



Árvores AVL

Slides baseados no material disponível em:
<http://wiki.icmc.usp.br/images/8/8a/ArvoresAVL.pdf>



Árvores AVL

- Altura de uma árvore binária (AB): igual à profundidade, ou nível máximo, de suas folhas
- A eficiência da busca em árvore depende do seu balanceamento
- Algoritmos de inserção e remoção em ABB não garantem que a árvore gerada a cada passo seja balanceada
- Pergunta: Vale a pena balancear uma ABB de tempos em tempos?

Árvore Binária de Busca Aleatória

- Nós externos: potenciais descendentes dos nós folha (não estão, de fato, na árvore)
- Uma árvore A com n chaves possui $n+1$ nós externos
- Uma inserção em A é considerada 'aleatória' se
- ela tem probabilidade igual de acontecer em qualquer nos $n+1$ intervalos
- Uma ABB aleatória com n chaves é uma árvore resultante de n inserções aleatórias sucessivas em uma árvore inicialmente vazia

Árvore Binária de Busca Aleatória

- Para uma ABB 'aleatória', foi mostrado que o número esperado de comparações para recuperar um registro qualquer é cerca de $1,39 \cdot \log_2(n)$.
 - ou seja, 39% pior do que o custo do acesso em uma árvore perfeitamente balanceada
- Isto é: o balanceamento a cada operação aumenta o tempo e garante um desempenho melhor que numa árvore aleatória de, no máximo, 39% (o pior caso é muito raro!)
- Essa estratégia é aconselhável apenas se o número de buscas for muito maior do que o de inserções.
- A conservação do balanceamento pode ser mais simples se relaxarmos a condição de perfeitamente balanceada para balanceada apenas.

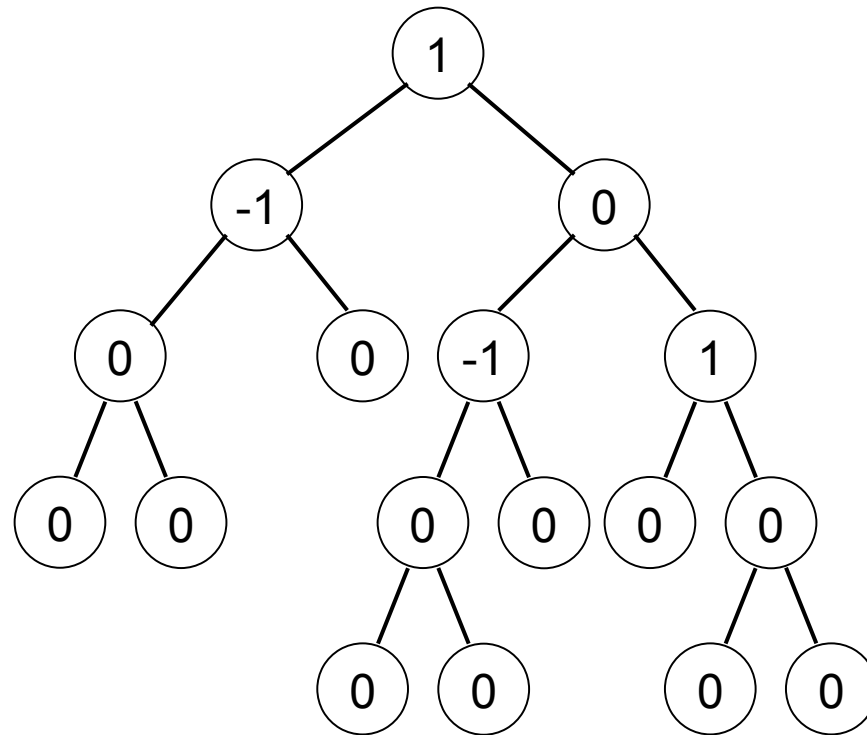


Árvores AVL

- Árvore AVL: ABB na qual as alturas das duas sub-árvores de todo nó nunca diferem em mais de 1. Ou seja, é uma ABB Balanceada.
- Seja o Fator de Balanceamento de um Nó (FB) a altura de sua sub-árvore direita menos a altura de sua sub-árvore esquerda
- Em uma árvore AVL todo nó tem FB igual a 1, -1 ou 0



Árvores AVL - Exemplo



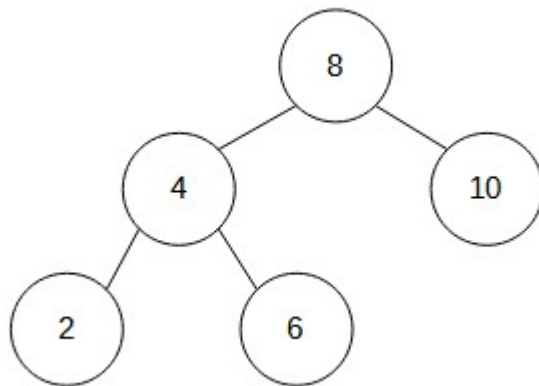


Árvores AVL

- Para manter uma árvore balanceada é necessário aplicar uma transformação na árvore tal que:
 - O percurso in-ordem na árvore transformada seja igual ao da árvore original (isto é, a árvore transformada continua sendo uma ABB);
 - A árvore transformada fique balanceada (todos os nós com $FB = -1, 0$ ou 1).

Árvores AVL

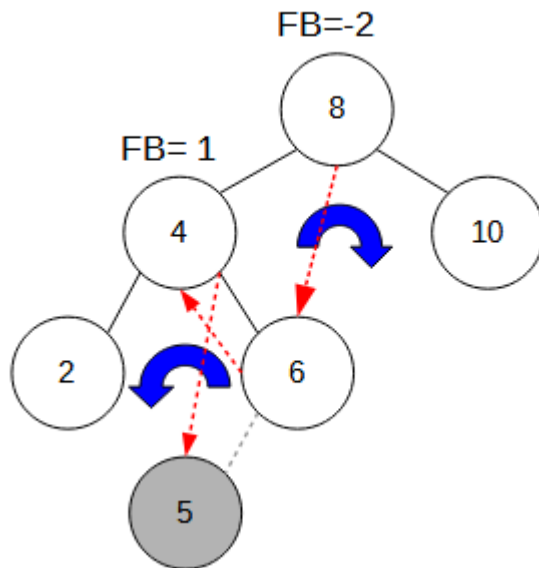
- Numa AVL, a inserção é feita na posição adequada, e depois verifica-se se houve desbalanceamento.
- Veja o que pode acontecer a cada inserção:



- As chaves 9 e 11 não violam o balanceamento (até melhoram!)
- As chaves 1, 3, 5 ou 7 violam.

AVL: dois casos de rebalanceamento

- TIPO 1: a raiz de uma sub-árvore tem $FB=2$ (ou -2) e tem um filho com $FB=-1$ (ou 1), i.e. FB com sinal oposto ao do pai.



Inserção de 5!

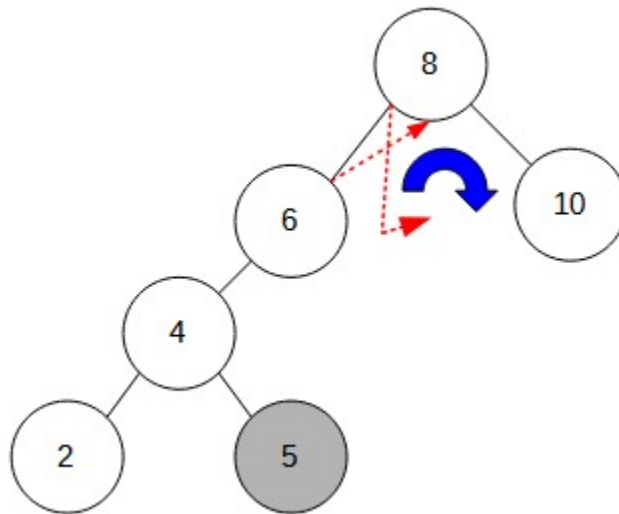
Como rebalancear?

Solução: 2 Rotações:

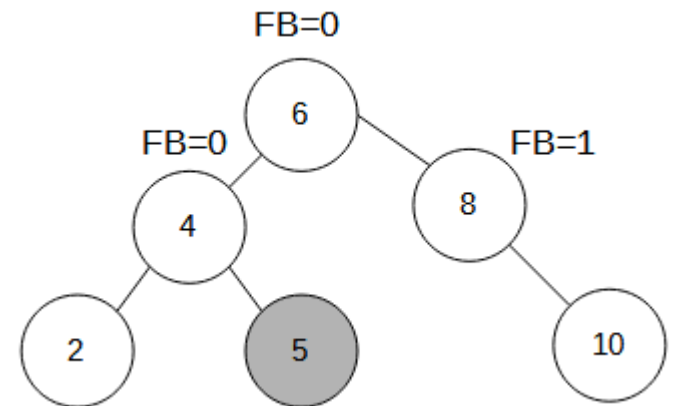
- 1) Rotação à esquerda de 4
- 2) Rotação à direita de 8

AVL: rotação esquerda-direita

- Rotação à esquerda de 4



- Rotação à direita de 8



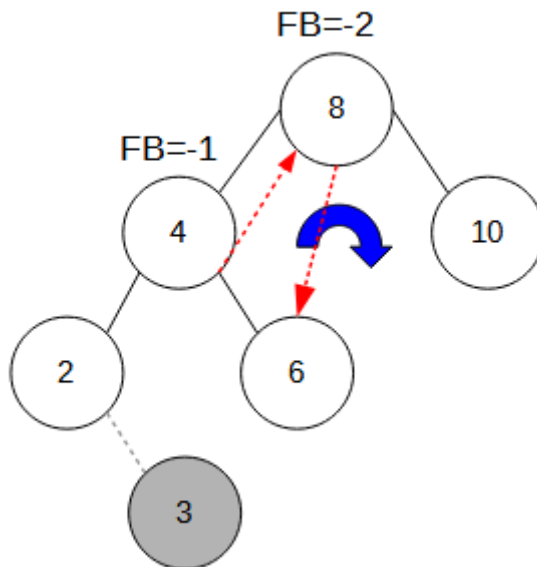


AVL Tipo 1 - Resumo

- Requer uma rotação dupla: ESQUERDA-DIREITA ou DIREITA-ESQUERDA:
 1. Rotacionar o nó com $FB = -1$ (ou 1) na direção apropriada, i.e., se FB negativo, para a direita; se positivo, para a esquerda.
 2. Rotacionar o nó com $FB = -2$ (ou 2) na direção oposta.

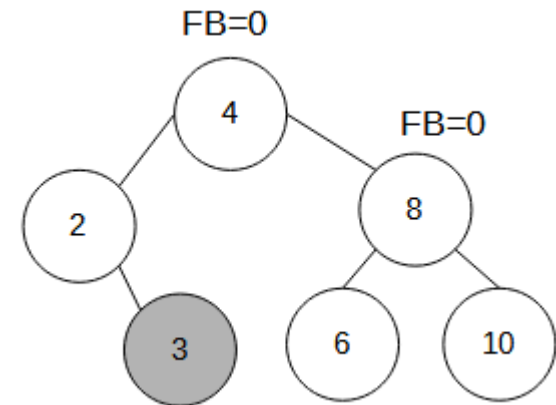
AVL: dois casos de rebalanceamento

- Tipo 2: A raiz de uma subárvore tem $FB = -2$ (ou 2) e tem filho com $FB = -1$ (ou 1), i.e., com mesmo sinal do pai.



Inserção de 3

Solução: Uma Rotação simples à direita do nó 8





AVL Tipo 2 - Resumo

- Rotacionar uma única vez o nó de FB = -2 ou 2:
 - se negativo: à direita;
 - se positivo: à esquerda.



Inserção em AVL: Resumo

- A cada inserção, verificar se balanceamento foi conservado.
- Em caso negativo (se algum nó ficou com FB igual a 2 ou -2), verificar qual caso se aplica (Tipo 1 ou Tipo 2).
- Efetuar as operações de rotação adequadas.



Remoção em AVL

- Primeiro caso
 - Rotação simples em R ($FB=2$ ou -2) com filho com fator de balanceamento de mesmo sinal (1 ou -1) ou zero
 - Se R negativo, rotaciona-se para a direita; caso contrário, para a esquerda



Remoção em AVL

- Segundo caso
 - Rotação dupla quando R ($FB=2$ ou -2) e seu filho (1 ou -1) têm fatores de balanceamento com sinais opostos
 - Rotaciona-se o filho para o lado do desbalanceamento do pai
 - Rotaciona-se R para o lado oposto do desbalanceamento



Pseudo-Código: Rotações Simples

- **Rotação Simples a Esquerda**

p aponta para o nó desbalanceado

q = **right**(**p**);

hold = **left**(**q**);

left(**q**) = **p**;

right(**p**) = **hold**;

p = **q**;

- **Rotação Simples a Direita**

p aponta para o nó desbalanceado

q = **left**(**p**);

hold = **right**(**q**);

right(**q**) = **p**;

left(**p**) = **hold**;

p = **q**;