Serie d'exercices 4

Exercice 1 :
Soit $F_{a,b}$ une fonction définie par :

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & si\ x \leq -3 \\ e^x & si\ -3 < x \leq -2 \\ \frac{x+b}{x+4} & si\ x > -2, \end{cases} \quad (3.2)$$

(a) Pour quelles valeurs a et b , $F_{a,b}$ est une fonction de répartitiond'une variable aléatoire X.

(b) Pour quelles valeurs a et b elle admet une densité de probabilité dont on déterminera.

(c) Calculer $E(X)$et $Var(X)$

Exercice 2 :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(a) Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et σ_x.

(b) On pose $Y = X^2$, déterminer la loi de Y, $E(Y)$ et $Var(Y)$.

(c) On pose $Z = \tan X$, déterminer la loi de Z.

Exercice 3 :
Soit X une variable aléatoire de fonction caractéristique φ définie par :

$$\varphi(x) = e^{-|x|} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(a) Montrer que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Donner la densité de X

(c) En déduire que X suit la loi de Chauhy.

(d) Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X qui suit la loi de cauchy $C(a, b)$

Exercice 4 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire sur cet espace. Soit la fonction ψ_X définie par l'espérance par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_X(t) = E[arctan(tX)]$$

(a) Montrer que la fonction ψ_X est bien définie et bornée.

(b) Montrer que ψ_X est une fonction impaire.

(c) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoire identiquement distribuées (de même loi) on a : $\psi_X = \psi_Y$, calculer ψ_X dans les cas suivant :
a) X suit la loi de Bernoulli de paframètre p b) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$

(d) Que vaut ψ_X lorque X est symetrique.

(e) Montrer que ψ_X est continue sur $\mathbb{R}$

(f) a) Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} \psi_X(t) = -\frac{\pi}{2} P(X < 0) + \frac{\pi}{2} P(X > 0)$$

b) determiner sa limite en $-\infty$.

(g) Montrer que si X est intégrable, ψ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$