Estruturas de Dados

Heapsort

Heapsort

- A estrutura de dados **heap** é um objeto arranjo que pode ser visto como uma árvore binária praticamente completa. Cada nó da árvore corresponde a um elemento do arranjo que armazena o valor no nó.

- A árvore está completamente preenchida em todos os níveis, exceto talvez no nível mais baixo, que é preenchido a partir da esquerda até certo ponto.

Heapsort

- Um arranjo A que representa um heap é um objeto com dois atributos: **comprimento[A],** que é o número de elementos do arranjo e **tamanho-do-heap[A],** o número de elementos no heap armazenado dentro do arranjo A.

- Ou seja, embora A[1..comprimento[A]] possa conter números válidos, nenhum elemento além de A[tamanho-do-heap[A]] onde tamanho-do-heap[A] ≤ comprimento[A], é um elemento do heap.

Heapsort

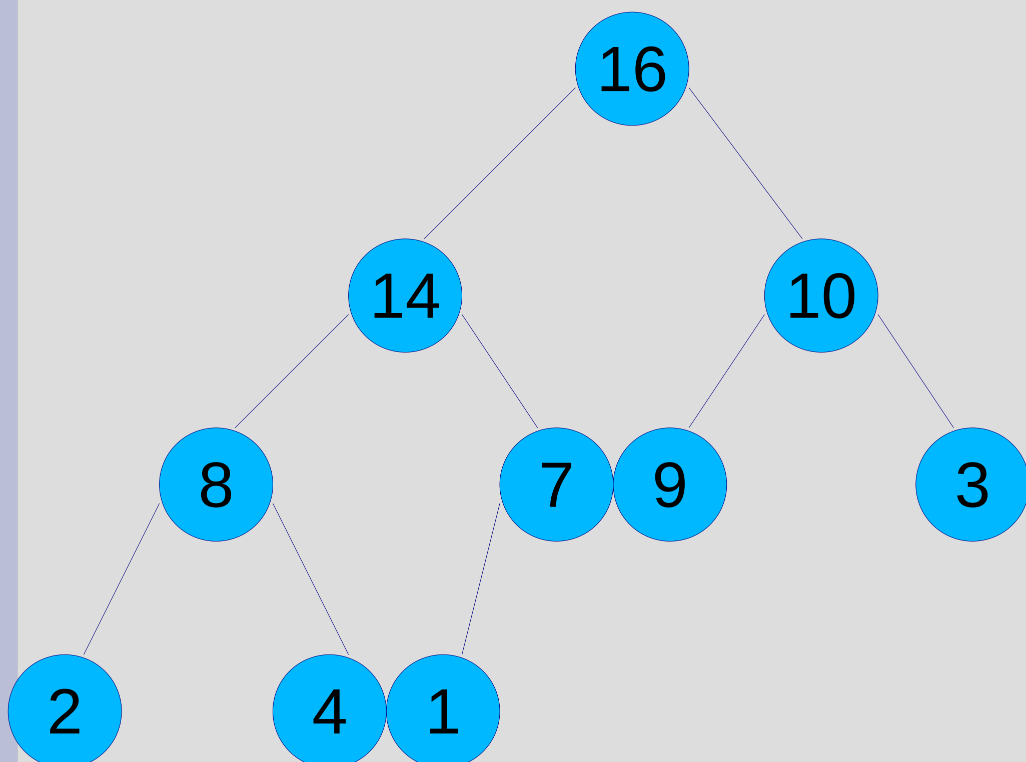
- A raiz da árvore é A[1] e, dado o índice i de um nó, os índices de seu pai PARENT(i), do filho da esquerda LEFT(i) e do filho da direita RIGHT(i) podem ser calculados de modo simples:

- Parent(i)
  return i

- Left(i)
  return 2i

  Right(i)
  return 2i + 1

Heapsort



16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

Um heap máximo visto como uma árvore binária e um arranjo.

Heapsort

- Na maioria dos computadores, o procedimento LEFT pode calcular 2i em uma única instrução, simplesmente deslocando a representação binária de i uma posição de bit para a esquerda.

- De modo semelhante, o procedimento right pode calcular rapidamente 2i+1 deslocando a representação binária de i uma posição de bit para a esquerda e inserindo 1 como valor de bit de baixa ordem.

Heapsort

- O procedimento PARENT pode calcular $\lfloor i/2 \rfloor$ deslocando i uma posição de bit para a direita.

- Existem dois tipos de heaps binários: heaps máximos e heaps mínimos. Em ambos os tipos, os valores nos nós satisfazem a uma propriedade de heap, cujos detalhes específicos dependem do tipo de heap.

Heapsort

- Em um heap máximo, a propriedade de heap máximo é que para todo nó i diferente da raiz

  A[PARENT(i)] ≥ A[i] isto é, o valor de um nó é no máximo o valor de seu pai.

- Um heap mínimo é organizado de modo oposto; a propriedade de heap mínimo é que, para todo nó i diferente da raiz
  A[PARENT(i)] ≤ A[i] o menor elemento em um heap mínimo está na raiz.

Heapsort

- Visualizando um heap como uma árvore, definimos a **altura** de um nó em um heap como o número de arestas no caminho descendente simples mais longo desde o nó até uma folha, e definimos a altura do heap como a altura de sua raiz.

- Tendo em vista que um heap de n elementos é baseado em uma árvore binária completa, sua altura é **O(lg n)**

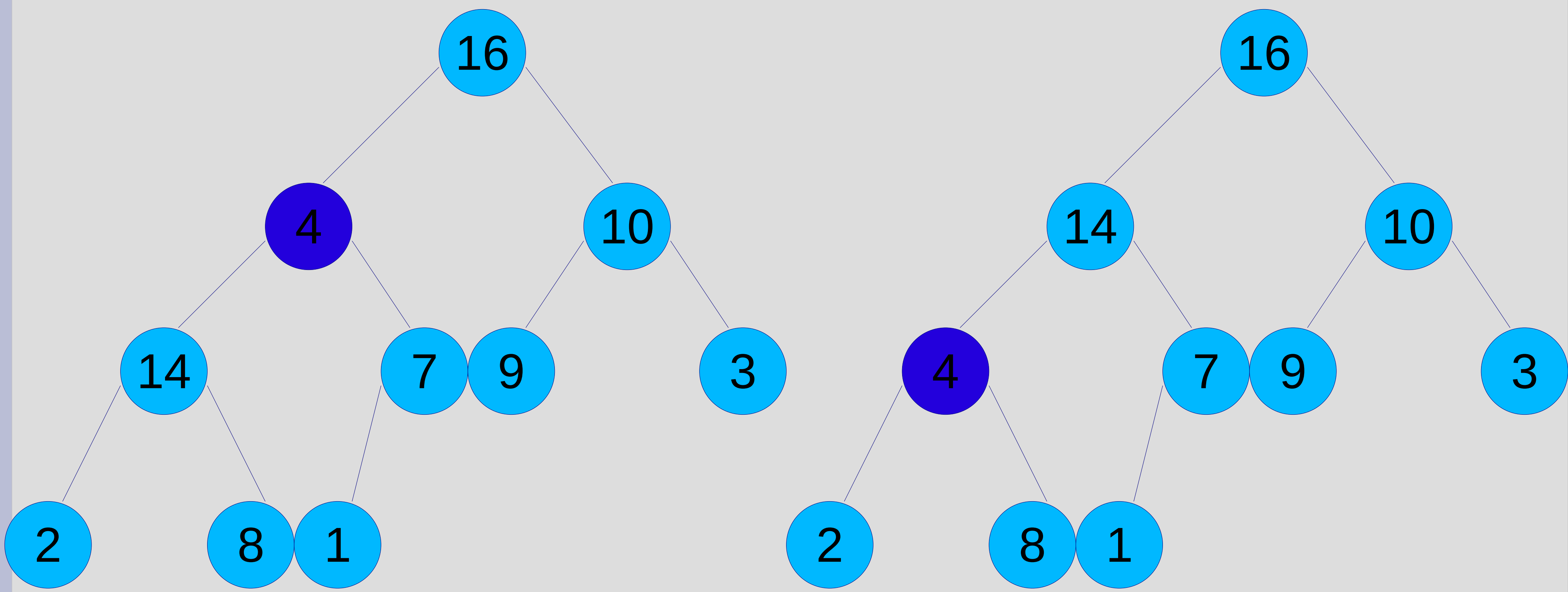
MAX-HEAPIFY

```
Max-Heapify(A,i)
    l ← Left(i)
    r ← Right(i)
    if l≤tamanho-do-heap[A] e A[l]>A[i]
       then maior←l
       else maior←i
    if r≤tamanho-do-heap[A] e A[r]>A[maior]
       then maior←r
    if maior≠i
       then trocar A[i]↔A[maior]
            MAX-HEAPIFY(A,maior)
```

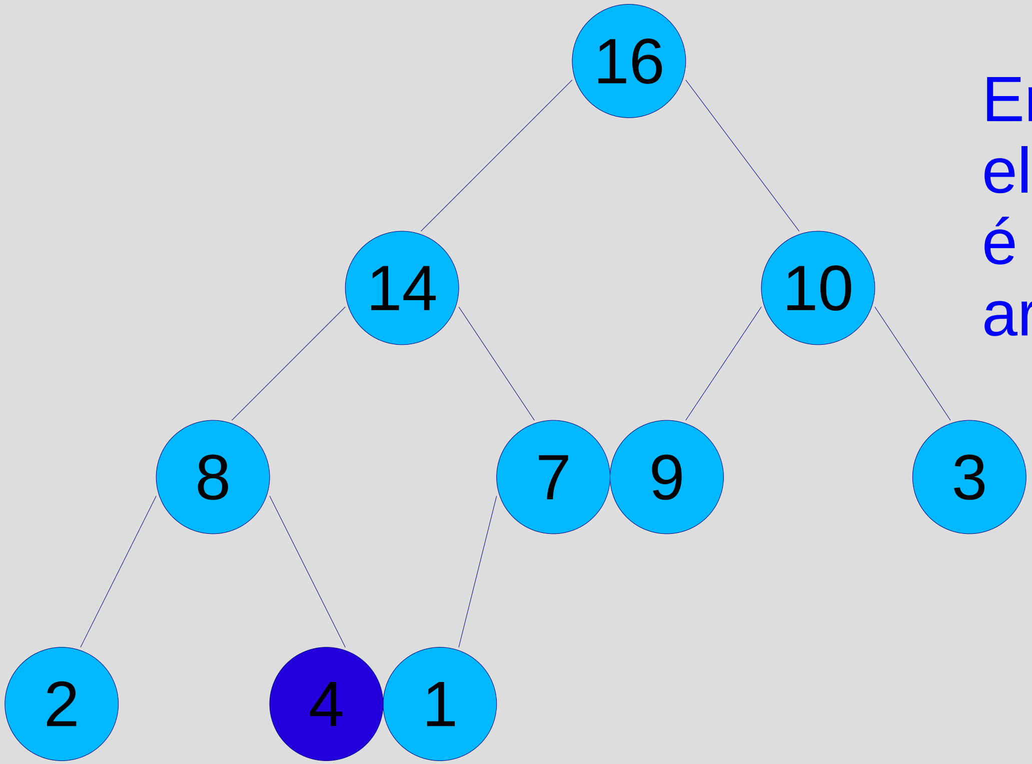
Manutenção da propriedade de heap

- MAX-HEAPIFY é uma sub-rotina importante para a manipulação de heaps máximos. Suas entradas são um arranjo A e um índice i para o arranjo. Quando MAX-HEAPIFY é chamado, supomos que as árvores binárias com raízes em LEFT(i) e RIGHT(i) são heaps máximos, mas que A[i] pode ser menor que seus filhos, violando assim a propriedade de heap máximo. A função de MAX-HEAPIFY é deixar que o valor em A[i] flutue para baixo no heap máximo, de tal forma que a subárvore com raiz no índice i se torne um heap máximo.

MAX-HEAPIFY



MAX-HEAPIFY



Em cada passo, o maior entre os elementos A[i], A[LEFT], A[RIGHT] é determinado e seu índice é armazenado em maior.

Construção de um Heap

- Podemos usar o procedimento MAX-HEAPIFY de baixo para cima, a fim de converter um arranjo A[1..n], onde *n*= *comprimento[A]* em um heap máximo.

  BUILD-MAX-HEAP(A)

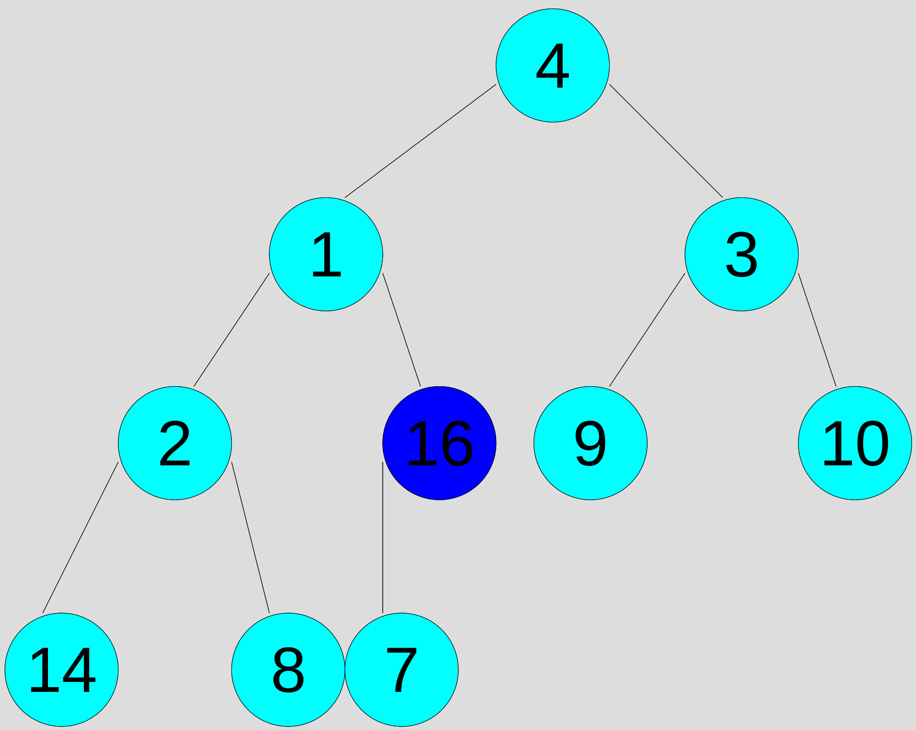
  tamanho-do-heap[A] ← comprimento[A]

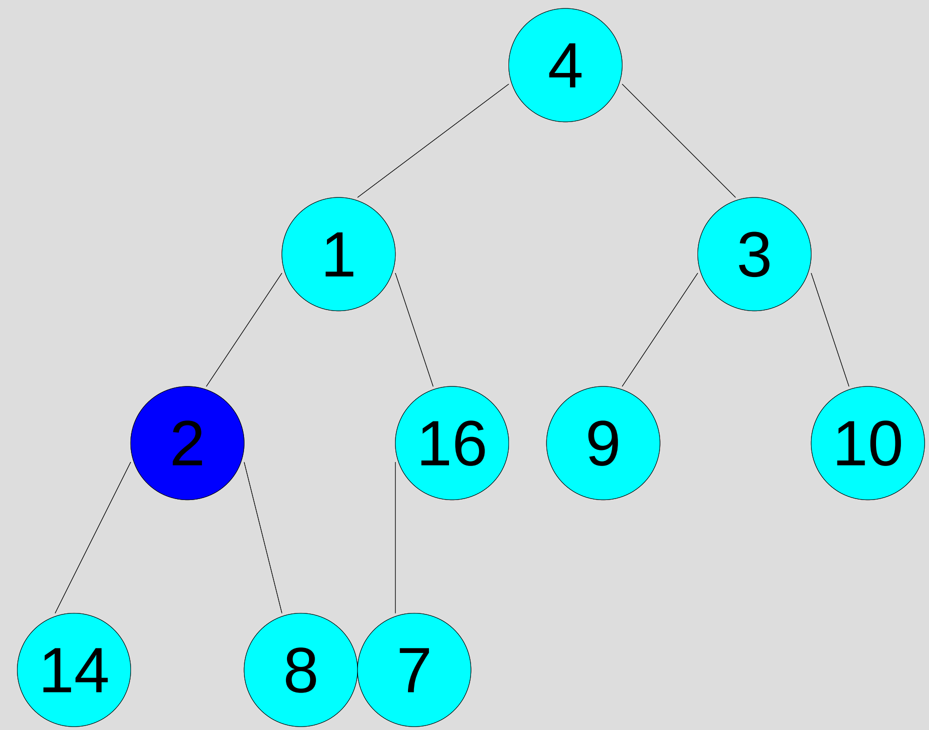
  for i ← $\lfloor$comprimento[A/2]$\rfloor$ **downto** 1

  MAX-HEAPIFY(A,i)

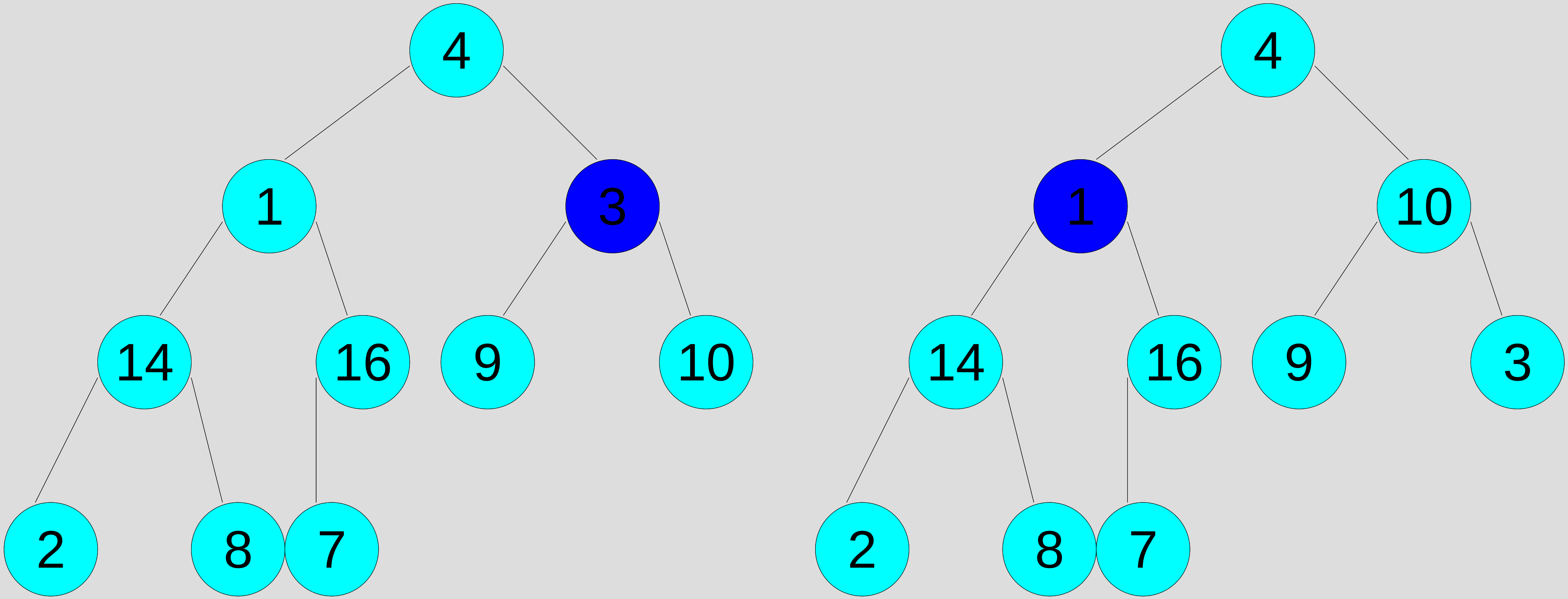
BUILD-MAX-HEAP

4	1	3	2	16	9	10	14	8	7

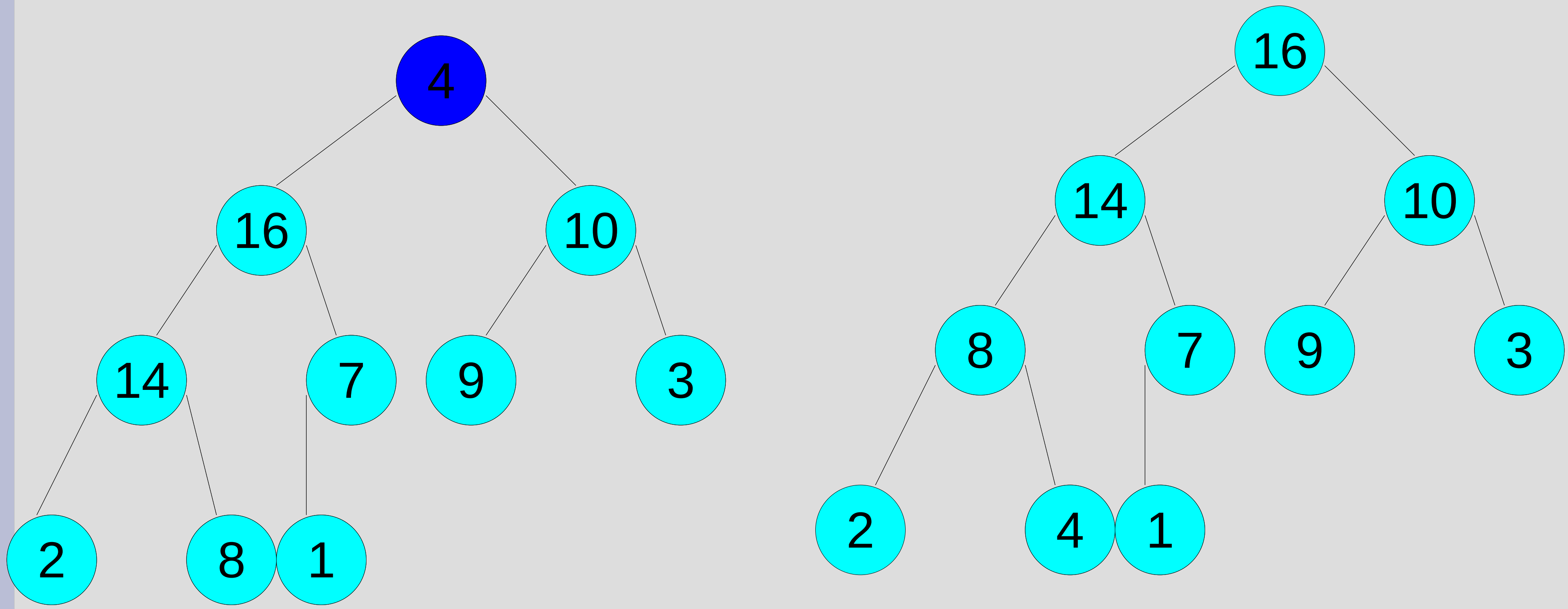




BUILD-MAX-HEAP



BUILD-MAX-HEAP



Heap-Sort

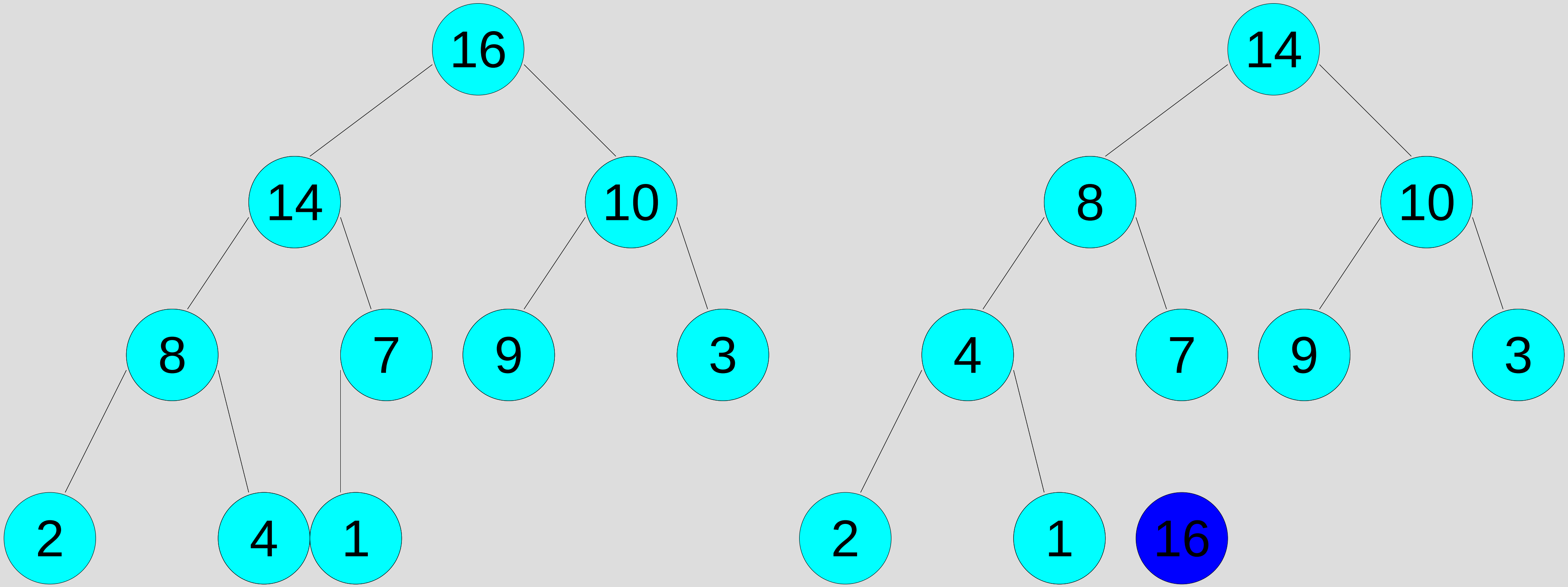
O algoritmo heapsort começa usando BUILD-MAX-HEAP para construir um heap no arranjo de entrada A[1..n], onde n = comprimento[A].

Tendo em vista que o elemento máximo do arranjo está armazenado na raiz A[1], ele pode ser colocado em sua posição final correta, trocando-se esse elemento por A[n].

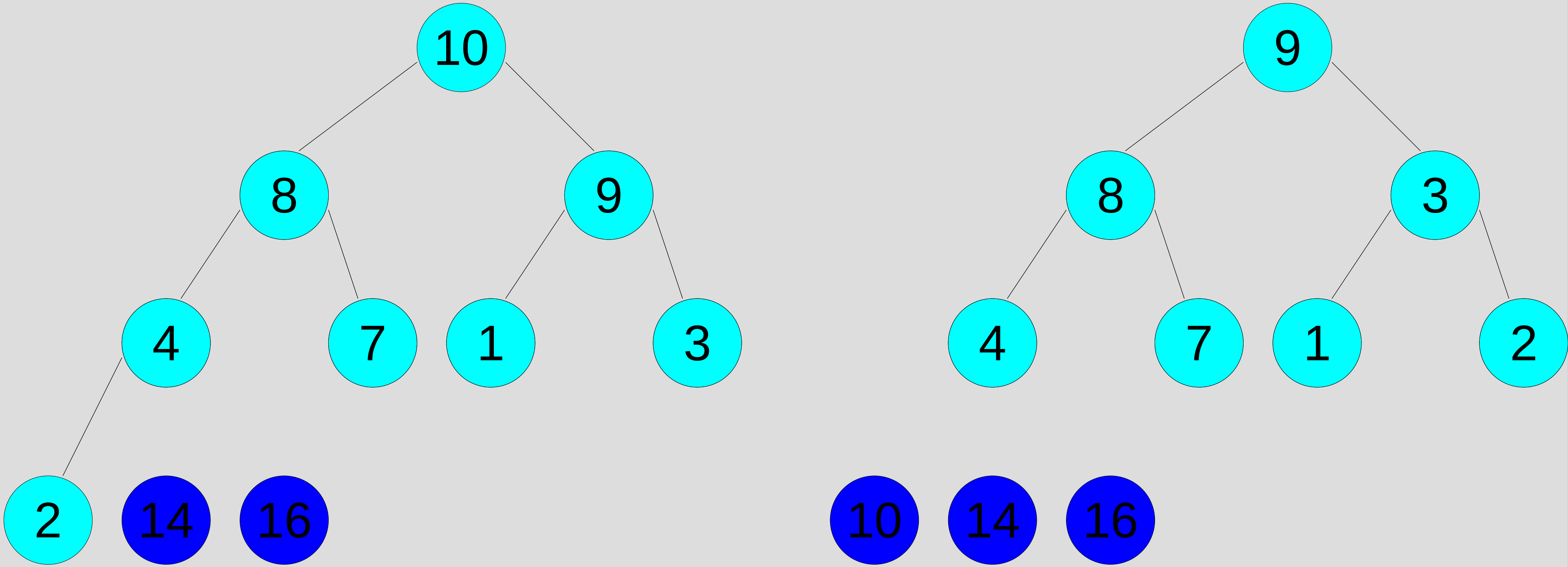
Heap-Sort

```
HEAPSORT(A)
  BUILD-MAX-HEAP(A)
  for i ← comprimento[A] downto 2
       trocar A[1] ↔ A[i]
       tamanho-do-heap[A] ← tamanho-do-heap[A]-1
       MAX-HEAPIFY(A,1)
```

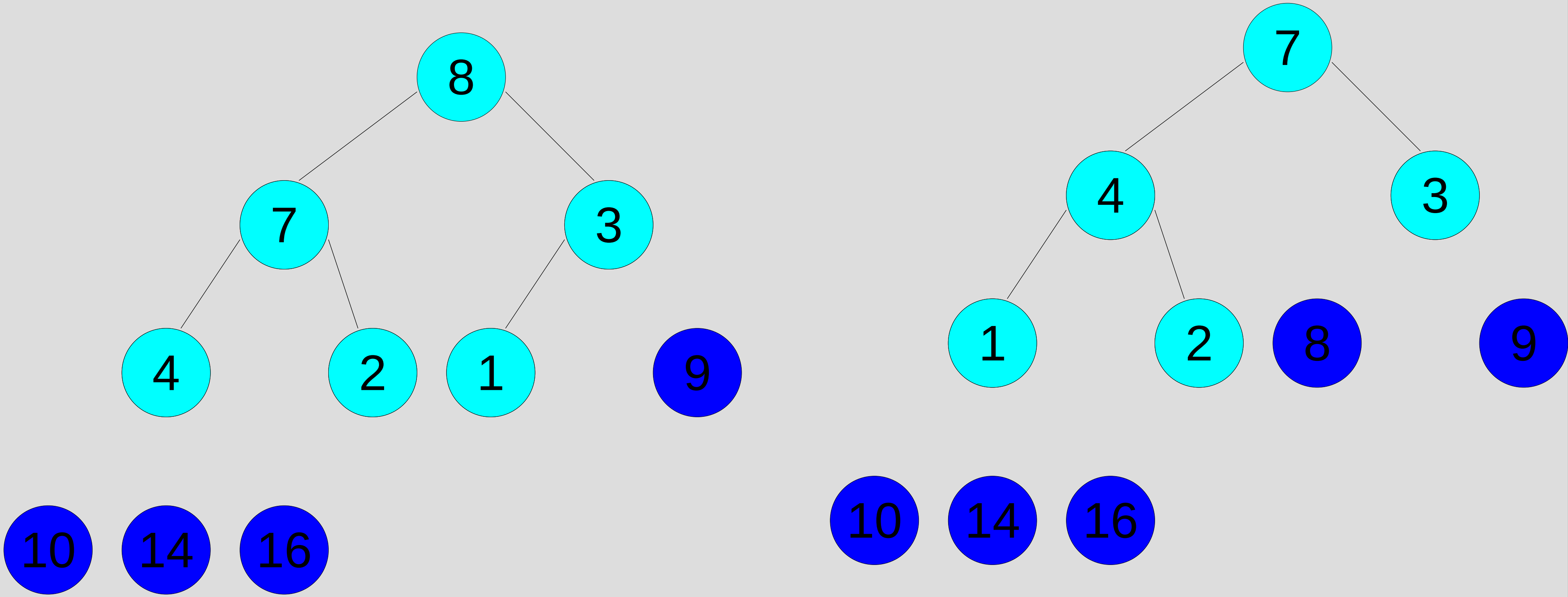
Heap-Sort



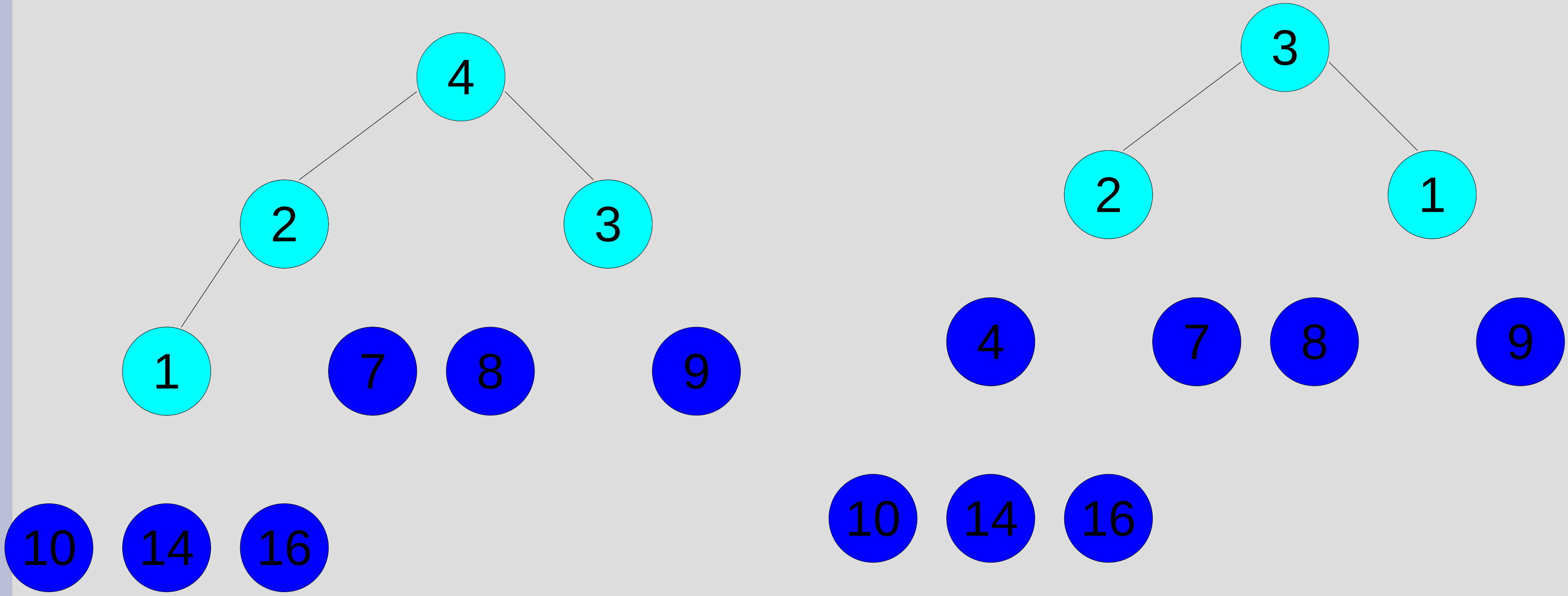
Heap-Sort



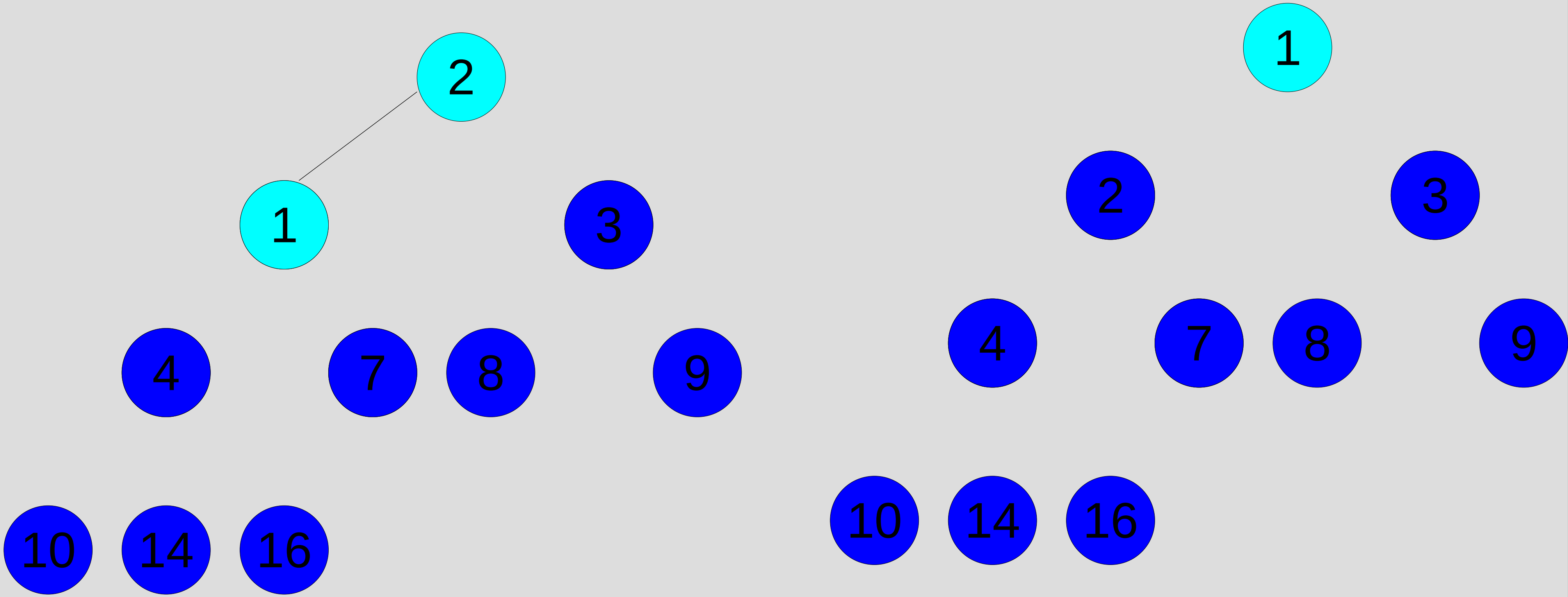
Heap-Sort



Heap-Sort



Heap-Sort



1	2	3	4	7	8	9	10	14	16

Slides baseados no livro **Algoritmos, Teoria e Prática**, de Cormen, T.H; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L. e Stein, C.