_h \in V_h \end{cases}$$

   Le problème $(F.V_h)$ est une discrétisation de la formulation variationnelle (F.V) dans l'espace $V_h$.

   - $(V_h, \|\,.\,\|_V)$ est un espace de Hilbert (en tant que sous-espace fermé de V qui est Hilbert).
   - $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue, coercive sur $V_h$.
   - $l(.)$ est une forme linéaire continue sur $V_h$.

   D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe alors une unique solution $u_h \in V_h$ de $(F.V_h)$, qui dépend continûment des données du problème :

   $$\|\, u_h \,\|_V \leq C \;\; \|\, f \,\|_{L^2([0,1])}$$

2. Le problème approché $(F.V_h)$ nous ramène à la résolution d'*un système linéaire*.
3. On choisit $V_h$ pour que $\lim\limits_{h\to 0} \dim(V_h) = +\infty$ et on espère que

   $$\begin{array}{c} u_h \;\longrightarrow\; u \\ h \to 0 \end{array}$$

### 2.2.2 Maillage du domaine $\Omega$.

La méthode des éléments finis consiste à considérer un maillage du domaine $\Omega = [0, 1]$. En dimension 1, on appelle ***maillage*** : toute subdivision du domaine $\Omega$ en segments. Pour un intervalle, la seule subdivision est une décomposition en segments successifs :

**Définition 2.1** ***(Maillage uniforme)***
*Le maillage est dit uniforme, si les noeuds $x_i$ sont équidistants, c-à-d :*

$$x_i = (i-1)\,h \qquad \textit{pour}\; 1 \leq i \leq n, \qquad \textit{avec}\;\; h = \frac{1}{n-1}$$

■

Dans le cas de maillage quelconque (non uniforme), $h$ correspond à *la taille* (ou longueur) *maximale des éléments ($E_i$) du maiilage*.

### 2.2.3 Interpolation linéaire par morceaux : élément fini $\mathbb{P}_1$.

Dans tout ce qui suit, on notera :

$\mathbb{P}_{\boldsymbol{k}}$ : l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré $\leq \boldsymbol{k}$.

La dimension de cet espace vectoriel $\mathbb{P}_k$ s'exprime d'une manière générale, à l'aide des coefficients binomiaux, sous la forme :

$$\dim \mathbb{P}_k = C_{k+D}^{k} = \begin{cases} k+1 & \text{si } D = 1 \\ \dfrac{1}{2}(k+1)(k+2) & \text{si } D = 2 \\ \dfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3) & \text{si } D = 3 \end{cases}$$

La méthode des éléments finis est basée sur une interpolation polynomiale par morceaux. La méthode des éléments finis repose alors sur l'***espace discret*** suivant :

$V_h =$

-
- L'espace discret $V_h$ est un espace vectoriel dont ses éléments sont des fonctions continues et polynomiales de degré 1 par morceaux.
- L'espace discret $V_h$ est appelé "*espace d'approximation des éléments finis* $\mathbb{P}_1$" ou "*espace des éléments finis de Lagrange d'ordre 1*".

**Une base de $V_h$ :**

On définit une base de $V_h$, avec une famille de fonctions $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ polynomiales de degré 1 sur chaque élément $E_i$, vérifiant :

Les fonctions de base $\phi_i$, pour $i = 1, \ldots, n$, polynomiales par morceaux, valant 1 en $x_i$ et 0 sur les autres nœuds du maillage, sont appelées "*fonctions chapeaux*", définies par :

Cas de maillage uniforme :

$$\phi_i(x) = \Phi\big(\frac{x - x_i}{h}\big)$$

où

$$\Phi\big(X\big) = \begin{cases} 1 + X & \text{si } -1 \leq X \leq 0 \\ 1 - X & \text{si } \ 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Les fonctions de $V_h$ :**

Les fonctions de $V_h$, polynomiales de degré 1 par morceaux, se représentent à l'aide des fonctions de base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ :

**Lemme 2.2**

■

Le choix de cette base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ permet de caractériser une fonction $v$ de $V_h$ par ses valeurs aux nœuds du maillage. On parle alors des "éléments finis de Lagrange".

Ainsi, dans le problème variationnel (F.V), les inconnues $u$ à déterminer, sont les valeurs de $u$ aux nœuds du maillage considéré.

### 2.2.4 Système linéaire.

Une discrétisation de la formulation variationnelle (F.V) dans l'espace discret $V_h$, définie le problème approché suivant :

$$(\boldsymbol{F.V_h}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ \displaystyle\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\,dx + \int_0^1 u_h(x)v_h(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)\,dx, \qquad \forall\, v_h \in V_h \end{cases}$$

On transforme alors ce problème discret $(F.V_h)$ à un système linéaire, en suivant la démarche suivante :

**Remarque.**
La matrice $A$ du système linéaire va être "*creuse*".
Puisque les fonctions de base $(\phi_i)_{1\leq i\leq n}$ de $V_h$ sont polynomiales par morceaux sur chaque élément $E_i$, donc ces fonctions sont à support nul sauf sur deux éléments ($E_i$ et $E_{i-1}$). Ainsi, la plupart des cœfficients des matrices $K$ et $M$ sont nuls. Les matrices $K$ et $M$ sont donc, "*creuses*".

### 2.2.5 Construction des matrices : Technique d'assemblage.

Il nous reste à décrire la construction des matrices $K$ et $M$, ainsi que le vecteur second membre $L$ du système linéaire. On utilise une technique dite d'assemblage, qui calcule les matrices "élément par élément". On tient compte du fait que les fonctions de base $(\phi_i)_{1\leq i\leq n}$ de l'espace $V_h$, sont à support nul sauf sur deux éléments.

## 2.3 Un aperçu du cas 2D, interpolation $\mathbb{P}_1$.

Dans cette section, on fait étendre les principes de base vus dans le cas uni-dimensionnel au cas bi-dimensionnels.
On considère le problème du Laplacien muni des conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ -\Delta u = f \qquad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \qquad\quad\;\; \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

**1/ Maillage du domaine $\Omega$.**

En dimension 2, un maillage est une subdivision du domaine $\Omega$ en triangle, appelée "*maillage triangulaire*".

- Les éléments du maillage sont les triangles.
- Les nœuds du maillage sont les sommets des triangles.

Exemples de maillages triangulaires du domaine carré $\Omega$ :

**Remarque. (Maillage conforme)**
Un nœud (ou sommet) d'un triangle ne doit pas se retrouver à l'intérieur d'une arête (ou coté) d'un triangle.

**2/ Une base de $V_h$.**

Comme en dimension 1, si le maillage est constitué de $n$ sommets de coordonnées $(x_j, y_j)$, on définit $n$ fonctions $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ polynomiales de degré 1 sur chaque élément :

$$\phi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

**3/ Les fonctions de $V_h$.**

Toute fonction $u_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_i, y_i)$ des triangles du maillage :

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \phi_i(x, y), \qquad \forall (x, y) \in \Omega,$$

où une composante $u_i$ représente la valeur de $u_h$ au sommet $(x_i, y_i)$.